Titre général : Cours élémentaire de mécanique industrielle
Auteur : Gouard, E.
Titre du volume :

Mots-clés : Génie mécanique * France * 1870-1914
Description : 1 vol. (XVI-328-[4] p.) ; 21 cm
Adresse : Paris : H. Dunod et E. Pinat, 1910
Cote de l'exemplaire : 12 De 60.1

URL permanente : http://cnum.cnam.fr/redir?12DE60.1

COURS ÉLÉMENTAIRE

DE MÉCANIQUE INDUSTRIELLE

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

BIBLIOTHÈQUE DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE

MM. Michel LAGRAVE, Inspecteur général honoraire de l'Enseignement technique
Emile PARIS, Inspecteur général de l'Enseignement technique
SECRÉTAIRE GÉNÉRAL : Georges BOURREY, Inspecteur de l'Enseignement technique

COURS ÉLÉMENTAIRE

DE

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE

PRINCIPES GÉNÉRAUX, APPLICATIONS, EXERCICES PRATIQUES

PAR

E. GOUARD
Professeur à l'École pratique d'industrie et des mécaniciens de marine de Boulogne-sur-Mer

G. HIERNAUX
Professeur à l'École pratique d'industrie de Reims
Licencié ès sciences mathématiques

Anciens élèves de la section normale industrielle de Châlons-sur-Marne

PRÉFACE DE M. **FARJON**
Ancien élève de l'École polytechnique, Inspecteur de l'Enseignement technique

---

A l'usage des Écoles pratiques de Commerce et d'Industrie
(rédigé conformément aux programmes du 28 août 1909)
des Écoles nationales professionnelles, des Écoles des mécaniciens
de la marine, etc.

TOME I

PARIS
H. DUNOD ET E. PINAT, ÉDITEURS
47 ET 49, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS (VIe ARRt)

1910

PROGRAMME OFFICIEL
DU COURS ÉLÉMENTAIRE DE MÉCANIQUE INDUSTRIELLE
DES ÉCOLES PRATIQUES
DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

FIXÉ PAR ARRÊTÉ MINISTÉRIEL DU 28 AOUT 1909

PRINCIPES DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Corps au repos ; corps en mouvement. Exemples. — Mouvement de translation; mouvement de rotation.

Principe de l'inertie ; le déduire de faits d'observation.

Notion de force. — Forces motrices. — Résistance à l'action des forces. — Idée des résistances de frottement.

Obstacle à l'action d'une force ; réaction. — Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

Objet de la mécanique.

Eléments d'une force. — Comparaison et mesure des forces. — Peson à ressort ; dynamomètre de Poncelet. — Graduation des dynamomètres. — Représentation graphique d'une force.

Expliquer qu'on peut transporter le point d'application d'une force agissant sur un corps en un point quelconque de sa direction sans modifier l'effet de cette force.

Résultante de plusieurs forces.

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES

a) *Forces de même direction appliquées au même point d'un corps.*

Forces de même direction et de même sens. Exemples. — Résultante.

Forces de même direction et de sens opposé. Exemples. — Résultante.

b) *Forces concourantes.*

Exemples de forces concourantes. — Composition de deux forces concourantes. — Direction et intensité de leur résultante ; démonstration expérimentale. — Résultante de plus de deux forces concourantes appliquées au même point. — Détermination, par une construction graphique, de la direction et de l'intensité de la résultante de deux ou de plus de deux forces concourantes. Applications. — Equilibre de forces concourantes.

Montrer ce que devient la résultante de deux forces concourantes quand on fait varier l'angle que forment ces deux forces.

Moyen de remplacer une force par plusieurs autres appliquées au même point, mais de directions différentes. Applications.

c) *Forces parallèles.*

Exemples de forces parallèles. — Résultante de deux forces parallèles et de même sens; démonstration expérimentale. — Détermination par le calcul et par une construction graphique (1) de l'intensité et du point d'application de la résultante de deux forces parallèles et de même sens. Applications. — Résultante de plus de deux forces parallèles et de même sens.

Moyen de remplacer une force par plusieurs autres parallèles et de même sens.

Résultante de deux forces parallèles et de sens opposés. — Détermination, par le calcul et par une construction graphique, de l'intensité et du point d'application de la résultante de deux forces parallèles et de sens opposés.

Ce qu'on entend par couple.

Résultante de plus de deux forces parallèles agissant les unes dans un sens et les autres dans un sens opposé.

Equilibre de ces forces.

MOMENT DES FORCES

Effet d'une force agissant sur un corps pouvant tourner autour d'un point ou d'un axe. — Bras de levier de la force. — Montrer expérimentalement que cet effet est proportionnel : 1° au bras de levier de la force; 2° à l'intensité de cette force. — Moment d'une force par rapport à un point. — Sens de l'action d'un moment.

Application des moments à l'équilibre d'un levier.

Quand plusieurs forces concourantes, que nous supposerons situées dans un même plan, agissent à l'une des extrémités d'un levier pouvant osciller dans ce plan, l'effet produit par ces forces est égal à l'effet produit par leur résultante. En d'autres termes, la somme algébrique des moments de ces forces par rapport à un point du plan est égale au moment de leur résultante par rapport au même point (Théorème de Varignon).

Lorsque plusieurs forces parallèles sont situées dans un même plan, la somme algébrique de leurs moments par rapport à un point du plan est égale au moment de leur résultante par rapport à ce même point.

PESANTEUR, CENTRE DE GRAVITÉ. — ÉQUILIBRE DES CORPS SOLIDES SOUS L'ACTION DE LA PESANTEUR

Pesanteur. — Point d'application de la force de la pesanteur. — Centre de gravité.

(1) On pourra appliquer les méthodes de la statique graphique en admettant les constructions et les résultats relatifs au polygone des forces et au polygone funiculaire.

Détermination géométrique du centre de gravité : 1° de quelques figures planes pesantes ; 2° de quelques solides géométriques homogènes.

Détermination expérimentale du centre de gravité d'un solide quelconque.

Equilibre, sous l'action de la pesanteur seule, d'un solide suspendu en un de ses points. — Condition d'équilibre. — Equilibre stable, instable, indifférent. Exemples.

Application aux principaux instruments de pesée.

Equilibre d'un corps reposant sur un plan horizontal :

1° Par un ou deux points. Equilibre instable ou indifférent. Exemples.

2° Par trois points non en ligne droite. — Base de sustentation. — Conditions d'équilibre et de stabilité. — Pression sur les points d'appui. Applications.

3° Par plus de trois points formant un polygone.

DU MOUVEMENT EN GÉNÉRAL. TRAVAIL DES FORCES

Définitions. — Mouvement rectiligne continu ou alternatif. — Mouvement curviligne continu ou alternatif. — Mouvement uniforme. — Mouvement varié. — Exemples de chacun de ces mouvements tirés de mécanismes que nous voyons journellement fonctionner.

Mouvement uniforme.

Vitesse dans le mouvement rectiligne uniforme. — Choix des unités. Exemples. — Loi des espaces. — Représentation graphique du mouvement uniforme. — Graphiques des trains.

Mouvement de rotation uniforme. — Axe de rotation. — Exemples : volants, poulies, roues d'engrenage. — Vitesse d'un mouvement de rotation, en nombre de tours par unité de temps. — Vitesse linéaire d'un point situé à une distance donnée de l'axe. — Vitesse angulaire. — Rapport des vitesses, en nombres de tours, de deux poulies réunies par une courroie, ou de deux roues s'entraînant par friction ou par dents d'engrenage.

Travail des forces.

Définition du travail mécanique. — Cheval tirant une voiture. — Eléments du travail d'une force : intensité, chemin parcouru par son point d'application. — Exemples de travaux effectués. — Travail développé dans un mouvement de rotation. Cheval attelé à la flèche d'un manège. Ouvrier agissant sur la manivelle d'un treuil.

Mesure du travail : unité. — Expression numérique du travail en kilogrammètres. Exemples. — Cas où le chemin parcouru et la force n'ont pas la même direction. — Représentation graphique du travail d'une force. — Travail effectué dans un temps donné. — Puissance. Unités de puissance : cheval-vapeur et poncelet.

Applications à quelques machines simples des principes de mécanique étudiés.

Ce qu'est une machine simple. Son emploi. — Forces appliquées aux machines simples : puissance, résistance. — Prendre le levier comme exemple.

Machine simple à l'état de repos. — Condition d'équilibre. — Machine simple à l'état de mouvement uniforme. — Chemins parcourus par les points d'application de la puissance et de la résistance. — On insistera sur ce principe : *ce qu'on gagne en force, on le perd en chemin parcouru.* — Travail moteur. — Travail résistant. — Le travail moteur dépensé est égal au travail résistant. — Une machine ne peut rendre plus qu'on ne lui fournit; elle ne crée rien. — Impossibilité du mouvement perpétuel. — Travail utile. — Rendement.

Décrire les quelques machines simples suivantes, et, pour chacune d'elles, donner la condition d'équilibre, et montrer la transmission du travail en la supposant animée d'un mouvement uniforme.

Levier. — Trois genres de leviers. — Poinçonneuse à levier. — Chèvre pour soulever les voitures.

Poulie fixe. — Poulie mobile. — Moufle. — Palan. — Applications.

On négligera les résistances de frottement.

Mouvement varié.

Exemples de mouvements variés. — Vitesse à un moment donné d'un mobile animé d'un mouvement varié. — Vitesse moyenne.

Mouvement uniformément varié.

a) *Mouvement uniformément accéléré.* Exemples.

Vitesse. — Accélération. — Loi des vitesses. — Loi des espaces. — Formules.

Vérifier ces lois au moyen de la machine d'Atwood.

Représentation graphique du mouvement uniformément accéléré.

b) *Mouvement uniformément retardé.* Exemples.

Formules et représentation graphique.

CHUTE DES CORPS [1]

La pesanteur est une force constante qui, agissant sur un corps libre de se mouvoir, lui communique un mouvement uniformément accéléré. — Le contrôler avec l'appareil du général Morin. — Valeur de l'accélération.

Corps lancé verticalement de bas en haut.

Montrer avec la machine d'Atwood que l'accélération est proportionnelle à la force constante qui agit sur le mobile.

Proportionnalité entre les poids d'un même corps, en différents points de la terre, et les accélérations que lui communique la pesanteur. — Masse

[1] On fera abstraction de la résistance de l'air.

d'un corps. — Expliquer pourquoi les corps tombent également vite dans le vide.

PRINCIPE DE LA CONSERVATION DU TRAVAIL

Travail communiqué à un corps sur lequel agit une force constante, expression de ce travail en fonction de la force et du chemin parcouru. — Ce que devient ce travail quand la force n'a que l'inertie à vaincre. — Tout corps en mouvement possède du travail emmagasiné. Exemples. — Expression de ce travail en fonction de la masse du corps et de sa vitesse. — Puissance vive. — Force vive. — Applications : Marteau frappant le fer; sonnette à enfoncer les pieux; projectile lancé contre un corps résistant.

Force centrifuge.

Faits d'observation. Expériences. — Force centripète et force centrifuge. — Expression de la force centrifuge.

Applications industrielles de la force centrifuge : Essoreuse, pompe rotative, ventilateur, modérateur de Watt.

Effets dus à la force centrifuge : position d'un cheval galopant sur une piste circulaire ; renversement d'une voiture qui tourne avec une vitesse trop grande. — Nécessité d'incliner, dans les parties courbes, la voie d'une ligne de chemin de fer, d'équilibrer une roue animée d'un mouvement rapide de rotation, etc.

Accidents dus à la force centrifuge.

Puissance vive emmagasinée dans un corps animé d'un mouvement de rotation, d'un volant par exemple.

Emploi des volants dans la régularisation de la marche des machines.

PENDULE SIMPLE ET PENDULE COMPOSÉ

Ce qu'est un pendule simple. — Oscillations sous l'action de la pesanteur. — Isochronisme des oscillations. — Durée de l'oscillation en fonction de la longueur du pendule.

Pendule composé. — Application du pendule à la mesure du temps. — Horloges.

MOUVEMENTS COMPOSÉS

Principe de l'indépendance des mouvements simultanés. — Exemples. — Composition de deux mouvements rectilignes et uniformes. Vitesse résultante du mobile considéré.

Composition d'un mouvement rectiligne et uniforme et d'un mouvement uniformément accéléré. — Trajectoire d'un projectile lancé horizontalement.

RÉSISTANCES PASSIVES A L'ACTION DES FORCES

Montrer par des exemples ce que sont les résistances passives, les expliquer. — Différentes sortes de résistances passives.

a) *Frottement ou résistance au glissement.* — Enoncé et démonstration expérimentale des lois du frottement. *A défaut de l'appareil de Coulomb, on fera glisser sur un marbre, par l'intermédiaire d'un peson à ressort, un bloc de fonte dont les faces, également rabotées, auront des étendues différentes.*

Diminution de la résistance de frottement par le polissage des surfaces en contact et par les lubrifiants.

Coefficient de frottement. — Principaux coefficients de frottement. — Applications diverses du frottement. — Effets nuisibles. — Effets utiles. Frein. — Point d'appui dû à la résistance au frottement pendant la marche. — Marche sur une surface glissante.

Travail absorbé par le frottement.

Frottement des tourillons sur leurs coussinets. — Travail absorbé.

b) *Frottement de roulement.* — Résistance au roulement. — Enoncé et démonstration expérimentale de la résistance au roulement.

Applications : Transport de fardeaux sur rouleaux; paliers à billes ; roues des voitures.

MOUVEMENTS USUELS. ÉTUDE DE QUELQUES MÉCANISMES ET MACHINES SIMPLES

Principaux mouvements employés dans l'industrie. — Exemples.

Transformation d'un mouvement en un autre. — Diverses combinaisons. — Dans une machine, on distingue le récepteur, l'opérateur ou l'outil, et les mécanismes de transformation de mouvement.

Mécanismes produisant les transformations de mouvements :

I. *Rectiligne continu en rectiligne continu.*

Poulie fixe, poulie mobile, moufle, palan, palan différentiel. — *On se contentera de rappeler les quelques mécanismes déjà étudiés.*

Plan incliné. Coin, clavette.

II. *Circulaire continu en circulaire continu.*

a) Poulies et courroie. — Longueur de la courroie. — Poulie menante. Poulie menée. — Rapport de leurs vitesses en nombre de tours. — Applications.

1° Poulies et courroie pour arbres non parallèles. — Equipage de poulies. — Rapport des vitesses de la poulie menante et de la poulie menée ;

2° Poulies et courroie pour arbres non parallèles. — Condition de stabilité de la courroie sur les poulies. — Arbres placés à angle droit. — Arbres dans une position quelconque l'un par rapport à l'autre. — Poulies-guides.

b) Roues de friction. — Rapport des vitesses. — Roues cylindriques de friction. — Applications.

Cônes de friction. — Essoreuses.

Avantages et inconvénients des roues de friction.

c) Roues dentées. — Pas. — Notation diamétrale. — Rapport des vitesses. — Sens du mouvement de rotation. — Emploi d'une roue intermédiaire.

Roues cylindriques. — Roues coniques [1].

[1] *L'étude du tracé des dents se fera en dessin.*

Equipages ou trains de roues dentées. Rapport des vitesses de la roue menante et de la roue menée. — Applications. — Treuil à engrenages; condition d'équilibre. — Rapport des chemins parcourus.

Roues et vis sans fin. — Rapport des vitesses. — Emploi de la vis sans fin. Compteurs de tours.

III. *Circulaire continu en rectiligne continu.*

Crémaillère et pignon dentés. — Cric. — Rapport des chemins parcourus par le bouton de la manivelle et la tête de la crémaillère.

Vis et écrou. — Rapport des vitesses. — Presse à vis ; vérin. — Calcul de la pression.

Vis différentielle de Prony. — Rapport des vitesses ; vis à pas contraires.

IV. *Circulaire continu en rectiligne alternatif.*

Bielle et manivelle. — Représentation graphique de la loi des espaces parcourus par l'extrémité de la bielle. — Application aux pompes.

Excentrique circulaire à collier.

Manivelle à coulisses.

Cames. — Tige guidée et galets. — Tracé général des cames. — Etant donnée la courbe des espaces que doit parcourir le galet, déterminer le profil de la came qui doit entretenir ce mouvement. — Faire le tracé réciproque.

Came en cœur. — Came Morin. — Cames à chute. — Applications des cames.

V. *Rectiligne alternatif en circulaire continu.*

Piston d'un moteur commandant un système bielle et manivelle. — Point mort. — Volant.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Déformation d'un corps sous l'action d'une force. — Limite d'élasticité.

Le professeur se bornera à définir les principales sortes de déformations, et il montrera, par quelques exemples, sur des cas simples, et par l'emploi de formules pratiques, comment on peut déterminer les dimensions d'une pièce capable de résister à un effort donné.

MOTEURS

a) *Moteurs animés.*

Repos nécessaire aux moteurs animés. — Travail que peut fournir l'homme par jour suivant son mode d'action.

Travail des animaux de trait. — Divers modes d'action. Manège, charrois, etc. — Quantité de travail qu'ils peuvent fournir.

b) *Moteurs hydrauliques.*

Chutes d'eau naturelles. — Etablissement d'une chute artificielle sur un cours d'eau.

Puissance d'une chute d'eau.

Description sommaire d'une roue à aubes, de la roue à augets et d'une turbine. — Rendement d'un moteur hydraulique.

c) *Machines à vapeur.*

Description d'un générateur de vapeur. — Appareils de sûreté.

Description d'une machine à vapeur à distribution par tiroir. — Action de la vapeur sur le piston. — Travail de la vapeur. — Condenseur.

Description succincte d'une turbine à vapeur.

Indépendamment de ces notions générales de mécanique données à tous les élèves de 3e année, les élèves mécaniciens, pendant le temps prévu à l'horaire pour l'étude de spécialités, recevront encore des leçons supplémentaires de mécanique appliquée portant principalement sur la résistance des matériaux et, suivant les besoins industriels de la région, soit sur les moteurs hydrauliques, soit sur les moteurs à vapeur ou les moteurs à gaz, soit sur les moteurs à essence et les principaux mécanismes qu'on trouve dans les automobiles.

PRÉFACE

Les Écoles pratiques d'Industrie fondées par le Ministère du Commerce et de l'Industrie avec le concours des Municipalités, ont pour objet de former des ouvriers. Ce sont des Écoles du premier degré, écoles des soldats de l'armée du travail. Les sous-officiers, les officiers et le grand Etat-Major sont éduqués ailleurs.

Leurs élèves proviennent des Écoles primaires, ils y sont admis à partir de l'âge de douze ans. Il est donc évident que le bagage intellectuel de ces jeunes gens est des plus modestes et qu'ils ne sont guère préparés à s'assimiler des notions scientifiques de quelque étendue.

Mais, d'autre part, les progrès continus des diverses industries, l'apparition de certaines branches nouvelles particulièrement délicates, exigent non seulement de la part des chefs d'atelier et des contremaîtres, mais encore des ouvriers eux-mêmes, un ensemble de connaissances ignorées de leurs prédécesseurs, principalement en ce qui touche l'électricité et la mécanique. De plus en plus l'empirisme, parfois si ingénieux de l'ancien compagnon, doit céder la place à la précision scientifique. Le travailleur moderne doit donc, à ce point de vue, recevoir une éducation appropriée.

Et c'est ainsi que l'ancienne démarcation entre l'ingénieur, « cerveau » de l'usine, et l'ouvrier, s'est grandement atténuée. L'ingénieur, pour remplir complètement son rôle, doit être initié au travail manuel, l'ouvrier de son côté doit posséder un ensemble de notions théoriques, et ce rapprochement des deux facteurs de la production industrielle ne peut qu'amener, à tous égards, les meilleurs résultats.

De là est née la nécessité d'instaurer pour nos jeunes apprentis un enseignement spécial, et, on peut dire nouveau dans une certaine mesure. Ses programmes doivent être établis de façon à répondre à un double but : donner aux élèves la culture scientifique dont ils ont besoin, mais sans jamais perdre de vue les applications qu'ils auront à en faire, et en évitant toute démonstration théorique dépassant leur niveau.

C'est à ce point de vue que se sont placés MM. E Gouard et G. Hiernaux en rédigeant le *Cours de Mécanique industrielle* que je suis heureux de présenter aux maîtres et aux élèves de nos Écoles pratiques. L'enseignement de la mécanique est un de ceux qui se passent le moins aisément du concours des hautes mathématiques : comment dès le début définir rigoureusement la vitesse et l'accélération sans recourir aux infiniment petits! Nos auteurs s'en sont tirés à merveille : à côté de démonstrations très élémentaires, mais d'une rigueur suffisante, ils ont en effet toujours indiqué les modes de vérification expérimentale du principe énoncé.

Les élèves d'ailleurs, partageant la durée de leurs travaux entre la classe et l'atelier — sorte de laboratoire mécanique que les maîtres devront constamment utiliser — pourront souvent faire par eux-mêmes ces vérifications, sur l'outillage mis à leur disposition. Il en ira de même pour d'autres parties de l'enseignement de nos Écoles; les mathématiques, la physique, la technologie et le dessin.

C'est cette concomitance de la leçon didactique de la classe et de la leçon de choses à l'atelier qui constitue l'originalité de notre enseignement.

MM. Gouard et Hiernaux l'ont parfaitement compris; ils ont su rendre le cours de mécanique envisagé de cette manière, aussi attrayant que profitable. Aussi je suis certain que leur ouvrage sera favorablement accueilli.

Il est fréquemment question, en ces temps, de ce qu'on a appelé « la crise de l'apprentissage ». Ces plaintes ne datent pas d'hier. Si l'on s'en rapporte à un passage de Diderot souvent cité, cette crise remonterait à plus d'un siècle, à l'époque de la suppression des jurandes et des maîtrises et Turgot serait ainsi le premier coupable. Mais, nous assistons bien plutôt à une « crise de l'adolescence » qu'à une crise de l'apprentissage proprement dit. Nos lois républicaines, tutélaires pour le jeune âge, ont fermé l'usine à l'enfant. Nous devons en retour lui ouvrir l'École, l'École professionnelle, où nous lui mettrons un métier dans la main par une suite d'exercices et d'études rationnellement gradués qui l'armeront et qui le fortifieront dans les luttes pour la vie.

C'est là un vaste problème social que l'École pratique, dont l'action salutaire ne fait que commencer, est appelée à résoudre.

Les auteurs de ce livre, pénétrés de leur rôle d'éducateurs de l'ouvrier dans notre démocratie laborieuse, apportent leur pierre à l'édifice social.

Je leur souhaite tout le succès qu'ils méritent.

FERDINAND FARJON,
Ancien élève de l'Ecole polytechnique,
Inspecteur de l'Enseignement technique,
Membre du Conseil supérieur de l'Enseignement technique.

Paris, le 15 mars 1910.

Au moment de mettre sous presse, nous tenons à rendre un respectueux hommage de profonde gratitude à tous ceux : Inspecteurs, Directeurs et Professeurs; Industriels, Constructeurs, Ingénieurs, Chefs de travaux, Contremaîtres et Artisans, qui, par leurs conseils et par leurs documents, ont facilité notre tâche.

Nous remercions aussi bien sincèrement les éditeurs du soin qu'ils ont apporté à la publication de cet ouvrage.

Pour satisfaire le besoin naturel qu'a l'enfant de connaître le pourquoi de toute chose, nous avons cru devoir conserver dans le cours quelques questions théoriques.

Nos démonstrations très élémentaires s'appuient uniquement sur les connaissances d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie comprises dans les nouveaux programmes. Elles illustreront admirablement les classes de mathématiques.

Cependant nous avons distingué en petits caractères tout ce qui peut être laissé de côté par les élèves moins avancés et par ceux qui manquent de temps.

A nos collègues d'apprécier nos méthodes !

Leurs réflexions et celles de nos divers lecteurs seront toujours les bienvenues.

E. G. et G. H.

MÉCANIQUE

I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1. État de repos ou état de mouvement d'un corps. — Lorsqu'un corps occupe la même position par rapport à la grande généralité des corps qui l'entourent, on dit qu'il est à l'état de **repos.** Ex. : l'encrier placé sur une table ; le monument qui orne une place publique ; le pont en pierres qui relie les deux rives d'un fleuve.

Un corps est en **mouvement** lorsque tout ou partie de ses points sont successivement à des distances différentes des objets environnants. Ex. : un voyageur en promenade, un cheval au trot, un train en marche, un projectile.

Tout corps en mouvement est un **mobile.**

Les différentes positions de l'espace occupées par un point mobile constituent sa **trajectoire :** c'est une ligne continue, car on ne peut admettre qu'un corps passe d'une position à une autre sans passer par les intermédiaires.

2. Classification des mouvements d'après leurs trajectoires. — Lorsque la trajectoire est une droite, le mouvement est **rectiligne.** Ex. : mouvements d'un corps qui tombe en chute libre, de la tige d'un piston.

Le mouvement est **curviligne** dans tous les autres cas. Ex. : mouvement de la balle du fusil, des points de la tête d'une bielle, d'une vis, d'une poulie, d'un volant.

Dans le cas particulier où la trajectoire est une circonférence, le mouvement est **circulaire.** Ex. : arbres de transmission, roues dentées, plateau de tour.

Un corps qui se déplace de telle sorte que l'une quelconque de ses droites reste toujours parallèle à elle-même est dit en **translation.** Ex. : crémaillère, piston de pompe, chariot de tour, ascenseur, coulisseau de machine à vapeur.

Un mobile est animé d'un mouvement de **rotation** si tous ses points décrivent dans le même temps des circonférences ayant leur centre sur une même droite appelée **axe de rotation.** Ex. : arbre, poulie, volant, roue dentée, came, manivelle, plaque tournante, meule.

Les autres mouvements sont beaucoup plus complexes, bien que généralement ils se composent de une ou plusieurs rotations unies à une ou plusieurs translations. Nous signalerons seulement l'**oscillation** du pendule, qui se compose d'une rotation incomplète alternativement dans un sens et dans l'autre; le **mouvement hélicoïdal** d'une vis, qui se compose d'une rotation et d'une translation parallèle à l'axe ; le **mouvement de roulement** d'une roue de véhicule comprend les mêmes mouvements, mais la translation est perpendiculaire à l'axe de rotation.

3. Principe de l'inertie. — **Un corps à l'état de repos ne peut de lui-même se mettre en mouvement ; un corps en mouvement ne peut de lui-même modifier son mouvement ni revenir à l'état de repos.** Cela revient à dire qu'un corps en mouvement qui ne serait soumis à l'action d'aucune force continuerait à se déplacer suivant une ligne droite en parcourant des espaces égaux pendant des temps égaux.

La première partie de ce principe est généralement admise sans discussion par notre esprit. Si aucune cause ne vient modifier la position d'une caisse placée sur le parquet, on conçoit aisément qu'elle puisse y rester éternellement; témoin ces pyramides d'Egypte, ces monuments orientaux debout depuis plusieurs milliers d'années.

On comprend moins bien la seconde partie, qui semble en contradiction avec les observations journalières; une bille, en effet, lancée sur un parquet, diminue peu à peu de vitesse et s'arrête bientôt ; un projectile, même s'il ne rencontre pas d'obstacle, retombe à terre où il reste à l'état de repos.

Pourtant, si l'on songe que l'arrêt brusque d'un véhicule précipite en avant tous ceux qui l'occupent; si l'on pense qu'à la descente d'un tramway en marche le haut du corps est lancé dans le sens du mouvement alors que les pieds seuls sont immobiles parce qu'ils adhèrent au sol, on comprendra, que le voyageur tend à conserver le mouvement qu'il tient du véhicule et que sa force musculaire ne suffit pas toujours à lui éviter une chute.

D'autre part, certains canons de la marine envoient un projectile à 12.000 mètres malgré la force de la pesanteur qui l'attire vers le centre de la terre. Songeons à quelle distance le boulet serait projeté si, l'action de la pesanteur cessant, le mobile suivait une ligne droite ! Il y aurait encore arrêt cependant ; cela tient à ce que l'air oppose une résistance appréciable aux corps qui le traversent. Lorsqu'un train est lancé à toute allure, il ne suffit pas de ne plus faire agir la vapeur pour l'arrêter ; le mécanicien est dans la nécessité de bloquer les roues à l'aide de freins, et le travail qu'il faut alors développer, travail qui se manifeste par l'échauffement, l'usure, les étincelles, indique assez que le train eût longtemps encore continué sa marche.

4. Forces. — Puisqu'un corps ne peut de lui-même modifier son état de repos ou son état de mouvement, il existe nécessairement des causes extérieures de ces modifications. **On appelle force toute cause capable de mettre un corps en mouvement, de modifier le mouvement d'un corps ou de faire cesser ce mouvement.**

Certaines forces peuvent, suivant les cas, provoquer le mouvement, modifier le mouvement, s'opposer à ce mouvement ou le faire cesser ; ces forces sont appelées impulsives, agissantes ou mouvantes et sont dites **motrices** dans le cas particulier où elles provoquent le mouvement : telles sont la force musculaire de l'homme et des animaux, la pesanteur, la chaleur, la force d'expansion de la vapeur d'eau et des mélanges gazeux, l'électricité, les forces magnétiques et les pressions exercées par les fluides.

D'autres forces ne peuvent jamais être motrices, elles peuvent seulement s'opposer au mouvement sans jamais le provoquer ; elles sont appelées **résistances.** Les forces de cohésion moléculaires des corps (résistance des matériaux), les forces de frottement, de glissement, la résistance au roulement, la raideur des cordes sont de cette nature.

5. Obstacle à l'action d'une force. — Réaction. — Une force mouvante peut agir sur un corps sans modifier son état de repos ; c'est le cas de la pesanteur qui s'exerce sur un corps posé sur le parquet, bien que ce corps soit au repos (*fig.* 1).

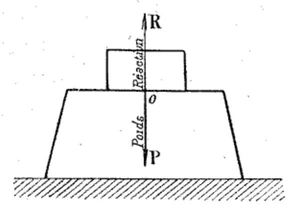


Fig. 1.

Cela tient à ce que le parquet est un obstacle à l'action de la pesanteur ; cet obstacle est dû à une résistance (cohésion moléculaire du parquet) qui détruit l'action de la pesanteur. Cette résistance n'existe qu'à cause de l'action précédente ; on lui donne le nom de réaction.

6. Principe de l'égalité de l'action et de la réaction. — Pour expliquer le phénomène précédent, on admet que toutes les forces de l'univers existent par paires et que

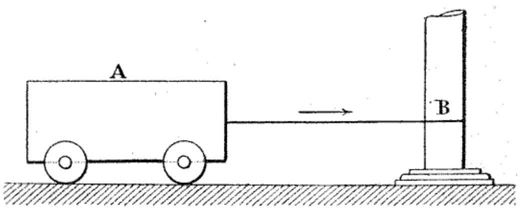


Fig. 2.

l'action de l'une fait naître une réaction égale et directement opposée à la précédente. Si, à l'aide d'une corde, nous exerçons une traction sur un véhicule A (*fig.* 2) nous amènerons son déplacement dans la direction de B. Par contre, le chariot agira sur nous dans la direction BA avec une force égale. Pour nous en convaincre, attachons la corde à un pilier fixe situé en B, prenons place dans le véhicule et tirons sur la corde avec la même force que précédemment ; le mouvement du chariot sera le même.

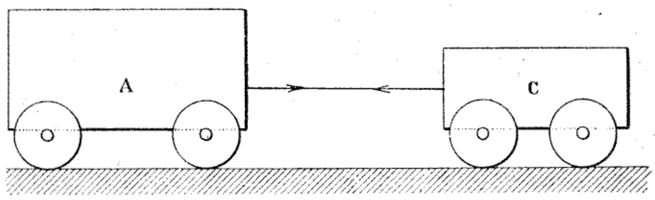


Fig. 3.

Si, au lieu d'être fixée en B, la corde était attachée à un autre mobile C (*fig.* 3), les deux corps se mettraient en mouvement et le plus petit se déplacerait le plus vite. C'est ce qui a lieu lors de la chute d'un corps : non seulement la terre attire le corps, mais elle est attirée par lui ; seulement, la terre étant infiniment plus grosse que le corps, son mouvement est infiniment plus petit et inappréciable par nous ; il n'en existe pas moins.

7. Force d'inertie. — C'est la résistance qu'offre un corps à toute force dont l'action tend à produire ou à modifier son état de mouvement ; c'est à proprement parler une **réaction.** Elle est due aux forces intérieures qui attirent l'une vers l'autre les différentes molécules d'un corps solide et qui constituent sa cohésion.

C'est la **force d'inertie** qui s'oppose à la chute d'un cycliste penché sur le côté, malgré l'action de la pesanteur ; c'est elle qui détermine la tension et parfois la rupture du câble reliant un remorqueur en mouvement à un chaland au repos. Si l'on observe le mouvement définitif, on constate que, si le chaland est entraîné, c'est au détriment de la vitesse du remorqueur qui a diminué.

L'**inertie** proprement dite n'est pas une force, ce n'est qu'une propriété de la matière. Par exemple, c'est elle qui permet au cycliste n'actionnant plus les pédales de continuer son chemin en faisant roue libre; c'est à cause d'elle que le chaland avance en ligne droite alors que son attache est rompue. On utilise encore cette propriété pour emmancher les outils. Par contre, ses effets sont souvent nuisibles; l'arrêt brusque d'un cheval au galop lance le cavalier en avant; la rencontre de deux trains projette les voyageurs sur la paroi du wagon située dans le sens du mouvement.

8. Objet de la mécanique. — Les notions de repos, de mouvement et de force étant acquises, on peut définir ainsi la mécanique : *C'est une science qui a pour but de rechercher les conditions dans lesquelles les forces doivent agir sur un corps pour provoquer son état d'équilibre ou de mouvement et les applications de ces conditions à la vie pratique et industrielle.*

La **statique** est l'étude des forces indépendamment des mouvements qu'elles peuvent produire.

La **cinématique** s'occupe des mouvements sans se préoccuper de leurs causes.

La **dynamique** étudie simultanément l'action des forces et les mouvements qu'elles provoquent.

La **mécanique appliquée** montre comment l'homme adapte à ses besoins les forces naturelles en les utilisant dans les machines.

Nous ne pouvons, dans un ouvrage aussi restreint, suivre un ordre aussi rigoureux; nous exposerons les questions au moment le plus utile; c'est ainsi que nous reportons à d'autres chapitres l'explication des autres principes de la mécanique.

9. Éléments d'une force. — Une force appliquée à un corps est déterminée lorsque l'on connaît :

1° **Son point d'application,** c'est-à-dire l'endroit où son action se fait sentir directement : crochet d'attelage d'un wagon, manche d'un outil, poignée d'une varlope, surface d'un piston, etc.;

2° **Sa direction** ou ligne droite indéfinie qu'elle tend à faire parcourir au corps;

3° **Son sens,** qui est le côté de la droite suivi par le mobile;

4° **Son intensité,** c'est-à-dire sa grandeur lorsque l'on compare ses effets à ceux d'une autre force prise comme unité.

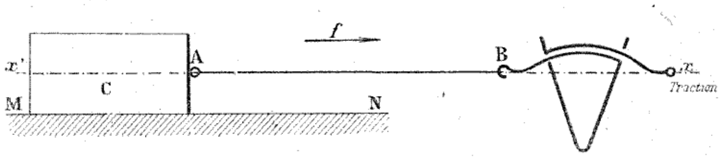


Fig. 4.

Si, par l'intermédiaire d'un ressort (*fig.* 4) attaché à une corde AB, nous exerçons un effort de traction horizontal de façon à déplacer le corps entier C sur le plan horizontal MN et le point A sur la droite AB, on peut dire que :

A est le point d'application de la force;

$x'x$, sa direction;

La flèche f, son sens (de gauche à droite);

La plus ou moins grande déformation (rapprochement des lames) du ressort, mesure son intensité.

10. Comparaison des forces. — Elle résulte de la comparaison de leurs effets :

Forces égales. — Ce sont celles qui, successivement appliquées au même corps et dans les mêmes conditions, produisent les mêmes effets; on dit qu'elles ont la même intensité. Deux hommes sont de même force s'ils soulèvent le même poids, 12 kilogrammes, à la même hauteur, $1^m,20$, avec la même vitesse. Un cheval, un bœuf et un petit moteur exercent le même effort de traction pour remorquer le même véhicule sur la même route, à la même vitesse.

Forces multiples. — Une force A est double, triple, quadruple, ... d'une force B lorsqu'elle produit les mêmes effets que 2, 3, 4, ... forces égales à B appliquées simultanément au même corps, au même point, dans la même direction et le même sens.

11. Mesure des forces. — **Mesurer une force, c'est comparer son action à celle d'une autre prise comme unité.** Or il existe une force dont les effets sont facilement appréciables: c'est la pesanteur. On sait que cette force attire tous les corps vers le centre de la Terre, et que, si ce corps est appliqué au ressort d'un appareil particulier appelé **dynamomètre,** ce ressort est déformé. Il suffira donc de noter les déformations produites successivement par des poids marqués de 1, 2, 3, 4, ... kilogrammes et de chercher ensuite laquelle de ces déformations est produite par la force que l'on veut mesurer.

12. Dynamomètres. — Leur forme et leur nombre varient avec leurs usages; nous en décrirons quelques types.

a) **Peson ordinaire.** — C'est une lame d'acier MNP (*fig.* 5) recourbée en forme de V, dont l'angle peut varier de grandeur. Cette variation est rendue visible par deux arcs métalliques de même centre; l'un intérieur est fixé en A à MN, traverse PN en B et se termine par un crochet L auquel on peut fixer le poids, l'autre arc gradué M est fixé à PN en D et traverse MN en E; il se termine par un anneau que l'on peut à volonté accrocher ou tenir à la main.

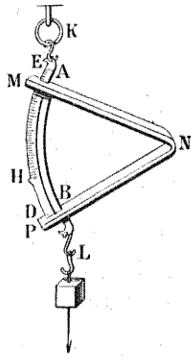


Fig. 5.

L'instrument est gradué en kilogrammes; un trait coïncidant avec le bord de MN indique les positions successives où s'arrête la branche MN lorsqu'elle est sollicitée par des forces de 1, 2, 3, 4, ... kilogrammes.

La propriété que possède cette lame MN de reprendre sa position primitive lorsqu'on retire toute la charge, s'appelle *élasticité;* elle n'existe que pour des poids inférieurs à une certaine limite. Afin de lui conserver son élasticité, on ménage un arrêt H qui, s'il est atteint, indique que la force mesurée est trop intense pour être évaluée avec cet appareil.

b) **Peson à hélice** (*fig.* 6). — Dans cet appareil, le ressort est un fil d'acier enroulé en hélice. A sa partie supérieure, il s'appuie sur le couvercle vissé AB d'un cylindre ABCD. Un piston P mobile à l'intérieur du cylindre possède une tige PE terminée par une poignée E. Un crochet H fixé dans le fond CD permet d'accrocher les poids marqués.

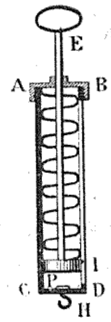


Fig. 6.

c) **Dynamomètre de Poncelet** (*fig.* 7). — Il comprend deux lames d'acier AB et CD réunies à leurs extrémités par des entretoises articulées AC et BD.

La lame AB porte un anneau E, tandis que CD est munie d'un crochet H. L'action d'une force a pour résultat d'écarter les deux lames de leur position normale. L'écartement étant proportionnel, il est possible de vérifier la graduation ordinaire à l'aide de poids marqués. Les indications sont notées sur une lame de fer qui prolonge intérieurement le crochet H et qui se déplace le long d'une autre tige prolongeant l'anneau E.

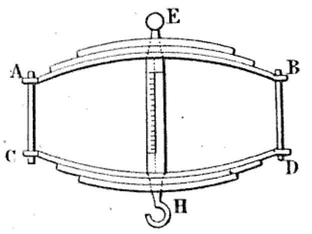


Fig. 7.

On augmente la sensibilité de l'appareil en renforçant les lames AB et CD par d'autres adhérentes extérieurement, mais moins longues.

Les différents dynamomètres à ressort sont employés pour évaluer le poids des corps, les efforts de traction des véhicules, la tension des courroies, câbles et chaînes de transmission.

d) **Dynamomètre de traction Richard** (*fig.* 8). — Il consiste en un étrier portant une cuvette fermée par une membrane en caoutchouc et remplie d'eau ; sur cette membrane s'applique un piston fixé sur un second étrier et guidé par une couronne.

La traction ayant pour effet de comprimer le liquide, la pression en kilogrammes par centimètre carré résultant de cette compression est par conséquent égale au poids total supporté divisé par le nombre de centimètres carrés représentant la surface du piston. La cuvette étant en relation au moyen d'un tube souple avec un manomètre à cadran ou enregistreur, ce dernier indiquera l'intensité de l'effort. Les pressions dans la cuvette peuvent atteindre sans crainte plus de 100 kilogrammes par centimètre carré.

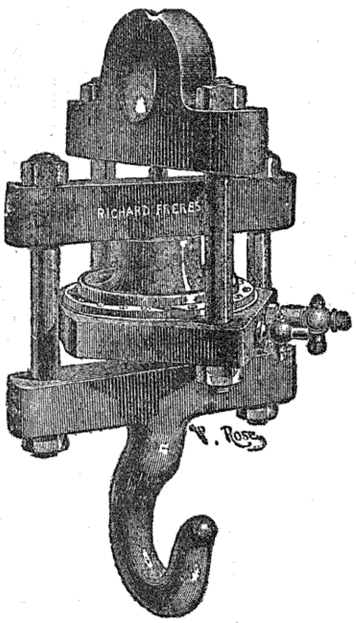


FIG. 8.

Cet appareil n'a pas les inconvénients des dynamomètres à ressorts : manœuvre généralement difficile, encombrement, grande inertie rendant les lectures incommodes, déformation des ressorts.

Il présente l'avantage de se prêter à tous les essais depuis les forces les plus minimes jusqu'aux efforts de plusieurs tonnes.

Il est employé sur les grues de décharges ; dans les sucreries ; pour vérifier les quantités de chaux et de charbon montées dans les fours à chaux ; par les Ponts et Chaussées pour la mesure des efforts de traction des remorqueurs sur les différents modèles des bateaux de transport.

e) Les **baromètres** et les **manomètres** étudiés en physique sont des dynamomètres spéciaux destinés à mesurer les forces de pression des fluides, gaz, vapeurs.

13. Représentation graphique d'une force. — Elle peut être faite sur une droite de même direction que la force. A partir d'un point A représentant le point d'application, on porte dans le sens de la force un segment de droite représentant son intensité à une échelle donnée, 8 millimètres par kilogramme par exemple. AB (*fig.* 9) désigne une force horizontale de 5 kilogrammes dirigée de gauche à droite.

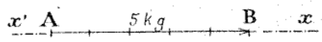


FIG. 9.

Deux forces de même direction se représentent sur la même droite ; elles sont de même sens (*fig.* 10) ou de sens contraire (*fig.* 11).

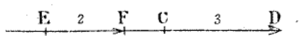


FIG. 10.

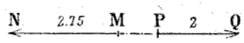


FIG. 11

Lorsque les directions sont parallèles, on adopte non seulement une échelle des forces, mais encore une échelle des distances (*fig.* 12 et 13).

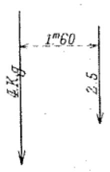


FIG. 12.

FIG. 13.

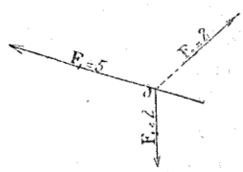


FIG. 14.

Si les directions de deux ou plusieurs forces F_1, F_2, F_3, passent par un même point O, on dit qu'elles sont **concourantes** (*fig.* 14).

II. — COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES

Forces de même direction.

14. Définitions. — Lorsqu'un corps solide indéformable est sollicité en même temps par plusieurs forces F, F_1, F_2, il ne suit pas toutes leurs directions, mais il se trouve animé d'un mouvement bien déterminé. Dans un grand nombre de cas, un effet identique peut être produit par une force unique R appliquée à ce corps. On dit que la force R est la **résultante** des forces F, F_1, F_2, qui en sont les **composantes.**

La **composition des forces** est le problème qui consiste à rechercher la résultante de plusieurs forces.

La **décomposition** est le problème inverse; on cherche plusieurs forces de directions données dont les effets sont identiques à ceux d'une force unique.

L'**équilibre des forces** étudie dans quelles conditions doivent se trouver plusieurs forces pour avoir une résultante nulle.

15. Forces de même sens. — 1° *Si deux forces de même direction ont même sens et sont appliquées au même point du corps, leurs efforts s'ajoutent et le corps prend la direction commune.*

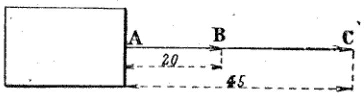


FIG. 15.

Ex. : Un mulet dans les brancards d'une voiture exerce une traction de 45 kilogrammes AC mesurée au dynamomètre; un âne placé au devant dans la même direction tire avec une force de 20 kilogrammes AB évaluée au dynamomètre. L'action de ces deux forces peut être remplacée par celle d'un cheval qui produit le même effet en exerçant un effort de 65 kilogrammes AD (*fig.* 15 et 16).

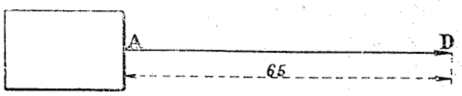


FIG. 16.

$$R = F_1 + F_2 = AB + AC = AD\,;$$
$$R = F_1 + F_2 = 45 \text{ kg} + 20 \text{ kg} = 65 \text{ kg}.$$

16. Forces de sens contraire. — 2° *La résultante de deux forces de même direction et de sens contraire est une force de même direction du sens de la plus grande composante et d'intensité égale à la différence des intensités des composantes.*

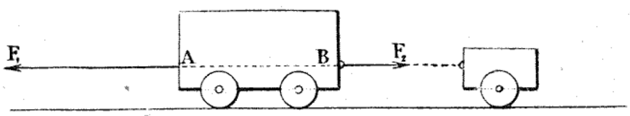


FIG. 17.

Ex. : Un cheval exerce une traction de 60 kilogrammes pour traîner un camion derrière lequel une voiturette attachée par une corde offre une résistance de 25 kilogrammes.

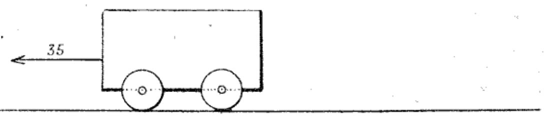


FIG. 18.

La voiturette étant détachée, on constate au dynamomètre qu'un mulet déplace le camion avec un effort de 35 kilogrammes (*fig.* 17 et 18).

17. Propriétés remarquables. — 3° *Deux forces égales et directement opposées se font équilibre.*

4° On peut transporter le point d'application d'une force agissant sur un corps en un point quelconque de sa direction (*fig.* 19).

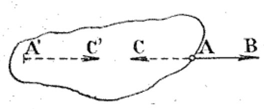


Fig. 19.

En effet, on peut toujours appliquer en A et A′ deux forces égales à AB et directement opposées AC = A′C′. D'autre part, AC détruit l'action AB. Il reste donc A′C′, qui peut remplacer AB.

Un homme produit le même effet en poussant devant lui sa voiture à bras ou en la traînant derrière.

18. Plusieurs forces. — 5° *La résultante de plusieurs forces de même direction s'obtient en additionnant, d'une part, toutes celles qui agissent dans un sens* $F_1 + F_2 + F_3 = R'$, *et, d'autre part, toutes celles qui agissent dans l'autre sens :*

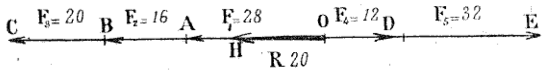


Fig. 20.

$F_4 + F_5 = R''$; *puis en faisant la différence entre* R′ *et* R″ *que l'on porte dans le sens de la plus grande.*

Application :

$$F_1 = 28 \text{ kg.}, \quad F_2 = 16 \text{ kg.}, \quad F_3 = 20 \text{ kg.}, \quad R' = 64 \text{ kg.},$$
$$F_4 = 12 \text{ kg.}, \quad F_5 = 32 \text{ kg.}, \quad R'' = 44 \text{ kg.}$$
$$R = R' - R'' = 64 \text{ kg} - 44 \text{ kg} = 20 \text{ kg}$$ (*fig.* 20).

III. — FORCES CONCOURANTES

19. Exemples. — La poussée de la tige du piston sur le coulisseau, l'action de la bielle sur ce coulisseau et son propre poids sont trois forces concourantes. La pesanteur et la force centrifuge agissant sur une locomotive décrivant une courbe sont deux forces coucourantes. Il en est de même des efforts d'un homme qui pousse une brouette en se faisant aider par ses enfants attelés en avant à chacun une corde (*fig.* 21).

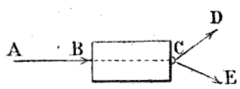


Fig. 21.

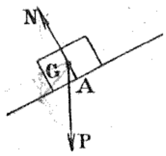


Fig. 22.

Le poids d'un corps GP sur un plan incliné et la réaction AN du plan (*fig.* 22) sont aussi concourantes.

20. Valeur de la résultante de deux forces concourantes. — *Elle est égale en grandeur, direction et sens à la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces* (*fig.* 23).

OC = R est la résultante des forces OA = F_1 et OB = F_2.

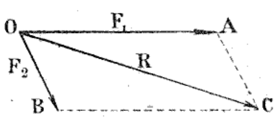


Fig. 23.

21. Démonstration. — a) *La résultante de deux forces concourantes égales est située dans leur plan et dirigée suivant la bissectrice de leur angle* (*fig.* 24). En effet :

1° Elle ne peut être en avant, car, si on fait tourner le système de 180° autour de la bissectrice, on obtient un système équivalent dont la résultante serait en arrière du plan, ce qui est contraire à l'hypothèse, deux systèmes équivalents ayant des résultantes identiques. Donc la résultante est dans le plan des forces ;

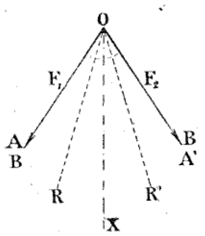


FIG 24.

2° Elle ne peut être entre la bissectrice et F_1, car, après la rotation de 180°, elle serait pour un système équivalent entre la bissectrice et F_2, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On en conclut que la résultante a même direction que la bissectrice de l'angle des deux forces égales.

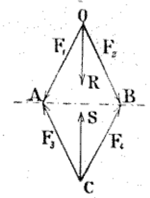


FIG. 25.

b) *Un losange est en équilibre sous l'action de quatre forces égales disposées comme l'indique la figure* 25.

En effet, les résultantes OR de F_1, F_2 et CS de F_3, F_4 sont directement opposées. Si OR $>$ CS, la résultante définitive du système est dirigée de O vers C ; mais, après rotation de 180° autour de AB, elle serait dirigée de C vers O pour un système équivalent, ce qui est impossible. Donc OR $=$ CS, le losange est en équilibre.

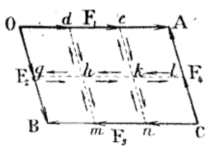


FIG. 26.

c) *Un parallélogramme est en équilibre sous l'action de quatre forces représentées par ses côtés et disposées comme l'indique la figure* 26.

Supposons qu'une commune mesure soit contenue trois fois dans F_1, F_3 et deux fois dans F_2, F_4 ; on a :

$$F_1 = Od + de + eA ;$$
$$F_2 = Og + gB ;$$
$$F_3 = Cn + nm + mB ;$$
$$F_4 = Cl + lA.$$

Or $Od + Og$	sont	équilibrées par	$hd + hg$;
$gB + mB$	—	—	$gh + mh$;
nm	—	—	$nk + hk + hm$;
$Cn + Cl$	—	—	$kn + kl$;
$lA + eA$	—	—	$lk + ek$;
de	—	—	$dh + kh + ke$.

Si l'on remarque que toutes les forces ajoutées peuvent être groupées par paires de deux égales et directement opposées se faisant équilibre, on conclut que le parallélogramme est en équilibre sous l'action des seules forces F_1, F_2, F_3, F_4.

Il en résulte que F_1F_2 d'une part, F_3F_4 d'autre part ont des résultantes de même direction ; O et C sont deux points de cette direction ; par conséquent **la résultante de deux forces F_1, F_2 concourantes en O est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur ses forces.**

d) *La valeur de la résultante est représentée par la longueur de la diagonale* (*fig.* 27). — Pour faire équilibre aux forces OA, OB, il en faut une troisième OC égale et directement opposée à leur résultante. On ignore la valeur et le sens de OC, mais on sait que la résultante de OC et de OB est égale et directement opposée à OA ; soit

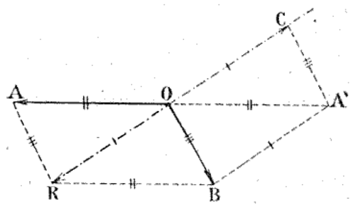


Fig. 27.

$$OA' = OA = BR.$$

Pour obtenir le parallélogramme des forces OB et OC, il faut donc mener par B la parallèle à ROC. Comme OA' est égal et parallèle à RB, BA est un côté. Il reste à mener par A' une parallèle à OB pour déterminer le point C, qui se trouve ainsi dans le sens contraire de OR et tel que OC = OR (même longueur BA').

C. Q. F. D.

22. Vérification expérimentale. — Elle est basée sur ce principe que, si trois forces se font équilibre, l'une quelconque est égale et directement opposée à la résultante des deux autres.

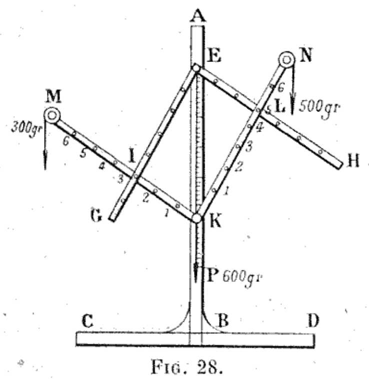


Fig. 28.

1° **Parallélogramme articulé** (*fig.* 28). — Il se compose essentiellement d'une tige verticale AB fixée sur une planchette CD et graduée à partir de E.

Un parallélogramme formé de quatre règles égales articulées deux à deux, EG avec EH en E, KM avec KN en K, est fixé par un de ses sommets à la tige AB. Chaque règle est percée de six trous équidistants qui permettent, à l'aide de chevilles, de donner au parallélogramme la forme convenable EIKL. Deux petites poulies situées aux extrémités M et N sont embrassées par un cordon qui passe en K et qui supporte à chaque bout des poids proportionnels à KI et KL, soit 300 grammes en M et 500 grammes en N.

Sous l'action de ces poids, le point K tend à monter; si on y applique un corps pesant 600 grammes par exemple, l'équilibre s'établit et l'on constate : 1° que le point K reste sur la tige; par conséquent la résultante des forces KI et KL, qui est verticale (opposée à KP), a bien la même direction que la diagonale KE; 2° que $\frac{KE}{600} = \frac{KI}{300} = \frac{KL}{500}$ et que cette diagonale représente bien la grandeur de la résultante.

2° **Méthode américaine** [1]. — En deux points M et N d'une poutre, on fixe les extrémités d'une corde de 800 millimètres. En un point O situé à 250 millimètres de M, on fait agir un poids de 5 ou 10 kilogrammes E. Entre O et M d'une part, O et N d'autre part, on intercale deux dynamomètres F et F′ qui mesurent les tensions des cordes OM et ON. On fait lire aux élèves les mesures de F et de F′ et déterminer la valeur des angles MON, NOE, EOM.

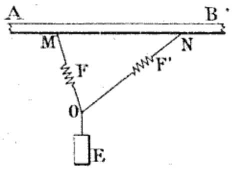


Fig. 29.

Ils peuvent alors construire les parallélogrammes des forces F et F′, E et F, E et F′, et vérifier le principe énoncé.

23. Résultante de plus de deux forces concourantes F_1, F_2, F_3, F_4. — Elle s'obtient (*fig.* 30) en se basant sur ce fait que l'on peut remplacer deux forces quelconques par leur résultante. On composera par exemple OF_1 avec OF_2, leur résultante OR_1 avec OF_3, la nouvelle résultante OR_2 avec OF_4, et l'on obtiendra OR.

[1] D'après M. Omer Buyse.

Si l'on remarque que, pour obtenir R, on a mené successivement des parallèles égales, par A à F_2, par M à F_3, par N à F_4, on verra qu'il n'est pas nécessaire de tracer MO, MB, NO, NC pour avoir l'extrémité P de la résultante. On l'obtient directement en construisant sur l'une des forces le polygone ayant pour côtés des segments égaux et parallèles à chacune

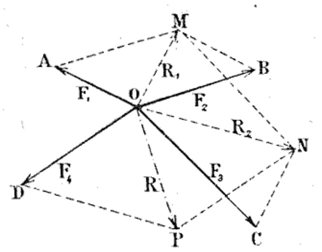


FIG. 30.

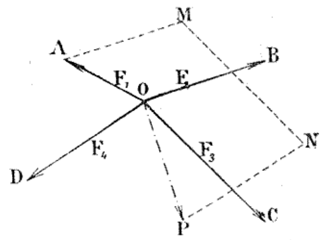


FIG. 31.

des composantes (*fig.* 31). La droite OP qui ferme ce polygone représente en grandeur, direction et sens la résultante définitive. Elle est appelée **somme géométrique** des forces et s'obtient en construisant le **polygone dit de Varignon.**

Il est à remarquer que les forces peuvent ne pas être dans un même plan; la composition reste la même et, dans le cas de trois forces, on est amené à construire un parallélipipède OABCDEGH dont la diagonale OD (*fig.* 32) représente en grandeur, direction et sens la résultante de $\Theta A = F_1$, $OB = F_2$ et $OC = F_3$.

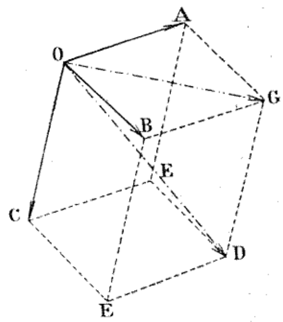


FIG. 32.

En effet, OA et OB peuvent être remplacées par OG qui, composé avec OC, donne OD.

Le polygone des forces est d'ailleurs OAGD fermé par OD.

24. Détermination graphique de la valeur de l'intensité de la résultante. — Deux hommes agissent sur des cordes faisant entre elles un angle de 30° afin d'entraîner une pierre.

Ils développent des efforts de 32 et de 24 kilogrammes ; dire dans quelle direction et avec quelle force devrait agir un cheval pour produire le même déplacement. Echelle des forces : 1 millimètre par kilogramme.

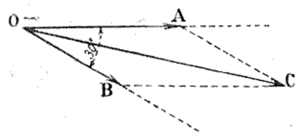


Fig. 33.

A partir d'un point O (*fig.* 33), on trace deux droites faisant entre elles un angle de 30°, on porte sur l'une OA = 32 millimètres, sur l'autre OB = 24 millimètres. La diagonale OC indique la direction que devra prendre le cheval et sa longueur 54 millimètres indique qu'il devra déployer un effort de 54 kilogrammes.

25. Décomposition d'une force unique R en deux composantes de direction donnée OA et OB. — C'est un simple problème de géométrie qui consiste à construire un parallélogramme quand on connaît la diagonale et la direction des côtés (*fig.* 34). Par l'extrémité C de la résultante, on mène CD parallèle à OB jusqu'à sa rencontre avec OA ; on a l'une des composantes OD ; l'autre, OE, s'obtient d'une façon analogue.

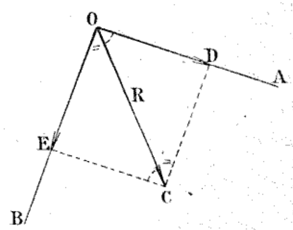


Fig. 34.

26. Applications. — 1° Considérons un corps qui glisse sur un plan incliné (*fig.* 35) sous l'action de son propre poids. Sa vitesse est moins grande que si le mobile tombe en chute libre, et cependant c'est toujours avec la même force GP qu'agit la pesanteur. Seulement son action GN est en partie détruite par la réaction du plan GN′ qui est perpendiculaire à sa surface ; l'autre partie GT est parallèle au plan et entraîne le corps suivant une ligne de plus grande pente AB.

On connaît donc les directions des composantes; il est aisé de les déterminer. Dans notre cas de figure, un poids de 24 kilogrammes exerce sur le plan une pression de 21 kilogrammes et se trouve entraîné vers le bas avec une force de 12 kilogrammes.

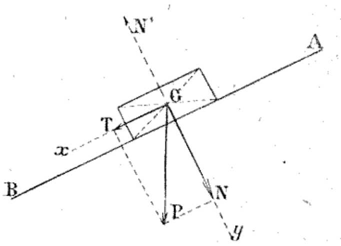


Fig. 35.

2° Dans une machine à vapeur E (*fig.* 36), la force transmise par la vapeur V au piston AB et à sa tige CD est représentée par DI ; elle se répartit à la fois sur la glissière MN par le coulisseau Q et sur la bielle DE. Les composantes sont obtenues par le procédé ordinaire.

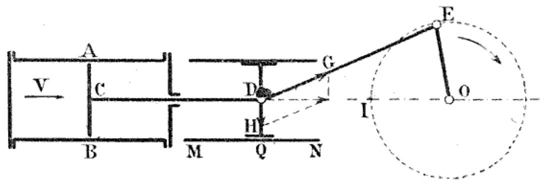


Fig. 36.

27. Équilibre des forces concourantes. — Nous

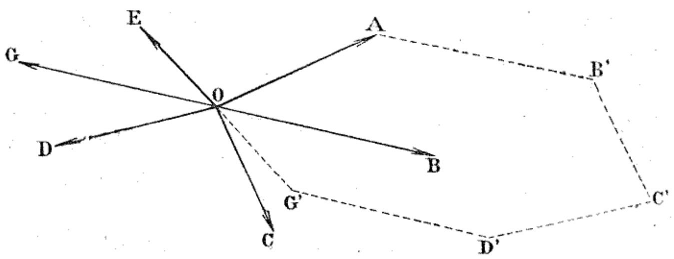


Fig. 37.

avons signalé que des forces concourantes étaient en équilibre lorsque l'une d'elles était égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres. Il en résulte que la résultante définitive est nulle et que le polygone des forces (de Varignon) se ferme de lui-même. C'est le cas de la figure 37.

28. Variation de l'intensité de deux forces concourantes lorsque varie l'angle de ces forces. — Soient $OA = F_1$ et $OB = F_2$ deux forces appliquées en O; supposons que l'une OA soit fixe et l'autre OB mobile autour du point O (*fig.* 38). Lorsque OB est appliqué sur OA, les composantes ont même direction et même sens, leurs efforts s'ajoutent : si $F_1 = 25$ kilogrammes, $F_2 = 15$ kilogrammes, $R_1 = 25 + 15 = 40$ kilogrammes.

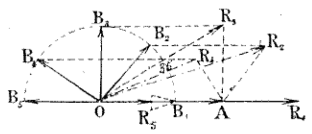


Fig. 38.

Dès que OB a tourné, la résultante diminue ; pour un angle aigu, R_2 est encore assez grand, 35 kilogrammes. Lorsque l'angle est droit, le parallélogramme étant devenu un rectangle, la diagonale peut se calculer à l'aide de la relation :

$$(OR_3)^2 = \overline{OA}^2 + (OB_3)^2.$$

La résultante est égale à la racine carrée de la somme des carrés des composantes :

$$R_3 = \sqrt{25^2 + 15^2} = \sqrt{625 + 225};$$
$$R_3 = \sqrt{850} = 29.$$

Pour un angle obtus, la valeur de R_4 est encore plus petite, et enfin pour une rotation de 180°, les forces sont de sens contraire, leur résultante

$$R_5 = F_1 - F_2 = 25 - 15 = 10 \text{ kilogrammes.}$$

En résumé, plus l'angle de deux forces est petit, plus leur action est grande; si deux hommes, deux animaux exercent leurs efforts en un même point, ils auront avantage à suivre la même direction ou deux directions très voisines.

Valeur de l'angle α..	0	$0 < \alpha < 90°$	$\alpha = 90°$	$90° < \alpha < 180°$	180°
Valeur de R.	F_1+F_2	$F_1+F_2>R>\sqrt{F_1^2+F_2^2}$	$\sqrt{F_1^2+F_2^2}$	$\sqrt{F_1^2+F_2^2}>R>F_1-F_2$	F_1-F_2

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Une locomotive du poids de 63.000 kilogrammes ,en décrivant une courbe, développe une force horizontale dite centrifuge de 16.000 kilogrammes.

Déterminer l'intensité de la résultante des forces de la pesanteur et de la force centrifuge et l'angle que forme sa direction avec la verticale.

II. — Un corps placé sur un plan incliné pèse 80 kilogrammes. Sachant que la pente du plan est de 60°, calculez les composantes GT et GN de la pesanteur GP.

III. — L'effort exercé par la tige d'un piston est de 15.000 kilogrammes.

Déterminer l'effort transmis à la bielle et l'effort supporté par les patins lorsque la bielle fait un angle de 20° avec le prolongement de la tige du piston.

IV. — Sachant que le poids du patin est de 40 kilogrammes, calculez l'effort total supporté par la glissière inférieure.

V. — Un poids de 500 grammes suspendu à un fil est placé dans une position telle que ce fil fait un angle de 45° avec la verticale. Trouver avec quelle force il agit sur le fil et avec quelle force il tend à décrire une circonférence.

Remarque : les deux forces sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

IV. — FORCES PARALLÈLES

29. Exemples. — Lorsque plusieurs chevaux sont attelés de front à l'aide d'un palonnier, leurs efforts sont parallèles et dirigés dans le même sens ; au contraire, la résistance offerte par la terre à la charrue traînée est une force parallèle et de sens contraire aux précédentes. Les poids de deux poulies calées sur un arbre sont de même sens, et la réaction des coussinets qui supportent l'arbre à ses extrémités est encore parallèle aux poids, mais dirigée dans le sens opposé (*fig.* 39).

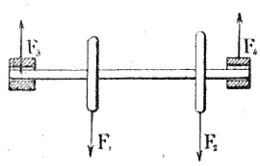


Fig. 39.

30. Résultante de deux forces parallèles et de même sens (*fig.* 40). — Elle est parallèle aux composantes, de même sens, égale à leur somme :

$$R = F_1 + F_2,$$

et son point d'application C partage la distance AB des points d'application en segments additifs $CA + CB = AB$ inversement proportionnels aux forces adjacentes :

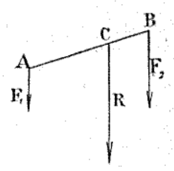


Fig. 40.

$$\frac{CA}{CB} = \frac{\frac{1}{F_1}}{\frac{1}{F_2}} = \frac{F_2}{F_1} \quad \text{ou} \quad CA \times F_1 = CB \times F_2.$$

Il est à remarquer que la résultante est plus rapprochée de la plus grande force que de l'autre.

31. Démonstration (*fig.* 41). — Etant données les deux forces F_1, F_2, on ne change pas leur action en leur ajoutant deux forces F_3, F_4 égales et directement opposées.

Or F_1, F_3 ont pour résultante R_1, et F_2, F_4 ont pour résultante R_2. R_1 et R_2 étant concourantes en O, on peut y transporter leur point d'application, de sorte que le premier système peut être remplacé par OR plus OL, qui peuvent être décomposées suivant deux directions $x'x$ parallèle à AB et Oy parallèle à F_1, F_2.

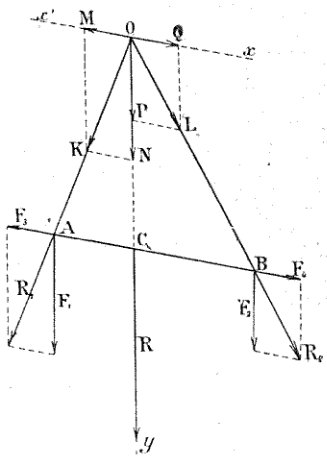


FIG. 41.

L'égalité de OMKN et de $AF_1R_1F_3$, d'une part, donne :

$$OM = F_3 \quad \text{et} \quad ON = F_1.$$

L'égalité de OQLP et de $BF_2R_2F_4$, d'autre part, donne :

$$OQ = F_4 \quad \text{et} \quad OP = F_2.$$

D'où OM = OQ, le système se réduit à deux forces de même direction et de même sens que F_1, F_2, dont la résultante :

$$R = ON + OP = F_1 + F_2.$$

Son point d'application pouvant être transporté en C sur AB, la similitude des triangles OAC et AR_1F_1 d'une part, OBC et BR_2F_2 d'autre part montre que :

$$\frac{AC}{OC} = \frac{F_3}{F_1} \quad \text{et} \quad \frac{BC}{OC} = \frac{F_4}{F_2}.$$

Or

$$F_3 = F_4; \qquad OC \times F_3 = OC \times F_4;$$

donc

$$AC \times F_1 = BC \times F_2, \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}.$$

C. Q. F. D.

32. Vérification expérimentale (*fig.* 42). — A une règle graduée AB portant des anneaux équidistants, on suspend en M et N des poids de 200 et de 500 grammes, par exemple, tels que

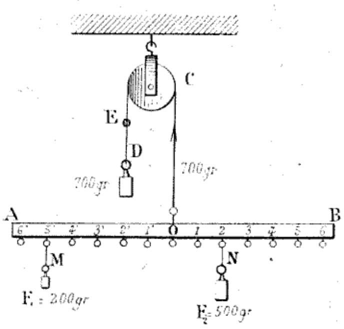


Fig. 42.

$$OM \times 200 = ON \times 500.$$

Un cordon fixé en O passe sur une poulie fixe C et supporte en D un poids de $200 + 500 = 700$ grammes ; on constate que le système est en équilibre.

Or il y est encore si on enlève les poids en M et N pour les remplacer par un corps de 700 grammes attaché en O, qui est ainsi la résultante des deux forces.

On a donc bien :

$$R = F_1 + F_2 \qquad \text{et} \qquad \frac{OM}{ON} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Remarque. — Une masse de plomb E fait équilibre au poids de la barre AB lorsqu'il n'y a aucune charge.

33. Construction graphique (*fig.* 43). — La relation $\frac{CA}{CB} = \frac{F_2}{F_1}$ permet de déterminer la position du point C par le calcul de CA. En effet, de cette relation on tire :

$$\frac{CA}{CA + CB} = \frac{F_2}{F_2 + F_1} = \frac{F_2}{R},$$

dans laquelle CA est seul inconnu, puisque

$$CA + CB = AB = d, \qquad CA = \frac{dF_2}{R}.$$

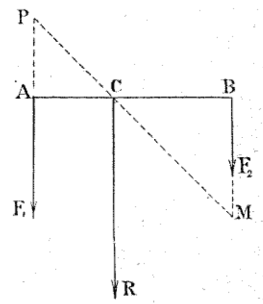


Fig. 43.

On peut obtenir C par un tracé graphique ; il suffit de porter sur l'une des forces F_2 une quantité égale à l'autre $BM = F_1$, et dans le prolongement de celle-ci, F_1, une quantité égale à la première $AP = F_2$, de joindre ensuite PM, qui coupe AB en C.

En effet, la similitude des triangles ACP, BCM entraîne la relation :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AP}{BM} = \frac{F_2}{F_1} \quad \text{ou} \quad \frac{CA}{CB} = \frac{F_2}{F_1}.$$

34. Application. — Un homme, à l'aide d'une barre de poids négligeable, doit transporter sur son épaule deux charges $F_1 = 12$ kilogrammes et $F_2 = 20$ kilogrammes situées sur la barre à 80 centimètres l'une de l'autre. Trouver : 1° l'effort supporté par l'homme ; 2° à quelle distance du point A il devra placer son épaule (*fig. 44*).

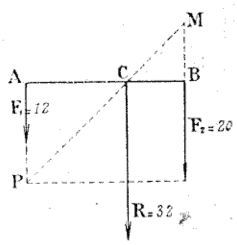


FIG. 44.

Échelle des forces : 1 millimètre par kilogramme.

Échelle des distances : 4 0/0.

$$R = 12 + 20 = 32 \text{ kilogrammes.}$$

CA = 20 millimètres sur la figure et représente :

$$\frac{20^{mm} \times 100}{4} = 500^{mm} = 50 \text{ centimètres.}$$

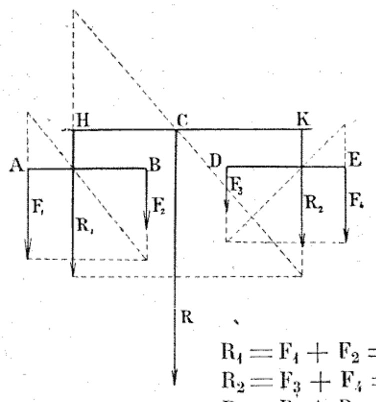
ou bien

$$CA = \frac{dF_2}{R} = \frac{80^{cm} \times 20}{32} = 50 \text{ centimètres.}$$

35. Résultante de plus de deux forces parallèles et de même sens. — Elle est égale à la somme des composantes :

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \ldots,$$

et son point d'application C, appelé centre des forces parallèles, se détermine de proche en proche en remplaçant deux quelconques des forces par leur résultante. — Il est à remarquer que ces forces peuvent être dans des plans différents.



La figure 45 représente un attelage de quatre chevaux dont les forces respectives sont $F_1 = 90$, $F_2 = 60$, $F_3 = 45$ et $F_4 = 75$ kilogrammes.

$R_1 = F_1 + F_2 = 90 + 60 = 150$ kilogrammes;
$R_2 = F_3 + F_4 = 45 + 75 = 120$ kilogrammes;
$R = R_1 + R_2 = 150 + 120 = 270$ kilogrammes.

Fig. 45.

36. Résultante de deux forces parallèles et de sens contraire (*fig.* 46). — Elle est parallèle aux composantes, égale à leur différence, de même sens que la plus grande, et son point d'application C partage la distance des points d'application des composantes en segments soustractifs inversement proportionnels aux forces adjacentes :

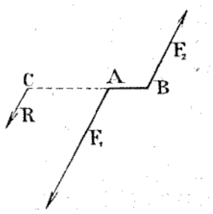


Fig. 46.

$$R = F_1 - F_2; \qquad \frac{CA}{CB} = \frac{\frac{1}{F_1}}{\frac{1}{F_2}} = \frac{F_2}{F_1}; \qquad CB - CA = AB.$$

Il est à remarquer que la résultante est plus près de la plus grande force que de l'autre.

37. Démonstration. — Considérons deux forces F, F_1 parallèles et de même sens dont la résultante est R'. Une force F_2 égale et directement opposée à R met les deux premières en équilibre. Il en résulte que F est égale et directement opposée à R, résultante de F_1, F_2.

On a :

$$F + F_1 = R' = F_2,$$

d'où

$$R = F = F_2 - F_1.$$

D'ailleurs

$$\frac{CB}{BA} = \frac{F_1}{F}$$

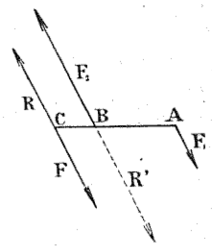


Fig. 47.

et

$$\frac{CB}{CB + BA} = \frac{F_1}{F + F_1} = \frac{F_1}{R'} = \frac{F_1}{F_2}, \qquad \frac{CB}{CA} = \frac{F_1}{F_2}.$$

C. Q. F. D.

38. Vérification expérimentale. — Elle est la même que celle décrite au numéro 32 (*fig.* 42). Puisque l'appareil est en équilibre, c'est que l'une quelconque des trois forces est égale et directement opposée à la résultante des deux autres R.

Donc

$$R = 200 \text{ gr} = 700 \text{ gr} - 500 \text{ gr} = \text{différence des deux autres},$$

et

$$\frac{MO}{MN} = \frac{5}{7} = \frac{500}{700}.$$

R, opposé à M, est de même sens que la plus grande 700.

39. Construction graphique. — La relation $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{F_2}{F_1}$ permet de déterminer C par le calcul de CA.

En effet, de cette relation on tire :

$$\frac{CA}{CB - CA} = \frac{F_2}{F_1 - F_2},$$

dans laquelle CA est le seul terme inconnu, puisque

$$CB - CA = AB = d, \qquad CA = d\,\frac{F_2}{F_1 - F_2} = \frac{dF_2}{R},$$

Pour obtenir C par un tracé graphique, il suffit de porter sur l'une des forces F_1 une quantité égale à l'autre $AM = F_2$, et dans le prolongement de celle-ci une quantité égale à la première $BP = F_1$; de joindre ensuite PM qui coupe le prolongement de AB du côté de la plus grande force en C.

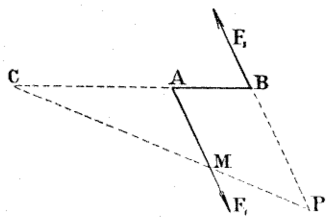


Fig. 48.

En effet, la similitude des triangles CAM, CBP entraîne la relation :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AM}{BP} = \frac{F_2}{F_1} \quad \text{où} \quad \frac{CA}{CB} = \frac{F_2}{F_1}.$$

40. Couple. — C'est le système de deux forces égales, parallèles et de sens contraire (*fig.* 49). Leur résultante est égale à 0, mais son point d'application est situé à l'infini, de sorte qu'on ne peut l'obtenir. On dit qu'il n'y a pas de résultante.

1° Si le corps auquel on applique le couple est mobile autour d'un de ses points, il tourne jusqu'à ce que les forces F, F′ soient directement opposées ; alors elles se font équilibre.

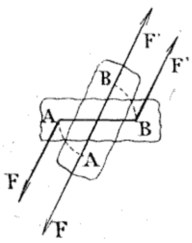


Fig. 49.

Ex. : L'aiguille aimantée (*fig.* 50) est soumise à l'action d'un couple qui la maintient en équilibre après lui avoir donné la direction S-N.

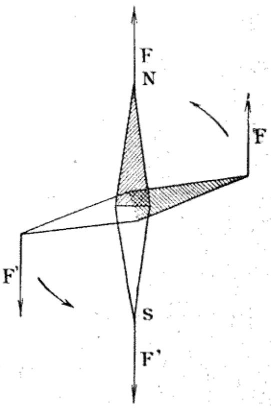


Fig. 50.

2° Il peut arriver que le couple se déplace autour d'un axe ;

dans ce cas, il détermine un mouvement continu de rotation autour de cet axe. L'action produite dépend à la fois de l'intensité des forces et de leur distance (**bras de levier**) à l'axe de rotation. C'est le cas de deux chevaux attelés à un manège circulaire, de deux hommes faisant tourner un treuil à double manivelle, des deux bras actionnant un taraud.

41. Résultante de plusieurs forces parallèles agissant les unes dans un sens, les autres dans le sens opposé. — Elle est égale à la différence entre les résultantes partielles R, R′ obtenues en composant toutes les forces dirigées dans un sens, puis toutes les forces dirigées dans le sens opposé (n° 38), si ces résultantes partielles sont inégales. Lorsqu'elles sont égales et directement opposées, le système de toutes les forces est en équilibre ; lorsqu'elles sont égales et appliquées en des points différents, le système se réduit à un couple.

42. Décomposition d'une force en deux autres qui lui sont parallèles. — C'est un simple problème d'algèbre dans lequel on a quatre inconnues : les forces x, y et leurs distances à la résultante CA, CB. Comme on n'a entre elles que deux relations :

$$x \pm y = R \qquad \text{et} \qquad \frac{CA}{CB} = \frac{y}{x},$$

on détermine le problème en se donnant deux autres quantités, les valeurs de CA et de CB, par exemple.

1° Si A et B sont de part et d'autre de la résultante, les composantes x et y sont de même sens (*fig.* 51).

On a :

$$\frac{x}{x+y} = \frac{x}{R} = \frac{CB}{CA + CB} = \frac{CB}{AB},$$

$$x = R\,\frac{CB}{AB}, \qquad y = R\,\frac{CA}{AB}.$$

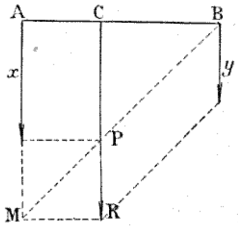


Fig. 51.

Graphiquement, on porte R en AM et l'on joint MB :

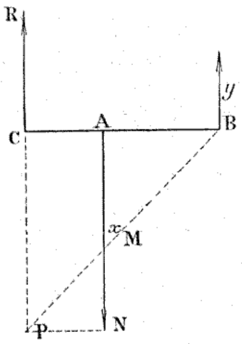


Fig. 52.

$$\frac{CP}{AM} = \frac{CB}{AB}, \qquad CP = R \times \frac{CB}{AB} = x,$$

$$PR = R \times \frac{CA}{AB} = y.$$

2° Si A et B sont du même côté de la résultante, les composantes sont de sens opposé (*fig.* 52).

En supposant $CB < CA$, $x < y$, on a :

$$\frac{x}{x - y} = \frac{CB}{CB - CA} \quad \text{ou} \quad x = R \times \frac{CB}{AB}.$$

On l'obtient graphiquement en portant R en AM et en joignant BM :

$$\frac{CP}{AM} = \frac{CB}{AB}; \qquad CP = R \times \frac{CB}{AB} = x; \qquad MN = R \times \frac{CA}{AB} = y.$$

43. Détermination expérimentale. — Pour vérifier les résultats obtenus par le calcul : 1° suspendre à deux

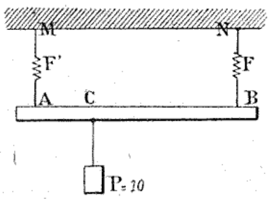


Fig. 53.

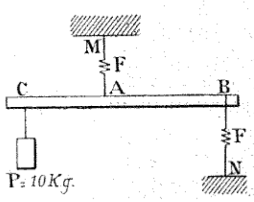


Fig. 54.

points fixes M et N (*fig.* 53) une barre AB supportant en C un poids P de 10 kilogrammes et intercaler les pesons F et F'. Si $AC = 12$ centimètres et $CB = 28$ centimètres, on constate que $F = 7$ kilogrammes, $F' = 3$ kilogrammes;

2° On peut disposer l'appareil comme dans la figure 54. Si

AC = 16 centimètres et CB = 40 centimètres, on constate que $F = 16^{kg},6$; $F' = 6^{kg},6$.

Nota. — Il faut une barre résistante et légère.

44. Applications. — C'est le problème précédent que l'on résout pratiquement lorsqu'on cherche l'effort supporté par deux appuis sur lesquels repose une charge. Ex. : coussinets d'un arbre de transmission, essieux d'un wagon, d'un véhicule.

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Un arbre de transmission de 75 centimètres carrés de section et de 4 mètres de longueur est en fer de densité 7,8. A 80 centimètres de l'extrémité A est calée une poulie C de 30 kilogrammes et à 60 centimètres de l'autre extrémité B est calée une poulie C de 50 kilogrammes. Calculer :

1° Le poids de l'arbre ;

2° La résultante des poids de l'arbre et des deux poulies ;

3° La charge supportée par les coussinets A et B.

II. — Trois chevaux A, B, C, capables d'efforts respectivement égaux à 100, 80 et 120 kilogrammes sont attelés de front sur un chariot de betteraves. A et B sont attachés au même palonnier long de $1^m,35$; celui-ci étant relié à un autre palonnier de $1^m,80$, sur lequel agit directement le cheval C. Déterminer :

1° Les points d'attache des chevaux et du chariot ; 0,75 0,72

2° L'effort total de traction exercé. 300 kg

III. — Les axes des roues d'une bicyclette sont distants de $1^m,15$.

Le poids de la machine est une force verticale de $12^{kg},650$ située à 65 centimètres de la roue avant ; celui du cycliste, 68 kilogrammes, se trouve à 85 centimètres de la même roue. Calculer :

1° La résultante de ces deux forces ;

2° La charge supportée par chacun des axes des roues ;

3° La surface des pneus qui toucheront terre lorsque la compression de l'air à l'intérieur sera de 10 kilogrammes par centimètre carré.

IV. — Un engrenage pesant 300 kilogrammes est placé en porte-à-faux à l'extrémité d'un arbre reposant sur deux paliers A et B distants de 2 mètres. Calculer les pressions sur les paliers, l'engrenage étant à $0^m,50$ de A. On négligera le poids de l'arbre.

V. — Un treuil roulant sur deux poutrelles parallèles pèse avec sa charge 3.000 kilogrammes. Répartir cette pression sur les quatre appuis des poutrelles longues de 8 mètres quand le treuil est à $2^m,50$ des deux appuis.

V. — MOMENT DES FORCES

45. Effet sur un corps pouvant tourner autour d'un axe d'une force située dans un plan perpendiculaire à cet axe. — Soit une manivelle OA calée sur l'arbre O et recevant en A l'action AF d'une bielle. Cette force peut se décomposer en deux :

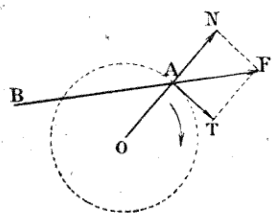


Fig. 55.

1° AN, dirigée suivant le prolongement de la manivelle, tendant à soulever l'arbre O maintenu par les chapeaux des paliers.

2° AT, *composante tangentielle*, qui seule assure la rotation de la manivelle et par suite de l'arbre.

L'*effet rotatif* de la force AF se réduit donc à l'effet rotatif de la composante tangentielle AT, projection de la force sur la perpendiculaire au rayon OA.

46. Vérification expérimentale. — Prenons un levier BOA mobile autour de l'axe O. En B, accrochons un fil relié à un dynamomètre D et attaché à un point fixe C de la table.

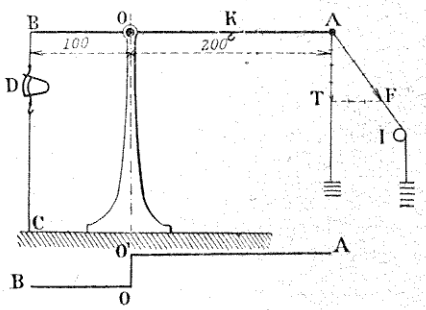


Fig. 56.

Le levier A est construit de telle sorte qu'il demeure horizontal quand le dynamomètre est en place.

Au point A, j'attache un fil qui passe sur une baguette cylindrique I et reçoit une charge de 5 kilogrammes; le levier tend à se relever vers B, la tension du fil BC qui le retient est de 8 kilogrammes indiquée par le dynamomètre. Je retire le cordon de A de sur la poulie et le laisse pendre verticalement. Je constate que, pour obtenir la même tension, 8 kilogrammes du dynamomètre, il ne faut accrocher que 4 kilogrammes en A. Ces 4 kilogrammes représentent la projection AT de la force AF sur la perpendiculaire à OA (l'angle TAF est l'angle aigu d'un triangle rectangle dont les côtés sont 3, 4, 5).

47. Proportionnalité des effets rotatifs. — **1° Aux forces.** — En A, j'agis avec une force de 4 kilogrammes; elle produit dans le fil BC une tension de 8 kilogrammes. Je substitue à 4 kilogrammes une force triple 12 kilogrammes, le dynamomètre accuse une tension triple 24 kilogrammes.

L'effet rotatif est donc proportionnel à l'intensité de la force.

2° **Aux bras de levier.** — La distance OA de l'axe du levier à la force AT représente le bras de levier de la force AT par rapport à l'axe O.

Un poids de 4 kilogrammes, agissant en A, produit dans BC une tension de 8 kilogrammes. Si je suspends les poids de 4 kilogrammes au milieu K de OA, le dynamomètre n'accuse plus qu'une tension de 4 kilogrammes, soit $\frac{8}{2}$ kilogrammes.

L'effet rotatif est donc proportionnel au bras de levier.

Cela nous explique qu'un âne actionne aisément un manège lorsqu'il agit à l'extrémité de la barre d'attache, tandis que les efforts d'un cheval restent vains s'ils s'exercent près de l'axe.

Par suite, l'effet rotatif d'une force est proportionnel au produit de l'intensité de la force par son bras de levier. Ce produit se nomme le **moment de la force par rapport à l'axe de rotation.** Il caractérise l'effet rotatif de cette force. Il s'exprime en kilogrammes par mètre, à condition de prendre pour unité de moment l'effet d'une force de 1 kilogramme agissant normalement à l'extrémité d'un levier de 1 mètre.

Le moment d'une force par rapport à un axe se représente par le symbole $M_{axe\,O}$ AT qui se lit : *moment par rapport à l'axe O de* AT.

Si AT = 4 kilogrammes, OA = 20 centimètres, on a :

$$M_{axe\,O}\ AT = 4 \times 0{,}20 = 0^{kg},80 \text{ par mètre,}$$

c'est-à-dire produit le même effet que $0^{kg},80$ agissant perpendiculairement au bout d'un levier de 1 mètre.

On pourrait encore l'exprimer en kilogrammes par centimètre ou par millimètre, ce serait 80 kilogrammes par centimètre ou 800 kilogrammes par millimètre.

48. Moment d'une force AF oblique au levier par rapport à l'axe de rotation O. — L'effet rotatif de cette force est égal à celui de sa composante tangentielle AT. On a donc :

$$M_{axe\,O}\ AF = M_{axe\,O}\ AT = AT \times OA.$$

Menons OH perpendiculaire à AF. La similitude des triangles OHA et ATF (équiangles) donne :

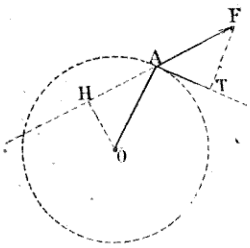


Fig. 57.

$$\frac{AT}{OH} = \frac{AF}{OA}$$

ou

$$AT \times OA = OH \times AF.$$

Par suite

$$M_{axe\,O}\ AF = AF \times OH,$$

soit l'intensité de la force multipliée par son bras de levier OH : plus courte distance de la force à l'axe de rotation.

Le moment d'une force situé dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation d'un corps représente l'effet rotatif de cette force et est égal au produit de l'intensité de la force par son bras de levier.

La force AF fait tourner le corps dans le sens de la flèche, une force AF′ directement opposée le ferait tourner en sens contraire. Pour préciser l'effet rotatif, il faut donc affecter le moment d'un signe. Conventionnellement nous le considérerons comme *positif* quand la force entraîne une rotation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, *négatif* dans le sens contraire.

49. Moment d'une force non rectangulaire avec l'axe de rotation. — Je décompose cette force en trois autres :

1° L'une parallèle à l'axe, ayant pour effet de déplacer le corps longitudinalement, d'effet rotatif nul ;

2° La deuxième passant par l'axe sur lequel elle exerce une pression transversale, d'effet rotatif nul ;

3° La troisième rectangulaire avec l'axe, qui seule a un effet rotatif.

Le moment de cette composante est le moment de la force par rapport à l'axe.

50. Application des moments à l'équilibre d'un levier. — Soit le levier AOB oscillant autour de l'axe O et sollicité par deux forces F et F′ tendant à le faire tourner en sens inverse.

Pour l'équilibre, il faut que les effets rotatifs soient égaux et contraires :

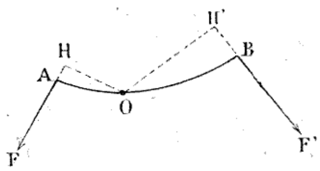


FIG. 58.

(1) $M_{axe\,O}\,AF = M_{axe\,O}\,AF$

ou

$$AF \times OH = BF' \times OH'$$

que l'on peut mettre sous la forme d'un rapport :

$$\frac{AF}{BF'} = \frac{OH'}{OH}. \qquad (2)$$

Les forces doivent être inversement proportionnelles à leurs bras de levier pour l'équilibre.

Si on considère le moment comme des quantités algébriques affectées de signe, la relation arithmétique (1) ou son égale

$$M_{axe\,O}\,AF - M_{axe\,O}\,AF' = o,$$

devient :

(3) $$(M_{axe\,O}\ AF) + (M_{axe\,O}\ AF') = o,$$

ce qu'on exprime ainsi : *Pour l'équilibre d'un levier la somme algébrique des moments des deux forces par rapport à l'axe de rotation doit être nulle.*

51. Moments des forces concourantes. — *Quand plusieurs forces concourantes situées dans un même plan perpendiculaire à l'axe de rotation agissent à l'une des extrémités d'un levier mobile autour de cet axe, l'effet rotatif produit par ces forces est égal à l'effet produit par leur résultante.*

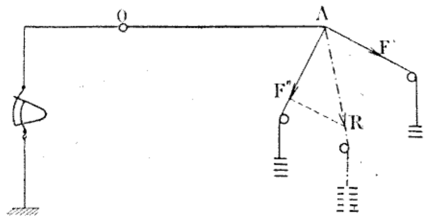


Fig. 59.

Ce principe peut se vérifier expérimentalement (*fig.* 59), en faisant agir simultanément deux forces AF' et AF'' de 3 kilogrammes et de 4 kilogrammes à l'extrémité du levier A ; le dynamomètre accuse la même tension que lorsqu'on les remplace par leur résultante en grandeur et direction AR = 5 kilogrammes.

Donc l'effet rotatif de la résultante est égal à la somme des effets rotatifs des composantes s'ils sont de même sens ou à leur différence s'ils sont de sens contraire.

En généralisant, nous dirons que *le moment par rapport à un axe de la résultante de plusieurs forces concourantes situées dans un plan perpendiculaire est égal à la somme algébrique des moments des composantes par rapport au même axe :*

$$(M_{axe\,O}\ R) = (M_{axe\,O}\ F') + (M_{axe\,O}\ F'').$$

Démonstration (*fig.* 60). — Soit à montrer que :

$$M_{axe\,O}\ R = M_{axe\,O}\ F' + M_{axe\,O}\ F''.$$

L'effet de AF' est celui de la composante tangentielle AT', projection sur Ax de la force AF'. Donc :

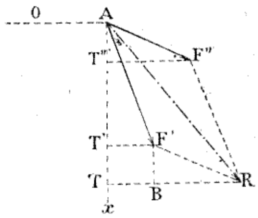


FIG. 60.

$$M_{axe\,O}\,F' = AT' \times OA.$$

On a de même :

$$M_{axe\,O}\,F = AT'' \times OA,$$

et

$$M_{axe\,O}\,R = AT \times OA.$$

Le problème revient donc à montrer que :

$$AT \times OA = AT' \times OA + AT'' \times OA$$
$$= OA\,(AT' + AT''),$$

ou

$$AT = AT' + AT''.$$

Menons F'B parallèle à Ax, les triangles rectangles AF''T'' et F'BR sont égaux ($AF'' = F'R$, $\widehat{F''AT''} = \widehat{RF'B}$), donc $AT'' = F'B$; par suite :

$$AT' + AT'' = AT' + T'T = AT.$$

52. Moments des forces parallèles. — *L'effet rotatif de plusieurs forces parallèles agissant sur un corps mobile autour d'un axe perpendiculaire à leur direction est égal à l'effet rotatif de leur résultante.*

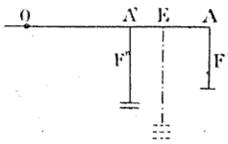


FIG. 61.

La vérification expérimentale se ferait très facilement toujours avec l'appareil (*fig.* 61). On fait agir simultanément deux forces AF' et A'F'' de 1 kilogramme et 2 kilogrammes par exemple, on constate une certaine tension, on les remplace par un poids de 3 kilogrammes agissant en E tel que $AE = \frac{2}{3} AA'$, c'est-à-dire leur résultante : le dynamomètre accuse la même tension.

On peut exprimer la même loi de la manière suivante :

La somme algébrique des moments de plusieurs forces parallèles par rapport à un axe rectangulaire avec elles est égale au moment de leur résultante par rapport au même axe.

53. Cas particulier du couple. — Soit un corps mobile autour d'un axe O, sollicité par deux forces F′, F″ égales parallèles, de direction différente, mais situées dans un plan perpendiculaire à l'axe.

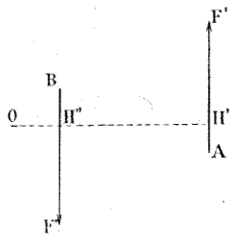


Fig. 62.

L'effet de ce couple est égal à la somme ou à la différence des effets rotatifs des deux forces selon le sens de la rotation que tend à communiquer au corps chaque force. Dans le cas de la figure 62, les moments sont de signe contraire :

$$M_{\text{axe O}}\ AF' = AF' \times OH' ;$$
$$M_{\text{axe O}}\ BF'' = -\ BF'' \times OH''.$$

La somme de leurs effets est :

$$AF' \times OH' - BF'' \times OH'',$$

ou, comme $AF' = BF''$,

$$AF'(OH' - OH'') = AF' \times H'H''.$$

C'est le moment du couple. Il est égal au produit de l'intensité de la force commune par la distance des deux forces nommée le bras de levier du couple.

Si $F' = 200$ kilogrammes, $H'H'' = 0^{m},30$, le moment du couple sera :

$$200 \times 0,30 = 60 \text{ kilogrammes par mètre.}$$

On voit que l'effet rotatif d'un couple est le même quelle que soit la position de l'axe, pourvu que celui-ci soit perpendiculaire au plan du couple.

Le même effet serait produit par une force agissant dans un plan perpendiculaire à l'axe et dont l'intensité :

$$F = \frac{\text{moment du couple}}{\text{bras de levier de la force}}.$$

54. Application de la théorie des moments à l'équilibre des corps. — 1° Si le corps est libre dans l'espace, l'équilibre a lieu lorsque la résultante des forces qui agissent sur lui est nulle. Alors le moment de la résultante par rapport à un axe quelconque est nul ;

2° Si le corps possède un point fixe ou un axe fixe, la résultante doit être détruite par la résistance du point ou de l'axe fixe, par suite passer par cet axe ou ce point et avoir un moment nul par rapport à cet axe.

Donc, en admettant que le moment d'une force est positif lorsque cette force tend à faire tourner son bras de levier dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et négatif dans l'autre cas :

Un corps possédant un point fixe ou un axe fixe est en équilibre lorsque la somme algébrique par rapport à ce point ou à cet axe de toutes les forces qui agissent sur ce corps est nulle.

55. Exercices pratiques. — *Un charpentier veut faire quartier à une pièce de bois équarrie de* 30 *centimètres de côté pesant* 100 *kilogrammes en agissant normalement à l'extrémité de la diagonale* OA *de la section. Quel effort doit-il déployer ?*

Il faut que l'effet rotatif de AF égale l'effet inverse du poids GP, c'est-à-dire que leurs moments par rapport à O soient égaux ou :

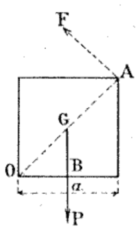


Fig. 63.

$$AF \times OA = GP \times OB$$

et

$$AF = GP \times \frac{OB}{OA} = GP \times \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{2}} = GP \times \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{P\sqrt{2}}{4} = \frac{100 \times 1{,}414}{4} = 35^{kg},3.$$

Sur un arbre de transmission sont calées trois poulies de 200 millimètres, 320 millimètres, 360 millimètres de diamètre, qui transmettent respectivement un effort tangentiel de 150, 60, 50 kilogrammes. Quel est l'effort tangentiel qui doit être communiqué à la poulie motrice de 200 millimètres de diamètre pour permettre ce travail?

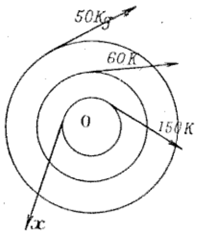


FIG. 64.

Il faut que la somme des effets rotatifs des trois poulies par rapport à l'axe O soit égale au moment de l'effort tangentiel de la poulie motrice par rapport à cet axe. En appelant x, l'effort cherché, on a :

$$x \times 100 = 150 \times 100 + 60 \times 160 + 50 \times 180$$
$$= 33.600 \text{ kilogrammes par millimètre.}$$
$$x = \frac{33.600}{100} = 336 \text{ kilogrammes.}$$

EXERCICES A RÉSOUDRE

I — Un cheval et un âne agissent sur un manège avec des efforts respectivement égaux à 60 et 15 kilogrammes à des extrémités de leviers égaux à $2^m,50$ et 3 mètres.

1° Quel est l'effet rotatif de ces deux animaux ?

2° Quelle est l'action normale qu'il faudrait exercer à l'extrémité d'un levier de 4 mètres de longueur ?

II. — Deux ouvriers agissent sur une double manivelle dont les rayons ont respectivement $0^m,40$ et $0^m,30$ avec des efforts de 8 kilogrammes et 10 kilogrammes faisant un angle de 60° avec les rayons. Calculer le couple moteur et indiquer quel serait l'effort tangentiel à communiquer à une poulie motrice de 180 millimètres de diamètre pour obtenir la même rotation de l'arbre,

III. — On donne deux forces parallèles et de sens contraire, $F = 8$ kilogrammes dirigée vers le haut et $F' = 5$ kilogrammes dirigée vers le bas et située à 24 centimètres à droite de F.

Déterminer leur résultante et chercher le moment de F, de F' et de R par rapport à un point O situé à 16 centimètres à droite de F'.

Vérifier numériquement le théorème de Varignon :

$$M_0R = M_0F + M_0F',$$

en se conformant à la règle des signes.

Représentation graphique à l'échelle de 4 millimètres pour 1 kilogramme et de 1 millimètre pour 20 millimètres.

VI. — CENTRE DE GRAVITÉ

56. Définitions. — Lorsqu'un corps est abandonné à lui-même, il tombe suivant une ligne droite verticale ; la cause de ce mouvement est une force que l'on appelle *pesanteur*. Cette force agit sur tous les corps, quels que soient leur volume et leur poids, et, si l'on brise le mobile précédent, tous les morceaux, si minuscules qu'ils soient, tomberont suivant chacun une verticale.

On peut donc admettre que toutes les molécules du corps (plus petite partie libre) sont soumises à l'action de la pesanteur et que c'est la résultante de toutes ces forces qui attire le corps entier vers le centre de la Terre. On appelle *poids du corps* la résultante de toutes ces forces qui sont sensiblement parallèles et *centre de gravité* son point d'application.

Il n'existe de centre de gravité que pour les corps pesants ; mais, si l'on considère des volumes égaux de matières homogènes, le centre de gravité sera le même point dans tous les cas ; on a été amené à dire centre de gravité d'un volume et par extension d'une surface (plaque de faible épaisseur) d'une ligne (barre de faible section).

57. Détermination géométrique du centre de gravité (C. de G.). — *a*) **Figures ayant un centre**, c'est-à-dire un point qui partage en deux segments égaux toute droite passant par ce point et limité au contour extérieur.

Le C. de G. se confond avec le *centre de figure*.

En effet, soit G ce centre (*fig.* 65). A tout point A du corps correspond un autre point A' tel que OA = OA' ; la résultante partielle des forces appliquées en A et A' passe par G ;

de même pour BB′, CC′, ... ; par conséquent la résultante définitive est appliquée en G.

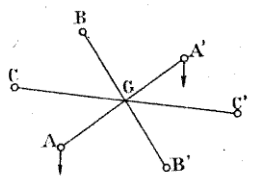


Fig. 65.

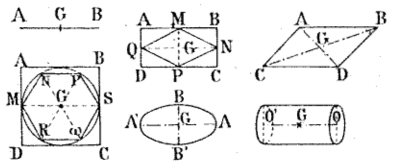


Fig. 66 à 71.

Ex. : 1, segment de droite, AB ; 2, circonférences et cercle ; 3, couronne circulaire ; 4, contour et surface d'une ellipse ; 5, polygone régulier d'un nombre double de côtés ; 6, carré ; 7, rectangle ; 8, losange ; 9, parallélogramme (*fig.* 66 à 71) ; cylindre, sphère, tore de révolution, cube, polyèdre régulier, parallélipipède.

b) **Figures ayant un diamètre.** — Le diamètre d'une figure est une droite qui partage en deux segments égaux toutes les cordes parallèles à une certaine direction.

Ex. : médiane d'un triangle, diagonale d'un parallélogramme ou d'un rectangle, diamètre d'une ellipse, axe d'un cylindre ou d'un cône oblique, médiane d'un trapèze, etc... Le diamètre est appelé axe de symétrie lorsque la direction des cordes lui est perpendiculaire. Ex. : axe d'un cône droit, d'un cylindre, hauteur d'un triangle isocèle, diamètre d'un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés... ***Si la figure** possède un diamètre, son C. de G. y est situé ; si elle en possède plusieurs ils sont concourants au C. de G.*

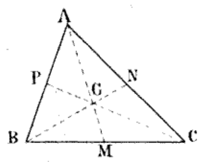


Fig. 72.

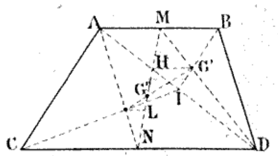


Fig. 73.

Applications. — 1° Le C. de G. de la surface d'un triangle est au point de concours des médianes AM, BN, CP (*fig.* 72) ;

2° Pour la surface d'un trapèze, le point G se trouve à l'intersection de la médiane MN et de la droite qui joint les C. de G. G′, G″ des deux triangles formés par une diagonale AD (*fig.* 73);

Par G′ et G″ menons des parallèles à AB jusqu'à leur rencontre en H et L avec MN :

$$MH = HL = LN.$$

La similitude des triangles GHG′ et GLG″ donne la relation :

$$\frac{GH}{GL} = \frac{G'H}{G''L}.$$

Or

$$G'H = \frac{ND}{3} = \frac{B}{6} \qquad \text{et} \qquad G''L = \frac{AM}{3} = \frac{b}{6}.$$

Donc :

$$\frac{G'H}{G''L} = \frac{GH}{GL} = \frac{B}{b}.$$

$$\frac{GH}{GH + GL} = \frac{GH}{HL} = \frac{B}{B + b}, \qquad GH = HL \times \frac{b}{B + b},$$

$$GL = HL \times \frac{b}{B + b}.$$

$$\frac{GM}{GN} = \frac{MH + GH}{NL + GL} = \frac{HL + GH}{HL + GL} = \frac{HL\left(1 + \frac{B}{B + b}\right)}{HL\left(1 + \frac{b}{B + b}\right)} = \frac{2B + b}{2b + B} = \frac{B + \frac{b}{2}}{b + \frac{B}{2}}.$$

Si l'on porte BP = CD = grande base B, CQ = AB = petite base b, et si l'on joint QP, la similitude des triangles GMP, GNQ donne la relation :

$$\frac{GM}{GN} = \frac{MP}{NQ} = \frac{MB + BP}{NC + CQ} = \frac{\frac{b}{2} + B}{\frac{B}{2} + b}.$$

D'où la construction graphique de la figure 74.

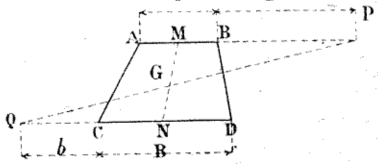


Fig. 74.

3° Dans un polygone régulier d'un nombre impair de côtés, le point G est au centre, car AM et BP sont deux axes de symétrie (*fig.* 75).

4° Le C. de G. d'un quadrilatère quelconque (*fig.* 76), s'obtient en joignant les C. de G. M, N des triangles formés par une diagonale AC, puis les C. de G. P, Q des triangles formés par l'autre diagonale BD.

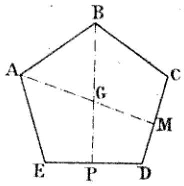


Fig. 75.

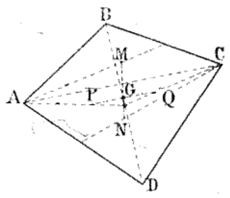


Fig. 76.

c) **Corps ayant un plan diamétral,** c'est-à-dire un plan tel qu'il partage toutes les cordes parallèles à une certaine direction, en deux segments *égaux. Le C. de G. du corps est contenu dans ce plan, qui prend le nom de plan de symétrie s'il est perpendiculaire à la direction des cordes.*

Applications. — 1° Le plan situé à égale distance des deux bases d'un prisme (cordes parallèles aux arêtes latérales) est un plan diamétral qui contient G; ce point est aussi sur la ligne qui joint les C. de G. MN des deux bases ; donc il est à l'intersection du plan et de la droite ; c'est le milieu de MN (*fig.* 77) ;

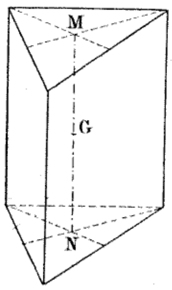


Fig. 77.

2° Dans un tétraèdre (pyramide triangulaire), le plan formé par la médiane d'une face triangulaire et le sommet opposé est un plan diamétral. Il y a quatre faces, douze médianes et douze plans diamétraux qui passent tous par G, situé au quart à partir de la base sur la droite qui joint un sommet S au C. de G. de la base opposée O (*fig.* 78).

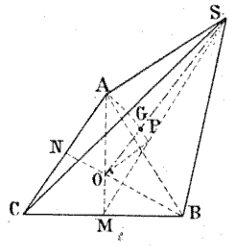


Fig. 78.

En effet, si l'on considère le plan diamétral SAM dans lequel on trace les droites SO, AP et OP la relation :

$$\frac{MO}{MA} = \frac{MP}{MS} = \frac{1}{3},$$

entraîne la relation :

$$\frac{OP}{AS} = \frac{1}{3},$$

le parallélisme de OP, AS et la similitude des triangles OPG, SAG, et par suite :

$$\frac{OG}{GS} = \frac{PG}{GA} = \frac{OP}{SA} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{OG}{OG + GS} = \frac{OG}{OS} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}.$$

C. Q. F. D.

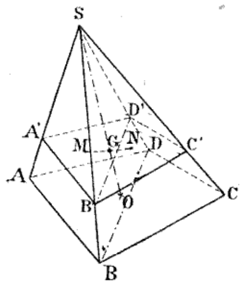


Fig. 79

3° Dans une pyramide quelconque, le C. de G. est situé au quart à partir de la base sur la ligne qui joint le sommet S au C. de G. O de cette base. Une décomposition en pyramides triangulaires qui ont toutes leur C. de G. M, N, ... dans le même plan parallèle à la base au quart de la hauteur montre ce fait (*fig.* 79).

4° Il en est de même pour le cône.

d) **Théorème de Guldin.** — 1° *La surface engendrée par une ligne plane tournant autour d'un axe contenu dans son plan et ne la coupant pas est égale à la longueur de cette ligne multipliée par la circonférence que décrit son C. de G.*

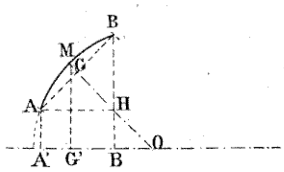


Fig. 80.

Applications. — 1° Le C. de G. d'un arc de cercle est situé sur son axe de symétrie à une distance du centre x qui est la quatrième proportionnelle entre la longueur de l'arc l, celle de la corde c et celle du rayon R :

$$\frac{l}{c} = \frac{R}{x}, \qquad x = \frac{cR}{l}.$$

En effet la surface décrite est celle d'une zone sphérique :

$$S = 2\pi R \times (A'B') = 2\pi (GG') \times l,$$

$$\frac{R}{l} = \frac{GG'}{A'B'} = \frac{OG}{AB} = \frac{x}{c} \text{ (tr. sb. GOG' et ABH)},$$

$$x = \frac{cR}{l}.$$

Pour une demi-circonférence,

$$x = \frac{2R \times R}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}.$$

2° *Le volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne la coupant, est égal au produit de cette surface par la circonférence que décrit son C. de G.*

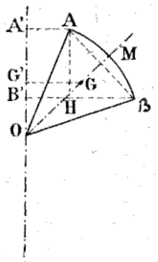


Fig. 81.

Application. — Le C. de G. d'un secteur circulaire est situé sur son axe de symétrie à une distance du centre :

$$x = \frac{2}{3}\,\frac{cR}{l}.$$

En effet le volume décrit est celui d'un secteur sphérique :

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 (A'B') = 2\pi (GG') \times \frac{lR}{2};$$

en divisant les deux membres par πR :

$$\frac{2}{3} R (A'B') = (GG')\, l, \qquad \frac{2R}{3l} = \frac{GG'}{A'B'} = \frac{OG}{AB} = \frac{x}{c},$$

$$x = \frac{2}{3}\,\frac{cR}{l}.$$

e) **Figures quelconques.** — 1° Pour trouver le C. de G. du contour, on supposera appliquée au milieu de chaque segment de droite une force proportionnelle à sa longueur ; ensuite on composera toutes ces forces. Ex. : périmètre d'un triangle ; charpente formée de barres ayant toutes la même section ;

2° Pour trouver le C. de G. de la surface, on la décomposera en triangles ou, si possible, en parallélogrammes et en rectangles; on supposera appliquée au C. de G. de chacun une force proportionnelle à sa surface, puis on composera toutes ces forces.

58. Détermination expérimentale du C. de G. — Prenons une reproduction en carton de la section d'une cornière et suspendons-la à un fil par un de ses points A. Le point G se trouve sur la direction du fil OA, c'est une condition d'équilibre (n° 54). Si on suspend une seconde fois le corps en B, le point G se trouvera sur la direction OB, donc à l'intersection de OA et OB.

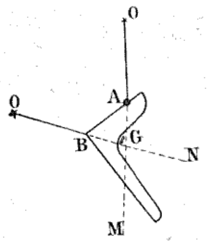


Fig. 82.

En plaçant le carton sur une arête vive (fil tendu, double décimètre placé sur champ), on obtiendrait également, l'équilibre étant établi, deux droites telles que AM et BN déterminant G.

59. Équilibre sous l'action de la pesanteur seule d'un solide suspendu en un de ses points. — Cet équilibre a lieu (n° 54) lorsque la verticale passant par G passe aussi par le point de suspension. Il est **stable** si le C. de G. est au-dessous du point de suspension O. C'est le cas d'une règle plate disposée comme l'indique la figure 83; c'est encore le cas des balances du fil à plomb et du pendule.

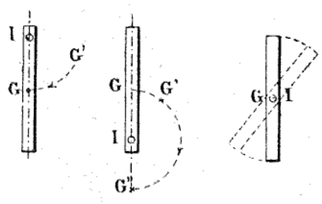


Fig. 83. Fig. 84. Fig. 85.

Si ces corps sont légèrement écartés de leur position d'équilibre, ils tendent à y revenir.

L'équilibre est **instable** si le C. de G. est au-dessus du point de suspension (*fig.* 84); le moindre écart tend à faire tourner le corps pour l'amener à une position d'équilibre plus stable.

Lorsque l'axe de suspension passe par G, le corps est en équilibre quelle que soit la position dans laquelle on le place; l'équilibre est **indifférent** (*fig.* 85).

60. **Description de la balance ordinaire.** — On appelle balance tout instrument destiné à déterminer le poids des corps en comparant leur action sur un levier ou un système de leviers avec celle de poids marqués.

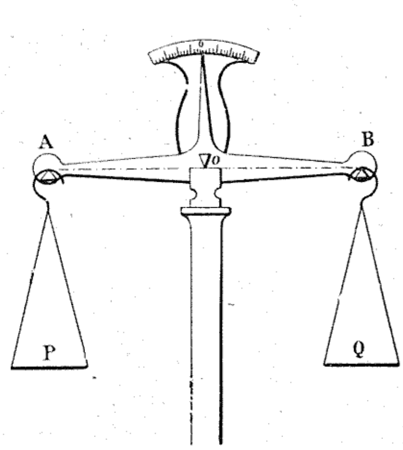


Fig. 86.

Une balance ordinaire (*fig.* 86) se compose d'un levier inter-appui appelé **fléau** dont les bras sont égaux : OA = OB. Ce fléau porte en son milieu O et à ses extrémités A et B trois prismes triangulaires en acier appelés **couteaux** possédant chacun une arête vive horizontale ; ces trois arêtes sont parallèles et situées dans un même plan. Celle du milieu constitue l'**axe de suspension** de la balance, elle est tournée vers le bas et repose sur deux plaques d'acier ou d'agate parfaitement polies, appelées **chape** et placées à la partie supérieure d'une **colonne** rendue verticale par un trépied à vis calantes. Cette disposition a pour but : 1° d'éviter les frottements de l'axe ; 2° d'assurer son horizontalité.

Les couteaux A et B ont leurs arêtes vives en haut, sur lesquelles reposent par l'intermédiaire de crochets les **plateaux** P et Q. Une aiguille solidaire du fléau et perpendiculaire en son milieu se déplace devant un cadran fixé à la colonne.

61. **Justesse.** — On dit qu'une balance est juste si son fléau est horizontal quand les plateaux sont vides ou chargés de poids égaux. Pour cela, il faut et il suffit que : 1° *la verticale du C. de G. de la partie mobile* (*fléau et plateaux*) *passe*

par l'axe de suspension; 2° les distances des points A *et* B *au plan vertical de cet axe soient égales.*

En effet, si ces conditions sont remplies, en désignant par F le poids de la partie mobile, on a successivement :

$$\begin{aligned} M_0F &= o, \\ M_0P + M_0Q &= (P \times OA) + (-Q \times OB) = o, \\ M_0F + M_0P + M_0Q &= o \text{ (il y a équilibre si } P = Q). \end{aligned}$$

Si la première seule est omise, en désignant par d la distance de G au plan vertical de l'axe O :

$$M_0F = \pm (F \times d) \neq o \text{ (pas d'équilibre)}.$$

Si la deuxième seule est omise, en désignant par $a = OA - OB$ la différence des distances de A et B au plan, pour $P = Q$:

$$\begin{aligned} M_0F + M_0P + M_0Q &= o + (P \times OA) + (-Q \times OB) \\ &= P\,(OA - OB) = P \times a \neq o \\ &\qquad \text{(il n'y a pas équilibre)}. \end{aligned}$$

Si les deux sont omises simultanément, il n'y peut y avoir équilibre que dans un seul cas :

$$M_0F + M_0P + M_0Q = (F \times d) + (P \times a),$$
$$P = -\frac{F \times d}{a}.$$

Remarque. — d et a peuvent être $> o$ ou $< o$.

Pratiquement, on vérifie la justesse en s'assurant que le fléau reste horizontal quand on change de plateau deux corps se faisant équilibre.

62. Sensibilité. — Une balance est sensible au gramme, au centigramme, au milligramme, ... lorsque le fléau s'incline d'une façon visible pour une surcharge de 1 gramme, 1 centigramme, 1 milligramme, ... placée dans l'un des plateaux. Cette définition un peu vague, puisqu'elle peut varier avec chaque opérateur, peut être précisée ainsi : *La sensibi-*

lité est l'inverse de la surcharge p qu'il faut ajouter à l'un des plateaux P, *par exemple, pour que le fléau s'incline d'un angle donné* α *avant de se mettre en équilibre* (*fig.* 87).

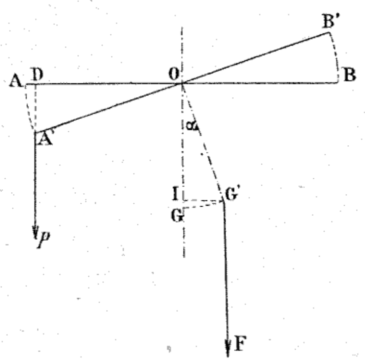


Fig. 87.

La sensibilité est proportionnelle à la longueur OA $= a$ *du bras du fléau; elle est inversement proportionnelle au poids* F *du fléau et à la distance* OG $= d$ *de son C. de G. au-dessous de l'axe de suspension; elle est indépendante du poids des plateaux et de leur charge lorsque les trois arêtes vives sont dans un même plan horizontal.*

En effet, lorsque l'équilibre a lieu :

$$M_0p + M_0F = +(p \times OD) + (-F \times G'I) = o,$$
$$p \times OD = F \times G'I = F \times G'I \times \frac{OI}{OI},$$
$$p = \frac{G'I}{OI} \times F \times \frac{OI}{OD} = \frac{G'I}{OI} \times F \times \frac{OG'}{OA'}$$

(similitude des triangles ODA' et OIG').

D'ailleurs le rapport $\frac{G'I}{OI}$ est constant pour un même angle α, c'est sa tangente trigonométrique $\left(\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{m}\right)$:

$$OG' = OG = d \qquad \text{et} \qquad OA' = OA = a.$$

Donc :

$$p = \frac{1}{m}\frac{Fd}{a}; \qquad \frac{1}{p} = m \times \frac{a}{Fd}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

63. Construction. — Jusqu'alors nous avons négligé les *frottements* des organes; ils doivent être réduits au minimum (arêtes vives et plaques polies), car ils diminuent la justesse et la sensibilité. Nous verrons plus tard qu'une certaine surcharge est nécessaire pour vaincre ces frottements avant d'agir sur le levier. La *résistance des pièces* doit être suffisante pour qu'il n'y ait ni détérioration des arêtes, ni flexion du fléau.

Enfin le C. de G. doit être au-dessous de l'axe, car, s'il est sur cet axe, le fléau s'incline sans aucune *oscillation* pour la moindre surcharge; s'il est au-dessus, l'équilibre est instable et la balance *trébuche*, on dit qu'elle est *folle*.

64. Pesées. — 1° Si la balance est juste, on place le corps dans le plateau P et des poids marqués dans l'autre Q jusqu'à ce que l'équilibre soit indiqué par l'aiguille, qui se trouve alors en face du zéro du cadran;

2° **Double pesée de Borda.** — On fait équilibre au corps avec une tare dans l'autre plateau; on le remplace ensuite par des poids marqués. Les deux poids produisant le même effet sont égaux, même si la balance n'est pas juste;

3° Pour des opérations très précises, on doit tenir compte du déplacement de l'air, qui occasionne une pression verticale de bas en haut égale au poids du volume d'air déplacé.

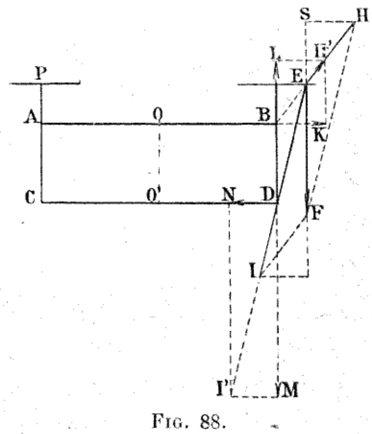


Fig. 88.

65. Balance de Roberval (*fig.* 88). — Elle consiste en un parallélogramme formé de quatre barres rigides articulées en A, B, C et D. Les leviers AB et CD sont mobiles autour de deux axes fixes horizontaux situés en O, milieu de AB, et en O′, milieu de CD. Cette disposition oblige les barres AC et

AD à rester parallèles à OO′, par suite verticales. Les plateaux P et Q étant soutenus par le bas permettent un placement commode du corps à peser. Nous allons montrer que ce corps peut être placé en un point quelconque E du plateau.

En effet, son poids EF peut être décomposé en deux forces EH, EI passant par les articulations B et D.

Ces composantes peuvent être transportées en BH′, DI′, puis décomposées à leur tour, la première suivant BL et BK, la seconde suivant DM et DN.

Or BK est détruite par la résistance de l'axe O, DN l'est par la résistance de l'axe O′.

Restent les forces BL et DM de même direction BD et de sens contraire dont la résultante R = DM — BL.

Or

$$DM = SF \text{ (égalité des tr. SHF et MI′D)},$$

et

$$ES = BL \text{ (égalité des tr. SEH et LBH′)}.$$

Donc

$$R = DM - BL = SF - ES = EF \text{ (poids du corps)},$$

qui agit suivant BD. C. Q. F. D.

66. Romaine. — C'est encore un levier inter-appui, mais les bras du fléau sont inégaux ; sur le plus long OB peut glisser un poids curseur Q (*fig.* 89) ; sur l'autre est adapté en A un crochet auquel on suspend le corps à peser; en O, un crochet permet de suspendre l'appareil.

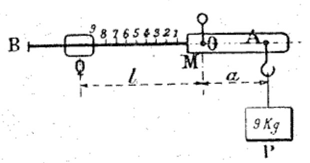


Fig. 89.

Si le C. de G. était, sans le corps ni le curseur, sur la verticale du point O, la distance OA = a étant fixe, il suffirait de connaître le poids du curseur Q et sa distance l au point O pour obtenir :

$$P = Q \times \frac{l}{a}.$$

Pratiquement l'équilibre n'existe à vide qu'avec le curseur; le calcul se complique, on l'évite en graduant l'appareil à l'aide de poids marqués, comme pour les pesons. A cet effet la règle MB porte des divisions 0, 1, 2, 3, ..., obtenues en marquant d'un trait l'endroit où s'arrête le bord droit du curseur, lorsqu'il fait équilibre à 0, 1, 2, 3, ..., kilogrammes placés successivement en A.

67. Équilibre d'un corps reposant sur un plan horizontal. — **1° Par un ou deux points.** — La verticale passant par le C. de G. doit aussi passer par le point de support ou par le segment de droite déterminé par les deux points.

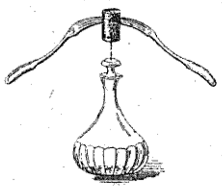


Fig. 90.

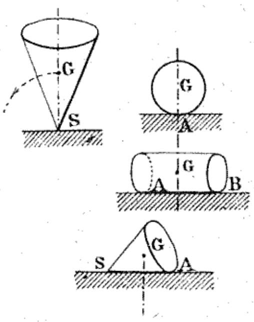


Fig. 91. à 94.

L'équilibre est stable si le C. de G. est placé au-dessous du point ou de la droite. Ex. : équilibriste (*fig.* 90).

Il est instable si le C. de G. peut occuper une position plus basse. Ex. : cône reposant par sa pointe (*fig.* 91) cycliste.

Il est indifférent si le C. de G. reste à la même hauteur lorsqu'on déplace légèrement le corps. Ex. : sphère reposant par un de ses points (*fig.* 92), cylindre (*fig.* 93) et cône (*fig.* 94) reposant par une génératrice.

2° **Par trois points ou plus non en ligne droite.** — Le triangle formé en joignant les trois points s'appelle **base de sustentation.** L'équilibre a lieu lorsque la verticale du C. de G. passe à l'intérieur de cette base. Il est plus ou moins stable selon que cette verticale s'éloigne plus ou moins des côtés du triangle. Pour une pente donnée, l'écart dépend de la hauteur. C'est pour cela que les voitures chargées haut sont peu stables (*fig.* 95); c'est pour cela encore que l'on a diminué la hauteur des roues des cycles et des automobiles.

Si le port d'un fardeau (*fig.* 96) déplace le C. de G. du corps d'un homme, instinctivement cet homme se penche du côté opposé pour ramener à l'intérieur de la base de sustentation la verticale du C. de G.

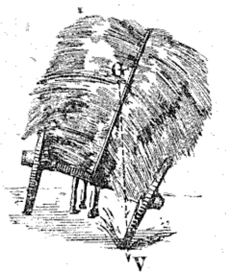


Fig. 95.

Fig. 96.

Le poids d'un corps quelconque se répartit de telle sorte qu'il soit équilibré par les réactions des appuis. La résultante des pressions exercées sur chacun d'eux est donc égale à la charge totale. Pour déterminer ces pressions, il suffit de résoudre le problème de la décomposition d'une force en plusieurs autres parallèles.

EXERCICES A RÉSOUDRE

Déterminer le C. de G. des sections ci-dessous; vérifier expérimentalement.

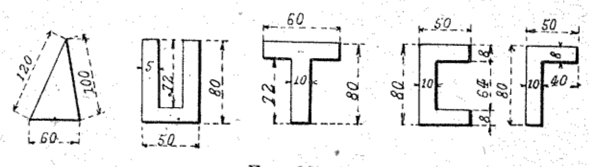


Fig. 96 *a*.

VII. — MOUVEMENT

68. Classification. — Nous avons déjà vu que le mouvement d'un point est **rectiligne** ou **curviligne** (n° 2) selon que sa trajectoire est droite ou courbe ; il est **circulaire** dans le cas où la courbe est une circonférence ou un arc de cercle.

Le mouvement est **continu** lorsque le mobile parcourt toujours sa trajectoire dans le même sens; ex. : point d'une courroie sans fin, d'une poulie, d'un volant, d'une corde que l'on descend dans un puits, d'une manivelle... Il est **alternatif** si le corps se déplace alternativement dans un sens et dans l'autre sur la même trajectoire; ex. : piston de pompe, de machine à vapeur, tiroir de distribution, tige commandée par une came, clapets et soupapes; pendule, balancier, fléau d'une balance...

A un autre point de vue, si le mobile parcourt des chemins égaux pendant des temps égaux, ces temps ayant une origine et une durée quelconque, le mouvement est **uniforme;** ex. : mouvement d'une locomotive en pleine marche en palier, cheval traînant une voiture, point d'une poulie de transmission, d'un volant, d'une roue hydraulique en marche normale... Le mouvement est **varié** dans tous les autres cas, mais alors il peut être :

Accéléré, si les espaces parcourus pendant des temps égaux sont de plus en plus grands ; ex. : train au départ de la gare, corps qui tombe... ;

Retardé, si les espaces sont de plus en plus petits ; ex. : ascension d'un corps lancé en l'air, train arrivant en gare, bille lancée sur le parquet ;

Uniformément varié, si ces espaces augmentent (accéléré) ou diminuent (retardé) de quantités égales pour des intervalles de temps égaux ; ex. : un corps tombant en chute libre parcourt :

	$4^m,9$ pendant la 1^{re} seconde,		
$4^m,9 + 9^m,8 = 14^m,7$	—	2^e	—
$14^m,7 + 9^m,8 = 24^m,5$	—	3^e	— etc.

Périodique, lorsque, après avoir varié pendant un certain temps appelé période, le mouvement du corps repasse exactement par les mêmes variations. Généralement ce mouvement est alternatif; sa « vitesse », d'abord nulle, augmente progressivement, puis diminue, redevient nulle, change de sens, varie encore et recommence une nouvelle phase analogue à la précédente; ex. : tige de piston, tiroir de distribution, tige ou soupape commandées par une came, balancier, pendule. Il peut arriver cependant que le mouvement soit continu ; ex. : point milieu d'une bielle motrice, du collier d'un excentrique circulaire... ;

Enfin **varié quelconque.**

Mouvement uniforme

69. Vitesse dans le mouvement rectiligne uniforme. — C'est l'espace parcouru pendant l'unité de temps; il résulte de la définition du mouvement uniforme que cette vitesse est constante :

$$v = C^{te}.$$

L'unité de longueur généralement adoptée en mécanique est le **mètre;** l'unité de temps est la **seconde.** La vitesse s'exprime donc en mètres par seconde. On emploie aussi d'autres unités, le kilomètre, le centimètre, le millimètre... ; la minute et l'heure ; mais alors on doit les désigner pour éviter toute équivoque ; ex. : on dit :

La vitesse du son dans l'air est de.......	340 mètres par seconde
— d'arrivée de l'eau à la roue est de	$2^m,50$ par seconde
— d'une poulie est de...........	120 tours par minute
— d'un train....................	70 kilomètres à l'heure.

70. Loi des espaces. — *Dans un mouvement uniforme, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir :*

$$e = v \times t,$$

d'où :

$$v = \frac{e}{t} \quad \text{et} \quad t = \frac{e}{v}.$$

71. Applications. — 1° *Un piéton marche à une vitesse de* $1^{m},10$ *à la seconde; quelle distance peut-il parcourir en une journée de* 6 *heures?*

$$v = 1^{m},10; \qquad t = 60^{s} \times 60 \times 6 = 21.600 \text{ secondes},$$
$$e = vt = 1^{m},1 \times 21.600 = 23.760 \text{ mètres ou } 23^{km},760.$$

2° *Quelle est la vitesse d'un cycliste qui parcourt* 500 *mètres en* 104 *secondes?*

$$v = \frac{e}{t} = \frac{500^{m}}{104} = 4^{m},80 \text{ par seconde.}$$

72. Représentation graphique. — Soient Ox et Oy deux droites rectangulaires appelées **axes de coordonnées** : l'axe des **temps** et celui des **espaces.** Soit M un point ainsi déterminé (*fig.* 97) :

1° Sa distance EM = OT à l'axe Oy représente à une échelle de temps déterminée (8 millimètres par seconde) la durée $t = 2$ secondes du mouvement depuis un instant pris pour origine ;

2° Sa distance TM = OE représente à l'échelle des espaces (1 millimètre par mètre) l'espace parcouru $e = 24$ mètres depuis la même origine.

Le lieu des points définis comme M *est la courbe représentative de la loi des espaces.* — En effet, en la supposant tracée, pour avoir l'espace parcouru par le mobile au bout du temps t', il suffit de porter OT' = t' à l'échelle des temps et de mesurer la perpendiculaire T'M' à Ox jusqu'à sa rencontre avec la ligne des espaces.

Sur le graphique, OT′ = 24 millimètres représentant $\frac{24}{8} = 3$ secondes. Ce chemin parcouru au bout de ce temps est $\frac{36}{1} = 36$ mètres ; puisque M′T′ mesure 36 millimètres.

Remarque. — Il ne faut pas confondre cette ligne représentative de la valeur de l'espace parcouru sur un chemin quelconque, sinueux par exemple, avec la trajectoire.

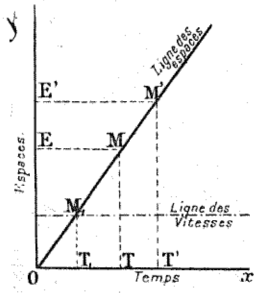
Quand le mouvement est uniforme, la ligne des espaces est une droite.

En effet, considérons deux points M et M′ de la ligne. Les triangles OMT et OM′T′ sont tous deux rectangles, T = T′ = 1 dr. ; d'autre part,

$$\frac{MT}{OT} = \frac{M'T'}{OT'}, \qquad \text{car} \qquad \frac{e}{t} = \frac{e'}{t'} = v,$$

donc ces triangles sont semblables, les angles MOT et M′OT′ sont par suite égaux, OM et OM′ se confondent et les trois points sont en ligne droite. La ligne des espaces passe par l'origine.

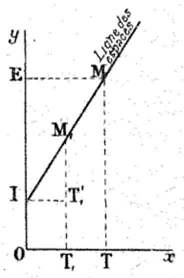
Parfois on est amené à considérer un mobile qui a déjà parcouru un espace OI = e_0 avant l'origine du mouvement uniforme, la ligne des espaces est encore une droite qui s'obtient comme la précédent, mais passe par le point I.



Echelle des espaces : 1 mm. par m.
Echelle des temps : 8 mm. par sec.

Fig. 97.

La ligne des espaces étant construite, on obtient la vitesse v en cherchant l'espace parcouru en 1 seconde, la première du mouvement par exemple. On prend $OT_1 = 1$ seconde, à l'échelle des temps, la longueur



Echelle des espaces : 1 mm. par m.
Echelle des temps : 8 mm. par sec.

Fig. 98.

M_1T_1 (*fig.* 97) ou M_1T_1 (*fig.* 98) représente la vitesse à l'échelle des espaces, soit dans le graphique $\frac{12}{1} = 12$ mètres. On voit que cette vitesse est d'autant plus grande que l'angle M_1OT_1 ou MOx se rapproche plus de 90°.

Pour déterminer l'époque correspondant à un chemin parcouru donné, on porte celui-ci à l'échelle des espaces sur Oy, soit OE ; on trace une parallèle à Ox jusqu'à sa rencontre avec la courbe des espaces. EM ou OT représente le temps à l'échelle des temps. Sur les graphiques ci-dessus, $OT = 16$ millimètres, $t = \frac{16}{8} = 2$ secondes.

On construit rapidement la ligne des espaces du mouvement uniforme en portant au point T_1 ($OT_1 = 1$ seconde) pris sur Ox la vitesse v dans le premier cas ou $v_0 + v$ dans le deuxieme cas et en joignant M_1O ou M_1I.

La vitesse étant constante durant tout le mouvement peut être figurée par une ligne parallèle à Ox à une distance M_1T_1, grandeur de la vitesse à l'échelle des longueurs.

Une ligne des vitesses parallèle à l'axe des temps annonce donc un mouvement uniforme.

73. Graphique des trains. — Les parcours des trains sur une même ligne et dans une même journée sont représentés par leurs courbes des espaces. Le mouvement du train est supposé uniforme entre deux gares consécutives.

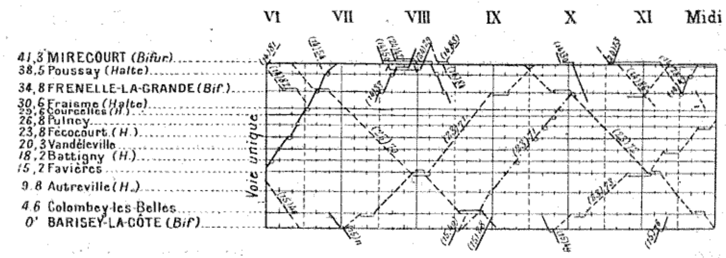


FIG. 99.

Lorsqu'il y a arrêt, l'espace parcouru étant nul, la ligne représentative est horizontale. Un traçage différent distingue les trains express (trait gros continu), les trains de voyageurs (trait fin continu), les trains de marchandises (trait mixte) et les trains facultatifs (pointillé).

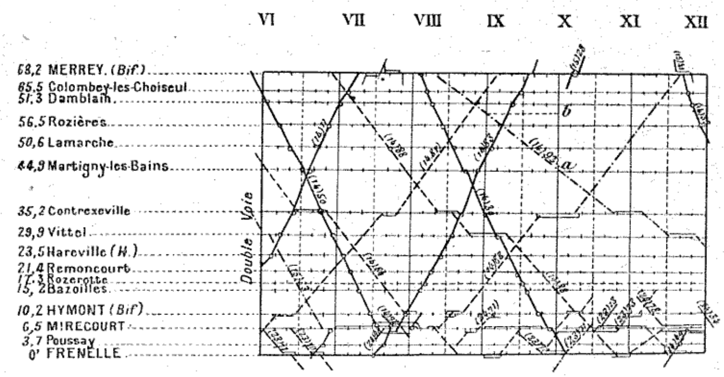


Fig. 100.

La figure 99 réprésente la marche des trains sur une voie unique de Mirecourt à Barisey-la-Côte, la figure 100 sur une double voie de Merrey à Frenelle. Echelle des longueurs, 1 millimètre par 2 kilomètres.

Ces graphiques permettent de se rendre compte des heures d'arrivée et de départ des trains dans les différentes gares, d'apprécier la vitesse relative des convois (plus la ligne se rapproche de l'horizontale, plus la vitesse est faible), de l'évaluer au besoin; ainsi le train de marchandises (14) 92 a pour vitesse ab à l'échelle, soit

$$6{,}5^{\mathrm{mm}} \times 2.000.000 = 13 \text{ kilomètres à l'heure.}$$

On voit également les endroits où les trains se rencontrent et où il est nécessaire d'établir des voies de garage. — Dans la figure 99, nous avons deux trains en gare en même temps à Favières; la voie étant unique, il faut établir un garage. Dans la figure 100, deux trains peuvent se croiser en cours de route ou en gare, la voie étant double, les garages ne sont nécessaires que lorsqu'il y a plus de deux trains, ce qui est le cas à Mirecourt.

74. Mouvement uniforme de rotation. — Dans ce mouvement, un point quelconque du corps parcourt sur une circonférence dont le centre est sur une droite fixe appelée **axe de rotation** des arcs égaux pendant des temps égaux. Ex. : manivelle, arbre, volant, poulie, roue dentée, roue hydraulique.

La vitesse de ces organes est généralement exprimée en **nombre de tours par minute,** parce que ce nombre n est le même pour tous les points et parce qu'il est facile à obtenir à l'aide d'un compteur. Ex. : Un volant fait 90 tours à la minute, une roue hydraulique fait 1/4 de tour.

Si l'on désigne par r la distance d'un point à l'axe de rotation, le chemin parcouru en une minute est égal au produit de la longueur de la circonférence $2\pi r$ par le nombre de tours n; c'est $2\pi rn$. Le chemin parcouru en une seconde ou **vitesse linéaire du point est :**

$$v = \frac{2\pi rn}{60} = \frac{\pi rn}{30}.$$

Application. — Un point de la jante d'une poulie de $0^m,30$ de rayon faisant 80 tours à la minute possède une vitesse linéaire de

$$v = \frac{\pi rn}{30} = \frac{3,1416 \times 0,3 \times 80}{30} = 2^m,513.$$

La vitesse linéaire varie avec chaque point; comme elle est proportionnelle au rayon de la circonférence décrite, il en résulte qu'elle est **nulle sur l'axe** et **maximum à la jante.**

La **vitesse angulaire** ω est au contraire la même pour tous les points; c'est **l'angle que décrit un rayon quelconque du corps en une seconde.**

L'**unité** d'angle adoptée est le **radian** ou **angle au centre** interceptant un **arc de longueur** égale au **rayon** (57° 17'...). Il en résulte que c'est la vitesse d'un point situé à l'unité de distance de l'axe, mais le nombre exprime des radians, au lieu d'exprimer des mètres. Or :

$$\omega^{r} = v^{m} = \frac{\pi \times 1^{m} \times n}{30} = \frac{\pi n}{30}.$$

La vitesse angulaire est proportionnelle au nombre de tours.

Application. — La vitesse angulaire de la poulie précédente est :

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \times 80}{30} = 8{,}3776 \text{ radians.}$$

D'ailleurs

Un tour vaut toujours 2π radians

et

Un radian vaut toujours $\frac{1}{2\pi}$ tour.

Si dans la formule

$$v = \frac{\pi r n}{30} = \frac{\pi n}{30} r,$$

on remplace $\frac{\pi n}{30} = \omega$ par sa valeur, on obtient $v = \omega r$.

La vitesse linéaire d'un point est égale au produit de sa vitesse angulaire par sa distance à l'axe.

Enfin

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = 0{,}3183 \times 30\omega = 9{,}549\omega,$$

et la durée d'un tour :

$$T^{s} = \frac{60}{n} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

75. Rapport des vitesses de deux poulies chaussées par une courroie (*fig.* 101) **ou de deux roues s'entraînant par friction ou par dents d'engrenage** (*fig.* 102). — Dans chaque cas, en supposant qu'il n'y ait pas de glissement dans les deux premiers, le chemin parcouru par un point de la jante des roues R et R′ est le même, la courroie et les roues se développant l'une sur l'autre.

Si l'on désigne par :

v et v', les vitesses linéaires des jantes ;
n et n', le nombre de tours des poulies ;
ω et ω', leurs vitesses angulaires,

on a alors :

$$\omega R = v = v' = \omega' R', \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R}.$$

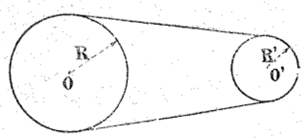


Fig. 101.

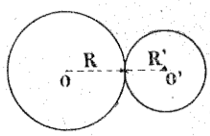


Fig. 102.

De même :

$$\frac{\pi R n}{30} = v = v' = \frac{\pi R' n'}{30}, \qquad \text{d'où} \quad R n = R' n' \quad \text{et} \quad \frac{n}{n'} = \frac{R'}{R}.$$

Le rapport des vitesses angulaires ou des nombres de tours de deux roues qui se conduisent est inverse du rapport des rayons correspondants.

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Un mobile animé d'un mouvement uniforme a parcouru 80 mètres en 16 secondes, on demande : 1° quelle est sa vitesse ; 2° le chemin qu'il aura parcouru au bout de 2 minutes 24 secondes ; 3° combien il mettra de temps pour parcourir 350 mètres.

II. — Construire à l'échelle de 1 millimètre pour 2 minutes et de 4 millimètres pour 1 kilomètre le graphique des trains suivants entre Elbeuf et Louviers de $2^h\,50$ à $7^h\,50$ (voie unique) :

KIL.	VILLES	ALLER			RETOUR		
0	Elbeuf......................	$2^h\,58$	$4^h\,59$	$6^h\,17$	$5^h\,44$	$6^h\,49$	$7^h\,41$
1	Caudebec-lès-Elbeuf.........	↓	5 3	↓	5 41	6 45	↑
2	Saint-Pierre-lès-Elbeuf......		5 8		5 38	6 42	$7^h\,36$
9	La Haye-Malherbe Arr....		5 20	$6^h\,27$	D 5 27	6 33	7 25
	La Haye-Malherbe Dép....		5 25	6 32	A 5 24	6 30	7 22
11	Tostes. La Vallée............		5 31	↓	5 18	6 24	↑
18	Saint-Germain...............		5 41		↑	6 11	
20	Louviers....................	$3^h\,30$	5 45	$6^h\,47$	$5^h\,3$	6 8	$7^h\,6$

III. — Une roue hydraulique de 6 mètres de diamètre a une vitesse de $1^m,20$ à la circonférence ; trouver sa vitesse angulaire ω et le nombre de tours qu'elle fait par minute.

IV. — Un camion de voie (écartement des roues) $1^m,60$, dont les roues ont $0^m,80$ de diamètre parcourt une courbe de 120 mètres de rayon et d'angle au centre 60° raccordant deux tronçons de route. Sachant que le déplacement de l'axe du véhicule s'est effectué à la vitesse de 8 kilomètres à l'heure, déterminer les nombres de tours respectifs des deux roues dans cette courbe en supposant qu'aucune des roues n'a patiné. En déduire une conclusion pratique pour le montage des roues sur les essieux.

V. — On chariote sur un tour un arbre de 60 millimètres de diamètre A cet effet on utilise un outil en acier à coupe rapide dont la vitesse de coupe est de 30 mètres par minute. Calculer le nombre de tours que doit faire l'arbre.

VIII. — TRAVAIL DES FORCES

76. Définition. — L'idée de **travail** est intimement liée à celle de **résistance vaincue**, par conséquent de **force agissante** ou **puissance** destinée à vaincre cette résistance, et à celle de déplacement du point d'application de cette force ou **chemin parcouru**. Ex. : 1° un manœuvre qui prend des briques à terre et les élève à la hauteur d'un échafaudage produit un **travail mécanique,** parce qu'il déploie un **effort musculaire** destiné à vaincre la résistance de la pesanteur (poids des briques), et qu'il y a déplacement de cet effort ; 2° un cheval qui traîne une voiture doit vaincre le frottement des tourillons et la résistance au roulement ; 3° un ajusteur qui lime ; 4° un menuisier qui rabote ; 5° un jardinier qui bêche ; 6° un cycliste qui pédale ; 7° l'eau qui anime une roue hydraulique ; 8° la vapeur qui amène le déplacement d'un piston, etc., accomplissent des travaux mécaniques.

77. Mesure du travail. — Mesurer un travail, c'est le comparer à un autre travail pris pour une unité.

Cette comparaison des travaux ne pouvant se faire directement, on la base sur les considérations suivantes :

1° Si l'on élève successivement à 1 mètre de hauteur 1 kilogramme, puis 1 kilogramme, puis 1 kilogramme, le travail total est le même que si on élève 3 kilogrammes à 1 mètre ; on dit que **le travail est proportionnel à l'intensité de la force.**

2° Si l'on élève un corps de 1 kilogramme successivement de 0 à 1 mètre puis de 1 à 2 mètres, puis de 2 à 3 mètres, enfin de 3 à 4 mètres, le travail est le même que si on élevait directement le corps de 0 à 4 mètres ; on dit que **le travail est proportionnel au chemin parcouru.**

Par suite, **le travail est égal au produit de la force par la longueur du chemin parcouru**, à condition de prendre comme **unité de travail** celui de l'**unité de force** déplaçant de l'**unité de longueur** son point d'application :

L'unité mécanique de **force** étant le **kilogramme** (1^{kg}),
— de **longueur** étant le **mètre** (1^{m}),
— de **travail** est le **kilogrammètre** (1^{kgm}).

C'est le travail nécessaire pour élever à 1 mètre de hauteur un corps pesant 1 kilogramme.

78. Travail d'une force unique constante en grandeur et direction. — C'est le cas que nous avons supposé.

$$T^{kgm} = F^{kg} \times L^{m}.$$

Le travail étant un produit de deux facteurs, on peut le représenter graphiquement par la surface d'un rectangle (*fig.* 103).

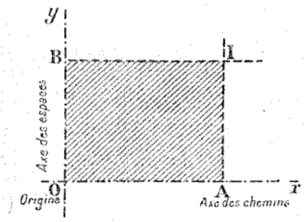


Fig. 103.

On porte sur un axe Ox une longueur OA = L (à l'échelle des longueurs) et sur un axe perpendiculaire Oy une longueur OB = F (à l'échelle des forces) ; puis on mène AI parallèle à Oy et BI parallèle à Ox. La surface OAIB représente à une certaine échelle le travail mécanique.

Ex. : Un cheval exerce un effort constant de 70 kilogrammes pour traîner une voiture pendant 800 mètres.

Echelle des forces : 1 millimètre pour $2^{kg},5$;
— des longueurs : 1 millimètre pour 25 mètres ;
— du travail $\frac{1}{2,5} \times \frac{1}{25} = \frac{1}{62,5}$.

$$OA = \frac{800}{25} = 32 \text{ millimètres},$$

$$OB = \frac{60}{2,5} = 24 \text{ millimètres}.$$

$$\text{Surf. OAIB} = 32 \times 24 = 768 \text{ millimètres carrés}.$$

$$T^{kgm} = 62,5 \times 768 = 48.000 \text{ kilogrammètres}.$$

ou

$$T^{kgm} = 60^{kg} \times 800^{m} = 48.000 \text{ kilogrammètres.}$$

79. Travail d'une force constante qui déplace un corps dans une direction autre que la sienne (*fig.* 104). — Ex. : chevaux remorquant un bateau, pesanteur amenant le déplacement d'un corps sur un plan incliné. En réalité, la force entière ne contribue pas au mouvement ; une partie est détruite par des réactions (gouvernail, plan incliné, rail, etc.) perpendiculaires à la direction du mouvement. Il convient donc de décomposer la force GP en deux autres : l'une, GN, perpendiculaire à la direction BC, n'a aucune action sur le mouvement ; l'autre, GA seule entraîne le corps dans sa descente.

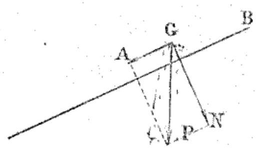


FIG. 104.

Le travail de GP se réduit donc à celui de GA.

Si l'on remarque que GA est la projection de la force sur la direction du mouvement :

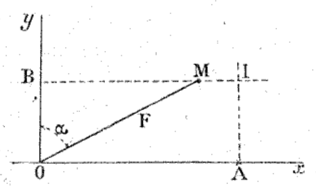


FIG. 105.

Le travail d'une force L agissant sur un corps dont le mouvement n'a pas même direction qu'elle est égal au produit du chemin parcouru par la projection de la force sur ce chemin.

On le représente graphiquement en traçant $F = OM$ par rapport à Oy dans la position qu'elle occupe réellement par rapport au chemin parcouru. La projection OB de F sur Oy n'est autre que GA (*fig.* 105).

$$T = OB \times OA.$$

La valeur de OB s'obtient en trigonométrie en multipliant F par le cosinus de l'angle α des directions OM et Oy.

$$OB = F \cos \alpha,$$

$$T = L \times F \times \cos \alpha.$$

De cette formule générale on déduit qu'il n'y a travail que si les trois facteurs L, F, $\cos\alpha$ sont différents de zéro. Il n'y a donc pas travail si :

1° $L = 0$: cheval qui ne peut faire avancer son chariot malgré les coups de collier ; machine-outil qui ne peut vaincre sa résistance, poids très lourd qui est posé sur un parquet résistant.

2° $F = 0$; ce serait le cas d'un corps animé d'un mouvement uniforme uniquement à cause de l'inertie.

3° $\cos\alpha = 0$ ou $\alpha = 90°$, le travail dû à la résistance de la pesanteur est nul lorsqu'on déplace un corps en palier (sur un plan horizontal). Il est donc faux de dire qu'un cheval qui traîne une voiture de 2.000 kilogrammes à la vitesse de 1 mètre effectue un travail de 2.000 kilogrammes. Dans ce cas, il y a tout de même travail à cause des résistances de frottement mais celles-ci sont très variables et dépassent rarement le $\frac{1}{20}$ de la charge.

80. Travail d'une force variable. — Considérons l'élévation de différents objets à l'aide d'un monte-charge qui, prenant 260 kilogrammes au sous-sol, dépose 50 kilogrammes au rez-de-chaussée à $2^m,50$, 80 kilogrammes au premier étage à 6 mètres, 20 kilogrammes au second à $9^m,50$, 40 kilogrammes au troisième à 13 mètres et 70 kilogrammes au quatrième à 16 mètres, et proposons-nous : 1° de représenter graphiquement les différents travaux ; 2° d'en évaluer la valeur.

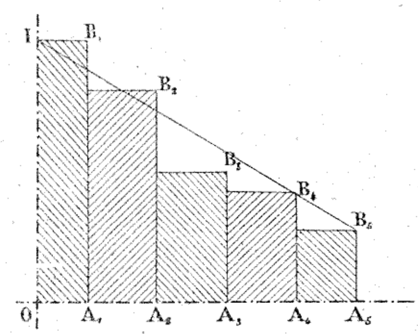


Fig. 106.

Ayant adopté les échelles 1 millimètre par 10 kilogrammes et 2 millimètres par mètre (*fig.* 106), portons sur Ox à partir de O des distances telles que

$$OA_1,\ OA_2,\ OA_3,\ OA_4,\ \ldots,$$

représentent

$$2^m,50,\ 6 \text{ mètres},\ 9^m,50,\ 13 \text{ mètres}, \ldots$$

Le chemin OA étant parcouru sous l'action d'une force constante $OB_1 = 260$ kilogrammes :

$$\begin{aligned} &&& \text{kgm} \\ \text{Le travail } T_1 &= (O_1A_1 \times A_1B_1) = 2{,}50 \times 260 = && 650 \\ \text{De même } T_2 &= (A_1A_2 \times A_2B_2) = 3{,}50 \times 210 = && 735 \\ T_3 &= (A_2A_3 \times A_3B_3) = 3{,}50 \times 130 = && 455 \\ T_4 &= (A_3A_4 \times A_4B_4) = 3{,}50 \times 110 = && 385 \\ T_5 &= (A_4A_5 \times A_5B_5) = 3 \quad \times\ 70 = && \underline{210} \end{aligned}$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = 650 + 735 + 455 + 385 + 210 = 2.435$$

En divisant ce travail total par le chemin total parcouru,

$$\frac{T}{L} = \frac{2435}{16} = 152{,}1875,$$

on obtient l'**effort moyen F** qui, en parcourant le même espace, produirait le même travail ; en général il diffère peu de la demi-somme des efforts extrêmes, lorsque ceux-ci s'exercent à des intervalles de temps très rapprochés.

Dans notre exemple,

$$F = 152^{kg},1875,$$

et

$$\frac{260 + 70}{2} = 165 \text{ kilogrammes}.$$

Il résulte de ce fait que l'on peut assez souvent remplacer la ligne brisée $IB_1B_2B_3B_4B_5$ par la droite IB_5 (mais seulement quand les intervalles de temps sont rapprochés, puisque

$$\text{Surf. trapèze } OA_5B_5I = \frac{OI + A_5B_5}{2} \times OA_5.$$

Dès lors, pour représenter le travail d'une force variable quelconque, on partage l'espace parcouru OA (*fig.* 107) en un certain nombre de parties égales; on détermine l'effort exercé à l'instant marqué par les points de division, et l'on porte cet effort (à l'échelle) sur chaque ordonnée. On joint par des droites les points consécutifs et l'on évalue l'aire du polygone obtenu.

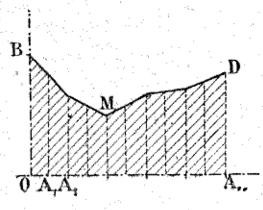


Fig. 107.

Parfois, à l'aide d'appareils enregistreurs, on relève la forme exacte du polygone OADMB dont on évalue la surface par le même procédé.

81. Application. — Dans un cylindre de machine à vapeur, la surface du piston est de 45.000 centimètres carrés; la vapeur est admise pendant $\frac{1}{6}$ de la course, 60 centimètres à la pression de 12 kilogrammes par centimètre carré. Ensuite la même quantité de vapeur occupe un volume de plus en plus grand en exerçant une pression inversement proportionnelle au volume. Soit à calculer son travail.

Au début l'intensité de la force est

$$F_1 = 12^{kg} \times 45.000 = 540.000 \text{ kg.}$$

Quand le volume est double,

$$F_2 = 540.000 : 2 = 270.000 \text{ kg.}$$

De même

$$F_3 = 540.000 : 3 = 180.000 \text{ kg.}$$
$$F_4 = 540.000 : 4 = 135.000 \text{ —}$$
$$F_5 = 540.000 : 5 = 108.000 \text{ —}$$
$$F_6 = 540.000 : 6 = 90.000 \text{ —}$$

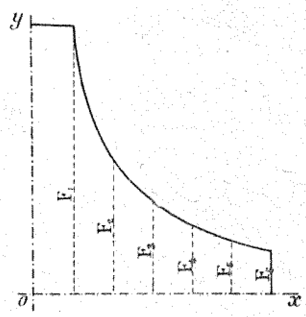


Fig. 108.

En représentant 10.000 kilogrammes et 1 centimètre par

1 millimètre on obtient le graphique (*fig.* 108). D'autre part :

$$\left.\begin{array}{ll} T_1 = 0^m,10 \times 540.000 & = 54.000 \text{ kgm.} \\ T_2 = 0^m,10 \times \dfrac{540.000 + 270.000}{2} & = 40.500 \\ T_3 = 0^m,05 \times (270.000 + 180.000) & = 22.500 \\ T_4 = 0^m,05 \times (280.000 + 135.000) & = 15.750 \\ T_5 = 0^m,05 \times (135.000 + 108.000) & = 12.150 \\ T_6 = 0^m,05 \times (108.000 + \ \ 90.000) & = \ \ 9.900 \end{array}\right\} T = 154.800 \text{ kgm.}$$

82. Travail développé dans un mouvement de rotation. — Considérons un cheval attelé à la flèche d'un manège et supposons que son effort F provoque successivement les déplacements rectilignes AB, BC, CD, DE, EH, HA, le travail total développé sera :

$$T = F \times AB + F \times BC \ldots + F \times HA = F(AB + BC \ldots + HA);$$
$$T = F \times \text{périmètre du polygone parcouru.}$$

Si le nombre de côtés de ce polygone était double, on aurait encore :

$$T = F \times \text{périmètre du polygone parcouru;}$$

mais, lorsqu'on augmente indéfiniment le nombre de côtés d'un polygone régulier inscrit, la limite vers laquelle tend son périmètre est la circonférence de centre O et de rayon $OA = R$.

Donc

$$T = F \times 2\pi R,$$

pour un tour.

Pour un arc de cercle de $n°$,

$$T = F \times 2\pi R \frac{n}{360}.$$

Pour un nombre de tours n,

$$T = F \times 2\pi R n.$$

Remarque. — La direction de la force étant supposée à chaque instant celle du côté du polygone inscrit parcouru, doit être, à la limite, celle de la tangente à la circonférence. S'il en était autrement, le travail effectué serait celui d'une force qui déplace un corps dans une direction autre que la sienne ; il serait égal à celui de sa composante tangentielle (*fig.* 109) :

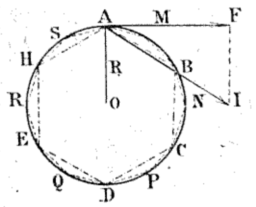


Fig. 109.

Travail de AI = Travail de AF.

Ex. : pesanteur agissant sur un pendule ; bielle agissant sur une manivelle ; homme sur la roue des carriers.

83. Puissance d'un moteur ou d'une machine. — Lorsqu'une machine fournit régulièrement la même quantité de travail dans le même temps, il y a intérêt à connaître celle qui est produite en une seconde. On l'appelle sa **puissance.**

L'unité théorique serait le **kilogrammètre-seconde,** c'est-à-dire la puissance d'un moteur produisant 1 kilogrammètre en 1 seconde.

Cette unité étant trop petite, on a adopté le **cheval-vapeur** (**chv**). C'est la puissance d'un moteur produisant un travail de 75 kilogrammètres en 1 seconde :

1 chv = 75 kgm-seconde.

Application. — *Une turbo-pompe est capable d'élever* 600 *litres d'eau à* 20 *mètres de hauteur; quelle est sa puissance effective?*

$$\text{Travail par seconde} = 600 \times 20 = 12.000 \text{ kilogrammètres,}$$
$$\text{Puissance effective} = \frac{12.000}{75} = 160 \text{ chevaux.}$$

On écrit parfois 160 HP, de l'unité anglaise **Horse-power** (cheval-puissance), qui vaut environ $76^{\text{kgm}},3$.

Il existe une autre unité de puissance plus conforme au système décimal, mais beaucoup moins employée ; c'est

le poncelet = 100 kgm-seconde.

84. Unité de travail industriel. — Dans les essais de consommation, dans l'énumération des garanties accordées par les constructeurs à leurs clients, dans la détermination des prix de revient et des prix de vente, on emploie couramment l'expression **cheval-heure (chv-H).**

C'est une unité de travail qui équivaut au travail produit pendant **1 heure** par un moteur dont la puissance est de **1 cheval :**

$$1 \text{ chv-H} = 75 \text{ kgm} \times 3.600 \text{ sec} = 270.000 \text{ kilogrammètres.}$$

Ex. : La consommation d'une machine à vapeur est environ de 1 kilogramme de houille à 8.000 calories par cheval-heure ; celle d'un moteur à gaz pauvre est de 500 grammes d'anthracite par cheval-heure ; la *Siegener Maschinenbau* garantit avec ses moteurs à gaz Kœrting une consommation de 35 litres d'eau, $1^{gr},3$ d'huile et 2.300 calories par cheval-heure ; 2 centimes par cheval-heure est un prix de revient avantageux pour la force motrice.

85. **Système d'unités C. G. S.** (*à titre de renseignement, ne peut être compris qu'après l'étude de la proportionnalité des forces aux accélérations*).

Nous savons que l'unité de force adoptée en mécanique est le poids de 1 décimètre cube d'eau pure, à la température de 4° C. et sous la pression de 760 millimètres de Hg. Mais les progrès scientifiques ont montré que ce poids est variable avec l'altitude et la latitude ; seule la masse du corps $m = \frac{P}{g} = \frac{F}{a}$ ne change pas. On a donc été amené à chercher un système plus rationnel d'unités.

86. **Unités fondamentales.** — Elles sont au nombre de trois dont les initiales C. G. S. forment le nom du système :

1° L'unité de **longueur** est le **centimètre** (1^{cm}) ;

2° L'unité de **masse** est le **gramme-masse** (1^{gr-m}) : c'est la masse (invariable) de 1 centimètre cube d'eau pure à 4° sous la pression de 76 centimètres de Hg ;

3° L'unité de **temps** est la **seconde.**

87. **Unités mécaniques.** — 1° L'unité de **vitesse** est la vitesse

d'un mobile qui parcourt d'un mouvement uniforme 1 centimètre par seconde. Ex. : La vitesse d'un train qui fait du 54 kilomètres à l'heure est de :

$$\frac{5.400.000 \text{ cm}}{3.600} = 1.500 \text{ centimètres par seconde.}$$

$$(1) \qquad v \text{ cm} = \frac{e \text{ cm}}{t \text{ sec}}.$$

2° L'unité **d'accélération** est l'accélération d'un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré dont la vitesse s'accroît de 1 centimètre par seconde. Ex. : A Paris, l'accélération due à la pesanteur est de 981 centimètres ; à l'équateur, elle est de 978 centimètres par seconde :

$$(2) \qquad a \text{ cm} = \frac{v \text{ cm}}{t \text{ sec}}.$$

3° L'unité de **force** est la **dyne** ; c'est la force nécessaire pour communiquer à un corps dont la masse est de 1 gramme une accélération de 1 centimètre par seconde. Ex. : A Paris, une force de 1 kilogramme communique à une masse de 1.000 grammes une accélération de 981 centimètres ; elle équivaut à 981.000 dynes.

Inversement :

$$1 \text{ dyne} = \frac{1 \text{ kg}}{981.000} = 0^{\text{kg}},000001019.$$

$$(3) \qquad \text{F dynes} = m \text{ gr-m} \times a \text{ cm}.$$

4° L'unité de **travail** est l'**erg** ; c'est le travail d'une force de 1 dyne qui déplace son point d'application de 1 centimètre. Le kilogrammètre étant le travail d'une force de 981.000 dynes déplaçant son point d'application de 100 centimètres équivaut à 98.100.000 ergs.

$$(4) \qquad \text{T ergs} = \text{F dynes} \times \text{L cm}.$$

L'erg ayant une valeur très petite, on lui substitue pratiquement le **joule**, qui vaut 10.000.000 = 10^7 ergs.

Donc :

$$1 \text{ kgm} = 9^{\text{joules}},81.$$

$$(5) \qquad \text{T joules} = 10^7 \times \text{F dynes} \times \text{L cm}.$$

5° L'unité de **puissance** est la puissance d'un moteur qui produit un travail de 1 erg par seconde. Cette unité étant très faible, on lui substitue, dans la pratique, le **watt** qui équivaut à un travail de 1 joule par seconde.

$$\text{(6)} \qquad \text{W watts} = \frac{\text{T joules}}{t \text{ sec}}.$$

$$1 \text{ chv} = 75 \text{ kgm-sec} = 9{,}81 \text{ watts} \times 75 = 736 \text{ watts}.$$

Le **kilowatt** est une unité secondaire de puissance qui vaut 1.000 watts ou $1^{chv},36$.

Le **kilowatt-heure** est une expression employée dans les mêmes circonstances que le cheval-heure (n° 84) :

$$1 \text{ kw-H} = 1.000 \times 3.600 = 3.600.000 \text{ joules}.$$

Signalons enfin que la puissance et le travail d'un courant électrique ont pour valeur :

$$\text{(7)} \qquad \text{W watts} = \text{E volts} \times \text{I ampères},$$
$$\text{(8)} \qquad \text{T joules} = \text{E volts} \times \text{I ampères} \times t \text{ sec}.$$

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Calculer le travail d'un homme qui élève chaque minute 4 pierres pesant 5 kilogrammes à $1^m,20$ de hauteur, et travaille 9 heures par jour.

II. — Un cheval traîne chaque jour sur un parcours de 28 kilomètres un véhicule qui nécessite successivement des efforts de traction de 60 kilogrammes pendant 6 kilomètres, 30 kilogrammes pendant 8 kilomètres, 40 kilogrammes pendant 8 kilomètres et 20 kilogrammes pendant 60 kilomètres. Calculer son travail et le représenter graphiquement à l'échelle de 4 mètres pour 10 kilogrammes et pour 1 kilomètre.

III. — Quelle est la puissance transmise par une poulie de rayon R = 30 centimètres, qui exerce un effort tangentiel F = 15 kilogrammes et fait $n = 150$ tours par minute ? — Généraliser.

IV. — Deux chevaux attelés à un chaland, sur un chemin de halage, exercent sur leurs traits un effort total de 90 kilogrammes et parcourent $5^{km},400$ à l'heure. Quels devraient être : 1° la force de traction ; 2° la puissance du remorqueur capable de produire le même mouvement, sachant que le câble de halage fait 15° avec la direction du bateau ? (Solution graphique.)

IX. — MACHINES SIMPLES

88. Définitions. — Lorsqu'on veut soulever une pierre C (*fig.* 110) ou la faire tourner autour de son arête MN, il existe une force qui s'oppose à ce mouvement : c'est le poids de la pierre, c'est-à-dire l'action qu'exerce la pesanteur sur ce corps. On dit que dans ce cas la pesanteur est une **résistance** Q.

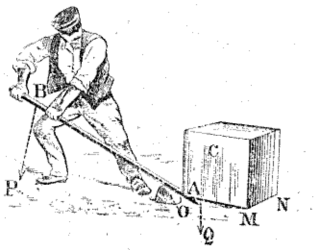


Fig. 110.

Pour détruire cette résistance, il faut déployer une force égale et directement opposée ; cette force **agissante** est **motrice** lorsqu'elle provoque le mouvement ; on l'appelle encore **puissance** P.

La force directement appliquée à la pierre peut être insuffisante; on prend alors une barre de fer AB, on introduit l'extrémité A sous la pierre et, prenant appui sur un caillou O, on exerce en B la puissance P en cherchant à faire tourner la barre autour du point O. On y arrive si l'effet rotatif de P, c'est-à-dire $P \times OB$, est supérieur à l'effet rotatif de Q, c'est-à-dire $Q \times OA$. Il est facile d'obtenir cette condition en augmentant le rapport $\frac{OB}{OA}$.

La barre de fer mobile autour de O constitue une **machine simple**; c'est un levier. Il en est de même des poulies, des palans, des treuils, du plan incliné, du coin et de la vis.

Ces appareils possèdent tous un axe fixe ou un plan fixe dont les réactions, en modifiant les conditions du travail, permettent aux **puissances** de vaincre plus aisément les **résistances.**

89. Conditions d'équilibre d'une machine simple au repos. — La résultante des actions exercées par la puissance P et par la résistance doit être détruite par les réactions des appuis. Par conséquent il faut et il suffit que cette résultante passe par l'axe fixe ou qu'elle soit normale (perpendiculaire) au plan fixe.

90. Travail dans les machines simples. — Lorsque la machine simple est en mouvement; on désigne sous le nom de **travail moteur** le produit de la puissance par son chemin parcouru; le **travail résistant** est le produit de la résistance par le déplacement de son point d'application. L'étude de la poulie mobile (n° 100) montre que ces travaux sont constamment identiques si l'on néglige les frottements.

Si l'un des deux éléments du travail devient 2, 3, 4, ... fois plus grand, l'autre devient 2, 3, 4,... fois plus petit, de sorte que les machines permettent l'application d'efforts considérables si l'on se contente de chemins parcourus très faibles. Dans la réalité, les résistances passives comme le frottement, le choc, la déformation des organes, le fléchissement des appuis absorbent une partie du travail moteur.

En désignant par T_m le travail moteur, T_u le travail utile (déplacement de la résistance), par T_p le travail perdu absorbé par les résistances passives, on peut écrire :

$$T_m = T_u + T_p.$$

91. Rendement. — C'est le rapport k qui existe dans une machine entre le travail utile T_u et le travail moteur T_m. Comme $T_u < T_m$, on a toujours :

$$k = \frac{T_u}{T_m} < 1.$$

92. Impossibilité du mouvement perpétuel. — Elle résulte des considérations précédentes, qui montrent qu'une machine transforme le travail, mais ne le crée pas ni ne le multiplie pas. Dès lors une certaine quantité de travail étant fournie à la machine en une seule fois, les résistances passives en absorbent une partie à chaque instant : soit $\frac{1}{100}$ en une heure, la machine s'arrêtera à la fin de la centième heure ; cette perte de $\frac{1}{100}$ peut être diminuée dans une certaine mesure, mais jamais supprimée, de sorte que le mouvemen pourra être de longue durée, mais jamais perpétuel, *car aucun organe ne peut de lui-même produire ce travail absorbé.*

93. Définition du levier. — On appelle **levier** une barre rigide mobile autour d'un point fixe O appelé **point d'appui** ; cette barre est destinée à vaincre une **force résistante** Q (déplacement d'un corps) appliquée en un point B, à l'aide d'une autre force P appelée **puissance** appliquée en un autre point A (*fig.* 111).

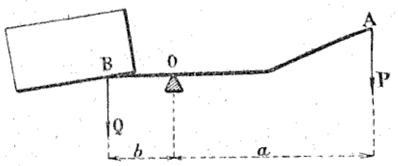


Fig. 111.

Les distances a, b du point d'appui O aux directions des forces P et Q sont respectivement les **bras de levier** de la puissance et de la résistance.

94. Équilibre. — Un tel appareil est en équilibre lorsque la somme algébrique des moments de la puissance et de la résistance par rapport au point O est nulle :

$$M_0P + M_0Q = 0,$$
$$-a \times P + b \times Q = 0,$$
$$aP = bQ,$$
$$P = Q \times \frac{b}{a},$$

relation qui indique que la valeur de la puissance doit être proportionnelle à la résistance Q et à son bras de levier b ; inversement proportionnelle à la distance du point O à la puissance.

95. Classification. — Selon la position relative des points A, B, O, on classe les leviers dans trois genres :

1° **Levier inter-appui.** — Ex. : balance ordinaire, balance romaine, ciseaux, tenailles, balancier de machine à vapeur, pince appuyée sur une cale, outils du tourneur, bêche ;

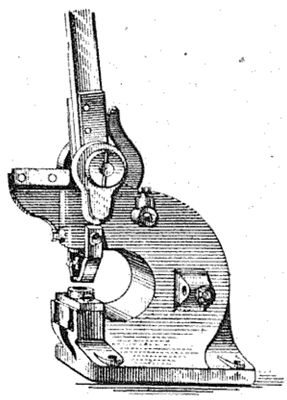


Fig. 112.

2° **Levier inter-résistant.** — Ex. : couteau à pain, brouette, machines à cisailler, à poinçonner (*fig.* 112), pince sans cale, levier de pompe, rames ; on a toujours $a > b$, $P < Q$;

3° **Levier inter-puissant.** — Ex. : pincettes, pédales du remouleur, étau, articulations animales (maxillaire inférieur, radius et cubitus) ; dans ce levier on a toujours $a < b$, $P > Q$; on l'emploiera surtout pour vaincre de faibles résistances et donner de grandes vitesses.

On comprendra maintenant l'effort considérable que doivent faire nos muscles pour opérer un mouvement.

Remarques. — 1° Si le poids du levier n'est pas au point d'appui, il faudra parfois en tenir compte ;

2° Le point O ayant à supporter la résultante de P et de Q, il faudra toujours tenir compte de la résistance du support ;

3° Une observation analogue est nécessaire pour éviter la déformation et la rupture de la barre.

96. Applications. — La plupart des organes des machines sont des leviers ; ex. : manivelles, pédales, tourne-à-gauche, etc. Plusieurs leviers peuvent être articulés entre eux ; ils permettent alors d'obtenir des transmissions de mouvement pour la commande des soupapes de distribution, par exemple. Nous traiterons la **chèvre à soulever les voitures** (*fig.* 113) et les bascules.

La **chèvre des charrons** se compose essentiellement d'un levier inter-appui AOB articulé en O à un support et en B à un levier inter-résistant BCD. Si le corps à soulever est appliqué en C, il faudra en B une puissance

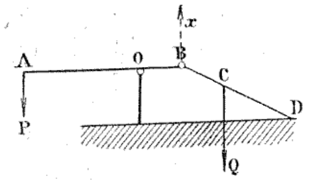


FIG. 113.

$$x = Q \times \frac{DC}{DB}$$

pour l'équilibrer.

Mais, pour faire osciller la barre AB autour de O, l'effet rotatif de x peut être remplacé par celui de P :

$$P \times OA = x \times OB, \qquad P = x \times \frac{OB}{OA} = Q \times \frac{DC}{DB} \times \frac{OB}{OA}.$$

Si $OA = 6OB$, en prenant $DB = 2DC$, il suffira, pour soulever une portion de voiture de 480 kilogrammes, d'un effort :

$$P = Q \times \frac{DC}{DB} \times \frac{OB}{OA} = Q \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{Q}{12} = \frac{480}{12} = 40 \text{ kilogrammes.}$$

97. Bascule de Quintenz. (*fig.* 114). — Elle se compose d'un tablier horizontal CI sur lequel on dispose le corps à peser, et qui est soutenu : en C par le couteau CL qui s'appuie sur un levier ELH ; en I par une tige verticale ID qui est fixée à un autre levier AB.

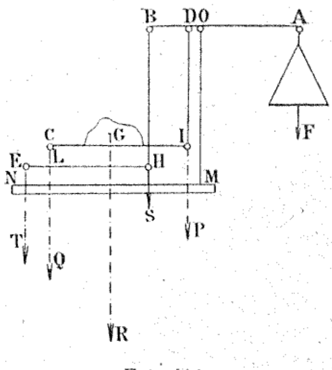


FIG. 114.

Le point d'appui E du levier ELH repose sur un couteau EN que supporte le bâti MN ; l'effort s'exerce en L ; il est transmis par la tige BH articulée en H telle que $\frac{EL}{EH} = \frac{1}{5}$.

Le point d'appui du levier AB est placé à la partie supérieure d'un support vertical MO solidaire du bâti. Ce levier reçoit en A l'action des poids F disposés sur le plateau ; en D et en B, tels que $OD = \frac{OA}{10}$ et $OB = \frac{OA}{2}$, l'action du corps à peser R.

Soient P et Q les composantes de R appliquées en I et en C :

$$P + Q = R.$$

D'autre part, la force Q est équivalente aux composantes

$$S = Q \times \frac{EL}{EL + LH} = Q \times \frac{EL}{EH} = \frac{Q}{5}, \text{ appliquée en H,}$$

plus

$$T = Q \times \frac{LH}{EL + LH} = Q \times \frac{LH}{EH} = \frac{4}{5} Q \text{ appliquée en E.}$$

Or T est détruite par la résistance de l'axe E ; l'action de S s'exerce en B sur le levier AOB ; l'action de P s'exerce en D sur le levier AOB.

Pour que ce levier soit en équilibre, écrivons :

$$M_0F + M_0S + M_0P = 0,$$
$$(-F \times OA) + (+S \times OB) + (+P \times OD) = 0,$$
$$(-F \times OA) + \left(\frac{Q}{5} \times \frac{OA}{2}\right) + \left(P \times \frac{OA}{10}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{P + Q}{10}\right) OA = \frac{R}{10} \times OA = F \times OA, \qquad F = \frac{R}{10}.$$

Ainsi les poids du plateau représentant le dixième du poids du corps ; la balance est au dixième ; elle pourrait être au vingtième, au centième, etc. ; il existe même des bascules romaines dont le fonctionnement se devine.

On peut aussi peser un corps léger avec la bascule, il suffit de le placer dans le plateau et les poids sur le tablier, mais on obtient un résultat peu précis.

98. Bascule romaine de Béranger (*fig.* 115). — C'est une bascule au centième munie du dispositif de la romaine, placé dans le sens de la largeur du tablier CDEI. Celui-ci est supporté par quatre couteaux K, L, M, N sur deux leviers GPQ mobile autour de

PQ et GRS mobile autour de RS, tel que :

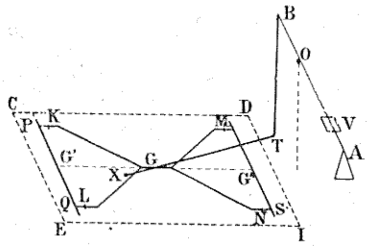


Fig. 115.

$$GG' = GG'' = 10KP = 10LQ = 10MR = 10NS.$$

La barre G qui rend les leviers solidaires agit, par l'intermédiaire de la tringle horizontale GT et de la tringle verticale TB' à l'extrémité B du levier inter-appui AOB.

Comme TX $=$ 5GX et OA $=$ 2OB, on a successivement, agissant en G :

$$\frac{M}{10} + \frac{N}{10} + \frac{K}{10} + \frac{L}{10} = \frac{F}{10}\left(\frac{1}{10}\text{ poids du corps}\right),$$

et agissant en T et en B :

$$\frac{F}{10} \quad 5 = \frac{F}{50}.$$

Enfin

$$\frac{F}{50} \times OB = F' \times OA = F' \times 2OB, \qquad F' = \frac{F}{100}.$$

Dans le plateau, on ne place que des poids représentant un nombre exact de kilogrammes et faisant équilibre au même nombre de quintaux sur le tablier.

Un curseur V mobile sur la tige OA graduée de 0 à 100 indique le nombre de kilogrammes entre deux centaines consécutives.

99. Poulie fixe (*fig.* 116). — C'est un appareil de levage constitué par un disque circulaire pouvant tourner autour de son axe.

Cet axe est fixe et relié à ses extrémités aux deux branches d'une *chape*, simple barre de fer recourbée en U renversé.

La chape est suspendue par l'intermédiaire d'un crochet fixé par rivet ou écrou.

Le disque est muni d'une gorge dans laquelle se place la corde à laquelle on suspend le fardeau Q ; à l'autre extrémité de la corde agit la puissance P.

Cet appareil est un véritable levier du premier genre, dans lequel les bras de levier OA de la puissance P et OB de la résistance Q sont égaux : $OA = OB = R$.

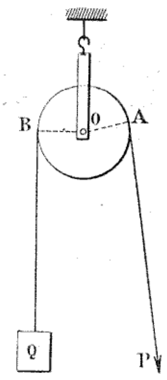


FIG. 116.

Il en résulte que :

$$P \times R = Q \times R \qquad \text{ou} \qquad P = Q;$$

l'effort qu'il faut développer pour élever un fardeau est égal au poids à soulever; mais la condition dans laquelle il s'exerce est plus favorable, le manœuvre pouvant utiliser le poids de son corps.

Les chemins parcourus sont égaux et les travaux le sont aussi.

Quant à la pression qui s'exerce sur l'axe et par suite sur le crochet et le point de suspension, elle est égale à la résultante de la puissance et de la résistance.

100. Poulie mobile. — C'est le même organe précédent disposé d'une manière différente. La corde est attachée à une extrémité à un point fixe I ; la puissance P s'exerce à l'autre extrémité, et le fardeau à soulever Q est suspendu au crochet de la chape.

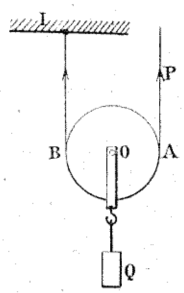


FIG. 117.

L'appareil est en équilibre lorsque la résistance Q est directement opposée à la résultante de la puissance P et de la tension N du brin BI. Si les deux brins sont parallèles, ces forces sont égales ; leur résultante vaut $2P = Q$.

L'effort à exercer pour maintenir l'équilibre $P = \frac{Q}{2}$ est la moitié seulement du poids à soulever. Par contre, le chemin parcouru par ce fardeau l est la moitié de la corde tirée, c'est-à-dire du chemin parcouru $2l$ par la puissance.

Donc :

$$P \times 2l = Q \times l,$$

le travail moteur est égal au travail résistant, et *ce qu'on gagne en force, on le perd en chemin parcouru.*

Dans la pratique, le brin AP de la corde est enroulé sur une poulie fixe qui ne modifie pas l'effort P, mais seulement sa direction.

101. Assemblage de poulies mobiles (*fig.* 118). — La puissance P_1 de la première poulie O_1 constitue la résistance Q_2 de la deuxième O_2 ; la puissance P_2 de la deuxième constitue la résistance de la troisième O_3 et ainsi de suite.

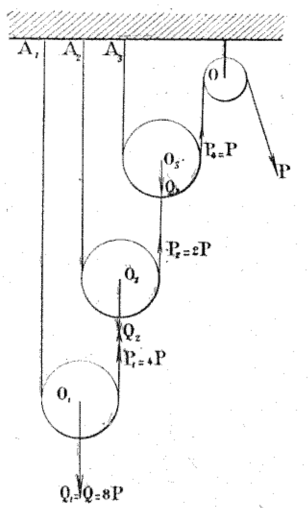


FIG. 118.

Or, avec une puissance P, on peut soulever un fardeau :

$$Q_3 = 2P = P_2.$$

Avec une puissance $P_2 = 2P$, on peut soulever un fardeau :

$$Q_2 = 2P_2 = 4P = P_1.$$

Avec une puissance $P_1 = 4P$, on peut soulever un fardeau :

$$Q_1 = Q = 2P_1 = 8P = P \times 2^3.$$

Si l'on remarque que 3 est le nombre de poulies mobiles, on peut déduire la règle :

Avec un assemblage de poulies mobiles, on peut soulever un fardeau Q *égal au produit de la puissance* P *par le facteur* 2 *affecté d'un exposant égal au nombre de poulies mobiles :*

$$Q = P \times 2^n.$$

Quant au chemin parcouru par la puissance, il est égal à celui parcouru par la résistance multipliée par 2^n. *Ce qu'on gagne en force, on le perd en chemin parcouru.*

La poulie fixe O n'a pas d'autre effet que de changer la direction de la puissance.

102. Moufles et palans. — On appelle moufle la réunion de plusieurs poulies sur une même chape (*fig.* 119). Le palan est constitué par deux moufles dont l'une, celle du haut, est munie de deux crochets, l'autre d'un : la moufle du bas supporte la charge ; celle du haut est suspendue par l'un de ses crochets, à l'autre est fixée une extrémité de la corde qui s'enroule sur la première poulie de la moufle inférieure, la première de la moufle supérieure, la deuxième de la moufle inférieure, la deuxième de la moufle supérieure, etc..., et le brin, après son passage sur la dernière poulie de la moufle supérieure, reçoit l'action de la puissance.

Les moufles sont différentes selon que les poulies sont sur le même axe (moufles lyonnaises, *fig.* 120) ou sont sur des axes parallèles (mouflettes, *fig.* 121).

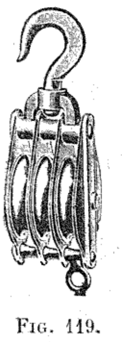


Fig. 119.

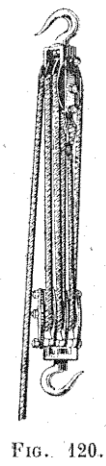


Fig. 120.

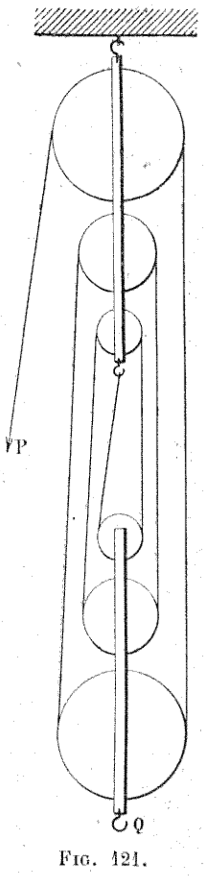


Fig. 121.

Dans les deux cas, s'il y a trois poulies par moufle, quand le fardeau s'élève de h, chacun des brins diminue de h. Comme il y en a six, le chemin parcouru par la puissance est $6h$. D'autre part, les travaux moteur et résistant étant égaux :

Travail de la puissance $P \times 6h = Q \times h$, travail de la résistance ;

$$P = \frac{Q}{6}.$$

D'une façon générale, si n est le nombre de poulies :

$$P = \frac{Q}{n}.$$

La puissance est égale au quotient de la résistance par le nombre de poulies.

103. **Palan différentiel** (*fig.* 122). — La moufle supérieure se compose de deux poulies étagées A et B solidaires du même axe O ; la moufle inférieure C est une poulie mobile d'axe O' à laquelle on suspend le fardeau à soulever Q.

Une chaîne sans fin s'enroule successivement sur les poulies A, C, B, A, dont les gorges sont munies de dents afin d'empêcher tout glissement des maillons.

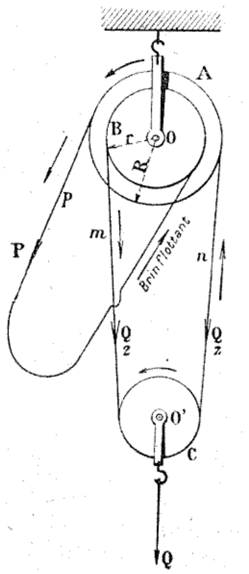


Fig. 122.

La charge Q se répartit également sur les brins m et n, qui sont tendus tous deux avec une force $\frac{Q}{2}$.

Pour déterminer la valeur de la puissance P qui assure l'équilibre de la moufle O, il suffit d'écrire que la somme algébrique des moments par rapport à l'axe O des forces p, m, n est nulle :

$$M_0 p + M_0 m + M_0 n = 0,$$

$$+ PR + \frac{Q}{2} r + \left(- \frac{Q}{2} R\right) = 0,$$

$$PR = \frac{Q}{2} R - \frac{Q}{2} r = \frac{Q}{2} (R - r),$$

$$P = Q \times \frac{R - r}{2R}.$$

Par contre, lorsque le chemin parcouru par la puissance est $2\pi R$, le brin n s'enroule de $2\pi R$, mais le brin m se déroule de $2\pi r$. Les deux brins diminuent donc seulement de $2\pi(R - r)$, et l'axe O' s'élève de la moitié, soit $\pi(R - r)$.

Finalement :

$$T_m = P \times 2\pi R = \left(Q \times \frac{R - r}{2R}\right) \times 2\pi R = Q \times \pi (R - r) = T_r.$$

Le travail moteur est égal au travail résistant et l'on perd en chemin parcouru ce que l'on gagne en force.

104. Treuil (*fig.* 123-124). — C'est un tambour AB de rayon R assujetti à tourner autour de son axe *o'o*.

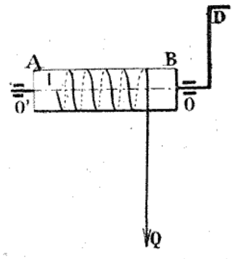


Fig. 123.

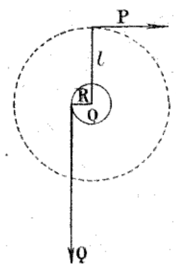


Fig. 124.

Une corde pouvant s'enrouler sur le treuil y est fixée à l'une de ses extrémités I et supporte la charge à soulever Q à son autre extrémité. Le mouvement de rotation est communiqué par une manivelle CD de longueur l solidaire de l'axe O'O. Lorsqu'il y a équilibre,

$$M_0P + M_0Q = 0,$$
$$-P \times l + Q \times R = 0,$$
$$P = \frac{Q \times R}{l} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{R}{l}.$$

La puissance est à la résistance comme le rayon du tambour est à celui de la manivelle.

Il serait facile de montrer que l'on perd en chemin parcouru ce que l'on gagne en force :

Remarques. — 1° Dans toutes les machines simples, la puissance doit être majorée pour faire équilibre aux frottements ;

2° Tous les appareils de levage devraient être pourvus de dispositifs de sûreté, cliquet ou frein automatique, empêchant la chute éventuelle du fardeau.

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — On veut équilibrer un porte-forêt A pesant 30 kilogrammes (*fig.* 125) à l'aide d'une boule en fonte de densité 7,7. Quel doit être son rayon pour que l'angle MOB = 45° ?

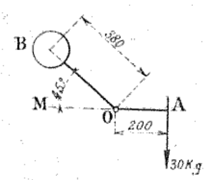


Fig. 125.

II. — Calculer l'effort P à exercer normalement au crochet pendant le tournage du tourillon (*fig.* 126), sachant que sa résistance à l'arrachement est de 4 kilogrammes.

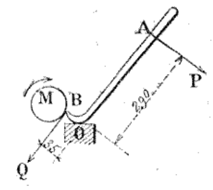


Fig. 126.

III. — Un générateur timbré à 12 kilogrammes est muni d'une soupape de sûreté à contrepoids Q (*fig.* 127). Calculer la valeur de ce contrepoids, sachant que l'effet du levier en A, évalué au dynamomètre, est 4 kilogrammes et que le poids du clapet et du pointeau est 1^{kg},200.

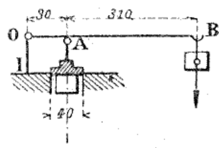


Fig. 127.

IV. — Un manœuvre, à l'aide d'une poulie fixe, monte par heure 42 corbeilles de bois pesant 36 kilogrammes l'une, à 15 mètres de hauteur (grenier). On demande : 1° l'effort que doit faire l'ouvrier si le rendement est 85 0/0 ; 2° Son travail horaire ; 3° la pression sur l'axe de la poulie.

V. — Deux matelots, pour hisser un corps de 300 kilogrammes à l'aide d'un palan à 6 poulies, développent des efforts respectifs de 32 et 48 kilogrammes. Quel est le rendement de l'appareil ?

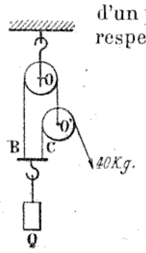
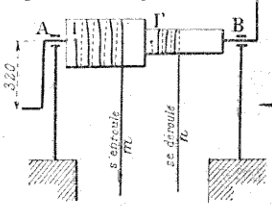
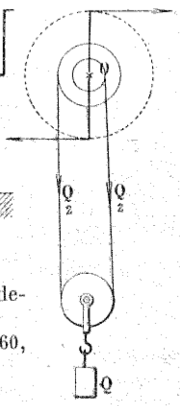


Fig. 128.





VI. — Quelle charge peut soulever un manœuvre faisant un effort de 40 kilogrammes :

1° Avec un palan à 6 poulies de rendement 0,625 ?

2° Avec un assemblage de 4 poulies mobiles de rendement 0,7 ?

3° Avec un palan différentiel de rayons R = 180, r = 160, rendement 0,7 ?

4° Avec le dispositif (*fig.* 128), rendement 0,8 ?

Fig. 129 et 130.

VII. — On veut établir un treuil différentiel (*fig.* 129-130) à tambour étagés de rayons R et r, muni de deux manivelles à bras égaux

$l = 320$ millimètres, pour soulever des charges de 400 kilogrammes avec deux manœuvres développant des efforts de 7kg,500 l'un.

Sachant que $R = 150$ millimètres et que le rendement est 0,65, calculer la valeur à donner à r.

VIII. — Construire aux ateliers le treuil précédent; suspendre en m un poids $P = 20$ kilogrammes et :

1° Attacher l'extrémité D de la manivelle à un point fixe E en intercalant un dynamomètre entre DE; lire F et vérifier que :

$$P \times R = F \times OH;$$

2° Attacher la corde en K de manière que DK soit perpendiculaire sur OD; lire la valeur F′ et vérifier que

$$PR = F' \times OD = F \times OH,$$
$$F' = \text{Projection de F sur DK};$$

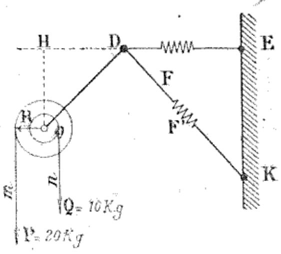


Fig. 131.

3° Attacher en outre un poids Q de 10 kilogrammes à la corde n et vérifier le théorème de Varignon

$$M_0F + M_0P + M_0Q = 0.$$

X. — MOUVEMENT VARIÉ

105. Exemples de mouvements variés. — Généralement le mouvement d'un corps est varié, car le mouvement ne peut être absolument uniforme que s'il n'est jamais modifié ; par conséquent si aucune force n'agit sur lui (ce qui est impossible, la pesanteur existant toujours), ou si la résultante des forces qui interviennent est nulle, ce qui n'a lieu que momentanément.

Ainsi, avant d'être uniforme, le mouvement d'une locomotive est accéléré au départ de la gare ; il l'est encore dans les descentes ; il est retardé à l'entrée en gare comme dans les montées. Celui d'un véhicule, d'une automobile, d'un cycliste présente les mêmes phases encore accentuées par ce fait que les pentes sont plus rapides et les forces motrices moins constantes. La vitesse est de plus en plus grande dans le mouvement accéléré, elle est de plus en plus petite dans le mouvement retardé.

106. Vitesse moyenne. — Cependant on dit couramment : la vitesse d'un train est de 90 kilomètres à l'heure, celle d'un piéton 6 kilomètres, celle d'un cycliste 20 kilomètres. Pour obtenir cette vitesse, on a cherché le rapport entre l'espace parcouru e et le temps t employé à le parcourir :

$$v = \frac{e}{t}.$$

Ainsi, la vitesse du train qui part de Paris à 8^h25 arrive au Havre à 11^h10 après s'être arrêté 5 minutes à Rouen et avoir parcouru 228 kilomètres en 2^h 40 minutes ou 160 minutes, est :

$$v = 228 \times \frac{60}{160} = 85^{km},500 \text{ à l'heure ;}$$

Mais ce n'est là qu'une moyenne qui s'éloigne plus ou moins des allures extrêmes; ainsi :

Entre Paris et Rouen, $v_1 = 140 \times \frac{60}{96} = 87^{km},500$;

Rouen et le Havre, $v_2 = 88 \times \frac{60}{64} = 82^{km},500$.

107. Vitesse à un instant donné. — Les derniers résultats sont plus précis que le premier, et cependant nous ne pouvons pas affirmer qu'en passant à Vernon la vitesse est de $87^{km},500$ à l'heure ou $24^m,305$ à la seconde.

Si, pour traverser 1.000 mètres en ville, le temps employé par l'avant de la locomotive est 40 secondes; nous affirmerons avec plus de conviction que la vitesse est de $\frac{1.000}{40} = 25$ mètres. Pourtant, 1 seconde après le passage au point de repère A, la locomotive peut être à $24^m,80$, sa vitesse moyenne est $\frac{24,80}{1} = 24^m,80$. Si $\frac{1}{10}$ de seconde après A, elle a parcouru $2^m,45$, la vitesse $\frac{2,45}{0,1} = 24^m,50$ est plus exacte.

Si, $\frac{1}{100}$ de seconde après A, elle a parcouru $0^m,244$; $v = 24^m,40$;

Si, $\frac{1}{1000}$ — — $0^m,02442$; $v = 24^m,42$.

Enfin, si l'on avait pu observer pendant un temps infiniment petit, on aurait obtenu la vitesse vraie au point A. On la définit : **La limite du rapport $\frac{e}{t}$ lorsque t devenant de plus en plus petit se rapproche de plus en plus de 0.** C'est justement la vitesse que prendrait la locomotive si, à cet instant, toutes les forces qui agissent sur elle (force motrice, pesanteur, vent, frottement de l'air, pression atmosphérique, réaction des rails, frottements divers) se faisant équilibre, le mobile continuait son mouvement d'une façon rectiligne et uniforme.

108. Mouvement uniformément accéléré. — C'est celui dans lequel la vitesse augmente de quantités égales pendant des temps égaux. L'augmentation de vitesse pendant l'unité de temps ou pendant une seconde s'appelle **accélération** et se désigne par a.

Ce mouvement résulte de l'action des forces qui admettent une résultante unique, constante en grandeur et en direction.

Ex. : chute des corps, roulement d'une bille sur un plan incliné...

a) **Loi des vitesses.** — Il résulte de la définition du mouvement que, si la vitesse à l'origine est représentée par v_0,

La vitesse au bout de	1 sec. est	$v_1 = v_0 + a$	$= v_0 + a \times 1$
—	2 —	$v_2 = v_1 + a$	$= v_0 + a \times 2$
—	3 —	$v_3 = v_2 + a$	$= v_0 + a \times 3$
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
—	t sec	$v =$	$v_0 + at$

La vitesse v à un instant considéré t est égale à la vitesse initiale v_0 augmentée du produit de l'accélération par le temps (nombre de secondes) :

$$v = v_0 + at. \tag{1}$$

Dans le cas particulier où $v_0 = 0$, la vitesse initiale est nulle, la formule (1) devient :

$$v = at. \tag{1'}$$

La vitesse est égale au produit de l'accélération par le temps.

109. b) **Loi des espaces.** — Quand le mobile part du repos, les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps.

L'espace parcouru au bout d'un temps t est égal au produit de la vitesse initiale par le temps augmenté du produit de la moitié de l'accélération par le carré du temps :

$$E = v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \tag{2}$$

Si, dans cette formule, on fait $v_0 = 0$, le mobile partant du repos, on a :

$$(2') \qquad E = \frac{1}{2} at^2,$$

demi-produit de l'accélération par le carré du temps.

110. Démonstration de la loi des espaces. — La vitesse dans le mouvement uniformément accéléré étant proportionnelle au temps peut être représentée, comme l'espace parcouru (n° 72), par une droite IM.

OI, à l'échelle des longueurs, représente la vitesse initiale V_0 ;

IM, à la même échelle, la vitesse finale à l'instant $t = \mathrm{OT}$ à l'échelle des temps.

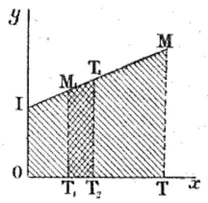


FIG. 132.

Nous pouvons fractionner le temps t en très petites parties égales $(t_2 - t_1)$; pendant ces intervalles, nous supposerons le mouvement uniforme, la vitesse constante v_m, moyenne des vitesses aux instants t_1 et t_2, soit $\frac{\mathrm{M_1T_1 + M_2T_2}}{2}$ à l'échelle. L'espace parcouru pendant le temps $t_2 - t_1$ est $v_m\,(t_2 - t_1)$, il est représenté par la surface du trapèze :

$$\mathrm{T_1M_1M_2T_2} = \left(\frac{\mathrm{M_1T_1 + M_2T_2}}{2}\right) \mathrm{T_1T_2}.$$

La somme des espaces parcourus pendant tous les intervalles du temps t sera donc représentée par la somme des aires des trapèzes tels que $\mathrm{T_1M_1M_2T_2}$, c'est-à-dire l'aire du trapèze OIMT.

Elle est égale à :

$$\frac{\mathrm{OI + MT}}{2} \times \mathrm{OT} \qquad \text{ou} \qquad \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} \times t = v_0 t + \frac{1}{2} at^2.$$

111. Détermination algébrique de la loi des espaces. — Ecrivons que l'espace parcouru E pendant t secondes est égal à la somme des t espaces parcourus pendant chaque seconde l_1, l_2, l_3, l_4, ... :

$$E = l_1 + l_2 + l_3 \ldots + l_t.$$

Chacun de ces espaces nous est inconnu, mais nous savons que la vitesse va en augmentant du commencement à la fin de chaque seconde. Par suite, l'espace parcouru pendant la cinquième seconde, l_5, par exemple, est plus grand que si la vitesse était restée $v_0 + 4a$ pendant toute la seconde et plus petit que si la vitesse était passée brusquement de $v_0 + 4a$ à $v_0 + 5a$ dès le début de la cinquième seconde. Or l'espace parcouru aurait été uniforme dans les deux cas, égal à :

$$(v_0 + 4a) \times 1 \text{ sec} = v_0 + 4a,$$

dans le premier et à :

$$(v_0 + 5a) \times 1 \text{ sec} = v_0 + 5a,$$

dans le second.

On peut donc écrire :

$$v_0 + 4a < l_5 < v_0 + 5a,$$

et de même :

$$\begin{array}{ll} v_0 & < l_1 < v_0 + a, \\ v_0 + a & < l_2 < v_0 + 2a, \\ v_0 + 2a & < l_3 < v_0 + 3a, \\ v_0 + 3a & < l_4 < v_0 + 4a, \\ \ldots & \ldots \\ v_0 + (t-1)\,a & < l_t < v_0 + ta. \end{array}$$

On obtient deux progressions arithmétiques, et, en faisant la somme des inégalités membre à membre :

$$\text{S} : v_0 t + \frac{a}{2}\, t\,(t-1) < \text{E} < v_0 t + \frac{a}{2}\, t\,(t+1).$$

Les termes extrêmes diffèrent de at.

Si, au lieu de prendre pour unité la seconde, nous avions pris le millième de seconde, nous arriverions de la même manière à la double inégalité :

$$v_0 t + \frac{a}{2}\, t \left(t - \frac{1}{1000}\right) < \text{E} < v_0 t + \frac{a}{2}\, t \left(t + \frac{1}{1000}\right). \text{ — Diff. : } \frac{at}{1000}.$$

et d'une façon générale :

$$v_0 t + \frac{a}{2}\, t \left(t - \frac{1}{n}\right) < \text{E} < v_0 t + \frac{a}{2}\, t \left(t + \frac{1}{n}\right). \text{ — Diff. : } \frac{at}{n}.$$

Comme l'on peut toujours prendre n aussi grand que l'on veut, la fraction $\frac{1}{n}$ sera aussi petite que l'on voudra. En prenant $n = \infty$ infiniment grand, $\frac{1}{n} = 0$ est infiniment petite ou nulle, les valeurs extrêmes de E sont égales entre elles et valent :

$$E = v_0 t + \frac{a}{2} t^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans le cas où $v_0 = 0$,

$$E = \frac{a}{2} t^2.$$

112. Vérification des lois au moyen de la machine d'Atwood. — **1° Description.** — Elle se compose d'une poulie très légère en aluminium placée au sommet d'une colonne verticale portant une règle graduée AB. Dans la gorge de cette poulie passe un fil très léger lui aussi et portant à ses extrémités des poids égaux P, P′, dont l'un P se déplace le long de la graduation. La règle graduée possède en outre un support qui peut s'abaisser par déclanchement, un curseur évidé E et un curseur plein I mobiles le long de la graduation (*fig.* 133).

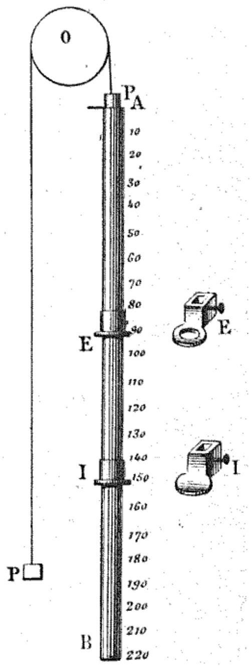


Fig. 133.

2° Principe. — L'appareil étant en équilibre, si l'on ajoute au poids P une surcharge m, la force que la pesanteur exerce sur m étant constante, tout l'appareil doit être animé d'un mouvement uniformément accéléré, et l'on pourra vérifier que les temps employés à parcourir des espaces proportionnels à $4 = 2^2$ et à $9 = 3^3$ sont entre eux comme 2 est à 3, cela en plaçant successivement le curseur plein à des distances de 40 et 90 centimètres.

Si, à un moment donné, on vient, à l'aide du curseur évidé par exemple, à enlever la surcharge, le système doit, en vertu du principe de l'inertie, continuer son mouvement d'une manière rectiligne et uniforme. La vitesse de ce mouvement est, nous l'avons signalé, la vitesse du mouvement uniformément accéléré à l'instant où la cause de l'accélération disparaît.

113. Fonctionnement de la machine d'Atwood. — 1° **Vérification de la loi des espaces.** — On place le poids P avec sa surcharge sur le support, le curseur plein I étant à la division 10 centimètres. Un métronome battant la seconde, on constate qu'après le déclenchement du support, le système parcourt les 10 centimètres en 1 seconde. On recommence l'opération en plaçant le curseur I successivement à $10 \times 2^2 = 40$; $10 \times 3^2 = 90$; $10 \times 4^2 = 160$, et à chaque fois l'on constate que la durée du mouvement est proportionnelle à 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, c'est-à-dire au carré des temps :

$$e = h = \frac{1}{2} at^2.$$

2° **Vérification de la loi des vitesses.** — Des expériences précédentes on conclut que si, dans la formule,

$$e = h = \frac{1}{2} at^2,$$

on remplacé h par sa valeur 160 par exemple et t par sa valeur 4, on obtient :

$$160 = \frac{1}{2} a \times 4^2,$$
$$a = 20.$$

La vitesse à la fin de la troisième seconde doit donc être :

$$v = at = 20 \times 3 = 60.$$

On le vérifie en plaçant le curseur évidé à la division 90 (espace parcouru à la fin de la troisième seconde) et le curseur plein à la division $150 = 90 + 60$.

La masse additionnelle étant enlevée à partir du 90, le mouvement devient uniforme, et l'on constate que les 60 centimètres sont parcourus en une seconde et représentent par conséquent la vitesse au bout du temps $t = 3$.

114. Mouvement uniformément retardé. — La vitesse diminue de quantités égales pendant des temps égaux ; la diminution de vitesse pendant la seconde s'appelle **accélération retardatrice.** Ce mouvement est dû à l'action d'une résultante unique constante en grandeur et direction, mais opposée au mouvement.

Ex. : mouvement d'une bille remontant un plan incliné, d'un corps lancé de bas en haut.

Il résulte de la définition :

1° Qu'il y a toujours une vitesse initiale v_0 à l'origine du mouvement ;

2° Que la vitesse à un instant donné v est égale à la vitesse initiale v_0 diminuée du produit de l'accélération par le temps :

$$v = v_0 - at ;$$

3° Que le mouvement cesse lorsque

$$v = 0 \qquad \text{ou} \qquad v_0 = at \qquad \text{ou} \qquad t = \frac{v_0}{a}.$$

Si la résultante unique continue d'agir, le mouvement change de sens, la force devient accélératrice au lieu de retardatrice, puisqu'elle agit dès lors dans le sens du mouvement.

Il n'y a donc pas de différence essentielle entre les deux mouvements uniformément variés, le second (retardé) n'est autre que le premier (accéléré) dans lequel l'accélération est **négative.**

Dès lors,

$$E = v_0 t - \frac{1}{2} at^2$$

est la formule des espaces parcourus.

115. Application. — *Au départ d'une gare, le mouvement d'un train est uniformément accéléré jusqu'à ce que la vitesse nulle au départ soit de 24 mètres par seconde. Cette vitesse est atteinte au bout de 8 secondes. On demande : 1° quelle est l'accélération du mouvement ; 2° à quelle distance de la gare de départ la vitesse normale est atteinte.*

De la formule

$$v = at,$$

on tire

$$a = \frac{v}{t} = \frac{24}{8} = 3 \text{ mètres.}$$

D'autre part

$$E = \frac{1}{2} at^2 = \frac{3}{2} \times 8^2 = 96 \text{ mètres.}$$

Pour s'arrêter, le même train ralentit sa vitesse de $0^m,60$ *par seconde ; on demande à quelle distance de la gare et combien de temps avant l'arrêt le mécanicien doit cesser l'admission de vapeur.*

De la formule

$$v = v_0 - at,$$

dans laquelle $v = 0$ (arrêt), $v_0 = 24$ mètres, $a = 0^m,60$; on tire

$$t = \frac{v_0 - v}{a} = \frac{24}{0,6} = 40 \text{ secondes.}$$

D'autre part

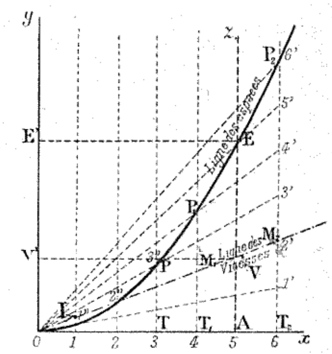
$$E = v_0 t - \frac{1}{2} at^2 = 24^m \times 40 - 0^m,30 \times 40^2,$$

$$E = 960^m - 480^m = 480 \text{ mètres.}$$

116. Représentation graphique. — On opère comme pour le mouvement uniforme. L'axe Ox est toujours celui des temps, l'axe Oy celui des longueurs (espaces et vitesses).

a) **Mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale.** — Nous tracerons la ligne des vitesses et celle des espaces du mouvement accéléré du train du problème précédent.

Nous adopterons, comme échelles, 1 millimètre par mètre pour les longueurs, 8 millimètres par seconde pour les temps.



Echelle des longueurs : 1 mm. par mètre.
Echelle des temps : 8 mm. par seconde.
Fig. 133 *bis*.

1° *La ligne des vitesses est une droite passant par l'origine.* — En effet, soient M_1T_1 et M_2T_2 les vitesses v_1 et v_2, ces longueurs sont proportionnelles aux temps t_1 et t_2, c'est-à-dire à OT_1 et OT_2.

Les triangles rectangles OM_1T_1 et OM_2T_2 ayant leurs côtés proportionnels sont semblables; leurs angles en O sont par suite égaux, les points O, M_1, M_2 sont donc situés sur la même droite. Il en serait de même pour les autres points de la ligne des vitesses.

Si l'on remarque que $v = a$ lorsque $t = 1$, puisque $v = at$, il suffit pour avoir la droite de joindre l'origine O au point I situé à une distance I1 $= a = 3$ mètres, soit à l'échelle 3 millimètres sur l'ordonnée issue du point 1 seconde.

2° *La ligne des espaces* OPP_2 *est un arc de parabole* (*fig.* 133), courbe dont les distances de ses points à une droite fixe (tangente au sommet) sont proportionnelles aux carrés de leurs distances à l'axe de symétrie, seconde droite fixe perpendiculaire au sommet de la courbe à la tangente :

$$TP = k \cdot OT^2.$$

Ici la parabole a son sommet à l'origine O, Ox est sa tangente au sommet, Oy l'axe de symétrie.

On peut la construire par points en calculant les différentes valeurs de E pour 1 seconde, 2 secondes, 3 secondes..., soit $1^{m},50$, 6 mètres $13^{m},50$, ..., et en les portant à l'échelle des longueurs sur les ordonnées des points 1, 2, 3, ..., soit 1-1″ $= 1^{mm},5$, 2-2″ $=$ 6 millimètres, etc.

On peut la construire en se basant sur la définition précitée de la parabole :

Déterminer un point extrême P_2, espace parcouru au bout de 6 secondes soit :

$$\frac{1}{2}at^2 = \frac{3^m \times 36}{2} = 54 \text{ mètres,}$$

ce qui donne $T_2P_2 = 54$ millimètres à l'échelle des longueurs.

On divise OT_2 et T_2P_2 en un même nombre de parties égales que l'on numérote comme sur la figure.

Les points de la parabole sont à l'intersection de droites issues de l'origine O1′, O2′, O3′,... avec les ordonnées de même numéro 1-1, 2-2″, 3-3″, ...

La ligne des espaces est bien une parabole répondant à la définition ci-dessus. En effet $e = \frac{1}{2}at^2$, $TP = \frac{e}{1.000}$ à l'échelle des longueurs, $TP = \frac{a}{2.000}t^2$, c'est-à-dire $\frac{a}{2.000}$ ou k fois le carré de la distance représentant t, soit OT.

Il est facile de justifier la construction de la parabole. D'après elle

$$\frac{TP}{3'T_2} = \frac{OT}{OT^2} = \frac{3}{6}; \qquad \text{mais} \qquad 3'T_2 = T_2P_2 \times \frac{3}{6}.$$

Donc :

$$\frac{TP}{\frac{3}{6}T_2P_2} = \frac{3}{6}; \qquad \frac{TP}{T_2P_2} = \frac{3^2}{6^2} = \frac{OT^2}{OT_2^2};$$

les points obtenus P et P_2 sont donc bien des points de la parabole.

b) **Mouvement uniformément acceléré avec vitesse initiale** (*fig.* 134). — *La ligne des vitesses est encore une droite* IM, *celle des espaces un arc de parabole* OP, mais le sommet de cette courbe n'est plus à l'origine O.

Ce sommet se trouve à gauche de O et en dessous, à une distance de Oy égale à $\frac{v_0}{a}$ et à une distance Ox égale à $\frac{v_0^2}{2a}$. La parabole se trace comme dans le cas précédent.

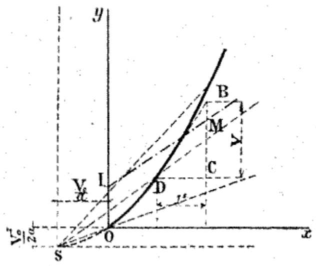


FIG. 134.

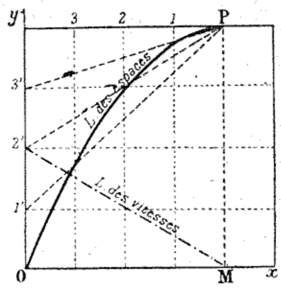


FIG. 135.

c) **Mouvement uniformément retardé.** — Soit à représenter le mouvement de ralentissement du train (n° 115).

La vitesse initiale $v_0 = 24$ mètres décroît proportionnellement au temps pour s'annuler au bout de

$$t'' = \frac{V_0}{a} = \frac{24}{0,60} = 40 \text{ secondes.}$$

La ligne des vitesses est la droite IM.

$OI = v_0$ à l'échelle, soit 24 millimètres.

$OM = 40$ secondes à l'échelle, soit 40 millimètres.

L'espace parcouru au bout de 40 secondes est 480 mètres. En portant $MP = 48$ millimètres sur l'ordonnée de M, on obtient le sommet de la parabole. On connaît un autre point O, on peut alors la tracer par des points comme sur la figure 135.

117. Détermination graphique de la vitesse et de l'espace parcouru au bout d'un temps *t*. — Quel que soit le mouvement représenté, on porte sur l'axe Ox, à partir de O, une distance OA représentant à l'échelle une durée de t secondes. Au point A on mène à Oy la parallèle Az qui coupe en V et en E les lignes de vitesses et des espaces (*fig.* 133).

Les longueurs AV et AE représentent à l'échelle les valeurs de la vitesse et de l'espace parcouru pendant le temps t. Si, au contraire, on donnait l'espace parcouru OE′ pour déterminer la vitesse et le temps, on porterait OE′ sur Oy, puis on mènerait E′E parallèle à Ox, puis EA perpendiculaire à Ox. OA serait la représentation du temps, AV celle de la vitesse.

Mêmes constructions si l'on donnait la vitesse OV′.

On peut déduire la vitesse à un moment donné t de la courbe des espaces. La tangente au point correspondant de cette courbe figure la ligne des espaces du mouvement uniforme succédant au mouvement varié, il suffit alors de noter l'espace parcouru pendant 1 seconde de ce mouvement ; c'est, à l'échelle des espaces, la longueur du côté BC du triangle rectangle dont l'hypoténuse DB est la tangente à la courbe et l'autre côté DC une parallèle à Ox égale à la longueur représentant la seconde (*fig.*134).

XI. — CHUTE DES CORPS

118. Pesanteur. — La pesanteur est un cas particulier de la grande loi de l'**attraction universelle** : *Tous les corps s'attirent en raison directe de leur masse et en raison inverse du carré de leur distance*. En particulier, la Terre exerce sur les corps placés à sa surface une force constante qui les attire vers son centre. Cette force a pour effet de communiquer au corps libre de se mouvoir un mouvement uniformément accéléré qui est dirigé verticalement de haut en bas. Il en résulte que, si un corps tombe en chute libre, en désignant par g l'accélération :

1° *L'espace parcouru* $h = \frac{1}{2} gt^2$ *est proportionnel au carré des temps et inversement, la durée de la chute est proportionnelle à la racine carrée de la hauteur :*

$$t^2 = \frac{2h}{g}, \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

2° *La vitesse est proportionnelle au temps ; celle qui existe au bas de la chute est donc proportionnelle à la racine carrée de la hauteur :*

$$v = gt = g \times \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g} \times g^2} = \sqrt{2gh}.$$

119. Appareil du général Morin. — **Description.** — Cet appareil, qui permet de vérifier les lois précédentes (*fig.* 136), se compose essentiellement d'un cylindre vertical A pouvant tourner d'un mouvement uniforme de rotation, et d'un corps guidé B qui peut tomber en chute libre. Le cylindre est recouvert d'une feuille de papier et le corps muni d'un crayon dont la pointe I trace sur la feuille la courbe des espaces du mobile B.

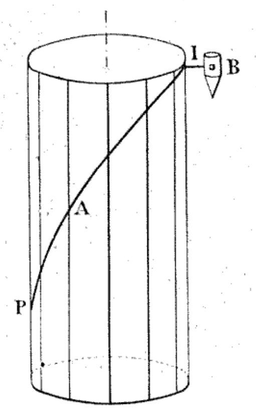


FIG. 136.

120. Fonctionnement. — Le mobile étant maintenu à la partie supérieure, on fait faire au cylindre un tour complet de façon que la pointe trace sur la feuille préalablement quadrillée une ligne droite (développement d'une circonférence du cylindre).

Celui-ci possédant un mouvement uniforme de rotation, on abandonne à l'action de la pesanteur le corps B ; le crayon étant toujours en contact avec le papier y décrit une courbe qui, développée, donne la figure 137. C'est le diagramme du mouvement d'un corps qui tombe en chute libre, car le mouvement de rotation étant uniforme, les génératrices I, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, qui sont équidistantes, se présentent à des intervalles de temps égaux devant le crayon, et la droite I*f* est l'axe des temps. Les **espaces parcourus** sont successivement 0, *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'*, dont les valeurs **sont proportionnelles** à 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, c'est-à-dire **au carré des temps** 0, 1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2.

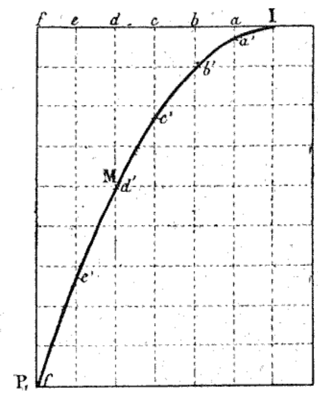


FIG. 137.

Par conséquent, le mouvement du corps est uniformément accéléré.

121. Valeur de l'accélération. — Comme on peut facilement évaluer, dans le vide, la hauteur de chute h et sa durée t, on déduit l'accélération g de la formule

$$h = \frac{1}{2} gt^2,$$

$$g = \frac{2h}{t^2}.$$

Nous verrons (nº 123) qu'elle varie légèrement selon les points de la terre. A Paris, $g = 9^m,8088$.

On prend dans les calculs 9,80 ou 9,81.

122. Corps lancé verticalement de bas en haut. — Comme la force retardatrice, la pesanteur est constante, le mouvement du corps sera uniformément retardé.

Si v_0 est sa vitesse initiale, on applique les formules suivantes :

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2, \tag{1}$$

$$v = v_0 - gt. \tag{2}$$

Durée de l'ascension. — Le corps retombe lorsque sa vitesse devient nulle $v = 0$; par suite

$$v_0 - gt = 0, \qquad v_0 = gt \qquad \text{et} \qquad t = \frac{v_0}{2g}.$$

Hauteur de l'ascension. — Le corps s'élève à une hauteur

$$h = v_0 \times \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2,$$

d'après (1), ou

$$h = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Descente. — Pour revenir au niveau initial, le corps retombant de cette hauteur $\frac{V_0^2}{2g}$, mettra un temps t' donné par la formule :

$$t' = \sqrt{\frac{2e}{g}} = \frac{v_0}{g} = t.$$

La durée de la descente égale celle de la montée.

La vitesse d'arrivée sur le sol

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2gv_0^2}{2g}} = v_0,$$

vitesse de lancement du corps.

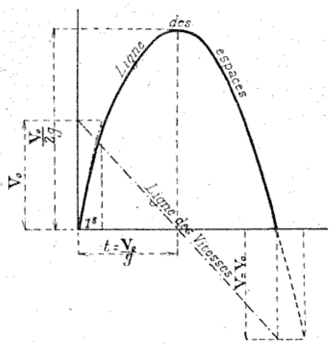


FIG. 138.

La figure 138 représente le mouvement d'ascension et de descente du corps, la courbe des espaces est une parabole dont l'axe est l'ordonnée correspondant à la position la plus élevée du mobile.

123. Proportionnalité des forces aux accélérations. — Les expériences faites avec la machine d'Atwood pour vérifier la loi des vitesses du mouvement uniformément accéléré (n° 113) montrent qu'avec une surcharge M :

la vitesse à la fin de la		1^re^ seconde	est	20	centimètres
—	—	2^e^	—	40	—
—	—	3^e^	—	60	—
—	—	4^e^	—	80	—

Elles permettent de conclure que la **force constante** due à la surcharge détermine une **accélération constante** :

$$a = 80 - 60 = 60 - 40 = 40 - 20 = 20 - 0 = 20 \text{ centimètres.}$$

En recommençant les expériences précédentes avec deux surcharges identiques à M, puis avec trois, quatre, cinq..., on constate que les lois du mouvement sont toujours les mêmes, mais les accélérations sont successivement :

$$a' = 20 \times 2 = 40 \text{ centimètres}; \quad a'' = 20 \times 3 = 60 \text{ centimètres};$$
$$a''' = 20 \times 4 = 80 \text{ centimètres} \ldots,$$

de sorte qu'on en peut déduire le principe suivant :

$$\frac{F}{a} = \frac{F'}{a'} = \frac{F''}{a''} = C^{te}.$$

Lorsque plusieurs forces F, F', F'',.. agissent successivement sur un même corps, elles lui communiquent chacune un mouvement uniformément accéléré et les accélérations a, a', a'',.. sont proportionnelles aux forces.

La Terre n'étant pas parfaitement sphérique, la distance de son centre à un point du pôle est inférieure à celle de ce centre à un point de l'équateur ; on ferait la même remarque pour les points situés au bord de la mer et au sommet d'une montagne. Il résulte de notre définition de la pesanteur que cette force est plus petite à l'équateur qu'au pôle et varie en chaque point de la Terre.

Or l'action de cette force sur un corps constituant le poids de ce corps, il s'ensuit que ce poids est variable. De plus, l'accélération due à la pesanteur varie dans les mêmes proportions, et l'on peut écrire :

$$\frac{P}{g} = \frac{P'}{g'} = \frac{P''}{g''} = \frac{F}{a} = C^{te}.$$

124. Masse d'un corps. — Pourtant, la **quantité de matière** contenue dans un corps n'a pas changé par suite de son transport de la mer à la montagne, du pôle à l'équateur.

On appelle **masse d'un corps** cette **quantité de matière constante** qu'il renferme, quel que soit l'endroit de l'univers où on le transporte. Cette masse varie avec chaque corps et, pour chacun d'eux, elle est définie par la relation constante $\frac{F}{a} = m$ qui existe entre une force quelconque F agissant sur ce corps et l'accélération que cette force lui communique :

$$m = \frac{F}{a} = \frac{F'}{a'} = \dots \frac{P}{g} = \frac{P'}{g'} \dots = C^{te}.$$

125. Remarques. — 1° Il n'existe pas en mécanique d'unité de masse autre que celle du système C. G. S.

Lorsque cette notion intervient dans les calculs, on l'obtient en divisant le poids exprimé en kilogrammes par l'accélération due à la pesanteur à l'endroit considéré, exprimée en mètres :

$$m = \frac{P^{kg}}{g^{m}}.$$

2° Le poids d'un corps étant variable aurait des effets différents sur un dynamomètre, un ressort, en différents points de la Terre, mais il ferait toujours équilibre aux mêmes poids marqués dans le plateau d'une balance.

En effet, soit P le poids du corps, m sa masse, et soit P′ la valeur des poids marqués, m' leur masse. Si à Paris l'accélération est 9,8, on a l'égalité :

$$P = m \times 9{,}8 = P' = m' \times 9{,}8,$$

ce qui entraîne $m = m'$.

A l'équateur, l'accélération étant 9,7, par exemple, on a encore :

$$P_1 = m \times 9{,}7 = m' \times 9{,}7 = P',$$

donc les poids se feront encore équilibre.

3° En un même lieu, tous les corps étant soumis à la pesanteur devraient tomber également vite, puisque :

$$g = \frac{P}{m} = \frac{P'}{m'} = \frac{P''}{m''} = C^{te}.$$

Il en est ainsi dans le vide (tube de Newton) ; mais, dans l'air, le fluide exerce un frottement qui varie dans le même sens que le volume des corps et qui a pour effet de retarder le mouvement d'une plume ou d'un papier davantage que celui d'une masse de fer ou de plomb.

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Au départ d'une gare, un train met 40 secondes d'un mouvement uniformément accéléré pour atteindre sa vitesse uniforme de 54 kilomètres à l'heure. Pour s'arrêter, le même train ralentit uniformément sa marche de $0^m,50$ par seconde. On demande :

1° L'accélération du mouvement accéléré ;

2° L'espace parcouru par le train avant d'atteindre sa vitesse de régime ;

3° La durée du mouvement uniformément retardé ;

4° A quelle distance de la gare d'arrivée le mécanicien doit commencer à ralentir ;

5° De construire le graphique du mouvement du train arrivant dans une gare, s'y arrêtant 1 minute et repartant (échelles de 1 millimètre par seconde et de 1 millimètre pour 10 mètres).

II. — Pour mesurer la profondeur d'un puits, on abandonne une pierre qui tombe en chute libre ($g = 9,80$). Quelle est la profondeur du puits, sachant que la pierre met 6 secondes pour arriver au fond ?

III. — Une locomotive pesant 50 tonnes, marchant en palier à une vitesse uniforme de 72 kilomètres à l'heure, passe devant un premier poteau $\frac{0}{800}\frac{5}{400}$, puis devant un deuxième $\frac{5}{400}\frac{0}{300}$:

1° Quel est son mouvement entre les deux poteaux ?

2° Sa vitesse en haut de la rampe ?

3° Le temps de la montée de celle-ci ?

IV. — Une balle de plomb de 20 grammes sort du canon d'un fusil de 16 millimètres de diamètre et de 900 millimètres de longueur avec une vitesse de 750 mètres par seconde. Sachant que la pression des gaz est constante dans l'arme, on demande sa valeur par centimètre carré.

V. — Une bille partant du repos descend un plan incliné à 30° sur l'horizontale sur une longueur de $9^m,80$. L'accélération de la pesanteur étant $9^m,80$, on demande :

1° La durée de la descente ;

2° La vitesse de la bille au bas de sa course ;

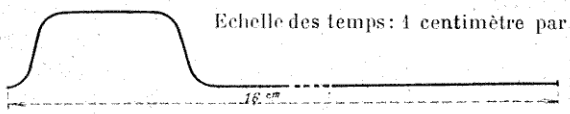
3° La représentation graphique du mouvement.

VI. — Même problème en supposant la bille lancée avec une vitesse de 2 mètres.

VII. — Lire le diagramme ci-dessous du mouvement d'une soupape d'échappement de moteur à essence. En dégager les divers mouvements et les vitesses au bout de ceux-ci.

Echelle des longueurs : $\frac{1}{1}$.

Echelle des temps : 1 centimètre par $\frac{1}{120}$ de seconde.



XII. — PRINCIPE DE LA CONSERVATION DU TRAVAIL

126. Travail communiqué à un corps par une force constante. — Lorsqu'un corps est soumis à l'action d'une force F, il tend à se mettre en mouvement. Ex. : fardeau soulevé par un homme; voiture traînée par un cheval; piston d'une machine poussé par la vapeur, etc.

Si les résistances qui s'opposent au mouvement sont supérieures aux forces agissantes, il n'y a point de mouvement. Ex. : le parquet s'oppose à l'action de la pesanteur sur les objets qu'il supporte ; véhicule enlisé malgré les coups de collier du cheval ; poussée latérale d'un homme contre le mur.

Si les résistances sont vaincues, le mouvement a lieu et le corps reçoit de la force un certain travail égal au produit de la force par le chemin parcouru :

$$T \text{ kgm} = F \text{ kg} \times L \text{ m}.$$

Il peut arriver qu'une force n'ait aucune résistance à détruire. Ex. : force d'expansion des gaz explosifs agissant sur le projectile d'une arme à feu ; pesanteur exerçant son action sur une pierre qui tombe en chute libre.

Alors la force F communique au corps de masse m un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération de vitesse par seconde

$$a = \frac{F}{m}.$$

Cette propriété que possède le corps de se mouvoir est une manifestation de l'**énergie** due au travail emmagasiné pendant le mouvement :

$$T = F \times L.$$

Or l'espace parcouru dans un mouvement uniformément accéléré a pour valeur :

$$L = e = \frac{1}{2} at^2,$$

$$T = F \times \frac{1}{2} at^2.$$

D'autre part :

$$F = m \times a \qquad \text{et} \qquad V = at \qquad \text{ou} \qquad V^2 = a^2t^2.$$

D'où :

$$T = ma \times \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} ma^2t^2 = \frac{1}{2} mV^2.$$

Le travail emmagasiné par un corps en mouvement est égal au demi-produit de sa masse par le carré de sa vitesse ; on lui donne le nom de **puissance vive** ou d'**énergie cinétique**.

Applications. — Un cours d'eau possède un débit de 3 mètres cubes par seconde et une vitesse de 9 kilomètres à l'heure ; sa puissance vive par seconde est de :

$$\frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \times V^2 = \frac{1}{2} \times \frac{3.000}{9,81} \times \left(\frac{9.000}{3.600}\right)^2 = 955 \text{ kgm ou } 12 \text{ chx.}$$

Une brique de 1.600 grammes se détache d'un toit situé à $12^{m},50$ de hauteur ; sa vitesse est :

$$V = \sqrt{2gh},$$

et sa puissance vive :

$$\frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \times 2gh = P \times h = 1,6 \times 12,5 = 20 \text{ kgm.}$$

Une balle pesant 20 grammes est animée d'une vitesse de 600 mètres par seconde à la sortie d'une arme à feu.

Sa puissance vive est :

$$\frac{1}{2} mV^2 = \frac{P}{2g} V^2 = \frac{0{,}020}{2 \times 9{,}81} \times 600^2 = 366 \text{ kgm.}$$

127. Transformation de l'énergie cinétique. — Avant de revenir au repos, un corps en mouvement doit restituer toute l'énergie qu'il a emmagasinée, et pour cela accomplir un certain travail : la balle vaincra la résistance de l'air sur un très long parcours, traversera des parois ou entrera dans la terre assez profondément. Si elle rencontre un corps résistant qu'elle ne puisse déformer, il y aura transformation de l'énergie mécanique en énergie calorifique, les corps s'échaufferont et la chaleur sera parfois suffisante pour fondre la balle.

En d'autres circonstances, choc d'une lame d'acier contre un silex, il y aura transformation de mouvement en chaleur et lumière. Dans la machine de Ramsden, dans les dynamos, il y a production d'électricité en même temps qu'absorption de travail.

D'autre part, l'énergie calorifique du charbon et des gaz combustibles, l'énergie électrique d'un courant, peuvent être transformées en travail mécanique dans des moteurs divers (à vapeur, à gaz, à essence, à pétrole, à alcool, électriques). Par conséquent :

Dans la nature, rien ne se perd, rien ne se crée ; tout se transforme, l'énergie comme la matière, et l'on peut considérer le mouvement, la chaleur, la lumière, l'électricité, le son et la vie organique elle-même comme des manifestations différentes de la même *énergie*, créatrice des *forces*. Dans cette hypothèse, tout ce qui existe dans l'**Univers** se réduit à deux choses : la **Force ou Energie** et la **Matière**.

128. Accroissement de puissance vive d'un corps en mouvement. — Lorsqu'un corps partant du repos acquiert une vitesse V_1, sa puissance vive $\frac{1}{2} mV_1^2$ est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures ayant agi sur le corps dans le même temps.

Si la vitesse s'accélère sous l'action de ces forces et devient $V_2 > V_1$, la puissance vive s'élève à $\frac{1}{2} mV_2^2 > \frac{1}{2} mV_1^2$ et l'accroissement de puissance vive pendant ce temps :

$$\frac{1}{2} mV_2^2 - \frac{1}{2} mV_1^2 = \frac{1}{2} m (V_2^2 - V_1^2) = TF_e + TF'_e + TF''_e = \Sigma TF_e.$$

ΣTF_e (lire *somme des termes analogues à* TF_e ou *Sigma de* TF_e) est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures :

$$(1) \qquad \frac{1}{2} m (V_1^2 - V_2^2) = \Sigma TF_e$$

est l'équation de puissance vive.

En désignant par T_m le travail moteur des puissances, et par T_r le travail passif des résistances pendant la variation de vitesse

$$\Sigma TF_e = T_m - T_r,$$

d'où :

$$(2) \qquad \frac{1}{2} m (V_1^2 - V_2^2) = T_m - T_r.$$

Si $T_m > T_r$, la puissance vive augmente ;
Si $T_m < T_r$, la puissance vive diminue.
Dans un mouvement de rotation, la relation (2) devient :

$$\frac{1}{2} m\omega_2^2 R^2 - \frac{1}{2} m\omega_1^2 R^2 = \frac{1}{2} mR^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) = T_m - T_r.$$

129. Applications de la puissance vive. — Pour produire le martelage d'une barre de fer, le forgeron anime d'une grande vitesse, 10 mètres par seconde par exemple, son marteau pesant 800 grammes. Le travail produit sur le fer s'élève à :

$$\frac{0,8}{2g} \times 10^2 = 4 \text{ kgm}.$$

Si la barre s'est aplatie de 2 millimètres, la résistance vaincue s'obtient en écrivant que le travail moteur est égal au travail résistant :

$$T_m = T_r \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}\,mV^2 = Q \times L,$$

$$4 \text{ kgm} = Q \times 0^m{,}002,$$

$$Q = \frac{4.000}{2} = 2.000 \text{ kg.}$$

Avec les marteaux-pilons, l'élévation est obtenue à l'aide de la vapeur. La masse métallique retombe ensuite sous l'action de la pesanteur seule (marteaux à simple effet) ou sous l'action combinée de la pesanteur et de la vapeur ; elle acquiert une vitesse V et une puissance vive $\frac{1}{2}\,mV^2$ qu'elle restitue au corps à travailler.

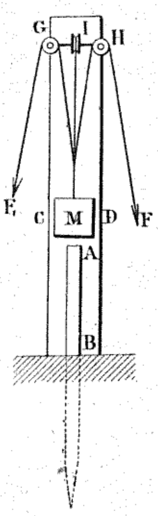


Fig. 139.

La sonnette à enfoncer les pieux (*fig.* 139) se compose essentiellement d'une masse pesante appelée mouton M guidée par deux montants CD et disposée au-dessus du pieu à enfoncer AB. Le mouton est soutenu par des cordes passant sur les poulies G, H, I,... Des hommes agissent sur ces cordes, simultanément, élèvent le mouton et l'abandonnent ensuite à la pesanteur qui lui communique une puissance vive :

$$T = \frac{1}{2}\,mV^2 = P \times h.$$

Si un mouton de 10 kilogrammes tombant de 2 mètres de hauteur enfonce le pieu de L = 4 centimètres, il détruit une résistance :

$$Q = \frac{10 \times 2}{0{,}04} = 500 \text{ kg.}$$

Ces travaux sont d'ailleurs respectivement égaux à la somme des travaux fournis par les hommes actionnant les garants (cordes sur lesquelles sont les puissances) des poulies :

$$\Sigma TF = TF_1 + TF_2 + TF_3 \ldots = Ph = QL = 20 \text{ kgm.}$$

130. Puissance vive emmagasinée dans un corps animé d'un mouvement de rotation, d'un volant par exemple. — Soit un volant de poids P tournant autour de l'axe O à la vitesse de n tours par minute. Sa masse peut être considérée comme concentrée sur la circonférence moyenne de jante dont la vitesse linéaire est :

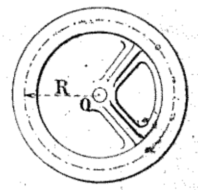


FIG. 140.

$$V = \frac{\pi R n}{30} = \omega R.$$

La puissance vive emmagasinée correspondant au travail fourni au volant pour lui communiquer cette vitesse, est :

$$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{m\omega^2 R^2}{2} = \frac{m\pi^2 R^2 n^2}{2 \times 30^2} = \frac{P\pi^2 R^2 n^2}{2g \times 30^2} = 0{,}00056 PR^2 n^2.$$

Si la force motrice vient à cesser, le volant restitue ce travail au moteur avant que l'arrêt se produise.

131. Emploi des volants dans la régularisation de la marche des machines. — L'effet rotatif de la bielle d'une machine à vapeur varie avec son inclinaison : il est maximum lorsque la bielle est perpendiculaire à la manivelle, nul aux points morts. L'action de la vapeur sur le piston est elle-même variable à chaque instant pendant la détente. Le mouvement de l'arbre ne saurait être uniforme sans l'emploi d'un réservoir d'énergie qui emmagasine le travail moteur, lorsqu'il est supérieur au travail résistant, pour le restituer lorsque ce dernier est plus grand. Le volant remplit ce rôle ; il permet à la bielle de franchir les points morts. Son action est encore plus nécessaire dans les moteurs à explosion à quatre temps et simple effet, où la force motrice n'agit que pendant le quart de la durée du mouvement.

Les machines-outils ne travaillent pas continuellement : à la période de grande résistance succède une période de retour à vide.

Pendant le retour, le volant emmagasine l'énergie que lui fournit le moteur ; sa vitesse s'accélère, sa puissance vive augmente. Durant le travail, il restitue à l'outil cet accroissement de puissance vive, pour vaincre les résistances.

Il en est de même dans les machines qui exigent de gros efforts momentanés (laminoirs, cisailleuses et poinçonneuses).

Désignons par T_m et T_r les travaux moteur et résistant; par ω_1, ω_2 et $\omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ les vitesses angulaires minimum, maximum et moyenne ; on a d'après le principe des forces vives :

$$\frac{1}{2} mR^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) = mR^2 \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right) (\omega_2 - \omega_1)$$
$$= mR^2\omega (\omega_2 - \omega_1) = T_m - T_r,$$

d'où :

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{T_m - T_r}{mR^2\omega}.$$

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega} = \frac{T_m - T_r}{mR^2\omega^2} = \frac{(T_m - T_r) \times g}{PR^2\omega^2} = k.$$

Ce rapport, appelé **coefficient de régularisation** k, est d'autant plus faible que la **régularité** est plus grande. Celle-ci est donc proportionnelle :

1° A la masse m du volant, ou à son poids P ;

2° Au carré de son rayon R ;

3° Au carré de sa vitesse angulaire ω, ou de son nombre de tours ;

4° A l'inverse de l'excès du travail moteur sur le travail résistant.

Plus cet excès sera grand, plus il faudra que le volant soit lourd et de grand rayon ; plus il faudra que son nombre de tours par minute soit considérable.

Une machine à vapeur de 800 *chevaux destinée à une filature doit avoir un coefficient de régularité de* 1/80 *et faire en moyenne* 120 *tours par minute. Sachant que l'emplacement permet un rayon moyen de* 2 *mètres et que le travail résistant peut varier de* 800 *à* 600 *chevaux, calculer le poids du volant.*

$$k = \frac{1}{80};\ T_m = 75 \times 800 = 60.000 \text{ kgm} ;\ T_r = 75 \times 600 = 45.000 \text{ kgm} ;$$

$$T_m - T_r = 15\,000 \text{ kgm} ; \qquad R^2 = 4 ; \qquad \omega^2 = \frac{\pi^2 n^2}{30^2} = 155.$$

$$\frac{1}{80} = \frac{15.000 \times 9{,}81}{P \times 4 \times 155},$$

$$P = \frac{80 \times 15.000 \times 9{,}81}{4 \times 155} = 19.000 \text{ kg par excès.}$$

Si le volant est en fonte de densité 7,8, le volume de sa jante, seule vraiment efficace, est :

$$1 \text{ m}^3 \times \frac{19\,000}{7\,800} = 2^{\text{m}3},44.$$

Or la longueur de sa circonférence moyenne est :

$$2\pi R = 2 \times 3,1416 \times 4 = 25^{\text{m}},13.$$

D'où sa section carrée ou circulaire sera :

$$1 \text{ m}^2 \times \frac{2,44}{25,13} = 0^{\text{m}2},0976.$$

Le côté du carré serait 31 centimètres.

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Une locomotive de 70 tonnes fait 100 kilomètres à l'heure; quelle est sa puissance vive ?

II. — Les barreaux en acier fondu de 150 millimètres carrés de section et 200 millimètres de longueur destinés à la marine nationale doivent subir sans criques les chocs d'un mouton de 10 kilogrammes tombant successivement de $1^{\text{m}},50$, $1^{\text{m}},75$, 2 mètres, $2^{\text{m}},25$ et $2^{\text{m}},50$ de hauteur. Quel est le travail moléculaire supporté par ces barreaux ?

III. — Un volant de poids $P = 2.000$ kilogrammes et de rayon moyen $R = 1^{\text{m}},25$ tourne avec une vitesse de 150 tours à la minute. Il tourne encore pendant 40 secondes, alors qu'on a fermé l'admission de la vapeur. On demande : 1° la masse du volant m; 2° sa vitesse angulaire ω; 3° sa vitesse linéaire V; 4° sa puissance vive; 5° l'accélération retardatrice qui arrête la machine; 6° la valeur des résistances à vaincre.

IV. — Quel doit être le poids des deux volants d'un moteur à gaz actionnant des laminoirs dont la vitesse moyenne est 180 tours; l'écart de vitesse peut être 5 tours en plus ou en moins; la puissance peut varier de 0 à 600 chevaux ; le diamètre moyen peut atteindre 5 mètres.

XIII. — FORCE CENTRIFUGE

132. Définitions. — Considérons une masse de plomb A reliée par un fil très fin OA au point O et décrivant d'un mouvement uniforme une circonférence autour de ce point.

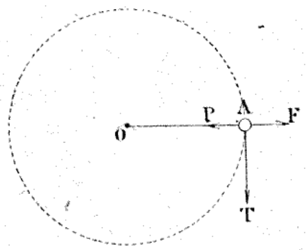


Fig. 141.

Si la masse A n'était assujettie à aucune liaison (ce qui arriverait à la rupture du fil OA), elle serait animée, en vertu de l'inertie de la matière, d'un mouvement rectiligne et uniforme de direction AT tangente en A à la circonférence.

Il existe donc, à cause du fil OA, une force qui tend à modifier le mouvement de la masse A en l'obligeant à décrire une circonférence ; c'est la **force centripète** AP.

On désigne sous le nom de **force centrifuge** la réaction AF égale et directement opposée à AP.

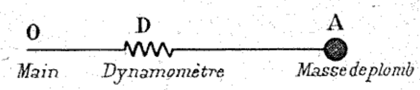


Fig. 142.

Pour nous rendre compte de l'existence de ces forces, faisons tourner rapidement avec la main le fil OA et la masse de plomb. La main est obligée de faire un effort pour maintenir l'appareil : c'est la **force centripète**.

Inversement, la masse exerce sur la main une traction qui est la **force centrifuge.**

Un dynamomètre D intercalé entre la main O et la masse de plomb A indique la valeur commune des forces centripète et centrifuge.

En accélérant la rotation, nous sentons que la traction augmente, et le fil arrive à se rompre lorsque sa tension devient supérieure à sa résistance.

Lorsque le fil casse, nous voyons la masse de plomb s'échapper suivant la tangente à sa trajectoire (direction du dernier élément de chemin circulaire). Elle n'est donc plus soumise aux forces centripète et centrifuge qui s'évanouissent avec le mouvement de rotation. La pesanteur continuant à agir, la trajectoire du mobile A s'incurve en une parabole, dans notre cas.

FIG. 143.

Pour bien se rendre compte de la direction qu'aurait la masse A si elle n'était soumise qu'à l'inertie, il faut agir sur un plan horizontal avec un levier tournant autour de O et s'arrêtant brusquement au moment où la bille A est animée d'une grande vitesse. Si l'on a soin de recouvrir de craie cette bille, elle tracera elle-même sa trajectoire qui est rectiligne (*fig.* 143).

133. Valeur de la force centripète. — *a*) **Détermination expérimentale.** — L'appareil représenté par la figure 144 se compose essentiellement d'un axe Ox supporté par un bâti B. Cet axe reçoit un mouvement de rotation du volant-manivelle M par l'intermédiaire de l'engrenage conique E. Un cadre CD solidaire de l'arbre Ox est formé par une barre de fer méplate percée d'un trou D. Deux crochets H et K solidaires de l'arbre et de la boucle A permettent d'intercaler un dynamomètre entre Ox et A. La sphère A est en outre guidée par une tige AD passant dans le trou D.

Lorsque l'on fait fonctionner l'appareil, on constate que la tension du dynamomètre :

1° Augmente proportionnellement au poids de la boule (employer bois, fer, plomb) ;

2° Augmente proportionnellement au carré du nombre de tours de la manivelle et de l'axe Ox (utiliser un compteur de tours) ;

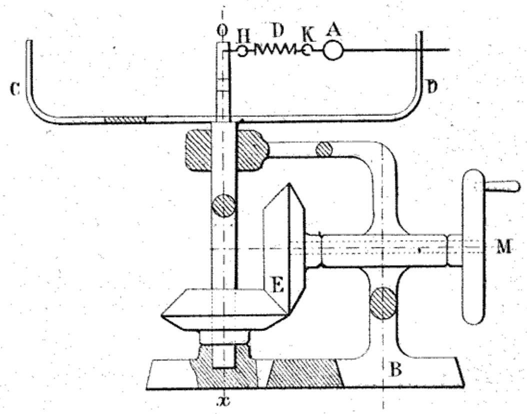


Fig. 144.

3° Augmente proportionnellement au rayon OA = R de la circonférence décrite par A (intercaler entre le crochet H et le dynamomètre D une petite tige de fer recourbée en crochet ou anneau à chaque extrémité). La distance OA s'appelle **rayon de giration.**

Ainsi la force centripète et son égale la force centrifuge sont proportionnelles à la masse du corps, au carré de sa vitesse angulaire (nombre de tours) et à son rayon de giration :

$$F = m\omega^2 R.$$

Si une sphère de 600 grammes, située à 20 centimètres de l'axe de rotation, fait 50 tours par minute,

$$m = \frac{P}{g} = \frac{0,6}{9,8};$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \times 50}{30} = \frac{5\pi}{3}; \qquad \omega^2 = \frac{25}{9}\pi^2; \qquad R = 0,2;$$

$$F = m\omega^2 R = \frac{0,6}{9,8} \times \frac{25}{9} \times \pi^2 \times 0,2 = 0^{kg},330.$$

b) **Détermination géométrique.** — Considérons le mouvement du mobile A pendant le temps infiniment petit t qu'il met à parcourir l'arc $AM = vt$, qui est lui-même infiniment petit. Ce mouvement est la résultante de deux autres : l'un uniforme, dû à l'inertie de la matière et dirigé suivant la tangente en A à la circonférence ; l'autre, dû à la force centripète constante, est uniformément accéléré et dirigé suivant le rayon AO. Désignons par $a = \frac{F}{m}$ la valeur de l'accélération dans ce dernier mouvement.

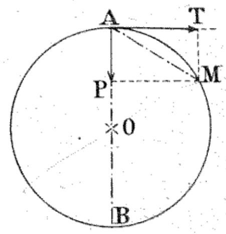


FIG. 145.

L'espace parcouru AP sous l'action de la force centripète a pour valeur :

$$(1) \qquad AP = e = \frac{1}{2} at^2.$$

D'autre part, la corde AM est moyenne proportionnelle entre le diamètre AB qui passe par une de ses extrémités et sa projection AP sur ce diamètre :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{AP} \qquad \text{ou} \qquad AP = \frac{\overline{AM}^2}{AB}.$$

L'arc AM étant infiniment petit, on peut considérer qu'il a même valeur que sa corde :

$$\text{Corde } AM = \text{arc } AM = vt,$$
$$\overline{AM}^2 = v^2t^2,$$
$$AB = 2R,$$
$$(2) \qquad AP = \frac{v^2t^2}{2R}.$$

Mais on a déjà trouvé que (1)

$$AP = \frac{1}{2} at^2.$$

Donc :

$$\frac{1}{2} at^2 = \frac{v^2t^2}{2R},$$

d'où :

$$a = \frac{v^2}{R},$$

$$F = ma = \frac{mv^2}{R}.$$

Comme $v = \omega R$ et $v^2 = \omega^2 R^2$,

$$F = ma = \frac{mv^2}{R} = \frac{m\omega^2 R^2}{R} = m\omega^2 R,$$

résultat conforme à celui de l'expérience.

Remarque. — Pour bien comprendre cette démonstration, il est indispensable de se rendre compte des points suivants :

1° La force étudiée est instantanée : l'instant d'après, c'est une autre force de même intensité, mais de direction différente, qui agit ;

2° L'arc AM n'est pas représenté exactement sur la figure ; en réalité il est infiniment petit ; c'est seulement pour cette raison qu'il peut être confondu avec sa corde, bien que celle-ci reste constamment moyenne proportionnelle entre le diamètre AB passant par une de ses extrémités et sa projection AP sur ce diamètre.

On met en évidence que le rapport d'un arc à sa corde tend vers 1, lorsque la longueur de l'arc tend vers 0 en calculant les rapports correspondant aux angles au centre remarquables.

Angles au centre....	180°	120	90	60	45	30	0
Longueur des arcs...	πR	$\frac{2\pi R}{3}$	$\frac{\pi R}{2}$	$\frac{\pi R}{3}$	$\frac{\pi R}{4}$	$\frac{\pi R}{6}$	0
Longueur des cordes.	2R	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$R\sqrt{2-\sqrt{3}}$	0
Rapport des arcs aux cordes...........	1,570 >	1,209 >	1,110 >	1,047 >	1,017 >	1,011 >	1

134. Applications industrielles de la force centrifuge. — Dans l'industrie, on utilise très fréquemment les effets de la force centrifuge : les **essoreuses** servent à séparer un solide du liquide qui le mouille ; les **écrémeuses** permettent d'enlever rapidement la crème contenue dans le lait ; les **pompes** et les **ventilateurs** mettent les fluides en mouvement ; le **pendule conique** régularise la vitesse des moteurs. A cause des grandes vitesses de rotation dont sont animées les essoreuses et les écrémeuses, on les désigne assez souvent sous le nom de **turbines**.

L'essoreuse destinée au séchage du linge (*fig.* 146) se compose essentiellement d'un panier tronconique fait à claire-voie avec des fils de cuivre MNPQ. Ce panier est solidaire d'un arbre vertical AB qui reçoit son mouvement d'une manivelle, d'une courroie ou d'un engrenage. Le linge à essorer se met dans le panier, et le tout est placé à l'intérieur d'une cuve en cuivre EFGH munie d'un tuyau d'écoulement ou d'un robinet R. Soumises à une vitesse de 2 000 tours par minute, les étoffes de laine sèchent en sept ou huit minutes.

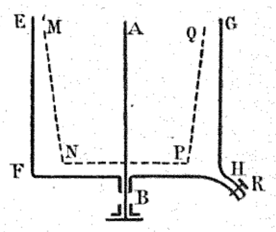


Fig 146.

On emploie un appareil analogue au précédent pour séparer l'huile de graissage des copeaux métalliques formés par l'outil d'une machine. Les turbines des sucreries permettent de même de débarrasser de leur humidité les cristaux de sucre.

Disons en passant que ces divers appareils ne sont que des modifications heureuses du vulgaire panier à salade.

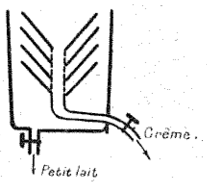


Fig. 147.

Écrémeuse (*fig.* 147). — La crème (matière grasse) ayant une densité 0,93 inférieure à celle du petit-lait 1,036, la force centrifuge agit sur elle d'une manière moins intense que sur celui-ci. Le lait est alors projeté à l'extérieur des cônes superposés, pendant que la crème s'écoule par le milieu.

135. Pompes centrifuges. — Elles se composent en principe d'un tambour T tournant à grande vitesse à l'intérieur d'un corps de pompe C qui entoure à distance la surface extérieure du tambour.

Supposons ce tambour creux fermé et rempli d'eau.

Sous l'action de la force centrifuge

$$F = m\omega R^2 = \frac{mV^2}{R},$$

qui se développe pendant le mouvement de rotation, l'eau exerce sur la paroi du tambour une pression justement égale à $m\omega^2 R = \frac{mV^2}{R}$, alors qu'il se produit au centre une dépression ou aspiration équivalente.

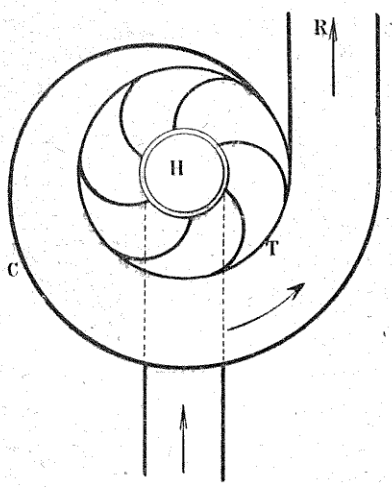


FIG. 148.

On comprend alors que si l'on munit le centre de la paroi du tambour d'un tuyau d'aspiration H et le contour d'un tuyau de refoulement R, il y ait pendant la rotation un mouvement continu du liquide de H vers R.

Pratiquement le tambour modifié constitue une véritable roue à aubes courbes disposées comme l'indique la figure, de façon à éviter le plus possible les chocs de l'eau.

136. **Pompes centrifuges à haute pression ou pompes-turbines.** — Elles permettent de refouler l'eau à une hauteur pouvant atteindre 750 mètres, grâce à l'adaptation d'un **appareil directeur** autour de la roue à aube ou **impulseur.**

Nous représentons un spécimen de ces pompes (*fig.* 149).

« Après avoir quitté l'orifice d'aspiration H, l'eau pénètre dans l'impulseur I par une ouverture annulaire de large section et, dirigée par les aubes, est refoulée à la vitesse désirée à la périphérie de l'impulseur. Cette vitesse — laquelle atteint son maximum à ce moment — est alors graduellement réduite au moyen des **aubes de diffusion** A (de l'appareil directeur) construites de telle sorte qu'elles permettent de convertir la vitesse de l'eau en pression statique avec le minimum possible de perte de charge. Si la pompe n'a qu'un seul impulseur, c'est-à-dire si elle est à simple phase, l'eau, après avoir quitté les aubes de diffusion, passe dans la tubulure de décharge et de là dans la tuyauterie de refoulement R. La figure 149 montre cependant une pompe à plusieurs phases; dans ce cas, après son passage dans les aubes de diffusion de la première phase, l'eau traverse aussi directement que possible l'espace intermédiaire, pénètre dans l'orifice d'aspiration du second impulseur, et cette opération

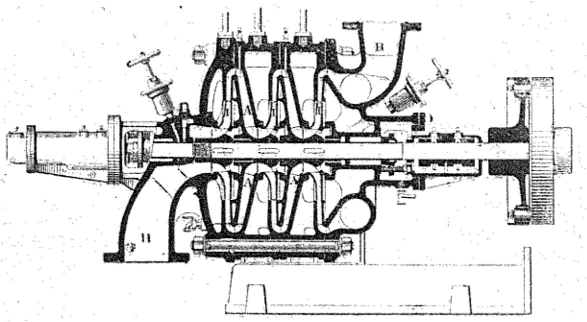


Fig. 149.

est répétée autant de fois qu'il est nécessaire pour l'obtention de la pression finale de refoulement. » (Société Worthington.)

Les pompes centrifuges, grâce au débit considérable qu'elles peuvent atteindre, à la grande hauteur de refoulement qu'elles permettent, à la continuité de l'écoulement de l'eau, à leur rendement élevé (80 0/0), grâce surtout à la facilité de commande directe (accouplement avec une dynamo, une turbine à vapeur, une turbine hydraulique, commande par courroie...), sont d'un usage courant dans l'industrie. Ex. : épuisement dans les mines, fonçage des puits, service des égouts et distribution d'eau des villes, alimentation des tuyères de haut fourneau et des chaudières, service d'incendie, circulation d'eau autour des cylindres de moteurs à explosion, circulation d'huile, irrigations, desséchements, manœuvres des docks flottants, renflouage des navires, vidange des cales, etc... Mais leur débit doit être constant, leur travail très régulier et leur construction soignée.

137. **Remarques générales à toutes les pompes.** — L'eau s'élevant dans le tuyau d'aspiration sous l'action de la pression atmosphérique H, il convient de ne pas exagérer la longueur h de ce tuyau. La vitesse de l'eau à l'orifice d'entrée dans la pompe est en effet égale à $v = \sqrt{2g(H - h)}$; H, étant exprimée en colonne

d'eau, a une valeur de $10^{m},33$ environ : il faut donc théoriquement $h < 10^{m},33$. Mais, en pratique, le frottement de l'eau dans les conduites et ses changements de direction occasionnent une perte de charge dont on doit tenir compte en majorant h.

Il convient donc : 1° de limiter la valeur h à 7 mètres au maximum ; 2° de donner aux organes, pistons, palettes ou aubes, une vitesse correspondant à celle de l'eau $v = \sqrt{2g\,(H - h)}$ et aussi uniforme que possible. En effet une vitesse plus grande occasionnerait dans la capacité d'arrivée de l'eau un vide nuisible par les chocs qu'ils peut occasionner, par le dégagement de l'air et des autres gaz dissous dans l'eau $\left(\frac{1}{20} \text{ de son volume}\right)$ qui viendraient diminuer l'effet utile du piston en absorbant en pure perte une partie du travail moteur.

Quant au tube de refoulement, sa hauteur n'est limitée que par la résistance des matériaux des organes propulseurs et par la puissance qui leur est appliquée.

138. Ventilateurs. — Ces appareils destinés à produire un déplacement de l'air sont de véritables pompes centrifuges destinées à un fluide gazeux au lieu d'un liquide.

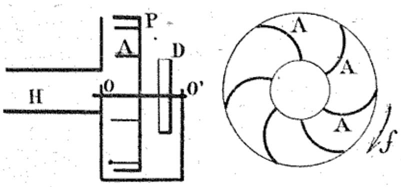


Fig. 150.

Ils sont formés d'un certain nombre d'aubes droites ou courbes montées sur un même axe et tournant avec lui à l'intérieur d'un tambour dont la circonférence et les joues peuvent être complètement ou partiellement ouvertes.

Le ventilateur aspirant (*fig.* 150) se compose d'un plateau P muni d'ailes courbes A solidaires d'un axe de rotation OO' qui reçoit son mouvement d'une poulie D.

Un tuyau d'aspiration H débouche à la hauteur de l'axe.

Le ventilateur tournant dans le sens de la flèche, il se produit du côté de la concavité des aubes un vide qui provoque un appel d'air pur du dehors par la tubulure H. Cet air soumis à l'action de la force centrifuge est évacué à la périphérie à une faible vitesse.

Le ventilateur soufflant est entouré d'un tambour sans joues dont la circonférence fermée est munie d'un tuyau de refoulement.

Alors que le premier type aspire l'air pur du dehors pour le verser dans une salle ; le second rejette au dehors l'air vicié de la salle ; à la vérité, le résultat est analogue. Le ventilateur peut être d'ailleurs aspirant et soufflant.

Les ventilateurs sont employés pour l'aérage des appartements, classes, hôpitaux, ateliers, mines, etc... ; pour le tirage artificiel soit par refoulement d'air dans la chaufferie, soit par aspiration dans la cheminée ; pour les souffleries nécessaires à la combustion des forges, fours, gazogènes, cubilots, hauts fourneaux, etc.

139. Régulateur de Watt. — **Description.** — Le régulateur à boules ou pendule conique sert à modifier l'introduction des fluides (eau, gaz, vapeur) dans les machines motrices. Il se compose d'un axe vertical A qui reçoit son mouvement de l'arbre moteur par l'intermédiaire d'une courroie ou de deux roues coniques C, D.

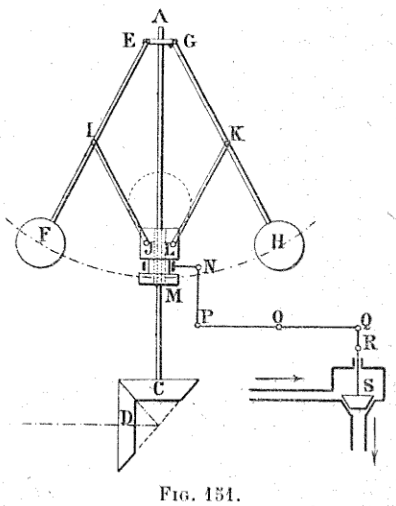


Fig. 151.

Deux tiges EF et GH à l'extrémité desquelles sont suspendues deux lourdes sphères métalliques sont assemblées par charnières à la partie supérieure de l'axe A. D'autre part, deux barres articulées IJ, KL relient le manchon M au milieu des tiges. Un ensemble de leviers oscillant autour du point fixe O mettent la soupape S sous la dépendance du manchon M.

Fonctionnement. — Lorsque la vitesse de la machine est normale, les boules prennent une position d'équilibre sous l'action de leur poids, de la force centrifuge et de leurs liaisons.

Elles se maintiennent ainsi que le manchon M à une hauteur constante qui correspond à une ouverture convenable de la soupape S.

Si la vitesse augmente, la force centrifuge augmente également. Elle amène un soulèvement des boules et du manchon qui entraîne la fermeture partielle de l'orifice d'admission.

Si, au contraire, la vitesse diminue, les boules et le manchon s'affaissent pendant que la soupape se soulève, livrant passage à une plus grande quantité de fluide.

Pour affaiblir la trop grande sensibilité de l'appareil, provoquant de continuels changements dans l'admission de la vapeur, on alourdit le manchon M en le surmontant d'une forte masse centrale.

Équilibre. — Considérons le pendule conique AH indépendant, animé d'un mouvement uniforme de rotation autour de l'axe AB.

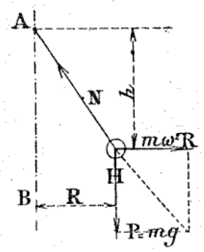


FIG. 152.

Cet organe possédant un point fixe A sera en équilibre si la résultante de toutes les forces qui agissent sur lui passe par le point fixe, c'est-à-dire si la somme algébrique des moments de ces forces par rapport au point A est nulle.

Le corps est soumis à l'action du poids $P = mg$ de la boule H, à l'action de la force centrifuge $m\omega^2R$ et à la tension N de la barre AH.

Le bras de levier du poids est le rayon R de la circonférence décrite par la boule; celui de la force centrifuge est la hauteur h des boules au-dessous de l'axe fixe A (*fig.* 152).

Donc :

$$M_A mg + M_A m\omega^2R + M_A N = 0,$$
$$(-\,mg \times R) + (+\,m\omega^2R \times h) + 0 = 0,$$
$$m\omega^2Rh = mgR,$$
$$\omega^2 h = g,$$
$$\omega^2 = \frac{g}{h}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{h}}, \qquad h = \frac{g}{\omega^2}.$$

Ainsi l'équilibre du pendule conique libre ne dépend pas du poids des boules, mais seulement de leur vitesse angulaire $\omega = \frac{\pi n}{30}$ et de leur hauteur h au-dessous de l'axe fixe.

Dans la pratique, il n'en est plus ainsi à cause des résistances qu'offrent le poids du manchon et les frottements de la douille et des articulations.

Si l'on désigne par Q la valeur de ces résistances, son action peut se décomposer suivant les directions MC, MD des bras MK, MI.

A son tour, la force MC que l'on peut supposer appliquée en K a même action que ses composantes KI et KL.

En outre, la force KJ est détruite par la résistance du point A, et la force KL, dans le cas où la figure AIMK est un losange, ce qui a lieu généralement, est égale à MQ.

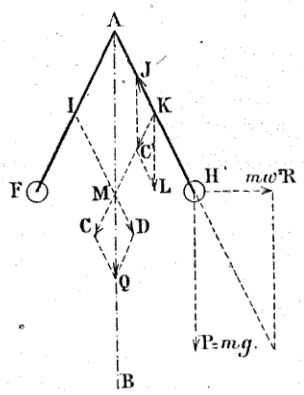


FIG. 153.

Ces conditions étant admises, désignons par ω la vitesse angulaire normale pendant laquelle le manchon est soutenu sur l'arbre par une goupille ; désignons par h la hauteur correspondante, et proposons-nous de calculer la vitesse angulaire $\omega' = k\omega$ que devra acquérir l'appareil pour amener le soulèvement du manchon et, par suite, la fermeture partielle de la soupape d'admission.

Les conditions d'équilibre à l'instant où le soulèvement va se produire sont données par la relation :

$$M_A P + M_A Q + M_A m\omega^2 R = 0,$$

$$(-PR) + \left(-Q\frac{R}{2}\right) + m\omega'^2 Rh = 0.$$

Mais

$$m = \frac{P}{g}, \qquad \omega^2 = \omega'^2 k^2 \qquad \text{et} \qquad h = \frac{g}{\omega^2}.$$

Donc :

$$P + \frac{Q}{2} = \frac{P}{g} \times \omega^2 k^2 \times \frac{g}{\omega^2} = Pk^2.$$

Il faut donc :

$$P(k^2 - 1) = \frac{Q}{2}, \qquad P = \frac{Q}{2(k^2 - 1)}.$$

Assez généralement on prend $k = \frac{21}{20}$.

Il en résulte :

$$P = \frac{Q}{2(k+1)(k-1)} = \frac{Q}{2\left(\frac{41}{20} \times \frac{1}{20}\right)} = \frac{400Q}{82}.$$

Soit environ $P = 5Q$.

Il est facile de remarquer que la sensibilité augmente avec le rapport $\frac{P}{Q}$.

140. Effets de la force centrifuge. — 1° Un seau rempli d'eau et animé d'un rapide mouvement de rotation ne se vide pas lorsque l'ouverture est en bas, parce que la force centrifuge qui la presse contre le fond est supérieure au poids du liquide ;

2° A l'équateur, le poids d'un corps se trouve diminué de $\frac{1}{289}$ environ ; la Terre y est renflée pour la même raison alors qu'elle est aplatie aux pôles ;

3° L'eau contenue dans un vase animé d'une rotation rapide autour d'un axe vertical se creuse au centre ; sa surface prend la forme d'un paraboloïde, de façon à être en un point quelconque normale à la résultante du poids mg et de la force centrifuge $m\omega^2R$;

4° Lorsque la boue qui entoure les roues d'un véhicule possède une adhérence inférieure à $m\omega^2R$, elle se détache de la jante suivant une tangente à la circonférence extérieure. Comme la force centrifuge augmente proportionnellement au carré de la vitesse angulaire, on recommande aux cyclistes d'aller lentement dans les endroits boueux et par les temps de pluie ;

5° C'est la force centrifuge qui tend à rompre la jante des volants, des meules, des plateaux ; à disloquer les poulies en bois ; à renverser à l'extérieur de la courbe une voiture, un train, un cycliste, un cheval au galop, parcourant une route ou une piste circulaire ; à faire cesser prématurément l'action de l'eau dans une roue hydraulique à augets.

Pour éviter en partie ces effets nuisibles et pour empêcher de fâcheux accidents, on est dans la nécessité :

1° D'équilibrer parfaitement les manivelles, arbres coudés, arbres-vilebrequins à l'aide de masses métalliques;

2° De disposer symétriquement deux à deux les bras d'un volant, d'une poulie;

3° De protéger par une solide gaine métallique et de placer dans un local spécial : les plateaux armés de peigne pour le polissage des pièces d'automobile, les meules à ébarber les petites pièces de fonderie ;

4° De relever la partie extérieure des courbes dans les routes, les vélodromes, les lignes de chemin de fer, et de pencher le corps et le mobile vers l'intérieur afin que la résultante de mg et de $m\omega_2R$ soit normale à la surface d'appui;

5° De donner aux roues hydrauliques des vitesses très faibles.

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Une piste de vélodrome de $6^m,93$ de largeur (projection horizontale, dont la partie circulaire a un rayon moyen de 99 mètres doit être parcourue par un cycliste de 63 kilogrammes monté sur une machine de $11^{kg},250$, à une vitesse de $50^{km},400$ à l'heure. On demande :

1° En kilogrammes ($g = 9^m,80$), la valeur de la force centrifuge et la résultante de celle-ci avec le poids total ;

2° La différence de niveau entre les bords extérieur et intérieur de la piste établie normalement (perpendiculairement) à la résultante;

3° La largeur totale de la piste;

4° La puissance vive que possède le cycliste et sa machine.

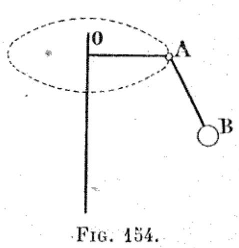


FIG. 154.

II. — Une automobile de 30 chevaux pesant 1.800 kilogrammes avec son chargement franchit à une vitesse de 40 kilomètres à l'heure une courbe de 3 mètres de rayon. Calculer la force centrifuge pendant ce virage.

III. — Un manège de dirigeables tourne avec une vitesse de 100 tours à la minute. Le poids de la nacelle est de 80 kilogrammes, et il y monte 8 personnes du poids moyen de 60 kilogrammes. Déterminer :

1° La position d'équilibre du système, sachant que OA = $2^m,50$ et AB = 3 mètres;

2° La tension du câble d'acier AB;

3° Le rayon de la circonférence décrite par la nacelle.

IV. — Le régulateur d'une machine à vapeur est un pendule conique qui fait normalement 60 tours par minute. Sachant que les résistances s'élèvent à $0^{kg},400$ et que la longueur du pendule est de $0^m,30$, on demande :

1° Quelle est la hauteur h des boules au-dessous du sommet;

2° Quel doit être le poids des boules pour que le soulèvement se produise lorsque la vitesse est de 62 tours par minute;

3° Quelle est la hauteur h' lorsque la vitesse atteint 75 tours.

XIV. — PENDULE

141. Pendule simple. — On appelle *pendule* un corps pesant *assujetti à osciller autour d'un axe fixe horizontal qui ne passe pas par son centre de gravité.* Si l'axe de rotation renfermait le centre de gravité, l'appareil serait toujours en équilibre.

Le pendule *simple* serait constitué par un point pesant suspendu à l'extrémité d'un fil rigide, inextensible et sans poids oscillant sans frottement autour de l'axe. Un tel organe est imaginaire ; mais on s'approche pratiquement de sa réalisation en suspendant une sphère de métal très dense (plomb, cuivre, platine) à l'extrémité d'un fil très fin et très long de cuivre.

Oscillations sous l'action de la pesanteur. — Au repos, le fil est vertical, l'équilibre est établi sous l'action du poids P du corps et de la réaction du point de suspension égale et directement opposée (*fig.* 155).

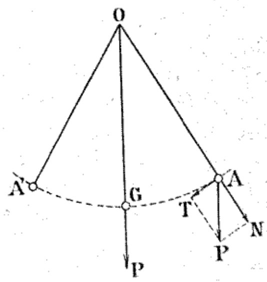


Fig. 155.

S'il est écarté en A de cette position, il ne peut y rester, l'équilibre étant impossible. Le corps soumis à la pesanteur et devant rester à égale distance de O ne peut que se déplacer sur l'arc de cercle AGA'. Le poids se décompose en deux, AN tendant le fil et AD, composante tangentielle assurant la rotation.

Il revient donc vers sa position d'équilibre, la dépasse sous l'impulsion de sa vitesse acquise, atteint la position symétrique A′ de A et recommence son mouvement en sens inverse pour accomplir ainsi une série d'oscillations.

L'*oscillation simple* est le passage du pendule de OA en OA′.

L'*oscillation double* comprend deux oscillations simples, l'aller de OA en OA′ et le retour de OA′ en OA.

La *durée d'une oscillation* est celle nécessaire pour accomplir une oscillation simple.

L'*amplitude* est l'angle d'oscillation $\widehat{AOA'}$.

142. Isochronisme des petites oscillations. — Toutes ces oscillations seraient de même amplitude et de même durée si le pendule simple était réalisé dans le vide. Pratiquement, les frottements de l'axe et la résistance de l'air restreignent de plus en plus l'amplitude des oscillations jusqu'à l'arrêt complet du mouvement. Malgré cela, quand les amplitudes des oscillations restent inférieures à 4° ou 5°, la durée de l'oscillation est sensiblement constante. On dit que *les petites oscillations du pendule sont isochrones.*

On peut le vérifier en comptant à l'aide d'un chronomètre la durée de cent oscillations à différentes reprises pendant l'oscillation d'un pendule,

143. Durée de l'oscillation simple. — Pour des pendules de même longueur, la durée de l'oscillation est constante, indépendante de la substance qui le constitue.

Sinon elle est proportionnelle à la racine carrée des longueurs. Un pendule de 4 mètres de long oscille deux fois plus lentement qu'un pendule de 1 mètre. Cette durée est donnée par la formule :

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{1}$$

l exprimant la longueur du pendule en mètres, g l'accélération de la pesanteur dans le lieu considéré.

De (1) on tire

$$l = \frac{gt^2}{\pi^2}.$$

La longueur du pendule battant la seconde à Paris est par suite:

$$\frac{9^m,81}{(3,1416)^2} = 0^m,994 \text{ à 1 millimètre par excès.}$$

144. Pendule composé. — C'est le pendule pratique; la masse pesante, ordinairement de forme lenticulaire, est vissée sur une tige rigide filetée qui est munie à son autre extrémité d'un couteau en acier encastré oscillant sur un plan d'acier ou d'agate. Les lois du pendule simple s'appliquent à peu près au pendule composé.

145. Horloges. — L'isochronisme des oscillations du pendule a déterminé l'emploi de cet organe pour régulariser le mouvement des horloges destinées à la mesure du temps.

Les horloges comprennent essentiellement (*fig.* 156 à 158) :

1° Le *moteur*, constitué par un ressort dans les pendules et les montres, par un poids Q attaché à une chaîne ou une corde se déroulant de dessus un tambour solidaire de l'axe A ;

2° Un *rouage* formé de couples de roues dentées calées sur les axes A, B, C, D, qui transmet le mouvement de rotation du tambour à l'axe *d* sur lequel est monté une *roue d'échappement* H de 30 dents ;

3° Un *régulateur* formé par une ancre EFG solidaire du mouvement oscillatoire du pendule. A cet effet l'axe E de l'ancre porte une tige terminée par une fourchette entre les deux branches de laquelle oscille le pendule suspendu sur des couteaux d'acier.

Le pendule battant la seconde, l'ancre oscille de même ; quand cette dernière s'avance vers la droite, l'un des crochets arrête une dent de la roue d'échappement qui vient buter contre lui ; quand elle se porte à gauche, cette dent s'échappe ; mais un moment après une dent opposée bute à son tour sur l'autre crochet de l'ancre et ainsi de suite. Une dent de la roue s'échappe donc toutes les deux secondes, cette roue de 30 dents fait donc un tour en 60 secondes ou 1 minute.

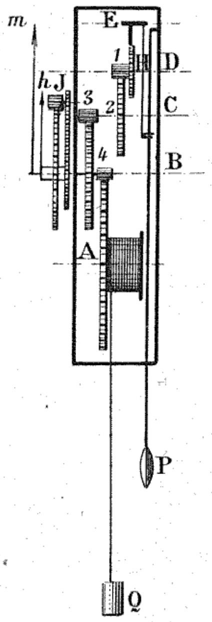


Fig. 156.

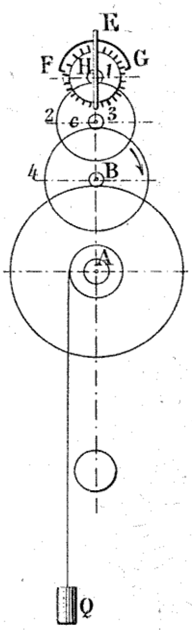


Fig. 157.

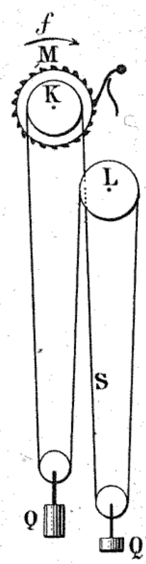


Fig. 158.

On voit donc que l'échappement a pour objet d'arrêter à intervalles égaux le mouvement donné par le moteur, mouvement accéléré sans cela.

De plus, la pression des dents de la roue sur les crochets donne au pendule régulateur une impulsion nouvelle qui lui permet de prolonger son mouvement tant que la force motrice agit ;

4° Une *minuterie*. L'aiguille des minutes est commandée directement par l'axe B. Le pignon 1 de 6 dents, engrenant avec la roue 2 de 72 dents, détermine pour un tour de D $\frac{1}{6}$ de tour de C ; le pignon 3 de 6 dents, et la roue 4 de 60 dents, détermine $\frac{1}{60}$ de tour à l'axe D qui fera un tour en 60 minutes.

L'aiguille des heures est commandée par un train d'engrenages retardateurs. L'axe intermédiaire J reçoit son mouvement de D par deux engrenages égaux, il fait par suite un tour en une heure ; on cale dessus un pignon de 6 dents entraînant une roue de 72 dents et la douille portant l'aiguille des heures à la vitesse $\frac{6}{72} = \frac{1}{12}$ de tour à l'heure.

Dans les horloges modernes, pour pouvoir remonter les horloges sans qu'elles s'arrêtent, on accroche le poids moteur Q à la chape d'une poulie mobile dont le cordon sans fin passe sur deux poulies fixes K et L et sous une deuxième poulie mobile recevant le poids Q' destiné à tendre le cordon. La poulie K est solidaire d'une roue à rochet munie d'un cliquet poussé par un ressort qui ne permet à la roue que la rotation dans le sens de la flèche *f*. Pour remonter le poids Q, il suffit de tirer le cordon S de haut en bas, la poulie L continue de tourner et l'horloge n'est pas arrêtée.

Dans les horloges à sonnerie, le mécanisme de celle-ci, en rapport avec les rouages des heures qui agissent sur lui à l'instant voulu, tire son mouvement d'un moteur spécial.

Réglage de l'horloge. — Si elle va trop vite, il faut ralentir la durée d'oscillation du pendule, l'allonger par suite en dévissant la lentille du pendule. Dans le cas contraire, on accélère le mouvement pendulaire en raccourcissant le pendule.

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Un pendule qui bat la seconde a une longueur de $99^{cm},40$. On demande la longueur du pendule qui, au même lieu, fait 30 oscillations simples par minute.

II. — Calculer la durée d'une oscillation double d'un pendule simple de $0^{m},30$ de longueur dans un lieu où l'accélération est de $9^{m},81$.

III. — Une horloge avance d'une demi-heure par jour de 24 heures. Dans quel rapport faudra-t-il modifier la longueur du pendule pour que l'horloge indique l'heure exacte ?

XV. — MOUVEMENTS COMPOSÉS

146. Principe de l'indépendance des mouvements simultanés. — Supposons un mobile se déplaçant sur la terre ; notons sa trajectoire et sa position à un instant donné par rapport à des points fixes du sol, nous aurons le **mouvement absolu** du corps.

Tous les points de cette trajectoire sont fixes.

Soit maintenant un homme se déplaçant sur le pont d'un bateau en marche. Le mouvement de l'homme par rapport à des repères du bateau est le **mouvement relatif.** L'homme participant en même temps au mouvement du bateau, tous les points de sa trajectoire relative décrite sur ce dernier sont entraînés par ce mouvement nommé **mouvement d'entraînement.** Si l'on considère les différentes positions occupées par l'homme par rapport à des repères fixes de la terre, on aura le *mouvement absolu de l'homme*. On voit que ce mouvement dépend à la fois des deux autres. Ceux-ci, qui sont indépendants, en se composant, donnent le mouvement absolu.

L'indépendance de ces mouvements simultanés est évidente : en effet, le mouvement relatif de l'homme par rapport au bateau n'est nullement modifié par le mouvement de ce dernier.

Il en est de même pour le voyageur qui marche dans son wagon.

Pour obtenir la position d'un mobile animé de deux mouvements simultanés, il suffit de noter son emplacement sur sa trajectoire relative et de déplacer ce point comme s'il était animé du mouvement d'entraînement, c'est-à-dire lui faire décrire une trajectoire d'entraînement.

147. Composition de deux mouvements rectilignes et uniformes. — **1° Ils ont même direction.** — *a) Et même sens.* — C'est le cas d'un nageur qui suit le fil de l'eau. Soit V_r sa vitesse relative, celle qu'il aurait dans une eau dormante ; V_e, la vitesse du courant. Au bout d'un temps t, il sera à une distance AA' de sa position primitive (distance repérée par rapport à des points fixes de la rive, des arbres par exemple) égale à :

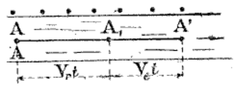


Fig. 159.

$$V_r t + V_e t = (V_r + V_e)\, t.$$

Le mouvement absolu est uniforme, de vitesse

$$V_a = V_r + V_e,$$

somme des vitesses des deux mouvements simultanés.

b) Et sens inverse. — C'est le cas d'un nageur remontant le courant. Par rapport à l'eau, il se déplace au bout d'un temps t d'une longueur $AA_1 = V_r t$. Mais il est entraîné avec l'eau en sens inverse et parcourt de ce fait un espace $A_1A' = V_e t$.

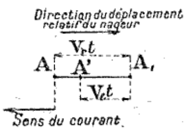


Fig. 160.

L'espace absolu

$$AA' = (V_r - V_e)\, t.$$

Il est positif si $V_r > V_e$, le nageur remonte la rivière ; nul si $V_r = V_e$, il reste au même endroit ; négatif si $V_r < V_e$, il est vaincu par le courant.

La vitesse du mouvement résultant uniforme est $(V_r - V_e)$, différence des deux vitesses relative et d'entraînement.

2° Ils ont des directions différentes. — C'est le cas du nageur qui, voulant traverser une rivière, est entraîné par le courant.

L'effort du nageur le porterait au bout d'un temps t en A_1 sur sa direction $AA_1 = V_r t$.

Le courant l'entraîne en A' tel que $A_1A' = V_e t$, A' est la véritable position du mobile par rapport à des repères fixes de la berge.

On trouverait de même la position B′ du nageur au bout du temps t' :

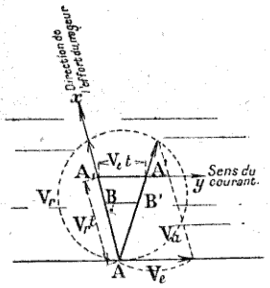


FIG. 161.

$$AB = V_r t', \qquad BB' = V_e t'.$$

En joignant AB′ et AA′, on obtient deux triangles AA_1A' et ABB′ qui sont semblables

$$\left(\widehat{A}_1 = \widehat{B},\ \frac{AA_1}{AB} = \frac{A_1A'}{BB'} = \frac{t}{t'}\right);$$

par suite les deux droites AB′ et AA′ se confondent : la *trajectoire du mouvement résultant* est donc rectiligne. De plus $\frac{AA'}{AB'} = \frac{t}{t'}$; on en conclut que le mouvement est uniforme.

Sa vitesse est $\frac{AA'}{t}$.

Elle est représentée en grandeur et direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux vitesses relative et d'entraînement.

148. Composition d'un mouvement rectiligne et uniforme et d'un mouvement uniformément accéléré. — 1° *Ces deux mouvements ont même direction.* — C'est le cas d'un corps lancé verticalement avec une vitesse initiale V_0 (mouvement relatif) et soumis à l'action de la pesanteur.

Le chemin parcouru au bout d'un temps t est égal au chemin relatif + le chemin d'entraînement, soit

$$V_r t \pm \frac{at^2}{2},$$

ou dans le cas du corps pesant :

$$V_0 t \pm \frac{gt^2}{2}.$$

en prenant le signe + si les deux mouvements sont de même sens, — dans le cas contraire. Ce sont les formules déjà trouvées.

Le mouvement résultant est donc uniformément accéléré, sa vitesse est $V_r + at$.

2° *Les directions des mouvements sont différentes.* — La balle quittant le canon d'un fusil présente ce cas. En vertu de l'inertie, elle devrait continuer son chemin rectiligne d'un mouvement uniforme avec une vitesse égale à celle de sa sortie du canon. Mais, comme elle est pesante, elle est entraînée vers le sol d'un mouvement uniformément accéléré, celui de la chute libre (nous faisons abstraction de la résistance de l'air). Il en est de même pour la pierre d'une fronde.

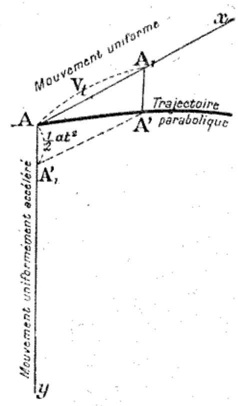


FIG. 162.

Soit à chercher le mouvement résultant du mobile A animé du mouvement uniforme de vitesse V suivant Ox et entraîné d'un mouvement uniformément accéléré d'accélération a suivant Oy. Pour obtenir la position A′ du mobile au bout du temps t, porter sur Ox, $AA_1 = Vt$, puis parallèlement à Oy, $AA'_1 = \frac{1}{2}at^2$, chemin d'entraînement. A′ est à l'intersection des parallèles à Ay et Ax menées par les positions A_1, A'_1 du mobile dans ses mouvements composants. La trajectoire du mobile s'obtient en joignant les points analogues à A′.

On démontre que cette trajectoire est une parabole. D'où l'expression de mouvement parabolique des projectiles.

149. Trajectoire de l'écoulement d'un liquide par un orifice latéral. — A sa sortie de l'orifice, le liquide tend à s'échapper horizontalement d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse V_0. Pesant, il est entraîné verticalement vers le sol. En déterminant plusieurs points comme précédemment et en les joignant, on obtient une parabole dont le sommet est en A où la tangente est horizontale. Cette courbe est de même nature que celle du développement de la feuille enroulée sur le cylindre du général Morin.

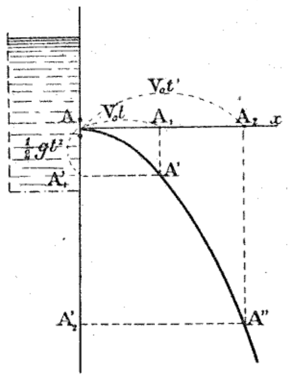


Fig. 163.

A l'examen de la courbe, on voit que la descente s'effectue aussi rapidement qu'en chute libre, ce qui était à prévoir à cause de l'indépendance des mouvements simultanés. L'éloignement du liquide de la verticale de A est proportionnel au temps en vertu du même principe.

150. Mouvement hélicoïdal uniforme. — C'est le mouvement résultant de la composition de deux mouvements uniformes, l'un de rotation autour d'un axe, l'autre de translation autour du même axe.

Sa trajectoire est une hélice. C'est la courbe tracée sur un cylindre tournant régulièrement entre les pointes d'un tour par un outil qui se déplace uniformément le long de la pièce. Elle est déterminée par le rayon du cylindre sur lequel elle s'enroule et par son **pas**, longueur du déplacement de l'outil pour un tour de la pièce. Avec la durée d'une révolution, elle caractérise le mouvement hélicoïdal, qui est le mouvement de la vis qui s'enfonce en tournant dans son taraudage, de l'hélice marine ou aérienne qui progresse en tournant avec l'arbre.

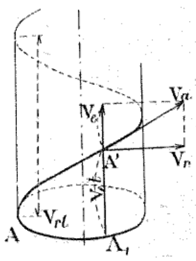


Fig. 164.

Pour obtenir la position du mobile à une époque t, connaissant sa position initiale et les vitesses des deux mouvements de rotation et de translation V_2 et

V_e, il suffit de prendre l'arc $AA_1 = V_r t$, puis de porter sur la génératrice du cylindre une longueur $A_1A' = V_e t$.

La vitesse du mouvement hélicoïdal uniforme est représentée en grandeur, direction et sens, par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux vitesses de rotation et de translation.

Celles-ci étant perpendiculaires,

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\omega^2 R^2 + V_e^2}.$$

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Un aéroplane se dirige en ligne droite à la vitesse de 80 kilomètres à l'heure par un vent arrière de 3 mètres à la seconde. En marchant contre un vent debout de 10 mètres à la seconde, quelle sera la vitesse ?

II. — Un dirigeable fait 50 kilomètres à l'heure avec un vent debout de 7 mètres. Il rencontre un courant aérien de vitesse 12 mètres faisant un angle de 60° avec sa direction. Quelles sont la direction et la vitesse qu'il va prendre ?

III. — Dans quelle direction doit se lancer un nageur pour traverser une rivière de 150 mètres de largeur perpendiculairement au courant de 4 mètres à la seconde ? Sur une eau dormante, le nageur parcourrait $3^{km},6$ à l'heure. Combien mettra-t-il de temps pour traverser le fleuve ?

IV. — Une bille roulant sur une table horizontale quitte celle-ci avec une vitesse de $2^m,50$ à la seconde, et tombe sur le sol d'une hauteur de $4^m,90$. Quels seront :

1° La durée de la chute ?

2° L'endroit de la rencontre de bille avec le sol par rapport à la verticale de la position où elle quitte la table ?

3° La trajectoire de la bille (construction graphique) ?

On prendra $g = 9^m,80$.

V. — Calculer la distance au pied du mur de la chute d'une cascade de 200 mètres de haut. L'eau quitte le couloir horizontal avec une vitesse de 7 mètres à la seconde.

XVI. — RÉSISTANCES PASSIVES

151. Généralités. — En étudiant les machines simples, nous avons négligé dans les conditions d'équilibre les **résistances passives.** Celles-ci sont provoquées par des obstacles au mouvement. Prenons des exemples.

La **résistance de l'air** ralentit la chute des corps en s'opposant à leur descente, la pesanteur doit déplacer les molécules d'air, fournir par suite un travail résistant qui diminue le travail utile.

Le vent debout peut s'opposer au déplacement d'un bateau, il diminue la vitesse d'une automobile, d'un aéroplane.

La **résistance des fluides** à la pénétration est mise en évidence en faisant osciller un pendule dans l'air et dans l'eau ; son mouvement est plus lent dans le liquide et dure moins longtemps. L'eau présente donc une résistance plus grande que l'air. Pour se déplacer sur un canal, le bateau doit fendre l'eau, ce travail de séparation des molécules d'eau réduit l'effet utile de la traction des chevaux.

Ces résistances passives qui diminuent le travail utile sont variables, elles obéissent à des lois qu'il est difficile de déterminer très exactement, mais que l'on peut obtenir approximativement par l'expérience. Leur connaissance a permis de réduire les résistances quand elles sont nuisibles, ou de les augmenter quand on le désire ; on utilise la résistance de l'eau ou de l'air pour donner un appui à l'hélice des navires et des aéroplanes.

Il est une résistance passive qui est loin d'être négligeable, avec laquelle il faut compter dans l'établissement ou l'emploi des machines : c'est le **frottement de glissement** et celui de **roulement.**

I. — Frottement de glissement

152. Faits d'observation. — Une boîte lancée sur un plan horizontal devrait, en vertu du principe d'inertie, continuer son mouvement d'une manière rectiligne et uniforme. Or sa vitesse diminue peu à peu et l'arrêt se produit au bout d'un certain temps. Cette modification du mouvement est due à l'intervention d'une force toujours résistante qui s'oppose au mouvement et que l'on nomme **force de frottement.**

La même boîte placée sur un plan incliné devrait se mettre en mouvement sous l'action de la composante de la pesanteur parallèle au plan. Cependant le mouvement ne se produit pas tant que l'inclinaison n'a pas atteint une valeur suffisante. Le corps restant au repos, c'est que la force précitée est détruite par une force résistante directement opposée et au moins égale; c'est encore la force de frottement.

153. Causes du frottement. — Les résistances que nous venons de constater doivent être attribuées aux imperfections des surfaces en contact dont les rugosités plus ou moins grandes se pénètrent toujours et sont d'autant plus difficiles à arracher qu'elles sont plus prononcées (*corps rugueux*) et qu'elles ont eu davantage le temps de mieux s'enchevêtrer (*corps au repos*). Le travail de brisement de ces petites dents miscroscopiques qui garnissent les corps les mieux polis engendre de la chaleur; le palier, par suite du grippement du tourillon dans les coussinets, s'échauffe parfois jusqu'à enflammer les matières qui l'environnent.

154. Lois du frottement de glissement.— Coulomb et Morin ont recherché expérimentalement les lois régissant le frottement.

Nous nous contenterons de les vérifier avec un bloc de fonte prismatique (*fig.* 165) dont l'une des faces est polie, une autre rugueuse, la troisième évidée, la quatrième revêtue d'une garniture de cuir, la cinquième d'une semelle en bois, la sixième enduite d'un corps gras.

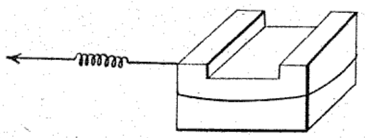


FIG. 165.

En faisant glisser le bloc sur le marbre, on peut évaluer la force de frottement égale à la résistance au glissement : *c'est la traction nécessaire pour produire le déplacement du corps.*

PREMIÈRE LOI. — *La force de frottement ou la résistance au glissement est indépendante de l'étendue des surfaces en contact.* — Le bloc posé par sa face polie ou par sa face évidée également polie ne présentant que deux bandes de contact exige la même force de traction pour glisser sur le marbre : le dynamomètre accuse en effet la même tension dans les deux cas.

DEUXIÈME LOI. — *La résistance au glissement est sensiblement indépendante de la vitesse une fois le corps en mouvement.* — On fait glisser le bloc sur le marbre avec des vitesses différentes ; le dynamomètre accuse toujours à peu près la même traction nécessaire.

TROISIÈME LOI. — *Elle dépend de la nature des matières en contact, de leur degré de poli.* — On constate que la force nécessaire pour entraîner le corps est plus grande si on le fait glisser sur sa face rugueuse, croît encore s'il repose par la semelle de bois et prend sa plus grande valeur quand le contact a lieu par la garniture de cuir.

QUATRIÈME LOI. — *Elle est proportionnelle à la pression normale exercée par le corps en mouvement sur la surface de glissement.* — En plaçant sur le bloc une masse de plomb doublant le poids du corps, on constate que la force nécessaire au glissement est le double de celle trouvée dans la première expérience.

REMARQUES. — Ces lois ne sont à peu près vraies que dans certaines limites de pression et de vitesse.

Au *démarrage*, le frottement est sensiblement plus grand que dans le cours du mouvement, surtout pour les corps mous (terrains) ou compressibles (bois). Lorsque la vitesse dépasse 20 mètres par seconde, le frottement diminue.

155. Influence des enduits. — Lorsqu'on interpose un corps gras, suif, graisse, huile, entre les surfaces glissantes, on constate que *la résistance au glissement est considérablement diminuée :* au bout d'un certain temps, quand l'enduit est bien trituré, les petits creux formés par les aspérités microscopiques des surfaces en contact sont remplis, les globules graisseux roulent sur deux surfaces éminemment favorables au mouvement.

Le meilleur lubrifiant est celui qui, tout en présentant la plus grande mobilité de ses particules, reste entre les deux surfaces glissantes, c'est-à-dire ne soit pas expulsé par la pression ou la vitesse du corps frottant ni décomposé par la chaleur. L'eau, l'air, surtout à cause de leur grande fluidité, donneraient d'excellents glissements, mais leur faible viscosité leur permet difficilement de rester entre les surfaces frottantes.

Les lois de ce frottement **indirect** sont quelque peu différentes de celles du frottement **direct** déjà énoncées.

D'après Hirn : 1° *Le frottement indirect diminue quand la température augmente*, la graisse devenant plus fluide ;

2° *Il est sensiblement proportionnel à la racine carrée de la vitesse, à celle des pressions et à celle des surfaces.*

156. Coefficient de frottement. — Lorsque deux corps glissent l'un sur l'autre, la force de frottement F est proportionnelle à la pression normale P :

$$\frac{F}{P} = \frac{F'}{P'} = \frac{F''}{P''} = \ldots = \frac{f}{1} = f.$$

Le rapport constant f qui existe pour deux matières entre la force de frottement et la pression normale correspondante est nommé **coefficient de frottement :** c'est encore *la résistance au roulement correspondant à une pression normale de 1 kilo-*

gramme. Il caractérise la manière dont se comportent deux corps au glissement. Pour le déterminer expérimentalement, il suffit de diviser la force nécessaire au glissement d'un corps par le poids de celui-ci.

Le coefficient diffère évidemment au départ et pendant le mouvement.

157. Principaux coefficients de frottement de glissement. — Ils sont donnés par le tableau ci-dessous.

MATIÈRES FROTTANTES	ÉTAT de SURFACES	VALEURS DE f au DÉMARRAGE	VALEURS DE f pendant LE MOUVEMENT
Bois sur bois sec, fibres parallèles	sans enduit	0,62	0,48
Bois sur bois sec, fibres parallèles	frottées de savon sec	0,45	0,25
Métaux sur bois, fibres parallèles	sans enduit	0,62	0,42
Métaux sur bois, fibres parallèles	suiffées	0,10	0,10
Métaux sur métaux température ordinaire	sans enduit	0,19	0,18
Métaux sur métaux température ordinaire	lubrifiées	»	0,07 à 0,08
Cuir sur poulies en fonte			0,155
— en fer ou en acier laminé			0,28
— en bois			0,35
Câble métallique sur gorge garnie cuir			0,25 à 0,155
— en chanvre sur gorge bronze			0,075
Tourillons en fonte ou fer sur coussinets en fonte ou bronze :			
Lubrifiés d'une manière continue			0,054
Lubrifiés à la manière ordinaire			0,08
Tourillons en fonte sur coussinets en bois de gaïac			0,18

158. **Angle de frottement.** — C'est l'angle α que doit faire la surface de glissement avec le plan horizontal pour que la force de frottement GF soit équilibrée par la composante GT de la pesanteur GP parallèle au plan ; la moindre action suivant GT entraînera le corps.

L'angle $\widehat{PGN} = \widehat{BAH} = \alpha$.

Le triangle rectangle PGN donne :

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{PN}{GN} = \frac{TG}{GN} = \frac{GF}{GN} = \frac{F}{N} = f.$$

Le coefficient de frottement est donc égal à la tangente de l'angle de frottement.

On peut donc déterminer ce coefficient en plaçant le corps sur le plan incliné en la substance à étudier, en inclinant celui-ci de plus en plus jusqu'au moment où le corps s'ébranle, on note l'angle α de frottement : $f = \operatorname{tang}\alpha$; si on trouve $\alpha = 20°$ par exemple,

$$f = \operatorname{tang} 20° = 0{,}364.$$

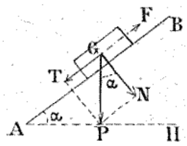


FIG. 166.

159. Calcul de la résistance au glissement d'un corps. — Elle est égale au produit du coefficient de frottement des deux substances frottantes par la pression normale du corps glissant sur la surface d'appui, que celle-ci soit plane ou cylindrique :

$$F = f \cdot P.$$

Dans le cas où la pression s'exerce obliquement à la surface de glissement, il faut avoir soin de chercher la composante de cette pression perpendiculaire à la surface.

Application numérique. — *Calculer la traction horizontale nécessaire pour faire glisser un palier de 5 kilogrammes sur un marbre en fonte* ($f = 0{,}18$).

Cette traction est égale au frottement $F = 0^{kg},18 \times 5 = 0^{kg},90$.

160. Effets nuisibles du frottement. — Les pièces des machines, en frottant l'une sur l'autre, *s'usent peu à peu.* On diminue cette usure en graissant abondamment les surfaces frottantes et polissant celles-ci, pour réduire le coefficient de frottement.

Le frottement engendrant de la chaleur, par suite d'un mauvais graissage, les organes glissants peuvent *gripper*, les particules les plus dures déterminent des sillons plus ou moins profonds dans les pièces, ce qui les rend hors d'usage. En l'absence de tout lubrifiant, l'échauffement des paliers peut causer l'incendie des locaux où sont enfermées des matières inflammables.

Si ces derniers effets se produisent rarement, le frottement n'en est pas moins toujours une cause importante de la *réduction du rendement* d'une machine. Pour le vaincre, il faut développer un travail qui diminue d'autant le travail disponible que l'on peut utiliser dans une machine. — Nous allons calculer ce travail absorbé par le frottement.

161. Travail absorbé par le frottement. — *Il est égal au produit de la force de frottement par le chemin parcouru par le corps glissant :*

$$T_f = F \times L.$$

Soit à *calculer le travail absorbé par le frottement d'une crosse de machine à vapeur sur ses glissières, la pression normale moyenne étant de* 400 *kilogrammes* ($f = 0,07$), *le parcours de la crosse de* $0^{m},60$:

$$T_f = f \times P \times L = 0,07 \times 400 \times 0,60 = 16^{kgm},8,$$

pour une course. Si la machine fait 60 tours à la minute, le travail absorbé par le frottement de la crosse sera

$$16^{kgm},8 \times 2 = 33^{kgm},6,$$

par seconde, soit près de un demi-cheval-vapeur.

La puissance absorbée par le frottement des tourillons sur leurs coussinets se calcule de même.

Soient :

P, la pression normale du tourillon sur le coussinet;
f, le coefficient de frottement;
n, le nombre de tours de l'arbre par minute;
D, le diamètre du tourillon.

La résistance au glissement des surfaces cylindriques

$$F = f \cdot P.$$

Le parcours du tourillon mesuré sur la surface de glissement est πDn par minute.

Le travail absorbé par le frottement en une minute est alors :

$$T_f = F \times L = fP \times \pi Dn = \pi f PDn \text{ kgm.}$$

La puissance absorbée $= \dfrac{\pi f P^{kg} D^{m} n}{75 \times 60}$ chevaux-vapeur ou environ 0,0007 PDn chevaux.

Quand l'arbre est vertical. Son extrémité appelée **pivot** tourne sur le **grain de la crapaudine ;** le travail de frottement n'est que les $\frac{2}{3}$ du précédent :

$$T_f = \frac{2}{3} \pi f PDn \text{ kgm par minute.}$$

162. Effets utiles. — Le clou tient dans le bois, le tenon dans la mortaise, le manche dans l'œil de l'outil, le valet dans le trou de l'établi du menuisier, grâce à la résistance au glissement due aux pressions exercées par les corps en contact. Il en est de même quand on saisit des pièces à l'aide de tenailles, ou quand on les serre entre les mors d'un étau.

Le frottement des pieds sur le sol pendant la **marche** permet la progression en fournissant un **appui** au corps. On peut l'expliquer en supposant que les dents très fines de la semelle du soulier s'arc-boutent sur celles du sol : véritable crémaillère à dents inégales et petites. Sur une surface glissante comme la glace, le frottement est très faible, l'arc-boutement ne peut se produire, le marcheur glisse et tombe en arrière les pieds dans le sens du mouvement. Pour permettre la marche, il faut augmenter le frottement en répandant du mâchefer sur la glace ou garnir les souliers de gros clous qui pénètrent dans celle-ci ; dans les deux cas on rétablit les dents pour l'arc-boutement.

La transmission du mouvement par poulies et courroie, par roues de friction s'explique de la même manière.

Frein. — On peut utiliser la résistance au glissement pour arrêter ou ralentir un corps en mouvement. Un frein se compose essentiellement d'un **sabot** garni d'une matière à coefficient de frottement élevé (bois, cuir) que l'on presse fortement contre le corps à immobiliser (jante de poulie, de roue) par un levier à ressort ou à contrepoids. On peut ainsi modérer l'allure des voitures dans les descentes, arrêter brusquement une locomotive, immobiliser un treuil, etc.

II. — Frottement de roulement

163. Roulement. — Considérons une roue solidaire de l'axe A, poussée avec la main suivant BF′ ou tirée parallèlement au sol sur lequel elle repose suivant AT.

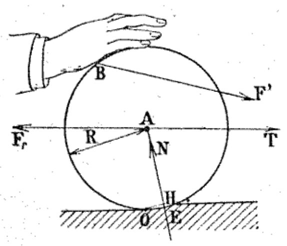


FIG. 167.

L'*effet rotatif* de BF′ autour de l'axe O (ligne d'appui de la roue sur le sol) caractérise le mouvement de roulement : c'est le *moment de roulement par rapport à l'appui* O.

$$\text{Roulement} = M_{\text{axe O}}\ BF' = BF' \times OD.$$

De même le roulement dû à la traction AF est égal à :

$$M_{\text{axe O}}\ AT = AT \times OA.$$

Le roulement est en effet une série de rotations autour de la droite d'appui O.

Il est proportionnel à l'intensité de la force agissante et à son bras de levier par rapport à O.

164. Résistance au roulement. — Sous l'action de son poids, la roue pénètre légèrement dans le sol ; pour progresser, elle doit aplatir le bourrelet qui se présente en avant d'elle (visible si le sol n'est pas très dur). Le sol réagit sous l'action de la roue ; cette réaction EN due à la pression normale détermine un *effet rotatif* autour de O égal à :

$$M_{\text{axe O}}\ EN = EN \times OH,$$

qui *s'oppose au roulement*. C'est la résistance au roulement.

Par analogie avec la force de frottement de glissement, on peut représenter cette résistance par l'effet d'une force AF opposée à la traction AT telle que

$$M_{\text{axe O}}\ AF = AF \times OA = EN \times OH.$$

Pour que le roulement se produise, il faudra :

$$AT \times OA \geqq AF \times OA \qquad \text{ou} \qquad AT > AF.$$

165. Lois du frottement de roulement. — Coulomb et Morin ont déduit de leurs expériences les lois suivantes :

1° *La résistance au roulement est proportionnelle à la pression normale du corps roulant sur la surface de roulement :*

$$(1) \qquad \frac{F \times OA}{P} = \frac{F_1 \times OA}{P_1} = \ldots = k.$$

Nous pouvons le vérifier avec une sorte d'avant-train (*fig.* 168) constitué par deux roues semblables calées sur le même axe AA'. Pour le faire rouler sur un plan horizontal (la table en bois) au moyen de la ficelle attachée au milieu I de AA', il est nécessaire d'exercer une traction T indiquée par le dynamomètre D. Si on fixe sur chaque roue deux fortes rondelles de plomb pour doubler le poids de l'appareil, on constate que le roulement nécessite une traction deux fois plus grande pour se produire ;

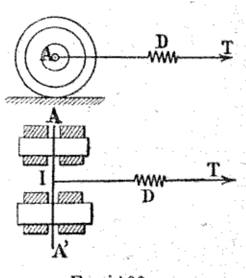


FIG. 168.

2° *Elle dépend de la nature des surfaces en contact.* — En faisant rouler l'avant-train sur des plans horizontaux de natures différentes : sol, bois, fonte, métal mouillé, métal recouvert de sable, on constate que la traction varie. Il en est de même, si on munit les jantes des roues de garnitures diverses.

3° *Elle croît en même temps que la largeur des jantes diminue.* — Plus celle-ci est étroite, plus elle pénètre avant dans la surface de roulement, plus grand par suite est l'effort nécessaire pour la faire sortir. Cette loi se vérifie en remplaçant les roues par d'autres de largeur différente, mais de même poids.

Remarque. — Si on considère la force AF, d'après (1), on voit que $F = \frac{kP}{R}$; cette force est inversement proportionnelle au rayon de la roue; elle diminue quand R augmente. Il en sera de même de la traction horizontale AT au centre de la roue.

On peut vérifier cette assertion en tirant deux roues de même substance, de même poids, de même largeur de jante, mais dont la roue évidée a un diamètre double de l'autre ; la traction horizontale de l'axe de cette dernière nécessaire pour assurer le roulement est la moitié de celle de l'autre roue.

166. Coefficient de frottement de roulement. — La proportionnalité de la résistance au roulement à la pression normale donne le rapport constant $\frac{F \times R}{P} = k$. C'est ce qu'on nomme le coefficient de roulement. Il représente la *résistance au roulement par unité de pression normale* $\left(\frac{F \times R}{1} = k\right)$. C'est encore la traction horizontale sur l'axe d'une roue de 1 mètre de rayon assurant le roulement pour une pression normale de 1 kilogramme.

Cette valeur peut être déterminée pour chaque couple de corps par des expériences particulières.

On la trouve dans des tableaux tels que celui ci-dessous :

ROUES	SURFACE de ROULEMENT	COEFFICIENT DE RÉSISTANCE au roulement
Fonte brute................	Fer	0,0035
— polie................	Fer	0,0012
Fer poli....................	Route empierrée	0,0145
—	Route pavée	0,0090

Connaissant le coefficient de roulement k, pour obtenir le moment résistant de roulement, c'est-à-dire la résistance au roulement, il suffit de faire le produit kP.

167. Applications. — En examinant le tableau précédent, on voit que la valeur du coefficient de frottement de roulement est bien plus petite que celle du coefficient de glissement. *Le frottement de roulement* est en effet *bien plus faible que le frottement de glissement.* Aussi le substitue-t-on au second chaque fois que l'on veut réduire le plus possible les résistances passives. On fait reposer les **plaques tournantes** sur des **galets coniques**, on interpose entre des *colliers* des **galets cylindriques**, on commande une tige ou un levier par une **came** par l'intermédiaire d'un **galet.**

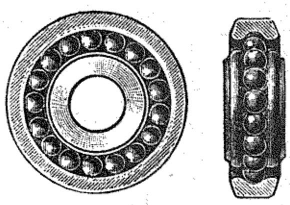


Fig. 169.

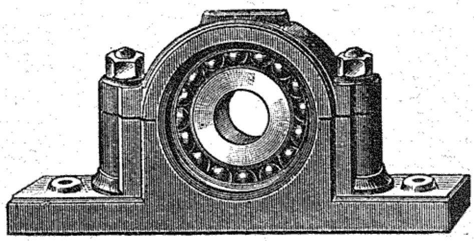


Fig. 170.

Enfin, l'emploi des **billes** se généralise de plus en plus pour les roulements depuis qu'on les obtient très exactement à $0^{mm},002$ près en acier très dur trempé. La figure 169 repré-

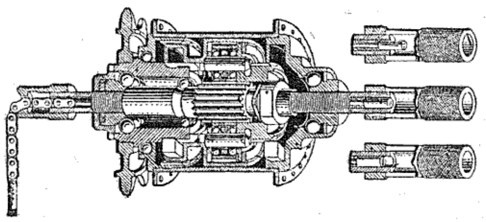


Fig. 171.

sente un de ces **roulements**, constitué uniquement par deux rondelles et des billes, sans vis, ressorts et sans taquets. On imprègne les billes et les chemins de roulement de graisse

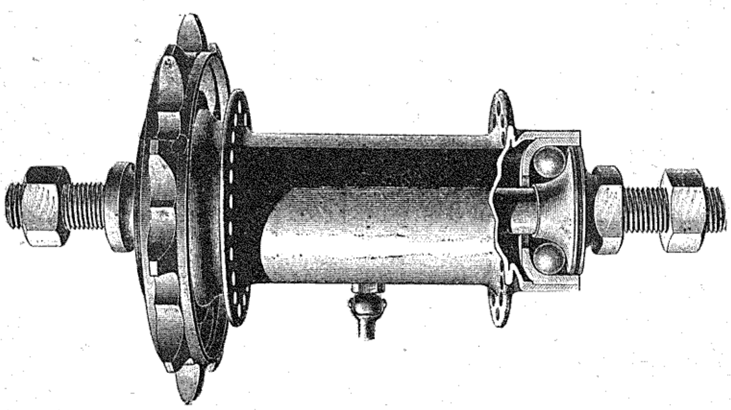


Fig. 171 *bis*.

consistante, de telle sorte que le roulement est parfait. Aussi les rencontre-t-on dans toutes les constructions mécaniques modernes : automobiles, moteurs, paliers à billes (*fig.* 170), crapaudines à billes, butées à bille, moyeux de bicyclettes (*fig.* 171-171 *bis*).

168. Transport des fardeaux. — Pour cette opération, on substitue le roulement au glissement. On peut, pour de faibles déplacements, utiliser des rouleaux en bois sur lesquels on dispose la pierre ou les grosses pièces de bois à mouvoir. Le roulement s'effectue facilement.

Pour de grands parcours, on emploie des **véhicules.** Il s'opère au moyen de roues qui supportent la charge par l'intermédiaire des essieux. Dans les voitures, l'**essieu** est fixe, et chaque roue tourne sur un tourillon particulier appelé **fusée,** qui se loge dans une boîte métallique solidaire du moyeu de la roue.

Dans les wagons de chemins de fer et les locomotives, les roues sont calées sur les essieux qui tournent dans des coussinets constamment imprégnés de graisse **(boîte à graisse).**

Pour évaluer l'effort de traction nécessaire au déplacement du véhicule, il faut, en dehors de la résistance au roulement, tenir compte du glissement des roues autour des fusées ou des essieux dans les boîtes à graisse.

Si l'on désigne par :

R, le rayon des roues;
r, le rayon de la fusée ou de l'essieu;
f, le coefficient de frottement de glissement;
Q, la charge totale diminuée du poids des roues;
P, la charge totale,

le frottement de glissement :

$$F_1 = fQ;$$

la force de frottement de roulement agissant horizontalement à l'axe de la roue :

$$F_2 = \frac{kP}{R}.$$

Ecrivons que, pour un tour, le travail de la force de traction est égal à la somme des travaux des deux forces de frottement; on a :

$$T \times 2\pi R = fQ \times 2\pi r + \frac{kP}{R} \times 2\pi R,$$

ou

$$T = \frac{fQr + kP}{R};$$

telle est la force de traction ; si on suppose P très sensiblement égal à Q, la formule devient :

$$T = \left(\frac{k + fr}{R}\right) Q.$$

Cette quantité $\left(\frac{k + fr}{R}\right)$ peut être considérée comme le coefficient de traction : tirage nécessaire pour traîner une charge de 1 kilogramme.

Les valeurs du **coefficient de traction** m sont indiquées dans le tableau ci-dessous pour quelques cas pratiques.

NATURE DU CHEMIN	CHARETTES	CAMIONS à 4 ROUES	WAGONS
Route avec ornières et boue..........	0,036	0,055	»
— empierrée en bon état.........	0,015	0,025	»
— pavée en grès.................	0,016	0,028	»
— pavée en bois, tabliers de pont.	0,016	0,025	»
Voie ferrée.........................	»	»	0,008

Pour obtenir le *tirage nécessaire* T au roulement d'un véhicule, il suffit de multiplier la *charge* Q *par le coefficient de traction m.*

$$T = m \times Q.$$

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. Le tablier d'une raboteuse pèse 1.200 kilogrammes avec son chargement. Calculer :

1° La résistance au glissement ($f = 0{,}07$);

2° Le travail absorbé pour une double course du tablier, la longueur du déplacement étant de $0^m{,}85$.

II. — Étant donné le frein de métier à tisser (*fig.* 172) :

1° Déterminer la pression du levier BOA sur la poulie C (on supposera que la pression fait un angle de 45° avec CO);

2° Calculer la force de frottement tangente à la poulie C (coefficient de frottement du cuir sur la fonte, 0,16);

3° Comment varie cette force quand on déplace le contrepoids P dans des encoches distantes de 30 millimètres.

III. — Calculer la puissance absorbée par le frottement d'un arbre de roue hydraulique sur ses coussinets, sachant qu'il supporte une charge totale de 8.000 kilogrammes, qu'il fait 6 tours par minute et que les tourillons en fonte ont 12 centimètres de diamètre ($f = 0,08$).

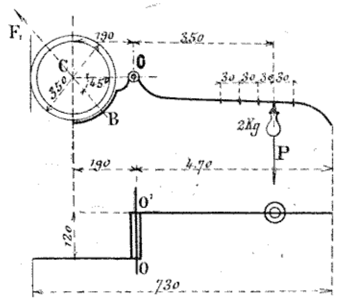


FIG. 172.

IV. — Même problème pour un pivot de turbine dont la charge est de 2.000 kilogrammes, le diamètre 52 millimètres et le nombre de tours à la minute 1.600 ($f = 0,08$).

V. Un traineau de 260 kilogrammes glisse sur une route neigeuse dont la pente est $\frac{5}{12}$ et la longueur 882 mètres. Calculer la vitesse au bas de la pente, sachant que le coefficient le frottement est 0,20.

VI. — Un attelage monte une côte de pente $\frac{1}{12}$. Le chargement est de 1.300 kilogrammes. Combien faut-il atteler de chevaux d'effort moyen 70 kilogrammes pour gravir la montée ? Coefficient de traction, 0,08. — Combien en fallait-il sur une route horizontale ?

VII. — Une machine pèse 400 kilogrammes. On veut l'élever sur le sol de l'atelier, qui se trouve à $1^m,50$ au-dessus du niveau de la cour, en la faisant glisser sur un plan en bois incliné de 30° sur l'horizon. Sachant que le coefficient de frottement $f = 0,30$, on demande de calculer : 1° les composantes AT et AN de la pesanteur AP, parallèle et normale au plan; 2° la force de frottement; 3° l'effort à exercer sur la machine pour l'élever; 4° la longueur du plan; 5° le travail de frottement en kilogrammètres; 6° le travail de la pesanteur; 7° le rendement du plan incliné considéré comme machine simple. Faire le croquis à l'échelle de 0,02.

XVII. — MOUVEMENTS USUELS. ÉTUDE DE QUELQUES MÉCANISMES ET MACHINES SIMPLES

169. Principaux mouvements employés dans l'industrie. — Les mouvements que l'on rencontre le plus souvent dans l'industrie sont le mouvement rectiligne et le mouvement circulaire ; ils peuvent être continus ou alternatifs, selon que le mobile parcourt sa trajectoire toujours dans le même sens ou alternativement dans un sens et dans l'autre. Nous les désignerons par les initiales CC, CA, RC, RA.

Les corps en mouvement sont des solides indéformables assujettis à parcourir une trajectoire bien définie à l'aide d'obstacles appelés **guides** tels que les paliers et les glissières.

Le mouvement **rectiligne** est celui du piston et de sa tige (RA), d'une soupape à levée parallèle (RA), d'une vanne, des chariots de machines-outils, de la douille d'un trusquin, des tiroirs des meubles, de la barre de fer sortant des cylindres du laminoir (RC), de la navette dans le métier à tisser (RA).

Le mouvement **circulaire** est celui des arbres et des organes calés sur eux : poulies, engrenages, volants, manivelles, manchons, des forets, des fraises, des pièces à tourner, des rouleaux d'enroulement de tissu, de câble, des cylindres de laminoir, des canettes, des bobinoirs.

Il faut aussi noter le mouvement de **roulement** des galets, des plaques tournantes, des colliers, des roues des véhicules ; et, le mouvement **hélicoïdal** : de la vis dans son écrou, de l'hélice dans l'eau. Quant à la nature de ces mouvements divers, elle est variable. On rencontre le mouvement **uniforme** dans les machines de papeterie, d'apprêts, dans la commande des broches du métier à filer le peigné (*self acting*), du chariot au banc d'étirage, du guide-fil à la doubleuse, dans le déplacement du plateau ou de l'outil des raboteuses, dans la rotation des fraises, des pièces à tourner. C'est le mouvement le plus commun des machines, c'est d'ailleurs celui de l'arbre du moteur.

Les mouvements **accéléré** et **retardé** permettent aux organes de se déplacer alternativement dans les deux sens ou périodiquement, sans choc aux terminus des trajectoires et d'atteindre progressivement leur vitesse normale. Ex. : soupape de moteur à gaz, piston de pompe. — Dans les filatures, ils permettent d'obtenir des canettes fuselées à leurs extrémités, en communiquant au guide-fil un mouvement accéléré et retardé (*fig.* 173).

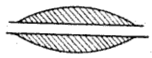


FIG. 173.

170. Transformation d'un mouvement en un autre. — Cette transformation est nécessaire, puisque le moteur fournit l'énergie sous forme d'un mouvement uniforme circulaire continu dont la vitesse ne convient pas le plus souvent au travail que l'on se propose d'effectuer. Il faudra donc en changer la vitesse, peut-être le sens, parfois le transformer en CA, RA, RC, modifier la direction de ceux-ci et quelquefois en changer la nature, produire des mouvements accéléré ou retardé. Maintes fois aussi ces mouvements doivent avoir lieu à un moment précis : le retour rapide de l'outil dans les raboteuses et étaux limeurs à la fin de la passe, la levée de la soupape d'échappement des moteurs à gaz après la détente des gaz brûlés ; de même pour les casse-trames, les chasse-navettes, le battant des métiers à tisser.

On voit par cet aperçu la grande variété de mouvements que l'on doit obtenir dans l'industrie. Les diverses combinaisons que l'on peut imaginer sont innombrables. On les découvre en étudiant les machines. Nous allons indiquer comment on procède à l'étude du fonctionnement d'une machine.

171. Examen d'une machine. — Dans toute machine on distingue :

1° Le **récepteur,** organe recevant directement l'action de la puissance motrice ;

2° L'**opérateur** ou l'**outil,** qui effectue le travail sur la matière à transformer ;

3° Les **mécanismes de transformation de mouvement** interposés entre les premiers pour communiquer à l'outil et à la pièce les mouvements convenant à la production d'un bon travail.

Examinons la machine à percer (*fig.* 174) : Le récepteur est constitué par un **renvoi** A de deux poulies fixe et folle disposées sur l'arbre moteur et recevant leur mouvement de la transmission générale par une courroie. Ce renvoi permet de transformer déjà la vitesse du mouvement de la transmission générale et de débrayer ou d'embrayer à volonté.

L'outil est un **foret** B enchâssé à l'extrémité d'un arbre vertical, le **porte-foret** C.

Le trou à percer dans la pièce fixée sur le plateau doit se trouver au-dessous du foret.

La montée ou la descente de la pièce est obtenue par celle de l'**équerre** E au moyen d'une vis sans fin, de deux roues et pignon dentés et d'une crémaillère.

Le centrage s'opère en agissant sur les vis commandant deux **chariots** F, F′ qui se déplacent longitudinalement ou transversalement.

Le mouvement de rotation de l'outil lui est communiqué de l'arbre moteur M à l'arbre intermédiaire I par deux cônes de vitesses H, H′ chaussés d'une courroie, puis au porte-foret par deux engrenages coniques G, G′. La rotation de l'outil devant varier avec la nature du métal et le diamètre du trou à percer, les quatre étages des cônes et le double harnais d'engrenages J permettent d'obtenir huit vitesses différentes de l'outil.

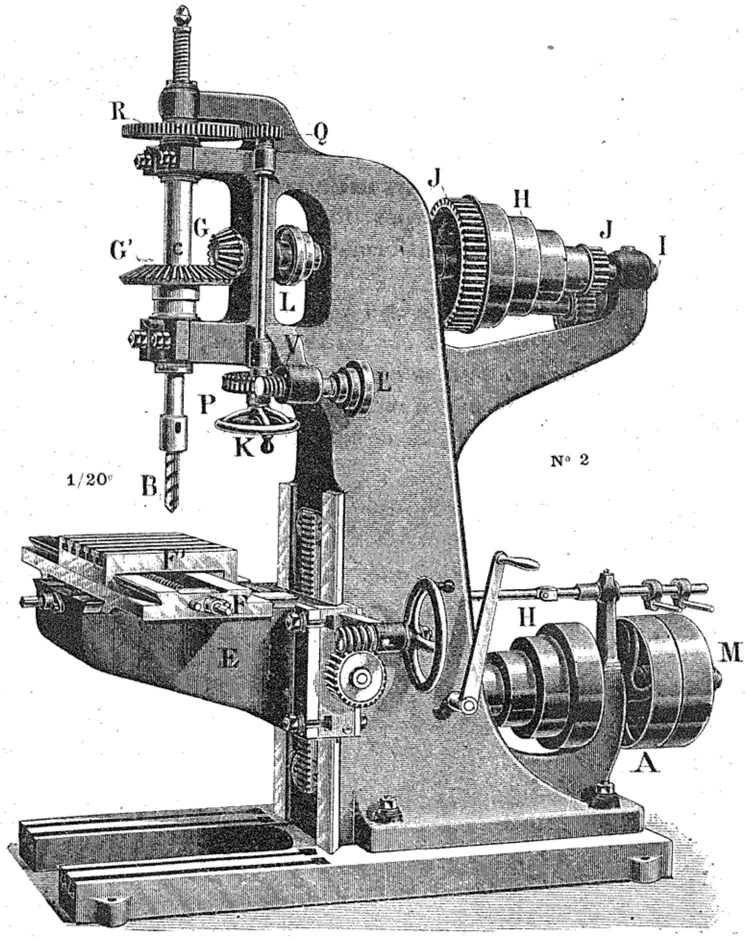


Fig. 174.

La descente de l'outil peut se faire à la main en actionnant le volant-manivelle K ou automatiquement par les petits cônes de vitesse L, L', la vis sans fin V, les engrenages P, Q, R dont le dernier calé sur une douille taraudée entraîne le mouvement de l'extrémité filetée du porte-foret.

On voit l'importance de l'étude des mécanismes de transformation de mouvement. Nous les examinerons à la fois au point de vue mouvement et au point de vue dynamique ou de l'utilisation des forces.

172. Classification des mécanismes. — Nous n'étudierons que quelques types fondamentaux et nous les classerons suivant les transformations de mouvements qu'ils produisent :

I. *Rectiligne continu en rectiligne continu ;*
II. *Circulaire continu en circulaire continu ;*
III. *Circulaire continu en rectiligne continu ;*
IV. *Circulaire continu en rectiligne alternatif ;*
V. *Rectiligne alternatif en circulaire continu.*

XVIII. — RECTILIGNE CONTINU EN RECTILIGNE CONTINU

173. Les dispositifs de cette classe destinés à changer la direction du mouvement sont :

1° La **poulie fixe**, la **poulie mobile**, la **moufle**, les **palans ordinaire** et **différentiel** déjà étudiés, dans lesquels on utilise le poids du corps pour tirer le garant de bas en haut et produire l'élévation du fardeau de haut en bas ;

2° Le **plan incliné**, dont nous avons déjà étudié la condition d'équilibre, qui transforme le mouvement de descente vertical d'un corps sous l'action de son poids en un mouvement rectiligne oblique. On l'utilise pour la descente des colis dans les grands magasins. Le descenseur hélicoïdal que l'on voit au *Bon Marché* n'est qu'une variété de plan incliné.

Il facilite aussi l'élévation des fardeaux, on parcourt plus de chemin pour vaincre la pesanteur, mais on y parvient avec un effort moindre. On peut même réaliser un **plan incliné automoteur**, comme l'a fait M. Piat pour l'exploitation des carrières en établissant deux voies de même pente, mais opposées, et en réunissant les deux trains par un **câble tracteur** en acier ; le train chargé descendant remorque le train montant jusqu'au sommet de la rampe où est installé le bâtiment des machines. Un appareil hydraulique régularise la descente et par suite la montée dont la vitesse est de 1 mètre ;

3° Le **coin** et la **clavette.**

174. Coin. — Le coin est un prisme triangulaire dont la section est généralement un triangle isocèle. Il est employé pour obtenir la section des corps (outils tranchants, hache, couteau, ciseau, coin du fendeur de bois, merlin, etc...) ou le serrage de deux pièces assemblées par l'écartement de deux autres (manche d'outil, clavette, rattrapage du jeu dans les coussinets).

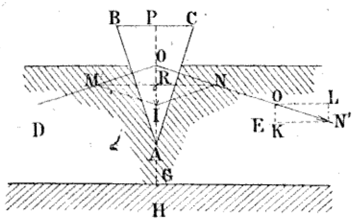


Fig. 175.

Considérons le coin isocèle BAC sur lequel agit une force verticale OI appelée puissance. Cette force OI peut se décomposer en deux autres OM et ON normales aux faces AB et AC directement opposées aux réactions du corps et égales à ces réactions lorsqu'il y a équilibre.

L'une quelconque de ces forces, ON par exemple, que l'on peut supposer appliquée en ON′, peut être décomposée en deux autres : l'une OK, normale au plan de support H, a pour effet d'appliquer le corps sur ce plan et de détériorer le support s'il est insuffisamment résistant, elle est détruite par la réaction du support ; l'autre OL provoque la section suivant AG et l'écartement des deux parties D et E du corps. En somme, le mouvement vertical du coin est transformé en mouvement horizontal de la pièce.

L'écartement est produit sous l'action de deux forces identiques à $OL = RN$ et symétriques par rapport à l'axe AP du coin ; d'autre part, la composante $OK = OR$ est égale à la moitié de OI.

Pour trouver le rapport qui existe entre les forces produisant l'écartement 2RN et la puissance $OI = 2OR$, ou

$$\frac{2RN}{2OR} = \frac{RN}{OR},$$

désignons par h la hauteur AP du coin et par $a = \frac{l}{2}$ la demi-largeur de sa base BC $= l$.

La similitude des triangles CPA et ORN, qui ont leurs côtés respectivement parallèles, entraîne la relation :

$$\frac{RN}{OR} = \frac{AP}{PC} = \frac{h}{a}.$$

Si $\frac{h}{a} = 10$ et si l'on exerce sur le coin un effort de 60 kilogrammes, il faudrait pour produire le même effet une traction de 600 kilogrammes.

On recherche donc à donner au rapport $\frac{h}{a}$ la plus grande valeur possible, ce qui rend d'autant plus petit l'angle BAC. Afin de ne pas affaiblir le tranchant, on donne aux faces une forme courbe concave; l'angle des faces étant celui de leur tangente peut être presque nul. Tels sont les rasoirs.

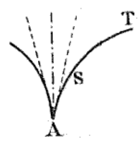


FIG. 176.

On rencontre le coin dans les outils travaillant les métaux : burin, poinçonneuse (angle 90°); coupant le bois : rabot, ciseau bisaiguë (30 à 45°); les couteaux, les pioches, le coutre et le soc d'une charrue.

175. Clavette. — C'est un coin affectant la forme d'un trapèze rectangle ou isocèle employé dans l'assemblage, le serrage et le réglage des organes de machine (clavette transversale, *fig.* 178) ou dans le calage d'une poulie, d'un engrenage, d'une manivelle sur un arbre (clavette longitudinale, *fig.* 177). La pente de la clavette varie de $\frac{1}{30}$ à $\frac{1}{50}$ dans les clavetages permanents dont

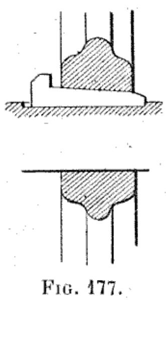


FIG. 177.

le serrage est alors très énergique, de $\frac{1}{25}$ à $\frac{1}{10}$ dans les

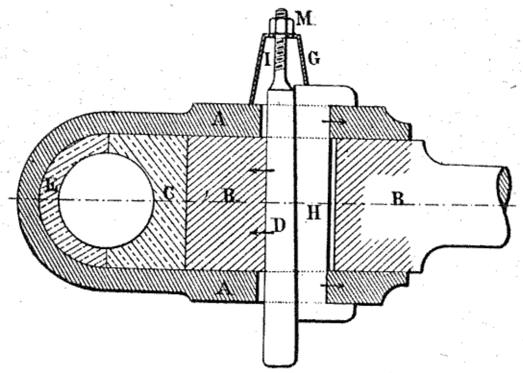


FIG. 178. — Tête de bielle à chape montrant le serrage par clavette.
A, chape ; B, extrémité du corps de bielle ; C, E, coussinets ; D, clavette munie d'une vis dont l'écrou M s'appuie sur un support à jambes inégales G ; H, contre-clavette.

clavetages qui doivent être démontés avec facilité.

XIX. — CIRCULAIRE CONTINU EN CIRCULAIRE CONTINU

176. La transformation d'un mouvement CC en un mouvement de même nature CC peut se faire :

a) Par **poulies et courroies** quand les arbres sont relativement éloignés ;

b) Par **roues de friction,** ou

c) Par **roues dentées** quand les arbres sont proches.

I. — Poulies et courroies

Pour relier deux arbres éloignés, on cale sur eux deux poulies et on chausse celles-ci d'une courroie qui, grâce à son adhérence, assure l'entraînement.

177. Poulies de transmission. — Elles se font généralement en fonte, mais on en fabrique aussi en fer, en acier et en bois. Elles comprennent trois parties essentielles: le moyeu, la jante et les bras.

Le **moyeu** ou centre est alésé au diamètre de l'arbre dont il est rendu solidaire par une clavette longitudinale. Dans les poulies de grandes dimensions, le moyeu est *chambré* pour diminuer le travail d'alésage. Les poulies folles ont un moyeu revêtu intérieurement d'une douille en bronze phosphoreux ou en fonte extra-dure.

La **jante** est la couronne extérieure très mince de la poulie, elle est bombée pour maintenir la courroie en son milieu, elle est munie de rebords quand la poulie est soumise à des vibrations.

Lorsqu'elle est très large et plate, l'organe s'appelle **tambour.**

Les **bras** sont droits ou courbes, de forme parabolique à section elliptique pour offrir moins de résistance au déplacement de l'air. Ils sont remplacés pour les petites poulies par un disque plein appelé **toile.**

178. Courroies. — Elles se font en cuir, en coton ou en caoutchouc.

Les courroies **en cuir** sont les plus répandues, leur épaisseur est celle de la peau employée, 5 à 6 millimètres. On peut superposer plusieurs épaisseurs, mais la souplesse diminue ; il il est préférable d'employer une largeur plus grande.

Les courroies **en coton** sont très souples, elles peuvent se faire très larges, aussi sont-elles tout indiquées pour les grands efforts à transmettre. Malheureusement elles s'allongent plus que les précédentes, elles doivent être retendues à différentes reprises et graissées pour les soustraire à l'action de l'air.

Les courroies **en caoutchouc** sont plus chères, mais elles conviennent seules dans les locaux humides ou renfermant des vapeurs acides. Il faut éviter leur contact avec l'huile, qui les dissout.

179. Poulies menante et menée. — La poulie **menante** O est celle qui est calée sur l'arbre moteur, elle enroule le **brin conducteur 1** de la courroie, qui entraîne la rotation de la **poulie menée** O′ en se déroulant sur elle. Cette dernière poulie est solidaire de l'arbre conduit.

L'autre brin de la courroie qui s'enroule sur la poulie menée se nomme **brin conduit, mou** ou **flottant.**

180. Rapport de leurs vitesses en nombre de tours. — Si aucun glissement ne se produit, les vitesses linéaires des jantes des deux poulies sont identiques, puisque c'est la vitesse de la courroie.

Si R et R' sont les rayons des deux poulies, n et n' leurs nombres de tours par minute, on a :

$$\frac{\pi R n}{30} = \frac{\pi R' n'}{30} \quad \text{ou} \quad Rn = R'n',$$

et

$$\frac{R}{R'} = \frac{n'}{n} = \frac{D}{D'}.$$

Le rapport des nombres de tours des deux poulies est égal au rapport inverse de leurs rayons ou de leurs diamètres.

Pratiquement il faut compter sur un glissement de $\frac{1}{2}$ à 2 0/0.

181. Différents cas de transmission par courroie. — 1° *Les arbres sont parallèles.* — On utilise la **courroie droite** (*fig.* 179) si l'on veut une rotation de même sens des arbres, une **courroie croisée** (*fig.* 180) si les arbres doivent tourner en sens contraire.

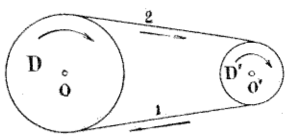


Fig. 179.

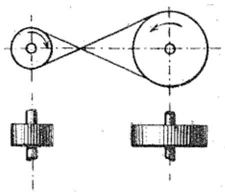


Fig. 180.

Avec ces deux dispositifs, la conduite peut se faire indifféremment dans un sens ou dans l'autre. Mais le rapport des vitesses ne pouvant excéder $\frac{7}{1}$, si l'on désire un plus grand rapport il faut grouper les poulies.

182. Équipage de poulies. — Il est constitué, en outre des poulies extrêmes, par des paires de poulies calées sur des arbres intermédiaires. Des courroies chaussent toutes ces poulies comme sur la figure.

Calculons le rapport $\frac{n'}{n}$ du nombre de tours de l'arbre mené O' à l'arbre menant O.

Appelons n_1 et n_2 les nombres de tours des arbres intermédiaires A et B.

La première courroie donne la relation :

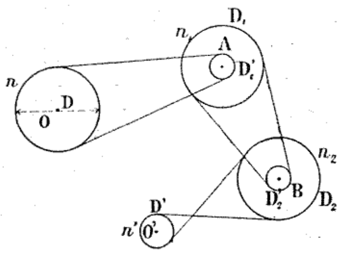


Fig. 181.

$$\frac{n_1}{n} = \frac{D}{D'_1};$$

la seconde :

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{D_1}{D'_2};$$

la troisième :

$$\frac{n'}{n_2} = \frac{D_2}{D'}.$$

Multipliant ces rapports membre à membre, il vient après simplification :

$$\frac{n'}{n} = \frac{D \times D_1 \times D_2}{D'_1 \times D'_2 \times D'} = \frac{\text{produit des diamètres des roues menantes}}{\text{produit des diamètres des roues menées}}.$$

Ce rapport $\frac{n'}{n}$ se nomme la **raison** de l'équipage.

La raison d'un équipage de poulies est égale au rapport du produit des diamètres des roues menantes au produit des diamètres des roues menées.

On voit que cette raison sera grande si les roues menantes ont de grands diamètres et les roues menées de petits. Ces équipages permettent donc de passer d'une petite vitesse à une beaucoup plus grande et inversement. La commande des dynamos peut s'effectuer par ce dispositif.

183. 2° *Arbres non parallèles.* — La courroie chaussant les poulies non situées dans un même plan tombera en général, à moins que l'on ne prenne certaines précautions pour le montage. Pour la stabilité de la courroie, *il faut et il suffit que le* *brin de celle-ci quitte chaque poulie dans le plan moyen de l'autre.* Appliquons ce principe aux divers cas qui se présentent dans la pratique.

a) Soit à relier *deux arbres perpendiculaires* et non situés dans le même plan. Sur le plan de l'épure (*fig.* 182), on porte à partir du point A, intersection des projections des arbres sur le sol, des longueurs égales à R et R', rayons des poulies fournissant le rapport de vitesse cherché. Les plans verticaux perpendiculaires à AO' et AO, menés par B et C, sont les plans moyens des deux poulies cherchées.

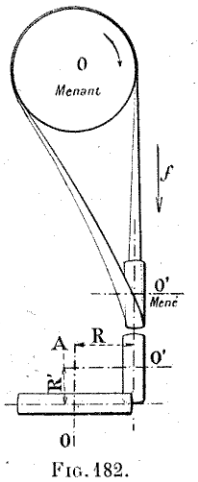


Fig. 182.

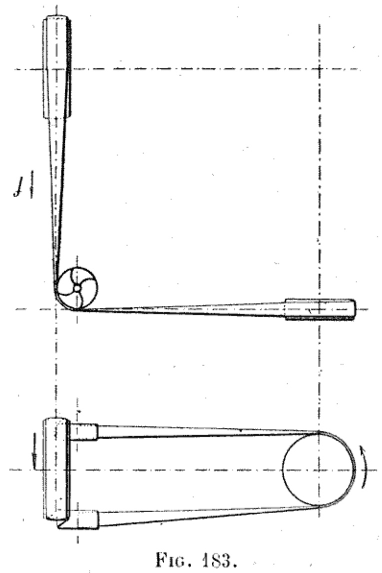


Fig. 183.

A l'inspection de la figure on voit que la courroie assure l'entraînement dans le sens *f*, parce que la condition de stabilité précitée est remplie ; mais celle-ci n'étant point réalisée dans le mouvement inverse, l'entraînement ne peut avoir lieu dans l'autre sens. Si les deux arbres perpendiculaires étaient situés dans le même plan (*fig.* 183), on adopterait la disposition ci-contre avec deux poulies de renvoi.

La transmission n'est encore assurée que dans un seul sens *f*.

b) Les arbres à réunir occupent des *positions quelconques*. On emploie des *poulies-guides* (*fig*. **184** et **185**) qui dévient la courroie sans modifier le rapport de vitesses des arbres. Pour que ces guides remplissent la condition de stabilité de la courroie,

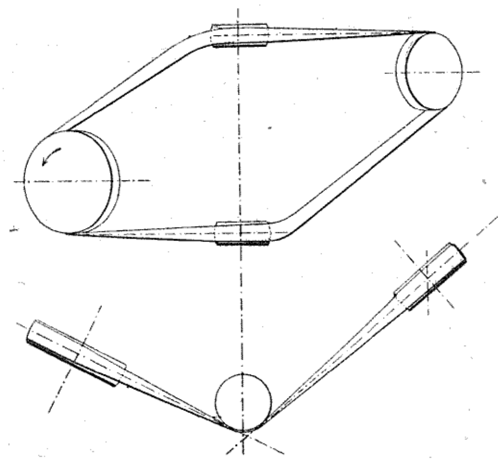


FIG. 184 et 185. — Elévation et plan.

il faut que celle-ci les chausse dans les plans moyens des deux poulies menante et menée, par suite sur leur intersection, et que les plans médians des galets soient les plans tangents aux jantes des poulies. On les monte sur des **pendants** se fixant sur le sol, au plancher, au mur ou à un poteau. Dans le *renvoi universel Piat*, les poulies montées sur cet appareil peuvent être orientées dans toutes les positions de l'espace par suite de leur montage spécial sur des bras à coulisses et plateaux tournants.

184. Conditions d'adhérence. — L'adhérence est la force appliquant les courroies sur les poulies qu'elles chaussent. Elle dépend, puisqu'elle est due au frottement :

1° *De la nature des surfaces en contact des poulies et de la courroie.* C'est ainsi que l'adhérence est bien plus forte sur les poulies en fer laminé ($f = 0,28$) et sur les poulies en bois ($f = 0,35$) que sur celles en fonte ($f = 0,155$). D'autre part, on place toujours le côté *chair* sur la poulie, parce que c'est le plus rugueux. On augmente parfois l'adhérence à l'aide de cendres, de sable ou de résine ; mais ces procédés sont peu recommandables par suite de l'encrassement et de l'usure qu'ils entraînent.

La jante de la poulie étant bombée, la courroie tend à revenir se placer dans le plan médian de la poulie.

En effet, la pression AN de la courroie sur la poulie est normale à la jante de celle-ci ; elle se décompose en deux suivant la perpendiculaire à l'axe de rotation et la tangente au bombé : la composante AR assure la rotation de la poulie, la composante AT ramène la courroie vers le sommet de la courbure ;

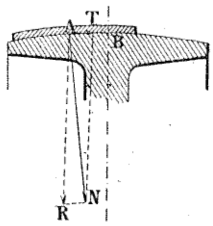


Fig. 186.

2° *De la résistance de la courroie à l'allongement.* Elle augmente avec cette résistance, c'est pourquoi on recommande d'enduire de suif la partie de la courroie en cuir en contact pour remédier au glissement; tout d'abord celui-ci augmente, mais bientôt la courroie se gonfle, se raccourcit et tire davantage. Lorsqu'une courroie usagée se détend, il faut la raccourcir ou augmenter sa tension à l'aide d'un *galet tendeur ;*

3° *De la vitesse de la courroie.* Elle diminue quand la vitesse augmente à cause de la force centrifuge ;

4° *De l'effort à transmettre.* Quand cet effort tangentiel surpasse la résistance au glissement, la courroie patine. Si l'on ne peut augmenter l'adhérence par un tendeur, il faut garnir la jante des poulies de cuir ou de caoutchouc qui font croître le frottement : on peut ainsi transmettre des puissances plus considérables.

185. Conditions d'établissement d'une transmission par courroie. — a) *Distance des axes.* — Elle doit être égale au moins à deux ou trois fois le diamètre de la plus grande poulie selon que la courroie est droite ou croisée. Il convient en outre de la prendre entre 3 mètres et 10 mètres selon la puissance à transmettre.

b) *Vitesse de la courroie.* — Elle doit être assez grande, car le rendement augmente avec elle. Cependant on peut l'abaisser jusqu'à 10 mètres par seconde et il convient de ne pas dépasser 25 à 30 mètres à cause des effets de la force centrifuge. La vitesse de 20 mètres est très avantageuse.

c) *Rayons des poulies.* — Ils se déterminent au sentiment, de façon que la vitesse à la circonférenee soit convenable.

De la formule :

$$V = \frac{\pi R n}{30},$$

on tire :

$$R = \frac{30V}{\pi n} = 9{,}55\,\frac{V}{n},$$

si l'on néglige le glissement. En le faisant égal à 2 0/0,

$$R = 9{,}55 \times 1{,}02 \times \frac{V}{n} = 9{,}74\,\frac{V}{n}.$$

Il convient que le rapport des rayons soit inférieur à 6.

d) *Longueur de la courroie.* — Quand les poulies sont montées, il suffit de passer une ficelle figurant la courroie et de la mesurer. Sinon on fait à une échelle l'épure du problème des tangentes communes extérieures à deux circonférences, on mesure les longueurs des tangentes, on évalue les angles d'enroulement au rapporteur et on calcule les arcs.

$$L = 2AA' + \frac{\pi D\alpha}{360} + \frac{\pi D'\alpha'}{360},$$

soit pour le dispositif (*fig.* 187) :

$$L = 690 \text{ mm} \times 2 + \frac{380 \times 3{,}14 \times 201}{360} + \frac{120 \times 3{,}14 \times 150}{360}$$
$$= 2256 \text{ mm., soit } 2^{m},25.$$

On peut se contenter d'une formule approchée en remplaçant AA' par la distance des axes OO′, α et α' par 180° :

$$L = 2OO' + \frac{\pi(D + D')}{2},$$

ce qui donne dans le cas de la figure :

$$D = 2^m,185.$$

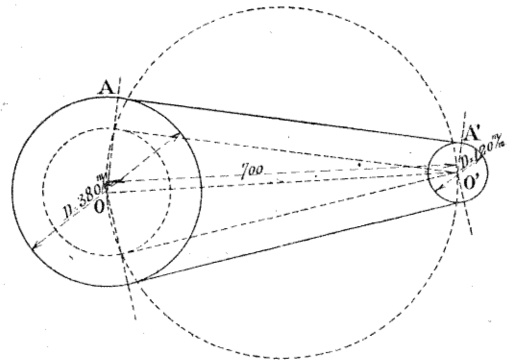


FIG. 187.

e) *Largeur de la courroie*. — Pour les courroies en cuir d'épaisseur peu variable, on applique les formules :

$$l = \frac{21\,W}{V} \text{ quand les arbres sont verticaux ;}$$

$$l = \frac{15\,W}{V} \text{ quand ils sont horizontaux,}$$

W représentant la puissance transmise en chevaux ;
V, la vitesse en mètres par seconde.
La détermination exacte de la section d'une courroie se fera dans l'étude de la résistance des matériaux.

186. Poulies étagées ou cônes de vitesse. — Pour obtenir sur l'arbre récepteur plusieurs vitesses différentes pour une seule vitesse de l'arbre moteur, on cale sur les deux arbres deux cônes identiques, disposés en sens inverse, formés chacun de plusieurs poulies venues de fonte d'une seule pièce et dont la somme des rayons pour chaque couple est constante. La même courroie peut ainsi chausser toutes les poulies. Souvent les rayons de celles-ci sont en progression arithmétique, c'est-à-dire que les étages ont la même valeur. Le plus petit rayon ne doit pas être inférieur à 80 millimètres pour permettre l'enroulement, et la distance des axes doit être assez grande.

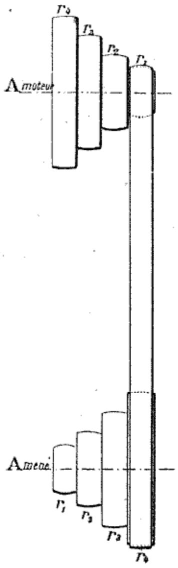


FIG. 188.

La vitesse la plus grande du cône mené correspond à la position de la courroie sur sa plus petite poulie et la plus petite vitesse sur la plus grande poulie (*fig.* 188).

Dans la détermination des cônes de vitesse, généralement on se donne le plus petit rayon des poulies r_1, le rapport extrême de vitesses à obtenir m et le nombre de vitesses. Soit à calculer les rayons de deux cônes à quatre vitesses, $r_1 = 90$ millimètres, $m = 5$.

On a :

$$\frac{r_4}{90} = 5, \qquad \text{d'où} \qquad r_4 = 90 \text{ mm.} \times 5 = 450 \text{ mm.}$$

Les trois étages étant égaux,

$$r_4 - r_3 = r_3 - r_2 = r_2 - r_1 = \frac{r_4 - r_1}{3} : \frac{450 \text{ mm.} - 90 \text{ mm.}}{3} = 120 \text{ mm.}$$

$$r_2 = r_1 + 120 \text{ mm.} = 90 \text{ mm.} + 120 \text{ mm.} = 210 \text{ mm.}$$

$$r_3 = r_2 + 120 \text{ mm.} + 210 \text{ mm.} + 120 \text{ mm.} = 330 \text{ mm.}$$

187. **Transmissions funiculaires ou télédynamiques.** — Lorsque la puissance à transmettre est supérieure à 100 chevaux ou lorsque la distance des axes dépasse 10 mètres, la transmission par courroie n'est ni facile ni économique. Il convient de la rem-

placer par une transmission par **poulies à gorges** et par **câbles.** Ceux-ci se font en chanvre, en cuir ou en métal.

a) **Câbles en chanvre ou cordes.** — Leur diamètre doit être inférieur au $\frac{1}{50}$ de celui des poulies et ne pas excéder 50 millimètres. Ces câbles, en nombre variable (1 à 20), coincent dans les gorges tournées en forme de V d'une grande poulie en fonte. Ce mode de transmission donne d'excellents résultats dans les filatures, les moulins, mais les câbles doivent être abrités, parce qu'ils ne résistent pas aux intempéries, et la distance des arbres doit être inférieure à 30 mètres.

b) **Câbles en cuir.** — Ils sont formés de lanières toronnées; ils sont plus solides que les précédents et ne s'altèrent pas à la pluie. Aussi peut-on les leur substituer avantageusement dans beaucoup de cas.

c) **Câbles métalliques.** — Ces câbles constituent une solution élégante pour transmettre le mouvement de rotation entre deux arbres distants de plus de 30 mètres jusqu'à 1.000 mètres. De 100 à 1.000 mètres, il est nécessaire d'intercaler des supports intermédiaires. Les câbles sont enduits d'un mélange d'huile et de goudron pour résister aux intempéries. Ils sont formés de fils d'acier ou de fer de Suède réunis en torons eux-mêmes groupés autour d'une âme en chanvre qui augmente la flexibilité du câble tout en empêchant le frottement des torons les uns contre les autres. La gorge des poulies est revêtue dans le fond d'une garniture de bois, de gutta-percha ou de cuir posé sur champ pour augmenter l'adhérence.

Il convient de n'employer qu'un seul câble et de lui donner : 1° une grande vitesse de 25 à 30 mètres; 2° une section telle que la tension qu'il supporte soit au plus égale à 18 kilogrammes par millimètre carré de section.

Les câbles métalliques conviennent pour les grandes puissances et les grandes distances et ont été appliqués aux transports aériens.

II. — Roues de friction

188. Roues ou cylindres de friction. — Lorsque deux axes O, O′ parallèles sont suffisamment rapprochés, on peut transmettre la rotation de l'un O à l'autre O′ en calant sur chacun d'eux des cylindres tangents d'axes O et O' (*fig.* 189).

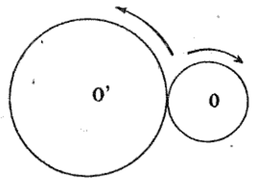


FIG. 189.

A cause de l'adhérence, la roue O, calée sur l'arbre moteur et appelée **roue menante**, entraîne par friction la **roue menée** O' calée sur l'arbre conduit. Le chemin parcouru par les deux jantes pendant le même temps sont égaux, de sorte que si l'on désigne par V et V' leurs vitesses linéaires à la seconde ; par ω et ω' leurs vitesses angulaires ; par R et R' leurs rayons, et par n, n' les nombres de tours à la minute, on a les relations :

$$V = V',$$

$$(1) \qquad \omega R = \omega' R',$$

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R};$$

$$2\pi R n = 2\pi R' n',$$

$$(2) \qquad Rn = R'n',$$

$$\frac{n}{n'} = \frac{R'}{R},$$

les relations (1) et (2) pouvant se traduire :

Les vitesses angulaires et les nombres de tours par minute des deux arbres O, O' *sont inversement proportionnels à leurs rayons* R *et* R' :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n}{n'} = \frac{R'}{R}.$$

189. Calcul des rayons des roues de friction. — La valeur de n étant connue, on peut obtenir celle de n' en prenant des rayons convenables. Si d désigne la distance OO' des axes, on a en effet les deux relations :

$$R + R' = d,$$

$$\frac{R}{R'} = \frac{n'}{n} \qquad \text{ou} \qquad \frac{R}{R + R'} = \frac{R}{d} = \frac{n'}{n + n'},$$

d'où :

$$R = d\,\frac{n'}{n + n'} \qquad \text{et} \qquad R' = d\,\frac{n}{n + n'}.$$

APPLICATIONS. — *Un arbre* O *distant de* O′ *de* $0^m,500$ *fait* 90 *tours à la minute; quels doivent être les rayons* R *et* R′ *des roues menante et menée pour que l'arbre* O′ *fasse* 60 *tours à la minute?*

$$R = d\,\frac{n'}{n+n'} = 0^m,500 \times \frac{60}{60+90} = 0^m,200\,;$$

$$R' = d\,\frac{n}{n+n'} = 0^m,500 \times \frac{90}{60+90} = 0^m,300.$$

190. **Jantes des roues de friction.** — L'expérience montre qu'il convient de donner aux deux roues des jantes de matériaux différents, l'une en bois, en cuir (*fig.* 190), ou en papier résineux comprimé sur la roue menante, l'autre en métal sur la roue menée. Ces jantes doivent être tournées avec le plus grand soin : après les avoir calées sur leurs arbres, on les porte sur le tour de manière à ce qu'elles tournent sur leurs tourillons.

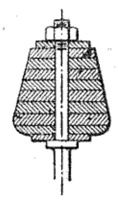


FIG. 190

Pour assurer l'adhérence et par suite la transmission, il faut presser les deux cylindres l'un contre l'autre, soit en reliant les deux arbres par un **ressort à boudin**, soit en pressant sur les coussinets-guides A de l'arbre mobile O au moyen d'une vis V prenant appui dans le chapeau taraudé C d'un bâti B, comme dans les appareils d'entraînement pour l'apprêt des étoffes, le façonnage du papier. La figure 191 représente le dispositif employé par M. Dechaître dans une machine à imprimer les tissus.

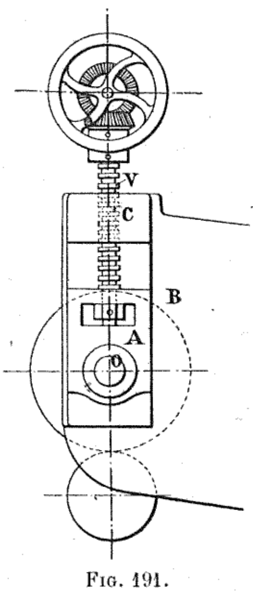


FIG. 191.

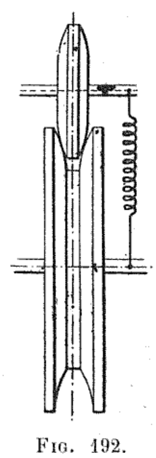


FIG. 192.

Pour augmenter cette adhérence, *Minotto* imagina la **roue à coin** (*fig.* 192). La roue menée O′ présente une gorge à sa jante dans laquelle coince, grâce au ressort A, la jante en forme de coin du plateau menant O. Les courbes des deux jantes en contact sont légèrement convexes pour éviter les glissements qui se produiraient sans cela, tous les points de la section n'ayant pas la même vitesse considérés comme appartenant à la roue ou au plateau. On multiplie les gorges et les coins pour accroître l'adhérence.

Ces roues sont très répandues; comme c'est le plateau qui commande, elles sont employées comme **réducteur de vitesse** pour des moteurs électriques. On les utilise aussi pour la commande des treuils des navires.

Sellers, en employant une espèce de roue à coin constituée par deux plateaux lenticulaires pressés contre les deux plateaux des arbres à réunir, permet d'obtenir un entraînement progressif. Son dispositif se rencontre dans les machines à décolleter américaines.

191. Arbres perpendiculaires. — Pour les réunir, on peut utiliser la friction cylindrique. A l'extrémité de l'arbre menant, on cale le plateau en fonte parfaitement dressé perpendiculaire à l'axe, on fixe sur l'arbre mené un galet qui, entraîné par le plateau, fait tourner l'arbre.

On trouve ce dispositif dans les **presses à friction** (*fig.* 193); le grand galet G actionne la vis qui monte ou descend dans son écrou fixe selon la commande de l'un ou de l'autre des deux plateaux A et B calés sur l'arbre. Celui-ci est muni d'un collier et d'un levier à fourche pour le déplacer légèrement et assurer le décollage des plateaux menants.

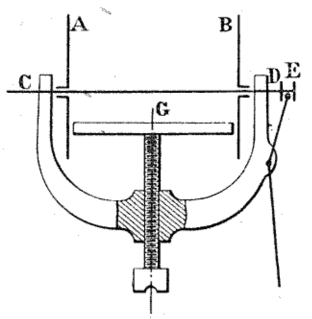


Fig. 193.

On le rencontre aussi dans les machines à apprêter les tissus. Les figures 194-195 représentent le schéma de la commande d'un cylindre sécheur Dehaître. A l'extrémité de l'arbre O commandé par la poulie A, est calé un plateau B qui entraîne le galet G monté sur l'arbre C imprimant au cylindre sécheur S un mouvement de rotation par l'intermédiaire d'un couple d'engrenages coniques D, D′ et d'une paire d'engrenages cylindriques E, E′. La pression du plateau sur le galet est assurée par le goujon fileté F fixé à l'extrémité du ressort H ; pour décoller le plateau, on fait reculer le ressort à l'aide d'une tige à came I manœuvrée par une manivelle. Le réglage de la rotation du cylindre s'obtient en faisant glisser le galet sur une clavette longitudinale de l'arbre C; on réalise ces déplacements à l'aide d'une fourchette K dont le moyeu taraudé chemine le long d'une tige filetée L actionnée par une manivelle.

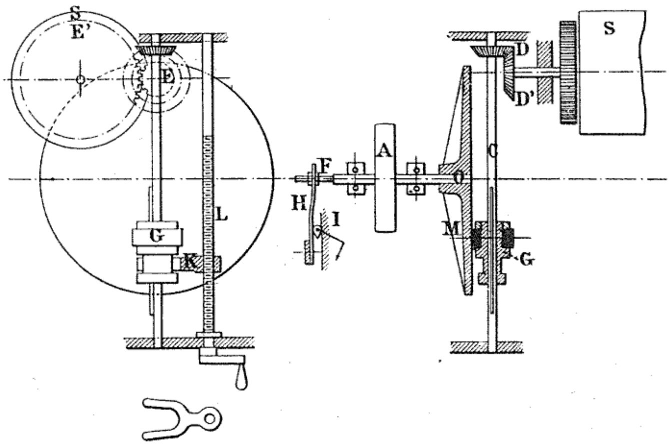


FIG. 194. FIG. 195.

On a la relation :

$$\frac{\text{vitesse de C}}{\text{vitesse de O}} = \frac{\text{rayon du galet}}{\text{rayon variable du plateau}}.$$

Ce rayon variable est OM sur la figure, distance du centre du plateau au point de contact du galet.

192. Cônes de friction. — Le galet et le plateau sont formés par deux troncs de cône dont le sommet commun est à l'intersection des axes des arbres. Le plateau a sa jante ordinairement en bois ou en métal. Pour les cônes de petites dimensions, le bois est avantageusement remplacé par des rondelles de cuir collées entre elles et pressées les unes contre les autres ou mieux par du carton siliceux comprimé à la presse hydraulique et tourné après son montage.

Le rapport des nombres de tours des deux arbres est égal au *rapport inverse des distances d'un point quelconque de la génératrice de contact aux deux axes.*

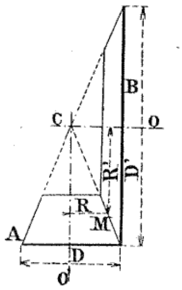


Fig. 196.

Ce rapport est le même pour tous les points de la génératrice de contact ; il n'y a pas de glissement, la vitesse linéaire d'un point étant la même considérée comme appartenant au cône A ou au cône B :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{h}{h'} = \frac{R'}{R} = \frac{D'}{D}.$$

193. Essoreuses. — Ces cônes sont employés pour la commande des arbres à grande vitesse tels que l'arbre vertical du panier des essoreuses faisant jusqu'à 2.000 tours à la minute. Un galet en carton comprimé est calé sur cet arbre ; il reçoit son mouvement d'un plateau conique en fonte monté sur l'arbre relié à la transmission. On peut à volonté, au moyen d'un ressort réglable, presser plus ou moins le plateau sur le galet et assurer ainsi un embrayage progressif.

194. Avantages et inconvénients des roues de friction. — Pour obtenir une adhérence parfaite qui supprime le glissement, il faut presser fortement la roue entraînée sur l'autre ; il en résulte une usure considérable si l'effort à transmettre est assez grand.

Cet inconvénient devient un avantage quand la puissance ou la résistance sont sujettes à de brusques variations, le glissement évitant la rupture.

L'emploi de ces roues est donc limité aux *faibles efforts* à transmettre et aux *grandes vitesses* à obtenir, on sacrifie la régularité de la transmission à sa douceur.

III. — Engrenages

195. Roues dentées. — En réalité, dans la presque totalité des cas, les roues chargées d'assurer une transmission de mouvement sont **armées** de **solides prismatiques** (arêtes parallèles) appelés **dents** qui, en pénétrant les uns dans les autres, assurent une transmission par **engrenage** (*fig.* 197).

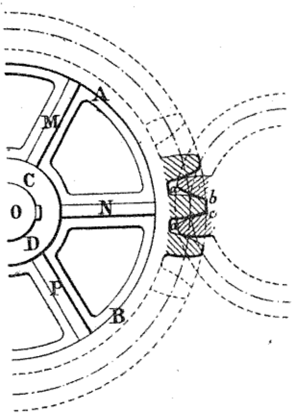


Fig. 197.

Les **dents** forment saillie *abcd* sur la **jante** AB, qui est reliée au **moyeu** CD claveté sur l'**arbre** O au moyen de quatre, six, ou huit **bras,** M, N, P ou d'une cloison appelée **toile** pour les roues de petites dimensions.

La circonférence du cylindre de friction qui assurerait la même transmission s'appelle **circonférence primitive ;** les **circonférences** qui limitent les dents extérieurement, *bc*, et intérieurement, *ad*, sont dites **d'échanfrènement et d'évidement.**

196. Définitions relatives aux dents. — La partie de la dent extérieure au **cylindre primitif** en est la **tête** *abcdefgh* (*fig.* 198); la partie intérieure de la dent *efghijkl* en est le **pied.** La tête est limitée par le **sommet** *abcd* et le pied par la **racine** *ijkl.*

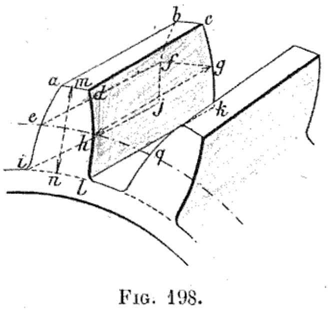


Fig. 198.

La **longueur** de la dent se mesure suivant une génératrice de cylindre *hg*, l'**épaisseur** suivant la circonférence primitive *eh*, et la **hauteur** *mn* suivant un rayon.

Entre deux dents consécutives se trouve un **creux** dont la largeur mesurée sur la circonférence primitive est égale ou légèrement supérieure à l'épaisseur de la dent.

Pas. — La distance eq mesurée sur la circonférence primitive des points analogues de deux dents consécutives se nomme le **pas** de l'engrenage. Il doit être le même pour des roues qui se conduisent. Il est égal à la circonférence primitive divisée par le nombre de dents de l'engrenage :

$$p = \frac{\pi d}{N} = \frac{2\pi R}{N},$$

p étant le pas, d le diamètre primitif, N le nombre de dents.

197. Notation diamétrale. Module. — C'est le diamètre primitif de l'engrenage divisé par le nombre de dents :

$$m = \frac{d}{N} = \frac{2R}{N}.$$

On le nomme encore **pas diamétral** par analogie au précédent appelé **pas circonférentiel.**

En comparant les deux formules de p et de m, on voit que

$$p = \pi m.$$

Des roues engrenant ont donc même module.

Depuis quelques années, tous les constructeurs, suivant l'exemple des Américains, notent les engrenages par le module, qui présente l'avantage de s'exprimer exactement sur le pas multiple du nombre π.

Les fabricants d'engrenages bruts de fonderie ou taillés possèdent des séries d'engrenages de modules courants 1, 1 1/4, 1 1/2, 1 3/4, 2, 2 1/4, etc., jusqu'à 20, ce qui facilite les rechanges.

La taille de la dent au-dessus du diamètre primitif est toujours égale au module.

La hauteur totale de la dent est égale au double du module augmenté de $\frac{1}{20}$ du pas pour le jeu diamétral :

$$h = 2m + \frac{p}{20}.$$

Dans les engrenages taillés, l'épaisseur de la dent est égale au creux, par suite à la moitié du pas, les roues tournent sans jeu.

La formule $m = \frac{d}{N}$ transformée devient :

$$d = m \,.\, N \qquad \text{ou} \qquad N = \frac{d}{m}.$$

Combinée à $p = \pi m$, elle permet de résoudre les problèmes simples, relatifs aux engrenages.

Exercices. — 1° *Une roue dentée de module* 8 *a* 50 *dents ; quel est son diamètre primitif, son pas, son diamètre extérieur ou d'échanfrènement ?*

Diamètre primitif :

$$d = mN = 8 \times 50 = 400 \text{ millimètres.}$$

Pas circonférentiel :

$$p = \pi m = 3{,}1416 \times 8 = 25^{mm}{,}1328.$$

Diamètre d'échanfrènement :

$$d' = d + 2m = 400 \text{ mm} + 16 \text{ mm} = 416 \text{ millimètres.}$$

2° *Calculer le module et le pas d'une roue de* 260 *millimètres de diamètre primitif et de* 52 *dents.*

$$m = \frac{260}{52} = 5.$$

$$p = \pi m = 3{,}1416 \times 5 = 15^{mm}{,}708.$$

198. Rapport des vitesses. — C'est le même que pour les roues de friction ; le rapport des vitesses angulaires ou des nombres de tours de deux roues se conduisant par engrenage est égal au rapport inverse des diamètres primitifs, n et n' étant les nombres de tours, N et N' les nombres de dents des roues.

On a donc :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n}{n'} = \frac{d'}{d} = \frac{mN'}{mN} = \frac{N'}{N}.$$

Le rapport des nombres de tours de deux engrenages est donc égal au rapport inverse des nombres de dents.

199. Sens de la rotation des arbres. — Quand les

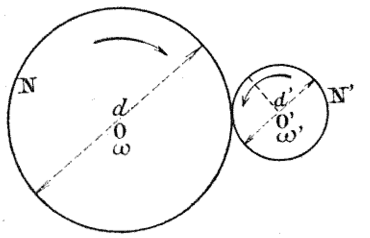


Fig. 199.

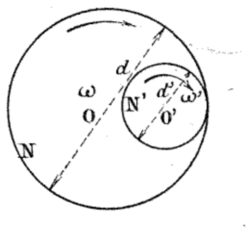


Fig. 200.

engrenages sont *extérieurs*, les deux arbres O et O′ tournent en sens inverse (*fig.* 199), le sens de rotation est le même pour des *engrenages intérieurs* (*fig.* 200-201). Ces derniers sont peu employés, car il faudrait leur donner de plus grandes dimensions pour une même distance d'axe des arbres et un même rapport de vitesse, et que, de plus, la roue ne peut pas porter de bras dans le plan médian de la denture, ce qui amoindrit sa résistance.

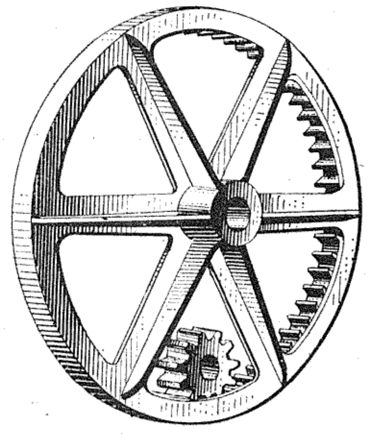


Fig. 201.

200. Emploi d'une roue intermédiaire. — C'est pourquoi, quand on désire une rotation de même sens des deux arbres avec des engrenages extérieurs, on utilise un troisième engrenage calé sur un arbre intermédiaire O″ (*fig.* 202).

Le rapport des vitesses des arbres extrêmes O et O′ n'est pas changé.

En effet, soient :

n, n', n'' les nombres de tours des trois arbres O, O′, O″;

N, N′, N″, les nombres de dents des engrenages correspondants.

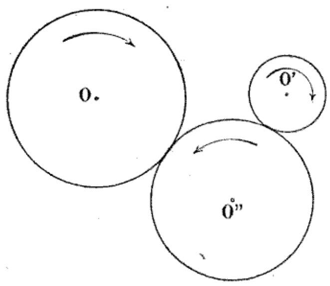


Fig. 202.

On a successivement :

$$\frac{n''}{n} = \frac{N}{N''}, \qquad \frac{n'}{n''} = \frac{N''}{N'},$$

et, en multipliant membre à membre ces deux proportions :

$$\frac{n'' \times n'}{n \times n''} = \frac{N \times N''}{N'' \times N'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{n'}{n} = \frac{N}{N'}.$$

Application. — *Une roue de* 40 *dents, module* 6, *fait* 120 *tours à la minute ; elle doit commander un pignon denté devant faire environ* 350 *tours.*

Le nombre de dents du pignon x est donné par :

$$\frac{350}{120} = \frac{40}{x}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{40 \times 120}{350} = 13{,}7;$$

il faudra donc prendre 13 dents ou 14 dents, ce qui donnera :

$$\frac{120 \times 40}{13} = 377 \text{ tours environ,}$$

ou

$$\frac{120 \times 40}{14} = 343 \text{ tours environ.}$$

La distance des axes sera pour des engrenages extérieurs :

$$OO' = mN + mN' = m\,(N + N') = 6\,(40 + 14),$$
$$= 6 \times 54 = 324 \text{ millimètres,}$$

si je prends l'engrenage de 14 dents, et

$$6 \times 53 = 318 \text{ millimètres,}$$

si j'adopte celui de 13.

201. Roues cylindriques. — Elles se font soit à **denture brute de fonderie** en fonte, en bronze, en acier coulé, en aluminium, soit à **denture taillée** à la fraise en fonte, en bronze, en fer, en acier forgé, cémenté, trempé, en bois, en cuir vert comprimé, en fibre.

Les premières s'emploient pour les transmissions pouvant supporter, avec quelques petites irrégularités dans la marche, le bruit produit par les pièces en mouvement, inconvénients négligeables quand la vitesse n'est pas trop grande.

Les secondes, qui tournent sans jeu, assurent un fonctionnement régulier et silencieux. Elles conviennent pour les grandes vitesses et les grands efforts à transmettre. Notons à ce sujet l'emploi de plus en plus fréquent de l'*engrenage d'acier*, qui, à cause de sa grande résistance, pèse moins que l'engrenage en fonte de même force. On le rencontre dans les machines-outils, où la nécessité d'obtenir un grand débit entraîne l'emploi d'aciers capables de passes de plus en plus fortes et par suite exige des dentures plus solides : les automobiles, les tramways, les treuils et les ponts roulants.

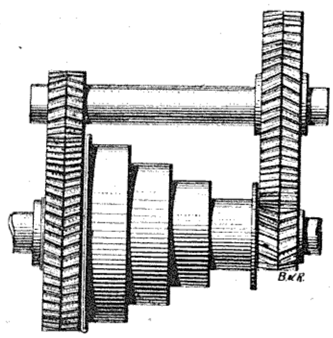


FIG. 203.

Les pignons *en cuir vert et en fibre*, très légers, d'un fonctionnement parfaitement silencieux, présentent un isolement complet au point de vue électrique et, marchant avec une roue métallique taillée, conviennent pour la commande directe des dynamos, les treuils électriques.

La denture des engrenages cylindriques peut être **droite** ou inclinée **hélicoïdale.** Cette dernière denture donne un engrènement plus continu, un roulement plus doux. La denture hélicoïdale simple est peu employée, car, en outre du frottement important des dents, nécessitant un graissage continu, elle engendre une poussée longitudinale qu'ils faut équilibrer par des embases.

Les engrenages **à chevrons** à double denture hélicoïdale (*fig.* 203), supprimant cette poussée, sont plus répandus. Ils conviennent pour les grandes vitesses et les grands efforts.

Leur étude détaillée se fera dans le deuxième volume.

202. Roues coniques. — Ce sont des cônes de friction armés de dents. Les cônes de friction qui les remplaceraient sont les cônes primitifs, ils doivent avoir **une génératrice commune** et **un sommet commun** (*fig.* 204) ; dans aucun cas on ne peut changer le rapport d'un couple conique sans changer les deux pignons, car il n'y a qu'une seule roue et un seul pignon pouvant marcher ensemble. Cela se conçoit pour la figure 205.

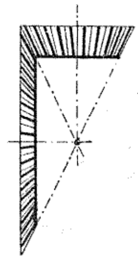


Fig. 204.

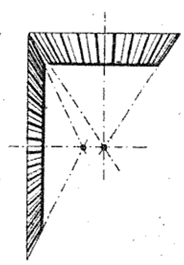


Fig. 205.

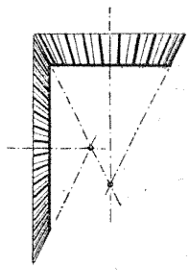


Fig. 206.

Dans le cas de la figure 206, l'engrènement serait tout au moins défectueux, car les faces et flancs des dents sont des surfaces coniques, dont les génératrices doivent aboutir au sommet des deux cônes, intersection des deux axes.

Quand les arbres reliés sont perpendiculaires, les engrenages sont dits **normaux** ; s'ils sont égaux, ils marchent à 45°.

Forme des dents. — L'avant et l'arrière des roues d'angles sont terminés par des cônes de tête intérieurs D, E, F, ou extérieurs B, G, H, normaux aux cônes primitifs (*fig.* 207 et 208). La

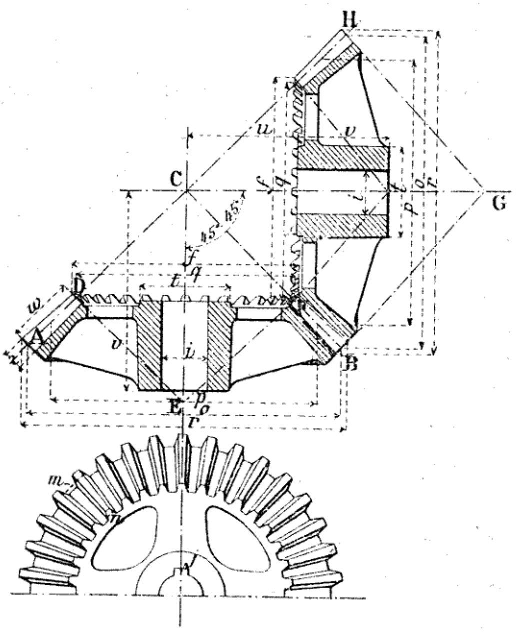


Fig. 207 et 208.

ACB, cône primitif.
DEF, cône de tête intérieur.
m, pas extérieur.
n, pas intérieur.
o, diamètre primitif extérieur.
p, diamètre primitif moyen.
q, diamètre primitif intérieur.
w, longueur des dents.
i, alésage.

CBH, cône primitif.
GBH, cône de tête extérieur.
j, rainure.
u, distance de la face du moyeu à l'axe.
v, longueur du moyeu.
z, hauteur des dents.
r, diamètre extérieur.
s, diamètre intérieur.
t, diamètre du moyeu.

taille de la dent se fait à la raboteuse, l'outil se déplaçant vers le sommet commun C des deux cônes, ou à l'aide de machines spéciales.

Quand les engrenages sont très grands, on fait le pignon à dents de fonte et la roue à dents de bois. Celles-ci sont enchâssées dans des trous rectangulaires de la jante en fonte et goupillées (*fig.* 209). Ces roues sont dites **à alluchons.**

Les engrenages coniques se font aussi à chevrons.

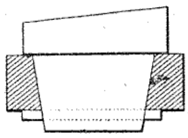


Fig. 209.

203. Équipages ou trains de roues dentées. — Quand le pignon commande la roue, il y a réduction de vitesse sur l'arbre mené ; quand au contraire c'est la roue qui commande le pignon, la vitesse de l'arbre mené est multipliée.

Mais cette réduction ou cette multiplication de vitesse ne peut guère dépasser $\frac{1}{12}$ ou 12 avec deux engrenages ; c'est pourquoi, lorsqu'on veut obtenir un rapport de vitesse $< \frac{1}{12}$ ou > 12, il est nécessaire d'employer un dispositif spécial. On l'utilise même pour des rapports compris entre $\frac{1}{12}$ et 12. On se sert alors d'arbres intermédiaires sur chacun desquels on cale deux roues, l'une menée, l'autre menante. Ces systèmes de roues forment ce que l'on appelle un **équipage ou un train d'engrenages.**

La **raison** de l'équipage est le rapport du nombre de tours de la dernière roue menée au nombre de tours de la première roue menante.

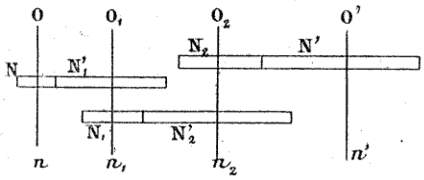


Fig. 210.

204. Rapport des vitesses. — *La raison d'un équipage de roues dentées est égale au produit du nombre de dents des roues menantes divisé par le produit des nombres de dents des roues menées.*

Soit l'équipage ci-contre, n, n_1, n_2, n', les nombres de tours respectifs des arbres O, O_1, O_2, O' ; N, N_1, N_2, les nombres de dents des roues ménantes ; N'_1, N_2', N', ceux des roues menées.

On a successivement pour les divers couples de roues :

$$\frac{n_1}{n} = \frac{N}{N'_1}, \qquad \frac{n_2}{n_1} = \frac{N}{N'_2}, \qquad \frac{n'}{n_2} = \frac{N_2}{N'}.$$

Multipliant membre à membre et simplifiant, il vient :

$$\frac{n'}{n} = \frac{N \times N_1 \times N_2}{N'_1 \times N'_2 \times N'}.$$

C. Q. F. D.

205. Applications. — 1° On trouve ces équipages de roues dentées dans les **tours à fileter.** On se donne le rapport des vitesses à obtenir, il faut déterminer les nombres de dents des engrenages à employer. Ce problème étant traité dans les cours d'arithmétique, nous le signalons seulement ;

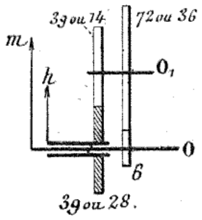


FIG. 211

2° Une question analogue est le problème de la **minuterie** (*fig.* 211). L'axe des minutes O étant concentrique intérieur à l'axe des heures O', il s'agit de transmettre le mouvement du premier au second avec une vitesse 12 fois moindre à l'aide d'un seul axe intermédiaire O_1.

On a :

$$\frac{n'}{n} = \frac{1}{12} = \frac{6}{72} \times \frac{1}{1} = \frac{6}{72} \times \frac{39}{39}$$

ou encore

$$\frac{n'}{n} = \frac{6}{36} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{36} \times \frac{14}{28}. \text{ etc.}$$

6 et 39 sont les roues menantes ou 6 et 14 ; 72 et 39 les roues menées ou 36 et 28.

On a pris 39 dents $= \frac{6 + 72}{2}$ ou 14 et 28 dents ($14 + 28 = 6 + 36$) pour que toutes ces roues aient le même pas, le même module (ce n'était pas nécessaire). La distance des axes O, O_1 est égale à $(6 + 72)\,m$, m étant le module.

3° Ces équipages de roues dentées se rencontrent dans les tours : **double harnais** d'engrenages des cônes de vitesses (*fig.* 203) doublant le nombre des vitesses que l'on pourrait obtenir avec les cônes seuls, dans les **changements de vitesse** d'automobile (engrenages droits ou coniques).

206. Treuil à engrenages. — Il se compose de deux flasques verticaux maintenus équidistants par trois entretoises E, d'un arbre O sur lequel s'exerce l'action de la manivelle et qui porte un pignon engrenant avec une roue dentée calée sur le tambour O′ ; sur ce tambour s'enroule la corde remontant la charge Q.

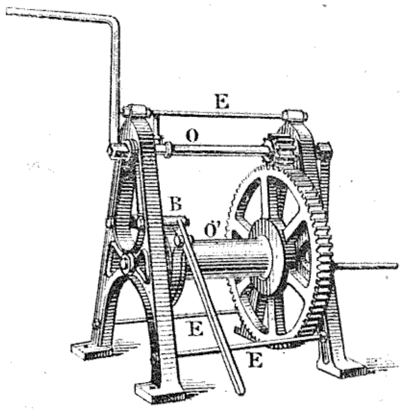


FIG. 212.

Un frein B évite la descente rapide du fardeau en cas de diminution de la puissance et, par suite, les dangers résultant d'une rotation rapide des manivelles.

Le treuil décrit (*fig.* 212) est à **simple engrenage.** On peut augmenter sa puissance en commandant le tambour par un double harnais d'engrenages disposés sur trois axes parallèles, on réalise le treuil à **double engrenage.**

207. Condition d'équilibre du treuil. — Considérons d'abord le treuil à *simple engrenage* (*fig.* 213). Les organes tournant autour de l'axe O′ sont soumis à la charge Q et à la réaction F′ du pignon O sur la roue O′ qui le sollicite à tourner. Pour l'équilibre du corps autour de O′, il faut que les moments de Q et de F′ soient égaux et contraires :

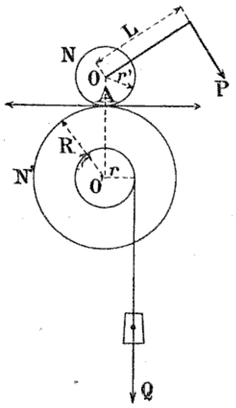


Fig. 213.

$$(1) \qquad F'R = Qr.$$

Le système tournant autour de l'axe O est sollicité par la puissance et l'action F de la roue sur les dents du pignon. F est égal et contraire à F′. Pour l'équilibre, on doit avoir

$$(2) \qquad PL = Fr'.$$

De (1) on tire

$$F' = Q\frac{r}{R};$$

portant sa valeur dans (2), il vient :

$$(3) \qquad PL = Q\frac{rr'}{R} \qquad \text{ou} \qquad P = Q\frac{rr'}{LR}.$$

Pour réduire la puissance, il faut diminuer r et r' et augmenter R et L. Le rayon du tambour ne doit pas être trop petit, car on augmenterait la résistance à l'enroulement de la corde ; L ne peut dépasser 45 centimètres ; on ne peut donc réduire que le rapport $\frac{r'}{R}$ que l'on fait ordinairement égal à $\frac{1}{5}$.

Le rapport $\frac{r'}{R} = \frac{N}{N'}$, rapport des nombres de dents du pignon et de la roue, la formule (3) peut s'écrire :

$$P = Q \times \frac{r}{L} \times \frac{N}{N'}.$$

Application numérique. — Si Q = 250 kilogrammes, $r = 80$ millimètres, L = 400 millimètres, N = 16, N′ = 64, l'effort nécessaire P sera :

$$250 \times \frac{80}{400} \times \frac{16}{64} = \frac{250}{20} = 12^{kg},5.$$

Pour un treuil à *double engrenage* (*fig.* 214), la condition d'équilibre s'obtient en substituant à la raison du couple d'engrenages $\frac{N}{N'}$, la raison du double harnais $\frac{N \times N_1}{N'_1 \times N'}$:

$$P = Q \cdot \frac{r}{L} \cdot \frac{NN_1}{N'_1N'}.$$

APPLICATION NUMÉRIQUE. — $Q = 1.250$ kilogr., $r = 80$ millimètres, $L = 400$ millimètres, $N = 16$, $N_1 = 20$, $N'_1 = 100$, $N' = 64$.

$$P = 1.250\,\text{kg} \times \frac{80}{400} \times \frac{16 \times 20}{100 \times 64} = \frac{1.250}{100} = 12^{kg},5.$$

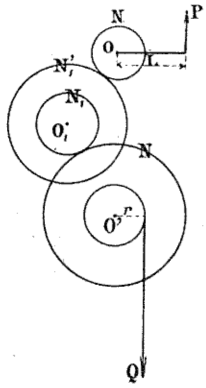


FIG. 214.

Rapport des chemins parcourus. — Pour un tour de la manivelle, le tambour O' fait $\frac{N}{N'}$ ou $\frac{NN_1}{N'_1N'}$ tours, suivant que le treuil est à simple ou double engrenage ; les chemins parcourus par la puissance et la résistance sont donc respectivement :

$$2\pi L \quad \text{et} \quad 2\pi r \frac{N}{N'} \quad \text{ou} \quad 2\pi r \frac{NN_1}{N'_1N'}.$$

En multipliant le premier chemin par P, le deuxième par Q, on obtient les travaux moteur et résistant pour un tour de la manivelle, on constate qu'ils sont égaux :

$$2\pi LP = 2\pi L \times Q \frac{r}{L} \frac{NN_1}{N'_1N'} = Q \times 2\pi r \frac{NN_1}{N'_1N'},$$

ce qui est conforme à la théorie des machines simples.

Applications des treuils. — Dans les grues, on utilise le treuil à double engrenage, la manivelle est remplacée par une poulie motrice dont l'effort tangentiel est la puissance ; la corde passe ensuite sur une poulie fixe placée à l'extrémité d'un grand bras qui peut tourner avec la plate-forme de la grue, le fardeau est accroché à la chape d'une poulie mobile.

208. Roues et vis sans fin. — On munit l'arbre menant d'une vis; sur l'arbre mené, rectangulaire avec le premier, on cale une *roue hélicoïdale* dont l'inclinaison des dents est égale à celle du *filet* de la vis sur son axe. La vis coupée longitudinalement en deux présente le profil d'une crémaillère engrenant avec la roue. Le pas de la vis est égal à celui de la roue.

Si la vis est à simple filet, un tour complet de celle-ci fera tourner la roue d'une dent, par suite de $\frac{1}{N}$ tour, si N est le nombre de ses dents.

Si la vis est à filets multiples N', pour un tour de la vis, la roue tourne de N' dents ou de $\frac{N'}{N}$ tours.

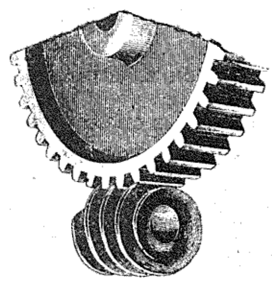


Fig. 215.
Roue à denture droite, Piat.

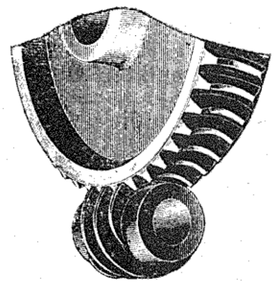


Fig. 216.
Roue à denture creuse, Piat.

Au lieu de faire la roue à denture **droite**, on peut lui donner une forme **creuse** en lui faisant embrasser la vis sur une plus grande étendue ; on peut ainsi transmettre de plus grands efforts; mais, le frottement augmentant, le graissage doit être plus copieux.

Emploi. — Ces vis sans fin peuvent être employées comme *réducteurs de vitesse* pour dynamos par exemple. Comme ce dispositif est **irréversible**, c'est-à-dire que la roue ne peut commander la vis, on l'emploiera chaque fois qu'il est nécessaire qu'une résistance agissant par l'intermédiaire de la roue sur la vis n'entraîne pas la rotation de celle-ci. Il en est ainsi pour les vannes, les grues, les treuils (treuil à vis sans fin). Dans ces appareils de levage, la vis étant un fort réducteur de vitesse, réduira également la puissance, elle permettra de soulever de **très lourdes charges avec de faibles puissances**, mais la montée des fardeaux s'effectuera très lentement.

209. **Equilibre du treuil à vis sans fin.** — Sur le tambour T est calée une roue dentée R actionnée par une vis sans fin V fixée sur l'axe O mû par une manivelle de rayon L. Le tambour est en équilibre sous l'action de la charge Q et de l'action F' de la vis sur la denture de la roue; on a donc :

(1) $$F'R = Qr.$$

La vis est soumise à la réaction F de la roue dentée et l'action de la puissance est en équilibre lorsque :

(2) $$P \times 2\pi L = Fp;$$

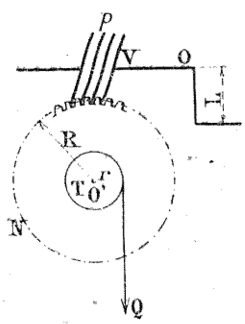


FIG. 217.

p est le pas de la vis.

Pour éliminer $F = F'$, tirons sa valeur de (1) et portons-la dans (2), il vient :

$$P \times 2\pi L = \frac{Qrp}{R}, \qquad \text{d'où :} \qquad P = Q\,\frac{rp}{2\pi LR}.$$

Si la vis est à simple filet et si N est le nombre de dents de la roue,

$$P = Q\,\frac{r}{2\pi LN}.$$

En faisant $r = 80$ millimètres, $L = 400$, $N = 50$, on a :

$$P = Q \times \frac{80}{6{,}28 \times 400 \times 50} = \frac{Q}{1.570};$$

si le rendement n'est que de 50 0/0 :

$$P' = \frac{P}{1.570} \times \frac{100}{50} = \frac{Q}{785}.$$

210. Compteurs de tours. — On distingue les compteurs à **roues droites,** les compteurs à **roue et vis sans fin :** roue **unique** ou roues **différentielles.**

1° **Compteur à roues droites** (*fig.* 218). — Il est constitué par une boîte rectangulaire dont une des faces est percée de trous où apparaissent successivement les dix chiffres de chaque cadran. Ces cadrans sont calés sur des axes qui se communiquent leur mouvement de l'un à l'autre par de petites roues dentées dont le rapport des nombres de dents égale $\frac{1}{10}$, 10 et 100 dents par exemple. Le premier axe devant compter les nombres de tours reçoit son impulsion d'un rochet relié à un levier qui fait avancer la roue du premier cadran, portant 10 dents, de 1 dent.

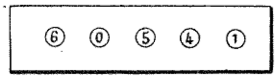


Fig. 218 *a*.

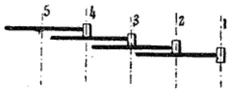


Fig. 218 *b*.

Par suite, le premier cadran indiquera les unités, le deuxième les dizaines, le troisième les centaines, le quatrième les milliers, le cinquième, les dizaines de mille.

On l'utilise tel qu'il est décrit pour compter les nombres de tours des arbres des moteurs. En munissant les axes d'aiguilles mobiles sur des cadrans gradués fixes, on l'emploie dans les compteurs électriques, les compteurs à gaz, etc.

2° **Compteur à roue et vis sans fin** (*fig.* 219-220). — Ce compteur,

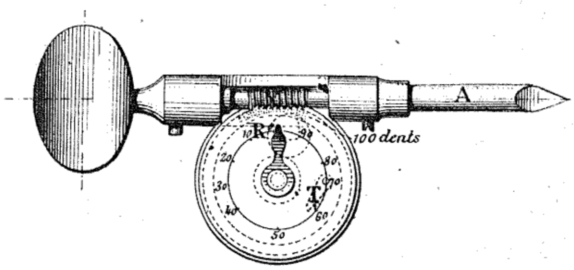


Fig. 219.

portatif parce que peu volumineux, se compose d'une tige cylindrique A terminée par une pointe triangulaire pouvant s'appliquer sur tout arbre tournant. La tige porte une vis sans fin V engrenant avec une roue à denture creuse R de 100 dents.

Un tour de la vis entraîne donc $\frac{1}{100}$ de tour de la roue ; une aiguille solidaire de cette roue compte les tours sur le cadran divisé en 100 parties égales. A chaque tour de cette roue, un taquet T déclanche un ressort à levier portant un marteau qui vient frapper sur le timbre.

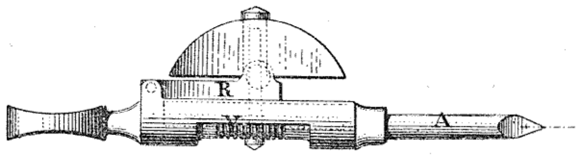


FIG. 220.

La sonnerie permet de compter les centaines de tours.

Ce compteur, très simple de construction, est employé dans les essais de moteurs. On évalue leur vitesse en comptant le nombre de tours pendant un temps donné mesuré avec une montre à secondes.

Compteur à roues différentielles. — La vis sans fin de la tige A commande deux roues dentées juxtaposées ayant respectivement 100 dents et 99 dents. La première roue compte les tours jusqu'à 100, la deuxième compte les centaines de tours, elle n'avance en effet que de $\frac{100 - 99}{100} = \frac{1}{100}$ de tour par rapport à la première. Au commencement de l'expérience, les 0 des deux roues doivent être en face d'un index fixe sur la monture.

XX. — CIRCULAIRE CONTINU EN RECTILIGNE CONTINU

211. Crémaillère et pignons dentés. — Sur l'arbre menant on cale un pignon denté qui engrène avec la crémaillère constituée par la tige à conduire armée de dents. La crémaillère peut être considérée comme une roue à rayon infiniment grand dont la circonférence primitive est la droite tangente à la circonférence primitive du pignon. Le pas de la crémaillère est compté sur cette droite primitive. Il est le même que celui du pignon. Par suite les modules sont aussi égaux.

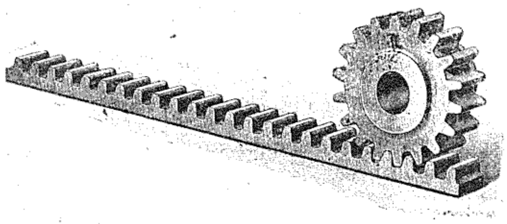


Fig. 221.

Ce dispositif est employé :

a) Dans les tours pour le **retour rapide** du chariot : celui-ci est solidaire du pignon qui, en tournant sur la crémaillère fixe montée sur le banc, déplace parallèlement le chariot ;

b) Dans les raboteuses : la crémaillère solidaire du plateau est entraînée par le pignon, qui ne peut que tourner sur son axe fixe ;

c) Dans les bobinoirs pour transmettre le mouvement de la came au guide-fil ;

d) Dans les tramways à crémaillère pour gravir de fortes rampes (funiculaire de Laon, de Langres, etc.). Le pignon solidaire de la voiture roule sur la crémaillère fixe ;

e) Dans la commande des vannes.

212. Cric. — C'est un appareil de levage constitué par une cremaillère C à la tête élargie pour recevoir la charge, qui, par l'intermédiaire d'un pignon denté O' et de un ou deux couples d'engrenages (cric à **simple ou double engrenage**), reçoit l'action d'une manivelle. Sauf celle-ci, ces différents organes sont enfermés dans une boîte très résistante entièrement métallique pour les grosses forces (*fig.* 222).

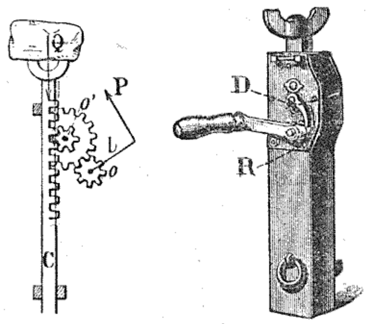


Fig. 222 et 223.

Un **cliquet** s'engageant sur une **roue à rochet** calée sur l'arbre de la manivelle empêche toute descente de la charge.

213. Rapport des chemins parcourus par la poignée de la manivelle et la tête de la crémaillère. — Soient :

> l, le rayon de la manivelle ;
> N, N_1, le nombre de dents des pignons O et O_1 ;
> N', le nombre de dents de la roue O' ;
> p, le pas de la crémaillère.

Pour un tour complet de la manivelle, la roue O_1 tourne de N dents, soit $\frac{N}{N'}$ tour. Il en est de même du pignon O'. La crémaillère avance donc de :

$$p \times N_1 \times \frac{N}{N'} = \frac{pNN_1}{N'} ;$$

p étant petit, on voit que cette avance est très faible comparativement au chemin parcouru par la manivelle. En faisant abstraction du frottement et écrivant que le travail moteur est égal au travail résistant, on a :

$$\mathrm{P} \times 2\pi l = \mathrm{Q} \times p \frac{\mathrm{NN}_1}{\mathrm{N}'},$$

d'où

$$\mathrm{P} = \mathrm{Q} \times \frac{p\mathrm{NN}_1}{2\pi l\mathrm{N}'}.$$

Avec un faible effort, on pourra soulever de lourdes charges ou exercer de fortes pressions ; mais le déplacement sera léger.

Application numérique. — Soient $\mathrm{N} = 4$, $\mathrm{N}_1 = 5$; $\mathrm{N}' = 36$, $l = 0^{\mathrm{m}},25$, $p = 20$ millimètres. L'effort à exercer sur la manivelle pour soulever une charge de 8.000 kilogrammes sera :

$$\mathrm{P} = \frac{8.000 \times 20 \times 4 \times 5}{2 \times 250 \times 3{,}14 \times 30} = 8^{\mathrm{kg}},5,$$

et en supposant un rendement de 60 0/0 :

$$\mathrm{P} = \frac{8^{\mathrm{kg}},5 \times 100}{60} = 14^{\mathrm{kg}},17.$$

214. Vis et écrou. — La vis est un cylindre sur la surface duquel on a pratiqué un sillon régulier, continu et *hélicoïdal*, laissant une saillie de même courbe appelée **filet.** Le **noyau** de la vis est le cylindre tangent à la rainure, par suite non entamé par l'outil, et sur lequel s'enroule en hélice le filet. Celui-ci peut être **triangulaire :** vis d'assemblages, petites vis pour transformation de mouvement ; **carré :** vis de presse, vis mère de tour pour transmettre des pressions parallèles à l'axe de la vis dans les deux sens ou pour les grosses vis de fixation ; **trapézoïdal :** pour exercer une pression longitudinale dans un seul sens ou amortir une poussée de direction constante : pressoir, fermeture de culasse des canons; **rond,** qui remplace avantageusement le filet carré parce que plus solide, mais qui est plus difficile à obtenir; son emploi est réservé aux pièces spéciales dont la construction doit être soignée : matériel de guerre, tendeur d'attelage des wagons.

La vis peut être à plusieurs rainures, par suite à **plusieurs filets.** Dans tous les cas, le **pas** de la vis est celui de l'hélice des sillons. Il se mesure comme sur les figures pour les différents filetages quand la vis est à simple filet; il suffit de multiplier ces longueurs par le nombre de filets pour obtenir le pas d'une vis à filets multiples.

La vis est dite **à droite** ou **à gauche** suivant que le filet monte vers la droite ou vers la gauche quand on regarde le boulon vertical.

La vis est fabriquée sur le **tour parallèle** en combinant le mouvement de rotation de la pièce et la translation de l'outil.

L'**écrou** est le bloc troué présentant en creux le profil de la vis en relief, c'est le moule de la vis.

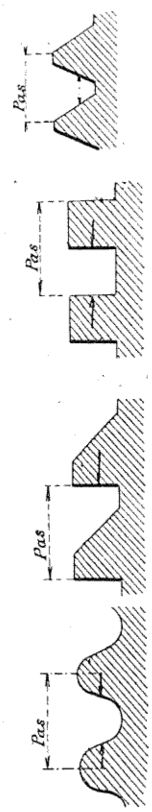


Fig. 224 à 227.

215. Rapport des vitesses de la vis et de l'écrou.

— Le *système vis et écrou* produit le mouvement *hélicoïdal* ou les deux mouvements composants de celui-ci : *rotation et translation, mais simultanément*, c'est-à-dire que l'un ne peut se produire sans l'autre. De plus, à chaque instant, les vitesses de rotation et de translation sont *proportionnelles*.

Une rotation de un tour entraîne un déplacement parallèle à l'axe égal au pas de la vis.

Dans une presse à copier de pas 10 millimètres, deux tours de la vis la feront descendre de :

$$10 \text{ mm} \times 2 = 20 \text{ millimètres.}$$

Plus le pas sera grand (vis à filet multiple), plus la translation sera rapide, et inversement : vis micrométriques.

216. Transformation de mouvements. — La simultanéité des mouvements rectiligne et circulaire permet quatre combinaisons, selon le ou les organes mobiles.

1° *L'écrou est fixe.* — Le mouvement circulaire de la vis détermine le mouvement rectiligne de celle-ci. Le contraire n'a presque jamais lieu à cause des frottements, à moins que le pas ne soit très allongé. Ex. : vis de pression, balancier pour la frappe des monnaies, direction irréversible pour automobile.

2° *La vis est fixe.* — L'écrou tourne et avance. Ex. : serrage des écrous.

3° *La vis ne peut que tourner.* — L'écrou avance ou recule selon le sens de la rotation. Ex. : le chariot d'un tour parallèle constitué par un demi-écrou qui se déplace sur la vis mère. La vis d'Archimède formée d'une tôle en hélice fixée sur un arbre tournant dans une auge cylindrique, entraîne les matières pulvérulentes, les graines (*fig.* 228).

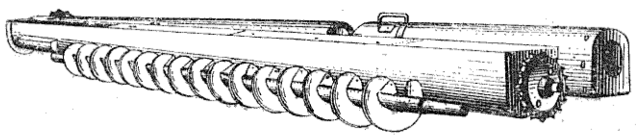


Fig. 228.

4° *L'écrou ne peut que tourner.* — La vis avance ou recule. Ex. : descente du foret des machines à percer, clé anglaise.

217. Presse à vis et vérin. — La presse à vis se compose de deux plateaux parallèles, l'un fixe, l'autre relié à une vis qui, en tournant dans le taraudage d'un sommier fixe, peut comprimer les objets placés entre eux. La puissance s'exerce aux extrémités du levier de la tête de la vis ou est donnée par des plateaux de friction (presses à estamper). En inclinant très faiblement le filet de la vis, on évite la remontée de la vis quand la résistance est très grande.

Le **vérin** est un appareil de levage qui permet de déplacer légèrement de lourdes charges ou de les maintenir : vérin pour le centrage des grosses pièces sur le tour, ou pour le décintrage des voûtes. Il comprend essentiellement un support en fonte percé d'un trou en son milieu pour le passage de la vis. Celle-ci tourne et avance dans le taraudage de ce trou, si elle reçoit directement l'action de la puissance par des leviers traversant sa tête ou par un cliquet (*fig.* 230). Sinon elle progresse dans l'écrou qui, recevant l'action motrice, ne peut que tourner autour de son axe.

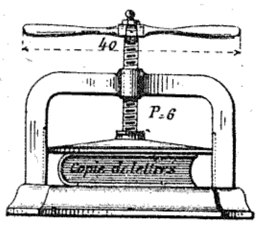


FIG. 229.

FIG. 230

218. Calcul de la pression. — Soient P la puissance s'exerçant à l'extrémité du levier de bras l, Q la résistance des corps à comprimer de la presse ou la charge à soulever du vérin.

Si nous faisons abstraction du frottement, les travaux moteurs et résistants sont égaux pour l'équilibre ; évaluons-les pour une révolution de la vis.

$$T_m = P \times 2\pi l, \qquad T_r = Q \times p.$$

Nous avons donc :

$$P \times 2\pi l = Q \times p,$$

d'où :

$$Q = P \times \frac{2\pi l}{p}.$$

Telle est la valeur de la pression exercée ou de la charge soulevée avec un effort P.

On voit que *cette pression augmente avec la grandeur du bras de levier et la petitesse du pas, elle est indépendante du rayon de la vis.*

Dans les appareils de levage ou de pression, il ne faut donc employer que des vis à simple filet.

Application numérique.— $P = 20$ kilogrammes, $p = 10$ millimètres, $l = 0^m,30$. On a :

$$Q = \frac{20 \text{ kg} \times 2 \times 3,14 \times 300}{10} = 3.768 \text{ kilogrammes.}$$

219. Vis différentielle de Prony.— Elle permet de régler la position relative de deux pièces avec une grande précision. Elle porte deux filetages de même sens et de pas très peu différents, $p > p'$. Soit à régler la pièce mobile B par rapport à l'organe A fixe. Un tour à droite de la vis fait rapprocher l'écrou B de p'; mais la vis pénètre dans A de p, de sorte qu'en réalité l'écrou B s'est éloigné de A de $p - p'$. En tournant à gauche, on obtient le rapprochement réel de B. Un $\frac{1}{n}$ de tour déterminerait un déplacement relatif de $\frac{p - p'}{n}$ très petit.

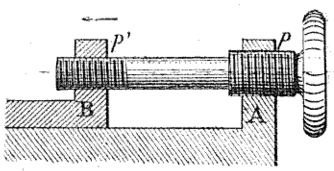


Fig. 231.

Avec cette vis, on pourrait exercer de fortes pressions sur des corps placés entre B et A.

Le blocage des écrous peut se faire d'une manière analogue, le contre-écrou est taraudé à un pas plus petit que celui de l'écrou.

220. Vis à pas contraires.— Lorsqu'une vis présente deux filetages, l'un à droite, l'autre à gauche, une révolution complète détermine un éloignement ou un rapprochement des deux écrous égal à la somme des pas des deux filets selon

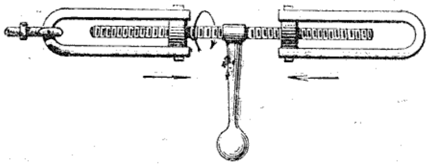


Fig. 232.

le sens de la rotation. On utilise cette propriété dans les tendeurs, l'irréversibilité du système empêchant le desserrage, dans les freins, les embrayages à friction.

XXI. — CIRCULAIRE CONTINU EN RECTILIGNE ALTERNATIF

Cette transformation du CC en RA peut s'effectuer soit à l'aide d'une bielle et d'une manivelle, d'un excentrique circulaire, d'une manivelle à coulisse ou de cames.

Manivelles

221. Bielle et manivelle. — Le procédé le plus simple pour transformer le mouvement CC d'un arbre en RA d'une tige est le système bielle et manivelle. On cale sur l'arbre une manivelle dont le **rayon** : *distance de l'axe du moyeu à celui du bouton, est égal à la moitié de la course* de la tige à produire. La bielle est articulée par ses deux têtes avec le bouton, d'une part, et l'extrémité de la tige à conduire, d'autre part. Cette tige est guidée par un coulisseau, un fourreau, des presse-étoupes.

222. Représentation graphique de la loi des espaces parcourus par l'extrémité de la bielle. — Supposons l'arbre animé d'un mouvement de *rotation uniforme* faisant n tours à la minute, la tige fera dans le même temps n allers et retours, la course sera :

$$B_0B_8 = 2R.$$

Partageons la circonférence en 16 parties égales, les arcs obtenus A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{15}A_0$ sont parcourus pendant le même temps $\frac{1}{16}$ de la durée d'une révolution. De ces points, comme centre, avec la longueur de la bielle (distance des axes des coussinets des deux têtes) comme rayon, traçons des arcs qui coupent la droite B_0B_8 en des points $B_1, B_2, \ldots, B_7$ figurant la position de la tête B de la bielle.

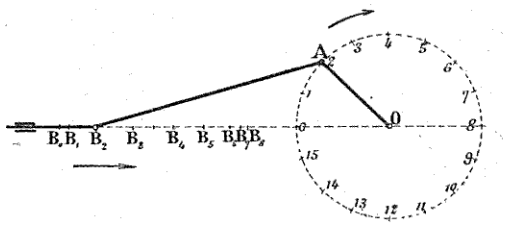


Fig. 233.

Pour représenter le mouvement alternatif, il suffit de porter sur l'axe des temps une longueur représentant la durée d'une révolution, de la diviser en 16 parties égales et de porter en ordonnées les chemins parcourus B_0B_1, B_0B_2, ..., aux points 1, 2, ...

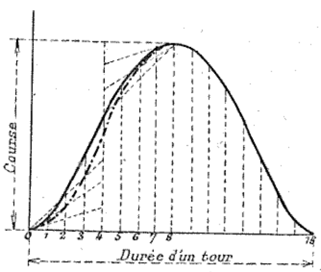


Fig. 234.

A l'inspection de la courbe obtenue, on voit que le mouvement est *accéléré, puis retardé*, mais pas uniformément, parce que la courbe n'est pas formée de deux arcs de parabole (trait mixte). La vitesse, nulle en B_0, croît jusque vers le milieu de sa course pour diminuer à 0 en B_8 et changer de sens.

223. Application aux pompes. — On peut commander le piston d'une pompe par un système bielle et manivelle.

L'arbre O tournant uniformément, le mouvement du piston sera *accéléré, puis retardé :* on évitera ainsi des chocs aux fins de course.

Evaluons maintenant l'*effort tangentiel* qu'il faut exercer sur le bouton de la manivelle pour actionner une pompe **à double effet** par exemple, le piston de celle-ci devant vaincre une résistance Q de la part de l'eau. Prenons une position quelconque AB de la bielle. Celle-ci est sollicitée à ses deux extrémités, en A par l'effort tangentiel AF, en B par la résistance BQ; AF se décompose en deux : AF″ comprimant la manivelle et AF′ tirant la bielle; BQ se décompose de même en : BN, pression normale sur la glissière supérieure,

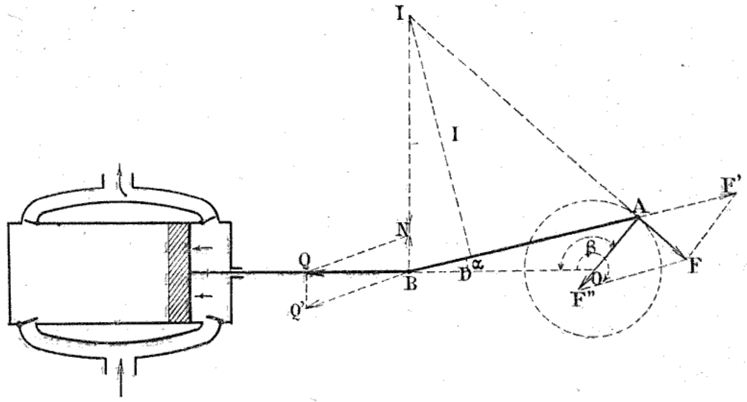


Fig. 235.

et BQ′ tirant la bielle. Les composantes AF″ et BN sont équilibrées par la résistance moléculaire des glissières et de la manivelle. BQ′ et AF′ doivent se faire équilibre. Pour trouver graphiquement la valeur de la force AF, il suffit donc de porter AF′ = BQ′ dans la direction de la bielle et de mener F′F parallèle à la manivelle. AF est, à l'échelle des forces, la force cherchée. Cette force varie à chaque instant selon l'obliquité de la bielle. Evaluons le rapport $\frac{F}{Q}$.

Prolongeons AF jusqu'à sa rencontre avec la perpendiculaire BI à la tige du piston et abaissons ID perpendiculaire sur la bielle AB.

Les triangles AFF′ et IAD, rectangles semblables, donnent :

$$\frac{AF}{AF'} = \frac{ID}{IA}.$$

De même QQ′B et IBD, semblables, fournissent la proportion :

$$\frac{BQ'}{BQ} = \frac{IB}{ID}.$$

Multipliant membre à membre ces proportions et remarquant que $AF' = BQ'$, on tire :

$$\frac{AF}{BQ} = \frac{IB}{IA}.$$

En construisant le quadrilatère OAIB déformable pour diverses positions de la bielle et de la manivelle, on voit que le rapport est *maximum* quand la bielle est perpendiculaire à la manivelle.

On pouvait encore évaluer le rapport $\frac{F}{Q}$ en fonction des angles α et β que font la bielle et la manivelle avec BO. Le triangle FAF' donne :

$$F = AF' \cos FAF' = AF' \sin BAO = AF' \sin(180 - \alpha - \beta) = AF' \sin(\alpha + \beta).$$

De même :

$$Q = AQ' \cos\alpha, \quad \text{d'où} \quad \frac{F}{Q} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha}.$$

Remarque. — La bielle et la manivelle sont alternativement tendues et comprimées selon leur position relative. On s'en rend compte facilement en figurant la position symétrique de celle de la figure.

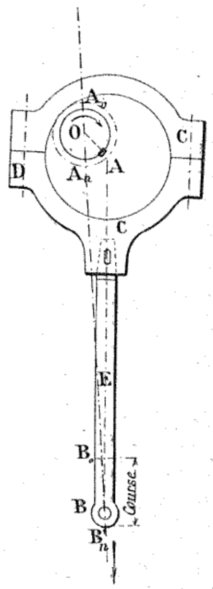


Fig. 235 *bis*.

224. Excentrique circulaire à collier. — C'est un organe de machines qui remplace à la fois la bielle et la manivelle. Il comprend : 1° un **disque excentré** A calé sur l'arbre menant O : c'est la manivelle; le rayon de la manivelle, nommé **excentricité**, est la distance du centre du disque (bouton) au centre de l'alésage ; 2° deux **demi-colliers** C embrassant le disque comme les coussinets de la bielle le maneton, réunis par des boulons traversant leurs oreilles D. L'un d'eux est assemblé à la **barre** d'excentrique E (corps de bielle), dont l'autre extrémité est articulée à la tige à conduire. On voit donc que le mouvement sera le même que précédemment. La course alternative de la tige sera égale à deux fois le rayon de manivelle ou l'excentricité :

$$B_0B_n = 2OA.$$

A cause du frottement assez grand des colliers sur le disque (on cherche à le diminuer en lubrifiant abondamment les grandes surfaces cylindriques de contact et en faisant les colliers en bronze), l'excentrique n'est employé que pour produire de très petites courses, pour commander les tiroirs de distribution par exemple.

De plus, ce mécanisme est **irréversible,** c'est-à-dire que le RA de la tige n'entraîne pas le CC de l'arbre.

225. Manivelle à coulisse. — La tige à conduire T est munie d'une coulisse C qui lui est perpendiculaire. Le bouton de la manivelle ordinaire calée sur l'arbre menant O glisse dans la coulisse, presse sur les parois de celle-ci et transforme le CC de l'arbre en RA de la tige. La courbe des espaces du mouvement serait facile à tracer, la position du mobile étant à chaque instant la projection sur la tige du bouton de la manivelle. On verrait que le mouvement est accéléré, puis retardé; la vitesse, nulle aux extrémités de la course, est maximum au milieu.

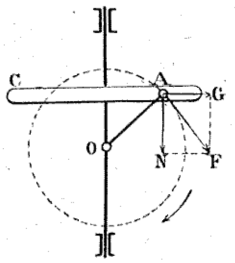


Fig. 236.

Examinons maintenant comment se répartit l'effort tangentiel AF du bouton sur la coulisse; il se décompose en deux : AN, pression sur la coulisse communiquée à la tige T, et AG, qui entraîne le bouton dans la coulisse.

On emploie ce dispositif pour transmettre de petits efforts. Il est d'ailleurs réversible; la tige peut commander la manivelle et l'arbre O sur lequel elle est calée. On la rencontre pour cet usage dans de petits moteurs à vapeur; la coulisse est constituée par deux sommiers entretoisés et réunis par des boulons, l'un est relié à la tige du piston à vapeur, le deuxième porte un piston plongeur pour la pompe alimentaire; deux coussinets glissant dans la coulisse embrassent le tourillon de l'arbre-vilebrequin de la machine.

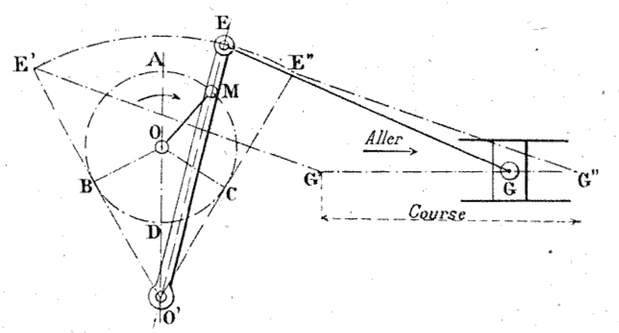


Fig. 237.

La manivelle OM, au lieu d'agir sur une coulisse se déplaçant parallèlement à elle-même, peut actionner une coulisse O'E oscillant ou tournant autour d'un axe fixe O'

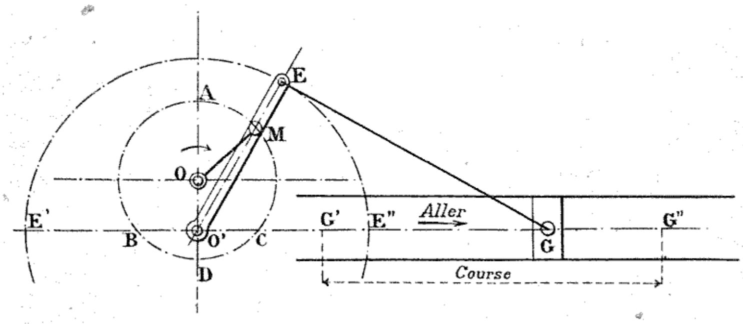


Fig. 238.

(*fig.* 237 et 238). Une bielle EG articulée en E au cadre, en G au coulisseau guidé par une glissière dans son mouvement rectiligne, transforme le CA ou CC de la coulisse en RA du coulisseau.

En supposant que le coulisseau se déplace perpendiculairement à OO′, sa course GC′ est égale à E′E″, distance des deux positions extrêmes du bouton de la coulisse tangentes à la circonférence décrite par le maneton M de la manivelle pour la figure 237, double du rayon O′E du cadre dans le deuxième cas de figure.

De plus, si nous admettons que la manivelle tourne d'un mouvement **uniforme,** l'aller du coulisseau s'effectuant pendant que le maneton M décrit l'arc BAC et le retour durant le parcours de l'arc CDB, **les durées respectives de l'aller et du retour sont proportionnelles aux arcs BAC et CDB.** Ce dernier arc CDB étant plus petit que BAC, le retour s'effectuera plus **rapidement** que l'aller.

Plus le point O′ d'oscillation de la coulisse sera rapproché du point D, plus le retour s'effectuera rapidement.

Dans le cas particulier où $OO' = 2OD$ (*fig.* 237) ou $OO' = \frac{OD}{2}$ (*fig.* 238), l'angle $BOC = 120°$, l'arc $\overset{\frown}{BAC} = 2\overset{\frown}{CBD}$, le retour est deux fois plus rapide que l'aller.

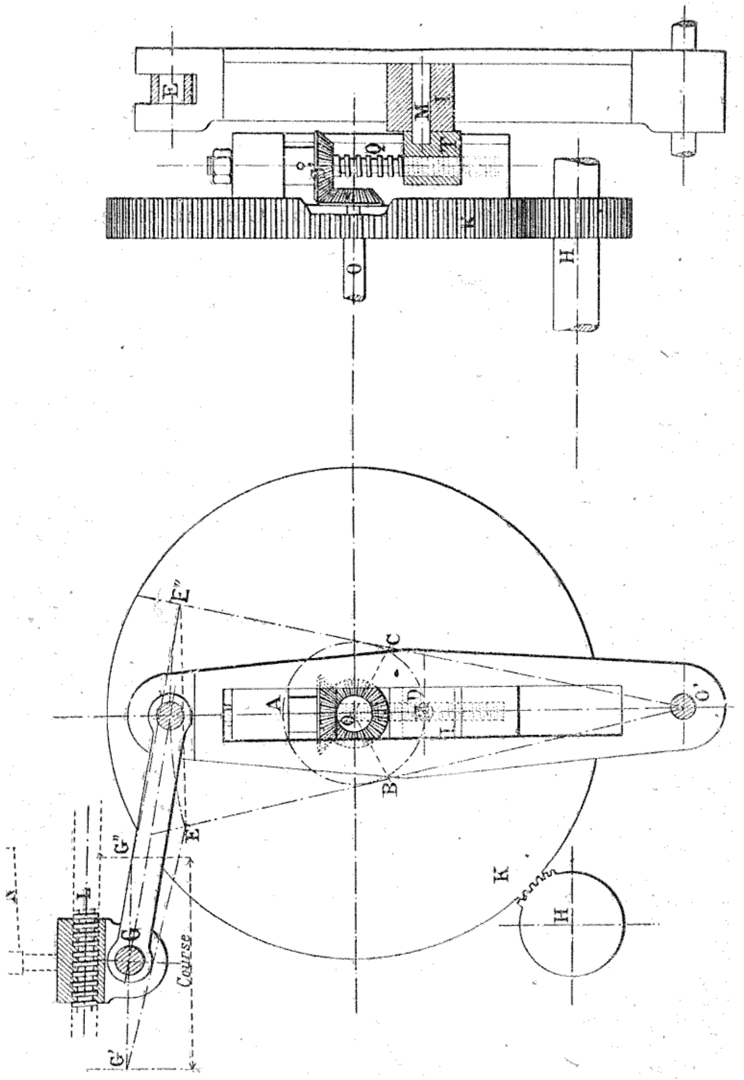
On utilise ce dispositif dans les machines-outils, le travail de l'outil s'effectue pendant l'aller, et le retour est rapide.

La figure 239 représente le mécanisme de retour rapide d'un **étau limeur.** La manivelle est formée par l'engrenage K recevant son mouvement de l'arbre H de l'étau limeur et par le maneton M embrassé par le coussinet I qui glisse dans la coulisse. Celle-ci est reliée à l'écrou G par une bielle G. La tige filetée I, solidaire du chariot porte-outil, est bloquée dans son écrou G par la manette N. La course de l'outil est alors égale à celle de l'écrou G :

$$G'G'' = EE''.$$

La vis I a pour but, en tournant dans l'eau G, d'avancer ou de reculer l'outil selon l'emplacement de la pièce sur le plateau, mais elle ne modifie pas sa course.

Pour régler celle-ci, il faut, par l'intermédiaire des engrenages coniques S, S′ (cela peut s'effectuer en marche, K étant


A
B
C
E
E''
G
G'
G''
H
K
O
O'
Q
Course

fou sur l'arbre O), agir sur la vis Q qui déplace le maneton M, solidaire de l'écrou T, dans la coulisse. En augmentant le rayon de manivelle OM, l'amplitude de l'oscillation de la coulisse donnée par l'angle $\widehat{BO'C}$ croît, par suite la course de l'outil égale à E'E''; l'angle $\widehat{BOC} = 2^{dr} - \widehat{BO'C}$ diminue, par suite l'arc BOC, le retour est alors plus rapide relativement à l'aller plus lent. En réduisant le rayon OM, on obtient des résultats inverses.

Cames

226. Définition. — On appelle **came** toute pièce saillante calée sur un arbre et destinée à transformer son mouvement CC en mouvement RA d'une **tige guidée,** quelquefois en mouvement CA d'un **levier.**

227. Tige guidée et galets. — Pour que la tige obéisse aux injonctions de la came, il faut qu'elle reçoive l'action d'un **galet** constamment appliqué contre le profil de cette came. Le galet est monté fou sur son axe fixé dans une chape solidaire de la tige à conduire. Celle-ci est guidée dans son mouvement rectiligne soit par une **coulisse,** soit par un **fourreau** F. Mais le galet recevant une action oblique de la came la transmet à son axe et à la tige qui tend à dévier de sa direction, coïnce dans ses guides et occasionne un frottement, une usure préjudiciables. Pour obvier à cet inconvénient, on peut employer plusieurs galets libres roulant dans une rainure circulaire, le dernier agissant normalement à l'extrémité de la tige guidée I (*fig.* 240, représentant la commande des soupapes d'admission et d'échappement du moteur à essence Zedel), ou substituer au galet une bille (*fig.* 241) comme dans le moteur d'aviation E.N.V.

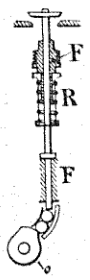


Fig. 240.

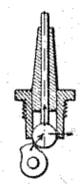


Fig. 241.

Pour presser le galet contre la came, on emploie le plus souvent un **ressort de rappel** R (*fig.* 240). On peut supprimer ce ressort en conduisant la tige par deux galets G, G′ dont la distance *d* est invariable. Quand la came a un **diamètre constant** comme la came en cœur, il suffit de les éloigner d'une longueur égale à ce diamètre, sinon on utilise une came à **double plateau** (*fig.* 242) ; l'un des disques est tracé comme s'il s'agissait de la commande par un seul galet ; l'autre, accolé au premier, est obtenu en faisant en sorte que la somme des rayons vecteurs soit constante égale à la distance des deux galets.

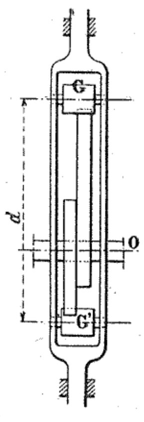


FIG. 242.

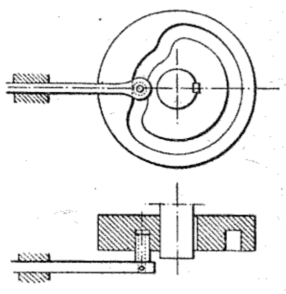


FIG. 243 et 244.

Au lieu d'employer un double galet, on peut encore pratiquer dans un plateau une rainure-chemin que doit parcourir le galet. Celui-ci est commandé tantôt par le profil intérieur, tantôt par le profil extérieur. Cette came se nomme *came à rainure*. Facile à obtenir très rigoureusement à la fraise, on la rencontre fréquemment dans les machines automatiques.

228. Levier commandé par une came. — Le CC de l'arbre est transformé en CA du levier qu'il faut de nouveau changer en RA. Le levier porte à une extrémité le galet fou G ou repose simplement sur l'axe de ce galet.

Un ressort de rappel applique celui-ci sur la came.

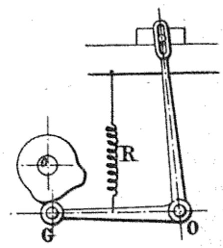


FIG. 245.

Mobile autour de son articulation cylindrique O′, le levier est pourvu d'une coulisse déterminant comme la manivelle à coulisse un mouvement RA d'un organe guidé : chariot, par exemple.

229. Tracé général des cames. — On commence par construire la **courbe des espaces** que doit parcourir le galet dans son aller et retour correspondant à une révolution complète de la came.

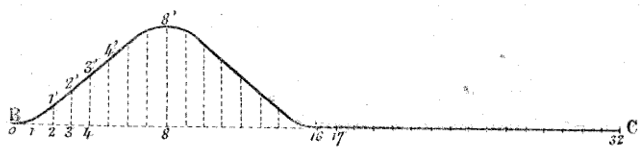


FIG. 246.

Soit B8'C la courbe donnée (*fig.* 246) ; les chemins sont portés en *vraie grandeur*, la longueur BC représente la durée d'une révolution à l'échelle des temps qui est arbitraire. Nous supposons l'arbre O tournant d'un *mouvement uniforme*.

On trace d'abord la **came théorique** qui est la courbe figurant la position du centre du galet sur les différents rayons de la came.

Soit A le bas de la course du centre du galet, le rayon minimum est OA. On se le donne.

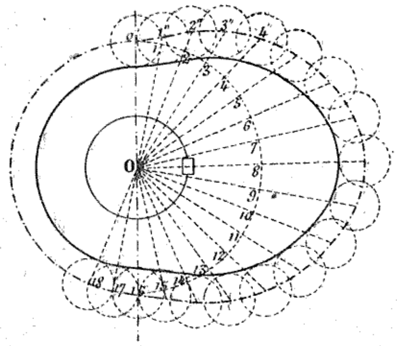


FIG. 247.

On trace une circonférence du centre O avec OA comme rayon et on la partage ainsi que BC en un même nombre de parties égales, 32 par exemple, que l'on numérote comme sur la figure.

Quand la came a tourné de $\frac{1}{32}$ de tour, le rayon O-1 vient en contact avec le galet, celui-ci doit être monté de 1-1', ordonnée de la courbe des espaces du point 1 ; le centre du galet se trouve donc à une distance de O égale à O-1 + 1-1′, on a ainsi le point 1″ ; on obtient 2″ sur le rayon O-2 en portant 2-2″ = 2-2′, et ainsi de suite pour tous les rayons. Quand la courbe des espaces est horizontale, le galet est au repos, le lieu du centre est un arc de cercle tel que 16, 17, 18, ..., 32. La courbe joignant tous les points 0, 1″ 2″, ..., 31″, 32″ est la *came théorique*.

Pour obtenir le profil véritable de la came, la **came pratique**, il faut figurer le galet en tous les points de la came théorique en décrivant des circonférences de rayon égal au sien, et ensuite tracer une courbe tangente intérieure à toutes ces circonférences, ce que l'on appelle une courbe **enveloppe.**

Pour la came à rainure, on en trace deux, l'une enveloppe extérieure, l'autre intérieure.

230. Tracé des profils conjugués. — Soit une came **à double plateau** de centre O et AB la came théorique du premier plateau établie comme précédemment. Soit d la distance fixe des deux galets. Pour obtenir les points de la came théorique du deuxième plateau, il suffit de porter sur les rayons vecteurs O-1, O-2, ..., joignant le centre aux points de celle du premier plateau, des longueurs 1-1′, 2-2′, ..., égales à d.

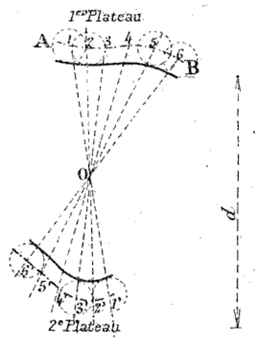


FIG. 248.

Les cames pratiques sont toujours les enveloppes des positions successives du galet sur les cames théoriques.

231. Came en cœur. — Elle communique à la tige un *mouvement uniforme* pendant la montée et la descente. La courbe des espaces (*fig.* 249) est donc formée de *deux droites symétriques* dont l'ordonnée du sommet D égale la course à produire, 24 millimètres par exemple. On se donne le plus petit rayon de la came, OA = 12 millimètres, on trace la came théorique comme précédemment, puis on décrit la courbe enveloppe intérieure des différentes positions du galet dont on connaît le rayon.

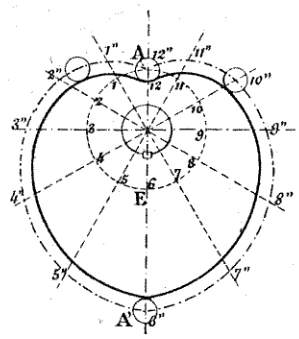


Fig. 249.

On emploie ordinairement avec cette came deux galets A et A′, car les *divers diamètres*

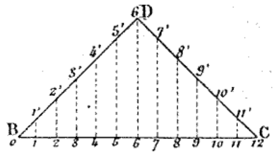


Fig. 250.

de la came sont égaux, en effet :

$$2''\text{-}8'' = 2''\text{-}2 + 2\text{-}8 + 8\text{-}8'' = 2\text{-}2' + 20A + 8\text{-}8' = 20A + 2 \text{ fois la course } EA'.$$

232. Came Morin. — Pour éviter les chocs qui se produisent dans la came en cœur à la fin de la montée et de la descente, on communique à la tige un mouvement *uniformément accéléré* pendant la première moitié de la montée, puis *uniformément retardé* pendant la seconde moitié, de façon que la vitesse nulle au départ soit encore nulle à l'arrivée pour faciliter le changement de sens du mouvement.

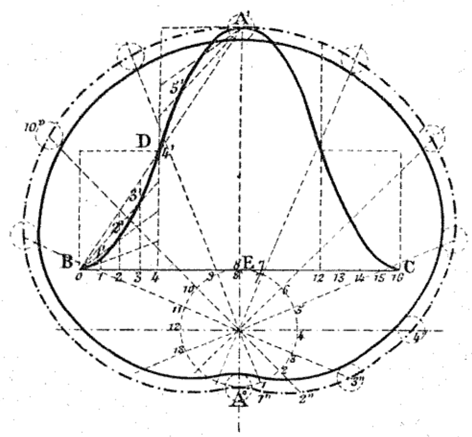


Fig. 251.

Tracé. — On se donne :

La *course* AE = 48 millimètres ;
Le *plus petit rayon* OA = 12 millimètres ;
Le *rayon du galet* G.

On construit la courbe du mouvement, elle est formée pour la montée de *deux arcs de parabole* tracés comme sur la figure, raccordés au milieu de la course : 4-4′ = 24 millimètres.

La descente étant semblable à la montée, la courbe des espaces sera symétrique par rapport à EA′.

On trace ensuite la circonférence de rayon OA que l'on partage en 16 parties égales et on détermine la came théorique, puis la came pratique, par le procédé général.

On remarque que, comme dans la came en cœur, *tous les diamètres sont égaux*, ce qui permet d'utiliser directement le double galet et de supprimer le ressort de rappel :

$$\begin{aligned} 2''\text{-}10'' &= 2''\text{-}2 + 2\text{-}10 + 10\text{-}10'', \\ &= 2\text{OA} + 2\text{-}2' + 10\text{-}10'', \\ &= 2\text{OA} + \text{AE}. \end{aligned}$$

233. Came à chute. — C'est un disque présentant plusieurs saillies appelées **cames** qui transforment le mouvement de rotation continu en rectiligne *alternatif-intermittent* d'une tige. Celle-ci, guidée dans son mouvement vertical, présente un **mentonnet** dont la face inférieure horizontale reçoit l'action de la came. Quand cette dernière quitte le mentonnet, la tige retombe en vertu de son poids. On réserve une légère période de repos avant que la came suivante ne soulève la tige à nouveau. Ces cames à chute sont utilisées pour actionner les pilons et bocards ainsi que les marteaux à levier.

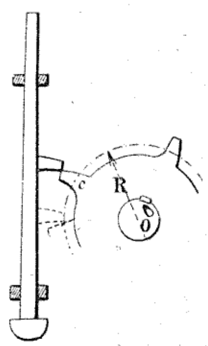


FIG. 252.

Le profil de la came en contact avec le mentonnet est une **déve-**

loppante de cercle, de la sorte la came agit normalement sur la tige, et la montée s'effectue d'un *mouvement uniforme dont la vitesse est la vitesse linéaire d'un point de la circonférence* que l'on a développée.

Soit à déterminer le rayon de cette circonférence du disque porte-cames de façon que la somme des temps nécessaires à la montée et à la descente du pilon soit les $\frac{5}{6}$ du temps mis par une came pour prendre la position de la suivante.

Soient :

> n, le nombre de tours de l'arbre par minute ;
> N, le nombre de cames ;
> h, la course du pilon ;
> x, le rayon cherché.

Le temps mis pour une came pour prendre la position de la suivante est :

$$t = \frac{60}{\mathrm{N}n}.$$

Le temps de la montée est :

$$t' = \frac{h}{v} = \frac{h}{\frac{\pi n x}{30}} = \frac{30h}{\pi n x}.$$

Le temps de la descente est :

$$t'' = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Par suite :

$$\frac{60}{\mathrm{N}n} \times \frac{5}{6} = \frac{30h}{\pi n x} + \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

équation de laquelle on tire :

$$x = \frac{30h}{\pi n \left(\frac{50}{\mathrm{N}n} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)}.$$

234. Came de distribution d'un moteur à vapeur, à gaz ou à essence. — Elle commande une soupape qui doit se soulever pendant un certain temps, rester soulevée pendant une autre durée et retomber sous l'action d'un ressort ou de la pesanteur. Elle présentera l'aspect de la figure 253.

Pendant la fraction $\frac{ab'}{2\pi R}$ de la rotation, la tige se lève ; pendant la fraction $\frac{b'c'}{2\pi R}$, elle reste constamment levée ; pendant la fraction $\frac{c'd}{2\pi R}$, elle s'abaisse, et pendant la fraction *dma* elle reste baissée.

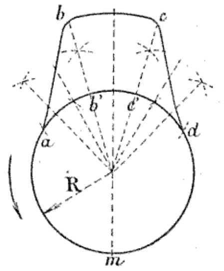


Fig. 253.

La came représentée (*fig.* 247) est une came d'échappement de moteur à gaz à deux temps ; la saillie n'embrasse qu'une demi-circonférence.

235. Emploi des cames. — En calant convenablement la came sur son arbre, on obtiendra au moment voulu le mouvement alternatif de la tige ou du levier que l'on désire. L'emploi des cames est donc tout indiqué pour la commande des organes assujettis à fonctionner à un instant déterminé par rapport au mouvement d'autres organes, comme les soupapes d'admission et d'échappement des moteurs. Elles sont toutes calées sur le même arbre : l'**arbre des cames.**

On les rencontre fréquemment dans les filatures et les tissages : la came en cœur pour produire le déplacement vertical du guide-fil dans le bobinoir vertical, pour la commande des lames voyageuses dans la carde ; la came du mouvement accéléré et retardé pour la commande des boîtes montantes simples, du guide-fil dans la canetière ; la came du mouvement accéléré, puis uniforme et retardé, pour la commande de la table alimentaire de la peigneuse ; la came à un bec pour la commande du chasse-navette et du casse-trame ; les cames spéciales pour armures diverses.

On les trouve aussi en grand nombre dans les machines automatiques. Dans les machines américaines, au lieu d'être clavetées sur leurs arbres, elles sont réduites à leurs profils et montées sur des tambours à rainures pour faciliter leur repérage, leur réglage, leur remplacement quand un changement de fabrication exige d'autres lois de mouvement.

XXII. — RECTILIGNE ALTERNATIF EN CIRCULAIRE CONTINU

236. Piston d'un moteur commandant un système bielle et manivelle. — Le système bielle et manivelle étudié dans le chapitre précédent peut être utilisé dans la transformation du mouvement rectiligne alternatif d'une tige en circulaire continu de la manivelle. On peut ainsi commander un arbre par le piston d'un moteur (*fig.* 254). Lorsque le pied de bielle est en A_0 au départ, la poussée qu'il supporte de

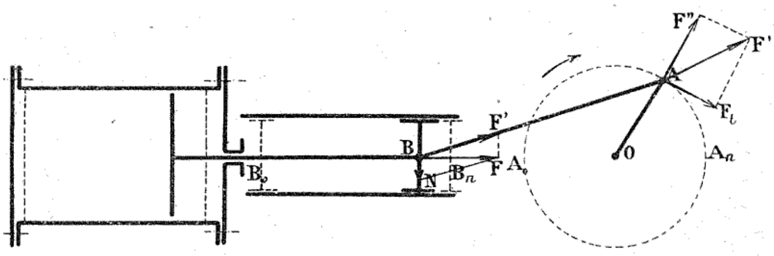


Fig. 254.

la part de la tige du piston comprime la manivelle et la bielle. Celle-ci peut indifféremment être animée d'une rotation dans le sens A_0A_n ou inverse. D'où la nécessité d'actionner directement le volant dans le sens convenable soit avec le bras (faibles puissances), soit avec un vireur commandé à la main ou par un moteur spécial.

La même indécision se représente en marche toutes les fois que la tête de bielle A passe aux points A_0 et A_n, qui sont pour ce fait appelés **points morts.** Mais à ce moment la puissance vive emmagasinée par les organes en mouvement de rotation fait aisément franchir cette position défavorable à la manivelle, dont le sens de rotation reste constant.

La pression sur le piston varie avec la position de celui-ci dans le cylindre. Cette force variable F agissant en B sur la bielle et la crosse se décompose en deux suivant la direction de bielle BF′ et la normale aux glissières BN. La force BF′ agissant sur le bouton A se décompose elle-même en deux : AF″ tirant la manivelle et AF_t, composante tangentielle assurant la rotation de l'arbre. On voit que cette composante est maximum quand la bielle est perpendiculaire à la manivelle. Elle varie à chaque instant; c'est pourquoi il est nécessaire de caler sur l'arbre un **volant** pour régulariser sa rotation. Celle-ci étant sensiblement uniforme, le mouvement du piston sera accéléré ; puis retardé.

Quand le piston est à gauche, il est avantageux de faire tourner la manivelle dans le sens des aiguilles d'une montre, car la composante normale aux glissières est toujours dirigée vers la glissière inférieure, à laquelle on peut donner plus facilement toute la résistance nécessaire. Pour la même raison, dans une machine verticale, la glissière unique doit être à gauche si la rotation s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre.

Au lieu d'articuler la bielle avec la tige du piston par l'intermédiaire d'un coulisseau ou d'une crosse, comme dans les machines à vapeur, on peut la relier directement au piston quand celui-ci, par sa grande longueur, se guide lui-même suffisamment dans le cylindre. C'est ainsi que l'on procède pour les moteurs à essence dont le cylindre est ouvert à un bout. La bielle embrasse un tourillon traversant le piston creux.

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Quelle est la force d'éclatement d'un coin à section isocèle dont la base a 5 centimètres et le côté 16 centimètres quand il reçoit une pression normale de 32 kilogrammes ?

II. — Calculer la force de serrage d'une clavette trapézoïdale de pente $\frac{1}{20}$ quand on exerce sur sa tête un effort de 8 kilogrammes.

III. — On veut communiquer le mouvement d'une machine de 40 chevaux faisant 80 tours, avec un volant-poulie de 2 mètres de diamètre, à un arbre de transmission devant faire 200 tours. Calculer le diamètre de la poulie menée et la vitesse de la courroie.

IV. — Calculer le diamètre d'une poulie montée sur un arbre faisant 180 tours par minute. La vitesse de la courroie sera de 20 mètres par seconde et on tablera sur un glissement maximum de 2 0/0.

V. — Une poulie de 300 millimètres de diamètre fait 50 tours à la minute ; elle commande par courroie un arbre dont la vitesse doit être de 70 tours à la minute. Calculer le diamètre de la poulie à employer en supposant un glissement de 1 1/2 0/0.

VI. — Un arbre de transmission fait 50 tours à la minute ; il doit commander une dynamo qui exige 2.000 tours. On dispose de poulies de 150 millimètres, 750 millimètres, 120 millimètres, 480 millimètres de diamètre. Quelle poulie suffirait-il d'acheter pour assurer la marche de la dynamo sur l'arbre de laquelle est calée une poulie de 160 millimètres ?

VII. — Dans une filature, on désire conduire avec une même courroie deux poulies A et B situées à des étages différents de celui de l'arbre de commande O. Faites le schéma du dispositif à employer (*fig.* 255) (cotes en millimètres).

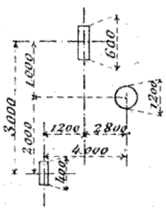


Fig. 255.

VIII. — Calculer d'après l'épure la longueur d'une courroie droite chaussant deux poulies, l'une de 480 millimètres, l'autre de 200 millimètres de diamètre, dont la distance des axes est de $1^m,20$.

IX. — Même problème pour une courroie croisée.

X. — L'axe de la poupée fixe d'un tour à bois porte un cône à quatre poulies étagées de 100, 125, 150, 175 millimètres de diamètre ; l'arbre intermédiaire porte un cône semblable et fait 110 tours à la minute.

La vitesse de coupe pour le bois étant de 36 mètres à la minute, on demande :

1° Quels sont les diamètres extrêmes des pièces que l'on peut tourner sur ce tour ;

2° Sur quel étage il faudra placer la courroie pour cylindrer des pièces de 100 millimètres de diamètre.

XI. — On veut transmettre la rotation d'un arbre faisant 160 tours au moyen de deux cônes de quatre poulies étagées.

Quels doivent être les rayons, sachant que le plus petit a 90 millimètres et que la plus grande vitesse de l'arbre mené est 400 tours ?

XII. — Déterminer les rayons de deux roues cylindriques de friction réunissant deux arbres distants de $0^m,35$ pour obtenir un rapport de vitesse $\frac{3}{4}$ (rotation de même sens et de sens inverse).

XIII. — Un double réducteur de vitesse Decauville pour moteur électrique de 16 HP est formé d'un plateau à coin et de deux roues à gorges concentriques. Quand le plateau commande la plus grande roue, la vitesse de 1.000 tours est réduite à 150 tours. Quelle sera la vitesse obtenue quand le plateau attaque la plus petite roue ?

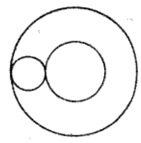


FIG. 255 *a*.

XIV. — Calculer le développement d'une bicyclette dont les roues ont 72 centimètres de diamètre, le pignon 11 dents et la roue dentée 37.

XV. — Déterminer graphiquement les angles au sommet de deux cônes de friction reliant deux arbres perpendiculaires pour que le rapport des vitesses soit $\frac{2}{7}$. Résoudre le problème par la trigonométrie.

XVI. — Le tour allemand de l'ajustage permet d'obtenir des vitesses différentes au moyen du double harnais d'engrenages ci-contre. Sachant que le renvoi de l'arbre intermédiaire fait 150 tours à la minute pour la marche directe, 230 pour la marche inverse, déterminer :

1° Les vitesses que l'on peut réaliser ;

2° Les diamètres des pièces en fonte, en fer et en acier que l'on peut tourner sur ce tour, sachant que la vitesse de coupe est de 8 mètres pour la fonte, 25 mètres pour l'acier, 30 mètres pour le fer.

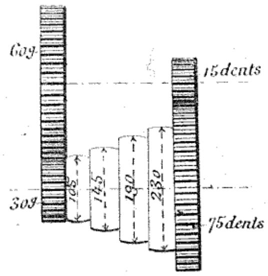


FIG. 256.

XVII. — Calculer les vitesses que l'on peut communiquer au plateau P du tour électrique (*fig.* 257) au moyen du triple harnais à train baladeur C, sachant que le rhéostat permet d'obtenir quatorze vitesses différentes de l'arbre de la dynamo : 500, 580, 660, 720, 800, 880, 960, 1.020, 1.100, 1.180, 1.260, 1.320, 1.400, 1.500 tours à la minute.

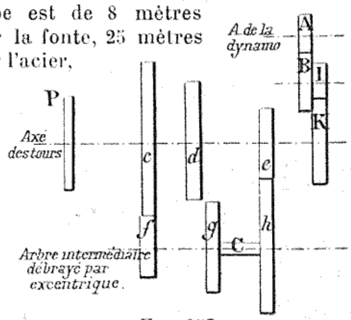


FIG. 257.

Nombre de dents de A = 25, B = 60, I = 42, K = 85, c = 95, d = 55, e = 25, f = 25, g = 95, h = 55.

XVIII. — Calculer le diamètre primitif, le pas circonférentiel, le diamètre extérieur d'un engrenage de 32 dents, module 9.

XIX. — Le schéma ci-contre représente le mécanisme de retour rapide d'une machine à raboter. L'arbre de la transmission faisant 95 tours porte un tambour de 300 millimètres de diamètre qui est relié par courroie à l'une des poulies 1, 2, 3, de l'arbre O de la raboteuse. Le diamètre de ces poulies est de 340 millimètres. On demande : 1° d'expliquer le fonctionnement du mécanisme; 2° la vitesse de coupe de l'outil pendant la période de travail: 3° la vitesse du tablier pendant le retour rapide, sachant que les couples coniques ont 17 et 34 dents, 15 et 56 dents, que le pignon droit a 18 dents et actionne une crémaillère de pas 25 millimètres.

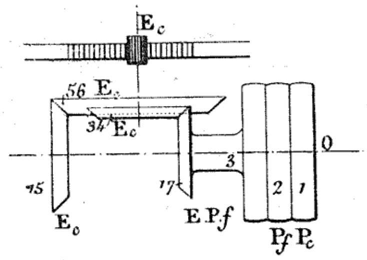


Fig. 258.

XX. — La raison d'un harnais de tour doit être de $\frac{3}{8}$. Calculer les nombres de dents à donner aux engrenages, sachant qu'ils ont tous les quatre même module 6 et que la distance de l'axe de la poulie à l'axe intermédiaire est de 225 millimètres.

XXI. — Le dispositif ci-contre rencontré sur la laineuse métallique Grosselin sert à écarter ou rapprocher deux rouleaux montés sur les axes A et B commandés par deux crémaillères de pas 8 millimètres. La vis sans fin actionnée par le volant entraine une roue de 45 dents montée sur le même arbre O que le pignon de 9 dents qui attaque les cremaillères. On demande quel déplacement des axes A et B entrainera un tour du volant.

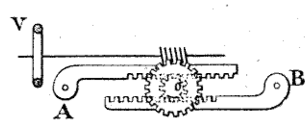


Fig. 259.

XXII. — Une vanne de décharge de $1^m,20$ sur 1 mètre glisse sur des guides en fonte. On suppose que le niveau de l'eau s'élève jusqu'à la partie supérieure de la vanne. Le coefficient de frottement étant de 0,10, le poids de la vanne de 160 kilogrammes, on veut manœuvrer cette vanne, à l'aide d'un cric à crémaillère aux dimensions suivantes : roue dentée, 35 dents; pignon, 5 et 6 dents; pas, 2 centimètres, rayon de manivelle, $0^m,30$. Calculer l'effort à exercer sur celle-ci.

XXIII. — On veut soulever une charge de 5.000 kilogrammes avec la grue à vapeur ci-contre. Calculer l'effort tangentiel à développer sur la poulie motrice de diamètre 200 millimètres.

Données : diamètre du tambour, 160 millimètres ; engrenages, 100 et 20 dents, 15 et 90 dents. On admettra un rendement de 68 0/0.

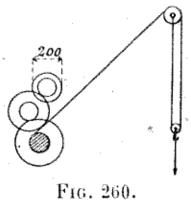


FIG. 260.

XXIV. — Quelle charge peuvent soulever 2 ouvriers agissant aux extrémités d'une double manivelle d'un treuil à vis sans fin, chacun avec une force de 15 kilogrammes. Le rayon de chaque manivelle est de 36 centimètres, celui du tambour de 7 centimètres, le nombre de dents de la roue est 95 dents. On supposera un rendement de 60 0/0.

XXV. — Tracer une came d'échappement de moteur à explosion. La soupape d'échappement doit être fermée pendant les trois premiers temps correspondant à $\frac{3}{4}$ de tour de l'arbre des cames. Elle se soulève pendant le quatrième temps, soit $\frac{1}{4}$ de révolution de son arbre. On suppose que sa levée s'effectue pendant le tiers de la durée de sa course d'un mouvement accéléré, puis retardé, qu'elle reste à son point le plus haut pendant le deuxième tiers et qu'elle retombe durant le troisième tiers d'un mouvement accéléré, puis retardé.

La course est de 8 millimètres, le plus petit rayon de la came théorique de 15 millimètres, le diamètre du galet du poussoir 20 millimètres.

XXVI. — Dans un petit moteur à vapeur, la tige du piston actionne le vilebrequin par une coulisse. Le volant donne à l'arbre un mouvement uniforme de rotation. Etudier le mouvement de la tige du piston et construire la courbe des espaces de ce mouvement, sachant que l'arbre fait 45 tours à la minute et que la course du piston est de 120 millimètres.

XXVII. — Dans un mécanisme de retour rapide à cadre oscillant analogue à celui de la figure 237, la distance OO′ des centres de la manivelle et de la coulisse égale 225 millimètres, le rayon de la manivelle OM = 90 millimètres, le coulisseau se déplace perpendiculairement à OO′, le rayon O′E du cadre = 380 millimètres, la bielle GE = 220 millimètres.

1° Calculer la course de ce coulisseau ;

2° Les durées de l'aller et du retour, sachant que la manivelle OM tourne uniformément à raison de 30 tours à la minute ;

3° Calculer le rayon de la manivelle à substituer au précédent pour obtenir une course égale aux $\frac{4}{3}$ de la précédente ;

4° (facultatif) Tracer la courbe des espaces du coulisseau, la bielle faisant 30°.

On peut traiter la question graphiquement avec le déplacement du coulisseau aux fins de course ou par la trigonométrie.

XXVIII. — Même problème pour le deuxième dispositif (*fig.* 238), 1°, 2°, 4° seulement. OO′ = 40 millimètres, OM = 100 millimètres, O′E = 190 millimètres, GE = 260 millimètres, le coulisseau se déplace dans un plan perpendiculaire à OO′ en O′. 3° Modifier le rayon OM pour que le retour soit deux fois plus rapide.

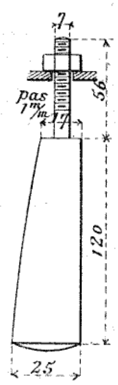


Fig. 261.

XXIX. — Calculer la pression de la clavette (*fig.* 261) sur les coussinets quand on exerce à l'aide d'une clef de 16 centimètres de longueur un effort de 15 kilogrammes.

XXX. — Evaluer l'effort de serrage de la vis d'une presse en C si on exerce sur la broche traversant la tête un effort de 12 kilogrammes à 15 centimètres de l'axe de la vis, le pa de celle-ci étant 2 millimètres.

XXXI. — Calculer l'effort à exercer à l'extrémité du levier de la vis d'un étau à pied ayant les dimensions du croquis ci-contre pour déterminer une pression de 1.000 kilogrammes sur la pièce serrée entre les mors. On admettra un rendement de 60 0/0.

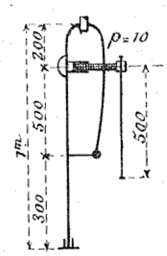


Fig. 262.

XXXII. — On soulève une charge de 8.000 kilogrammes avec un vérin dont le pas de la vis est de 25 millimètres. Le manœuvre agissant sur un bras de levier de 2 mètres doit exercer un effort normal de 21 kilogrammes. Quel est le rendement de l'appareil ?

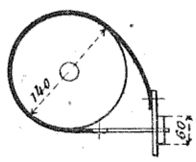


Fig. 263.

XXXIII. — Etant donné le frein ci-contre constitué par un ruban de cuir attaché en A à une extrémité et relié en B à une tige filetée qui reçoit l'action d'un écrou de serrage E, calculer :

1° La force de serrage quand on agit avec le pouce sur l'écrou moleté avec une force de $1^{kg},5$;

2° La force de frottement produite ($f = 0,35$).

XXIII. — RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

237. Nécessité d'étudier cette résistance. — Les matériaux utilisés dans la construction des machines et du bâtiment sont soumis à des efforts auxquels ils résistent dans la généralité des cas, grâce aux forces de cohésion moléculaires dites forces intérieures, qui opposent une résistance à l'action des forces extérieures (charges) ; cette résistance est due à l'attraction qui tend à relier entre elles les différentes molécules d'un corps.

Pourtant, si ces matériaux viennent à se détériorer, si les charges auxquelles on les soumet augmentent, ou bien se répètent fréquemment, ou bien encore s'exercent d'une façon ininterrompue pendant très longtemps, on remarque une déformation, parfois une rupture des organes.

Or, pour rendre les services qu'on en attend, une pièce ne doit jamais se rompre, et sa déformation, si elle a lieu, doit cesser en même temps que l'action de la charge qui la produisait. On arriverait à ce résultat en donnant des dimensions considérables ; mais la nécessité de relier entre eux les différents organes, de leur faire occuper le plus petit emplacement possible, de réduire au minimum le poids des matériaux et leur prix d'achat, a conduit à étudier les efforts auxquels sont soumis les organes, les conditions dans lesquelles ils résistent, les dimensions à leur donner pour qu'il soit possible de les employer en toute sécurité.

Ces différentes études exigent la collaboration du chimiste, de l'ingénieur et du praticien.

238. Classification des efforts auxquels sont soumis les matériaux. — La direction suivant laquelle ils s'exercent et les phénomènes qu'ils produisent ont fait ranger ces différents efforts en cinq catégories :

1° Les **efforts d'extension ou de traction** s'exercent dans le sens de la longueur de la pièce, tendent à écarter l'une de l'autre les molécules du corps et provoquent son **allongement.** Ex. : tige de piston et corps de bielle d'une machine à vapeur dans la course rétrograde (*fig.* 265) ; courroies (*fig.* 266), câbles, chaînes de transmission ; fils, chaînes, cordes, câbles d'une suspension, d'une poulie fixe (*fig.* 267), d'une poulie mobile, d'un palan, d'un treuil, d'une grue ; chaises pendantes en V (*fig.* 271), à col de cygne ; traits servant à l'attelage d'un véhicule et câbles de halage des bateaux ; tirants destinés à empêcher l'écartement des murs d'un édifice et entretoises des générateurs de vapeurs ;

2° Les **efforts de compression** s'exercent aussi dans le sens de la longueur, mais tendent à rapprocher les différentes molécules et provoquent le raccourcissement des organes. Ex. : murs et piliers, pierres, briques, mortiers et ciments employés dans les bâtiments ; poteaux, colonnes (*fig.* 270) et supports ; bâtis de machines, pieds des objets, chaises de sol (*fig.* 272), paliers, crapaudines, arbres verticaux ; tige du piston et corps de bielle dans la course directe des machines à vapeur (*fig.* 264), à explosion ; les tiges et pistons de pompe, de machine hydraulique ;

3° Les **efforts de flexion** s'exercent dans un plan perpendiculaire à la longueur, ils passent par l'axe et tendent à courber la pièce. Ex. : tous les leviers : de pompe, de treuil, de cabestan, de filière, de taraud ; les manivelles (*fig.* 264-265) et les arbres coudés ; les consoles et les chaises d'applique (*fig.* 273) ; les poutres, les charpentes, les planchers ; les passerelles et les ponts ; les fils téléphoniques (*fig.* 269), les cordes, câbles, chaînes, arbres horizontaux suspendus (*fig.* 268) ;

4° Les **efforts de torsion :** leur direction est dans un plan perpendiculaire à la longueur, mais ne passe pas par l'axe et, de plus, est variable. Ils tendent à faire tourner les différentes

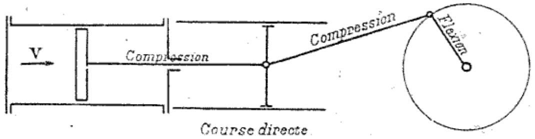


Fig. 264.

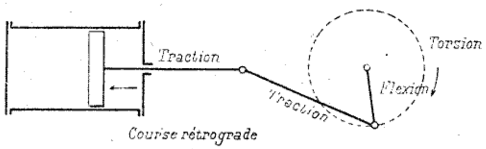


Fig. 265.

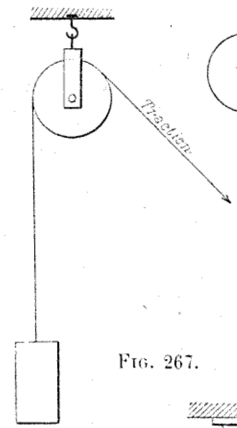


Fig. 267.

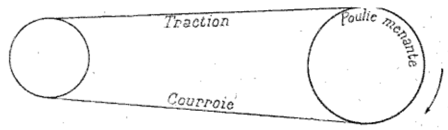


Fig. 266.

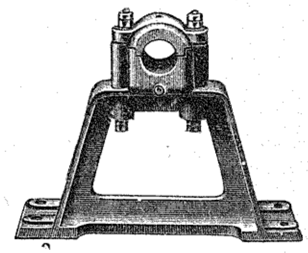


Fig. 272.

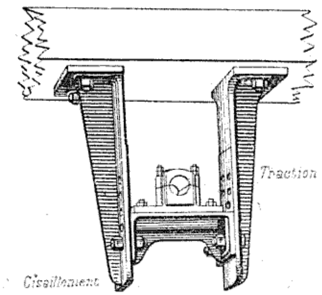


Fig. 271.

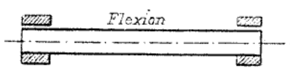


Fig. 268.

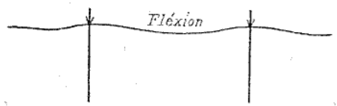


Fig. 269.

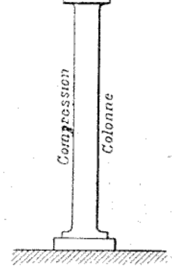


Fig. 270.

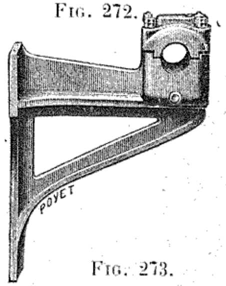


Fig. 273.

sections planes de quantités inégales autour de l'axe ; cette quantité est maxima dans le plan des efforts. Ex. : vrilles, mèches et tarauds; arbres de transmission;

5° Les **efforts de cisaillement** ont pour effet de déplacer l'une par rapport à l'autre les deux parties de la section plane dans laquelle ils se font sentir. Ce sont les organes d'assemblage qui y sont le plus souvent soumis : Ex. : rivets (*fig.* 274), vis, boulons, goujons, clavettes, contre-clavettes et goupilles, les arbres, les poutres sont soumis à des efforts de cette nature à l'endroit où ils quittent leur support.

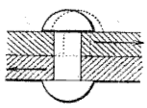


FIG. 274.

XXIV. — EXTENSION

239. Différentes périodes de déformation. — Considérons une barre de fer de dimension l soumise à température constante à des efforts de traction longitudinale ; nous constaterons que sa longueur a augmenté et est devenue $l' > l$.

Lorsque cesse d'agir la force de traction, on constatera des phénomènes différents, suivant que la barre sera dans l'une des trois phases suivantes :

1° **Période d'élasticité complète.** — Elle existe pour de faibles charges ; l'allongement cesse en même temps que l'effort, et la barre revient à sa dimension primitive. Pendant cette période les allongements obéissent à plusieurs lois mises en évidence par la série d'expériences suivantes :

a) On soumet à des charges augmentant graduellement un même fil de fer de longueur primitive l entre repères et de section constante :

Pour 1	kilogramme,	l'allongement est	a	millimètres.
2	—	—	$2a$	—
3	—	—	$3a$	—
P	—	—	$a \times P$	—

On en déduit que **les allongements sont proportionnels aux charges.**

b) On soumet à une même charge plusieurs fils de même matière et de même section, mais de longueurs différentes

$l, l', l'', \ldots$ On constate que

$$\frac{l}{a} = \frac{l'}{a'} = \frac{l''}{a''} = \ldots = C^{te},$$

c'est-à-dire que **les allongements** a, a', a'', **sont proportionnels aux longueurs primitives** l, l', l''.

c) La même charge est supportée par des fils de même matière et de même longueur, mais de sections différentes S, S', S'', ... Cette fois c'est la relation

$$aS = a'S' = a''S'',$$

qui existe ; **les allongements sont donc inversement proportionnels aux sections primitives.**

d) Enfin, si l'on opère avec une même charge sur des fils identiques, mais de matières différentes, fer, cuivre, laiton, chanvre, **les allongements varient avec la matière employée.** Pour chacune d'elles, si l'on désigne par c l'allongement en millimètres d'un fil de 1 millimètre carré de section et de 1 mètre de longueur supportant une charge de 1 kilogramme, l'allongement d'une barre quelconque se déduira de la relation :

$$\frac{c \text{ mm} \times 1 \text{ mm}^2}{1.000 \text{ mm} \times 1 \text{ kg}} = \frac{a \text{ mm} \times S \text{ mm}^2}{l \text{ mm} \times P \text{ kg}},$$

$$a = \frac{c \times l \times P}{1.000S}.$$

De cette formule on peut facilement tirer la valeur K de la charge qui, pendant la période élastique, serait nécessaire pour provoquer l'allongement d'un fil de 1 millimètre carré de section, d'une quantité égale à la longueur primitive l :

$$a = l = \frac{c \times K \times l}{1.000S} = \frac{c \times K \times l}{1.000 \times 1},$$

$$K = \frac{1.000l}{c \times l} = \frac{1.000}{c}.$$

Cette valeur de K est une caractéristique de chaque matière ; c'est elle que l'on donne au lieu de c sous le nom de **coefficient d'élasticité.**

2° **Période de déformation permanente.** — Si l'on augmente progressivement les efforts d'extension, il arrive un moment où la barre ne reprend plus sa dimension primitive, mais conserve un certain allongement sensible, lorsque cesse l'action de la force. On dit que **la charge limite d'élasticité** E a été atteinte et se trouve dépassée.

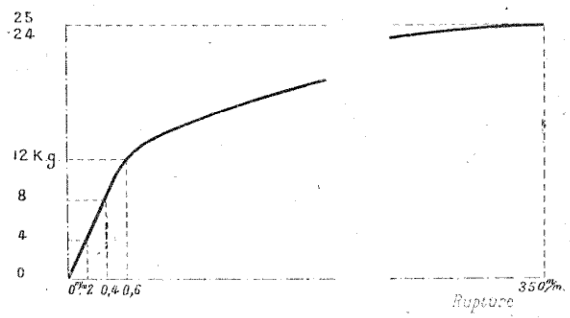


FIG. 275.

Le graphique ci-dessus indique d'une façon précise cette limite. Nous l'avons obtenu en portant sur l'axe Ox, en agrandissant vingt fois, les allongements d'un fil de fer de 1 millimètre carré de section et de 1 mètre de longueur supportant des charges portées sur l'axe Oy à l'échelle de $1^{mm},3$ par kilogramme.

Pendant la seconde période, il est visible que les allongements croissent non plus proportionnellement, mais beaucoup plus vite que les charges.

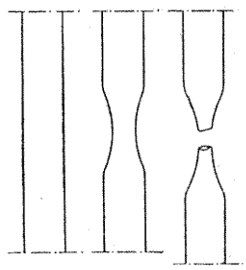


FIG. 276 à 278.

3° **Période de rupture.** — Dans les deux premières phases, la barre conserve la même section sur toute sa longueur; il n'en est plus de même lorsque se rapproche l'époque de la rupture. On remarque alors que les allongements se font au détriment d'une seule région dans laquelle la section de la barre décroît très rapidement et qui présente un étranglement désigné sous le nom de **striction** où finalement se produit la rupture.

Ces différentes périodes se constatent pour tous les genres de déformation. En ce qui concerne la compression, on dit que la rupture a lieu par écrasement.

240. Caractéristiques des matériaux au point de vue de leur résistance. — 1° **Charge limite d'élasticité** E. — C'est la charge la plus grande, exprimée en kilogrammes par millimètre carré de section, que l'on peut faire supporter à une éprouvette de métal sans amener de déformation permanente. Pour le fer (*fig.* 275), E = 12.

2° **Coefficient d'élasticité** K. — C'est la charge qui, pendant la période élastique, produirait, sur un fil de 1 millimètre carré de section, un allongement égal à la longueur primitive.

On ne peut la déterminer expérimentalement, mais on l'obtient en divisant la charge limite d'élasticité par l'allongement correspondant à une barre de 1 millimètre de long : dans le cas du graphique,

$$K = \frac{12}{0{,}6 : 1.000} = 20.000.$$

3° **Charge de rupture** R. — C'est la charge par millimètre de section que supporte l'éprouvette essayée au moment de la rupture.

4° **Charge pratique de résistance à l'extension** R'. — C'est un nombre très sensiblement inférieur à la limite élastique E, que l'on peut appliquer en toute sécurité dans le calcul des dimensions.

Généralement on prend $R' = \frac{1}{2}$ E pour les corps homogènes ; $R' = \frac{1}{10}$ R pour les pierres naturelles ou fabriquées, pour les mortiers et les ciments.

5° **Allongement 0/0 au moment de la rupture** A 0/0. — Il se mesure en rapprochant les parties rompues. Si une éprouvette de 150 millimètres de longueur primitive entre repères possède au moment de la rupture 195 millimètres :

L'allongement pour 150 millimètres est de :

$$195 - 150 = 45 \text{ millimètres.}$$

L'allongement pour 100 millimètres est de :

$$45 \times \frac{100}{150} = 30 \text{ millimètres.}$$

$$A\ 0/0 = 30.$$

6° **Striction** Σ. — Elle est caractérisée par le rapport entre la diminution de section après rupture et la section primitive :

$$\Sigma = \frac{S - s}{S}.$$

Cette observation permet d'avoir une idée de la **ductilité** et de la malléabilité du métal, c'est-à-dire de la facilité avec laquelle il pourra être mis sous forme de fil et de plaque (tôles).

241. Formules. — Il résulte des considérations précédentes que, pour trouver l'effort de traction que peut supporter une tige de section S, il suffit d'écrire la relation :

$$P = R'S.$$

Si au contraire on cherche la section à donner à une tige tendue,

$$S = \frac{P}{R'}.$$

Lorsqu'on désire avoir l'allongement, à cause du jeu à donner, par exemple, on écrit :

$$a = \frac{1}{E} \times \frac{P \times l}{S}.$$

242. Applications. — 1° *Un tirant qui réunit les deux murs d'un édifice a 12 mètres de longueur et 800 millimètres carrés de section. Quel effort peut-il supporter en toute sécurité sachant que* $R' = 6$?

$$P = R' \times S = 6 \times 800 = 4.800 \text{ kilogrammes.}$$

2° *Sachant que l'effort supporté est en réalité* 4.000 *kilogrammes et que* E = 20.000, *déterminer l'allongement a :*

$$a = \frac{1}{E} \times \frac{P \times l}{S} = \frac{1 \times 4 \times 12}{2 \times 8},$$

$$a = \frac{48}{16} = 3 \text{ millimètres.}$$

3° *Quel doit être le diamètre de la tige d'un piston dont le diamètre est de* 60 *millimètres et qui est actionné par la vapeur à* 8 *kilogrammes* (R′ = 6) ?

Pression de la vapeur :

$$8 \text{ kg} \times \pi \times \frac{6^2}{4} = 72\pi \text{ kilogrammes ;}$$

$$S = \frac{P}{R'} = \frac{72\pi}{6} = 12\pi \text{ millimètres carrés,}$$

$$\pi r^2 = 12\pi, \qquad r^2 = 12 \text{ millimètres carrés,}$$

$$r = \sqrt{12} = 3^{mm},47, \qquad d = 6^{mm},94,$$

soit pratiquement 7 millimètres.

243. Pratique des essais à la traction. — Ces essais se font à la machine sur des éprouvettes qui peuvent affecter différentes formes. A titre d'indication, nous montrons ci-dessous comment se prépare l'éprouvette au Creusot.

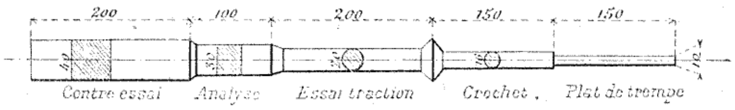


Fig. 279.

Les sections droites successives sont : un carré de 40 millimètres de côté ; un carré de 30 millimètres de côté ; un cercle de 20 millimètres de rayon un cercle de 15 millimètres de rayon ; un rectangle de 20 × 10.

Les machines sont mues d'une façon progressive à l'aide d'une presse hydraulique ou à huile qui enregistre à la fois les allongements et les charges, ce qui permet de relever la limite élastique E, la charge de rupture R et l'allongement A 0/0 au moment de la rupture.

244. Tableau des caractéristiques de quelques corps usuels

Nature des matériaux		Résistance pratique	Limite élastique	Résistance à la rupture	Coefficient d'élasticité	Densités
Métaux.	Fer forgé	6	12	30	20.000	7,6 à 7,8
	Fer laminé ou tôle	7	14	35	17.000	
	Fil de fer ($d < 3$ mm)	10	20	60	20.000	
	Câble en fils de fer	5	10	25	16.000	
	Chaînes en fer ordinaire	4	8	22	»	
	Fonte coulée horizontalement	2	4	12	8.000	7 à 7,50
	— — verticalement	2,5	5	15	10.000	
	— fine de Suède	6	12	30	20.000	
	Aciers (voir classification)	10 à 30	20 à 60	34 à 110	»	7,2 à 7,9
	Cuivre laminé	4,3	9	25	10.000	8,9
	— fondu	2,2	4,5	13	6.000	8,6
	— ou laiton en fil ($d < 2$)	8	16	50		
	Laiton	2	4	12	4.000	8,5
Bois sec.	Chêne dans le sens fibres	0,6 à 0,8	1,2-1,6	6 à 8	1.200	0,97
	Pin rouge dans le sens fibre	0,8	1,6	8	1.100	0,91
	Sapin des Vosges dans le sens fibres	0,4	1	4	500	0,89
	Frêne (carrosserie) dans le sens fibres	1,2	2,5	11	1.000	0,95
	Orme dans le sens fibres	1	2	10	800	0,92
	Hêtre dans le sens fibres	0,8	1,6	8	1.100	0,90
Flexibles.	Corde chanvre ($d < 20$)	0,6	1,2	6	....	1,06
	— ($d > 20$) / — goudronnée	0,4	0,8	4	....	1,04
	Courroie cuir	0,2	0,5	2		

245. Pièces verticales. — Il nous reste à dire que les organes de suspension ont à supporter, outre la charge de traction, leur propre poids.

Lorsque les organes atteindront une longueur considérable, il conviendra donc de faire intervenir leur poids p. C'est ce qui a toujours lieu pour les câbles de mines. Dans ce cas, la charge que peut supporter un câble est obtenue par la relation :

$$P = R'S - p.$$

Or, si l'on désigne la longueur par l millimètres et la densité par δ (*delta*) :

$$P = R'S - \delta \times \frac{S}{10.000} \times \frac{l}{100},$$

$$P = R'S - \frac{\delta S l}{10^6} = S\left(R' - \frac{\delta l}{10^6}\right).$$

Soit à calculer la charge que peut supporter au fond d'un puits de mines de 250 mètres un câble formé de 6 torons de 8 fils de fer, chacun de 3 millimètres carrés de section ($R' = 5$; $\delta = 7,8$).

$$P = \left(5 - \frac{7,8 \times 250.000}{1.000.000}\right) \times 3 \times 8 \times 6,$$

$$P = (5 - 1,950) \times 144,$$

$$P = 3,05 \times 144 = 439^{kg},200.$$

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Calculer le diamètre d'une corde de chanvre qui sert à l'élévation de sacs de farine pesant 150 kilogrammes. ($R' = 0,5$.)

II. — Quelle charge peut supporter une corde en chanvre de 40 millimètres de diamètre ? ($R' = 0,5$.)

III. — Une tige creuse de laiton a 9 millimètres de diamètre intérieur et 2 millimètres d'épaisseur ; quelle est sa force portante ? ($R' = 8$.)

IV. — Quel effort peut supporter à 250 mètres de profondeur un câble formé de 5 torons de 8 fils d'acier de 1 millimètre et demi de rayon chacun ? ($R' = 10$; $\delta = 7,9$.)

V. — Une tige en acier doux de 80 mètres de longueur doit supporter une charge de 6.000 kilogrammes. Calculer son diamètre : 1° en négligeant le poids de la tige ; 2° en tenant compte de ce poids. ($\delta = 7,80$; $R' = 8$.)

VI. — Calculer le diamètre du fer doux à employer pour fabriquer une chaîne devant résister en toute sécurité à une charge de 3.000 kilogrammes. ($K' = 5$.)

VII. — Une courroie ayant 6 millimètres d'épaisseur supporte une tension de 200 kilogrammes. Quelle doit être sa largeur ? ($R' = 0, 2$.)

VIII. — Une bielle en fer forgé à section méplate dont la largeur égale 4 fois l'épaisseur doit supporter une traction maximum de 8.000 kilogrammes. Calculer la dimension de sa section. ($R' = 6$.)

XXV. — COMPRESSION

246. Différentes périodes de déformation. — Lorsqu'un solide est soumis à des efforts de compression qui vont en augmentant graduellement, on constate, comme dans les phénomènes d'extension, trois périodes.

I. **Une période d'élasticité complète** pendant laquelle les raccourcissements observés a' cessent complètement avec l'action de la force extérieure et, d'autre part, obéissent à des lois bien déterminées. Bien que les expériences effectuées soient rendues difficiles par des phénomènes de flexion qui se produisent lorsque la longueur de la pièce est très grande, il a été possible de vérifier ces lois, qui sont analogues à celles de l'extension.

Les raccourcissements varient avec chaque matière et sont proportionnels à la charge et à la longueur; ils sont inversement proportionnels à la section.

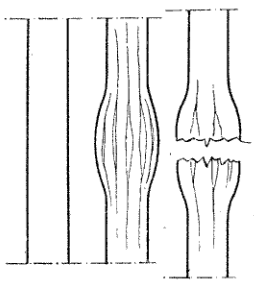


Fig. 280 à 282.

On peut écrire la relation :

$$a' = \frac{c' \times P \times l}{S},$$

dans laquelle c' est un coefficient qui varie avec chaque matière, mais qui en général est le même que pour l'extension.

II. **Une période de déformation permanente** pendant laquelle la pièce comprimée conserve une longueur plus courte que la longueur primitive lorsque cesse l'effort de compression.

III. **Période de fluidité précédant la rupture par écrasement.** — Jusque-là, le corps avait conservé sa forme prismatique. A partir de ce moment, une boursouflure se produit dans une région bien déterminée où les sections augmentent très sensiblement, présentent des criques, des gerçures, et finalement la rupture se produit.

247. Graphique. — Si l'on considère les compressions comme des tractions négatives, et si l'on trace le graphique ci-dessous dans les mêmes conditions que le graphique d'extension (*fig.* 283), on obtient une courbe généralement symétrique par rapport au point O ; deux points anguleux A et B indiquent les charges limites d'élasticité.

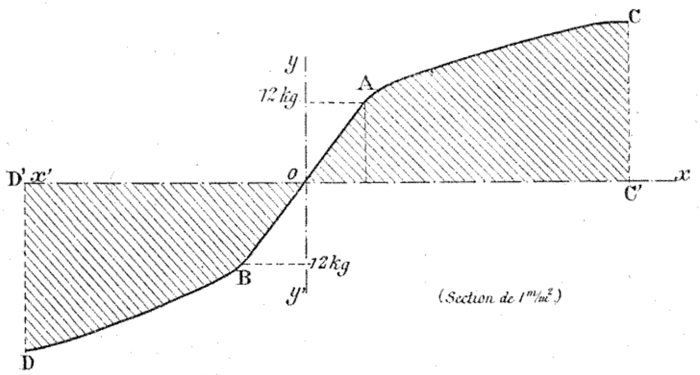


Fig. 283.

CC' et DD' étant les charges de rupture et d'écrasement, il est intéressant de remarquer que la surface OACC' mesure à l'échelle le travail absorbé avant la rupture par traction et OBDD' le travail absorbé avant l'écrasement.

248. Résistance pratique à la compression R''. — C'est une charge exprimée en millimètres carrés de section que peut supporter en toute sécurité une pièce comprimée de faible longueur $l < 5e$, e étant le plus petit côté de la section.

Pour les bois et les métaux, on prend la moitié de la limite élastique ou une valeur comprise entre le $\frac{1}{4}$ et le $\frac{1}{7}$ de la charge de rupture; pour les pierres et maçonnerie, on prend toujours le $\frac{1}{10}$ de la charge de la rupture.

249. TABLEAU DES RÉSISTANCES A LA COMPRESSION DE QUELQUES CORPS.

	DÉSIGNATION DES MATÉRIAUX	RÉSISTANCE PRATIQUE	CHARGE DE RUPTURE
Métaux.	Fer	6	36
	Fonte	10	70
	Acier cémenté	12	70
	— fondu	30	100
	Cuivre laminé non recuit	5	30
Bois très secs.	Chêne (sens des fibres)	0,7	7
	Orme, châtaigner	0,7	7
	Frêne, hêtre	0,7	7
	Sapin, pin résineux	0,5	5
	Peuplier, pin jaune	0,36	3,6
Pierres et maçonneries.	Basalte de densité 3	1,2	12
	Granit — 2,8	0,6	6
	Grès — 2,5	0,15	1,5
	Brique — 2	0,1	1
	Pierre calcaire de densité 2,3	0,18	1,8
	Mortier ciment — 1,2 à 2,2	0,02 à 0,38	0,2 à 3,8
	— chaux — 1,6	0,04	0,4

L'examen de ce tableau nous montre que la fonte, qui résiste très mal aux efforts de traction, résiste beaucoup mieux à la compression. Par conséquent on l'emploiera de préférence pour les organes seulement comprimés : supports, bâtis et colonnes, mais on lui préférera le fer et l'acier pour les pièces alternativement comprimées et tendues, telles que tiges de piston et corps de bielle.

250. Formule pratique. — Application. — Pour connaître la charge de compression que peut supporter une pièce quelconque, il suffit de multiplier la résistance pratique par la section :

$$P = R''S.$$

1° *Les quatre pieds d'une table en sapin ont une section carrée de 40 millimètres de côté. Sachant que* $R'' = 0,5$, *calculer la charge qui peut être posée sur la table :*

$P = 4R''S = 4 \times 0,5 \times 1.608 = 3.200$ kilogrammes.

2° *Quelle charge peuvent supporter les quatre pieds d'un tour, sachant qu'ils ont une section en forme d'équerre dont la grande dimension est de 50 millimètres et l'épaisseur 12 millimètres?* ($R'' = 10$.)

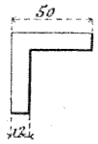


Fig. 284.

$P = 4 \times R'' \times S$;
$S = (50 \times 12) + (50 - 12)\ 12 = 1.056$ millimètres carrés ;
$P = 4 \times 10 \times 1.056 = 42.240$ kilogrammes.

251. Poteaux en bois et colonnes en fonte. — Les prismes de grande longueur chargés debout plient plutôt que de se comprimer dès que $l \geqq 5e$. Dès lors, on constate que la charge de rupture va en diminuant rapidement dès que le rapport $\frac{l}{e}$ augmente. Il est donc nécessaire de faire intervenir ce rapport dans les formules destinées à calculer les sections des poteaux et colonnes.

Nous donnons la suivante déduite des expériences de *Hodgkinson* et de *Reuleaux* ainsi que des travaux de *Rondelet* et du général *Morin :*

$$P = 250R''S \times \left(\frac{e}{l}\right)^2,$$

dans laquelle e est le plus petit côté de la section et l la longueur, l'unité adoptée étant toujours le millimètre.

Cette formule n'est applicable que pour un rapport $\frac{l}{e} \geqq 25$.

Pour une valeur $q < 25$, au lieu de 250 prendre $m = 2q\sqrt{q}$.

Pour les colonnes en fonte, creuses, on remplace le rapport $\left(\frac{e}{l}\right)^2$ par $\frac{d^2 + d'^2}{l^2}$, mais en ayant soin de conserver une épaisseur suffisante, afin de permettre à la fonte liquide de bien se tasser autour du noyau. On peut à volonté appliquer la formule :

$$e \text{ mm} = 5 + \frac{l}{3.000},$$

ou consulter le tableau suivant :

Hauteurs en mètres........	1 à 2	2 à 3	3 à 4	4 à 6	6 à 8	$l > 8$
Épaisseurs en millimètres..	10	12	15	20	25	30

252. Application. — 1° *Quelle charge peut supporter un poteau en bois à section carrée de* 150 *millimètres de côté, haut de* $5^m,25$? ($R'' = 0,6$.)

$$P = 250 \times 0,6 \times \left(\frac{150}{5.250}\right)^2 \times \overline{150}^2 = 27.551 \text{ kilogrammes.}$$

2° *Quelle charge peut supporter un poteau en bois rectangulaire de côtés* 250 *et* 120 *millimètres et de hauteur* $1^m,92$? ($R'' = 0,875$.)

Le rapport $\frac{l}{e} = \frac{1920}{120} = 16 < 25$.

Par suite,

$$m = 2 \times 16 \times \sqrt{16} = 128,$$
$$P = 128 \times 0,875 \times (250 \times 120) \times \left(\frac{1}{16}\right)^2,$$
$$P = 13.125 \text{ kilogrammes.}$$

3° *Trouver le rayon d'une colonne pleine en fer, sachant que*

$P = 35.000$ *kilogrammes*, $l = 4$ *mètres*. ($R'' = 6$.)

$$P = 250 \times R'' \times S \times \frac{4r^2}{l^2} = \frac{250 \times 6 \times 3,1416 \times r^2 \times 4 \times r^2}{16.000.000},$$

$$35.000 \times 16.000.000 \times \frac{1}{\pi} = 6.000 r^4,$$

$$r^4 = 29.708.000,$$
$$r = \sqrt[4]{29.708.000} = \sqrt{5.450} = 74 \text{ millimètres par excès.}$$

4° *Trouver les dimensions d'une colonne creuse en fonte capable de résister au même effort, sachant que* $R'' = 10$ *et que* $\frac{r}{r'} = \frac{3}{2}$:

$$35.000 \times 16.000.000 \times \frac{1}{\pi} = 10.000 (r^4 - r'^4),$$

$$17.824.800 = \frac{65}{81} r^4,$$

$$r = 69 \text{ millimètres}; \qquad r' = 46 \text{ millimètres.}$$

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Quelle charge peut supporter en toute sécurité un poteau en chêne à section carrée de 8 centimètres de côté, haut de $6^m,80$? ($R'' = 0,7$.)

II. — Quelle charge peut recevoir un poteau en sapin à section rectangulaire $22^{cm} \times 10^{cm}$ de 2 mètres de hauteur ? ($R'' = 0,5$.)

III. — Quelle est la section carrée à adopter pour un poteau en peuplier de 6 mètres de longueur devant supporter un effort de 10.000 kilogrammes ? ($R'' = 0,36$.)

IV. — Les piliers des arcades d'une construction ont une section rectangulaire de $35^{cm} \times 40^{cm}$. Quelle charge peut supporter en toute sécurité chaque pilier ? ($R'' = 0,22$.)

V. — Calculer la charge que peut recevoir une colonne pleine en fonte de 90 millimètres de diamètre et de 4 mètres de hauteur. ($R'' = 9$.)

Calculer ensuite la charge que pourrait recevoir une colonne creuse en fonte de même hauteur, de même poids, de même nature, dont l'épaisseur serait de 16 millimètres.

VI. — Quel est le diamètre à donner à une colonne en fer forgé devant supporter une charge de 25.000 kilogrammes ? ($l = 3$ mètres ; $R'' = 6$.

VII. — Déterminer les dimensions d'une colonne creuse en fonte capable de recevoir une charge de 80.000 kilogrammes. ($l = 5$ mètres; $R'' = 10$.)

VIII. — Un pilier à section carrée en maçonnerie est chargé d'un poids de 20.000 kilogrammes. Sa hauteur est de 25 mètres. Calculer sa section au sommet et sa section à la base en tenant compte du poids de la maçonnerie, le mètre cube de maçonnerie pesant 2.400 kilogrammes.

IX. — Une toiture BAC est inclinée à 60° sur le plan horizontal; la distance BC = 8 mètres : la longueur est de 10 mètres et la hauteur de 4 mètres, sachant que la toiture pèse 250 kilogrammes par mètre carré et que la neige de densité 0,8 atteint pendant l'hiver une épaisseur de 75 centimètres. On demande de calculer :

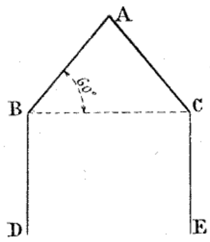


Fig. 284 *bis*.

1° La charge supportée par chacune des quatre colonnes situées aux angles du bâtiment;

2° Le côté des poteaux à base carrée en chêne, sachant que $R'' = 0,8$, qui peuvent supporter cette charge;

3° Les rayons des colonnes creuses en fonte qui supporteraient le même effort, sachant que $r = \frac{5}{3} r'$ et $R'' = 10$;

4° Le rayon des colonnes pleines en fonte.

Des deux dernières solutions, quelle est la plus avantageuse si, à poids égal, le prix de la colonne pleine est les $\frac{5}{8}$ de celui de la colonne creuse ?

XXVI. — FLEXION

253. Définition. — Prenons une règle plate assez grande, maintenons-la à l'une de ses extrémités A à l'aide de tenailles par exemple, et exerçons à l'extrémité libre une poussée P perpendiculaire au plat; la règle, primitivement droite, se courbe. On dit qu'elle *fléchit*. L'effort F est un effort de *flexion*.

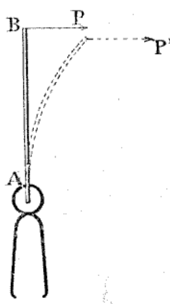


Fig. 285.

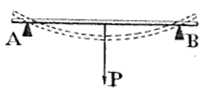


Fig. 286.

Il en est de même lorsque la règle plate, reposant sur deux appuis A et B, est soumise à une pression normale de la main P : elle s'incurve, fléchit.

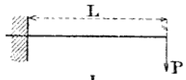
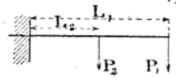
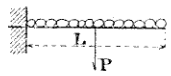
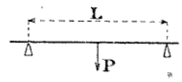
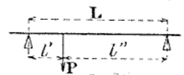
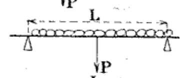
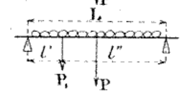
254. Diverses périodes de déformation. — Pour de faibles efforts, la courbure disparaît en même temps que l'action de la force : on est dans la période d'élasticité. Si l'on augmente progressivement les charges P, une déformation permanente se produira, suivie d'une rupture.

Forme des sections employées pour les pièces fléchies. — Si l'on examine une poutre fléchie encastrée à une extrémité, on constate que les fibres supérieures se sont allongées et celles du dessous raccourcies; celles du milieu ont conservé leur longueur; dans le cas d'un solide appuyé à ses deux extrémités, c'est le contraire qui se produit : le raccourcissement a lieu en dessus, l'allongement en dessous. Dans les deux cas on voit que les fibres extrêmes supérieures et inférieures sont celles qui travaillent le plus, soit à la traction, soit à la compression. Les fibres moyennes, peu déformées, supportent donc des efforts moindres. Il y a donc avantage à réduire leur nombre dans la région moyenne de la section pour les reporter en dessus et en dessous. On y arrive pratiquement en utilisant les formes à simple té et à double té, en U, le rectangle et le cercle évidés. Selon les matières et les besoins, on emploie d'ailleurs aussi les sections pleines rectangulaire, circulaire, elliptiques, cruciformes.

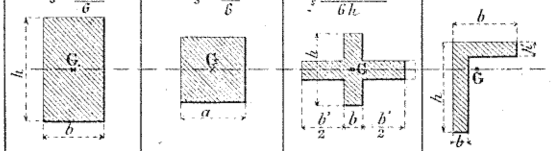
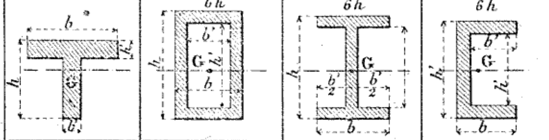
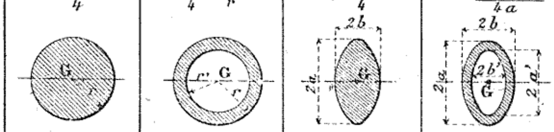
255. Formule pratique. — Tant que les déformations ne sont pas permanentes, c'est-à-dire durant la période d'élasticité, il y a égalité entre le moment des forces extérieures par rapport à l'axe horizontal de chaque section et le moment des forces intérieures, petits ressorts maintenant les molécules de la section en contact avec celles de la section voisine.

Le moment des forces extérieures varie avec la distance de ces forces à la section (proportionnel aux bras de levier). Il importe de connaître sa valeur maximum, le plus grand moment fléchissant par rapport à la section dangereuse, section d'encastrement pour une poutre encastrée, section voisine du milieu pour une poutre appuyée.

256. Plus grands moments fléchissants des charges dans quelques cas pratiques.

Dispositions — de la poutre	Dispositions — des charges	Croquis	Valeurs de M_f
Encastrée à une extrémité	*Une P à l'extrémité*		PL
	Deux P_1, P_2		$P_1L_1 + P_2L_2$
	*Une P répartie égalem*t *sur toute la longueur*		$\frac{PL}{2}$
Supportée à ses deux extrémités	*Une P au milieu*		$\frac{PL}{4}$
	Une P quelconque		$\frac{Pl'l''}{L}$
	*Une P répartie égalem*t *sur toute la longueur*		$\frac{PL}{8}$
	P répartie uniformément P_1 *Quelconque*		$\frac{PL}{8} + \frac{P_1l'l''}{L}$

257. Modules de flexion de quelques sections usuelles

Forme	*Rectangulaire pleine*	*Carré*	*Cruciforme*	*Equerre*
Surface	$S = b \times h$	$S = a^2$	$S = h.b + b'h'$	$S = bh' + b'(h-h')$
Module	$M_s = \frac{b \times h^2}{6}$	$M_s = \frac{a^3}{6}$	$M_s = \frac{bh^3 + b'h'^3}{6h}$	»
Croquis				
Forme	*Simple té*	*Rectangulaire creuse*	*Double té*	*en U*
Surface	$S = bh' + b(h-h')$	$S = bh - b'h'$	$S = bh - b'h'$	$S = bh - b'h'$
Module		$M_s = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$	$M_s = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$	$M_s = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$
Croquis				
Forme	*Circulaire pleine*	*Circulaire creuse*	*Elliptique pleine*	*Elliptique creuse*
Surface	$S = \pi r^2$	$S = \pi (r^2 - r'^2)$	$S = \pi a b$	$S = \pi (ab - a'b')$
Module	$M_s = \frac{\pi r^3}{4}$	$M_s = \frac{\pi}{4} \frac{(r^4 - r'^4)}{r}$	$M_s = \frac{\pi a^2 b}{4}$	$M_s = \pi \frac{(ba^3 - b'a'^3)}{4a}$
Croquis				

Ce plus grand moment fléchissant M_f est donné dans le tableau (n° 256).

Le moment des forces moléculaires dépend de la résistance de la matière à l'extension et à la compression et de la forme de la section.

Le moment de résistance pratique de la section est égal au produit de la résistance pratique à l'extension R' par le module de la section M_s. Ce module est donné dans le tableau (n° 257) pour les sections courantes. Les fabricants le fournissent dans leurs catalogues.

Pour le calcul des pièces chargées soumises à la flexion, il suffira donc d'employer la relation fondamentale suivante :

$$(1) \qquad M_f = R'M_s.$$

Pour déterminer la charge que peut supporter une poutre en toute sécurité, on calculera son moment fléchissant. Pour obtenir la section d'une poutre devant résister à une charge donnée, on calculera le module M_s.

258. Applications pratiques. — 1° *Quelle charge peut supporter à son extrémité libre une poutre encastrée en fer à section carrée, de* 16 *millimètres de côté, longue de* 2 *mètres ?* ($R' = 6$.)

Exprimons les moments en kilogrammes par millimètre.

$$M_f = Pl \text{ mm} = R'M_s = \frac{R'a^3}{6} \ (a \text{ en millimètres}),$$

ou

$$PL \text{ mm} = \frac{6 \times 160^3}{6} = 4.096.000 \text{ kilogrammes par millimètre,}$$

d'où :

$$P = \frac{4.096.000}{2.000} = 2.048 \text{ kilogrammes.}$$

Supposons que la barre de fer soit rectangulaire, $80^{mm} \times 320^{mm}$ et de même poids. Posons-la sur champ (*fig.* 287) ; son module

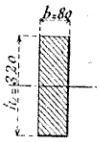


Fig. 287.

$$M_s = \frac{bh^2}{6} = \frac{80 \times 320^2}{6}.$$

$$PL = \frac{6 \times 80 \times 320^2}{6} = 8.192.000 \text{ kilogrammes par millimètre.}$$

$$P = \frac{8.192.000}{2.000} = 4.096 \text{ kilogrammes.}$$

Placé à plat (*fig.* 288), la charge diminuerait :

$$PL = \frac{6 \times 320 \times 80^2}{6} = 2.048.000 \text{ kilogrammes par millimètre.}$$

$$P = \frac{2.048.000}{2.000} = 1.024 \text{ kilogrammes,}$$

charge quatre fois plus petite que la précédente. Cela montre l'avantage de poser les pièces sur champ. On s'en rend compte expérimentalement avec une règle plate que l'on place successivement sur champ et à plat sur deux appuis.

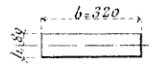


Fig. 288.

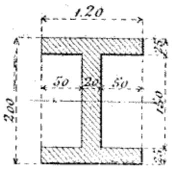


Fig. 289.

2° *Quelle charge uniformément répartie peut supporter en toute sécurité une poutre à double té en fer reposant sur deux appuis distants de* 5 *mètres?* (R′ = 6.) *Les dimensions de la section sont celles de la figure.*

$$\frac{Pl \text{ mm}}{8} = 6 \times \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h} = \frac{120 \times 200^3 - 100 \times 150^3}{200}$$

$$= 3.111.500 \text{ kilogrammes par millimètre,}$$

$$P = \frac{3.112.500 \times 8}{5.000} = 4.980 \text{ kilogrammes.}$$

soit 1.000 kilogrammes environ par mètre de longueur.

3° *Une poutre rectangulaire pleine en sapin est supportée à ses deux extrémités distantes de* 8 *mètres. Sachant qu'elle est soumise à une charge de* 6.000 *kilogrammes uniformément répartie sur toute la longueur, que le rapport des dimensions est* $\frac{h}{b} = \frac{5}{3}$ *et que* R′ = 0,4, *calculer les côtés de la section.*

$$M = \frac{PL}{8} = R' \times \frac{bh^2}{6} = \frac{R' \times 3h^3}{6 \times 5}, \qquad \frac{6.000 \times 8.000}{8} = \frac{0,4 \times 3h^3}{30},$$

$$h^3 = 150.000.000,$$

$$h = \sqrt[3]{150.000.000} = 531^{mm},35,$$

$$b = \frac{3}{5} \times 531,35 = 318^{mm},81.$$

Pratiquement, on pourrait prendre 530×32 :

4° *Calculer la distance qui doit séparer deux supports d'un fil électrique en cuivre de 1 millimètre de rayon, de densité* $\delta = 8{,}9$ *et de résistance* $R' = 8$, *pour qu'il résiste à l'action de son propre poids.*

Si l'on désigne par x millimètres cette distance,

$$P = \frac{8{,}7 \times 3{,}1416 \times 1^2 \times x}{1.000.000} = \frac{8{,}9\pi x}{1.000.000},$$

$$M = \frac{PL}{8} = \frac{Px}{8} = \frac{8{,}9\pi x^2}{8.000.000},$$

$$\frac{8{,}9\pi x^2}{8.000.000} = \frac{8 \times \pi \times 1^3}{4} = 2\pi,$$

$$x = \sqrt{\frac{16.000.000}{8{,}9}} = 1.340 \text{ millimètres.}$$

5° *Trouver dans la collection des aciéries de Longwy un profil de poutre à* **I** *qui, encastrée à une extrémité, doit recevoir une charge de 4 tonnes à son extrémité libre située à 2 mètres de l'encastrement* ($R' = 9$ *kilogrammes*).

De la formule

$$PL = R'M_s,$$

on tire :

$$M_s = \frac{PL}{R'} = \frac{4.000 \times 2.000}{9} = 888.888 \text{ kilogrammes par millimètre.}$$

Le module immédiatement supérieur que l'on trouve dans le catalogue est : 930.969, correspondant à une section de $340 \times 137 \times 12{,}2$ pesant $68^{kg},060$ par mètre.

Si on tient compte du poids de la barre, le moment fléchissant dû à ce poids est :

$$\frac{68{,}060 \times 2 \times 2.000}{2} = 136.120 \text{ kilogrammes par millimètre.}$$

Il faut que :

$$8.136.120 \leqq 930.969 \times 9,$$

ce qui est vrai ; donc la poutrelle choisie peut convenir.

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Sachant que le module d'une poutrelle en ⟷ de $250 \times 122 \times 10$ est de 75.712. Calculer la charge uniformément répartie par mètre de longueur qu'elle peut recevoir pour une portée de 3 mètres. Que deviendrait cette charge en posant la poutrelle sur champ **I**, le module montant à 480.114 ?

II. — Un plancher de poids 250 kilogrammes par mètre carré est soutenu par des solives parallèles de 4 mètres de portée et de $0^m,50$ d'écartement. Calculer la section à donner aux solives en chêne ($R' = 0,7$), en prévoyant une surcharge de 220 kilogrammes par mètre carré.

III. — Quelle charge peut supporter en toute sécurité une barre de fer à section carrée encastrée à son extrémité, longue de 800 millimètres, large de 15 millimètres, sachant que $R' = 8$? On tiendra compte du poids de la barre, densité 7,8.

IV. — Un volant de 6.000 kilogrammes est calé en porte-à-faux à l'extrémité d'un arbre plein en fer de 80 millimètres de rayon. Sachant que $R' = 6$, on demande à quelle distance maxima on peut placer ce volant. Il est indispensable de tenir compte du poids de l'arbre, dont la densité est de 7,8.

V. — Une maîtresse poutre en bois à section rectangulaire, dont les dimensions sont dans le rapport $\frac{h}{b} = \frac{2}{3}$, est posée à plat sur deux appuis de niveau. Sachant que sa longueur est de 8 mètres et qu'elle doit supporter une charge de 20.000 kilogrammes uniformément répartie et une charge de 4.000 kilogrammes en un point situé à 3 mètres d'une extrémité, calculer les dimensions de la poutre en sapin. ($R' = 0,6$.)

VI. — Une barre de fer à section carrée, longue de 750 millimètres, est horizontale et fixée dans un mur à l'une de ses extrémités A. A l'autre extrémité B, elle supporte une poulie fixe destinée à élever des sacs de farine de 100 kilogrammes. On supposera que la résultante du poids de la barre, de la poulie, des cordes, des frottements, passe par B et vaut 50 kilogrammes, et l'on calculera le côté de la section carrée.

XXVII. — TORSION

259. Définition. — Lorsqu'un organe est animé d'un mouvement de rotation autour de son axe, les fibres les plus éloignées ont une tendance à se mettre en mouvement les premières. On donne le nom d'**efforts de torsion** aux causes de ce phénomène, qui a pour effet de tordre les pièces autour de leur axe. Ces efforts s'exercent dans un plan perpendiculaire à la longueur, mais leur direction est variable et ne passe jamais par l'axe. Si l'on examine une section faite par ce plan, on constate qu'après la torsion un point quelconque du contour extérieur a décrit un certain arc sans que sa distance au centre ait varié.

260. Formule pratique. — Pour résoudre les problèmes sur la torsion, on écrit que *le moment tordant est égal au moment de la résistance pratique de la section à la torsion :*

$$M_t = R''' \times M'_s \qquad \text{ou} \qquad PL = R''' \times M'_s.$$

Le moment tordant est le moment de la force P qui produit la torsion par rapport à l'axe longitudinal de la pièce :

$$M_t = PL$$

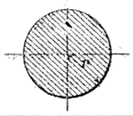
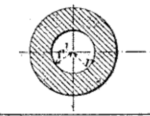
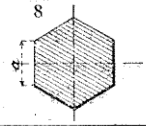
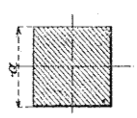
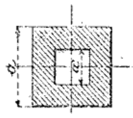
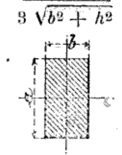
(L, plus courte distance de P à l'axe).

Le moment de résistance pratique de la section dépend de la matière qui la constitue et de son groupement autour de l'axe, c'est-à-dire de la section; c'est le produit de ces deux éléments R''', résistance pratique à la torsion, que l'on trouve dans le premier problème obtenu ci-dessous, et M'_s, module de torsion de la section; il est fourni par le deuxième tableau.

RÉSISTANCE PRATIQUE A LA TORSION PAR MILLIMÈTRE CARRÉ DE SECTION DE QUELQUES MATÉRIAUX USUELS

Fer.............	4	Acier fondu...	10	Hêtre.........	0,4
Fonte..........	2	Cuivre rouge..	4	Chêne.........	0,5
Acier cémenté...	6	Bronze et laiton.	1,5	Sapin.........	0,3

261. MODULE DE TORSION DE QUELQUES SECTIONS USUELLES

Forme	*Circulaire pleine*	*Circulaire creuse*	*Hexagonale pleine*
Surface	πr^2	$\pi(r^2-r'^2)$	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
Module	$\frac{1}{2}\pi r^3$	$\frac{1}{2}\pi\frac{r^4-r'^4}{r}$	$\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{8}a^3$
			
Forme	*Carré plein*	*Carré creux*	*Méplat*
Surface	a^2	$a^2-a'^2$	bh
Module	$\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$	$\frac{(a^3a'^3)\sqrt{2}}{6}$	$\frac{b^2h^2}{3\sqrt{b^2+h^2}}$
			

262. Application. — *Calculer la force commune du couple de torsion que l'on peut exercer aux extrémités du levier de* $0^m,30$ *d'une clef à béquille dont la tige en fer a* 20 *millimètres de diamètre.* ($R''' = 4$ *kilogrammes.*)

On a d'après (1) :

$$P \times 300 = 4 \times \frac{\pi r^3}{2},$$

d'où

$$P = \frac{2\pi 10^3}{300} = \frac{6.283,6}{300} = 20^{kg},94.$$

263. Calcul des arbres de transmission. — Pour les arbres pleins en fer, il suffit d'appliquer la formule

$$PL = R'' \times \frac{\pi r^3}{2} = 2\pi r^3,$$

$$r^3 = \frac{PL}{2} \times \frac{1}{\pi},$$

$$(1) \qquad r = \sqrt[3]{\frac{PL}{2} \times \frac{1}{\pi}},$$

Assez généralement on connaît non pas directement PL, mais la puissance à transmettre en chevaux-vapeur A et le nombre de tours à la minute n. On peut aisément en déduire PL :

$$75A \times \text{kgm} = P \times \text{chemin parcouru en une seconde},$$

$$75A = P \times 2\pi \left(\frac{L}{1.000}\right) \text{m} \times \frac{n}{60},$$

$$75A = PL \times \frac{\pi n}{30.000},$$

$$(2)\, PL = \frac{2.250.000A}{\pi n}.$$

En portant cette valeur de PL dans la relation (1), il vient :

$$r = \sqrt[3]{\frac{2.250.000A}{\pi n} \times \frac{1}{2\pi}},$$

$$r = 48,5 \sqrt[3]{\frac{A}{n}},$$

$$d = 2r = 97 \sqrt[3]{\frac{A}{n}}.$$

Pourtant beaucoup de constructeurs recommandent l'emploi de la formule :

$$d = 120 \sqrt[3]{\frac{A}{n}};$$

cela tient à ce que : 1° les arbres résistent beaucoup moins bien dès que le travail ou le moteur sont irréguliers; 2° les poulies, volants et roues dentées calées sur l'arbre le soumettent à des efforts de flexion.

264. Formule a employer pour trouver le diamètre d'un arbre plein dans différents cas de régularité du moteur et du travail

	ARBRES EN FER	ARBRES EN FONTE
Travail et moteur régulier...	$d\,\text{mm} = 96\sqrt[3]{\frac{A}{n}}$	$d\,\text{mm} = 122\sqrt[3]{\frac{A}{n}}$
Travail régulier et moteur irrégulier...............	$d\,\text{mm} = 100\sqrt[3]{\frac{A}{n}}$	$d\,\text{mm} = 126\sqrt[3]{\frac{A}{n}}$
Travail irrégulier et moteur régulier.................	$d\,\text{mm} = 107\sqrt[3]{\frac{A}{n}}$	$d\,\text{mm} = 135\sqrt[3]{\frac{A}{n}}$
Travail et moteur irréguliers.	$d\,\text{mm} = 114\sqrt[3]{\frac{A}{n}}$	$d\,\text{mm} = 144\sqrt[3]{\frac{A}{n}}$
Travail intermittent........	$d\,\text{mm} = 122\sqrt[3]{\frac{A}{n}}$	$d\,\text{mm} = 154\sqrt[3]{\frac{A}{n}}$
Laminoirs	$d\,\text{mm} = 135\sqrt[3]{\frac{A}{n}}$	»
Marteaux-pilons...........	$d\,\text{mm} = 170\sqrt[3]{\frac{A}{n}}$	»

265. Avantage des arbres creux. — Deux arbres de même matière, destinés à supporter le même effort de torsion, doivent avoir des modules M'_s égaux.

Or un arbre creux dont les rayons sont 100 et 80 millimètres a pour module :

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{r^4 - r'^4}{r} = 588.400\,\frac{\pi}{2}.$$

L'arbre plein doit être tel que

$$\frac{\pi r^3}{2} = 588.400\,\frac{\pi}{2},$$

$$r = \sqrt[3]{588.400} = 88^{\text{mm}},8.$$

La surface de la section droite est :

Pour l'arbre creux : $\pi\,(r^2 - r'^2) = 3.600\pi$;
Pour l'arbre plein : $\pi \times (83,8)^2 = 7.021\pi$.

Le poids du second sera donc sensiblement le double de celui du premier et, en admettant que le prix du kilogramme d'un arbre plein ne soit que les $\frac{3}{4}$ de celui d'un arbre creux, il y a encore intérêt à employer ce dernier.

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Une vis de pressoir dont le noyau a 50 millimètres de diamètre est embrassée par un écrou muni d'un l vier dont la longueur totale est de $3^m,20$. Quel effort peut être exercé à chaque extrémité, sachant que la vis est en fer ? ($R''' = 4$.)

II. — Quelle puissance peut transmettre un arbre creux en fonte de 150 et 120 millimètres de diamètre, devant faire 100 tours à la minute ? ($R''' = 1,8$.)

III. — Calculer le diamètre d'un arbre en fer qui transmet une puissance de 80 chevaux à une vitesse de 80 tours à la minute (travail intermittent).

IV. — Dans une machine à vapeur à piston, le diamètre du piston est 625 millimètres; la pression effective de la vapeur est 8 kilogrammes; le mouvement du piston est transmis par une tige en fer dont la course est 700 millimètres à une bielle de même métal longue de 800 millimètres qui supporte un effort maximum lorsqu'elle forme un angle droit avec la bielle. On demande :

1° De faire le schéma de la transmission ;

2° De calculer l'épaisseur du cylindre en fonte ($R' = 2$);

3° Le diamètre de la tige en fer ($R' = 6$) ;

4° L'effort maximum supporté par la bielle ;

5° Le diamètre de la bielle ($R' = 6$);

6° Le diamètre du tourillon d'articulation soumis à des efforts de cisaillement ($R' = 4$);

7° L'effort maximum exercé à l extrémité de la manivelle placée en porte-à-faux ;

8° La section rectangulaire de cette bielle, sachant qu'elle est soumise à la flexion, que $h = 2b$ et $R' = 6$;

9° Le diamètre de l'arbre de couche en fer ($R''' = 6$).

XXVIII. — ESSAIS DES MÉTAUX

266. Les nombres donnés par les fournisseurs pour caractériser leurs matériaux n'ont pas une signification théorique absolue. Ce sont des valeurs qui varient pour une même matière avec la composition chimique, le mode de production, le nombre d'expériences effectuées, la façon dont ces expériences ont été faites, la durée et la répétition des charges supportées. Pourtant le praticien trouvera de grands avantages à s'inspirer des chiffres donnés en les adaptant au but qu'il désire atteindre et en notant précieusement les maisons dont il aura déjà été satisfait.

D'autre part, lorsque les matériaux devront être transformés avant d'entrer dans la construction, il y aura de sérieux avantages à leur faire subir une série d'essais autres que ceux relatifs à l'extension.

267. Essais à froid. — *a*) **Texture.**— On fait une entaille à la tranche dans la barre, on achève de la rompre et l'on examine la cassure. Pour le fer, les grains doivent être fins et présenter de petits arrachements visibles à la loupe. Une cassure cristalline indique une mauvaise qualité ; dans aucun cas la section ne doit présenter de criques ou gerçures (fentes à la surface), de pailles (vides), ni de cendrures (points noirs d'oxydes).

b) **Pliage.** — Les deux portions AB et AC de la barre restant rectilignes, on leur fait faire l'angle le plus petit possible.

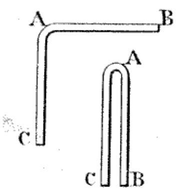


FIG. 290 et 291.

Pour la première qualité de fers, les portions sont parallèles avec un écart égal à $\frac{1}{2}$ *e*.

Les barres d'essai ont une section circulaire de 15 millimètres de diamètre, carrée de 15 millimètres de côté ou rectangulaire de 15 millimètres sur 40.

Après l'essai, les barres ne doivent présenter aucune crique.

c) Le **courbage**, qui s'opère en réunissant C et B, intéresse une région plus grande, moins cependant que le **cintrage**, qui consiste à enrouler la barre sur un tambour de rayon de plus en plus petit.

FIG. 292.

d) **Soudabilité.** — Après avoir ramené l'épaisseur à 25 millimètres, on pratique une soudure par amorce, et l'on pratique les essais précédents en se plaçant dans la position la plus défavorable.

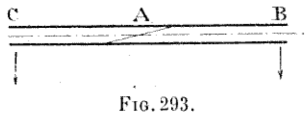


FIG. 293.

e) **Essai au choc.** — Se pratique sur une éprouvette à section carrée de 40 millimètres de côté pour la fonte et de 30 millimètres pour les autres métaux, longue de 200 millimètres reposant sur deux couteaux distants de 160 millimètres. On laisse tomber un mouton de 12 kilogrammes pour la fonte, 18 kilogrammes pour le fer et l'acier, terminé par une surface cylindrique à axe horizontal de 50 ou 30 millimètres de rayon. On cherche de quelle hauteur doit tomber le mouton pour occasionner la rupture ou bien on note combien de fois il doit tomber de la même hauteur.

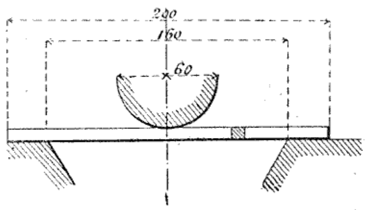


FIG. 294.

268. **Essais à chaud.** — *a*) **Perçage.** — A lieu sur un méplat dont la largeur est le triple de l'épaisseur ($l = 3e$), par exemple :

$$l = 60 \text{ millimètres} \qquad \text{et} \qquad e = 20 \text{ millimètres.}$$

Pour le fer et l'acier, on pratique au poinçon deux trous dont le diamètre varie de $\frac{l}{2}$ à $\frac{3}{4}\, l$. Selon les qualités, on laisse entre les trous une toile de 10, 12 ou 15 millimètres (*fig.* 295).

b) **Fente de l'extrémité** sur une longueur de $\frac{3}{2}\, l$.

c) **Rabattements successifs** sur une barre de 15 millimètres.

On doit pouvoir en faire trois ou quatre d'une même chaude.

d) **Exécution d'un crochet.**

Après avoir subi toutes ces opérations, un bon fer ne doit présenter aucune crique.

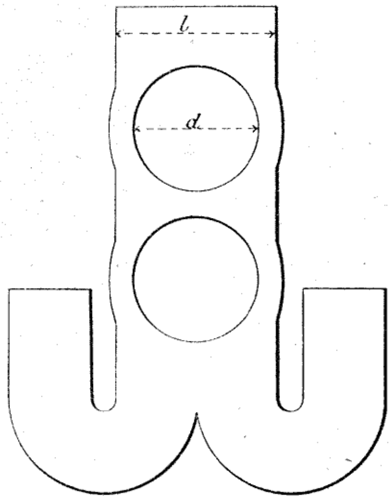


FIG. 295.

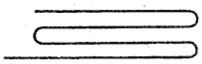


FIG. 296.

XXIX. — MOTEURS

269. Définitions. — Tout travail nécessite le déplacement ou la transformation du corps à travailler et pour cela l'emploi d'un outil actionné par des machines simples ou composées. Ex. : labour de la terre, transport des matériaux, alésage d'un coussinet, percement d'une mortaise, etc...

Ces différents travaux exigent pour se produire l'action de **forces motrices ou puissance** destinées à vaincre d'autres forces qui, s'opposant au mouvement, ont reçu le nom de **résistances.**

Les puissances sont produites par des agents naturels : hommes, animaux, vent, eau, gaz, vapeurs, combinaisons chimiques, etc..., qui sont mis en œuvre par des **machines motrices** ou **moteurs.**

270. Classification. — Selon l'agent qu'ils utilisent et suivant leur mode d'action, on peut distinguer :

1° Les *moteurs animés :* homme, animaux ;

2° Les *moteurs hydrauliques :* roues, turbines, béliers ;

3° Les *moteurs à vapeur :* machines à piston, turbines ;

4° Les *moteurs à explosion :* à gaz, à essence, à pétrole, à alcool ;

5° Les *moteurs pneumatiques :* moulins à vent, bateaux à voile, moteurs à air chaud, moteurs à air comprimé ;

6° Les *moteurs électriques.*

Moteurs animés

271. Emploi. — Le travail de l'homme et des animaux a été le premier utilisé ; il l'a été de tous les temps et le sera encore dans bien des circonstances.

272. Avantages. — Les moteurs animés se plient facilement aux changements de direction, de vitesse et d'intensité (coup de collier).

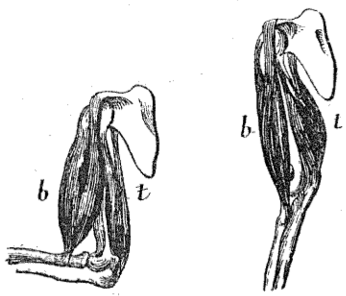


Fig. 297 et 298.

Le corps est, en effet, une machine merveilleusement agencée : les os sont des leviers ; leurs articulations sont des axes de rotation et les muscles en se contractant produisent des puissances.

Les extrémités de deux os articulés sont recouvertes d'une matière cartilagineuse molle et flexible qui empêche l'usure des parties rigides et adoucit les frottements. Ceux-ci sont encore atténués par un liquide gras appelé synovie que renferme une sorte de sac situé entre les deux os. Enfin des ligaments très forts consolident l'articulation.

Si l'on considère que l'énergie des moteurs animés est produite par la combustion du carbone et de l'hydrogène des comestibles absorbés, on constate que leur rendement est de 20 0/0. Ce nombre est rarement atteint par les autres moteurs.

273. Inconvénients. — Par contre, le prix du carbone et de l'hydrogène des aliments est beaucoup plus élevé que celui des combustibles ordinaires, de sorte que le prix de revient du cheval-heure n'est pas du tout avantageux.

D'autre part, l'emploi des moteurs animés ne peut se faire d'une façon continue ; le repos leur est nécessaire.

274. Travail produit. — Si l'on désigne par F l'effort exercé, par V la vitesse en une seconde, par t la durée en secondes du travail, sa valeur sera donnée par la formule :

$$T \text{ kgm} = F \text{ kg} \times V \text{ m} \times t \text{ sec.}$$

275. Travail de l'homme. — Il s'exerce de différentes manières, parmi lesquelles on peut distinguer : 1° le travail des bras et des mains ; 2° celui des jambes ; 3° le déplacement du poids du corps ; 4° le transport des matériaux avec ou sans véhicule.

a) Les **bras** actionnent directement certains **outils** : le sarcloir du jardinier, la truelle du maçon, le rabot du menuisier, le marteau du forgeron et la lime de l'ajusteur. Ils agissent sur différents **leviers** : pinces, pompes, ciseaux, cisailles, tenailles, soufflets de forge, machines à écrire, et mettent en mouvement les **manivelles** de la meule, du treuil, de la machine à percer. Un homme actionnant une manivelle peut produire un effort moyen de 8 kilogrammes à l'extrémité d'un levier de $0^m,35$ en faisant 20 tours à la minute, ce qui donne sensiblement une vitesse linéaire de $0^m,75$ par seconde. Puissance :

$$T = 0^m,75 \times 8 \text{ kg} = 6 \text{ kilogrammètres par seconde.}$$

La durée du travail journalier pouvant être de 8 heures.

$$T = 6 \text{ kgm} \times 3.600 \times 8 = 172.800 \text{ kilogrammètres.}$$

C'est encore la force musculaire des bras qu'exige l'élévation des fardeaux à la main, à la pelle, à l'aide d'une poulie, d'un palan ou par le lancement.

A l'aide d'une poulie, un manœuvre peut pendant 6 heures dans la journée élever 20 kilogrammes à une vitesse linéaire de $0^m,18$:

$$T = 20 \times 0,18 \times 3.600 \times 6 = 77.760 \text{ kilogrammètres.}$$

Son action sur le levier horizontal d'un pressoir est de 12 kilogrammes avec une vitesse de $0^m,60$ pendant 8 heures :

$$T = 12 \times 0,60 \times 3.600 \times 8 = 207.360 \text{ kilogrammètres.}$$

Avec une pelle, il ne pourra élever que $2^{kg},5$ à une hauteur de $1^m,20$ en 3 secondes, mais la durée du travail journalier est de 10 heures :

$$T = 2,5 \times \frac{1,20}{3} \times 3.600 \times 10 = 36.000 \text{ kilogrammètres.}$$

Par contre, un ouvrier peut momentanément exercer un effort de 30 à 50 kilogrammes sur certains outils : tenailles, étau ordinaire, clef de serrage, plane, tarière de charpentier.

b) C'est par les **jambes** que sont mues les pédales du tour, de la meule du rémouleur, de la machine à coudre et de la bicyclette. C'est leur effort musculaire qui permet les déplacements horizontaux et verticaux.

c) Lorsqu'il agit en déplaçant le **poids de son corps**, ce qui est une fonction naturelle, l'homme produit le maximum de travail. Dans la roue des carriers, un homme de 70 kilogrammes possède une vitesse relative de $0^m,12$ et peut travailler pendant 8 heures :

$$T = 70 \times 0,12 \times 3.600 \times 8 = 241.920 \text{ kilogrammètres.}$$

Le même peut 400 fois dans une journée s'élever à une hauteur de 10 mètres à l'aide d'une échelle :

$$T = 70 \times 10 \times 400 = 280.000 \text{ kilogrammes.}$$

Pour utiliser son travail dans ce cas, il se place dans un plateau vide situé à l'une des extrémités d'une corde qui passe sur une poulie et supporte le fardeau à élever à l'autre extrémité.

En pente douce ou dans un escalier, le voyageur peut gravir $0^m,15$ par seconde ; mais, avec une charge égale à son poids (sac de grain ou de farine); sa vitesse verticale est réduite à $0^m,04$ pendant 6 heures. Dans le premier cas,

$$T = 70 \times 0,15 \times 3.600 \times 8 = 302.400 \text{ kilogrammètres,}$$

dans le second,

$$T = 140 \times 0,04 \times 3.600 \times 6 = 120.960 \text{ kilogrammètres.}$$

d) Dans le **transport des fardeaux** avec ou sans véhicule (brouette, voiture à bras, rouleaux), l'homme doit vaincre les résistances de frottement et, à l'aide du plan incliné, la force de la pesanteur :

Sur terrain plat, une charge de 60 kilogrammes sur une brouette offre une résistance de 8 kilogrammes, la vitesse atteint $1^m,20$, la durée est de 5 heures si le retour se fait à vide :

$$T = 8^{kg} \times 1^m,20 \times 3.600 \times 5 = 172.800 \text{ kilogrammètres.}$$

276. Travail des animaux. — Dans nos pays, le cheval surtout, le bœuf, l'âne, le mulet, parfois la vache et le chien, sont utilisés comme moteurs dans la traction des véhicules et dans les travaux agricoles. Ailleurs, on emploie le renne, l'éléphant, le chameau et le dromadaire.

a) **Traction des véhicules.** — C'est le cheval au pas qui peut produire le plus grand travail journalier : Pendant 8 heures par jour, il peut, à la vitesse de $1^m,25$, exercer un effort de traction de 60 kilogrammes correspondant à une charge de 1.200 kilogrammes sur une charrette pesant 800 à 900 kilogrammes.

Travail journalier :

$$T = 60 \times 1,25 \times 3.600 \times 8 = 2.160.000 \text{ kilogrammètres.}$$

Puissance moyenne ou travail par seconde en chevaux-vapeur :

$$A = \frac{60 \times 1,25}{75} = 1 \text{ cheval-vapeur.}$$

Beaucoup de chevaux n'atteignent pas ce chiffre. Par contre, dans les montées rapides, dans les chemins boueux et dans les travaux agricoles, l'effort dépasse souvent 120 kilogrammes et peut atteindre 400 kilogrammes pendant une courte durée (coup de collier).

Au trot, le cheval fait $2^m,50$ par seconde, mais ne peut exercer qu'un effort de traction de 25 kilogrammes pendant 4 heures par jour :

$$T = 25 \times 2,5 \times 3.600 \times 4 = 900.000 \text{ kilogrammètres.}$$

En moyenne, les animaux de trait peuvent travailler 8 heures par jour en exerçant respectivement :

Le cheval au pas,	un effort de	60 kg.	à la vitesse de	$1^m,25$	par seconde.
— au trot,	—	25	—	2 ,50	—
Le bœuf au pas,	—	80	—	0 ,80	—
Le mulet au pas,	—	30	—	1 ,10	—
L'âne au pas,	—	15	—	1 ,00	—

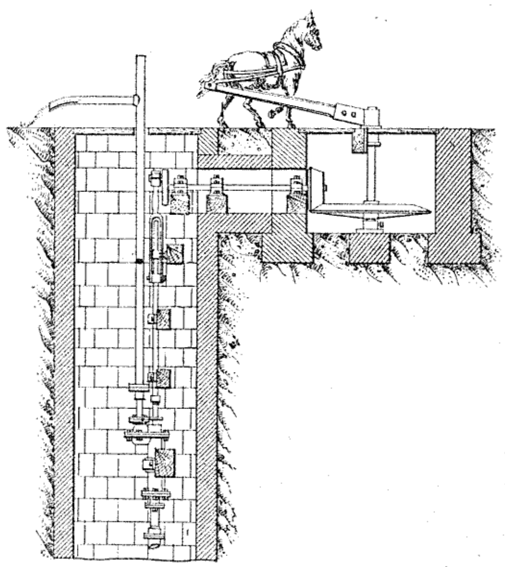


Fig. 299.

L'action du bœuf est donc moins rapide, mais plus intense que celle du cheval ; aussi on l'emploie souvent pour des labours profonds et les lourds charrois en agriculture.

Comme bêtes de somme, les animaux produisent un travail considérablement moindre : le cheval supporte seulement une charge de 100 à 120 kilogrammes qu'il peut élever verticalement de $0^m,20$ par seconde.

b) **Manèges circulaires.** — Ils sont constitués par un arbre vertical recevant son mouvement de rotation d'un levier sur lequel un animal exerce un effort de traction. On les utilise pour actionner des pompes d'arrosage et d'irrigation (*fig.* 299), quelquefois des machines-outils.

c) **Manèges à plan incliné.** — Les animaux y agissent comme l'homme, dans le treuil des carriers, en déplaçant leur propre poids. Ils gravissent (mouvement relatif) un plan incliné monté sur rouleaux dont le mouvement est communiqué aux axes de transmission : batteuses agricoles.

Le travail produit est assez considérable, mais les chevaux « s'usent » vite.

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Un labour profond ($0^m,40$) en terre forte exige un effort de traction de 150 kilogrammes. Combien faudrait-il y employer : 1° de chevaux ? 2° de bœufs ?

II. — Un cultivateur doit faire dans un terrain distant de 3 kilomètres de sa ferme des charrois de betteraves. Ces charrois nécessitent sur la terre meuble un effort moyen de 180 kilogrammes, et sur route un effort de 75 kilogrammes.

Le cultivateur possède quatre chevaux A, B, C, D capables d'efforts respectifs de 80, 80, 60 et 55 kilogrammes et trois voitures M, N, P. Le chargement et le déchargement occupent chacun un ouvrier et durent 1 heure, le cultivateur possède en outre un charretier.

On demande : 1° comment le cultivateur doit organiser son travail; 2° combien de charrois sont effectués dans une journée de 8 heures; 3° à combien revient un charroi, sachant que la nourriture d'un cheval revient à 2 fr. 50 par jour de travail et que le salaire d'un ouvrier est de 3 francs; 4° à combien reviendrait un charroi si le cultivateur possédait en moins le cheval A.

III. — Sachant que le salaire d'un manœuvre est de 3 francs. Calculer le prix de revient du cheval-heure lorsque ce manœuvre agit : 1° sur une manivelle; 2° sur une poulie; 3° sur un levier horizontal; 4° sur une pelle; 5° sur une roue des carriers; 6° lorsqu'il monte à l'échelle; 7° lorsqu'il monte des sacs de grain à l'escalier. Disposer ces différentes valeurs dans un tableau.

XXX. — HYDRAULIQUE

277. Définitions. — L'eau, comme tous les liquides, est un corps **pesant** ; **fluide**, c'est-à-dire dont les molécules peuvent se déplacer sans frottement l'une par rapport à l'autre ; pratiquement **incompressible**, c'est-à-dire que son volume ne change pas quelle que soit la pression qu'il supporte. Il résulte de la définition que l'eau épouse la forme des vases qui la contiennent ; elle en occupe le fond.

L'**hydrostatique** étudie les propriétés des liquides en équilibre.

L'**hydrodynamique** s'occupe des phénomènes qui accompagnent l'écoulement des liquides et leurs autres mouvements.

L'**hydraulique** est la science qui applique les lois déduites des études ci-dessus à la construction des machines destinées soit à l'élévation de l'eau (pompes et béliers), soit à l'obtention de fortes pressions (presse hydraulique et accumulateurs), soit à l'utilisation comme force motrice de l'eau en mouvement (roues et turbines hydrauliques).

278. Principes d'hydrostatique. — 1° La surface de l'eau en équilibre dans un vase est horizontale ;

2° Sous l'action de la pesanteur, des pressions s'exercent en tous les points de la masse liquide.

La pression exercée sur une surface est égale au poids d'une colonne d'eau ayant pour base cette surface et pour hauteur la distance de son centre de gravité au niveau du liquide.

3° Tout corps plongé dans un liquide éprouve de la part de celui-ci une poussée verticale de bas en haut égale au poids du liquide déplacé ;

4° La pression exercée sur un liquide se transmet dans tous les sens et intégralement.

279. Chute d'eau. — On désigne sous ce nom le passage brusque d'une rivière d'un niveau supérieur à un niveau moins élevé. La partie supérieure du cours s'appelle **bief d'amont**; et la partie inférieure, **bief d'aval.**

Il existe de nombreuses chutes naturelles, surtout dans les pays accidentés (versants des Alpes, des Pyrénées et du Massif Central) et dans les vallées encaissées du Rhin (Schaffhouse), de la Loire, du Rhône et de ses affluents, Isère, Drôme, Ardèche. Sur un faible parcours, la Fure présente neuf chutes de 5 à 13 mètres de hauteur fournissant aux papeteries de Rives et de Renage différentes puissances variant de 60 à 150 chevaux-vapeur. Le lac du Crosey fournit, à deux papeteries de Grenoble et Domène, 700 à 1.200 chevaux à l'aide de chutes de 220 et 150 mètres. Les papeteries d'Annonay (Montgolfier, Canson) sont actionnées par les chutes de la Cance. Un volume ne suffirait pas pour signaler toutes les usines : minoteries, scieries, élévations d'eau, produits alimentaires, filatures et tissages, poteries, constructions mécaniques, aciéries, etc., qui empruntent leur énergie aux chutes d'eau. Beaucoup pourtant sont restées inutilisées parce qu'on ne pouvait les employer sur place. Depuis que les progrès en électricité ont permis de réaliser à bon compte le **transport de la force à distance,** le développement des installations hydrauliques a été considérable et a contribué aux progrès de la production électrique sous toutes ses formes, notamment de l'éclairage.

D'autres fois, il est possible de créer une chute artificielle, soit à l'aide d'une dérivation, soit en établissant un barrage.

Dérivation. — Considérons une rivière dont le niveau présente une différence de 25 mètres entre deux points A et B. S'il est possible d'établir entre A et B un canal ne demandant pour l'écoulement qu'une dénivellation de 5 mètres, on conçoit qu'en B l'eau du canal tombera d'une hauteur de 20 mètres pour rejoindre la rivière. Ex. : Un canal prend à Châlons l'eau de la Marne et l'amène à Condé, où sa chute utilisée par des turbines actionne des pompes élévatoires destinées à alimenter le canal de l'Aisne à la Marne.

Barrage. — Ce sont des travaux en terre, en maçonnerie ou en charpentes établis au travers d'un cours d'eau pour retenir les eaux en amont. Lorsque l'eau atteint et dépasse la partie supérieure du barrage, elle se déverse en formant chute. Ex. : C'est un barrage établi dans un bras de la Seine à Marly-le-Roi qui permet à des roues hydrauliques d'actionner les pompes envoyant l'eau au château de Versailles.

Dans tous les cas, la différence de niveau entre les biefs d'amont et d'aval s'appelle **hauteur de chute.** Le **débit** ou **dépense** est le volume d'eau qui s'écoule en une seconde.

La hauteur s'obtient toujours à l'aide d'un nivellement; mais le débit se calcule différemment selon qu'il existe ou non des travaux dans la rivière, et selon que l'écoulement a lieu par **vanne** ou **déversoir**; cette opération est le **jaugeage.**

280. Jaugeage d'un cours d'eau libre. — Le débit Q est évidemment égal à la section de passage S multipliée par la vitesse moyenne que l'on admet être égale à 0,80 de la vitesse à la surface, u :

$$Q = 0{,}80 S u.$$

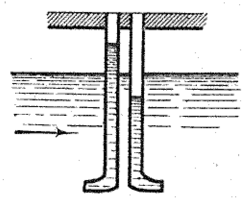


Fig. 300.

Celle-ci peut s'obtenir à l'aide d'un disque de chêne formant **flotteur,** ou par d'autres procédés comme le tube de Darcy (*fig.* 300), dans lequel la puissance vive de l'eau produit une pression ou une dépression selon que l'orifice est tourné vers l'amont ou l'aval.

281. Jaugeage de l'eau par vanne. — La vanne est une paroi plane qui peut se déplacer entre deux glissières en ménageant au-dessus d'un seuil horizontal un orifice de largeur constante, mais de hauteur variable à volonté (*fig.* 301-302).

Or, quand un liquide est en équilibre dans un récipient (*fig.* 303), si l'on pratique un orifice dans la paroi, l'eau s'écoule avec la même vitesse que si elle tombait en chute libre :

$$v = \sqrt{2gH} = 4{,}43\ \sqrt{H},$$

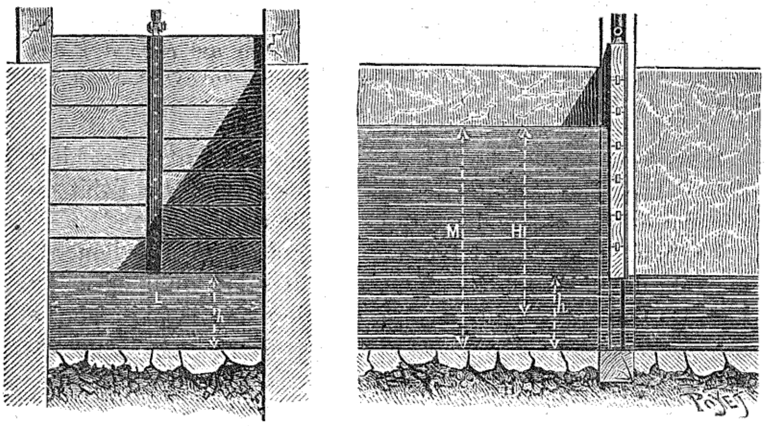


FIG. 301 et 302.

H désignant la distance du niveau supérieur au centre de gravité de la section S ; on l'appelle **hauteur de charge.**

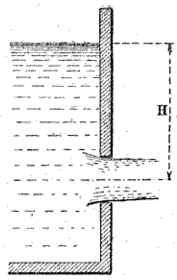


FIG. 303.

Le débit devrait être égal à :

$$Q = Sv = S\ \sqrt{2gH},$$

mais on constate que le filet d'eau en mouvement se contracte un peu après sa sortie et diminue de section, de sorte qu'il convient de multiplier par un coefficient $m < 1$ variant de 0,5 à 0,9 le débit théorique, pour avoir la dépense réelle :

$$Q = mS\ \sqrt{2gH}.$$

Pour une vanne verticale,		$m = 0{,}625$	environ.
—	inclinée $\frac{2}{1}$,	$m = 0{,}74$	—
—	— $\frac{1}{1}$,	$m = 0{,}80$	—

Lorsqu'on connaît le niveau M au-dessus du seuil ou radier d'amont et la hauteur h de l'orifice, on fait $H = M - \frac{1}{2}h$:

$$Q = mLh\sqrt{2gH}.$$

Pour une vanne verticale de largeur $L = 1^m,60$, de hauteur d'orifice $h = 0^m,40$ et de charge d'eau $H = 2$ mètres le débit :

$$Q = 0,625 \times 1,60 \times 0,40 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 2},$$
$$Q = 2^{m^3},506 \quad \text{ou} \quad 2.506 \text{ litres.}$$

282. Jaugeage de l'eau par déversoir. — Un déversoir est un mur vertical en maçonnerie établi dans un cours d'eau (*fig.* 304-305) pour obliger le liquide à s'écouler au-dessus de sa crête horizontale.

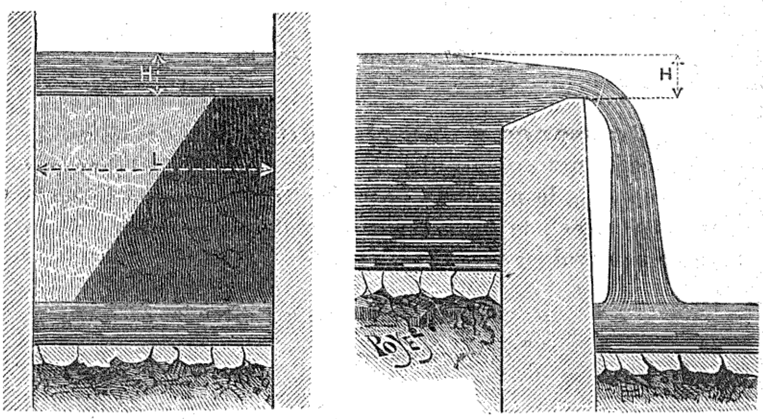


FIG. 304 et 305.

On appelle épaisseur de la lame d'eau H, la différence de hauteur qui existe entre le niveau de l'eau à 1 mètre en amont et la crête horizontale. On ne mesure point directement la hauteur au-dessus de la crête, parce qu'il se produit toujours à cet endroit une dénivellation due à l'écoulement et qui réduit à $e = 0,80$ H l'épaisseur de l'eau.

La hauteur de charge sur le centre de gravité est en réalité :

$$H - \frac{e}{2} = H - 0{,}40H = 0{,}60H,$$

de sorte que la vitesse d'écoulement est :

$$v = \sqrt{2g \times 0{,}60H},$$

et le débit

$$Q = mSv = 0{,}65L \times 0{,}8H \times \sqrt{0{,}60} \times \sqrt{2gH},$$
$$Q = 0{,}403LH\sqrt{2gH}.$$

Le débit d'un déversoir de largeur $L = 3^m{,}50$, dont la lame d'eau a une épaisseur $H = 0^m{,}10$ est de :

$$Q = 0{,}403 \times 3{,}50 \times 0{,}1 \times \sqrt{1{,}962},$$
$$Q = 0^{m3}{,}197 \quad \text{ou} \quad 197 \text{ litres}.$$

283. Puissance d'une chute d'eau. — Si h est la différence de niveau entre les biefs d'amont et d'aval (hauteur de chute), et q le poids de l'eau qui tombe en une seconde (débit en litres), le travail par seconde ou puissance de la chute a pour valeur :

$$P = q \times h \text{ kilogrammètres par seconde},$$
$$P = \frac{qh}{75} \text{ chevaux-vapeur}.$$

La vitesse de l'eau dans le canal d'amenée (bief d'amont) doit être aussi faible que possible, $0^m{,}20$ à $0^m{,}40$ si la rivière charrie des limons et des sables, pour éviter les dépôts. Dans ces conditions, on peut négliger la puissance vive de l'eau en amont ; si la vitesse était plus considérable, il y aurait lieu d'en tenir compte :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{qv^2}{2g} \text{ kilogrammètres}.$$

Puissance totale :

$$qh + \frac{qv^2}{2g} = q\left(h + \frac{v^2}{2g}\right) \text{ kilogrammètres.}$$

284. Pertes. — Il est impossible d'utiliser entièrement la puissance d'une chute, parce qu'il y a de nombreuses pertes dont les causes peuvent se ramener à trois :

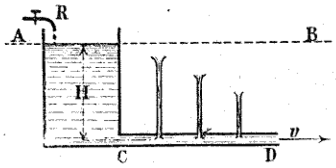


Fig. 306.

1° **Frottement de l'eau contre les parois des canaux et des conduites.** — Cette perte est mise en évidence par l'expérience que représente la figure 306.

Le niveau AB est maintenu constant à l'aide d'un robinet R. La conduite CD de longueur L mètres et de diamètre d mètres présentent des orifices qui montrent que la perte de charge dépend de la longueur de la conduite.

Cette perte se traduit pratiquement par une diminution de vitesse à la sortie :

$$v = \sqrt{2gH} \times \sqrt{\frac{40d}{50d + L}}.$$

Il existe aussi des frottements dans le moteur.

2° **Choc de l'eau à son arrivée au récepteur.** — Toutes les expériences relatives au choc ont permis de vérifier que les quantités de mouvement [1] étaient égales avant et après le choc. Soit m la masse de l'eau animée d'une vitesse v frappant la roue de masse m' animée d'une vitesse v' ; la vitesse après le choc u est telle que :

$$mv + m'v' = (m + m')\,u,$$
$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

La puissance vive, qui était :

$$(1) \qquad \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v'^2,$$

[1] La quantité de mouvement d'un corps est égale au produit de sa masse par sa vitesse.

devient :

$$(2) \qquad \frac{1}{2}(m + m')\,u^2 = \frac{1}{2}(m + m')\left(\frac{mv + m'v'}{m + m'}\right)^2.$$

La perte est égale à la différence entre (1) et (2) :

$$\frac{1}{2(m+m')}\left(\underline{m^2v^2} + mm'v^2 + m'^2v^2 + \underline{\underline{mm'v'^2}} - \underline{m^2v^2} - 2mm'vv' - \underline{\underline{m'^2v'^2}}\right),$$

ou

$$\frac{1}{2(m+m')}\left[mm'(v^2 + v'^2 - 2vv')\right] = \frac{mm'}{2(m+m')}(v - v')^2.$$

Ex. : Considérons une masse m de $\frac{200}{g}$ kilogrammes d'eau, animée d'une vitesse v de 3 mètres, arrivant sur une roue de masse $m' = \frac{2.800}{g}$ kilogrammes au repos, c'est-à-dire $v' = 0$; elle se mettra en mouvement :

$$\frac{200}{g} \times 3 + 0 = \frac{2.800 + 200}{g} \times u, \qquad u = \frac{600}{3.000} = 0{,}2.$$

Perte :

$$\frac{200}{2g} \times 3^2 + 0 - \left(\frac{3.000}{2g} \times \overline{0{,}2}^2\right) = \frac{1}{2g}(1.800 - 120)$$
$$= \frac{1.680}{19{,}62} = 85 \text{ kilogrammètres.}$$

Pour une roue en marche, la perte est moins considérable ; en supposant $v' = 1^m{,}50$, on a :

$$\frac{200}{g} \times 3 + \frac{2.800}{g} \times 1{,}5 = \frac{3.000}{g} \times u,$$
$$u = \frac{600 + 4.200}{3.000} = 1^m{,}60.$$

Perte :

$$\frac{1}{2g} \times [(260 \times 3^2 + 2.800 \times 1{,}5^2) - 3.000 \times 1{,}6^2] = 21 \text{ kilogrammètres.}$$

3° **Puissance vive de l'eau à sa sortie du moteur.** — C'est autant de travail inutilisé, et cette perte, comme les précédentes, est inévitable :

$$p = \frac{1}{2}\frac{q}{g}\,w^2.$$

285. Rendement d'un moteur hydraulique. — C'est le rapport entre le travail disponible sur l'arbre P_u et la puissance de la chute P :

$$k = \frac{P_u}{P}.$$

Nous rappelons que $P - P_u$ est le travail perdu, c'est-à-dire : travail de frottement + travail absorbé par le choc + puissance vive de l'eau à la sortie.

286. Installations des chambres d'eau des moteurs. — Il existe deux grandes catégories de moteurs hydrauliques : les **roues**

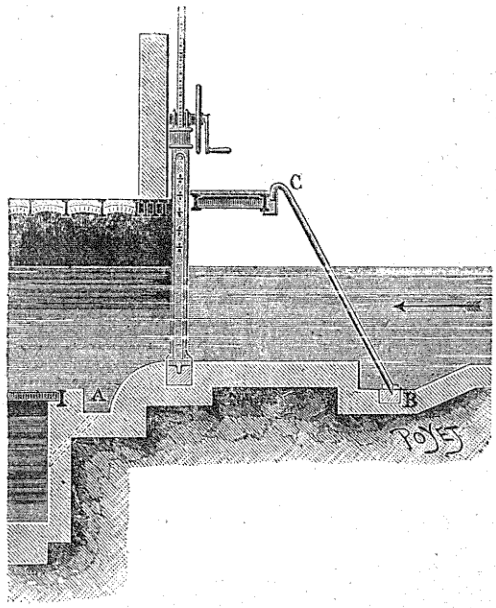


FIG. 307.

et les **turbines** auxquelles on peut adjoindre les **roues à impulsion** à grande vitesse. L'installation de ces moteurs peut être très variable, mais généralement on ménage une chambre d'eau qui présente les caractères suivants (*fig.* 307).

On assure aux canaux d'amenée une section suffisante pour que le débit dont on dispose puisse s'écouler avec une vitesse moyenne de $0^m,50$ à $0^m,60$. La chambre proprement dite du moteur doit être assez large pour que l'eau n'éprouve ni contraction, ni remous avant de pénétrer dans le récepteur.

Il est indispensable de placer dans le canal d'amont, en avant de la chambre, une grille CB formée de barreaux en fer assez serrés pour empêcher le passage des corps flottants, mais assez espacés pour permettre à l'eau de traverser sans contraction sensible ni perte de charge, de telle sorte que son niveau soit le même en amont et en aval du grillage.

Afin d'arrêter les corps lourds et durs qui pourraient être entraînés, on ménage en avant et en arrière du grillage deux sabliers B et A. Il y a avantage à mettre ce dernier A en communication avec l'aval par une ouverture circulaire de 20 à 25 centimètres de diamètre. En temps ordinaire on la bouche avec un tampon ou une petite vanne ; et l'on peut, en l'ouvrant, non seulement opérer le nettoyage, mais encore mettre à sec la chambre d'eau.

XXXI. — ROUES HYDRAULIQUES

287. Emploi. — Les roues ont été les premiers moteurs employés, même dans l'eau courante sans chute (roues pendantes). Elles le sont de moins en moins à cause du prix élevé de leur installation, de la complication de leur mécanisme et de leur rendement inférieur. Pourtant on les rencontre encore assez fréquemment dans les moulins par exemple ; d'autre part, la modification des canaux pouvant entraîner des frais considérables, il y a parfois avantage à remplacer une roue existante, lorsqu'elle est usée, par une roue de même nature.

288. Description. — Une roue se compose généralement de deux couronnes circulaires de même axe et de même rayon appelées **jantes** AMB (*fig.* 308). Elles sont réunies par six ou huit bras ED, entretoisés ou non, à un moyeu central EI calé sur l'arbre moteur horizontal O qui repose à ses extrémités, par deux coussinets, sur un massif en maçonnerie. La transmission est faite à l'aide d'engrenages multiplicateurs (*fig.* 312).

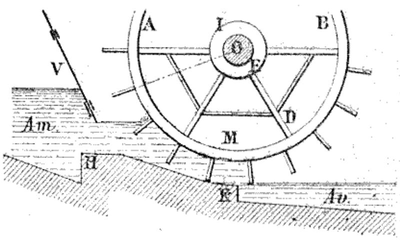


FIG. 308.

Les jantes portent des aubes planes (palettes) ou courbes, ou bien des augets selon le genre de la roue.

Celle-ci est placée dans une chambre d'eau limitée à sa partie inférieure par un **coursier** HK : c'est un seuil en maçonnerie qui épouse sensiblement la forme du moteur pour éviter le passage de l'eau en dehors de la roue, et qui présente à l'aval un ressaut K destiné à faciliter l'écoulement de l'eau à sa sortie. Les parois latérales ou **bajoyers** sont verticales et très proches de la roue ; le bief d'aval est libre ; celui d'amont est en partie obturé par une **vanne** V, déjà décrite, qui sert à régler le débit. Cette vanne se relève ou s'abaisse à l'aide d'un volant-manivelle M dont l'axe porte habituellement une vis sans fin V actionnant une roue R solidaire d'un pignon P qui actionne une crémaillère C. Le schéma 309 représente les lignes primitives des organes en contact.

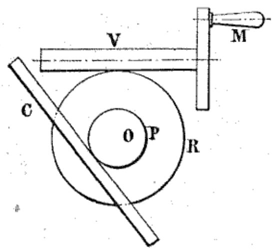


Fig. 309.

Les différentes parties de la roue sont en bois armé de ferrure ou en fonte ; l'axe est en fer ou en acier.

289. Roues en dessous. — 1° **A palettes.** — Les aubes sont des planches dont le plan passe par l'axe O (*fig.* 308) ; l'eau y arrive à la partie inférieure et agit par choc grâce à sa vitesse V. Les pertes y sont considérables, le rendement peu élevé (30 0/0).

Pourtant, grâce à la simplicité de leur construction, on les emploie encore pour des chutes inférieures à $1^m,50$.

2° **Poncelet** a cherché à réduire le choc à l'arrivée et la vitesse de sortie w en employant des aubes courbes en tôle mince (*fig.* 310-311). Si l'on désigne par v la vitesse de la roue et par V celle de l'eau à l'arrivée, celle-ci possède une vitesse relative $V - v$ qui lui permet de faire l'ascension de l'aube (*fig.* 310). Dès que sa vitesse est nulle, l'eau redescend par son propre poids et arrive à sa sortie avec une vitesse w sensiblement

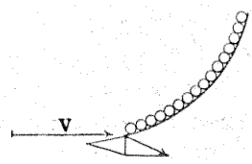


Fig. 310.

égale et directement opposée à la vitesse relative d'entrée :

$$w = V - v.$$

Pour qu'il n'y ait aucune perte de puissance vive, il faudrait que l'on ait $w = v$ et lui soit directement opposé, ce qui entraîne :

1° L'admission de l'eau à une vitesse double de celle de la roue :

$$V = w + v = 2v,$$

ce qui est possible ;

2° Une courbure des aubes tangente à la circonférence extérieure. Mais alors l'eau entrerait et sortirait très difficilement, de sorte que l'on incline ces aubes de 30° (*fig.* 310).

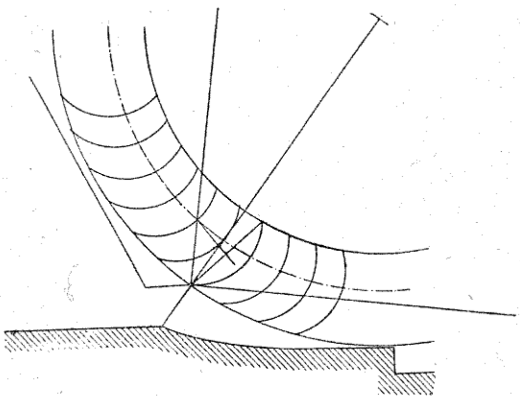


FIG. 311.

Le rendement, que l'on espérait être de 93 0/0, n'est que de 60 à 65 0/0 à cause des remous produits par la rencontre des molécules ascendantes et descendantes de l'eau. Les chutes doivent être inférieures à 1m,50.

290. Roues de côté. — Ce sont les mêmes que les précédentes dans lesquelles l'eau arrive un peu au-dessous de l'axe. L'eau y agit non seulement par choc, mais par son propre poids, de sorte que le rendement atteint 50 à 60 0/0 si l'on a soin d'établir un coursier circulaire très proche de la roue pour éviter le déversement prématuré de l'eau.

Sagebien, en dotant ces roues d'aubes profondes, 2 mètres à $2^m,50$, très rapprochées les unes des autres et inclinées dans le sens du mouvement, a permis d'atteindre en marche très lente ($0^m,70$ par seconde à la circonférence extérieure) un

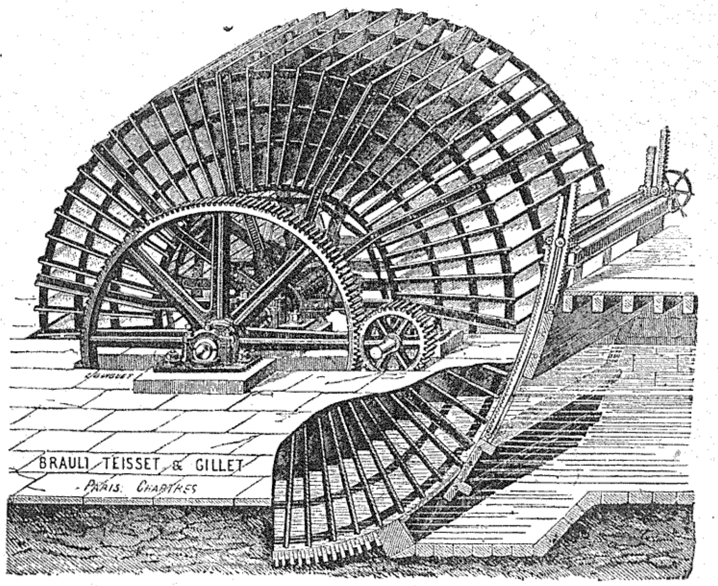


Fig. 312.

rendement de 80 0/0. Ces roues ont un diamètre de 8 à 10 mètres et peuvent débiter de 1.000 à 1.500 litres sous une chute de 1 à 3 mètres ; mais elles se prêtent mal aux variations de débit et demandent une transmission en général compliquée et coûteuse.

291. Roues en dessus (*fig.* 313). — L'eau est amenée à une faible vitesse à la partie supérieure par un coursier légèrement incliné, limité latéralement par deux parois verticales, et se déverse dans des augets à section courbe ou polygonale. La vitesse étant à peu près nulle, l'eau y agit sans choc, uniquement par son poids ; le rendement serait très élevé si l'eau ne quittait point les augets avant le niveau d'aval. Cette sortie anticipée a pour causes : 1° l'action de la force

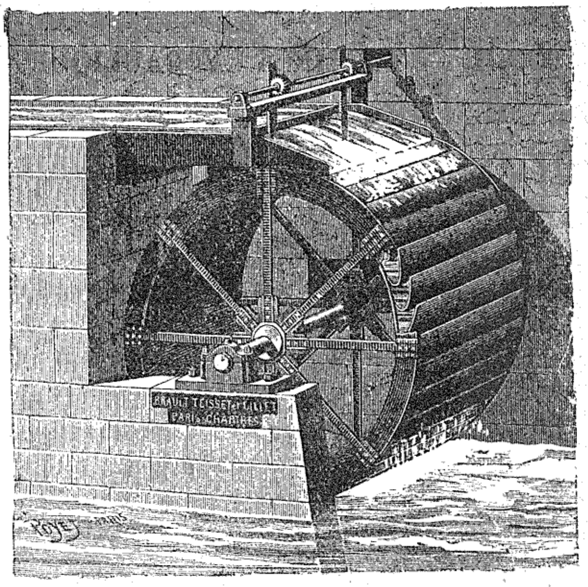


Fig. 313.

centrifuge, d'où nécessité de réduire la vitesse à $1^m,50$ ou 2 mètres ; 2° l'abaissement de la paroi extérieure que l'on rend moins nuisible en donnant une forme allongée à cette paroi ; mais on est limité par la nécessité d'assurer une sortie régulière au bas de la roue.

Utilisées pour des chutes de 3 à 12 mètres, ces roues peuvent atteindre un rendement de 70 0/0.

XXXII. — TURBINES HYDRAULIQUES

292. Définitions. — Les turbines sont des moteurs comprenant essentiellement (*fig.* 314) un arbre moteur AB sur lequel est calée une roue mobile T formée d'une couronne cylindrique ou légèrement conique munie d'aubes courbes.

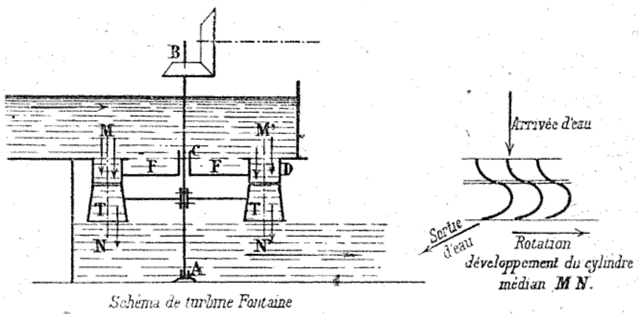


Fig. 314 et 315.

Une autre couronne D de même axe que la précédente et que l'arbre moteur, mais fixe sur le bâti, est munie d'aubes directrices destinées à donner à l'eau une direction convenable avant son arrivée à la roue mobile. L'arbre est vertical ou horizontal, et la seconde couronne, appelée **distributeur D,** précède toujours la première appelée **turbine T.** Un pivot A et des boîtards C pour guider l'axe, un fond fixe F disposé sur le distributeur, un système de vannage et un mécanisme de transmission, une cuve fermée ou bâche pour les hautes chutes complètent le moteur, qui est toujours installé dans une chambre d'eau.

293. Différence avec les roues hydrauliques. — 1° Les orifices d'entrée et de sortie sont toujours distincts dans la turbine, alors qu'ils ne le sont jamais dans les roues, sauf si l'admission est intérieure. Le liquide conserve toujours de ce fait le même sens dans son mouvement relatif ; les remous dus au choc des éléments rentrants et sortants sont ainsi évités ;

2° La roue motrice ou turbine est toujours précédée d'un distributeur fixe ;

3° L'arbre peut être horizontal ou vertical et son sens de rotation est indépendant du sens du cours d'eau.

294. Avantages des turbines. — 1° Elles sont favorables aux chutes les plus hautes (600 mètres) comme les plus basses ($0^m,12$), alors que les roues sont inutilisables pour des hauteurs supérieures à 12 mètres ;

2° L'eau arrivant sur toute la circonférence, ce qui n'a pas lieu pour les roues, les turbines peuvent utiliser des débits considérables avec des dimensions très réduites ; elles sont donc peu encombrantes ;

3° Leur faible dimension leur permet d'atteindre des vitesses très grandes (300 tours) dont bénéficie le prix d'achat et d'entretien de la transmission. On peut d'ailleurs faire varier la vitesse dans de grandes proportions sans que le rendement soit diminué ;

4° Le liquide agissant simultanément sur deux points diamétralement opposés, la roue mobile est parfaitement équilibrée, et l'axe ne détermine aucune pression latérale sur les coussinets des pivots et des boîtards ou des paliers ;

5° La turbine marche noyée (immergée dans le bief d'aval), de sorte qu'on peut l'abaisser de façon à utiliser les plus bas niveaux d'étiage, ce qui est un avantage considérable pour les basses chutes inférieures à 2 mètres ;

6° Il est même possible de la disposer de manière à marcher par les gelées, puisque la température au fond de l'eau est toujours voisine de 4°;

7° Construites en métal avec tous les perfectionnements modernes, évitant les chocs à l'entrée, les remous à l'intérieur et les pertes de puissances vives à la sortie, les turbines ont un rendement courant de 75 à 80 0/0, voire même de 90 0/0, alors que les roues qui rendent 70 0/0 sont l'exception ;

8° Enfin, rappelons que la marche dans tous les sens, la position indifféremment horizontale ou verticale de l'axe, la disposition à une hauteur quelconque entre les niveaux d'amont et d'aval (turbines à aspiration) peuvent être des qualités précieuses dans certaines installations.

295. Inconvénients des turbines. — 1° Leur vitesse étant très grande, il se développe une force centrifuge à laquelle les matériaux doivent résister ; il faut donc une construction très solide et très soignée ;

2° Elles sont sensibles à l'introduction des corps étrangers ; mais cet ennui est évité en grande partie si la chambre d'eau précédemment décrite est bien établie.

296. Turbine radiale centrifuge. — Inventée par **Fourneyron**, cette turbine a ses aubes directrices concentriques et intérieures à la roue mobile ; l'eau y chemine donc de l'intérieur à l'extérieur (*fig*. 316-317).

Description. — Dans la turbine construite par Fourneyron, la couronne mobile T est formée d'une cuvette C fixée sur l'arbre à l'aide d'un moyeu M claveté et d'un anneau plat horizontal T portant les aubes motrices qui sont partagées par deux cloisons en trois couronnes superposées. Le fond plat F qui porte les directrices a son moyeu N fixé sur un tuyau I qui isole l'arbre de la chambre d'eau. Les aubes sont discontinues par deux, afin d'offrir sensiblement la même section au passage de l'eau. Le vannage s'opère par une cuve cylindrique mobile A qui peut glisser à l'intérieur d'un autre cylindre B fixe et se placer entre le distributeur et la turbine, de façon à diminuer la dépense. Une garniture en cuir assure l'étanchéité entre les deux cuves. Celle qui est mobile possède à sa partie inférieure des coins en bois disposés entre les aubes directrices, de façon à

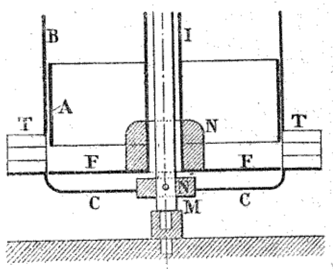


Fig. 316 et 317.

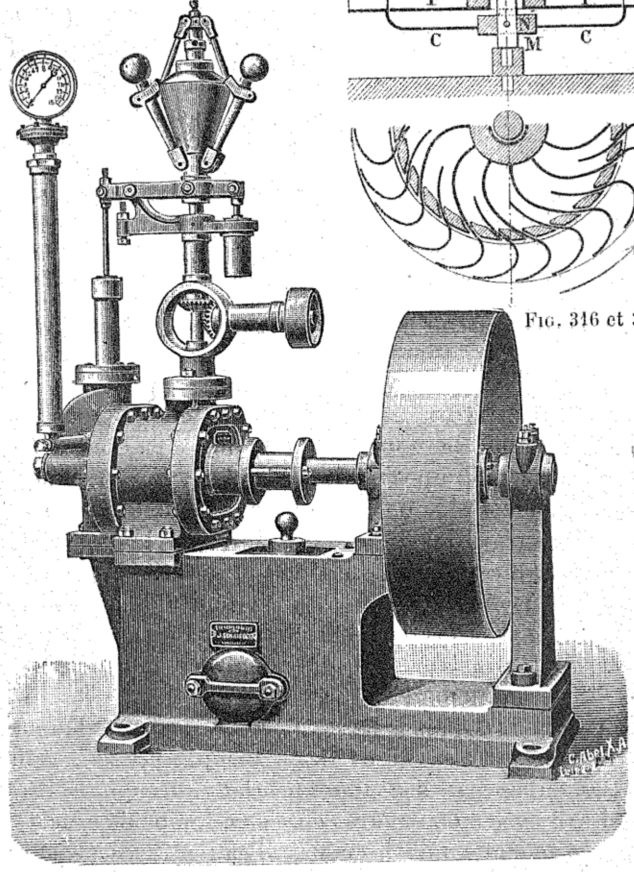


Fig. 318.

éviter la contraction de l'eau qui aurait lieu pour un changement brusque de direction (de verticale à horizontale).

L'arbre vertical repose sur un pivot noyé qui peut s'élever ou s'abaisser à l'aide d'un puissant levier ; le graissage a lieu à l'aide d'huile sous forte pression.

297. **Régulateur de vitesse.** — La force motrice de l'eau en mouvement est très abondante et très économique; mais le débit variant dans des proportions considérables, il y a là une difficulté sérieuse, surtout dans les installations électriques où l'on désire un voltage déterminé ou une fréquence invariable. Généralement, on opère sur le vannage à la main ou d'une façon automatique.

L'appareil que nous décrivons (*fig.* 318) est basé sur un principe différent; le vannage est constant ; le régulateur est un frein d'absorption. Un bâti formant réservoir d'eau supporte une pompe centrifuge disposée de telle façon que l'eau mise en mouvement est obligée de passer par un orifice de section variable. La grandeur de cette section est déterminée par une soupape que commande le pendule conique. La force absorbée par la pompe est égale à chaque instant à l'excès de puissance du moteur sur le travail utilisé dans l'usine.

298. **Conclusion.** — Pendant longtemps, nous l'avons signalé au début, de nombreuses chutes d'eau ont été inutilisées à cause de l'impossibilité d'employer leur puissance sur place ; il n'en est plus de même aujourd'hui. Un autre inconvénient très grave les faisait délaisser, c'est leur irrégularité, car certains torrents ont un débit qui varie dans des proportions considérables. Ex. : le Verdon a 5 mètres cubes d'étiage et des crues de 1.400 mètres cubes ; l'arvéron d'un glacier roule de 500 litres pendant les gelées d'hiver à 10.000 litres au moment de la fonte des neiges ; le Rhin monte de 50 à 60 mètres dans les précipices de la Via Mala quand le vent du sud fond les neiges des Alpes ; l'Ardèche, réduite à 5 mètres cubes par seconde en étiage, s'engouffre sous le Pont d'Arc avec 8.000 mètres cubes en temps de crue.

Heureusement, tous les cours d'eau utilisés ne sont pas aussi variables ; d'ailleurs les régulateurs hydrauliques rendent beaucoup moins sensibles les variations de débit. D'autre part, certaines usines importantes de la région de

Saint-Etienne possèdent à la fois des chutes d'origine alpestre et glacière qui ont leur crue en été (fonte des neiges) et des chutes d'origine cévenole qui, ayant leur étiage à la même époque et leur crue en hiver, permettent d'établir une compensation.

Enfin, même si elle est inutilisable pendant quelques mois et exige pendant ce temps l'intervention de la vapeur et des machines thermiques, la force hydraulique appelée **houille blanche** n'est pas moins précieuse. Elle permettra dans l'avenir une répartition plus rationnelle des régions industrielles; elle permettra le travail dans des conditions plus hygiéniques et plus pittoresques; elle économisera, sans rien lui enlever de son beau rôle, la puissance calorifique du charbon dont l'effrayante consommation actuelle (800 millions de tonnes de houille par an) menace de nous laisser sans combustible dans un avenir fort heureusement infiniment lointain.

EXERCICES A RÉSOUDRE

I. — Une rivière présente entre deux points A et B une différence de niveau de 17 mètres. On établit entre ces deux villes un canal de dérivation qui présente seulement une dénivellation de 5 mètres et amène l'eau en B avec une vitesse moyenne de $0^m,25$ par seconde.

La section du canal a la forme d'un trapèze dont les bases ont respectivement 7 mètres et 8 mètres, la profondeur 4 mètres. On demande :

1° La hauteur de la chute que l'on peu obtenir en B ;
2° La section du canal ;
3° Le débit de l'eau;
4° La puissance de la chute.

II. — L'eau de la chute précédente est amenée dans une conduite cylindrique longue de 20 mètres et de $1^m,30$ de rayon, à une turbine qui fonctionne noyée. Indiquer la vitesse de l'eau à l'arrivée et le débit utilisé.

III. — Une roue Poncelet reçoit l'eau d'une vanne large de $2^m,50$ levée de $0^m,20$. Sachant que le niveau de l'eau est à $1^m,60$ au-dessus du centre de gravité de l'orifice et que le coefficient de contraction est 0,75, on demande :

1° La vitesse d'arrivée de l'eau;
2° La section de l'orifice ;
3° Le débit en litres ;
4° La puissance vive de l'eau débitée par seconde.

XXXIII. — DESCRIPTION D'UN GÉNÉRATEUR

299. Définition. — On désigne sous le nom de générateur tout appareil destiné à transformer par la chaleur l'eau en vapeur, celle-ci étant généralement utilisée pour actionner des machines motrices : machines à piston ou turbines.

300. Différentes parties d'un générateur. — Les organes essentiels sont :

1° L'appareil de **combustion** (¹) : foyer, carneaux, cheminée ;

2° Le **réservoir d'eau et de vapeur** (¹), constitué par un ou plusieurs tubes cylindriques dont les dimensions, le nombre et la disposition sont excessivement variables ;

3° L'appareil **d'alimentation** (¹), comprenant un réservoir d'eau, une pompe (pompe d'alimentation, petit-cheval, injecteur, pulsomètre), parfois aussi des organes d'épuration ;

4° Les **indicateurs de niveau d'eau et de pression** (¹) : tubes de niveau d'eau, niveau à flotteur, sifflet d'alarme, robinets de jauge, manomètres divers ;

5° Les **dispositifs de sûreté** (¹), destinés à empêcher la production d'une pression trop forte pour la résistance des récipients ; on emploie les soupapes de sûreté et les bouchons fusibles ;

6° La **prise de vapeur** et la **conduite** entourée d'une enveloppe **calorifuge** (¹). Sur son parcours la vapeur peut être **séchée ou surchauffée** (¹) dans des organes spéciaux ; on abaisse aussi parfois sa pression dans un **détendeur** (¹).

(¹) Voir détails dans le deuxième volume.

301. **Classification.** — Au point de vue de la résistance comme de la facilité d'exécution, la forme cylindrique est celle qui convient le mieux pour le réservoir d'eau et de vapeur d'un générateur.

Un seul corps cylindrique utilise mal la chaleur produite par la combustion, car la surface de chauffe est très restreinte. Pour l'augmenter, on dispose des moyens suivants :

1° Conserver le foyer à l'extérieur du corps cylindrique, mais augmenter la surface de chauffe par l'adjonction de bouilleurs : *chaudière cylindrique à foyer extérieur et à bouilleurs;*

2° Utiliser une partie de la chaleur perdue par l'emploi de réchauffeurs d'eau d'alimentation placés dans les carneaux sur le parcours des fumées : *chaudière cylindrique à foyer extérieur et à réchauffeurs;*

3° Placer le foyer à l'intérieur du corps cylindrique : *chaudière cylindrique à foyer intérieur ;*

4° Faire passer les fumées dans des tubes qui traversent la masse d'eau avant de se rendre dans la cheminée : *chaudière tubulaire de locomotive et de locomobile ;*

5° Combiner les bouilleurs et les tubes de fumées : *chaudière semi-tubulaire à bouilleur ;*

6° Combiner le foyer intérieur et les tubes de fumées : *chaudière à foyer intérieur et à retour de flammes, chaudière à foyer amovible, chaudière marine ;*

7° Faire circuler l'eau dans des tubes qui, placés au sein des gaz chauds, présentent une surface de chauffe considérable : *chaudière multibulaire, tubuleuse ou à tubes d'eau.*

Dans les différents cas que nous venons de signaler, le corps cylindrique est disposé horizontalement; la disposition verticale permet de réduire l'emplacement nécessaire à l'installation du générateur. Les chaudières verticales sont généralement à foyer intérieur avec bouilleurs ou avec tubes d'eau.

Nous étudierons dans un second volume quelques-uns des types les plus usuels. Nous ne décrirons ici que la chaudière à bouilleurs d'origine française, encore actuellement la plus répandue malgré la variété des autres types.

302. **Chaudière cylindrique à bouilleurs** (*fig.* 319). — Au-dessous du corps cylindrique A, sont disposés un ou plusieurs bouilleurs B réunis au corps principal par de gros tubes appelés **cuissards** C. Les bouilleurs supportés par des **chandeliers** en fonte D sont disposés au-dessus du foyer F.

Ils sont séparés du corps A par un massif E en briques réfractaires.

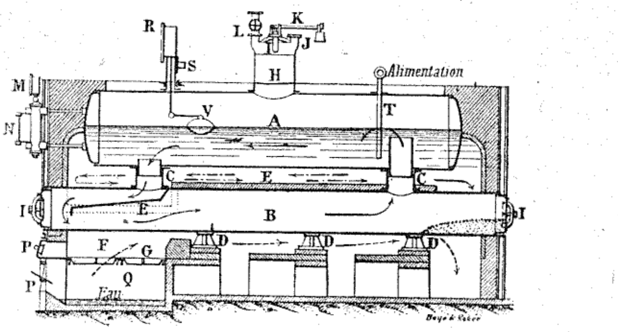


Fig. 319.

L'appareil de combustion est constitué par le foyer F séparé du cendrier Q par la grille G. La porte P du foyer sert au chargement et celle du cendrier P' permet l'arrivée d'air.

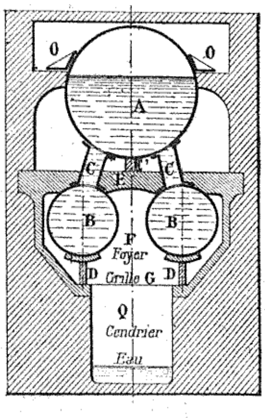


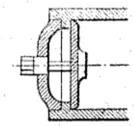
Fig. 320.

Une petite couche d'eau dans le cendrier permet au chauffeur de se rendre compte de l'état de la grille. De plus, cette eau refroidit les cendres et escarbilles dont la haute température pourrait nuire à la conservation de la grille et des parois. La vapeur formée active en outre la combustion.

Les flammes et les gaz chauds, après avoir léché les bouilleurs, contournent le corps cylindrique dans un sens et dans l'autre, grâce à la cloison E', avant de s'échapper à la cheminée.

En H se trouve un dôme de vapeur muni d'un trou d'homme I et de plusieurs tubulures J, K, L. A ces tubulures sont fixés une soupape de sûreté K, un robinet de prise de vapeur I qui, éloigné du plan d'eau, permet d'obtenir une vapeur plus sèche.

Le niveau de l'eau dans la chaudière ne doit jamais descendre à moins de 6 centimètres au-dessous du plan léché par les flammes.



Porte autoclave d'un trou d'homme I.

Fig. 321.

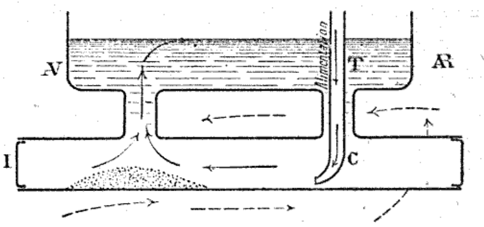


Fig. 322.

Dans le type ordinaire, l'alimentation a lieu par un tube T (*fig.* 322), qui débouche par le cuissard arrière C dans les bouilleurs B.

303. Avantages et inconvénients. — Ce générateur a l'avantage d'avoir une marche régulière à cause du grand volume d'eau et de vapeur qu'il renferme ; les variations de niveau n'y sont jamais brusques.

Par contre, les explosions sont très dangereuses à cause de l'énergie considérable accumulée ; l'échauffement de l'eau n'y est pas méthodique, puisque l'eau froide arrive en contact avec les parties les plus chauffées ; les dépôts se localisent au-dessus du foyer (*fig.* 322), en regard du cuissard avant par où se dégage la vapeur. Ces dépôts durcissent rapidement ; des nettoyages fréquents sont nécessaires ; la transmission de la chaleur se fait mal, d'une façon peu économique, et des coups de feu sont à craindre. Pour faciliter les visites et les nettoyages, les bouilleurs sont prolongés en avant jusqu'à l'extérieur de la maçonnerie et sont fermés par une porte autoclave (*fig.* 321).

Ces générateurs présentent en outre l'inconvénient d'avoir une faible surface de chauffe léchée par les flammes ou les gaz chauds. Par suite, la pression de la vapeur et la quantité produite sont assez restreintes ; l'encombrement est grand.

304. Appareil de circulation. — Les dangers dus à la localisation des dépôts au-dessus du foyer sont en grande partie évités par un dispositif dû à **M. Montupet** (*fig.* 319) et qui, en obligeant la vapeur à se dégager par les cuissards arrière, détermine une circulation active et le dépôt des précipités à l'arrière, c'est-à-dire dans une région relativement peu chauffée.

Signalons en outre que les dépôts peuvent être en partie évités par une épuration convenable des eaux (voir deuxième volume).

305. Chaudière semi-tubulaire à bouilleurs (*fig.* 323-324). — Actuellement, la construction des générateurs à bouilleurs comporte presque toujours un nombre plus

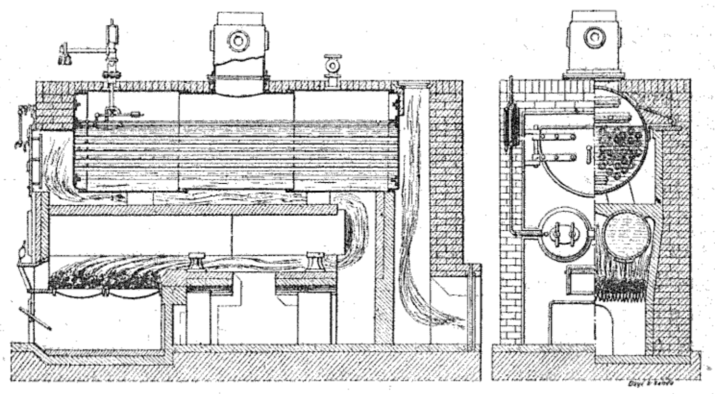


FIG. 323 et 324.

ou moins grand de tubes disposés en long à travers le corps principal. Ces tubes sont traversés par les gaz chauds qui ont déjà léché les bouilleurs et la partie inférieure du corps. Il y a donc une plus grande surface de chauffe, une meilleure utilisation du combustible, et ainsi se trouve évité le second inconvénient du premier générateur décrit.

306. Appareils de sûreté (*fig.* 319). — A cause des dangers d'explosion que présentent les générateurs, ils doivent être munis d'appareils destinés à renseigner le chauffeur et à éviter les accidents.

Les indicateurs de niveau d'eau à tube de verre N ou à flotteur V permettent de régler l'alimentation.

La tige du flotteur indique le niveau sur un cadran R; elle est en outre munie de deux taquets qui ouvrent le passage de la vapeur quand le niveau est trop haut (maximum) ou trop bas (minimum). Cette vapeur frappe un timbre qui avertit le chauffeur et constitue le sifflet d'alarme. Parfois il y a deux timbres, un grave pour le manque d'eau, l'autre aigu pour le trop d'eau.

Un manomètre M indique la pression de la vapeur ; celle-ci doit être inférieure au timbre apposé par l'Administration sur chaque chaudière.

La soupape de sûreté K livre passage à la vapeur si la pression est trop grande.

XXXIV. — MACHINE A VAPEUR A PISTON

307. Principe. — Considérons un piston P mobile à l'intérieur d'un cylindre C dont il partage le volume intérieur en deux capacités étanches B et H de grandeur variable. Si, à l'aide d'un robinet A, nous mettons la capacité B en communication avec le générateur, pendant que les robinets E, A' sont fermés et que la capacité H est en communication avec l'atmosphère par le robinet E', il se produira sur la face inférieure du piston P une pression due à la tension de la vapeur d'eau. Cette force sera capable de produire un travail mécanique tel que l'élévation des fardeaux ou la montée des poids d'une horloge.

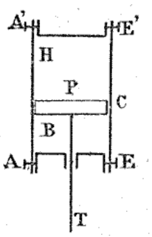


Fig. 325.

Dès que le piston sera arrivé à la partie supérieure du cylindre, si on ferme simultanément les robinets A, E' pour ouvrir A' et E, le piston sera poussé en sens inverse par la vapeur arrivant par A' dans la capacité H.

Le mouvement RA du piston ainsi obtenu peut être directement utilisé pour faire fonctionner une pompe par l'intermédiaire de la tige T. Nous savons aussi que ce mouvement RA peut être transformé en mouvement CC d'un arbre moteur par un système bielle et manivelle.

308. Description (*fig.* 326). — D'après ce que nous venons de dire, une machine à vapeur se compose essentiellement :

1° D'un **cylindre** A en fonte destiné à contenir la vapeur ;

2° D'un **piston** plein mobile à l'intérieur du cylindre ;

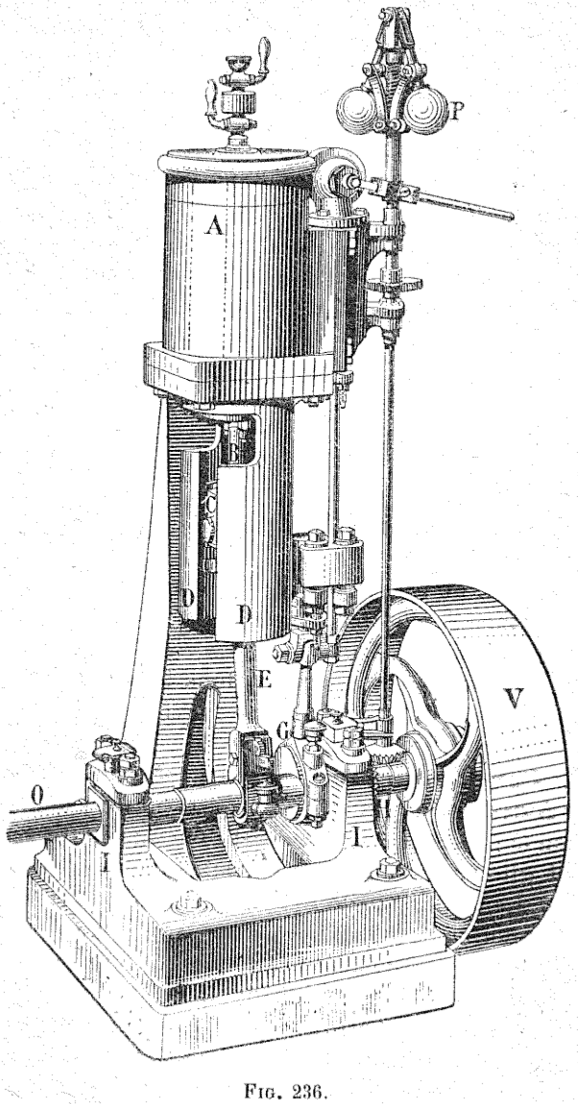


Fig. 236.

3° D'une **transmission** de mouvement comprenant :

a) La tige de piston A dont le passage à travers le couvercle du cylindre a lieu dans un presse-étoupe qui assure l'étanchéité, c'est-à-dire empêche les fuites de vapeur ;

b) L'articulation de la tige et du pied de bielle, appelée crosse ou coulisseau C, est guidée par les glissières D qui assurent le mouvement rectiligne de la tige ;

c) La bielle E dont les coussinets de la tête embrassent le maneton de la manivelle ;

d) La manivelle calée sur l'arbre moteur auquel elle communique son mouvement de rotation ;

4° D'un **arbre de couche** O pouvant porter un ou plusieurs coudes, des manivelles, contre-manivelles, excentriques circulaires à collier G, roues d'engrenage H, poulies de transmission Y, volant V ;

5° D'un **appareil de distribution** composé de tiroirs, de soupapes ou de robinets dont la manœuvre automatique est assurée par des cames ou des excentriques compliqués ou non d'un jeu de leviers ;

6° L'**appareil de régularisation** : pendule conique P et volant V, destinés à rendre aussi uniforme que possible le mouvement de rotation de l'arbre ;

7° D'un **bâti en fonte** supportant tous les organes, en particulier les paliers I de l'arbre et les glissières D.

309. Fonctionnement d'une distribution par tiroir à coquille (*fig.* 327-330). — C'est le système de distribution le plus simple : il consiste en une boîte renversée pouvant glisser sur une face parfaitement plane et polie du cylindre. Le tiroir se meut à l'intérieur d'une boîte de distribution renfermant la vapeur, de telle sorte que sa face extérieure se trouve en communication avec le générateur et sa face intérieure avec l'atmosphère. Il est commandé par un excentrique calé sur l'arbre moteur, et dont le centre est en avance de 1/4 de révolution sur l'axe de la manivelle motrice. Il résulte de cette disposition que :

1° Le tiroir est dans sa position moyenne, prêt à découvrir l'orifice d'admission du bas cylindre BC et l'orifice d'échappement du haut cylindre HC lorsque le piston est au point mort

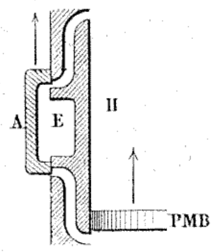


Fig. 327.

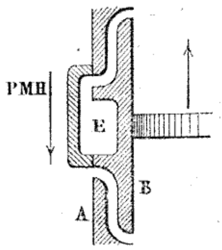


Fig. 328.

bas (*fig.* 327). A ce moment la course ascensionnelle du piston commence et celle du tiroir continue ;

2° Le tiroir est au point mort haut, découvrant complètement les orifices d'admission du BC et d'échappement du HC lorsque le piston est dans la position moyenne. L'ascension du piston continue, mais la descente du tiroir va commencer (*fig.* 328) ;

3° Le tiroir est revenu dans sa position moyenne, prêt à découvrir les orifices d'admission HC et d'échappement BC

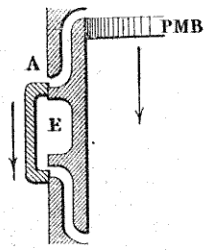


Fig. 329.

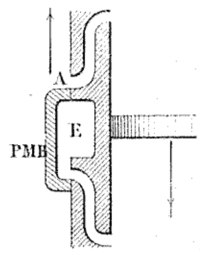


Fig. 330.

quand le piston est au point mort haut. La descente du tiroir continue et celle du piston va commencer (*fig.* 329) ;

4° Le tiroir est au point mort bas, découvrant complètement les orifices d'admission HC et d'échappement BC lorsque le piston est dans sa position moyenne descendante. La descente du piston continue jusqu'à son point mort bas, mais la course ascendante du tiroir recommence et, après ce dernier quart de révolution de l'arbre, les organes se retrouvent à leur point de départ (*fig.* 330).

310. Remarques. — 1° L'épaisseur du tiroir doit être égale au diamètre des orifices d'admission ;

2° La course du tiroir l, égale à deux fois la distance a du centre du disque d'excentrique à l'axe de l'arbre moteur, doit être le double du diamètre d des orifices d'admission.

D'où la relation :

$$l = 2a = 2d;$$

3° Pour que la vapeur agisse sur la face inférieure du piston dès que celui-ci est au point mort bas, il est nécessaire d'augmenter légèrement l'avance de 90° du centre du disque de l'excentrique sur la manivelle motrice ;

4° La vapeur arrivant au cylindre pendant toute la durée de la course du piston, la machine est dite **à pleine pression.**

311. Travail de la vapeur dans une machine à pleine pression. — Dans l'étude des générateurs, nous avons toujours considéré la pression effective de la vapeur, celle qu'indique le manomètre et que supportent les tôles soumises intérieurement à la tension de la vapeur et extérieurement à la pression atmosphérique. En ce qui concerne le travail de la vapeur, nous parlerons toujours de sa tension ou de sa pression réelle obtenue en ajoutant $1^{kg},033$ ou approximativement 1 kilogramme à la pression effective indiquée au manomètre de la chaudière.

En admettant que la vapeur à la pression de p kilogrammes par centimètre carré soit immédiatement en contact avec la face du piston que nous supposerons de s centimètres carrés, cette vapeur exercera un effort de ps kilogrammes. Comme elle agit pendant toute la durée de la course l mètres du piston, son travail sera dans la course directe :

$$T_1 \text{ kgm} = p \text{ kg} \times s \text{ cm}^2 \times l \text{ m}.$$

Dans la course rétrograde, l'échappement ayant lieu à l'air libre, la pression atmosphérique opposera un effort résistant dont la valeur :

$$T_2 \text{ kgm} = 1^{kg},033 \times s \text{ cm}^2 \times l \text{ m},$$

d'où

$$T = T_1 - T_2 = (p - 1,033) \times s \times l.$$

312. Application. — *Calculer : 1° le travail de la vapeur à* 6 *kilogrammes sur la face d'un piston dont la section est* 2.000 *centimètres carrés et la course* $0^m,72$; 2° *la consommation de vapeur par cheval-heure indiqué de* 270.000 *kilogrammètres.*

$$T = (p - 1,033)\, sl = 4,967 \times 2.000 \times 0,72 = 7.152 \text{ kilogrammètres.}$$

Le volume de la vapeur employée est égale à celui qu'engendre le piston :

$$V \text{ m}^3 = \left(\frac{s}{10.000}\right) \text{m}^2 \times l \text{ m} = 0,20 \times 0,72 = 0^{m^3},144.$$

Pour un travail de 7.152 kilogrammètres, il faut $0^{m^3},144$ de vapeur.

Pour un travail de 270.000 kilogrammètres, il faut :

$$\frac{0,144 \times 270.000}{7.152} = \frac{810}{149} \text{ mètres cubes.}$$

Or le mètre cube de vapeur à 6 kilogrammes ($4^{kg},967$ au manomètre) pèse $3^{kg},1650$. Donc la consommation de vapeur par cheval-heure sera de :

$$3,1650 \times \frac{810}{149} = 17^{kg},2 \text{ de vapeur à 6 kilogrammes.}$$

313. Représentation graphique du travail (*fig.* 331). — Nous savons que le travail se représente par une surface obtenue en portant sur deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, des longueurs représentant : les chemins parcourus sur Ox, les intensités des forces sur Oy, à des échelles bien déterminées : $1^m,50$ est représenté par 50 millimètres, 1.500 kilogrammes sont représentés par 2 millimètres.

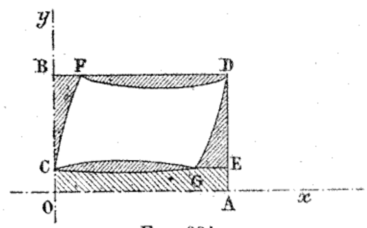


Fig. 331.

OA représente $l = 0^m,72$; OB représente $ps = 12.000$ kilogrammes ; OADB représente OA $\times$ OB $= lps$, le travail de pleine pression ; OC représente la résistance due à la pression atmosphérique, et OAEC le travail de contre-pression. Par conséquent le travail réel est représenté par CEDB, sur une face du piston et pour un tour de manivelle.

Rappelons en passant que le travail total sur les deux faces, et pour un tour, est double ; qu'il faut multiplier ce résultat par le nombre de tours par minute pour trouver le travail en kilogrammètres ; diviser par 60 pour obtenir le travail en kilogrammètres par seconde, et que la puissance en chevaux-vapeur s'obtient en divisant par 75 le nombre de kilogrammètres par seconde.

314. Inconvénients du tiroir à coquille simple. — 1° La consommation de vapeur est considérable, car, dans les 17 kilogrammes nécessaires par cheval-heure, n'entre aucune des nombreuses pertes inhérentes au fonctionnement de la machine à vapeur ;

2° La vapeur contenue dans les espaces morts est perdue entièrement à la pression initiale ;

3° Le piston étant soumis à l'action d'une force constante a un mouvement accéléré dont la vitesse est maxima aux points morts, ce qui occasionne des chocs considérables ayant pour conséquences une perte de travail et une fatigue exagérée des organes ;

4° Les orifices d'admission ne se découvrant que graduellement, la vapeur n'acquiert sa pression derrière la face du piston qu'après une fraction de la course de celui-ci, OM par exemple. Dès ce moment la vitesse du piston étant accélérée, la pression s'abaisse légèrement suivant la courbe FD (*fig.* 331). Arrivé à son point mort, le piston change de sens, et une certaine contre-pression s'établit à cause de l'ouverture progressive de l'orifice d'échappement. La contre-pression ne se réduit à la pression atmosphérique qu'en G, car la sortie de la vapeur étant plus lente que la marche du piston, la courbe des contre-pressions est sensiblement GC. Finalement, le travail se trouve représenté par le quadrilatère curviligne CFDG.

Pour toutes ces raisons la distribution par tiroir à coquille sans recouvrement est complètement abandonnée (1).

315. Condensation des vapeurs d'échappement. — Lorsque l'échappement de la vapeur a lieu à l'air libre, nous avons vu qu'il existait sur la face du piston non soumise à l'action de la vapeur une contre-pression égale à la pression atmosphérique, soit $1^{kg},033$ par centimètre carré ; ce qui diminue très sensiblement le travail réel de la machine.

Les premiers constructeurs, Newcomen et Watt, comprirent tout l'intérêt qu'il y aurait à faire arriver la vapeur d'échappement dans un milieu où existerait un « vide partiel » et où la pression serait par conséquent inférieure à $1^{kg},033$.

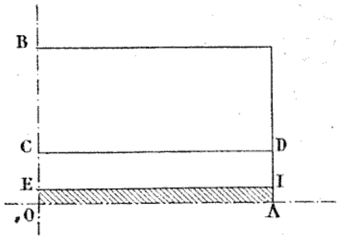


Fig. 332.

Si la contre-pression est réduite à 250 grammes par centimètre carré par exemple, le travail résistant sera représenté par le rectangle OAIE, dans lequel OA représente la course du piston, et OE, $0^{kg},250 \times s$; au lieu du rectangle OADC, dans lequel OC représente $1^{kg},033 \times s$. Le rectangle EIDC représente donc l'augmentation de travail sur une face du piston et pour un tour de la manivelle dû à l'abaissement de la contre-pression.

Le vide partiel est obtenu en condensant la vapeur d'échappement par refroidissement dans des appareils appelés **condenseurs.**

316. Consommation de vapeur par cheval-heure d'une machine à condensation. — Nous

(1) Voir les modes usuels de distribution dans le deuxième volume.

prendrons encore de la vapeur à 6 kilogrammes avec une contre-pression p' de 250 grammes.

$$T = (p - p')\, sl = (6 - 0{,}250) \times 2.000 \times 0{,}72,$$
$$= 5{,}75 \times 2.000 \times 0{,}72 = 8.280 \text{ kilogrammètres.}$$

Ce travail est fourni par $0^{m3},144$ de vapeur.

Donc, 270.000 kilogrammètres seront fournis par

$$V = 0^{m3},144 \times \frac{270.000}{8.280} = \frac{108}{23} \text{ de mètre cube de vapeur}$$

pesant

$$3^{kg},165 \times \frac{108}{23} = 14^{kg},8.$$

Ainsi, pour un même travail, la consommation de vapeur diminue, ce qui produit :

1° Une économie de combustible ;

2° Une économie d'eau, qui a parfois son importance lorsque cette eau contient des sels nécessitant de fréquents nettoyages ou une épuration coûteuse.

317. Condenseur par mélange à injection. — Le refroidissement est produit par une **injection** d'eau en fines gouttelettes au sein de la vapeur d'échappement avec laquelle elle se **mélange**.

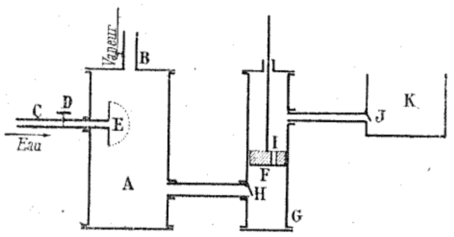


Fig. 333.

En principe, le condenseur se compose d'une capacité A dans laquelle débouchent la conduite d'arrivée de vapeur d'échappement B et celle d'eau réfrigérante C. Celle-ci est munie d'un robinet D et se termine par une pomme d'arrosoir E.

Le vide partiel produit provoquant un dégagement de l'air en dissolution dans l'eau, un piston F de pompe à air qui se déplace dans le cylindre G est destiné à l'aspiration de l'air dégagé et aussi du mélange d'eau et de vapeur condensée. Le tout est envoyé dans l'atmosphère, à moins que l'on utilise le mélange d'eau et de vapeur pour l'alimentation ; on l'envoie alors à la bâche d'alimentation K. Dans ce cas, la vapeur entraînant toujours avec elle une certaine quantité de matières grasses, il est indispensable de placer entre le cylindre de la machine et la capacité A un séparateur d'huile et de vapeur.

La marche du liquide est assurée dans un sens convenable par les soupapes H, I et J.

XXXV. — TURBINES A VAPEUR

318. Définition. — Les turbines à vapeur sont des moteurs rotatifs à mouvement continu. Comme les turbines hydrauliques (chap. XXXI), elles se composent essentiellement d'une roue mobile et d'un distributeur fixe. Quant au mode d'action de la vapeur, on conçoit qu'il ne puisse être tout à fait identique à celui d'un fluide incompressible tel que l'eau.

319. Description de la turbine Laval (*fig.* 334). — La roue mobile R est montée sur un arbre flexible OO′ reposant dans les coussinets de deux paliers à rotules, afin de permettre une grande vitesse de rotation.

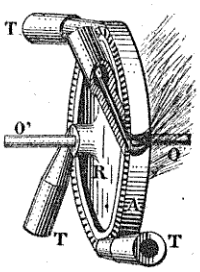


Fig. 334.

Elle est constituée par des aubes courbes A en acier fixées sur un cylindre en tôle.

Le distributeur comprend plusieurs ajutages ou tuyères T dont l'axe est légèrement incliné sur le plan de la roue. Il occupe seulement une portion de la périphérie.

La roue à aubes et le distributeur sont enfermés dans une boîte en fonte.

320. Fonctionnement de la turbine Laval. — La vapeur se détend dans les tuyères de distribution où elle acquiert une grande vitesse due à sa pression initiale. La vapeur ainsi détendue pénètre dans la roue motrice par une de ses faces et en ressort par l'autre après avoir abandonné sa puissance vive $\frac{1}{2}mV^2$ au récepteur qui peut alors tourner avec l'arbre à une vitesse de 6.000 à 30.000 tours.

Nous verrons dans un second volume, après une étude plus détaillée des différents moteurs, quels sont les avantages et les inconvénients de chacun d'eux.

TABLE DES MATIÈRES

IV

FORCES PARALLÈLES

V

MOMENT DES FORCES

VI

CENTRE DE GRAVITÉ

VII

MOUVEMENT

VIII

TRAVAIL DES FORCES

IX

MACHINES SIMPLES

X

MOUVEMENT VARIÉ

XI

CHUTE DES CORPS

XII

PRINCIPE DE LA CONSERVATION DU TRAVAIL

XIII

FORCE CENTRIFUGE

XIV

PENDULE

XV

MOUVEMENTS COMPOSÉS

XVI

RÉSISTANCES PASSIVES

XVII

MOUVEMENTS USUELS. — ÉTUDE DE QUELQUES MÉCANISMES ET MACHINES SIMPLES

XVIII

RECTILIGNE CONTINU EN RECTILIGNE CONTINU

XIX

CIRCULAIRE CONTINU EN CIRCULAIRE CONTINU

XX

CIRCULAIRE CONTINU EN RECTILIGNE CONTINU

XXI

CIRCULAIRE CONTINU EN RECTILIGNE ALTERNATIF

XXII

RECTILIGNE ALTERNATIF EN CIRCULAIRE CONTINU

XXIII

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

XXIV

EXTENSION

XXV

COMPRESSION

XXVI

FLEXION

XXVII

TORSION

XXVIII

ESSAIS DES MÉTAUX

XXIX

MOTEURS

XXX

HYDRAULIQUE

XXXI

ROUES HYDRAULIQUES

XXXII

TURBINES HYDRAUDIQUES

XXXIII

DESCRIPTION D'UN GÉNÉRATEUR

XXXIV

MACHINES A VAPEUR A PISTON

XXXV

TURBINES A VAPEUR

Tours. — Imprimerie Deslis Frères.

BIBLIOTHÈQUE
DE
L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE MM.

Michel LAGRAVE, Inspecteur général honoraire de l'Enseignement technique
et Émile PARIS, Inspecteur général de l'Enseignement technique

Secrétaire général : **G. BOURREY, Inspecteur de l'Enseignement technique**

SÉRIE A. — Volumes à l'usage des Écoles pratiques de Commerce et d'Industrie, rédigés d'après le programme du 28 août 1909

Les ouvrages ci-après sont en vente ou à l'impression

COURS D'HISTOIRE CONTEMPORAINE (2 vol.)

PAR

Paul RISSON
Agrégé de l'Université, Professeur à l'Ecole supérieure pratique de Commerce et d'Industrie de Paris

G. MOUSSET
Professeur à l'Ecole pratique de Commerce et d'Industrie de Dijon

Paru : **Tome I. La France de 1789 à 1848.** In-16 de VII-242 pages, avec cartes **2 50**

Paru : **Tome II. La France et le monde de 1848 à 1910. — Instruction civique.** In-16 de VI-292 pages, avec cartes................ **3 »**

(*Section industrielle et commerciale*)

ÉLÉMENTS DE PHYSIQUE (1 vol.)

PAR

J. CHAPPUIS
Professeur à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures

A. JACQUET
Professeur à l'Ecole pratique de Commerce et d'Industrie de Maubeuge

(*Section industrielle et commerciale*)

Paru. In-16 de VIII-254 pages, avec 234 fig........................ **3 50**

COURS DE CHIMIE (1 vol.)

PAR

E. CHARABOT
Docteur ès sciences
Inspecteur de l'Enseignement technique
Professeur à l'Ecole des Hautes Etudes Commerciales

E. MILHAU
Professeur de l'Ecole pratique de Commerce et d'Industrie de Béziers

Préface de **M. HALLER**, membre de l'Institut

(*Section commerciale*) (Sous presse)

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE APPLIQUÉE AU DESSIN (1 vol.)

PAR

F. HARANG
Professeur à l'Ecole pratique d'Industrie de St-Etienne

H. BEAUFILS
Directeur à l'Ecole pratique d'Industrie de St-Etienne

(*Section industrielle*)

Paru. In-16 de VII-172 pages, avec 142 fig **2 50**

COURS DE MÉCANIQUE INDUSTRIELLE (3 vol.)

PAR

E. GOUARD
Professeur de l'Ecole pratique d'Industrie de Boulogne-sur-Mer

G. HIERNAUX
Licencié ès sciences mathématiques
Professeur à l'Ecole pratique d'Industrie de Reims

Préface de **M. FARJON**, ancien élève de l'Ecole Polytechnique
Inspecteur de l'Enseignement technique

(*Section industrielle*)

Paru. Tome I. In-16 de VIII-320 pages, avec 334 fig................ **4 »**
— — II. In-16 de 359 pages, avec 327 fig..................... **4 50**
— — III. In-16 de 182 pages, avec 127 fig..................... **2 50**

COURS D'ÉLECTRICITÉ INDUSTRIELLE (1 vol.)

PAR

P. ROBERJOT
Ancien élève de l'Ecole supérieure d'Electricité
Professeur à l'Ecole pratique d'Industrie de Reims

Préface de **M. P. JANET**
Professeur à l'Université de Paris, Directeur de l'Ecole supérieure d'Electricité

(*Section industrielle*) **(Paraîtra le 15 octobre 1910)**

COURS DE GÉOGRAPHIE COMMERCIALE (1 vol.)

PAR

E. BERTRAND
Professeur à l'Ecole pratique de Commerce et d'Industrie de Bordeaux

Préface de **M. MÉTIN**
Professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers

(*Section industrielle et commerciale*)

Paru : 3e année. In-16 de XVI-360 p., av. 42 fig. et 1 pl. hors texte. **4 »**

COURS D'HYGIÈNE INDUSTRIELLE (1 vol.)

PAR

Dr F. HEIM
Professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers

Dr P. BONNEVILLE
Professeur à l'Ecole pratique de Commerce et d'Industrie de Mazamet

(*Section industrielle*) (Sous presse)

COURS D'ARITHMÉTIQUE

PAR

P. PHILIPPE
Professeur agrégé de l'Université
Examinateur à l'Ecole supérieure pratique de Commerce et d'Industrie de Paris

F. DAUCHY
Professeur à l'Ecole pratique de Commerce et d'Industrie de Maubeuge

(*Section industrielle*)

Paru. In-16 de VIII-488 pages, avec fig. **4 75**

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE

(Faisant suite au *Cours d'Arithmétique*)

PAR LES MÊMES AUTEURS

(*Section industrielle*)

Paru. In-16 de VI-268 pages, av. fig. **3 50**

COURS DE GÉOMÉTRIE (2 vol.)

PAR

P. PHILIPPE
Professeur agrégé de l'Université
Examinateur à l'Ecole supérieure pratique de Commerce et d'Industrie de Paris

M. FROUMENTY
Sous-Directeur de l'Ecole pratique d'Industrie de Marseille

(*Section industrielle et commerciale*) **(Paraîtra le 15 octobre 1910)**

COURS D'ARITHMÉTIQUE ET DE CALCUL ALGÉBRIQUE (1 vol.)

PAR

P. PHILIPPE
Professeur agrégé de l'Université
Examinateur à l'Ecole supérieure pratique de Commerce et d'Industrie de Paris

F. DAUCHY
Professeur à l'Ecole pratique de Commerce et d'Industrie de Maubeuge

(*Section commerciale*) (Sous presse)

PRÉCIS DE LÉGISLATION USUELLE ET COMMERCIALE

PAR

Paul ANGLÈS
Directeur de l'Ecole Commerciale de Paris (Avenue Trudaine)

Émile DUPONT
Docteur en droit
Professeur à l'Ecole Commerciale de Paris

(*Section commerciale*)

Paru. In-16 de VIII-483 pages.. **4 50**

COURS DE LANGUE ANGLAISE USUELLE

1er volume : 1re année — 2e volume : 2e année

PAR

L. CHAMBONNAUD
Professeur d'Ecole pratique, détaché à l'Ecole supérieure pratique de Commerce et d'Industrie de Paris

P. TEXIER
Professeur à l'Ecole pratique de Commerce de Limoges

(*Section commerciale*) (Sous presse)

COURS D'ANGLAIS COMMERCIAL

3e volume : 3e année

PAR

L. CHAMBONNAUD
Professeur à l'Ecole pratique, détaché à l'Ecole supérieure pratique de Commerce et d'Industrie de Paris

P. TEXIER
Professeur à l'Ecole pratique de commerce de Limoges

(*Section commerciale*) **(Paraîtra fin octobre 1910)**

COURS D'ESPAGNOL COMMERCIAL (1 vol.)

PAR

P. LOURTAU
Directeur de l'Ecole pratique de Commerce et d'Industrie de Cette

LUIS ARIZMENDI
Docteur de l'Université de Madrid

(*Section commerciale*)

Paru. In-16 de VII-259 pages, avec figures et planches hors texte.. **3 50**

COURS DE LANGUE ESPAGNOLE (1 vol.)

PAR

P. LOURTAU
Directeur de l'Ecole pratique de Commerce et d'Industrie de Cette

LUIS ARIZMENDI
Docteur de l'Université de Madrid

(*Section commerciale*) **(Paraîtra fin octobre 1910)**

Les autres livres de la même série A sont en préparation et paraîtront prochainement :

Morale. — Langue française. — Commerce et Comptabilité industrielle. — Economie industrielle. — Législation ouvrière. — Technologie. — Hygiène générale. — Economie commerciale. — Marchandises. — Calligraphie. — Sténographie et Dactylographie. — Langue allemande.

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES.