

## Conditions d'utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- Le Conservatoire numérique communément appelé le Cnum constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre ([www.eclydre.fr](http://www.eclydre.fr)).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d'œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n° 78-753 du 17 juillet 1978 :

- la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue ([Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - http://cnum.cnam.fr](http://cnum.cnam.fr))
- la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- les reproductions de documents protégés par le droit d'auteur, uniquement consultables dans l'enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

4- Pour obtenir la reproduction numérique d'un document du Cnum en haute définition, contacter [cnum\(at\)cnam.fr](mailto:cnum(at)cnam.fr)

5- L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment possible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d'utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

## NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

NOTICE DE LA GRANDE MONOGRAPHIE	
Auteur(s) ou collectivité(s)	Boulanger, Auguste
Auteur(s)	Boulanger, Auguste (1866-1923)
Titre	Hydraulique générale
Nombre de volumes	2
Permalien	<a href="http://cnum.cnam.fr/redir?12DI11">http://cnum.cnam.fr/redir?12DI11</a>
Adresse	Paris : Octave Doin et fils, éditeurs, 1909
Collection	(Encyclopédie scientifique. Bibliothèque de mécanique appliquée et génie ; 8)
Collation	2 vol. (XVI-382-XII, VII-299-XII p.) : ill., diagrs. ; 19 cm
Sujet(s)	Hydraulique

NOTICE DU VOLUME	
Auteur(s) volume	Boulanger, Auguste (1866-1923)
Titre	Hydraulique générale
Volume	Tome I : Principes et problèmes fondamentaux
Adresse	Paris : Octave Doin et fils, éditeurs, 1909
Collation	1 vol. (XVI-382-XII p.) : ill., diagrs. ; 19 cm
Nombre d'images	421
Cote	CNAM-BIB 12 Di 11 (1)
Sujet(s)	Hydraulique
Thématique(s)	Énergie
Typologie	Ouvrage
Langue	Français
Date de mise en ligne	20/05/2021
Date de génération du PDF	20/05/2021
Permalien	<a href="http://cnum.cnam.fr/redir?12DI11.1">http://cnum.cnam.fr/redir?12DI11.1</a>

*12<sup>e</sup> Di 111.*

# ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DU DE TOULOUSE

BIBLIOTHÈQUE  
DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE ET GÉNIE

DIRECTEUR  
M. D'OCAGNE

## Hydraulique Générale

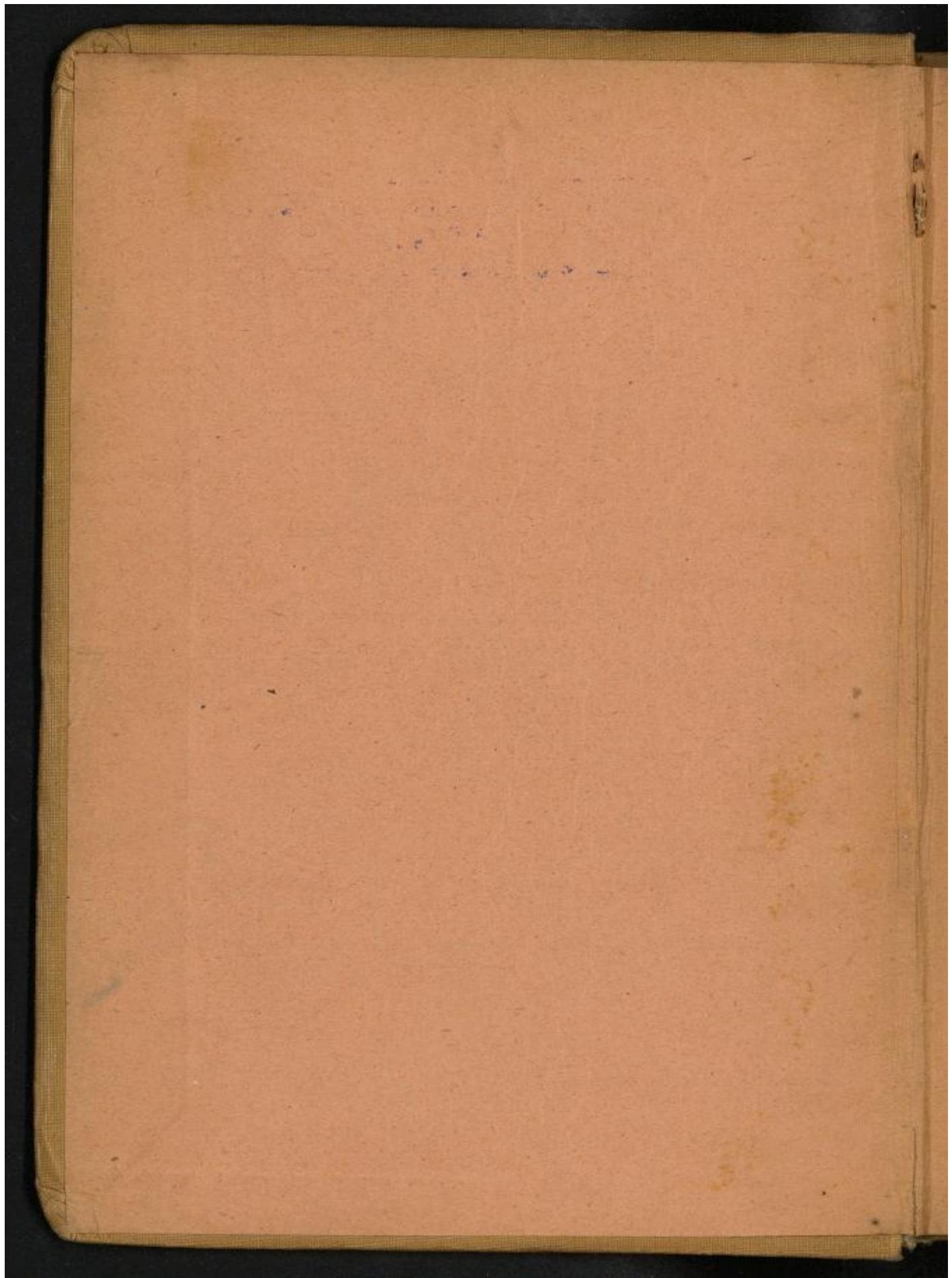
Tome Premier  
Principes  
et Problèmes Fondamentaux

PAR

A. BOULANGER



PARIS, O. DOIN ET FILS, ÉDITEURS

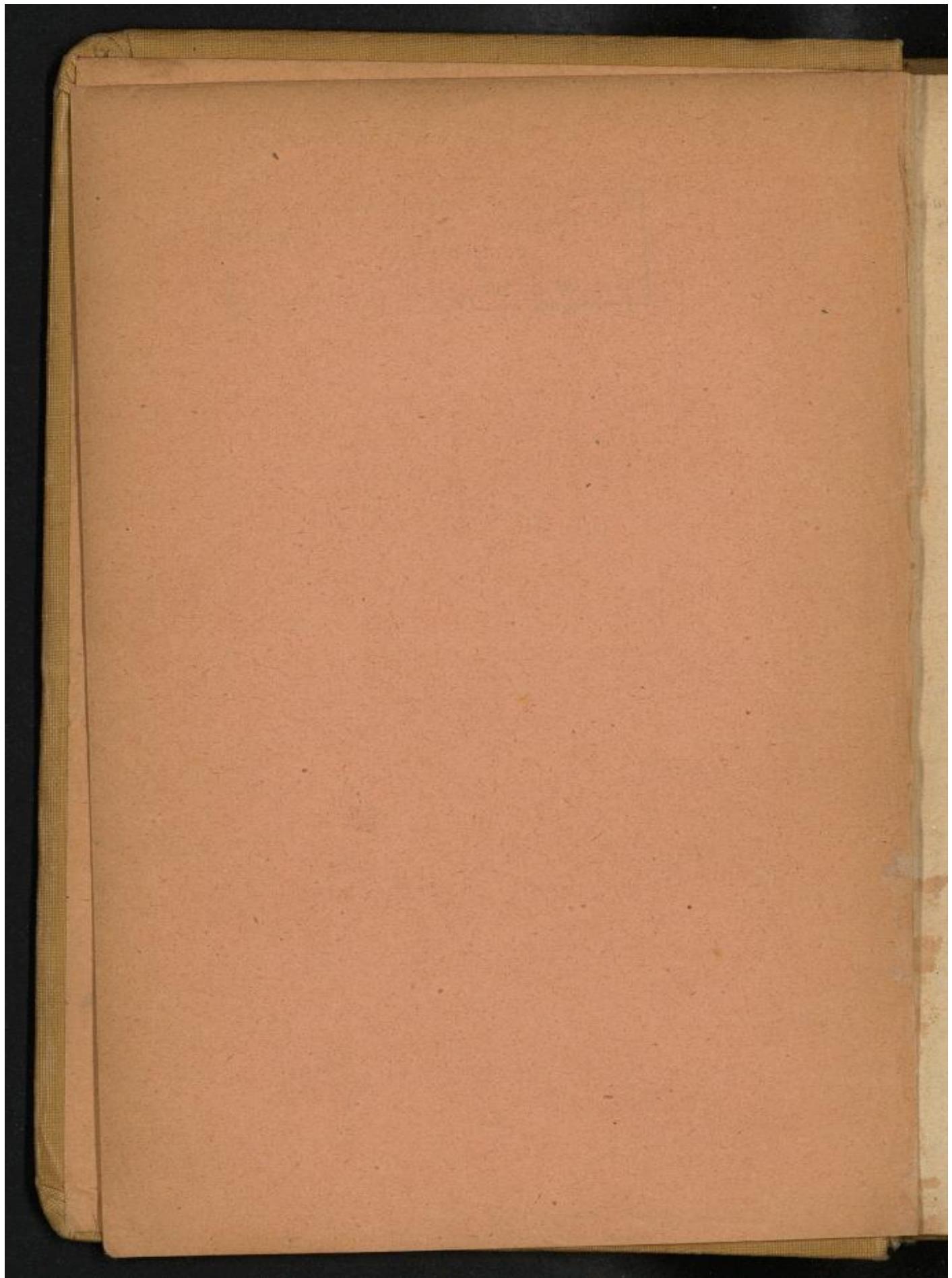


Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires

Nouveau p. v (1<sup>er</sup> Juil. 1919)

7<sup>f</sup> 50

SANS MAJORATION



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires

Octave DOIN et Fils, éditeurs, 8, place de l'Odéon, Paris.

## ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

Publiée sous la direction du Dr TOULOUSE

### BIBLIOTHÈQUE

## DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE ET GÉNIE

• Directeur : **M. D'OCAGNE**

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées  
Professeur à l'École des Ponts et Chaussées  
Répétiteur à l'École Polytechnique

On oppose assez volontiers, dans le domaine de la mécanique appliquée, l'homme de la théorie à l'homme de la pratique. Le premier, enclin aux spéculations abstraites, est tenu pour préférer aux problèmes qu'offre la réalité ceux qui se prêtent plus aisément aux solutions élégantes et, par suite, pour être disposé à négliger, en dépit de leur importance intrinsèque, telles circonstances qui seraient de nature à entraver le jeu de l'instrument analytique ; le second, au contraire, uniquement soucieux des données de l'empirisme, pour regarder toute théorie scientifique comme un luxe superflu dont il vaut mieux se passer.

Ce sont là des tendances extrêmes contre lesquelles il convient de se mettre en garde. S'il est vrai que certains

\*

esprits, séduits par l'imposante beauté de la science abstraite, ont quelque répugnance à se plier aux exigences de la réalité, généralement difficiles à concilier avec une aussi belle harmonie de forme, que d'autres, en revanche, par crainte des complications qu'entraîne à leurs yeux l'appareil analytique, — peut-être aussi, parfois, en raison de leur manque d'habitude à le manier, — tendent à méconnaître les éminents services qu'on en peut attendre, il n'en reste pas moins désirable, pour le plus grand bien des applications, de voir réaliser l'union la plus intime de la théorie et de la pratique, de la théorie qui coordonne, synthétise, réduit en formules simples et parlantes les faits révélés par l'expérience, et de la pratique qui doit, tout d'abord, les en dégager. La vérité est que l'une ne saurait se passer de l'autre, que toutes deux doivent progresser parallèlement. Ce n'est pas d'hier que Bacon l'a dit : « Si les expériences ne sont pas dirigées par la théorie, elles sont aveugles ; si la théorie n'est pas soutenue par l'expérience, elle devient incertaine et trompeuse. »

Développant cette pensée, un homme qui, dans un domaine important de la Mécanique appliquée, a su réaliser, de la façon la plus heureuse, cette union si désirable, s'est exprimé comme suit<sup>1</sup> : «... La théorie n'a point la prétention de se substituer à l'expérience ni de se poser en face d'elle en adversaire dédaigneux. C'est l'union de ces deux opérations de l'esprit dans une règle générale pour la recherche de la vérité qui constitue l'essence de la méthode : la théorie est le guide qu'on prend au départ, qu'on interroge sans cesse le long de la route, qui instruit toujours par ses réponses, qui indique le chemin le plus sûr et qui découvre l'horizon le plus vaste. Elle saura réunir dans une même explication générale les faits les plus divers, conduire

<sup>1</sup> Commandant P. CHARBONNIER, *Historique de la Balistique extérieure à la commission de Gêve*, p. 6.



à des formules d'un type rationnel et à des calculs d'une approximation sûre.

« La science aura plus d'audace parce qu'elle aura une base plus large et plus solidement établie. Les résultats expérimentaux, au lieu de faire nombre, viendront à chaque instant contribuer à asseoir la théorie, et ce n'est plus en eux-mêmes que les faits seront à considérer, mais suivant leur place rationnelle dans la science. La théorie saura mettre l'expérimentateur en garde contre les anomalies des expériences, et l'expérience, le théoricien contre les déductions trop audacieuses de la théorie. »

Ces quelques réflexions pourraient servir d'épigraphé à la première moitié de la présente Bibliothèque consacrée à la MÉCANIQUE APPLIQUÉE. Elles définissent l'esprit général dans lequel sont conçus ses volumes : *application rationnelle de la théorie, poussée aussi loin que le comporte l'état actuel de la science, aux problèmes tels qu'ils s'offrent effectivement dans la pratique, sans rien sacrifier des impérieuses nécessités de celle-ci à la plus grande facilité des déductions de celle-là.*

Il ne s'agit pas, dans l'application scientifique ainsi comprise, de torturer les faits pour les forcer à rentrer, vaille que vaille, dans le cadre de théories, plus ou moins séduisantes, conçues à *priori*, mais de plier la théorie à toutes les exigences du fait; il ne s'agit pas de forger des exemples destinés à illustrer et à éclairer l'exposé de telle ou telle théorie (comme cela se rencontre dans les Traité de mécanique rationnelle où une telle manière de faire est, vu le but poursuivi, parfaitement légitime), mais de tirer de la théorie toutes les ressources qu'elle peut offrir pour surmonter les difficultés qui résultent de la nature même des choses.

Quand les problèmes sont ainsi posés, ils ne se prêtent généralement pas à des solutions aboutissant directement à des formules simples et élégantes; ils forcent à suivre la voie plus pénible des approximations successives: mais défî-

nir par une première approximation l'allure générale d'un phénomène, puis, par un effort sans cesse renouvelé, arriver à le serrer de plus en plus près, en se rendant compte, à chaque instant, de l'écartement des limites entre lesquelles on est parvenu à le renfermer, c'est bel et bien faire œuvre de science ; et c'est pourquoi, dans une Encyclopédie qui, comme son titre l'indique, est, avant tout, *scientifique*, la Mécanique appliquée a sa place marquée au même titre que la Mécanique rationnelle.

La seconde moitié de la Bibliothèque est réservée aux divers arts techniques dont l'ensemble constitue ce qu'on est ordinairement convenu d'appeler le GÉNIE tant civil que militaire<sup>1</sup> et maritime.

Ici, de par la force même des choses, l'exposé des principes s'écarte davantage de la forme mathématique pour se rapprocher de celle qui est usitée dans le domaine des sciences descriptives. Cela n'empêche d'ailleurs qu'il n'y ait encore, dans la façon de classer logiquement les faits, d'en faire saillir les lignes principales, surtout d'en dégager des idées générales, possibilité d'avoir recours à une méthode vraiment scientifique.

Telle est l'impression qui se dégagera de l'ensemble de cette Bibliothèque, dont les volumes ont été confiés à des spécialistes hautement autorisés, personnellement adonnés à des travaux rentrant dans leurs cadres respectifs et, par cela même, pour la plupart du moins, ordinairement détournés du labeur de l'écrivain dont ils ont occasionnellement accepté la charge en vue de l'œuvre de mise au point dont les conditions générales viennent d'être indiquées.

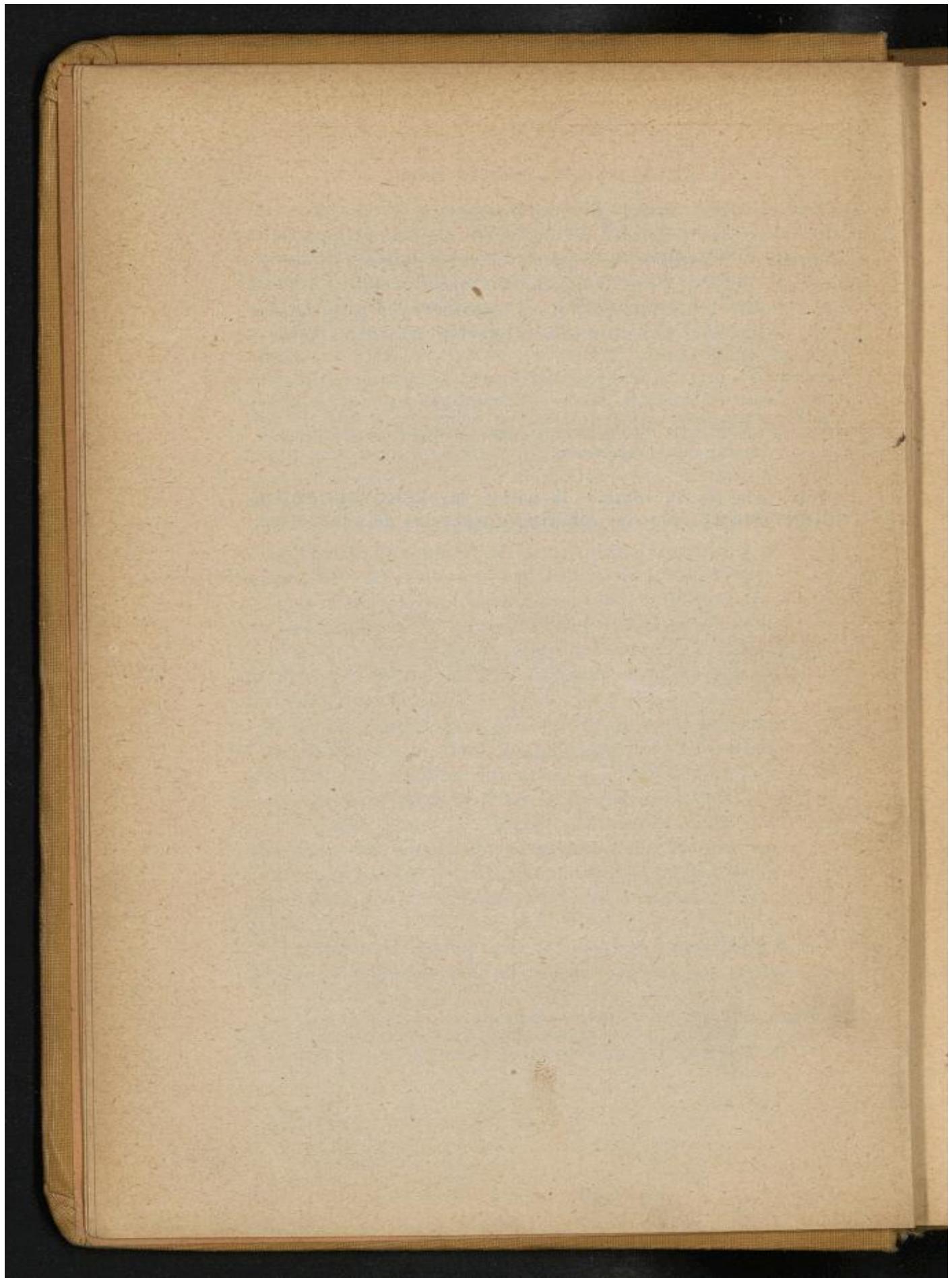
Il convient d'ajouter que le programme de cette Bibliothèque, — dont la liste ci-dessous fait connaître une pre-

<sup>1</sup> Le mot étant pris dans sa plus large acception et s'étendant tout aussi bien à la technique de l'*Artillerie* qu'à l'ensemble de celles qui sont plus particulièrement du ressort de l'arme à laquelle on applique le nom de *Génie*.

mière ébauche, susceptible de révision et de compléments ultérieurs, — s'étendra à toutes les parties qui peuvent intéresser l'ingénieur mécanicien ou constructeur, à l'exception de celles qui ont trait soit aux applications de l'Électricité, soit à la pratique de la construction proprement dite, rattachées, dans cette Encyclopédie, à d'autres Bibliothèques (29 et 33).

Les volumes seront publiés dans le format in-18 jésus cartonné; ils formeront chacun 400 pages environ avec ou sans figures dans le texte. Le prix marqué de chacun d'eux, quel que soit le nombre de pages, est fixé à 5 francs. Chaque volume se vendra séparément.

Voir, à la fin du volume, la notice sur l'**ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE**, pour les conditions générales de publication.



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires

## TABLE DES VOLUMES ET LISTE DES COLLABORATEURS

*Les volumes publiés sont indiqués par un \**

1. Statique graphique.
2. Résistance des matériaux, par A. MESNAGER, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées.
3. Stabilité des constructions, par A. AURIC et G. PIGEAUD, Ingénieurs des Ponts et Chaussées.
4. Cinématique appliquée, Théorie des mécanismes, par E. LUVERTE, ancien capitaine d'artillerie.
- \*5. Dynamique appliquée, par L. LECORNU, Ingénieur en chef des Mines, Professeur à l'Ecole polytechnique.
6. Régularisation du mouvement.
- \*7. Chronométrie, par J. ANDRADE, Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.
- \*8. Hydraulique générale, 2 volumes, par A. BOULANGER, Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.
9. Pneumatique générale.
10. Machines hydrauliques.
11. pompes et ventilateurs.
12. Air comprimé.
13. Moteurs thermiques, par E. JOUGUET, Ingénieur au corps des Mines.
14. Machines à vapeur, par F. CORDIER, chef d'escadron d'artillerie.
15. Machines à combustion interne, par A. WITZ, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille, Correspondant de l'Institut.

16. Turbines à vapeur, par le commandant F. CORDIER.
17. Chaudières et condenseurs, par le commandant F. CORDIER.
- 18 a. Machines-outils.
- 18 b. Machinerie de l'industrie du tabac et des matières similaires, par E. BELOT, Directeur des tabacs au Havre.
19. Appareils de levage, par G. ESPITALLIER, Lieutenant-colonel du génie territorial.
20. Câbles télédynamiques et transporteurs aériens, par A. GISCARD, Lieutenant-colonel du Génie territorial.
21. Mécanique des explosifs, par E. JOUGUET.
- \* 22 a. Balistique extérieure rationnelle. Problème principal, par P. CHARBONNIER, Chef d'escadron d'Artillerie coloniale.
- \* 22 b. Balistique extérieure rationnelle. Problèmes secondaires, par le Commandant CHARBONNIER.
- 22 c. Balistique extérieure expérimentale, par le Commandant CHARBONNIER.
- \* 22 d. Balistique intérieure, par le Commandant CHARBONNIER.
- 22 e. Tir des armes portatives, par H. BATAILLIER, Capitaine d'Artillerie.
- \* 23. Résistance et construction des bouches à feu, par L. JACOB, Colonel d'Artillerie coloniale, Directeur du Laboratoire central de la Marine.
- \* 24. Mécanique des affûts, par J. CHALLÉAT, Capitaine d'Artillerie.
25. Armes automatiques, par L. CHAUCHAT, Chef d'escadron d'Artillerie.
- \* 26. Artillerie de campagne, par J. PALOQUE, Lieutenant-Colonel d'Artillerie, Professeur à l'École supérieure de guerre.
- \* 26 a. Artillerie navale. Les canons et les projectiles, par le Colonel JACOB.
- \* 26 b. Artillerie navale. Les affûts, les poudres, les tourelles et le tir, par le Colonel JACOB.
27. Théorie du navire, par M. BOURDELLE, Ingénieur de la Marine, Professeur à l'École du Génie maritime.
- 28 a. Constructions navales. Coque, par J. ROUGÉ, Ingénieur principal de la Marine.
- 28 b. Constructions navales. Accessoires, par J. ROUGÉ.
29. Machines marines, par P. DROSNE, Ingénieur de la Marine.

30. Chaudières marines, par P. DROSNE.
31. Torpilles.
32. Navigation sous-marine, par C. RADIGUER, Ingénieur de la Marine.
33. Navigation aérienne, par R. SOREAU, Ingénieur, ancien élève de l'École polytechnique.
- \*34. Technique du ballon, par G. ESPITALIER.
- 35 a. Ponts en maçonnerie, par A. AURIC, Ingénieur des Ponts et Chaussées.
- \*35 b. Ponts métalliques. Calculs, par G. PIGEAUD, Ingénieur des Ponts et Chaussées.
- 35 c. Ponts métalliques. Construction, par G. PIGEAUD.
- 35 d. Ponts suspendus et Ponts à transbordeur, par G. LEINERUGEL Le Cocq, Ingénieur de la Marine, Ingénieur de la maison F. ARNOBIN, et G. ARNOBIN, Ingénieur constructeur.
36. Infrastructure des routes et chemins de fer.
37. Chemins de fer. Superstructure.
- \*38. Locomotives à vapeur, par J. NADAL, Ingénieur en chef des Mines, Adjoint à l'Ingénieur en chef du matériel des chemins de fer de l'État.
- 39 a. Chemins de fer. Matériel de transport. Voitures à voyageurs, par E. BIARD, Ingénieur principal à la Cie. de l'Est.
- 39 b. Wagons à marchandises, par E. BIARD.
- 39 c. Freinage du matériel de chemin de fer, par P. GOSSEREZ, Ingénieur au service du matériel roulant de la Cie de l'Est.
40. Chemins de fer. Exploitation technique.
41. Chemins de fer d'intérêt local.
42. Chemins de fer funiculaires et à crémaillère.
43. Tramways urbains.
44. Automobiles, par E. BORSCHNECK, Capitaine du Génie.
45. Bicyclettes et motocyclettes.
46. Navigation intérieure. Rivières et Canaux.
47. Fleuves à marées et estuaires, par L.-L. GODARD, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.
48. Travaux maritimes.

X

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

- \* 49. **Phares et signaux maritimes**, par C. RIMIÈRE, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.
- 50. **Hydraulique urbaine et agricole.**
- 51 a. **Mines. Méthodes d'exploitation**, par L. CRUSSARD, Ingénieur au corps des Mines, Professeur à l'École des Mines de Saint-Étienne.
- 51 b. **Mines. Grisou, Explosions, Aérage**, par L. CRUSSARD.
- 51 c. **Mines. Travaux au rocher et Services généraux.**
- \* 52. **Ponts improvisés. Ponts militaires et ponts coloniaux**, par G. ESPITALLIER et F. DURAND, Capitaine du Génie.
- \* 53 a. **Fortification cuirassée**, par L. DE MONDÉSIR, Lieutenant-Colonel du Génie, Professeur à l'École supérieure de Guerre.
- 53 b. **Technique des cuirassements et bétonnage des places fortes**, par G. ESPITALLIER.

**NOTA.** — La collaboration des auteurs appartenant aux armées de terre et de mer, ou à certaines administrations de l'Etat, ne sera définitivement acquise que moyennant l'approbation émanant du ministère compétent.

---

# ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION

du Dr TOULOUSE, Directeur de Laboratoire à l'École des Hautes Études.  
Secrétaire général : H. PIÉRON, Agrégé de l'Université.

## BIBLIOTHÈQUE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE ET GÉNIE

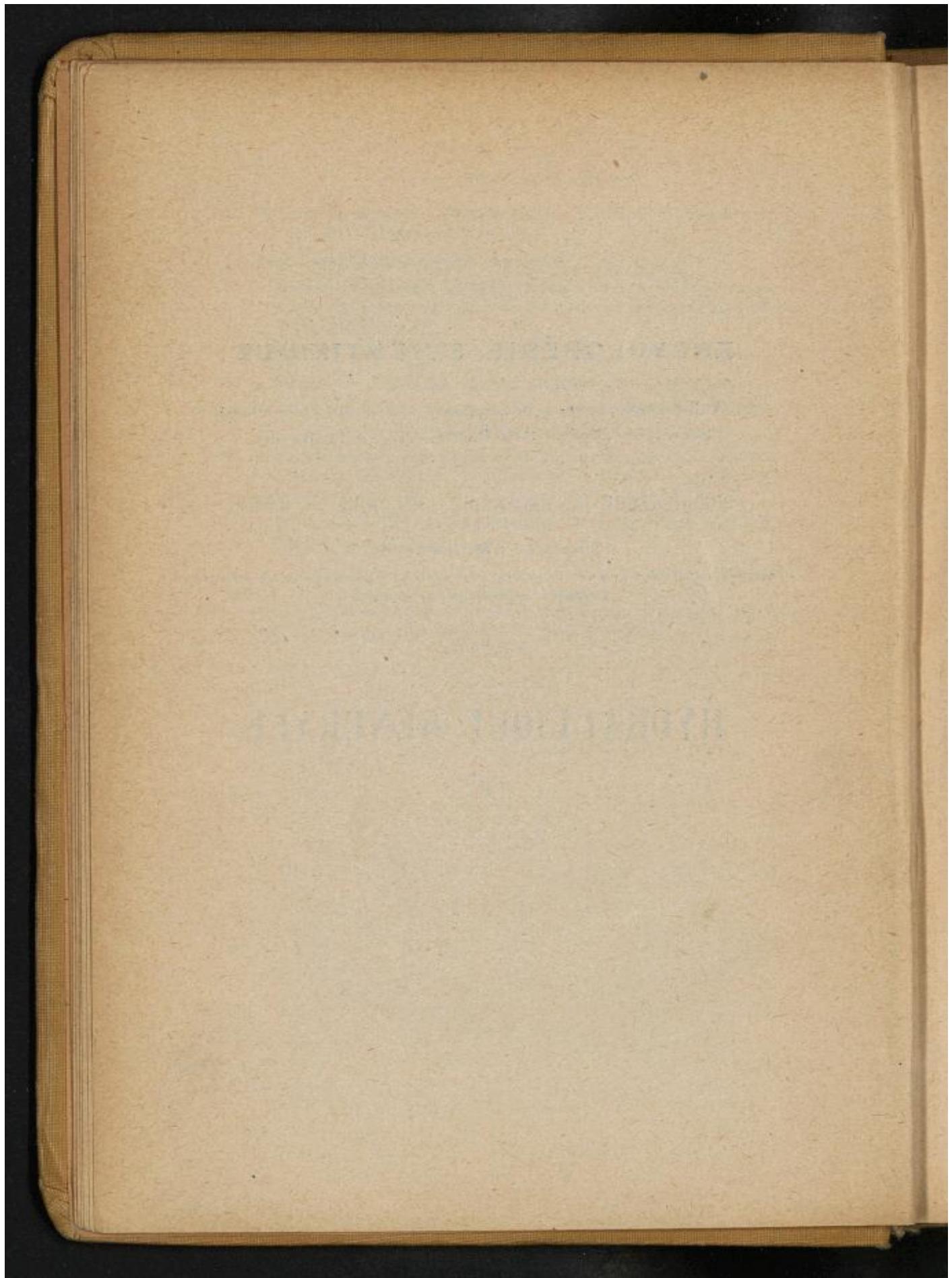
Directeur : M. D'OCAGNE

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées  
Répétiteur à l'École polytechnique.

— \* —

## HYDRAULIQUE GÉNÉRALE

I



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires

12<sup>e</sup> Di 11 (1)

# HYDRAULIQUE GÉNÉRALE

PAR

A. BOULANGER

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
PROFESSEUR-ADJOINT DE MÉCANIQUE  
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE

---

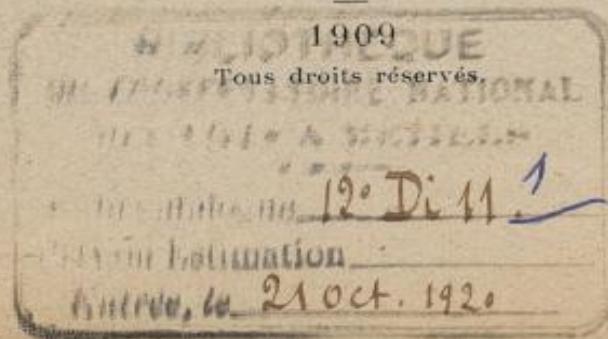
TOME I  
PRINCIPES  
ET PROBLÈMES FONDAMENTAUX

---

Avec 11 figures dans le texte

---

PARIS  
OCTAVE DOIN ET FILS, ÉDITEURS  
8, PLACE DE L'ODÉON, 8



A

MONSIEUR J. BOUSSINESQ

ANCIEN PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE  
PROFESSEUR A LA SORBONNE, MEMBRE DE L'INSTITUT

*Hommage respectueux.*

A. BOULANGER.

## AVANT-PROPOS

« Il serait bien à désirer qu'on pût trouver pour l'hydraulique des lois et des formules comme celles qu'offrent pour l'astronomie les écrits des Newton, des Euler, des Lagrange, des Laplace... »

(FRANZ VON GESTNER, *Theorie der Wellen*, 1804.)

Pour n'être le reflet d'aucun de ses pareils, ce Précis d'Hydraulique générale est loin d'être une œuvre originale ; ce n'est qu'un compendium des théories par lesquelles M. Boussinesq a rendu compte de la plupart des phénomènes importants présentés naturellement par le mouvement des eaux.

Les recherches de M. Boussinesq ont été poursuivies pendant près de quarante ans, et, durant cette période, M. Bazin consacrait ses efforts à l'étude expérimentale précise du mouvement de l'eau dans les canaux et tuyaux de conduite, de son écoulement par les orifices et les déversoirs. Tantôt l'expérience est venue confirmer des résultats théoriques, tantôt la théorie est venue justifier numériquement des résultats de l'observation.

Les travaux de M. Boussinesq sont disséminés dans les publications académiques ou périodiques ; si certains forment des notes insérées aux Comptes rendus de l'Académie des sciences, il faut dire que ces notes sont au nombre d'une centaine, et d'autre part plusieurs mémoires, tels que l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, sont très volumineux. L'ensemble des publications de l'éminent hydraulicien comprend plus de 1800 pages in-4°. Le Directeur de la Bibliothèque de Mécanique appliquée a cru qu'un résumé

systématique des résultats obtenus pourrait rendre des services, et il a bien voulu nous demander de le rédiger. M. Boussinesq, à qui nous avons demandé l'autorisation de faire à son œuvre les emprunts nécessaires, nous a accueilli avec une cordialité dont nous lui sommes très reconnaissant.

Limité par l'espace, nous avons dû parfois nous borner à un exposé un peu sommaire : le lecteur qui voudra plus de rigueur ou de développement sur quelques points aura à se reporter aux mémoires cités en notes.

Le présent volume comprend l'exposition des principes fondamentaux et l'étude de phénomènes généraux qui appartiennent au moins autant au domaine de la philosophie naturelle qu'à celui de l'art de l'ingénieur.

Nous réservons pour un autre volume l'examen de questions posées par la pratique et qui sont, pour la plupart, des problèmes de régimes à singularités (écoulements par orifices ; écoulements par déversoirs ; mouvements dans des tuyaux ou canaux présentant des élargissements brusques ou des coudes ; coups de bâlier dans les canalisations d'eau, etc...). A ces questions, l'ingénieur exige, vaille que vaille, une réponse quantitative, et il doit se contenter le plus souvent de résultats empiriques ; les théories de M. Boussinesq justifient la plupart de ces résultats, en réduisant l'appel à l'expérience vraisemblablement au minimum.

Mais il ne faudrait pas se méprendre sur notre intention, et le titre même d'*Hydraulique générale* a été adopté pour la bien marquer : il s'agit d'une étude du mouvement de l'eau « faite au point de vue d'une science concrète, soucieuse de connaître les véritables phénomènes naturels, mais d'ailleurs désintéressée de toute application immédiate aux machines mues par l'eau ou aux autres travaux hydrauliques dont s'occupent les ingénieurs<sup>1</sup> ».

Nous laissons aux personnes compétentes le soin d'apprécier, en dehors de la coordination des matériaux, les simplifications d'exposition que nous avons cru pouvoir introduire.

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 25, p. 54.

# HYDRAULIQUE GÉNÉRALE

(PRINCIPES ET PROBLÈMES FONDAMENTAUX)

## INTRODUCTION

### ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES

#### CHAPITRE I

LOIS GÉNÉRALES QUI RÉGISSENT LES PRESSIONS  
ET LES DÉFORMATIONS A L'INTÉRIEUR DES MILIEUX  
CONTINUS

1. **Pression sur un élément plan.** — Considérons, à l'intérieur d'un corps quelconque (solide ou fluide), à un instant donné, un élément matériel limité par deux plans parallèles extrêmement voisins et par une surface cylindrique normale à ces plans; l'épaisseur  $\epsilon$  de cet élément est très petite par rapport aux dimensions des bases  $s$  et  $s'$ . Soit  $M$  un point situé dans l'élément,  $M\sigma$  la normale à la base  $s$  vers l'extérieur de l'élément. Laissons le point  $M$  et la direction  $M\sigma$  invariables, et imaginons que l'on fasse décroître indéfiniment les dimensions de l'élément matériel, en conservant leurs grandeurs relatives et en



Fig. 1.

enveloppant toujours le point M : on obtiendra ce qu'on appelle un élément plan infiniment petit passant par M, ses faces  $s$  et  $s'$  étant orientées respectivement vers la direction  $M\sigma$  et vers la direction opposée.

La matière extérieure à cet élément E et en contact immédiat avec la face  $s$  exerce sur l'élément E certaines réactions. Imaginons qu'on transporte ces réactions équivallemment à elles-mêmes, de quantités imperceptibles, pour les appliquer au point M, ces changements n'altérant pas leurs projections, ni même d'une manière appréciable leurs moments par rapport à tout axe situé à une distance visible de ce point : leur résultante sera l'effort exercé sur l'élément de surface  $s$  orienté vers  $M\sigma$ . Les diverses parties égales de  $s$  étant placées, sauf des exceptions négligeables, dans les mêmes conditions physiques, les réactions qu'elles supportent seront sensiblement parallèles et ne pourront différer les unes des autres qu'infiniment peu par rapport à elles-mêmes ; leur résultante sera donc proportionnelle à l'étendue de l'élément plan. Le quotient de cette résultante par l'aire de l'élément  $s$  est un vecteur ( $P$ ) qui, lorsque les dimensions de l'élément matériel tendent vers zéro dans les conditions susdites, tend vers une limite bien déterminée ( $p$ ), généralement finie, quelquefois nulle. Ce vecteur limite ( $p$ ) sera dit la *pression* par unité de surface, au point M, sur la face de l'élément plan orientée vers  $M\sigma$ .

Le vecteur pression ( $p$ ) ne varie plus, à un instant donné, qu'avec les coordonnées ( $x, y, z,$ ) du point M et avec les cosinus directeurs ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) de la direction  $M\sigma$  fixant l'orientation de l'élément.

**2. Loi de variation de la pression avec l'orientation de l'élément.** — Tout d'abord, sur les deux faces opposées  $s$  et  $s'$  d'un même élément plan, les pressions  $(p)$  et  $(p')$  sont égales et directement opposées. Cela résulte de ce que la somme géométrique des forces extérieures appliquées à l'élément matériel  $E$  et des forces d'inertie est nulle : comme le poids et l'inertie de  $E$  sont de l'ordre du volume de l'élément, que la somme des réactions latérales est de l'ordre de grandeur de l'aire latérale, que ce volume et cette aire sont numériquement négligeables vis-à-vis des aires  $s$  et  $s'$ , comme enfin les aires  $s$  et  $s'$  sont égales, on reconnaît immédiatement que  $(p) + (p') = 0$ .

Il en résulte, par voie de continuité et eu égard au principe de l'égalité de l'action et de la réaction, que sur des éléments plans égaux, parallèles, très voisins, de même orientation par rapport à une demi-normale commune, les pressions diffèrent extrêmement peu.

Considérons maintenant, en un point  $M$  du corps, deux éléments plans  $s$  et  $s_1$ , ayant pour orientations respectives les droites  $M\sigma$  et  $M\sigma_1$ ; soient  $(p)$  et  $(p_1)$  les pressions au point  $M$  de  $s$  et au point  $M$  de  $s_1$ . Nous allons démontrer que la *projection de  $(p)$  sur la direction  $M\sigma_1$*  est égale à la *projection de  $(p_1)$  sur la direction  $M\sigma$* . Ce résultat, dû à Cauchy, est connu sous le nom de *loi de l'égalité des composantes normales réciproques*<sup>1</sup>.

Imaginons qu'on isole du corps un parallélépipède dont une arête, dirigée suivant l'intersection des éléments, ait son milieu en  $M$ , dont les faces adjacentes situées dans les plans des éléments soient des carrés de

<sup>1</sup> A. CAUCHY, 1, p. 67.

côté  $l$ . Ecrivons l'équation fournie par le théorème des moments cinétiques appliquée à l'équilibre dynamique du parallélépipède dont on fera tendre vers zéro l'arête  $l$ , l'axe des moments étant la parallèle  $oz$  à l'intersection des éléments menée par le centre  $o$  du parallélépipède. Les moments des forces d'inertie et des forces extérieures à distance (pesanteur) sont de l'ordre de  $l^3$  ;

ceux des efforts exercés sur les faces losanges sont nuls. Il reste à mettre en compte les efforts exercés sur les faces carrées. Soit  $a$  et  $b$  les centres de deux faces opposées; les efforts correspondant à ces faces, sensiblement égaux, forment un couple; si  $f$  et  $g$  sont les projections des pressions en  $a$  et  $b$  ( $f = g$ , sensiblement) suivant la direction  $M\sigma_1$ ,

(normale à  $ab$ ), le moment de ce couple par rapport à  $oz$  sera  $-fl^2 \times l$  ou  $-fl^3$ . Si  $f_1$  et  $g_1$  sont de même les projections des pressions aux centres  $a_1$  et  $b_1$  des deux autres faces carrées, on trouvera de même, pour moment résultant des efforts exercés sur ces faces,  $f_1 l^3$ . L'équation d'équilibre dynamique sera :

$$fl^3 - f_1 l^3 + Al^3 = 0,$$

$A$  étant une quantité qui ne croît pas indéfiniment quand  $l$  tend vers zéro. Le passage à la limite montre que  $f$  et  $f_1$  tendent à devenir égales entre elles et à coïncider avec les composantes des pressions en  $M$  sur les éléments  $s$  et  $s_1$ , projetées respectivement suivant  $M\sigma_1$  et  $M\sigma$ . D'où le théorème de Cauchy.

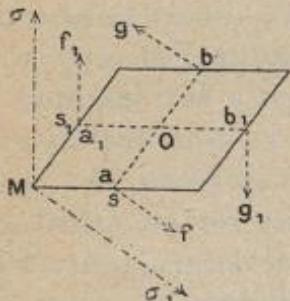


Fig. 2.

Ce résultat acquis, soit en un point M trois éléments plans  $s_x, s_y, s_z$ , orientés normalement aux axes rectangulaires  $ox, oy, oz$ . Nous désignerons par  $N_x, N_y, N_z$  les composantes normales des pressions relatives à ces éléments. D'après le théorème précédent appliqué aux éléments  $s_y$  et  $s_z$ , la composante suivant  $oz$  de la pression sur  $s_y$  et celle suivant  $oy$  de la pression sur  $s_z$  sont égales ; nous désignerons leur valeur commune par  $T_x$ . En définissant de même par permutation tournante deux quantités analogues  $T_y$  et  $T_z$ , nous formerons le tableau des composantes, suivant les axes, des pressions relatives aux trois éléments :

	$ox$	$oy$	$oz$
$s_x$	$N_x$	$T_z$	$T_y$
$s_y$	$T_z$	$N_y$	$T_x$
$s_z$	$T_y$	$T_x$	$N_z$

Soit enfin  $s$  un élément plan quelconque passant par M, orienté normalement à la direction de cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ ;  $p_x, p_y, p_z$  les composantes, suivant les axes, de la pression en M sur cet élément;  $s_x, s_y, s_z$  les éléments projections de  $s$  sur les plans menés par M normalement aux axes de coordonnées, éléments orientés suivant ces axes. En appliquant à l'élément  $s$  et à sa projection  $s_x$  le théorème de la réciprocité des composantes normales des pressions, il vient :

$$\left. \begin{array}{l} p_x = \alpha N_x + \beta T_z + \gamma T_y, \\ p_y = \alpha T_z + \beta N_y + \gamma T_x, \\ p_z = \alpha T_y + \beta T_x + \gamma N_z. \end{array} \right\} \quad (1)$$

On aura de même :

Ces formules fondamentales sont dues à Cauchy<sup>1</sup>.

### 3. Éléments orthostatiques en un point. —

Nous allons montrer, d'après Cauchy, qu'autour de tout point M d'un milieu, il existe trois éléments formant un trièdre trirectangle et sur lesquels les pressions sont normales aux éléments mêmes. Barré de Saint-Venant les a appelés *éléments orthostatiques*, et les pressions correspondantes sont dites *principales*.

Les conditions pour qu'un élément orienté normalement à la direction ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) soit orthostatique sont, en désignant par  $P$  la pression normale :

$$\frac{P_x}{\alpha} = \frac{P_y}{\beta} = \frac{P_z}{\gamma} = P,$$

$$\text{ou } (N_x - P)\alpha + T_z\beta + T_y\gamma = 0,$$

On reconnaît les équations définissant les directions des axes de la quadrique à centre :

$$\begin{aligned} N_x X^2 + N_y Y^2 + N_z Z^2 + 2T_x YZ + 2T_y ZX \\ + 2T_z XY = \text{Const.} \end{aligned}$$

De là résulte l'existence des trois éléments orthostatiques. Les pressions correspondantes sont les racines  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  de l'équation :

$$\begin{vmatrix} N_x - P & T_z & T_y \\ T_z & N_y - P & T_x \\ T_y & T_x & N_z - P \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{ou } (N_x - P)(N_y - P)(N_z - P) - T_x^2(N_x - P) \\ - T_y^2(N_y - P) - T_z^2(N_z - P) - 2T_x T_y T_z = 0. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> A. CAUCHY, 4, p. 68.

On reconnaît de suite que :

$$N_x + N_y + N_z = P_1 + P_2 + P_3,$$

en sorte que  $N_x + N_y + N_z$  est une quantité invariante par rapport aux axes de coördonnées.

Imaginons qu'on ait pris les plans de coördonnées parallèlement aux éléments orthostatiques en  $M$ ; avec ce choix d'axes, la quadrique précédente devant être rapportée à ses axes, on devra avoir  $T_x = T_y = T_z = 0$ ; de plus,  $N_x = P_1$ ,  $N_y = P_2$ ,  $N_z = P_3$ ; les formules de Cauchy se réduisent donc à :

$$p_x = \alpha P_1, \quad p_y = \beta P_2, \quad p_z = \gamma P_3,$$

et l'on a :  $\frac{p_x^2}{P_1^2} + \frac{p_y^2}{P_2^2} + \frac{p_z^2}{P_3^2} = 1.$

Donc le lieu des extrémités des vecteurs représentant les pressions sur les éléments plans passant par  $M$  est un ellipsoïde ayant pour axes les pressions principales relatives à ce point.

Soient  $(a, a', a'')$  les cosinus directeurs de  $P_1$ ,  $(b, b', b'')$  ceux de  $P_2$ ,  $(c, c', c'')$  ceux de  $P_3$  [par rapport à des axes rectangulaires  $oxyz$  quelconques]; inversement, par rapport aux directions des pressions principales, les axes  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$  auront respectivement pour cosinus directeurs  $(a, b, c)$ ,  $(a', b', c')$ ,  $(a'', b'', c'')$ . D'autre part, la pression relative à un élément plan orienté suivant la direction  $(l, m, n)$  par rapport aux pressions principales, a pour projections sur les directions de ces pressions  $lP_1$ ,  $mP_2$ ,  $nP_3$  [d'après les formules de Cauchy], et la projection de cette même pression sur la direction  $(l', m', n')$  a pour mesure :

$$l'lP_1 + m'm P_2 + n'n P_3.$$

Pour  $(l, m, n) \equiv (a, b, c)$  et  $(l', m', n') \equiv (a', b', c')$ , on aura :

$$N_x = a^2 P_1 + b^2 P_2 + c^2 P_3.$$

Pour  $(l, m, n) \equiv (a, b, c)$  et  $(l', m', n') \equiv (a', b', c')$ , on aura :

$$T_z = aa' P_1 + bb' P_2 + cc' P_3.$$

Nous aurons à faire usage de ces formules (et des analogues obtenues par permutation tournante des lettres) dans le prochain chapitre.

**4. Relations entre les forces extérieures à distance et d'inertie sollicitant un élément matériel et les pressions autour d'un point de cet élément.** — Considérons dans le corps un point M ( $x, y, z$ ) et construisons un parallélépipède de centre M, d'arêtes parallèles aux axes de coordonnées et de dimensions très petites  $2a, 2b, 2c$ . Isolons par la pensée l'élément matériel inclus dans ce parallélépipède et appliquons-lui le théorème du mouvement du centre de gravité.

Soit  $\rho$  la densité au point M; X, Y, Z les composantes de la résultante des forces extérieures appliquées

à l'élément, rapportée à l'unité de masse;  $u', v', w'$  les composantes de l'accélération actuelle du point M; (N, T) les composantes des pressions relatives au point M, fonctions de  $(xyz)$  que nous supposerons continues et dérivables.

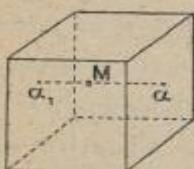


Fig. 3.

Les pressions sur les deux faces normales à  $ox$  auront pour projections totales :

$$N_x(x+a, y, z) - N_x(x-a, y, z),$$

$$T_z(x+a, y, z) - T_z(x-a, y, z),$$

$$T_y(x+a, y, z) - T_y(x-a, y, z);$$

les efforts extérieurs relatifs à ces faces d'aire commune  $4bc$  auront donc pour parties principales des projections de leur somme géométrique :

$$8abc \frac{\partial N_x}{\partial x}, \quad 8abc \frac{\partial T_z}{\partial x}, \quad 8abc \frac{\partial T_y}{\partial x}.$$

On ferait un calcul analogue pour chaque couple de faces. Si  $V$  est le volume  $8abc$  de l'élément, on aura ainsi pour projections, sur les axes, de la somme géométrique des efforts de contact exercés sur les diverses faces du parallélépipède :

$$V \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_z}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial z} \right), V \left( \frac{\partial T_z}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T_x}{\partial z} \right), \\ V \left( \frac{\partial T_y}{\partial x} + \frac{\partial T_x}{\partial y} + \frac{\partial N_z}{\partial z} \right).$$

Les composantes de la force extérieure à distance sollicitant l'élément de volume sont  $\rho X V$ ,  $\rho Y V$ ,  $\rho Z V$ , tandis que celles de l'inertie sont :

$$-\rho u' V, -\rho v' V, -\rho w' V.$$

Après suppression du facteur  $V$ , on obtiendra les trois

équations suivantes, dues à Cauchy et retrouvées par Poisson<sup>1</sup> :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_z}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial z} + \rho X &= \rho u', \\ \frac{\partial T_z}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T_x}{\partial z} + \rho Y &= \rho v', \\ \frac{\partial T_y}{\partial x} + \frac{\partial T_x}{\partial y} + \frac{\partial N_z}{\partial z} + \rho Z &= \rho w'. \end{aligned} \right\}$$

On peut d'ailleurs démontrer qu'on serait conduit à ces mêmes équations si l'on partait d'un élément de volume de forme quelconque.

Enfin si l'on appliquait au même élément de volume le théorème des moments cinétiques, on aboutirait, au même ordre d'approximation, à des équations identiquement vérifiées.

**5. Déformation infiniment petite d'un milieu.** — Isolons par la pensée une certaine masse d'un milieu qui subit, sous l'action de forces données, un mouvement infiniment petit n'en altérant pas la continuité, et proposons-nous d'étudier la déformation de cette masse élémentaire E.

Un point matériel de E a pour position initiale M ( $x, y, z$ ) et pour position finale M'

$$(x + U, y + V, z + W);$$

les composantes U, V, W du déplacement de ce point sont trois fonctions de  $x, y, z$ , assujetties seulement à être uniformes, continues, infiniment petites, et à

<sup>1</sup> A. CAUCHY, 3, p. 144. — S. D. POISSON, 2, p. 387.

admettre des dérivées partielles du premier ordre possédant les mêmes propriétés.

Un deuxième point de E infiniment voisin du précédent, de position initiale  $M_1(x+h, y+k, z+l)$ , subira un déplacement dont les composantes se déduiront de U, V, W en y remplaçant x, y, z respectivement par  $x+h, y+k, z+l$ ; les coordonnées de sa nouvelle position  $M'_1$  seront donc :

$$(x+h+U+\frac{\partial U}{\partial x}h+\frac{\partial U}{\partial y}k+\frac{\partial U}{\partial z}l, \dots).$$

Posons :

$$\begin{aligned}\delta_x &= \frac{\partial U}{\partial x}, & \delta_y &= \frac{\partial V}{\partial y}, & \delta_z &= \frac{\partial W}{\partial z}, \\ g_x = 2\gamma_x &= \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, & g_y = 2\gamma_y &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}, \\ g_z = 2\gamma_z &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \\ 2p &= \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, & 2q &= \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \\ 2r &= \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}.\end{aligned}$$

Les projections du déplacement  $M_1M'_1$ , du deuxième point peuvent s'écrire identiquement :

$$U + ql - rk + \delta_x h + \gamma_z k + \gamma_y l,$$

. . . . .

Sous cette forme, elles nous permettent de regarder, avec Cauchy, ce déplacement comme la résultante : 1° de la translation (U, V, W); 2° de la rotation ( $p, q, r$ ) autour du point M, translation et rotation infiniment petites qui sont les mêmes pour tous les

points  $M_1$  de l'élément infinitésimal  $E$  et dont l'ensemble conserve la forme géométrique de l'élément; 3<sup>e</sup> du déplacement de composantes

$$\delta_x h + \gamma_z k + \gamma^y l,$$

Étudions à part l'effet de ce dernier déplacement, dit *déformation pure*. Le point dont les coordonnées initiales relatives à  $M$  sont  $h, k, l$ , a pour coordonnées finales :

$$H = h(1 + \delta_x) + \gamma_z k + \gamma^y l, \quad \left. \right\} \quad (T)$$

Ces équations de définition caractérisent une transformation ponctuelle homographique conservant le plan de l'infini : les éléments rectilignes et les éléments plans se transforment en éléments rectilignes et en éléments plans, et il y a conservation du parallélisme de tels éléments.

Si l'on suppose seulement que le déterminant de cette transformation linéaire et homogène n'est pas nul, une sphère de centre  $M$  sera changée en un ellipsoïde de même centre. Imaginons que les centres de coordonnées aient été pris parallèles aux axes principaux de cet ellipsoïde : les formules de passage de la sphère à l'ellipsoïde sont nécessairement de la forme

$$H = \sigma_1 h, \quad K = \sigma_2 k, \quad L = \sigma_3 l;$$

la déformation pure se réduit donc à la superposition des trois dilatations géométriques, deux à deux rectangulaires, définies par ces formules.

Étudions de plus près la déformation pure dans l'hypothèse où les quantités  $\delta$  et  $g$  diffèrent infiniment

peu de zéro, en sorte qu'on puisse dans les calculs n'en conserver que les premières puissances. Le déterminant de la transformation diffère alors très peu de l'unité.

Un parallélépipède élémentaire d'arêtes parallèles aux axes rectangulaires de coordonnées, de centre M ( $x, y, z$ ) et de dimensions ( $2a, 2b, 2c$ ), se change en un parallélépipède oblique dont nous allons calculer les éléments.

Pour les extrémités d'une arête AA' parallèle à  $ox$ , les valeurs de  $h, k, l$  sont respectivement :

$$(-a, -b, -c) \text{ et } (+a, -b, -c);$$

les projections de cette arête sur les axes fixes étaient avant la déformation ( $2a, 0, 0$ ) et sont maintenant  $2(1 + \delta_x)a, 2\gamma_z a, 2\gamma_y a$ ; la longueur  $A_1A'_1$  de l'arête transformée est donc :

$$A_1A'_1 = 2a \sqrt{(1 + \delta_x)^2 + \gamma_z^2 + \gamma_y^2};$$

la partie principale en est  $2a(1 + \delta_x)$ . Par suite,

$$\frac{A_1A'_1 - AA'}{AA'}$$

coïncide avec  $\delta_x$ , au degré d'approximation admis; et  $\delta_x$  est appelé la *dilatation*, aux environs du point M, des droites matérielles parallèles à  $ox$ .

$\delta_y$  et  $\delta_z$  reçoivent une interprétation et une dénomination analogues.

L'angle de deux arêtes voisines AA', AB' parallèles respectivement à  $ox$  et à  $oy$ , primitivement droit, vaudra, après la déformation,  $\frac{\pi}{2} - \varepsilon_z$ ; les cosinus des arêtes transformées  $A_1A'_1$  et  $A_1B'_1$  sont [aux facteurs

$\frac{2a}{A_1 A'_1}$  et  $\frac{2b}{A_1 B'_1}$  près]  $(1 + \delta_x), \gamma_z, \gamma_y$  et  $\gamma_z, (1 + \delta_y), \gamma_x$ ; la valeur de  $\sin \varepsilon_z$  en résulte immédiatement, et si, dans l'égalité obtenue, on s'en tient aux parties principales, il vient :

$$\varepsilon_z = 2\gamma_z = g_z.$$

$g_x, g_y, g_z$  sont donc les décroissements des angles des faces du parallélépipède initial; on leur donne pour cette raison le nom de *glissements* ou *distorsions* au point M, relatifs aux axes de référence.

Déterminons enfin l'accroissement unitaire du volume du parallélépipède élémentaire, produit par le fait de la déformation, ou, comme on dit, la *dilatation cubique* au point M. Ce volume, qui vaut initialement  $8abc$ , sera après la déformation :

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 + \delta_x & \gamma_z & \gamma_y \\ \gamma_z & 1 + \delta_y & \gamma_x \\ \gamma_y & \gamma_x & 1 + \delta_z \end{array} \right| 8abc;$$

sa partie principale est  $(1 + \delta_x + \delta_y + \delta_z) 8abc$ . La dilatation cubique est donc

$$\theta = \delta_x + \delta_y + \delta_z.$$

Examinons maintenant la déformation pure d'une petite sphère de rayon  $\rho$  et de centre M. Pour les points de sa périphérie,  $h, k, l$  vérifient la relation :

$$h^2 + k^2 + l^2 = \rho^2.$$

Pour obtenir l'équation de la surface transformée, nous résoudrons par rapport à  $h, k, l$  les équations de transformation (T); ce qui donne, en négligeant les

quantités du second ordre de petitesse et en notant que le déterminant se réduit à  $1 + \delta_x + \delta_y + \delta_z$  :

$$h = (1 - \delta_x) H - \gamma_z K - \gamma_y L, \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

puis nous obtiendrons immédiatement :

$$\Sigma [(1 - \delta_x) H - \gamma_z K - \gamma_y L]^2 = \varphi^2$$

ou simplement, au même ordre d'approximation :

$$\Sigma (1 - 2\delta_x) H^2 - 2\Sigma g_x K L = \varphi^2.$$

Telle est l'équation de l'ellipsoïde en lequel se transforme la sphère et qu'on appelle *l'ellipsoïde de dilatation* relatif au point M.

Cet ellipsoïde joue un rôle important dans l'étude faite par Cauchy<sup>1</sup> de la déformation autour d'un point.

**6. Dilatations principales.** — Supposons qu'on ait mené les axes de coordonnées parallèlement aux axes de l'ellipsoïde de dilatation du point M. On aura pour ces axes particuliers :

$$g_x = g_y = g_z = 0.$$

Donc, en tout point du milieu, il existe trois directions rectangulaires pour lesquelles les glissements sont nuls.

La déformation d'un parallélépipède entourant le point M et d'arêtes parallèles à ces directions se réduit à la dilatation de ses arêtes.

Les dilatations correspondant à ces trois directions sont dites les *dilatations principales* relatives au point M.

<sup>1</sup> A. CAUCHY, 2, p. 92; 4, p. 283-284.

Les paramètres ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) d'une direction de dilatation principale sont définis par les équations :

$$(1 - 2\delta_x - S) \alpha - g_z \beta - g_y \gamma = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\};$$

la quantité  $S$  satisfait à l'équation :

$$\left| \begin{array}{ccc} S + 2\delta_x - 1 & g_z & g_y \\ g_z & S + 2\delta_y - 1 & g_x \\ g_y & g_x & S + 2\delta_z - 1 \end{array} \right| = 0$$

qui admet trois racines réelles  $S_1, S_2, S_3$ . L'équation réduite de l'ellipsoïde de dilatation s'écrira alors :

$$S_1 \mathcal{H}^2 + S_2 \mathcal{K}^2 + S_3 \mathcal{L}^2 = \rho^2,$$

tandis que si l'on désigne par  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  les dilatations principales, elle doit être :

$$(1 - 2\delta_1) \mathcal{H}^2 + (1 - 2\delta_2) \mathcal{K}^2 + (1 - 2\delta_3) \mathcal{L}^2 = \rho^2.$$

Si donc on pose  $S = 1 - 2\delta$ , on aura comme équation aux dilatations principales  $\delta$  :

$$\left| \begin{array}{ccc} 2(\delta_x - \delta) & g_z & g_y \\ g_z & 2(\delta_y - \delta) & g_x \\ g_y & g_x & 2(\delta_z - \delta) \end{array} \right| = 0,$$

ou :

$$4(\delta_x - \delta)(\delta_y - \delta)(\delta_z - \delta) - g_x^2(\delta_x - \delta) - g_y^2(\delta_y - \delta) - g_z^2(\delta_z - \delta) - g_x g_y g_z = 0.$$

On reconnaît que :

$$\theta = \delta_x + \delta_y + \delta_z = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3,$$

en sorte que la dilatation cubique, égale à la somme des dilatations principales au point M, est une quantité invariante par rapport aux axes de coordonnées.

Soient  $(a, a', a'')$ ,  $(b, b', b'')$ ,  $(c, c', c'')$  les cosinus directeurs des trois dilatations principales  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ . Considérons les équations linéaires

$$\begin{aligned} 2(\delta_x - \delta_1)a + g_z a' + g_y a'' &= 0, \\ 2(\delta_x - \delta_1)b + g_z b' + g_y b'' &= 0, \\ 2(\delta_x - \delta_1)c + g_z c' + g_y c'' &= 0. \end{aligned}$$

Résolues par rapport à  $\delta_x$  et  $g_z$ , elles donnent, eu égard aux relations connues entre les cosinus directeurs de trois droites rectangulaires deux à deux :

$$\begin{aligned} \delta_x &= a^2\delta_1 + b^2\delta_2 + c^2\delta_3, \\ \frac{1}{2}g_z &= aa'\delta_1 + bb'\delta_2 + cc'\delta_3. \end{aligned}$$

Ces formules et leurs analogues seront utilisées au prochain chapitre, concurremment avec celles établies au § 3<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Sur l'ensemble de ce chapitre, voir MOIGNO, XXI<sup>e</sup> leçon.

## CHAPITRE II

### ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES FLUIDES

---

#### A. — *Généralités sur les fluides.*

1. **Propriété caractéristique des fluides<sup>1</sup>.** — Imaginons qu'une particule matérielle soit, dans son état actuel (qu'il est loisible de fixer par commodité), intérieurement conformée de façon à présenter la même structure moléculaire, la même disposition générale de ses points matériels, à un observateur infiniment petit et infiniment perspicace, placé vers son centre et s'y orientant dans tous les sens : une telle particule est dite *isotrope*. Toute particule ne possédant pas ce caractère est dite *hétérotophe* ou *anisotrope*.

Les propriétés physiques d'une particule isotrope qui dépendent de son agencement intérieur auront la même expression analytique par rapport à tout trièdre de référence entraîné dans le déplacement de l'observateur.

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 46, p. 1099-1105.

L'isotropie deviendrait la symétrie si ces propriétés conservaient en outre la même expression lors du changement de signe de ce trièdre.

Un corps d'étendue finie est *isotrope*, quand toutes ses particules sont isotropes.

La propriété qui caractérise les corps fluides d'étendue finie est la suivante : « ce sont des corps isotropes capables de reconstituer spontanément leur isotropie après toutes les déformations possibles, et même de la garder à fort peu près durant ces déformations, pourvu qu'elles s'effectuent avec une lenteur suffisante. »

Pendant les mouvements moyens que perçoivent nos sens, il se produit d'imperceptibles mais continues modifications de structure moléculaire tendant à la reconstitution de l'isotropie de chaque particule.

On attribue la possibilité de cette reconstitution à la grandeur de l'amplitude des vibrations calorifiques dans les fluides : cette grandeur suffirait à séparer les molécules et à leur permettre de prendre constamment l'agencement le plus stable et sans doute aussi le plus simple, c'est-à-dire celui de l'isotropie.

Les tourbillonnements lents et incessants de l'eau la plus calme, connus sous le nom de *mouvements browniens* et que M. Gouy a particulièrement étudiés, mouvements rendus appréciables microscopiquement par l'entraînement des poussières éparses dans le liquide, sont regardés comme la partie sensible de cette agitation.

Dans certains corps dits à viscosité négligeable (eau, alcool,...), la régularisation de l'isotropie est extrêmement rapide, même durant les mouvements; dans d'autres fluides dits visqueux (huile, goudron,...), elle ne s'opère qu'avec lenteur.

2. **Des fluides à l'état élastique.** — Nous n'étudierons ici que les mouvements des premiers fluides, dont le type commun est l'eau, et qui sont parfaitement conducteurs de la chaleur : nous supposerons que la température est uniforme dans toute la masse considérée, et qu'elle garde une valeur constante durant les modifications examinées.

Pour un tel fluide à température constante et uniforme animé d'un mouvement *très lent*, on admet, avec une approximation assez grande, à ce qu'il semble, que chaque groupe atomique ou moléculaire atteigne sans cesse une configuration fonction seulement des situations relatives actuelles des centres de gravité de ce groupe et des groupes environnants. La reconstitution de l'isotropie exige alors une certaine liaison entre cette configuration et ce mouvement local moyen ou visible du groupe, liaison capable de modifier la forme du groupe et même de produire la destruction des groupes. Cet état particulier de la matière est dit *état élastique*<sup>1</sup>.

L'état élastique, une fois atteint, ne varie, à une température donnée, qu'avec l'étendue laissée à chaque élément matériel pour y distribuer uniformément ses molécules, soit avec la répartition de la *densité*.

Menons un élément plan quelconque dans une particule fluide à l'état élastique, orienté normalement à la direction  $M\sigma$ ; pour un observateur infiniment petit placé suivant  $M\sigma$ , les pieds en  $M$ , la structure moléculaire est la même quelle que soit son orientation. La direction de la pression exercée sur cet élément, qui est déterminée par cette structure même, devra présenter la

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 22, VII<sup>e</sup> leçon, pp. 83 et 84.

même symétrie par rapport à  $M\sigma$  et sera par suite dirigée suivant la normale  $M\sigma$  à l'élément.

D'autre part, si l'on fait pivoter l'élément autour de son centre  $M$ , la structure observée restera la même, et conséquemment aussi la pression. Ce fait est d'ailleurs solidaire du premier, car, avec les notations du chapitre I, l'orthogonalité de la pression ( $\sigma$ ) sur l'élément orienté normalement à la direction ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) s'exprime par les relations :

$$\alpha(N_x - \sigma) + \beta T_z + \gamma T_y = 0,$$

· · · · ·

pour qu'elles soient vérifiées quels que soient les cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ , il faut et il suffit que l'on ait :

$$T_x = T_y = T_z = 0, \quad N_x = N_y = N_z = \sigma,$$

et l'on est conduit aux mêmes conditions en exprimant par la méthode de Lagrange, la constance de ( $\sigma$ ) quelle que soit l'orientation de l'élément, c'est-à-dire la constance de  $\Sigma(\alpha N_x + \beta T_z + \gamma T_y)^2$ , quels que soient  $\alpha, \beta, \gamma$ , liés par la relation  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ .

On appelle *pression moyenne au point M* la valeur commune, changée de signe, de  $N_x, N_y, N_z$ , soit :

$$p = -\frac{1}{3}(N_x + N_y + N_z).$$

La pression moyenne en un point dépendra uniquement, à une température  $\tau$  donnée, de la densité  $\rho$ , tout comme l'état élastique; elle croîtra avec  $\rho$ , car les répulsions considérables exercées entre les molécules voisines grandissent très vite dès qu'augmente leur rapprochement mutuel, et cette croissance rapide permet

même de se rendre compte de la *quasi-incompressibilité* des liquides à densité notable.

Les déformations quelconques d'un fluide, produites avec une lenteur suffisante et qui ne changeront pas la densité, ne feront donc naître dans le fluide aucune résistance notable, capable de s'opposer à leur continuation ou de les maintenir entre certaines limites. Les changements de forme pourront par suite, sans que leur cause devienne sensible, atteindre des valeurs quelconques, et, notamment, le fluide se moulera exactement sur tout solide qui le touchera, si légèrement que ce soit. Ce phénomène de déformation illimitée s'appelle *écoulement*, et la propriété qu'ont les corps dont il s'agit de le présenter, c'est-à-dire de *coulér*, sous des efforts tellement faibles qu'ils échappent à nos investigations, est celle qu'on nomme *fluidité* et qui leur a fait donner le nom de *fluides*. Elle est en somme plus apparente que leur isotropie persistante ou continue, dont au fond elle dérive.

**3. Des fluides à l'état non élastique.** — Les lois simples qu'on vient d'exposer ne vaudront généralement plus pour les fluides en mouvement doués de viscosité même minime, si ces fluides éprouvent des déformations rapides. Les groupes moléculaires n'auront pas le temps, la déformation d'ensemble de la particule étant de durée extrêmement brève, de prendre complètement, à tout instant, leur disposition interne appropriée à l'agencement actuel des centres de ces groupes, et qui constituerait leur forme permanente si cet agencement persistait. Toutefois, les écarts qu'il y aura entre la structure moléculaire effective de la parti-

cule et sa structure élastique ou isotrope seront assez minimes pour ne modifier d'ordinaire les pressions que de petites fractions de leurs valeurs. En regard à la rapidité extrême avec laquelle ils s'évanouiraient si les déformations d'ensemble de la particule venaient à s'arrêter, ils ne dépendront sensiblement que du mouvement actuel, caractérisé par les vitesses, non des mouvements antérieurs, définis jusqu'à un certain point par les dérivées des divers ordres des vitesses par rapport au temps, et dont les effets sur la structure élastique des groupes moléculaires seront déjà disparus.

Ainsi, l'état élastique isotrope du fluide étant pris comme état type comparativement à son état vrai, les écarts des pressions relativement aux pressions élastiques ou primitives (ou les parties non élastiques des pressions), dus aux écarts de structure interne produits par le mouvement, se trouveront sensiblement identiques pour des particules fluides de même nature, densité et température, subissant actuellement, pendant un très bref intervalle de temps, le même ensemble de déformations rapportées à l'unité de temps, quelle qu'en soit l'orientation.

Ces parties non élastiques des pressions admettent, pour un élément plan, une composante normale qui s'ajoute algébriquement à la pression élastique, et une composante tangentielle : c'est à l'ensemble de ces composantes tangentielles qu'on a donné le nom de *frottements intérieurs* du fluide.

En résumé, « l'existence de pressions obliques et inégales en divers sens, dans les fluides qui se déforment avec une vitesse suffisante, ne constitue pas une propriété de ces corps purement accidentelle ou suscep-

tible de disparaître en laissant subsister dans l'état de mouvement la fluidité parfaite (c'est-à-dire l'orthogonalité et l'égalité en tous sens des pressions) dont ils jouissent à l'état de repos. Cette *imperfection de la fluidité* d'un fluide qui se déforme est *essentielle*, inséparable de la cause même qui produit la fluidité, savoir, du rétablissement incessant, mais qui ne saurait être tout à fait instantané, de l'isotropie sans cesse détruite par les déformations. »

### B. — *Équations générales du mouvement des fluides à l'état élastique.*

**1. Variables de Lagrange et variables d'Euler.** — Considérons une masse fluide, à température uniforme et constante, occupant à l'instant  $o$  une portion  $S_o$  de l'espace. Supposons qu'elle soit animée d'un mouvement qui la laisse sensiblement à l'état élastique et par suite ne rompe en aucun point sa continuité : à un instant  $t$ , elle occupera un certain domaine  $S$ , d'un seul tenant comme  $S_o$ .

Soit  $E$  un élément matériel déterminé de ce fluide ;  $\rho_o, \tau_o, x_o, y_o, z_o$  les valeurs de la densité, du volume et des coordonnées de cet élément à l'instant  $o$ ;  $\rho, \tau, x, y, z$  leurs valeurs à l'instant  $t$ . Comme la masse d'un élément se conserve quelles que soient ses déformations, on aura :  $\rho\tau = \rho_o\tau_o$ . Cette équation est désignée sous le nom d'*équation de continuité*.

Le mouvement de la masse fluide sera défini si l'on peut, à tout instant  $t$ , calculer la position et la densité d'un élément quelconque de position initiale connue, en d'autres termes si l'on peut calculer les quatre fonc-

tions  $x, y, z$  et  $\rho$  des quatre variables  $x_o, y_o, z_o, t$ , fonctions bien déterminées de  $t$  (quel que soit  $t$ ) et de  $x_o, y_o, z_o$  (à l'intérieur du domaine  $S_o$ ), se réduisant respectivement à  $x_o, y_o, z_o, \rho_o$  pour  $t = 0$ .

Des fonctions  $x, y, z$  de  $x_o, y_o, z_o, t$ , on déduit immédiatement la vitesse et l'accélération de l'élément considéré : les projections de ces vecteurs sur les axes fixes de référence sont respectivement les dérivées partielles premières et secondes des fonctions  $x, y, z$  par rapport à  $t$ .

L'emploi des variables  $x_o, y_o, z_o, t$  pour étudier le mouvement des fluides, utilisé d'abord par Euler, a été adopté presque systématiquement par Lagrange; aussi ces variables sont celles dites les *variables de Lagrange*.

Euler, dans ses premières recherches, avait envisagé le problème à un point de vue différent. Au lieu de suivre dans la succession de ses états une masse élémentaire du fluide, il envisageait la série des éléments fluides dont le point moyen passait en un point géométrique  $P(x, y, z)$  de l'espace fixe.

Soit, à un instant donné,  $t, u, v, w$  les composantes de la vitesse de l'élément du fluide qui occupe la position  $P$  (vitesse du fluide en  $P$ ) et  $\rho$  la densité de cet élément.

$u, v, w$  et  $\rho$  sont des fonctions des quatre variables indépendantes  $x, y, z, t$ , dites *variables d'Euler*, et ces fonctions sont bien déterminées dans la portion de l'espace occupée par le fluide.

La connaissance de ces quatre fonctions définit ce qu'on appelle le *régime* du fluide.

L'obtention du régime est une première étape du problème de l'intégration des équations du mouvement

du fluide ; il ne reste qu'à intégrer un système de trois équations différentielles ordinaires pour calculer la trajectoire d'un quelconque des éléments du fluide.

En effet, les fonctions  $x, y, z$  de  $x_0, y_0, z_0$  et  $t$ , vérifient les équations.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= u(x, y, z, t), & \frac{dy}{dt} &= v(x, y, z, t), \\ \frac{dz}{dt} &= w(x, y, z, t),\end{aligned}$$

et se réduisent, pour  $t = 0$ , respectivement à  $x_0, y_0, z_0$ . D'après le théorème bien connu de Cauchy, il existe un et un seul système de trois fonctions satisfaisant à ces conditions. L'intégration de ce système fournira donc la trajectoire de tout élément de position initiale donnée.

Comme la densité  $\rho$  est connue en fonction de  $x, y, z, t$ , si on y remplace  $x, y, z$ , en fonction de  $x_0, y_0, z_0, t$ , on aura l'expression de cette densité au moyen des variables de Lagrange.

**2. Équations indéfinies du mouvement ou équations d'Euler<sup>1</sup>.** — La formation des équations indéfinies du mouvement d'un fluide exige le calcul préalable des composantes ( $u', v', w'$ ) de l'accélération d'un élément de ce fluide.

Soit en général  $F(x, y, z, t)$  une fonction quelconque des variables d'Euler ; supposons qu'on la calcule pour la succession des positions d'un même élément du corps : elle sera une fonction bien déterminée

<sup>1</sup> L. EULER, p. 286.

du temps dont nous allons calculer la dérivée à l'instant  $t$ .

La vitesse de l'élément considéré ayant pour composantes  $u, v, w$  à l'instant  $t$ , le déplacement de cet élément pendant l'intervalle infiniment petit  $dt$  aura pour projections  $dx = u dt, dy = v dt, dz = w dt$ , et la variation correspondante de la fonction  $F$  sera :

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial z} w + \frac{\partial F}{\partial t} \right) dt.$$

La dérivée de  $F$  par rapport au temps, en suivant l'élément matériel qui occupe à l'instant  $t$  la position  $x, y, z$ , vaudra donc :

$$F' = \frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial z} w + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Supposons alors que la fonction  $F$  coïncide successivement avec chacune des trois composantes  $u, v, w$  (fonctions de  $x, y, z, t$ ) de la vitesse d'un élément situé au point  $(x, y, z)$  à l'instant  $t$ , et nous aurons les trois composantes de l'accélération du fluide à l'instant  $t$ , au point  $(x, y, z)$  :

$$u' = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \left. \right\}$$

Cela étant, comme le fluide est supposé à viscosité nulle, la pression sur un élément plan quelconque est, nous l'avons vu, indépendante de l'orientation de cet élément, et par suite, avec les notations du chapitre I, on a en tout point du milieu :

$$T_x = T_y = T_z = 0, \quad N_x = N_y = N_z = -p$$

Les équations générales du n° 4 du chapitre I<sup>er</sup>, applicables au mouvement d'un milieu quelconque, donneront donc, en désignant par X, Y, Z les composantes de la force extérieure totale rapportée à l'unité de masse, au point (x, y, z) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{r}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - u' = X - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{\mathbf{r}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y - v' = Y - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{\mathbf{r}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z - w' = Z - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{E})$$

Ces trois équations ont été établies par Euler (*loc. cit.*).

**3. Équation de continuité et relation supplémentaire.** — Considérons à l'instant *t* un élément du corps, entourant le point (x, y, z), possédant la vitesse (u, v, w) et la densité  $\rho$ .

Suivons cet élément pendant le temps infiniment court *dt*; le déplacement de son centre a pour composantes :

$$U = u dt, \quad V = v dt, \quad W = w dt.$$

Dans la déformation infiniment petite de cet élément, la dilatation cubique est donc (Ch. I, § 5) :

$$\theta = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt.$$

Si  $\omega$  est le volume de l'élément et  $d\omega$  sa variation durant l'intervalle *dt*, on a :

$$\frac{d\omega}{\omega} = \theta.$$

et comme la masse  $\rho\omega$  est constante, l'équation qui exprime que  $\frac{d}{dt}(\rho\omega) = 0$ , s'écrira :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0.$$

Dans cette égalité,  $\frac{d\rho}{dt}$ , calculée en suivant l'élément, a pour valeur  $u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$ . On aura, par suite :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (\text{C})$$

Telle est l'équation de continuité sous la forme que lui a donnée Euler<sup>1</sup>.

Dans les quatre équations (E) et (C), la pression élastique  $p$  est une fonction de la densité  $\rho$ ; mais la relation qui lie  $p$  à  $\rho$ , ou *relation supplémentaire*, n'est pas ou est mal connue.

Cependant on sait que les liquides sont *quasi-incompressibles*, ce qui revient à dire que la densité  $\rho$  ne subit que des variations insensibles, et par suite qu'elle peut être considérée comme constante là où elle est multipliée par des quantités finies. Mais il n'en faudrait pas conclure que la pression  $p$  doit rester constante : à une variation minime de la densité  $\rho$  correspond une variation énorme de la pression élastique  $p$ .

Devant l'impossibilité où l'on est de rattacher les variations de  $p$  aux insensibles variations de  $\rho$ , on regarde, dans les équations (E), la pression  $p$  comme

<sup>1</sup> L. EULER, p. 287.

une fonction de  $x, y, z, t$  ne dépendant pas des vitesses ; on remplace l'équation de continuité (C) par celle qui s'en déduit en y regardant  $\rho$  comme constant,

soit : 
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (C^{bis})$$

on calcule enfin  $p$  ainsi que  $u, v, w$ , en fonction de  $x, y, z, t$  par l'intégration des quatre équations aux dérivées partielles (E) et ( $C^{bis}$ ) [ $\rho$  y étant supposé constant].

A un autre point de vue, la relation simplifiée ( $C^{bis}$ ) est une équation de liaison, et la force de liaison correspondante est la pression élastique regardée comme fonction de  $x, y, z, t$ .

Nous reviendrons ultérieurement sur les conditions limites et initiales que doivent vérifier les quatre fonctions cherchées.

#### C. — *Équations générales des mouvements réguliers et bien continu des fluides à l'état naturel.*

**I. Forces de frottement intérieur introduites par le mouvement<sup>1</sup>.** — Nous allons établir les équations données par Navier pour représenter, en tenant compte des frottements intérieurs, les écoulements fluides, soit le long des tubes fins, soit à travers les milieux poreux, tels que les sables, lorsque ces mouvements se font, ou assez lentement, ou contre des parois assez polies, pour que les vitesses des molécules fluides varient graduellement, d'une manière continue,

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 2, § 1.

d'un point aux points voisins et d'un instant aux suivants. Nous excluons pour le moment les cas où il se produit de ces brusques tourbillonnements, inévitables dans les écoulements à travers de grandes sections, et qui rendent les glissements et les frottements mutuels des couches fluides énormément différents de ce qu'ils seraient si le mouvement vrai de chaque particule se réduisait à la translation générale ou moyenne de cette particule : ces cas seront envisagés ultérieurement.

Le centre d'un élément de volume du fluide, de position ( $x, y, z$ ) et de vitesse ( $u, v, w$ ) à l'instant  $t$ , subit pendant l'intervalle infiniment petit consécutif  $dt$  un déplacement

$$U = u dt, \quad V = v dt, \quad W = w dt.$$

La déformation infiniment petite de cet élément est caractérisée par les dilatations et glissements :

$$\delta_x = \frac{\partial u}{\partial x} dt = D_x dt, \dots \dots ;$$

$$g_x = \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dt = G_x dt, \dots \dots ,$$

dont les quotients par  $dt$  :  $D_x, \dots, G_x, \dots$  se nomment *vitesses de dilatation* et *vitesses de glissement*. Or, nous l'avons dit [A, § 3], cet élément, dès que sa déformation pure cesse de se produire ou dès que son mouvement visible s'arrête, reprend très vite sa constitution isotrope qui y annule les frottements intérieurs. Les parties *non élastiques* des pressions dépendent donc de la déformation actuelle et non des déformations antérieures dont les effets, aussi antérieurs,

se sont effacés successivement et même presque instantanément : elles sont des fonctions de  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_z$ ,  $G_x$ ,  $G_y$ ,  $G_z$ . Comme les vitesses relatives des molécules dans les mouvements considérés ici sont fort petites entre particules contiguës, il est naturel de développer les expressions de ces parties non élastiques des pressions par la formule de Mac-Laurin, en les regardant comme fonctions des  $D$ ,  $G$ , et de se borner aux termes du premier degré, si les dérivées de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  par rapport à  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , sont assez petites pour qu'on puisse négliger les carrés et les produits de ces dérivées.

Cette propriété est évidemment indépendante des axes de coordonnées. Supposons pour un moment que ces axes soient, à l'instant actuel  $t$ , parallèles aux directions des dilatations principales à cet instant  $t$  au point  $x$ ,  $y$ ,  $z$  : par rapport à ces axes, les vitesses de glissement seront nulles et celles de dilatation seront  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ . Les déformations se feront symétriquement par rapport à ces directions : les couches fluides élémentaires, normales à  $ox$  par exemple, de la particule de centre  $M$  ne subissent pas de glissement les unes devant les autres, et la pression corrélative de cette déformation ne pourra qu'être normale à ces couches. En d'autres termes, tout élément plan principal au point de vue de la déformation est principal au point de vue des pressions.

Soient alors  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  les pressions principales ;  $p$  la pression élastique au point  $M$ , c'est-à-dire la pression qui serait exercée au point  $M$  si les molécules perdaient instantanément leurs vitesses tout en gardant les mêmes places relatives, pression qui est fonction de la

densité  $\rho$  au point M. Nous sommes conduits par ce qui précède à poser :

$$\begin{aligned} P_1 &= -p + lD_1 + l'D_2 + l''D_3, \\ P_2 &= -p + mD_1 + m'D_2 + m''D_3, \\ P_3 &= -p + nD_1 + n'D_2 + n''D_3. \end{aligned}$$

Les neuf coefficients  $l, \dots, n''$ , qui ne dépendent plus des vitesses de déformation, mais uniquement de l'état de la particule supposée réduite au repos, soit à l'état isotrope, se réduisent à deux seulement. En effet, supposons que l'on permute les axes  $ox$  et  $oy$  :  $D_1$  et  $D_2$ ,  $P_1$  et  $P_2$  se permutent, tandis que  $D_3$ ,  $P_3$  ne changent pas. On doit donc avoir :

$$l = m', \quad l' = m, \quad l'' = m'', \quad n = n'.$$

En raisonnant de même pour chaque couple d'axes, on reconnaît que tous les coefficients ont une même valeur  $\lambda$ , sauf les coefficients diagonaux  $l, m', n''$  qui ont une valeur commune distincte de la première, soit  $\lambda + 2\mu$ . Posons alors :

$$\vartheta = D_1 + D_2 + D_3,$$

et nous aurons :

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= -p + \lambda\vartheta + 2\mu D_1, \\ P_2 &= -p + \lambda\vartheta + 2\mu D_2, \\ P_3 &= -p + \lambda\vartheta + 2\mu D_3. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  varient avec la constitution de la particule fluide, soit, pour un mouvement isothermique, avec la densité ; et, comme pour les liquides celle-ci est sensiblement constante, nous négligerons les variations de  $\lambda$  et de  $\mu$ , très petites par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$  eux-mêmes.

Revenons maintenant à des axes quelconques. Soient  $(a, a', a'')$ ,  $(b, b', b'')$ ,  $(c, c', c'')$ , les cosinus directeurs des trois directions principales, dilatations et pressions. Les formules établies au § 6 du chapitre I s'étendent immédiatement aux vitesses de déformation, et l'on a notamment :

$$\varepsilon = D_1 + D_2 + D_3 = D_x + D_y + D_z.$$

Multiplions enfin les mêmes équations (1) respectivement par  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ , et ajoutons-les en tenant compte des relations connues des §§ 3 et 6 du chapitre I. Il vient :  $N_x = -p + \lambda\varepsilon + 2\mu D_x$ .

Multiplions enfin les mêmes équations respectivement par  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ , et opérons de même. Il vient :

$$T_z = \mu D_z.$$

**2. Équations indéfinies du mouvement ou équations de Navier<sup>1</sup>.** — La connaissance des pressions ( $N$ ,  $T$ ) en un point et des composantes de l'accélération [B, § 2] permet de déduire immédiatement des équations générales du § 4 du chapitre I les trois équations suivantes qui sont dues à Navier :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left( X - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &\quad + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mu \Delta u, \end{aligned} \right\} (N)$$

où  $\Delta$  désigne le symbole opératoire de Laplace :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

<sup>1</sup> E. NAVIER, p. 414.

Dans le cas d'un liquide sensiblement incompressible, en raisonnant comme plus haut [A, § 3], on sera conduit à réduire l'équation de continuité à

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (C^{bis})$$

soit à  $\vartheta = 0$ . Alors dans les équations de Navier les termes en  $(\lambda + \mu)$  s'annulent, et  $\rho$  est une constante, tandis que la pression  $p$  est regardée comme une fonction de  $x, y, z, t$  définie, avec  $u, v, w$ , par le système des quatre équations (N) et (C<sup>bis</sup>).

La considération des frottements intérieurs n'introduit dans ces équations qu'un coefficient  $\mu$ , dit *coefficient de viscosité* ou mieux *coefficient de frottement intérieur*. Ce coefficient est désigné par  $\varepsilon$  en France, par  $\gamma$  en Allemagne, par  $\nu$  en Angleterre. Sa mesure résulte, comme on le verra, d'expériences très précises de Poiseuille sur l'écoulement permanent des liquides dans les tubes capillaires, expériences dont les présentes équations rendent parfaitement compte ; elle a fait aussi l'objet de belles recherches expérimentales directes d'Osborne Reynolds et de M. Maurice Couette<sup>1</sup>. On peut, en unités CGS et à la température de 10°, prendre pour l'eau

$$\mu \text{ ou } \varepsilon = 0,01303,$$

et une loi empirique fournit les variations de  $\varepsilon$  avec la température : à la température  $\tau$  évaluée en degrés

<sup>1</sup> M. COUETTE, 2.

La bibliographie et le résumé des travaux faits à l'étranger sur cette question sont remarquablement présentés par M. Marcel Brillouin dans ses *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz* [M. BRILLOUIN, 2].

centigrades à partir de  $10^\circ$ , la valeur précédente de  $\epsilon$  doit être divisée par

$$(1 + 0,02884 \tau + 0,000188 \tau^2)$$

D. *Équations générales des mouvements tourbillonnaires et tumultueux des fluides à l'état naturel.*

**1. Des fluides à l'état turbulent.** — La valeur numérique du coefficient  $\epsilon$  des frottements intérieurs, déduite des expériences de Poiseuille, est confirmée par certaines observations de Darcy sur les écoulements assez lents le long de tuyaux polis de quelques centimètres de diamètre. Mais si, muni de cette valeur de  $\epsilon$ , on se met à calculer, en usant des équations précédentes, la vitesse moyenne de l'eau qui se meut dans un canal à section semi-circulaire de  $2^m$  de rayon, sous la seule action de la pesanteur, la pente étant insignifiante ( $0,000\,01$ ), on est conduit à une vitesse comparable à celle d'un boulet de canon sortant de la bouche à feu, et ce résultat n'est pas sensé.

En fait, bien avant qu'aient pu s'établir dans les canaux et tuyaux de conduite les vitesses énormes qui s'y réaliseraient dans l'hypothèse de la continuité parfaite des mouvements, les inégalités des parois, les balottements inévitables à l'intérieur de grandes sections se combinent avec l'effet de la translation générale du fluide pour produire des chocs obliques contre les parois, pour faire décrire aux molécules des lignes qui s'enchevêtrent, et ces molécules, par leurs passages irréguliers les unes devant les autres, développent des tourbillonnements étendus et provoquent des résis-

tances très différentes de celles qui auraient lieu si les vitesses ne variaient pas brusquement d'un point aux points voisins.

Ce passage du régime *régulier* à ce qu'on appelle le régime *hydraulique* ou *turbulent* a été signalé par Darcy<sup>1</sup> en 1857, et Osborne Reynolds<sup>2</sup>, en 1883, le rendit visible par une expérience élégante. Il introduisit dans l'axe d'un tube de verre, traversé par un courant d'eau incolore, un mince filet d'un liquide coloré, s'échappant, sous l'entraînement du courant, de la pointe effilée d'un tube capillaire : l'écoulement lent ou régulier fut caractérisé par un filet central teinté et cylindrique ; mais, dès que la vitesse du courant atteignit une certaine limite, ce filet se détruisit, et la matière colorante se dispersa en tourbillons en travers le tuyau.

Il va de soi que le passage d'un régime à l'autre ne se fait pas brusquement ; mais nous renonçons à étudier le mouvement dans la période transitoire.

Les phénomènes d'écoulement tourbillonnant et tumultueux sont les plus importants de l'hydraulique : si les cours d'eau n'offraient pas cette « turbulence », leur surface serait en général unie comme une glace, et on ne verrait pas les herbes et joncs du fond sans cesse secoués. Or ces phénomènes usuels n'avaient présenté, jusqu'à la publication des recherches de M. Bousinesq, qu'une « désespérante énigme », suivant le mot de B. de Saint-Venant.

Bien des observateurs, à commencer par Léonard de

<sup>1</sup> H. DARCY, 4, p. 330-331.

<sup>2</sup> O. REYNOLDS, § 11, p. 91-92 : *Experiments by Means of Colour Bands in Glass Tubes.*

Vinci, avaient, il est vrai, remarqué que dans une masse fluide commençant à couler entre des parois quelconques, les moindres déviations causées par leurs rugosités entraînent des chocs qui se communiquent d'une particule à l'autre, se multipliant dès que la vitesse est notable, sillonnant bientôt la masse en tous sens, produisant une *agitation* à périodicité irrégulière, appelée parfois par les hydrauliciens le *pouls* du courant. Là donc où les mécaniciens n'avaient introduit que des vitesses et des pressions variant d'une manière parfaitement régulière et continue de chaque point aux points voisins et de chaque instant aux suivants, il y avait lieu, et c'était le point délicat, d'exprimer l'influence dominante des changements rapides et irréguliers qu'éprouvent la vitesse, l'accélération et les pressions aux divers points de la masse; de même que l'imperceptible agitation calorifique d'un corps est mesurée par la température, cette turbulence à amplitude perceptible quoique petite constitue, en chaque endroit et pour chaque rapidité de transport de la masse, un état auquel il fallait associer une grandeur mesurable. Cette difficile mise en compte, cette introduction d'une sorte de température de l'écoulement a été faite par M. Boussinesq<sup>1</sup>.

**2. Vitesses, accélérations et déformations moyennes locales.** — M. Boussinesq distingue d'abord deux parties, à propriétés toutes différentes, dans la vitesse et l'accélération soit d'une même parti-

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 7, p. 1026; — J. BOUSSINESQ, 8, p. 22-162; ce mémoire fondamental a été présenté à l'Académie des sciences le 28 octobre 1872. — J. BOUSSINESQ, 18; les §§ qui suivent sont en partie empruntés aux trois premières Notes.

cule suivie dans ses positions successives pendant un bref instant, soit des particules qui passent successivement par un point donné ( $x, y, z$ ) de l'espace durant un temps très court.

La première partie, correspondant à la translation générale des molécules, n'est autre chose que la *moyenne dite locale* des valeurs de la vitesse ou de l'accélération effective en question ; elle est, des deux parties, la plus grande, mais celle qui a les dérivées les plus petites (vu qu'elle varie graduellement, tant d'un instant à l'autre que d'un point à l'autre) ; elle est la seule importante pour l'hydraulicien, enregistrable par les appareils hydrométriques [voir *Hydraulique physique*], celle qui correspond à proprement parler à l'écoulement ; susceptible d'être représentée par des fonctions régulières et relativement simples de  $x, y, z, t$ , elle est la seule qu'on ait pu, jusqu'à M. Boussinesq, introduire dans les formules.

Quant à la seconde partie, elle varie très rapidement avec  $x, y, z, t$  dans des sens opposés pour des valeurs à peine différentes des variables, en sorte que sa moyenne, pendant un temps assez court quelconque, est nulle à chaque endroit ; elle peut avoir des dérivées à valeurs notables, mais à moyenne également nulle. C'est une vitesse ou une accélération d'*agitation locale*, c'est-à-dire d'un mouvement qui, s'il existait seul, produirait partout des déformations accidentielles notables, des glissements locaux de sens divers, sans translation générale dans aucune région.

Soient  $u, v, w$  les composantes, suivant les axes, de la vitesse moyenne locale au point ( $x, y, z$ ) ;  $u_1, v_1, w_1$ , les composantes de la petite vitesse irrégulière

d'agitation [ces vitesses sont d'ailleurs deux quantités parfaitement définies en chaque point et indépendantes du choix des axes]. Posons :

$$D_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \dots, \quad G_x = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \dots, \dots,$$

$$D_x^1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots, \dots, \quad G_x^1 = \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y}, \dots, \dots$$

Les six vitesses élémentaires de dilatation et de glissement (par rapport aux axes *oxyz*) d'une particule à l'instant *t* sont :

$$\frac{\partial(u+u_1)}{\partial x}, \dots, \dots, \quad \frac{\partial(v+v_1)}{\partial z} + \frac{\partial(w+w_1)}{\partial y}, \dots, \dots$$

soit  $D_x + D_x^1, \dots, \dots, G_x + G_x^1, \dots, \dots$ ; elles sont les sommes algébriques des vitesses de déformation relatives au mouvement général et de celles relatives à l'agitation; les premières parties ( $D$ ,  $G$ ) graduellement variables sont beaucoup plus petites que les secondes ( $D^1$ ,  $G^1$ ), mais elles ont seules une moyenne différente de zéro en général.

En effet, si  $T$  désigne la période assez petite considérée, comme on a par définition :

$$\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u_1 \frac{dt}{T} = 0,$$

la dérivation relative à *x*, par exemple, donne :

$$\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{dt}{T} = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} D_x^1 \frac{dt}{T} = 0,$$

et l'on reconnaîtrait de même que la moyenne de chacun des ( $D_x^1$ ,  $G^1$ ) est aussi nulle.

Il en résulte en particulier que

$$\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} (D_x^1 + D_y^1 + D_z^1) \frac{dt}{T} = 0.$$

Supposons que, le fluide étant incompressible, le mouvement ait lieu avec conservation parfaite des volumes aux divers instants; l'équation de continuité établit entre les vitesses effectives de dilatation suivant les axes la relation linéaire

$$\frac{\partial(u+u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(v+v_1)}{\partial y} + \frac{\partial(w+w_1)}{\partial z} = 0,$$

ou  $(D_x + D_y + D_z) + (D_x^1 + D_y^1 + D_z^1) = 0$ .

Prenons, pour l'en retrancher ensuite, la valeur moyenne locale de chaque terme. Il vient évidemment :  $D_x + D_y + D_z = 0$ .

Si donc l'on conçoit, au lieu du liquide étudié réellement, un fluide fictif dont la vitesse réelle serait ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ), en chaque point et à chaque instant, c'est-à-dire dont les mouvements vrais coïncideraient avec les mouvements moyens du liquide considéré, ce fluide fictif sera incompressible.

La relation établie entraîne aussi :

$$D_x^1 + D_y^1 + D_z^1 = 0,$$

en sorte que la vitesse d'agitation prise séparément vérifie aussi l'équation de conservation des volumes.

Étudions enfin l'accélération. Sa projection sur  $ox$  est, nous l'avons vu :

$$\frac{\partial(u+u_1)}{\partial t} + (u+u_1) \frac{\partial(u+u_1)}{\partial x} \\ + (v+v_1) \frac{\partial(u+u_1)}{\partial y} + (w+w_1) \frac{\partial(u+u_1)}{\partial z}.$$

Calculons la valeur moyenne locale de cette projection, en effectuant sur les différents termes l'opé-

ration  $\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f \frac{dt}{T}$ .

Tout d'abord, comme

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}$$

est l'accélération, suivant l'axe des  $x$ , de l'agitation locale, la valeur moyenne de l'ensemble de ces termes est nulle par hypothèse.

En second lieu, les termes qui contiennent un facteur relatif à la vitesse moyenne et un facteur relatif à l'agitation ont chacun une valeur moyenne nulle. On peut en effet concevoir quelconques, à chaque instant, les déformations imprimées soit à une particule de matière, soit aux particules venant passer en un même endroit ( $x, y, z$ ), et il en est par suite de même tant de leurs moyennes que de leurs excédents à chaque instant sur leurs moyennes (sous la seule réserve que ceux-ci aient dès lors leurs propres moyennes nulles). Il y a donc indépendance complète des déformations d'agitation et des déformations moyennes locales, et

cette indépendance, qui persiste lorsqu'on impose au fluide la liaison qui caractérise l'incompressibilité (conservation des volumes aux divers instants), entraîne comme conséquence que, dans l'opération

$$\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f \frac{dt}{T},$$

les facteurs relatifs aux composantes de la vitesse moyenne peuvent être sortis du signe de sommation. On a ainsi, par exemple :

$$\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dt}{T} = \frac{\partial u}{\partial x} \int u_1 \frac{dt}{T} = 0,$$

$$\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{dt}{T} = u \int \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{dt}{T} = 0.$$

Il ne reste, en fin de compte, que

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z};$$

donc la composante, suivant l'axe  $ox$  par exemple, de l'accélération moyenne locale en un point, s'exprime généralement en fonction des vitesses moyennes locales et de leurs dérivées premières, comme si les mouvements étaient bien continus.

**3. Pressions moyennes locales; formules qui les définissent.** — Soient  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$ ,  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$  les composantes, suivant les axes, des pressions unitaires, à l'instant  $t$  et au point  $(x, y, z)$ , relatives à

trois éléments plans orientés normalement aux axes  $oxyz$ ;  $\mathfrak{N}_x$ ,  $\mathfrak{N}_y$ ,  $\mathfrak{N}_z$ ,  $\mathfrak{T}_x$ ,  $\mathfrak{T}_y$ ,  $\mathfrak{T}_z$  les valeurs moyennes qu'elles prennent pendant le temps très court  $T$ , et qui sont des fonctions continues de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ . Si  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  représentent les composantes, suivant les axes, de la pression unitaire à travers un élément plan mené au même point  $(x, y, z)$  et orienté normalement à la direction  $(z, \beta, \gamma)$ , on a :

$$p_x = \alpha \mathfrak{N}_x + \beta \mathfrak{T}_z + \gamma \mathfrak{T}_y, \dots, \dots$$

Si l'on prend les moyennes des valeurs de tous les termes pendant le temps  $T$  [ $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ne variant pas], on trouve pour composantes du vecteur qu'on appelle la *pression moyenne locale* relative à l'élément envisagé :

$$\mathfrak{P}_x = \alpha \mathfrak{N}_x + \beta \mathfrak{T}_z + \gamma \mathfrak{T}_y, \dots, \dots \quad (1)$$

La grandeur et la direction de la pression moyenne locale sont indépendantes des axes choisis, tout comme celles de la vitesse moyenne.

L'étude des pressions moyennes locales est réduite à celle des six composantes ( $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{T}$ ).

Les six pressions élémentaires ( $N$ ,  $T$ ) relatives aux axes et exercées à l'intérieur de la particule, dénuée de viscosité, entourant le point  $(x, y, z)$  à l'instant  $t$ , comprennent une partie élastique fonction de la densité seule, la même dans les ( $N$ ), et nulle dans les ( $T$ ), et une partie fonction de la densité et des écarts existant entre la contexture interne effective de la particule et sa contexture isotrope à la même densité; cette partie non élastique s'annule avec ces écarts. Les dits écarts dépendent de la rapidité actuelle des déformations, cette rapidité ne permettant pas à la particule de

reconstituer son isotropie troublée incessamment par la continuation du mouvement relatif de sa matière ; ils sont caractérisés par les six variables  $(D_x + D_x^1)$ , ...,  $(G_x + G_x^1)$ , ...

Soit de plus  $\rho_1$  la variation éventuelle concomitante de densité de la particule sur sa moyenne  $\rho$  pendant la durée  $T$  de la période considérée :  $\rho$  est graduellement variable ; quant à  $\rho_1$ , toujours minime, à moyenne nulle, ses puissances et ses produits par les vitesses moyennes de déformation ( $D$ ,  $G$ ) pourront aussi être négligés.

Les quantités ( $N$ ,  $T$ ) comprendront, outre la partie élastique, fonction de  $\rho + \rho_1$ , une partie non élastique fonction des sept variables  $\rho + \rho_1$ ,  $D_x + D_x^1$ , ...,  $G_x + G_x^1$ , .... Or les vitesses moyennes de déformation ( $D$ ,  $G$ ) sont toujours très petites, à cause de la graduelle variation de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  en  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , en comparaison des vitesses de déformation d'agitation ( $D^1$ ,  $G^1$ ) qui peuvent être considérables.

On peut donc développer les six fonctions ( $N$ ,  $T$ ) suivant les puissances des ( $D$ ,  $G$ ), par la formule de Taylor, réduite aux termes du premier degré.

La partie élastique, fonction de  $\rho + \rho_1$ , et les coefficients de chacun des ( $D$ ,  $G$ ) peuvent être développés suivant les puissances de  $\rho_1$ , et, eu égard à l'ordre de grandeur de  $\rho_1$ , on peut limiter la partie élastique à un terme fonction de  $\rho$  et à un terme du premier degré en  $\rho_1$ , les coefficients des ( $D$ ,  $G$ ) à leurs valeurs correspondant à  $\rho_1 = 0$ .

Prenons alors les moyennes des valeurs des développements ainsi limités sur de faibles étendues, ou durant de courts instants en un même endroit ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), pour

avoir les *pressions moyennes locales* ( $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{G}$ ). La partie élastique donnera (la moyenne de  $\rho_1$  étant nulle), dans les  $\mathfrak{M}$ , une fonction de la densité moyenne  $\varphi$  seule,  $-p(\varphi)$ , et dans les  $\mathfrak{G}$ , zéro. Pour les parties non élastiques, on obtiendra des fonctions linéaires et homogènes des six variables (D, G) : les coefficients de ces variables, fonctions de la densité moyenne  $\varphi$ , dépendront, pour la particule environnant le point  $(x, y, z)$ , des vitesses d'agitation autour de ce point « par certains caractères généraux où n'entrent pas plus les valeurs individuelles de ces vitesses à un instant et en un point qu'aux autres voisins dans tout intervalle où leurs moyennes sont nulles ; ces coefficients ne sont fonctions que de la variable  $\varphi$  définissant l'état élastique moyen local, et, en outre, de l'*agitation*, telle qu'elle est durant un court instant dans une petite étendue entourant le point  $(x, y, z)$  ».

Nous allons préciser davantage l'expression de ces fonctions ( $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{G}$ ).

La forme des relations (1), linéaires en  $\alpha, \beta, \gamma$ , entraîne l'existence, au point  $(x, y, z)$ , de trois éléments plans orthostatiques pour les pressions moyennes, c'est-à-dire sur lesquels les pressions moyennes locales sont normales.

D'autre part, à la déformation locale moyenne, de vitesses (D, G), infiniment petite durant le temps  $dt$ , correspond l'existence, au point  $(x, y, z)$  et à l'instant  $t$ , quelconques, de trois éléments plans matériels *principaux* pour cette déformation moyenne, c'est-à-dire de trois éléments plans, rectangulaires entre eux, par rapport auxquels la déformation se fait symétriquement pendant l'instant  $dt$ .

Nous sommes naturellement conduits à admettre que tout élément plan principal, au point de vue des déformations moyennes locales, est aussi principal au point de vue des pressions moyennes locales, c'est-à-dire perpendiculaire à la pression exercée sur lui.

Prenons en effet les plans de coordonnées parallèles aux éléments principaux de la déformation moyenne locale au point ( $x, y, z$ ). Pour l'élément normal à l'axe des  $x$ , on a  $G_y = 0, G_z = 0$  : les couches fluides de la particule normales à l'axe des  $x$  n'éprouvent pas de glissement moyen local les unes vis-à-vis des autres : elles ne possèdent que le glissement dû à l'agitation et nul en moyenne ; des files de molécules d'abord normales à ces couches s'y inclinent tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, ce sens variant d'ailleurs avec chaque file, avec une irrégularité qui est celle même de l'agitation, mais de manière à ne produire en définitive aucun effet moyen. Donc, vu l'isotropie naturelle du fluide, de telles déformations ne pourront donner lieu sur un élément plan formant une face d'une telle couche qu'à une pression moyenne symétrique par rapport à cette couche, soit normale à cette couche.

Ceci admis, les formules établies au chapitre I permettant de passer du système initial au système formé par les éléments principaux, désignons par  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$  les pressions moyennes locales principales, par  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3$  les vitesses moyennes principales de dilatation (les glissements étant nuls). En égard aux considérations présentées plus haut, les pressions principales  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$  pourront être développées linéairement suivant les vitesses moyennes locales correspondantes,

lesquelles se réduisent aux trois dilatations  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$ . Soit donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= -p + l\Omega_1 + l'\Omega_2 + l''\Omega_3, \\ \mathcal{P}_2 &= -p + m\Omega_1 + m'\Omega_2 + m''\Omega_3, \\ \mathcal{P}_3 &= -p + n\Omega_1 + n'\Omega_2 + n''\Omega_3,\end{aligned}$$

la pression élastique  $p$  dépendant de la densité moyenne  $\rho$  et les coefficients  $l$ , ...,  $n''$  dépendant de  $\rho$  et de l'agitation, mais nullement de la déformation moyenne locale.

Concevons que deux des dilatations moyennes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deviennent égales : l'ellipsoïde de déformation devient de révolution autour d'une parallèle à  $oz$ , et il doit en être de même de celui des pressions, c'est-à-dire qu'on doit avoir  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ . Il faut donc que  $l' = m''$ ,  $l + l' = m + m'$ . On trouverait de même que  $m = n$ ,  $m' + m'' = n' + n''$ ;  $n' = l$ ,  $n'' + n = l'' + l$ . Nous satisferons de la manière la plus générale à ces conditions en prenant :  $l = m' - 2\varepsilon$ ,  $l' = n'' - 2\varepsilon$ ,  $m = l - 2\varepsilon$ ,  $m'' = n'' - 2\varepsilon$ ,  $n = l - 2\varepsilon$ ,  $n' = m' - 2\varepsilon$ ,  $l$ ,  $m'$ ,  $n''$ ,  $\varepsilon$  restant arbitraires.

Posons alors :  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$ ,

$$\mathcal{P} = p - (l\Omega_1 + m'\Omega_2 + n''\Omega_3 - 2\varepsilon\Omega).$$

Les expressions de  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{P}_3$  s'écrivent alors, en remplaçant, par exemple, dans la première, le coefficient de  $-2\varepsilon$ ,  $\Omega_2 + \Omega_3$ , par  $\Omega - \Omega_1$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= -\mathcal{P} + 2\varepsilon\Omega_1, \quad \mathcal{P}_2 = -\mathcal{P} + 2\varepsilon\Omega_2, \\ \mathcal{P}_3 &= -\mathcal{P} + 2\varepsilon\Omega_3.\end{aligned}$$

La pression moyenne  $\frac{1}{3}(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3)$  a pour expression  $-p + (l\Omega_1 + m'\Omega_2 + n''\Omega_3) - \frac{4}{3}\varepsilon\Omega$ ; cette pression moyenne reste invariable quand on permute les axes, soit quand on permute  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ; les coefficients  $l, m', n''$  ont donc une même valeur  $\varepsilon_1$ , et l'on peut poser, en fin de compte :

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_1 = -p + (\varepsilon_1 - 2\varepsilon)\Omega + 2\varepsilon\Omega_1, \\ \Omega_2 = -p + (\varepsilon_1 - 2\varepsilon)\Omega + 2\varepsilon\Omega_2, \\ \Omega_3 = -p + (\varepsilon_1 - 2\varepsilon)\Omega + 2\varepsilon\Omega_3. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Les coefficients  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_1 - 2\varepsilon$ , dits coefficients de frottement intérieur et d'imparfaite fluidité, dépendent de la densité moyenne  $\rho$  et du degré d'agitation; le premier d'entre eux  $\varepsilon$  est aussi appelé en Angleterre *coefficient de turbulence*.

Revenons maintenant à des axes quelconques et calculons les six pressions ( $\mathfrak{M}, \mathfrak{T}$ ) relatives à ces axes. Soient alors  $(a, a', a'')$ ,  $(b, b', b'')$ ,  $(c, c', c'')$  les cosinus directeurs des trois directions principales, dilatations et pressions moyennes locales. Les relations établies au § 3 du chapitre I s'appliquent aux pressions moyennes locales, et celles établies au § 6 s'étendent aux vitesses moyennes de déformation; en particulier :

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = D_x + D_y + D_z.$$

Multiplions alors respectivement les relations (2) d'abord par  $a^2, b^2, c^2$ , puis par  $aa', bb', cc'$ , et ajoutons-les membre à membre. En égard aux relations ainsi étendues, il vient :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= -p + (\varepsilon_1 - 2\varepsilon)(D_x + D_y + D_z) + 2\varepsilon D_x, \\ \mathfrak{T}_z &= \varepsilon G_z. \end{aligned}$$

Dans les expressions de  $\mathfrak{M}_x$ ,  $\mathfrak{M}_y$ ,  $\mathfrak{M}_z$ , le terme en  $(\varepsilon_1 - 2\varepsilon)(D_x + D_y + D_z)$  sera à coup sûr négligeable vis-à-vis des autres termes en  $\varepsilon$ , dans tous les mouvements des liquides que nous étudierons, où les changements de forme des particules seront incomparablement plus grands que ceux de leur volume.

Les expressions définitives des pressions moyennes locales seront donc données par les triples formules :

$$\begin{aligned}(\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z) &= -p + 2\varepsilon(D_x, D_y, D_z), \\(\mathfrak{C}_x, \mathfrak{C}_y, \mathfrak{C}_z) &= \varepsilon(G_x, G_y, G_z).\end{aligned}$$

**4. Expression du coefficient  $\varepsilon$  des frottements intérieurs.** — Les valeurs obtenues des  $(\mathfrak{M}, \mathfrak{C})$  coïncident avec celles données par Navier pour le cas des mouvements bien continus, à cela près que le coefficient  $\varepsilon$  doit dépendre en chaque point non seulement de la densité  $\rho$  et peut-être de la pression  $p$ , mais encore et surtout de l'intensité de l'agitation moyenne qui s'y trouve produite.

Dans les écoulements étudiés, la densité du liquide variera à peine ; ses changements n'auront d'influence que dans la mesure où ils modifieront la pression élastique. Or des expériences de Du Buat et de Darcy ont montré que les frottements produits par les mêmes mouvements relatifs des couches fluides ne sont pas plus importants sous pression notable que sous faible pression. Cela d'ailleurs paraît naturel si l'on observe qu'une pression, même assez considérable, influant peu sur la densité du liquide, ne rapproche guère les molécules et ne doit pas rendre beaucoup plus grande leur résistance au glissement réciproque.

D'après cela, *le coefficient  $\varepsilon$  est uniquement fonction*

*de l'agitation.* Quand l'agitation cesse, sa valeur se réduit à celle du coefficient de Poiseuille, qui est insensible vis-à-vis des valeurs que prend  $\varepsilon$  quand l'agitation devient notable. Aussi pouvons-nous considérer  $\varepsilon$  comme nul avec l'agitation et comme fonction de toutes les causes qui font varier cette agitation. Quant à cette dépendance, nous l'exprimerons pour chaque cause de la manière qui paraîtra à la fois la plus simple et la plus naturelle, quitte à demander à l'expérience une confirmation des hypothèses admises.

Nous nous bornerons à étudier la loi de variation de  $\varepsilon$  pour les mouvements qui se produisent dans les tuyaux ou dans les canaux découverts à axe sensiblement droit; nous admettons donc que la masse fluide s'écoule dans un lit à forme à peu près cylindrique, de manière que les vitesses moyennes aient pu devenir, sur une longueur étendue, presque parallèles à une même direction suivant laquelle nous choisirons l'axe des  $x$ . La vitesse longitudinale  $u$  sera alors très grande vis-à-vis des composantes  $v$  et  $w$ , ou vitesses transversales, en sorte que  $v$  et  $w$  seront, vis-à-vis de  $u$ , de petites quantités ayant leurs carrés et produit négligeables. De plus, ces vitesses  $v$  et  $w$  ne varieront d'une manière sensible qu'au bout d'un temps assez long ou sur des parcours assez grands : dès lors, les accélérations  $v'$ ,  $w'$  et les dérivées  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$  seront négligeables devant  $v$  et  $w$ . Au contraire, l'accélération longitudinale  $u'$  et la dérivée  $\frac{\partial u}{\partial x}$  seront de l'ordre de  $v$  et de  $w$ . — Ces conditions définissent ce qu'on appelle un *régime graduellement varié*.

Nous appellerons  $\sigma$  la surface d'une section du fluide normale à l'axe des  $x$ , et  $\chi$  la longueur du *contour mouillé* de cette section, c'est-à-dire le périmètre de la partie de paroi en contact avec la section fluide  $\sigma$ :  $\sigma$  et  $\chi$  correspondent à une même abscisse  $x$ .

Le problème à traiter étant ainsi délimité, analysons les causes de production de l'agitation tourbillonnaire<sup>1</sup>. « Si l'on considère, par exemple, la surface libre d'une eau trouble coulant dans un canal, on voit sans cesse des volumes fluides de dimensions petites, mais finies, un instant adhérents aux parois, s'en détacher tout à coup et se propager de plus en plus vers l'intérieur en formant un ou plusieurs tourbillons à axes verticaux. On observe aussi, surtout vers le milieu du canal, des bouillons ou tourbillons à axe horizontal, partis du fond et qui émergent un instant au-dessus de la surface libre pour replonger aussitôt. Le trouble apporté à l'écoulement, et en vertu duquel des mouvements de sens alternativement opposés se superposent à la translation générale, qui seule est représentée en chaque point par la vitesse moyenne locale, provient donc surtout d'un nombre fini, mais très grand, de tourbillons produits près des parois et propagés de là.

« D'après cela, l'agitation tourbillonnaire dépendra de beaucoup de causes. Et d'abord, celle qui est produite en un point d'une paroi doit varier : 1<sup>o</sup> avec la vitesse moyenne locale en ce point [vitesse que nous pouvons confondre avec sa composante longitudi-

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 8, p. 47-49. — Ce passage, d'une analyse très pénétrante, est cité aussi par M. CH. RABUT dans son cours autographié d'*Hydraulique*, de l'École des Ponts-et-Chaussées (1906).

nale  $u_0$ ], car cette vitesse mesure l'impulsion moyenne qui a donné naissance aux tourbillons et qui leur communique leur force vive [cette vitesse doit même atteindre une certaine valeur pour que l'agitation naisse; des expériences de Darcy, Osborne Reynolds, Couette ont en effet montré que les mouvements sont bien continus, même dans des tubes de plus d'un centimètre carré de section, mais polis, jusqu'à une limite supérieure de vitesse qui est en raison inverse du diamètre]; 2° avec la grandeur du rapport  $\frac{\sigma}{\gamma}$  de la section normale fluide  $\sigma$  à son contour mouillé  $\gamma$ , rapport qui mesure l'étendue de section correspondant à l'unité de contour mouillé, car cette grandeur favorise les mouvements oscillatoires, perpendiculaires à la paroi [ou mouvements de ballottement], qui tendent à en détacher les groupes moléculaires, et sans lesquels l'action tangentielle exercée par la paroi sur ces groupes n'éprouverait pas de variations brusques; or ce doivent être ces variations, combinées avec la translation générale du liquide, qui impriment aux particules fluides des mouvements giratoires; 3° avec le degré de poli de la paroi considérée; plus celle-ci est rugueuse, plus elle doit, en heurtant les volumes liquides adjacents, produire des tourbillons et concourir ainsi à la formation des mouvements oscillatoires dont il vient d'être parlé.

« A partir des parois, les tourbillons se propageront vers l'intérieur, et il est impossible d'évaluer un peu exactement l'agitation locale qu'ils doivent produire en un point donné, sans connaître les lois de leur propagation et de leur extinction (ou plutôt de leur transformation en énergie interne ou calorifique), et aussi celles

de leur réflexion sur les surfaces-limites du fluide qu'ils rencontrent. Toutefois il est naturel d'admettre que l'agitation tourbillonnaire augmente à partir des parois, lorsque les tourbillons émanés de celles-ci ou réfléchis par elles se propagent sur des surfaces dont l'aire est de plus en plus petite, ce qui a lieu quand le contour mouillé de la section reste concave; qu'elle diminue dans le cas contraire, et qu'elle reste sensiblement constante lorsque, la section normale étant un rectangle à base indéfinie, le contour mouillé est rectiligne. Il est encore naturel de supposer l'agitation tourbillonnaire à peu près la même dans un tuyau d'une section rectangulaire très large ou circulaire que dans un canal découvert ayant pour section la moitié inférieure de celle-là, car la réflexion, sur la surface libre, des tourbillons partis du fond ou des bords, doit donner naissance, dans le cas du canal découvert, à une agitation sensiblement pareille à celle que causeraient dans le tuyau, sur la moitié inférieure des sections, les tourbillons venus de la partie supérieure des parois. »

Nous considérerons d'abord quatre cas très simples : d'une part, le cas d'un tuyau à section rectangulaire très large, de largeur qu'on puisse considérer comme indéfinie et de hauteur  $2h$ ; et celui d'un canal découvert à section pareille, et de profondeur  $h$ : dans l'un et l'autre cas, l'influence des bords de la section est négligeable; d'autre part, le cas d'un tuyau circulaire de rayon  $R$ , et celui d'un canal découvert à section demi-circulaire, coulant à pleins bords, et de rayon  $R$ . Les rugosités sont d'ailleurs supposées uniformément réparties sur toute l'étendue de la paroi. Dans ces quatre cas, par raison de symétrie, la vitesse à la

paroi  $u_0$  est la même sur tout le contour de la section, et des éléments égaux quelconques de ce contour présentent devant eux des zones de même ampleur à la propagation des tourbillonnements : cette ampleur mesurée par le rapport  $\frac{\sigma}{\chi}$ , qu'on appelle le *rayon moyen*, a pour valeur  $h$  dans les deux premiers cas, et  $\frac{R}{2}$  dans les deux autres.

Nous admettons que l'influence de l'agitation sur la valeur de  $\epsilon$  se traduit, pour les deux premières causes signalées, par l'existence en facteur, dans  $\epsilon$ , de la vitesse moyenne  $u_0$  et du rayon moyen  $h$  ou  $\frac{R}{2}$ .

« A partir des parois, l'agitation se propage à l'intérieur des sections sur des plans parallèles au fond ou aux deux bases dans les canaux et tuyaux très larges de hauteur  $h$  ou  $2h$ , et sur des cylindres ou demi-cylindres coniques de rayons décroissants  $r$  dans le tuyau circulaire ou le canal demi-circulaire. Il est naturel de supposer que son degré se conserve sensiblement de couche en couche dans les deux premiers cas, où elle ne se concentre ni se disperse, et qu'il croît dans les deux derniers cas où, abstraction faite de la différence de vitesse des couches, elle se concentre suivant le rapport  $\frac{R}{r}$  inverse de celui de leurs aires. »

Nous admettrons donc que  $\epsilon$  reste constant aux divers points d'une section dans les deux premiers cas, et qu'il varie à partir des parois dans le rapport  $\frac{R}{r}$  dans les deux autres.



Soit alors  $\rho g$  le poids sensiblement constant de l'unité de volume de liquide, et  $A$  un coefficient d'autant plus grand que le fond sera plus rugueux. Nous prendrons comme expression de première approximation de  $\epsilon$  :

$$\epsilon = \rho g A h_0$$

pour une section rectangulaire très large,

$$\epsilon = \rho g A \frac{R}{2} u_0 \frac{R}{r}$$

pour une section circulaire ou demi-circulaire.

Les dimensions de  $\epsilon$  sont  $ML^{-1}T^{-1}$ , et celles de  $A$  sont par suite  $L^{-1}T^2$ .

D'après la confrontation avec l'expérience, la valeur de  $A$  serait en moyenne de 0,064 (unités CGS). Donc pour un canal rectangulaire dans lequel coulerait, avec une vitesse de 1 mètre sur le fond, une nappe d'eau ayant 1 mètre de profondeur, on aurait donc  $\epsilon = 64$  (unités CGS), soit presque 5000 fois la valeur du coefficient des frottements intérieurs dans le cas des mouvements bien continus.

Nous reviendrons ultérieurement sur la loi de variation de  $A$  avec le degré de rugosité.

Notons que, pour le cas d'une section circulaire, la loi admise de variation de  $\epsilon$  ne saurait être valable aux environs de l'axe : elle conduirait en effet à une valeur infinie de  $\epsilon$  pour  $r=0$ , soit à une agitation infinie sur l'axe, et ceci n'a pas de sens physique. Au point de vue analytique, il n'en résulte pas de difficulté : en effet, la vitesse relative du glissement moyen local des couches décroît jusqu'à zéro sur l'axe, par raison de continuité et de symétrie, et par suite, sur l'axe,  $\epsilon$  se

trouve multiplié par une quantité qui tend vers zéro ; il n'en résulte dans la répartition des vitesses qu'un insignifiant écart local.

Toutefois, dans une seconde approximation, M. Bous-sinesq a cherché à représenter  $\varepsilon$ , dans le cas d'une sec-tion circulaire, par la formule

$$\frac{\rho g A \frac{R}{2} u_o}{\frac{r}{R} + \psi\left(\frac{r}{R}\right)},$$

$\psi\left(\frac{r}{R}\right)$  étant une fonction constamment très petite pour  $r < R$  et restant finie et différente de zéro sur l'axe. Nous n'aurons pas besoin, dans les questions que nous exposerons, de recourir à cette seconde approxi-mation.

Supposons enfin qu'il s'agisse d'un tuyau de forme quelconque [cas dans lequel il est loisible de faire ren-trer, comme on l'a dit plus haut, celui d'un canal découvert]. Soit  $u_o$  la vitesse en un point déterminé de la section  $\sigma$ , par exemple au point le plus bas ;  $A_o$  un coefficient spécifique du degré de rugosité en ce point. En un autre point quelconque de la section, nous exprimerons les éléments analogues  $u$  et  $A$  par les pro-ducts de ces valeurs respectivement par une fonction, la même pour toutes les sections semblables, des rap-ports  $\frac{yy}{\sigma}$ ,  $\frac{zz}{\sigma}$  des coordonnées  $y, z$  du point con-sidéré au rayon moyen, rapports qui sont les mêmes aux points homologues de deux sections. En particu-lier, le produit des deux fonctions supposées connues

$\frac{A^2}{A_o^2}$ ,  $\frac{u^2}{u_o^2}$ , prises aux divers points du contour mouillé, produit essentiellement positif et se réduisant à l'unité dans les quatre cas particuliers examinés,

sera désigné par  $f\left(\frac{\chi y}{\sigma}, \frac{\chi z}{\sigma}\right)$ :

$$\left(\frac{A}{A_o}\right) \left(\frac{u}{u_o}\right)^2 = f\left(\frac{\chi y}{\sigma}, \frac{\chi z}{\sigma}\right)$$

[sur le contour mouillé  $\chi$ ].

D'autre part, l'ampleur offerte au ballottement vis-à-vis de chaque élément du contour n'est plus la même pour chaque élément : elle ne sera plus constamment mesurée par  $\frac{\sigma}{\chi}$ ; il conviendrait de la représenter par le produit de  $\frac{\sigma}{\chi}$  par une fonction de  $\frac{\chi y}{\sigma}, \frac{\chi z}{\sigma}$ , et  $\frac{\sigma}{\chi}$  ne sera que sa valeur moyenne.

Enfin<sup>1</sup>, « comme l'agitation à partir des parois se transmettra dans la masse en se concentrant ou en se disséminant suivant les mêmes proportions aux points homologues de l'intérieur, ou en se réfléchissant de même aux points homologues des surfaces limites, il est naturel qu'on puisse exprimer le rapport de sa valeur en chaque point  $(y, z)$  de  $\sigma$  à ce qu'elle est au fond où  $A$  et  $u$  sont  $A_o$  et  $u_o$ , par une fonction positive de la forme  $F\left(\frac{\chi y}{\sigma}, \frac{\chi z}{\sigma}\right)$ , la même pour toutes les sections semblables dont il s'agit. Il viendra

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 18, broch., p. 21.

donc comme généralisation des formules ci-dessus :

$$\epsilon = \rho g A_o \frac{\sigma}{\chi} u_o F \left( \frac{ZY}{\sigma}, \frac{Zz}{\sigma} \right).$$

### 5. Équations indéfinies du mouvement.—

Considérons, à un instant quelconque, les équations toujours valables, d'équilibre dynamique du milieu

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_z}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial z} + \rho X = \rho \ddot{V},$$

où l'on désigne par  $(N, T)$ ,  $(X, Y, Z)$  et  $(\ddot{V}, \dot{V}', \ddot{V}'')$  les pressions élémentaires, la force extérieure (réduite ici à la pesanteur) et l'accélération au point  $(x, y, z)$ , telles qu'elles sont à l'instant  $t$ .

Multiplions ces équations par  $\frac{dt}{T}$ , et intégrons chaque terme entre les limites  $t - \frac{T}{2}$  et  $t + \frac{T}{2}$ ,  $T$  étant la petite durée de l'irrégulière période de l'agitation au point  $(x, y, z)$ . À cause de l'indépendance de  $t$  et de  $(x, y, z)$  dans notre opération, on peut intégrer sous le signe de différentiation, et l'on obtient dans les premiers membres des termes analogues à

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} N_x \frac{dt}{T}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \partial \ddot{V} x}{\partial x}.$$

La densité  $\rho$  et la force extérieure restant constantes, les derniers termes se reproduisent. Enfin les termes  $(\ddot{V}, \dot{V}', \ddot{V}'')$  fournissent les valeurs  $(u', v', w')$  calculées au § 2 [p. 43].

Nous obtenons ainsi les équations

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{C}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}_y}{\partial z} + \varphi X = \varphi u, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Dans ces équations, nous substituerons aux  $(\mathfrak{H}, \mathcal{C})$  les expressions calculées au § 3, en fonction de  $p$ , de  $\varepsilon$  et des dérivées de  $u, v, w$  par rapport à  $x, y, z$ ; à  $\varepsilon$  sa valeur donnée au § 4 pour les cas envisagés; à  $u', v', w'$  les valeurs calculées à la fin du § 2.

A ces trois équations liant la vitesse moyenne  $(u, v, w)$  et la pression élastique  $p$  à  $x, y, z, t$ , nous adjoindrons, puisque dans les questions ici étudiées il y a sensiblement conservation des volumes fluides, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (C \text{ bis})$$

et nous considérerons  $p$  comme fonction de  $x, y, z, t$  et non de  $\varphi$ , comme il a été expliqué à propos des fluides parfaits.

Nous obtenons ainsi quatre équations aux dérivées partielles pour déterminer les quatre fonctions  $u, v, w, p$  des quatre variables  $x, y, z, t$ .

Nous examinerons en détail deux cas particuliers importants.

1<sup>o</sup> *Cas où les frottements sont négligeables.* — Le coefficient des frottements intérieurs, quoique énormément plus grand dans les mouvements tourbillonnaires que dans les mouvements bien continus, est encore très petit. Aussi dans les phénomènes de brève durée, les effets retardateurs des frottements intérieurs n'ayant

pas le temps de s'accumuler, on pourra négliger les termes en  $\varepsilon$ . Mais alors on a :

$$\mathfrak{N}_x = \mathfrak{N}_y = \mathfrak{N}_z = -p, \quad \mathfrak{C}_x = \mathfrak{C}_y = \mathfrak{C}_z = 0,$$

et l'on est conduit aux équations mêmes qui régissent les mouvements des fluides parfaits ou à l'état élastique. Ainsi, « lorsque les frottements sont négligeables, les équations des mouvements des fluides parfaits régissent les mouvements tourbillonnaires et tumultueux des fluides, pourvu qu'on y introduise, au lieu des vitesses vraies et de la pression vraie à chaque instant, leurs valeurs moyennes locales. »

Parmi les problèmes qui comporteront cette approximation, on citera l'écoulement par orifices en mince paroi, l'écoulement par déversoir, les mouvements périodiques de petite amplitude et de courte durée d'oscillation, tels que ceux qui constituent la houle et le clapotis, la propagation des ondes de translation à longueur modérée.

Mais il est d'autres problèmes où ce degré d'approximation est notoirement insuffisant : rentre dans cette espèce l'étude de tout mouvement où chaque molécule est suivie pendant un temps assez long pour que l'influence des frottements finisse par être comparable à celle des forces extérieures : écoulement dans les tuyaux de conduite, écoulement dans les canaux découverts, propagation d'une onde très longue, amortissement des mouvements ondulatoires.

*2° Cas d'un régime graduellement varié.* — Les mouvements dans les canaux et les tuyaux de conduite rentrent dans la catégorie de ceux qui ont été précisés au § 4 sous le nom de régime graduellement varié. Si

l'on appelle *filet fluide* une ligne à laquelle sont tangentes les vitesses moyennes locales construites en chacun de ses points (ou un faisceau de telles lignes, à section infiniment petite), nous supposons que, dans le mouvement étudié, les filets fluides sont presque rectilignes et parallèles à une direction prise pour celle de l'axe des  $x$ .

D'après cela, les vitesses transversales  $v$  et  $w$  seront, par rapport à la vitesse longitudinale  $u$ , des quantités du premier ordre de petitesse; il en sera de même de leurs dérivées, et, en vertu de l'équation de continuité, de  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

Enfin, à cause de la petitesse du coefficient  $\varepsilon$  (due à celle de A),  $\varepsilon$  sera assimilé à une quantité du premier ordre de petitesse et on négligera son produit par l'une des quantités précédentes de cet ordre.

Il vient ainsi :

$$\mathfrak{N}_x = \mathfrak{N}_y = \mathfrak{N}_z = -p, \quad \mathfrak{C}_x = 0,$$

$$\mathfrak{C}_y = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \mathfrak{C}_z = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Nous pouvons encore noter que les dérivées de  $\mathfrak{C}_y$  et de  $\mathfrak{C}_z$  par rapport à  $x$  sont négligeables : elles admettent en effet en facteur à l'un de leurs termes le coefficient  $\varepsilon$  et la très petite dérivée  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , dérivée à nouveau par rapport à  $z$  ou à  $y$ , — et à l'autre terme la dérivée  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$ , d'un ordre de petitesse plus élevé, en égard à la variation graduelle admise du régime.

En résumant les diverses simplifications ainsi légitimées, nous écrirons les équations du mouvement ainsi :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho X &= \rho u', \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y &= \rho v', \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z &= \rho w', \end{aligned} \right\}$$

l'équation de continuité conservant sa forme.

Les deux dernières équations entraînent pour expression de la variation de la pression quand on se déplace dans une section normale à l'axe des  $x$  :

$$dp = \rho(Ydy + Zdz) - \rho(v'dy + w'dz).$$

S'il n'y a pas d'autre force extérieure que la pesanteur,  $Y, Z$  sont constants, et l'on a comme condition d'intégrabilité de cette expression de  $dp$  dans une section :

$$\frac{\partial v'}{\partial z} = \frac{\partial w'}{\partial y}.$$

Comme les vitesses, par suite de l'hypothèse de la graduelle variation du régime, ne changent sensiblement qu'au bout d'assez longs parcours, il sera permis de regarder les accélérations latérales  $v'$ ,  $w'$  comme du second ordre de petitesse, tandis que l'accélération longitudinale  $u'$  sera du premier ordre. Alors l'expression de  $dp$  se réduit à  $\rho(Ydy + Zdz)$ , c'est-à-dire à sa valeur hydrostatique dans une même section normale à l'axe des  $x$ . Si  $p_0$  est la pression moyenne au point où l'axe des  $x$  perce la section, et s'il n'y a pas d'autre force

extérieure que la pesanteur, en sorte que  $Y, Z$  soient constants, nous aurons :

$$p = p_0 + \rho(Yy + Zz),$$

et la dérivée de  $p$  en  $x$  se réduit à celle de la pression  $p_0$  sur l'axe  $ox$ .

La première équation pourra alors s'écrire ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left( \rho X - \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) = \rho u'.$$

Nous transformerons ultérieurement cette équation fondamentale.

#### E. — *Conditions initiales et conditions aux limites.*

**1. Cas d'un fluide parfait.** — Les fonctions  $u, v, w, p$  des variables  $x, y, z, t$  sont définies, dans tous les cas, par un système de quatre équations aux dérivées partielles; mais elles doivent en outre satisfaire à des conditions que nous allons examiner.

Tout d'abord, à l'instant initial, le domaine occupé par le fluide et la distribution des vitesses et de la pression des divers éléments sont supposés donnés. En d'autres termes, pour  $t = 0$ , les fonctions  $u, v, w, p$  ont des valeurs données en chaque point de ce domaine. Les conditions qui en résultent sont dites *conditions initiales*.

En outre, sur les surfaces qui limitent la masse à tout instant, le fluide est astreint à rester en contact avec une paroi, fixe ou animée d'un mouvement connu, — ou à confiner à un autre fluide qui, dans nos applications, sera l'air dont la pression sera constante sur toute la surface considérée, dite *surface libre*. Il en

résulte pour les fonctions  $u, v, w, p$  des conditions que nous allons traduire analytiquement, et qu'on appelle *conditions aux limites*.

Supposons que le fluide soit en contact avec une paroi parfaitement polie, définie par une équation  $H(x, y, z, t) = 0$ , qui renferme ou non le temps selon que la paroi est mobile suivant une loi donnée, ou est fixe. Les molécules qui, à un instant  $t$ , sont en contact avec la paroi, forment une surface continue dont l'équation est  $H(x, y, z, t) = 0$ . A l'instant  $t + dt$ , la surface formée par les mêmes éléments matériels coïncide encore avec la paroi : on ne saurait en effet admettre qu'il se forme subitement un vide entre la paroi et la dite surface. Or les coordonnées de la molécule située en  $(x, y, z)$  à l'instant  $t$  sont devenues, à l'instant  $t + dt$  :  $x + udt, y + vdt, z + wdt$ . On doit donc avoir  $H(x + udt, y + vdt, z + wdt, t + dt) = 0$ , et comme  $H(x, y, z, t) = 0$  pour l'élément matériel envisagé, les fonctions  $u, v, w$  doivent vérifier la relation

$$u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + w \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

pour tous les systèmes de valeurs  $x, y, z, t$  satisfaisant à l'équation  $H = 0$ . Si  $H$  est indépendant du temps, la relation réduite exprime que les vitesses des éléments, au contact de la paroi fixe, sont tangentes à cette paroi.

Supposons qu'il s'agisse d'une *surface libre* en tous les points de laquelle la pression a une valeur donnée  $p_a$ . L'équation de cette surface est  $p(x, y, z, t) = p_a$ , et l'on exprime, comme plus haut, que tout élément qui, à

L'instant  $t$ , se trouve sur la surface de séparation, glisse sur cette surface, par la relation :

$$u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

En dehors de cette condition cinématique, nous avons à exprimer que l'effort exercé sur la paroi par le fluide intérieur est, en chaque point de cette paroi, égal et contraire à celui qu'exerce sur elle le milieu environnant.

Supposons la paroi fixe, pour n'avoir pas à mettre en compte son inertie. La paroi étant supposée parfaitement polie, c'est-à-dire à réaction normale, et la pression du fluide sur tout élément plan lui étant normale, cette condition dynamique ne se traduit par aucune relation analytique entre les grandeurs prises en considération.

L'atmosphère n'exerçant pas d'action de frottement sensible sur la surface du fluide à cause de la faible densité de l'air, la condition dynamique est satisfaite d'elle-même sur la surface libre.

**2. Cas d'un fluide naturel à mouvements continus.** — Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un fluide naturel à mouvements réguliers. Je dis qu'alors près d'une paroi fixe mouillée par le liquide, les trois composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  de la vitesse sont nulles.

Comme en effet une différence extrêmement faible de vitesse entre des molécules voisines développe une force de frottement appréciable, une différence finie de vitesse entre les molécules de la paroi et celles du fluide en contact développerait un frottement énormément plus

grand. Ce frottement ne saurait laisser en équilibre dynamique la couche infiniment mince en contact avec la paroi, car il aurait à équilibrer l'action tangentielle exercée par le fluide sur l'autre surface de la couche, à moins qu'il ne corresponde à une vitesse extrêmement petite de la couche, et, analytiquement, égale à zéro.

La condition cinématique est alors identiquement satisfaite.

A la surface libre, en admettant encore que le fluide ne subisse pas de frottement sensible de la part de l'atmosphère, nous aurons à exprimer que les composantes tangentielles de la force exercée par le liquide en chaque point de sa surface libre sont nulles et que la composante normale est égale à la pression atmosphérique<sup>1</sup>.

**3. Cas d'un fluide à mouvements turbulents.** — Nous nous bornerons encore au cas d'un lit sensiblement cylindrique et d'un régime graduellement varié.

Les conditions cinématiques aux surfaces limites sont analogues à ce qu'elles étaient au § 1, à condition de considérer les surfaces libres moyennes, surfaces continues dont les surfaces libres réelles s'écartent légèrement, irrégulièrement, et en moyenne autant d'un côté que de l'autre.

On reconnaît de suite qu'une molécule qui se trouverait à un instant donné en un point d'une surface limite moyenne, et posséderait la vitesse moyenne

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 2, p. 382.

locale en ce point resterait constamment située sur cette surface<sup>1</sup>.

Si donc ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) sont les cosinus directeurs de la normale *extérieure* à la paroi en un point M du contour  $\gamma$ , nous aurons :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \quad (\text{paroi fixe}).$$

Supposons que,  $ox$  ayant la direction du lit et  $oy$  étant horizontal, il y ait une surface libre. Comme la pression moyenne varie hydrostatiquement sur toute l'étendue de la section normale  $\sigma$ , nous reconnaîtrons dans un instant que, à la surface libre,  $p$  devra égaler la pression constante  $p_a$  de l'atmosphère : il en résultera que la trace du plan de la section sur la surface libre sera parallèle à  $oy$ , et par suite la surface libre moyenne sera une surface cylindrique, à génératrices parallèles à  $oy$ .

Comme, à la surface libre,  $p$  ne dépendra pas de  $y$  [avec ce choix d'axes], l'équation  $p = p_a$  résolue par rapport à  $z$  donne :  $z_1 = f(x, t)$ , et, dans notre régime,  $z_1$  varie lentement avec  $x$  et  $t$ . En exprimant qu'une molécule de vitesse ( $u, v, w$ ) reste sur cette surface, nous aurons :

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + u \frac{\partial z_1}{\partial x} - w = 0 \quad [\text{surface libre}].$$

Passons aux conditions dynamiques. Soit  $\lambda$  l'angle de  $oy$  et de la normale au contour  $\gamma$  au point M où la paroi admet pour normale extérieure ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) [la normale au contour étant aussi extérieure]. Si le canal était parfaitement cylindrique, on aurait :

$$\alpha = 0, \beta = \cos \lambda, \gamma = \sin \lambda;$$

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 8, p. 57.

comme il ne diffère que peu de cette forme,  $\alpha, \beta, \gamma$  différeront peu de ces valeurs, et les écarts deviendront négligeables lorsqu'il faudra les multiplier par le petit coefficient  $\varepsilon$ . Cela étant, eu égard aux valeurs connues des ( $\mathfrak{M}, \mathfrak{T}$ ), nous obtenons pour composantes de la pression exercée sur l'élément de surface environnant le point M :

$$p_x = -px + \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cos \lambda + \frac{\partial u}{\partial z} \sin \lambda \right),$$

$$p_y = -p\beta, \quad p_z = -p\gamma.$$

Cette pression est la résultante d'une pression  $-p$  normale à la surface limite, et d'une autre dirigée suivant le filet fluide qui rase cette surface. Soit MN =  $dn$  une longueur infiniment petite portée sur la normale intérieure au contour. Quand on passe de M à N,  $y$  et  $z$  subissent les variations  $-dn \cos \lambda, -dn \sin \lambda$  et  $u$  la variation  $du$  égale à  $-\left( \frac{\partial u}{\partial y} \cos \lambda + \frac{\partial u}{\partial z} \sin \lambda \right) dn$ .

La partie tangentielle de la pression a donc pour mesure  $-\varepsilon \frac{du}{dn} \left[ \frac{du}{dn} \right]$  est dit la dérivée de  $u$  prise suivant la normale intérieure au contour].

La pression exercée par la masse fluide sur une couche matérielle infiniment mince voisine de la paroi est égale et contraire à l'action exercée sur l'autre face de la même couche par le milieu formant la limite, laquelle comporte une composante normale inconnue, dont la valeur sera égale à  $p$ , et une composante tangentielle, qui est l'effort unitaire  $F_e$  produit par le frottement du fluide sur la paroi, opposé à la vitesse longitudinale  $u$ .

Le frottement extérieur  $F_e$  dépend du nombre des molécules fluides qui viennent, dans l'unité de temps, choquer les rugosités de l'unité de surface de la paroi, nombre qui est en raison directe de  $u$ ; — de la vitesse dont ces molécules sont animées au moment de la rencontre, vitesse dont la moyenne est  $u$ ; — enfin du degré de rugosité de la paroi qui accélère plus ou moins les chocs successifs. Nous sommes ainsi conduits à poser [conformément aux résultats des expériences de Girard constatant la proportionnalité du frottement au carré de la vitesse du fluide contre la paroi] :  $F_e = \rho g B u^2$ ,  $B$  étant un coefficient constant pour chaque nature de paroi, mais variable d'une nature de paroi à l'autre. Ce coefficient croît bien plus rapidement avec le degré de rugosité que ne le faisait A, et M. Boussinesq admet (ce que l'expérience a confirmé) que le rapport  $\frac{B}{A^2}$  est constant pour les diverses espèces de parois. Aussi poserons-nous ultérieurement :  $A = \frac{1}{k} \sqrt{B}$ ,  $k$  étant un coefficient indépendant du degré de rugosité des parois, mais pouvant varier avec la nature du fluide.

Nous aurons donc le long du contour mouillé de la paroi : —  $\varepsilon \frac{du}{dn} = \rho g B u^2$ , ou encore, eu égard aux notations antérieures [D, § 4] :

$$\varepsilon \frac{du}{dn} = - \rho g B_o u_o^2 f\left(\frac{\gamma_y}{\sigma}, \frac{\gamma_z}{\sigma}\right).$$

Sur un élément de la surface libre,  $\alpha$  est minime,  $\beta$  est nul, et  $\gamma$  est voisin de l'unité. La pression exercée par le liquide sur un élément de la couche péri-

phérique se réduit à la composante normale —  $p$  et à la composante tangentielle longitudinale  $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}$ . Si  $p_a$  est la valeur de la pression atmosphérique, on doit donc avoir sur toute la surface libre :

$$p = p_a, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

La connaissance de la pression remplace ici celle de la composante de la vitesse moyenne locale, suivant la normale, nulle le long d'une paroi fixe.

En fait, à la surface libre, le peu de résistance de l'air aux déplacements brusques entraîne, dans la couche supérieure du fluide, des perturbations continues du régime des vitesses ; mais des observations très précises d'H. Bazin ont montré que ces perturbations n'altèrent pas les vitesses moyennes locales de quantités appréciables<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> H. BAZIN, 4, p. 176-177. — J. BOUSSINESQ, 18, p. 16.

## APPENDICE

**Formules de Riemann et d'Ostrogradsky (ou de Green).** — Nous aurons maintes fois à utiliser une formule donnée par Riemann et qui permet de transformer une certaine intégrale double en une intégrale curviligne. Nous l'établirons sommairement<sup>1</sup>.

Soient  $V$  et  $W$  deux fonctions de deux variables indépendantes  $y$ ,  $z$ ; considérons l'intégrale de surface

$$\int \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) d\sigma,$$

étendue à une aire  $\sigma$  du plan des  $yz$ , de contour  $\gamma$ , et dans laquelle  $\frac{\partial V}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial W}{\partial y}$  sont bien déterminées et continues. Supposons de plus que le contour de l'aire satisfasse à cette condition qu'à chaque abscisse  $y$  correspondent seulement deux ordonnées  $z$  et de même à à chaque ordonnée deux abscisses.

Pour calculer  $\int \frac{\partial V}{\partial z} d\sigma$ , on divisera l'aire  $\sigma$  en bandes infinitésimales de largeur  $dy$ , parallèles à l'axe des

<sup>1</sup> B. RIEMANN, *Inaugural Dissertation*, § 7, p. 12-14 (1851).

$z$ . On intégrera d'abord le long de la bande d'abscisse  $y$ , d'ordonnées extrêmes  $z_1$  et  $z_2$ , ce qui donnera :

$$V(y, z_2) - V(y, z_1),$$

et l'on aura à prendre l'intégrale simple

$$\int [V(y, z_2) - V(y, z_1)] dy,$$

entre les abscisses extrêmes du contour ; cette inté-

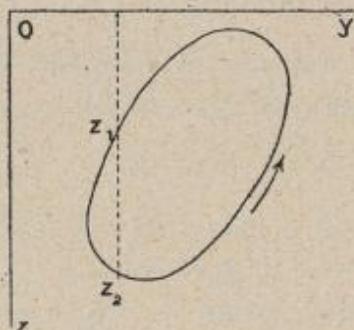


Fig. 4.

grale n'est autre que  $\oint V(y, z) dy$ , étendue au contour  $\gamma$  de  $\sigma$ , décrit dans le sens positif.

De même,  $\int \frac{\partial W}{\partial y} dz$  a pour valeur  $\oint W(y, z) dz$ , étendue au même contour décrit dans le sens négatif.

Réunissant les deux résultats, nous aurons la formule de Riemann :

$$\int_{\sigma} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) dz = \oint_{\gamma} (W dz - V dy),$$

Hydraulique générale.

3

l'intégrale curviligne correspondant à une description du contour dans le sens négatif.

Supposons en particulier que V et W aient la forme particulière

$$V = \Psi(y, z) \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad W = \Psi(y, z) \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Alors l'élément à intégrer s'écrit :

$$W dz - V dy = \Psi \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz - \frac{\partial \varphi}{\partial z} dy \right],$$

ou, en désignant par  $d\zeta$  un élément du contour et  $\alpha$  l'angle de la direction de parcours de cet élément avec  $oy$ :

$$\Psi \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \alpha \right] d\zeta.$$

Menons au centre M de l'élément  $d\zeta$  une petite normale  $MN = dn$  au contour  $\zeta$ , vers l'intérieur de l'aire. Le point N a pour coordonnées :

$$y - dn \sin \alpha, \quad z + dn \cos \alpha,$$

et quand on passe de M à N, la fonction  $\varphi$  subit la variation  $d\varphi = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \alpha \right) dn$ .

Nous aurons donc en fin de compte :

$$\int_{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right\} d\sigma = \int_{\zeta} \Psi \frac{d\varphi}{dn} d\zeta,$$

$\frac{d\varphi}{dn}$  étant ce que nous avons appelé la dérivée de  $\varphi$  prise dans le sens de la normale intérieure à l'aire  $\sigma$ , et le contour  $\zeta$  étant décrit dans le sens positif.

Dans le cas simple où  $\Psi$  est une constante, cette formule se réduit à

$$\int_{\sigma} \Delta \varphi \cdot d\sigma = \int_{\zeta} \frac{d\varphi}{dn} d\zeta,$$

où  $\Delta$  est le symbole opératoire de Laplace,  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Ces formules s'étendent aisément au cas d'un contour quelconque.

Soient maintenant  $U, V, W$  trois fonctions des variables indépendantes  $x, y, z$ ; l'intégrale

$$\int \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dv$$

étendue à un volume  $\mathcal{V}$  limité à une surface  $S$  fermée et où  $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}$  sont bien déterminées et continues, se ramène aisément de la même manière à une intégrale étendue à la surface  $S$ . Si  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les cosinus directeurs de la normale, intérieure au volume  $\mathcal{V}$ , en un point de la surface limite, et  $ds$  un élément de la surface  $S$  environnant ce point, cette intégrale est égale à

$$\int (\alpha U + \beta V + \gamma W) ds.$$

L'égalité de ces intégrales constitue la formule d'Ostrogradsky.

Si  $U, V, W$  sont, à un facteur  $\Psi(x, y, z)$  près, les dérivées partielles d'une fonction  $\varphi(x, y, z)$ , l'expression  $\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}$  n'étant autre chose que

la dérivée  $\frac{d\varphi}{dn}$  de la fonction  $\varphi$ , prise suivant la normale intérieure au domaine  $\mathcal{V}$ , on aura :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right\} dv \\ = \int_s \Psi \frac{d\varphi}{dn} ds. \end{aligned}$$

Si  $\Psi$  n'est qu'une constante, cette formule se réduit encore; il vient :

$$\int_{\mathcal{V}} \Delta \varphi \cdot dv = \int_s \frac{d\varphi}{dn} ds,$$

où  $\Delta$  est le symbole opératoire de Laplace à trois variables.

Cette dernière formule a été donnée par G. Green, avant Riemann et Ostrogradsky.

# PREMIÈRE SECTION

PHÉNOMÈNES OU L'INFLUENCE DES FROTTEMENTS  
EST NÉGLIGEABLE

---

## CHAPITRE I

### THÉORÈMES GÉNÉRAUX

1. **Principe de Daniel Bernoulli<sup>1</sup>.** — Supposons qu'en chaque point la vitesse moyenne locale et la pression moyenne soient indépendantes du temps, auquel cas on dit que le mouvement est *permanent*. L'influence des frottements intérieurs étant, par hypothèse, négligeable, les équations du mouvement ne sont autres que celles des fluides parfaits :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial (x, y, z)} = (X, Y, Z) - (u', v', w').$$

Ajoutons ces trois équations après les avoir multipliées respectivement par les variations

$$dx = u dt, dy = v dt, dz = w dt$$

<sup>1</sup> D. BERNOULLI, p. 11. — J. BOUSSINESQ, 8, p. 531.

des coordonnées d'une particule pendant le temps infiniment court  $dt$ . Si l'on observe : 1<sup>o</sup> que la pression  $p$  ne dépend que de  $x, y, z$ ; 2<sup>o</sup> qu'en désignant par  $\zeta$  la cote de la particule au-dessus d'un plan horizontal fixe situé sous le fluide, on a :

$$Xdx + Ydy + Zdz = d(-g\zeta);$$

3<sup>o</sup> que les accélérations  $u', v', w'$  de la particule ne sont autre chose que les dérivées totales, par rapport au temps, des composantes  $u, v, w$  de la vitesse, il vient :

$$d \left[ p + \rho g \zeta + \rho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right] = 0.$$

Par suite, en désignant par  $V$  la grandeur de la vitesse de la particule, et en suivant la particule dans les positions successives qu'elle occuperait en vertu du mouvement moyen, on a :

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + \zeta = \text{Const.}$$

L'invariance de la quantité  $\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + \zeta$  le long d'un même filet n'est que l'expression du principe de la conservation de l'énergie.

La quantité  $\frac{V^2}{2g}$ , hauteur dont il faut laisser tomber sans vitesse l'élément fluide en chute libre pour qu'il acquière la vitesse  $V$ , s'appelle la *hauteur due à la vitesse  $V$* .

La pression  $\frac{p}{\rho g}$ , hauteur de la colonne du liquide, en équilibre sous l'action de la pesanteur, capable

d'exercer sur sa base la pression  $p$ , est dite *hauteur du liquide représentative de la pression  $p$* .

Cette terminologie permet d'énoncer ainsi le résultat établi : *Dans le mouvement permanent d'un fluide sans frottement, en tous les points d'un même filet liquide, la hauteur au-dessus d'un plan horizontal fixe, la hauteur due à la vitesse et la hauteur représentative de la pression ont une somme constante.*

## 2. Théorème de Lagrange et de Cauchy. —

Supposons maintenant le mouvement quelconque, permanent ou non. Un cas extrêmement important est celui où la force extérieure ( $X, Y, Z$ ) dérive d'un potentiel  $F(x, y, z)$  indépendant du temps et où les composantes  $u, v, w$  de la vitesse locale sont à chaque instant les dérivées par rapport à  $x, y, z$  d'une même fonction  $\varphi(x, y, z, t)$  :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

On dit alors qu'il existe un *potentiel des vitesses  $\varphi$* , et l'équation de continuité, qui s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

montre que cette fonction  $\varphi$  est, pour chaque valeur de  $t$ , une fonction *harmonique* de  $x, y, z$ .

La condition nécessaire et suffisante d'existence d'un potentiel des vitesses est que les binômes

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

soient nuls quelle que soit la valeur de  $t$ .

« Si, à un moment donné et à l'intérieur d'une particule fluide, ces binômes sont nuls, ils seront encore nuls à une époque quelconque, à l'endroit de l'espace où se trouverait à cette époque la particule, supposée animée constamment de la seule vitesse translatoire ( $u, v, w$ ). »

Ce théorème fondamental, dont l'énoncé est dû à Lagrange<sup>1</sup>, a été établi d'une manière fort remarquable par Aug. Cauchy<sup>2</sup>; la démonstration de Cauchy a été réduite à la plus grande simplicité en 1872 par M. Boussinesq<sup>3</sup>, qui, un peu plus tard, en 1877, l'a remplacée par une démonstration plus directe et extrêmement brève<sup>4</sup>. Nous exposerons la première démonstration de M. Boussinesq, qui nous permettra de donner, en passant, quelques aperçus sur la théorie des tourbillons d'H. von Helmholtz.

Partons des équations

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial (x, y, z)} = \frac{\partial F}{\partial (x, y, z)} - (u', v', w') \quad (1)$$

et exprimons les coordonnées actuelles ( $x, y, z$ ) des molécules au moyen des variables de Lagrange (coordonnées initiales  $x_o, y_o, z_o$  et temps  $t$ ).  $u, v, w, p$ , deviendront des fonctions de  $x_o, y_o, z_o, t$ ;  $u, v, w$  et  $u', v', w'$  ne seront autres que les dérivées de ces fonctions,  $x, y, z$  d'une part et  $u, v, w$  d'autre part, par rapport à  $t$ , puisqu'on obtient ces dérivées en suivant une même molécule, c'est-à-dire sans faire varier  $x_o, y_o, z_o$ .

<sup>1</sup> J. L. LAGRANGE, 2<sup>e</sup> partie, section XI, §§ 16, 17, 18.

<sup>2</sup> A. CAUCHY, 5, p. 40-43.

<sup>3</sup> J. BOUSSINESQ, 3, § 1.

<sup>4</sup> J. BOUSSINESQ, 8, p. 532. Cette démonstration a été reproduite par M. Sautréaux dans sa thèse [C. SAUTRÉAUX, p. 3-6].

Multiplions les équations (1) respectivement par les dérivées de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  prises successivement par rapport à  $x_o$ ,  $y_o$ ,  $z_o$ , et ajoutons-les. Il vient :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial(x_o, y_o, z_o)} = \frac{\partial F}{\partial(x_o, y_o, z_o)} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial(x_o, y_o, z_o)} - \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial(x_o, y_o, z_o)} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial(x_o, y_o, z_o)}.$$

Supposons  $\rho$  constant, ou même plus généralement fonction de  $p$ . Les conditions d'intégrabilité de la fonction  $p$  sont au nombre de trois : l'une d'elles s'obtiendra en dérivant la seconde équation par rapport à  $z_o$ , la troisième par rapport à  $y_o$ , et en prenant la différence. Si l'on note que  $u = \frac{\partial x}{\partial t}, \dots$ , et que par suite

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y_o \partial t} = \frac{\partial u}{\partial y_o}, \dots,$$

on trouve immédiatement :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z_o} \frac{\partial x}{\partial y_o} - \frac{\partial u}{\partial y_o} \frac{\partial x}{\partial z_o} + \frac{\partial v}{\partial z_o} \frac{\partial y}{\partial y_o} - \frac{\partial v}{\partial y_o} \frac{\partial y}{\partial z_o} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial w}{\partial z_o} \frac{\partial z}{\partial y_o} - \frac{\partial w}{\partial y_o} \frac{\partial z}{\partial z_o} \right\} = 0. \end{aligned}$$

La quantité entre parenthèses a donc une valeur indépendante du temps.

Nous sommes ainsi conduits à trois intégrales premières que nous allons, avec Cauchy, mettre sous une forme plus suggestive. Posons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial x_o} &= (a, b, c), \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial y_o} = (a', b', c'), \\ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial z_o} &= (a'', b'', c''), \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

et revenons, pour les dérivées de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , aux variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; autrement dit, remplaçons par

exemple  $\frac{\partial u}{\partial x_0}$  par  $\frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{\partial u}{\partial y} b + \frac{\partial u}{\partial z} c$ , etc.

La quantité écrite plus haut entre parenthèses devient

$$\begin{aligned} & a' \left( \frac{\partial u}{\partial x} a'' + \frac{\partial u}{\partial y} b'' + \frac{\partial u}{\partial z} c'' \right) \\ & - a'' \left( \frac{\partial u}{\partial x} a' + \frac{\partial u}{\partial y} b' + \frac{\partial u}{\partial z} c' \right) \\ & + b' \left( \frac{\partial v}{\partial x} a'' + \frac{\partial v}{\partial y} b'' + \frac{\partial v}{\partial z} c'' \right) \\ & - b'' \left( \frac{\partial v}{\partial x} a' + \frac{\partial v}{\partial y} b' + \frac{\partial v}{\partial z} c' \right) \\ & + c' \left( \frac{\partial w}{\partial x} a'' + \frac{\partial w}{\partial y} b'' + \frac{\partial w}{\partial z} c'' \right) \\ & - c'' \left( \frac{\partial w}{\partial x} a' + \frac{\partial w}{\partial y} b' + \frac{\partial w}{\partial z} c' \right). \end{aligned}$$

Si l'on groupe les termes semblables, les binômes  $2\xi$ ,  $2\gamma$ ,  $2\zeta$  se trouvent mis en évidence, et leurs coefficients ne sont autres que les mineurs du jacobien  $D$ . Comme, pour  $t=0$ , les éléments  $a$ ,  $b'$ ,  $c''$  de ce déterminant sont égaux à l'unité, tandis que les autres sont nuls, la valeur constante de la quantité envisagée se réduit à la valeur initiale  $2\xi_0$  de  $2\xi$ .

On obtient de la sorte le système de trois équations :

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial D}{\partial(a, a', a'')} + \eta \frac{\partial D}{\partial(b, b', b'')} \\ + \zeta \frac{\partial D}{\partial(c, c', c'')} = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0). \end{aligned}$$

Résolvons ce système par rapport à  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} D(\xi, \eta, \zeta) = \xi_0 \frac{\partial(x, y, z)}{\partial x_0} + \eta_0 \frac{\partial(x, y, z)}{\partial y_0} \\ + \zeta_0 \frac{\partial(x, y, z)}{\partial z_0}. \end{aligned}$$

Le déterminant  $D$  a d'ailleurs une signification physique. En effet, des relations

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z}, \dots$$

on déduit :

$$D \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial a} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial D}{\partial a'} \frac{\partial}{\partial y_0} + \frac{\partial D}{\partial a''} \frac{\partial}{\partial z_0}.$$

Appliquons ces formules respectivement à  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , et ajoutons-les en notant que, par exemple,

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{du}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial x_0} \right) = \frac{da}{dt};$$

il vient :

$$D \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \sum \frac{\partial D}{\partial a} \frac{da}{dt} = \frac{dD}{dt}.$$

Mais comme d'autre part on a, en vertu de l'équation de continuité :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0,$$

la relation obtenue peut s'écrire :

$$D \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dD}{dt} = 0, \text{ ou } \frac{d(\rho D)}{dt} = 0.$$

Si  $\rho_0$  est la densité initiale de la particule, comme au début  $D = 1$ , nous aurons :  $\rho D = \rho_0$ .

Pour un fluide incompressible,  $D$  sera constamment égal à l'unité.

D'après cela,  $D$  ne sera jamais ni nul ni infini, et les binômes  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  prennent la forme

$$(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\rho}{\rho_0} \left\{ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial x_0} \xi_0 + \frac{\partial(x, y, z)}{\partial y_0} \eta_0 + \frac{\partial(x, y, z)}{\partial z_0} \zeta_0 \right\}.$$

La conclusion est alors immédiate. — Si, pour certaines valeurs de  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , c'est-à-dire si, autour d'une certaine molécule à un moment donné,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  sont nuls, on aura, en prenant ce moment pour origine du temps,  $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ , et les équations précédentes montrent qu'à toute époque on aura  $\xi = \eta = \zeta = 0$ , ce qui démontre le théorème de Lagrange.

**3. Propriétés fondamentales des tourbillons d'Helmholtz.** — Les équations obtenues par Cauchy ont reçu d'H. von Helmholtz<sup>1</sup> une interprétation physique élégante, qui constitue la *théorie des tourbillons*, en usant du mot tourbillon dans un sens qui sera spécial au présent paragraphe.

Helmholtz nomme *tourbillon* au point  $(x, y, z)$  le

<sup>1</sup> H. HELMHOLTZ, p. 112-114, 118.

vecteur qui a ce point pour origine et  $(\xi, \eta, \zeta)$  pour composantes.

Toute ligne qui, en chacun de ses points, à un instant donné  $t$ , est tangente au vecteur-tourbillon de ce point, est dite *ligne-tourbillon*.

Les équations différentielles des lignes-tourbillons à un instant  $t$  sont :  $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}$ .

Considérons deux particules situées à l'instant initial sur une même ligne-tourbillon  $L_o$ , l'une au point  $M(x_o, y_o, z_o)$ , l'autre au point infiniment voisin  $M'_o, (x_o + dx_o, \dots)$ . Soit  $ds_o$  l'arc  $M_oM'_o$ ,  $\omega_o$  la grandeur du vecteur-tourbillon en  $M_o$ . On a évidemment :

$$(\xi_o, \eta_o, \zeta_o) = \frac{\omega_o}{ds_o} (dx_o, dy_o, dz_o),$$

et par suite, à un instant  $t$  quelconque, quand les particules sont venues occuper respectivement les positions  $M(x, y, z)$  et  $M'(x + dx, \dots)$ , on a, d'après le résultat de Cauchy [en désignant par  $ds$  l'arc  $MM'$ ] :

$$\begin{aligned} (\xi, \eta, \zeta) &= \omega_o \frac{\rho ds}{\rho_o ds_o} \left\{ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial x_o} \frac{dx_o}{ds} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial(x, y, z)}{\partial y_o} \frac{dy_o}{ds} + \frac{\partial(x, y, z)}{\partial z_o} \frac{dz_o}{ds} \right\}. \end{aligned}$$

Les trois valeurs de la parenthèse sont les dérivées totales par rapport à  $s$ , à l'instant  $t$ , des fonctions  $x, y, z$ . Donc

$$(\xi, \eta, \zeta) = \omega_o \frac{\rho ds}{\rho_o ds_o} \frac{d(x, y, z)}{ds}.$$

Ces formules expriment que le vecteur-tourbillon au point  $M$ , à l'instant  $t$  quelconque, est porté sur la tangente au point  $M$ , au lieu des molécules qui étaient initialement sur la ligne-tourbillon  $L_0$ . D'où cette interprétation des intégrales de Cauchy :

*Les particules qui, à un instant donné, forment une ligne-tourbillon, continuent à former une ligne-tourbillon pendant toute la durée du mouvement.*

De plus, la valeur du tourbillon à l'instant  $t$  au point  $M$  est  $\omega = \omega_0 \frac{\zeta ds}{\rho_0 ds_0}$ .

On appelle *filet-tourbillon* la surface obtenue en menant, à un instant donné, par les différents points d'une courbe fermée infiniment petite, les lignes-tourbillons.

D'après le résultat précédent, *les molécules qui constituent à un instant donné un filet-tourbillon forment un filet-tourbillon pendant toute la durée du mouvement.*

Par les points  $M_0$ ,  $M'_0$  d'une ligne-tourbillon appartenant, à l'instant initial, à la limite d'un filet-tourbillon, menons les sections droites de ce filet-tourbillon, et soit  $\sigma_0$  l'aire d'une de ces sections infiniment voisines  $[M_0 M'_0 = ds_0]$ ; la masse fluide comprise entre ces sections et le filet a pour valeur  $\rho_0 \sigma_0 ds_0$ . A l'instant  $t$ , les molécules qui constituaient ce volume formeront un autre filet-tourbillon; celles qui étaient en  $M_0$  et  $M'_0$  seront venues en  $M$  et  $M'$ , et celles qui formaient les sections droites occuperont d'autres sections infiniment voisines qui ne seront pas nécessairement des sections droites du nouveau filet: mais la masse comprise entre ces sections aura pour valeur  $\rho \sigma ds$  en appelant  $\sigma$  la section droite

du fillet menée par  $M$  et par  $ds$  l'élément  $MM'$ . La conservation de la masse donnera l'égalité

$$\rho \sigma ds = \rho_0 \sigma_0 ds_0,$$

ou

$$\omega \sigma = \omega_0 \sigma_0,$$

eu égard à la relation établie entre  $\omega$  et  $\omega_0$ . Donc :

*Si l'on considère les particules dont l'ensemble forme une section droite d'un filet-tourbillon, le produit de l'aire qu'elles recouvrent par la grandeur du vecteur-tourbillon qui leur correspond reste constant pendant toute la durée du mouvement.*

On peut établir une propriété analogue pour l'ensemble des sections droites d'un même filet. Considérons en effet, à un instant donné, deux sections droites  $\sigma$  et  $\sigma'$  d'un même filet-tourbillon; soient  $\omega$  et  $\omega'$  les grandeurs correspondantes du tourbillon. Comme les fonctions  $\xi, \eta, \zeta$  de  $x, y, z$  vérifient identiquement la relation

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

l'intégrale  $\int \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) dv$  est nulle pour un volume quelconque, et en particulier pour le tronçon de filet-tourbillon limité par  $\sigma$  et  $\sigma'$ . On a donc pour ce tronçon, d'après la formule d'Ostrogradsky :

$$\oint (\alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta) ds = 0.$$

Sur la surface latérale, la normale est perpendiculaire au tourbillon  $(\xi, \eta, \zeta)$ , et la partie correspondante de l'intégrale est nulle. Sur les bases, le tourbillon est dirigé pour l'une suivant la normale et pour l'autre en

sens inverse, et la relation précédente se réduit simplement à :  $\omega\sigma - \omega'\sigma' = 0$ .

Ainsi, à un instant donné, le produit de l'aire de la section droite d'un filet-tourbillon par la grandeur du tourbillon correspondant  $a$ , tout le long du filet-tourbillon, une valeur constante dite intensité de ce filet.

De là résulte qu'un filet-tourbillon ne peut pas se terminer au milieu du fluide, car en ce point la section droite serait nulle et par suite le tourbillon infini, ce qui est impossible d'après les équations de Cauchy. Ainsi tout filet-tourbillon se ferme sur lui-même en forme d'anneau, ou bien va s'ouvrir par deux extrémités à la paroi de la masse fluide.

Les filets-tourbillons donnent lieu à beaucoup d'autres propriétés très élégantes et susceptibles de contrôle expérimental, mais qui n'intéressent pas directement l'hydraulicien : aussi nous bornerons-nous à renvoyer à l'exposé très condensé que M. Marcel Brillouin a donné des recherches relatives à ce sujet<sup>1</sup>.

**4. Mouvements giratoires.** — Lorsque le système fluide et le régime restent symétriques par rapport à un axe  $oz$ , le mouvement est dit *giratoire*.

Soient alors  $U$ ,  $V$ ,  $W$  les composantes de la vitesse d'une particule de position  $M(x, y, z)$ , suivant le prolongement du rayon de rotation  $r$ , suivant la perpendiculaire au plan  $zOM$  dans le sens de croissance du dièdre ( $zOM$ ,  $zox$ ) et suivant  $oz$ .  $U$ ,  $V$ ,  $W$  ne dépendent que de  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , de  $z$  et de  $t$ . De plus,

$$u = U \frac{x}{r} - V \frac{y}{r}, \quad v = U \frac{y}{r} + V \frac{x}{r}, \quad w = W.$$

<sup>1</sup> M. BRILLOUIN, 4.

Calculons les projections  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$  du tourbillon en  $M$  sur les directions des vitesses  $U$ ,  $V$ ,  $W$ . Elles sont fonctions de  $r$ ,  $z$ ,  $t$  par hypothèse. Il est donc loisible d'admettre, pour ce calcul, qu'à l'instant actuel le plan  $zox$  passe par  $M$  : les composantes cherchées ont alors pour valeurs celles de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , où l'on fera  $x=r$  et  $y=0$ . Il vient de suite, en partant des équations de définition de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , en calculant les dérivées de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  d'après les formules de transformation ci-dessus, puis en faisant  $x=r$ ,  $y=0$ :

$$\begin{aligned} {}^2\Xi &= -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad {}^2H = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial r}, \\ {}^2Z &= \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(Vr)}{\partial t}. \end{aligned}$$

A l'instant actuel  $t$ , l'élément de ligne-tourbillon issu du point  $M$  satisfait à l'équation :

$$\frac{dr}{\Xi} = \frac{dz}{Z} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial(Vr)}{\partial r} dr + \frac{\partial(Vr)}{\partial z} dz = 0.$$

Cette équation exprime que, à l'instant quelconque considéré, le produit  $Vr$  a la même valeur tout le long d'un filet-tourbillon.

Le mouvement giratoire est à tourbillon nul en chaque point s'il vérifie les conditions

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad \frac{\partial(Vr)}{\partial r} = 0,$$

$$\text{soit : } V = \frac{C}{r}, \quad U = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad W = \frac{\partial f}{\partial z},$$

$C$  ne dépendant ni de  $r$ , ni de  $z$ , et  $f$  étant une fonction arbitraire de  $r$ ,  $z$ ,  $t$ . En particulier, si le mou-

vement est permanent, C est une constante absolue et  $f$  dépend seulement de  $r$  et de  $z$ .

On rencontre de tels mouvements tournants autour d'un axe de symétrie vertical dans le « cas d'un fluide pesant qui s'écoule hors d'un réservoir par un orifice inférieur, sous des charges assez peu considérables pour que la surface libre devienne au-dessus de l'orifice sensiblement concave, et pourvu qu'il y ait en même temps, soit dans les circonstances initiales, soit plutôt dans la disposition de l'orifice et des parois du vase, quelque cause de dissymétrie tendant à produire une rotation de la masse autour d'un axe vertical. Alors le liquide environnant, affluent dans les parties plus profondes de cette concavité, acquiert par sa chute une vitesse très supérieure à la vitesse même d'écoulement vers l'orifice dont sont animées les couches fluides sur lesquelles il glisse ; par suite, la plus grande partie de sa vitesse est forcément horizontale, et le mouvement devient, dans chaque creux de la surface libre, à peu près circulaire autour de la verticale menée par son point le plus bas. Toute molécule fluide qui entre dans un pareil mouvement lui appartient depuis l'instant où, arrivant sur son bord, qui est un cercle d'un certain rayon  $r_0$  décrit autour de l'axe, avec une vitesse initiale donnée  $V_0$  tangente à ce bord, elle commence à descendre dans la concavité, jusqu'à celui où, après avoir décrit, en descendant toujours, un certain nombre de spires, elle s'est assez rapprochée de l'axe de la dépression et aussi de l'orifice même pour qu'une partie très notable de sa vitesse soit devenue verticale et qu'elle puisse rapidement s'écouler. Dans ce phénomène, le frottement n'a une grande influence que sur les couches

fluides assez éloignées de l'axe pour subir longtemps son action avant d'arriver à l'orifice. Il ne doit qu'en avoir une négligeable, dans un premier calcul, sur les couches qui se renouvellent fréquemment. Aussi j'admettrai que la vitesse de ces couches puisse se calculer, dès que le régime s'est constitué et est censé devenu permanent, au moyen du principe de Bernoulli<sup>1</sup>. »

Soit  $z$  l'ordonnée verticale d'une particule, comptée positivement vers le bas, à partir du cercle de rayon  $r_0$ , origine de l'entonnoir;  $p_0$  la pression atmosphérique constante;  $V_0$  la vitesse constante avec laquelle les molécules fluides arrivent au bord de l'entonnoir;  $V, p$  la vitesse et la pression en un point quelconque, fonctions de  $z$  et de  $r$ .

Les trajectoires des molécules sont, à fort peu près, des cercles horizontaux, sauf dans le voisinage de l'axe; l'accélération verticale est par suite sensiblement nulle, et l'on a  $\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$ ; de plus, l'accélération horizontale se réduit à la composante centrifuge  $\frac{V^2}{r}$ , et comme on a :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial r} \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial r} \frac{y}{r},$$

les deux premières équations générales donnent :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{V^2}{r}.$$

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 8, p. 616-620.

La condition d'intégrabilité de  $p$  se réduit à ce que  $V$  ne dépende pas de  $z$ .

Il en résulte comme expression générale de  $p$  :

$$p = \rho g z + \rho \int \frac{V^2}{r} dr + \text{Const.}$$

D'autre part, le long de la trajectoire d'une molécule, d'après le principe de Bernoulli,  $p + \rho \frac{V^2}{2} - \rho g z$  reste constant, et par suite  $\frac{V^2}{2} + \int \frac{V^2}{r} dr$  ne dépend pas de  $r$ . Ainsi :

$$V \frac{dV}{dr} + \frac{V^2}{r} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d[Vr]}{dr} = 0.$$

En particulier, pour les molécules de la surface de l'entonnoir, on aura donc :

$$V = \frac{V_0 r_0}{r}.$$

La vitesse linéaire est donc en raison inverse de la distance à l'axe, conformément à la loi indiquée par Léonard de Vinci et vérifiée par Venturi<sup>1</sup>. Autrement dit, la vitesse angulaire d'une molécule varie en raison inverse du carré de sa distance à l'axe.

Ce résultat est attribué au Suédois Swanberg<sup>2</sup>.

Enfin, comme sur toute la surface libre  $p = p_0$ , la

<sup>1</sup> J.-B. VENTURI, 1, 10<sup>e</sup> fragment et observations à la suite; 2, Prop. xi, t. III, 1800, p. 150-153. — L. DI VINCI, 2, manuscrit F, fol. 13, verso; fol. 14, verso.

<sup>2</sup> H. RÉSAL, t. I, p. 200.

cote  $z_1$  du point de la surface libre où la vitesse est  $V$  a pour expression :

$$z_1 = \frac{V^2 - V_o^2}{2g} = \frac{V_o^2 r_o^2}{2g} \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_o^2} \right].$$

Cette équation définit la méridienne de la surface libre.  $\frac{dz_1}{dr}$ , coefficient angulaire de la tangente, croît de  $-\frac{V_o^2}{gr_o}$  à l'infini, quand  $r$  va de  $r_o$  à  $0$ . La surface libre a donc bien, dans la région où nos hypothèses sont valables, la forme d'un entonnoir dont la demi-méridienne est concave vers le bas.

Le mouvement que nous avons considéré est tel qu'on ait :

$$U = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial (Vr)}{\partial r} = 0, \quad \text{ou} \quad \Xi = Z = 0.$$

**5. Mouvements irrotationnels ; équations générales.** — Si l'on se reporte à ce que nous avons dit de la déformation infiniment petite d'un milieu, on reconnaîtra que, dans le déplacement d'une particule qu'il faut joindre à sa déformation pure pour passer d'un état de cette particule à l'état consécutif,  $\xi, \eta, \zeta$  représentent la rotation instantanée. Pour rappeler ce fait, les mouvements où  $\xi, \eta, \zeta$  sont partout nuls sont dits *irrotationnels*.

D'après le théorème établi au § 2, il suffit que, pour chaque particule,  $\xi, \eta, \zeta$  soient nuls un instant pour qu'ils le soient constamment. En particulier, il suffit que chaque particule soit en repos un instant, comme il arrive, lors de la propagation d'ondes ou de

remous, avant que le mouvement ait envahi les parties considérées, pour que les fonctions  $\xi, \eta, \zeta$  soient nulles à ce moment, et par suite toujours.

Comme on a alors :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$\varphi$  étant une certaine fonction de  $x, y, z, t$ , l'étude du régime du fluide est ramenée à la recherche des fonctions  $\varphi$  et  $p$ .

La fonction  $\varphi$ , nous l'avons dit, considérée comme fonction de  $x, y, z$ , vérifie l'équation :

$$\Delta \varphi = 0.$$

D'autre part, comme on a :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x},$$

on peut écrire  $u'$  sous la forme :

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x},$$

ou encore :

$$u' = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right].$$

Si l'on suppose le fluide incompressible, en sorte que  $\rho$  soit constant, et si l'on pose :

$$\Delta_i^2 \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2,$$

les équations du mouvement peuvent donc s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial(x, y, z)} \left[ \frac{p}{\rho} - F + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta_i^2 \varphi \right] = 0.$$

Il suit de là que la quantité entre parenthèses est une fonction de  $t$  seulement, soit  $f(t)$ . Ainsi :

$$\frac{p}{\rho} = F(x, y, z) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$
$$-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + f(t),$$

$f(t)$  étant arbitraire.

Il faudra, dans chaque problème, trouver les fonctions  $\varphi$  et  $p$  vérifiant ces équations et remplissant les conditions initiales et les conditions aux limites.

## CHAPITRE II

### HOULE DE MER. CLAPOTIS

1. **Houle cylindrique régulière ; définition ; lois de F. von Gerstner.** — L'action du vent sur la mer se traduit à la vue par une forme ondulatoire, plus ou moins régulière, de la surface, dont les ondulations se nomment *vagues* ou *lames*. Si le vent vient à cesser, laissant l'eau à la seule influence de la pesanteur et de ses forces d'inertie, les ondulations persistent en prenant une forme très régulière et très simple : elles constituent alors la *houle*.

Lorsque la direction et la vitesse générales du vent ont été sensiblement constantes pendant un temps assez long et que le vent a soufflé sur une région très étendue, la houle subséquente a la forme d'une surface cylindrique à génératrices horizontales et à section droite ondulée mobile.

L'observation montre que toute section droite se propage dans son plan, horizontalement et d'un mouvement uniforme, dont la vitesse est dite la *célérité* de la houle.

Cette *houle cylindrique* est dite *régulière* si les ondu-

lations successives à un instant donné quelconque sont toutes pareilles et si la forme de chacune reste invariable dans sa propagation.

L'étude du phénomène que nous venons de décrire a donné lieu à des recherches théoriques et expérimentales très nombreuses, dont l'historique a été fait par Barré de Saint-Venant<sup>1</sup>. Parmi les savants qui s'en sont occupés, nous citerons seulement Newton, D. Bernoulli, Laplace, Lagrange, Cauchy, Poisson, Gerstner surtout, les frères Weber (de Halle), le colonel du génie Emy, les ingénieurs de la marine Reech, Bertin, de Benazé, et enfin M. Boussinesq.

Le fait fondamental caractéristique de la houle est que la propagation du profil n'est pas corrélative d'une translation générale de la masse fluide. Dès le xv<sup>e</sup> siècle, Léonard de Vinci l'avait observé : « La vitesse de propagation des ondulations, disait-il, excède toujours considérablement celle que possède leur eau, car leur eau le plus souvent ne change pas de lieu ; de même que le blé d'un champ, tout en restant fixé à la terre, offre, sous l'impulsion du vent, la forme de vagues courant à travers la campagne<sup>2</sup>. »

En réalité, dans la propagation de la houle, une particule quelconque de la surface libre reste constamment sur cette surface et décrit seulement une trajectoire fermée autour d'un point fixe de l'espace (ce qu'on exprime en disant qu'elle possède un *mouvement orbital*); toute particule intérieure à la masse possède de même un mouvement orbital. De nombreuses

<sup>1</sup> B. DE SAINT-VENANT, 1, § 1 : *Historique succinct des recherches sur les ondes*.

<sup>2</sup> L. DI VINCI, 1, liv. III, ch. xxxvi.

expériences de laboratoire et des observations à la mer, dues aux frères Weber (1821), au colonel Emy (1831), à A. de Caligny (1868) et à bien d'autres, mettent ce point hors de contestation.

L'ingénieur *Franz von Gerstner*, professeur à l'Université de Prague, avait été amené à ce résultat en 1804 par des vues théoriques développées dans un écrit<sup>1</sup> d'une forme assez élémentaire, resté inapprecié, et même tout à fait inconnu en France jusqu'en 1869 : à la vérité, dit M. Boussinesq<sup>2</sup>, « l'auteur fonde ses raisonnements et calculs sur une base fausse telle qu'il l'énonce, mais juste dans sa pensée, et qui revient à supposer rendues immobiles la surface houleuse et les autres surfaces d'égale pression, en communiquant à toute la masse fluide une vitesse égale et contraire à celle du transport apparent des vagues, en sorte que les molécules de l'eau ne font plus que glisser sur ces surfaces et entre elles. »

Quoi qu'il en soit, F. von Gerstner est arrivé, pour une masse d'eau dont il n'exprime pas suffisamment que la profondeur doit être supposée infinie, à énoncer et démontrer les résultats suivants :

1° Les molécules fluides décrivent toutes, dans des plans de section droite de la houle, des orbites circulaires, d'un mouvement continu et uniforme dans une même période  $2T$ , synchroniquement pour toutes les molécules qui ont le centre de leur orbite sur une même verticale, et avec des vitesses dirigées, au sommet des orbites, suivant le sens du transport apparent

<sup>1</sup> *F. von GERSTNER*, p. 31-86 (trad.). — Ce mémoire avait été lu à Prague en 1801.

<sup>2</sup> *J. BOUSSINESQ*, 4, p. 577.

de la surface libre, laquelle est dès lors trochoïdale.

2° Les rayons de ces orbites décroissent avec la profondeur  $z$  de leur centre, comme l'exponentielle  $e^{-\frac{\pi z}{L}}$ , où  $L$  désigne la demi-longueur d'une vague (de tête en creux).

3° La demi-période  $T$  est reliée à la demi-longueur de vague  $L$  par la formule

$$T = \sqrt{\pi \frac{L}{g}}.$$

4° Chaque particule reste soumise pendant le mouvement à la pression qu'elle éprouvait dans l'état primitif de repos de tout le fluide.

En 1869, M. Boussinesq<sup>1</sup>, qui ignorait alors le travail de Gerstner, établit la théorie de la houle régulière en supposant seulement que les composantes du déplacement de chaque molécule, à partir de sa position moyenne ou d'équilibre, sont proportionnelles au sinus ou au cosinus d'une fonction linéaire du temps : parmi bien d'autres résultats sur lesquels nous aurons à revenir, l'auteur retrouve les lois de Gerstner.

Presque simultanément, Bertin<sup>2</sup> aboutissait aussi à ces lois en partant de la supposition très vraisemblable, qu'il y a, à toutes profondeurs, coïncidence complète entre les surfaces d'onde (ou lieux géométriques des positions, à un instant donné, de toutes les molécules situées antérieurement sur des plans horizontaux) et les surfaces de niveau (ou lieux des positions en lesquelles, au même instant, la pression a la même valeur).

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 4.

<sup>2</sup> E.-L. BERTIN, 1, 2, p. 150-166.

Bientôt après, B. de Saint-Venant<sup>1</sup> exposa la même théorie en suivant une méthode qui fut reproduite par M. Flamant<sup>2</sup> et par les professeurs de l'École du génie maritime<sup>3</sup>. A l'inverse de ce que faisait Gerstner, il attribue arbitrairement aux molécules liquides des orbites circulaires et un mouvement uniforme sur cette orbite, forme et loi de mouvement pouvant conduire pour la surface libre à une forme régulièrement ondulée et à propagation uniforme dans son plan ; puis il vérifie qu'un tel mouvement de la masse fluide peut satisfaire aux équations générales du mouvement des fluides sans frottement, et aux conditions aux limites (pression constante à la surface libre et vitesse verticale nulle au fond).

Ces diverses théories fournissent bien un mouvement satisfaisant à toutes les conditions du problème. Ce mouvement est-il le seul admissible ? Les précédentes analyses montrent simplement qu'il est *possible*, mais non qu'il est *nécessaire*. B. de Saint-Venant et ses continuateurs ne croyaient pas à sa nécessité : ils étaient convaincus que d'autres formes de houle étaient également possibles, comme il y en a effectivement pour les petites profondeurs.

C'est en 1895 que M. Boussinesq<sup>4</sup> a dissipé ce doute et a démontré que *toute houle régulière à mouvements évanouissants aux grandes profondeurs est régie par les lois de Gerstner*. Sa belle démonstration est une théorie complète du phénomène qui nous occupe.

<sup>1</sup> B. DE SAINT-VENANT, 2.

<sup>2</sup> A. FLAMANT, 1, p. 774-809.

<sup>3</sup> Par exemple : J. POLLARD et A. DUDEBOUT, tome II, ch. XLII.

<sup>4</sup> J. BOUSSINESQ, 17.

**2. Théorie de la houle : équations générales.** — Nous définirons la *houle cylindrique simple* comme « un mouvement périodique d'un liquide pesant dans lequel toutes les particules fluides décrivent indéfiniment des orbites fermées, comprises dans des plans verticaux parallèles, et où, sur chaque surface horizontale, les mêmes circonstances (vitesses et pressions) se reproduisent successivement, à toutes les distances d'un plan vertical perpendiculaire aux plans des orbites, au bout de temps proportionnels à ces distances ».

L'axe  $oz$  étant dirigé suivant la verticale descendante et le plan  $zox$  étant parallèle aux plans des orbites, soit  $\omega$  la vitesse de propagation du mouvement suivant l'axe  $ox$  (*célérité de la houle*). Toutes les molécules situées sur une parallèle à  $oy$  participant à un même mouvement parallèle au plan  $zox$ , on aura partout et toujours  $v=0$ .

En deux points  $M$  et  $M'$  de même cote  $z$  et tels que  $MM' = \omega\tau$ , les mêmes circonstances se produisent aux instants  $t$  et  $t + \tau$ . Si l'on prend pour variables caractérisant la molécule passant par  $M$  à l'instant  $t$  les quantités  $x - \omega t$ ,  $z$  et  $t$ , la vitesse et la pression prendront les mêmes valeurs si on remplace  $x$  par  $x + \omega\tau$  et  $t$  par  $t + \tau$ , c'est-à-dire si on remplace  $x - \omega t$ ,  $z$  et  $t$  par  $x - \omega t$ ,  $z$  et  $t + \tau$ , et cela quel que soit  $\tau$ . Vitesse et pression ne dépendent donc pas explicitement de  $t$ , et ne sont fonctions que de  $x - \omega t$  et de  $z$ .

Si l'on suit alors deux molécules placées respectivement en  $M$  et en  $M'$ , l'une à partir de l'instant  $t$ , l'autre à partir de l'instant  $t + \tau$ , elles décriront des trajectoires identiques, dont l'une se déduit de l'autre

par une translation de direction  $ox$  et de mesure  $\omega\tau$ .

Soit  $(a, c)$  la situation moyenne de la première molécule décrivant sa trajectoire fermée ;  $(a + \omega\tau, c)$  sera celle de la seconde molécule.

Posons :  $x = a + \xi$ ,  $z = c + \zeta$ . Les écarts  $\xi$  et  $\zeta$  sont des fonctions de  $a$ ,  $c$  et du temps  $t$ , ou encore, si l'on veut, de  $a - \omega t$ ,  $c$  et  $t$ . Les fonctions  $\xi$  et  $\zeta$  ne changent pas quand on remplace  $a$  par  $a + \omega\tau$ , et  $t$  par  $t + \tau$ , c'est-à-dire  $a - \omega t$ ,  $c$  et  $t$  par  $a - \omega t$ ,  $c$  et  $t + \tau$ , et cela pour toute valeur de  $\tau$ . Donc  $\xi$  et  $\zeta$  ne dépendent que de  $a - \omega t$  et  $c$ . Il en résulte que  $u$ ,  $w$ ,  $p$ , qui ne dépendent que de  $x - \omega t$  et de  $z$ , soit de  $a - \omega t + \xi$  et  $c + \zeta$ , ne dépendent aussi que de  $a - \omega t$  et de  $c$ .

En tous les points de la surface libre, la pression a une valeur constante donnée  $p_a$  [nulle, si l'on veut]. Si l'on regarde  $p$  comme fonction de  $a - \omega t$  et de  $c$ , la relation  $p = p_a$  définit, à tout instant, le lieu des positions moyennes des molécules formant à cet instant la surface libre : cette équation détermine  $c$  comme fonction de  $(a - \omega t)$ . Si l'on regarde  $p$  comme fonction de  $x - \omega t$  et de  $z$ , l'équation  $p = p_a$  définit à tout instant la forme de la surface libre, surface cylindrique à génératrices parallèles à  $oy$ , de forme constante, animée de la vitesse  $\omega$  de translation apparente parallèle à  $ox$ . Cette équation définit le  $z$  de la surface libre,  $z$  que nous désignerons par  $-h$ ,  $h$  étant la hauteur de la surface libre au-dessus du plan horizontal de repère  $z = 0$ .  $h$  sera une fonction de  $x - \omega t$ , ou encore de  $a - \omega t + \xi$ , ou enfin de  $a - \omega t$ ,  $\xi$  dépendant de  $a - \omega t$  et de  $c$ , et  $c$  étant fonction de  $a - \omega t$ .

Cela posé, écrivons les équations indéfinies de l'hydro-

dynamique en prenant pour variables  $a$  et  $c$ . Ces équations se réduisent à :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial(a + \xi)} = -u', \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial(c + \zeta)} = g - w',$$

et l'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial u}{\partial(a + \xi)} + \frac{\partial w}{\partial(c + \zeta)} = 0.$$

Or une simple dérivation donne, pour une fonction quelconque :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial(a + \xi)} \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial(c + \zeta)} \frac{\partial \zeta}{\partial a}, \\ \frac{\partial}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial(a + \xi)} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial(c + \zeta)} \left( 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \right).\end{aligned}$$

Si donc on pose :

$$D = \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \right) \left( 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \right) - \frac{\partial \xi}{\partial c} \frac{\partial \zeta}{\partial a},$$

on a en particulier :

$$\begin{aligned}D \frac{\partial u}{\partial(a + \xi)} &= \frac{\partial u}{\partial a} \left( 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \right) - \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial \zeta}{\partial a}, \\ D \frac{\partial w}{\partial(c + \zeta)} &= - \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial \xi}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial c} \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \right),\end{aligned}$$

et si l'on note que  $u = \frac{d\xi}{dt}$ ,  $w = \frac{d\zeta}{dt}$ , l'équation de continuité s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \xi}{\partial a} \right) \left[ 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \right] + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial c} \right) \left[ 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \right] \\ - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \xi}{\partial c} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial a} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial a} \right) \frac{\partial \xi}{\partial c} = 0,\end{aligned}$$

ou enfin :  $\frac{dD}{dt} = 0$ .

Ainsi l'équation de continuité exprime que  $D$  a, pour chaque molécule de situation moyenne ( $a, c$ ), une valeur invariable; il est loisible de prendre pour cette valeur celle qu'aurait  $D$  si toutes les molécules se plaçaient, hors de leurs orbites, sur les verticales de leurs situations moyennes, en sorte que  $\xi$  s'annule partout, et à des distances  $\zeta_0$  de ces situations moyennes choisies, de manière que la densité garde sa valeur effective.

Dans ces conditions,  $D$  se réduit à  $1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial c}$ , et l'équation de continuité prend la forme :

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \zeta}{\partial c} + \frac{\partial \xi}{\partial a} \frac{\partial \zeta}{\partial c} - \frac{\partial \xi}{\partial c} \frac{\partial \zeta}{\partial a} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial c}. \quad (1)$$

D'autre part, les équations indéfinies du mouvement s'écrivent :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} = -u' \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \right) + (g - w') \frac{\partial \zeta}{\partial a},$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c} = -u' \frac{\partial \xi}{\partial c} + (g - w') \left( 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \right),$$

ou encore, en notant que  $u' = \frac{d^2 \xi}{dt^2}$ ,  $w' = \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(a, c)} \left[ -\frac{p}{\rho} + g(c + \zeta) \right] &= \frac{d^2(\xi, \zeta)}{dt^2} \\ &+ \frac{d^2 \xi}{dt^2} \frac{\partial \xi}{\partial(a, c)} + \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \frac{\partial \zeta}{\partial(a, c)}. \end{aligned} \quad (2)$$

### 3. Équations de première approximation; leur intégration. — Aux trois équations indéfinies

exactes (1) et (2), nous allons substituer des équations de première approximation, valables pour les mouvements de faible amplitude où les carrés et produits des écarts  $\xi$ ,  $\zeta$  et de leurs dérivées peuvent être négligés.

$$\text{Posons : } \Psi = -\frac{p}{\varphi} + g(c + \zeta); \quad (3)$$

les équations (2) se réduisent à

$$\frac{d(u, w)}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial(a, c)}. \quad (2^{\text{bis}})$$

Multiplions ces équations par  $dt$  et intégrons à partir d'un instant  $t_0$  identique pour tout le fluide; si  $(u_0, w_0)$  est la vitesse de la molécule de position moyenne  $(a, c)$  à cet instant, il vient :

$$(u - u_0, w - w_0) = \frac{\partial}{\partial(a, c)} \int_{t_0}^t \Psi dt.$$

Prenons la valeur moyenne de chaque membre entre les instants  $t_0$  et  $t_0 + 2T$ ,  $2T$  désignant la durée d'une période, et retranchons-la du même membre. En égard à ce que les valeurs moyennes de  $\xi$  et  $\zeta$  sont constamment nulles, les valeurs moyennes de  $u$  et  $v$  le seront aussi. Si donc on pose :

$$\varphi = \int_{t_0}^t \Psi dt - \int_{t_0}^{t_0 + 2T} \frac{dt}{2T} \int_{t_0}^t \Psi dt, \quad (4)$$

on aura les relations :

$$(u, w) = \frac{\partial \varphi}{\partial(a, c)}, \quad (5)$$

qui expriment l'*existence*, à l'approximation admise, d'un potentiel  $\varphi$  des vitesses dans une eau houleuse.

Ces équations (5) s'écrivent :

$$\frac{d(\xi, \zeta)}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial(a, c)}, \quad (5^{bis})$$

et sont du même type que les équations (2<sup>bis</sup>). Soumettons-les au même traitement que nous avons fait subir à celles-ci. En posant :

$$\Phi = \int_{t_0}^t \varphi dt - \int_{t_0}^{t_0 + 2T} \frac{dt}{2T} \int_{t_0}^t \varphi dt, \quad (6)$$

il viendra :

$$(\xi, \zeta) = \frac{\partial \Phi}{\partial(a, c)}. \quad (7)$$

Ainsi les composantes  $\xi, \zeta$  du déplacement de la molécule de situation moyenne  $(a, c)$  sont les dérivées partielles, par rapport à  $a, c$ , d'une même fonction  $\Phi$  : nous exprimerons ce fait en disant qu'elles dérivent d'un *potentiel des déplacements*  $\Phi$ .

Quant à l'équation de continuité, réduite à ses termes du premier ordre :

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \zeta}{\partial c} = \frac{\partial \zeta_{t_0}}{\partial c},$$

elle donne par dérivation relativement à  $t$  :

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial c} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c^2} = \Delta \varphi = 0.$$

Pour former l'expression des conditions aux limites, notons que les équations de définition (4) et (6) entraînent :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Psi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \dot{\varphi}.$$

et que, par suite, l'équation (3) donne :

$$\frac{P}{\rho g} = c + \zeta - \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c + \frac{\partial \Phi}{\partial c} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

Cela étant, à la surface libre, où

$$p = 0 \quad \text{et} \quad c + \zeta = -h,$$

cette équation et celle qui s'en déduit par dérivation relativement à  $t$ , donneront :

$$h = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial c} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (8)$$

D'autre part, aux très grandes profondeurs, le mouvement est supposé évanouissant :  $\frac{\partial p}{\partial a}$  tend vers zéro et  $p$  tend à devenir indépendant de  $a$  et par suite de  $a = \omega t$ , soit de  $t$ ; donc  $\Psi$  défini par (3) tend vers une constante, qu'il est loisible de supposer nulle, moyennant un choix convenable du plan  $xoy$  dont le niveau a été laissé indéterminé. Ainsi, pour  $c = \infty$ , on a  $\Psi = 0$ .

Par suite aussi, eu égard aux expressions (4) et (6) de  $\varphi$  et de  $\Phi$ , pour  $c = \infty$ ,  $\varphi$  et  $\Phi$  s'annulent asymptotiquement.

Pour intégrer les équations de première approximation établies, envisageons l'expression

$$\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial c} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

A la surface libre, nous venons de voir que l'on a  $\tau = 0$ , d'après l'équation (3). Au fond, on a de même  $\tau = 0$ . Nous allons maintenant montrer que l'on a  $\tau = 0$  dans toute la masse liquide.

Comme  $\tau$  est formé linéairement avec les dérivées de  $\varphi$  et que l'on a dans toute la masse  $\Delta\varphi = 0$ , on y aura aussi :  $\Delta\tau = 0$ .

De plus, la fonction  $\tau$  et ses dérivées, admettant, comme  $\varphi$ , la période  $2T$  quant au temps et ne dépendant du temps que par l'argument  $a - \omega t$ , admettront par rapport à l'abscisse  $a$  la période  $2L = 2\omega T$  [dite *longueur de vague*].

Considérons alors la masse fluide de profondeur infinie, dont les molécules auraient leur situation moyenne comprise entre la surface libre, deux plans d'abscisses  $a_0$  et  $a_0 + 2L$  et deux plans d'ordonnées  $b_0$  et  $b_0 + 1$ ; étendons à tous les éléments de volume  $dv$  de cette masse l'intégrale

$$\int \tau \cdot \Delta\tau \cdot dv.$$

L'intégration pour un filet parallèle à  $oy$  est immédiate, et l'on est conduit à calculer

$$\int \tau \cdot \Delta\tau \cdot d\sigma$$

pour tous les éléments du rectangle

$$\sigma(a_0, a_0 + 2L; -h, +\infty),$$

de contour  $\gamma$ .

Or, d'une manière générale, la formule de Riemann donne (en y supposant  $\Psi = \varphi = \tau$ ,  $y = a$ ,  $z = c$ ) :

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma} \tau \cdot \Delta\tau \cdot d\sigma + \int_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial \tau}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau}{\partial c} \right)^2 \right] d\sigma \\ &= \int_{\gamma} \frac{d\tau}{dn} d\gamma. \end{aligned}$$

La première intégrale est nulle, puisque dans toute

la masse  $\Delta\tau = 0$ . Je dis que la dernière est également nulle.

En effet, d'une part, à la surface libre comme au fond, on a  $\tau = 0$ .

D'autre part, en deux points de même cote  $c$  et d'abscisses différent de  $2L$ ,  $\tau$  et sa dérivée par rapport à  $a$  reprennent la même valeur; comme les dérivées normales  $\frac{d\tau}{dn}$  en deux tels points du contour  $\gamma$  sont prises suivant l'axe  $ox$ , dans des sens opposés, leurs valeurs associées sont égales et de signes contraires; les éléments correspondants de l'intégrale curviligne  $\int_{\gamma} \tau \frac{d\tau}{dn} d\gamma$  se détruisent. Cette intégrale est par suite nulle.

Il reste donc :

$$\int_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial \tau}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau}{\partial c} \right)^2 \right] d\sigma = 0,$$

ce qui exige que l'on ait, dans toute la masse envisagée :  $\frac{\partial \tau}{\partial a} = 0$ ,  $\frac{\partial \tau}{\partial c} = 0$ ;

$\tau$  sera donc une constante, et vaudra zéro, valeur qu'elle prend à la surface libre; sa périodicité entraîne sa nullité dans toute l'étendue du liquide.

D'après cela, on a, quel que soit  $c$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Comme  $\varphi$  dépend du temps par l'argument  $a - \omega t$ ,

$$\text{on a : } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2};$$

si donc on note que  $\Delta\varphi = 0$ , l'équation précédente

$$\text{secrira : } \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial c} + \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c^2} = 0.$$

Elle est intégrable : elle exprime que, tout le long d'une verticale quelconque, l'expression  $\dot{\varphi} + \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial c}$  conserve la même valeur, qui d'ailleurs est zéro au fond. On a donc :

$$\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial c} + \frac{g}{\omega^2} \dot{\varphi} = 0.$$

On en déduit par une intégration immédiate :

$$\dot{\varphi} = e^{-\frac{gc}{\omega^2}} F(a - \omega t),$$

$F$  désignant une fonction arbitraire de  $a - \omega t$ .

Comme cette fonction  $F$  doit être telle que l'on ait  $\Delta\varphi = 0$ , il vient, pour la déterminer, l'équation différentielle

$$F'' + \frac{g^2}{\omega^4} F = 0,$$

dont l'intégration donne de suite :

$$F = C \sin \left[ \frac{g}{\omega^2} (a - \omega t) + k \right].$$

Par un choix convenable de l'origine des abscisses ou de celle des temps, il nous sera loisible de supposer  $k = 0$ . Dès lors le *potentiel des vitesses est* :

$$\dot{\varphi} = Ce^{-\frac{gc}{\omega^2}} \sin \frac{g}{\omega^2} (a - \omega t),$$

et une intégration par rapport à  $t$  donne l'expression du potentiel des déplacements :

$$\Phi = \frac{C\omega}{g} e^{-\frac{gc}{\omega^2}} \cos \frac{g}{\omega^2} (a - \omega t).$$

La période par rapport au temps étant  $2T$  et celle relative à l'abscisse étant  $2L$ , on a :  $\frac{gT}{\omega} = \pi$ ,  $\frac{gL}{\omega^2} = \pi$  ;

$$\text{d'où } \omega^2 = \frac{gL}{\pi}, \quad \text{et} \quad T = \sqrt{\frac{\pi L}{g}} = 0,5658 \sqrt{L}.$$

D'après cela, les coordonnées *actuelles* d'une molécule ont pour expressions :

$$x = a - \frac{C}{\omega} e^{-\frac{\pi c}{L}} \sin \pi \left( \frac{a}{L} - \frac{t}{T} \right),$$

$$z = c - \frac{C}{\omega} e^{-\frac{\pi c}{L}} \cos \pi \left( \frac{a}{L} - \frac{t}{T} \right).$$

La *trajectoire* de cette molécule est donc le cercle

$$(x - a)^2 + (z - c)^2 = \frac{C^2}{\omega^2} e^{-\frac{2\pi c}{L}},$$

de centre  $(a, c)$  et de rayon

$$r = \frac{C}{\omega} e^{-\frac{\pi c}{L}}.$$

La loi de décroissance de ce rayon quand  $c$  augmente est dite *loi de la profondeur*. La décroissance est très rapide ; ainsi on a :

pour	$\frac{c}{L} = 0,1 \dots 0,5 \dots 1 \dots 1,5 \dots 2 \dots 3$
	$e^{-\frac{\pi c}{L}} = 0,730 \dots 0,208 \dots 0,043 \dots 0,009 \dots 0,018 \dots 0,00008.$

Tous les cercles décrits par les molécules dont les situations moyennes sont sur une même verticale sont décrits dans le même sens avec la même vitesse angulaire  $\frac{\pi}{T}$ : le passage au point le plus haut de chaque orbite a lieu au même instant et la vitesse y a le sens du transport apparent de la houle.

Ce sont les lois mêmes de Franz von Gerstner.

Comme on vérifie de suite que l'on a :

$$\zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial c} = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

la formule  $\frac{p}{\rho g} = c + \zeta - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}$   
donne  $p = \rho g c.$

Ainsi toute molécule est soumise durant tout son mouvement à une pression constante égale à celle qu'elle subirait à l'état statique, si, dans cet état, elle occupait sa position moyenne.

La surface libre est alors définie par la condition  $c=0$ ; ses équations paramétriques sont :

$$x = a - \frac{C}{\omega} \sin \pi \left( \frac{a}{L} - \frac{t}{T} \right),$$

$$z = - \frac{C}{\omega} \cos \pi \left( \frac{a}{L} - \frac{t}{T} \right);$$

elles définissent, à tout instant  $t$  donné, une *trochoïde circulaire*.

**4. Équations de seconde approximation.** — Nous venons de reconnaître la nécessité des lois de Gerstner, à une première approximation. Reprenons

maintenant les équations générales pour y garder, cette fois, les petits termes négligés comme non linéaires. En égard à leur petitesse, nous y remplacerons  $\xi$  et  $\zeta$  par les valeurs de première approximation que nous venons de calculer.

La loi trouvée comme première approximation donne :

$$\frac{d^2(\xi, \zeta)}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{T^2} (\xi, \zeta),$$

en sorte que l'ensemble des deux derniers termes négligés dans les équations générales (2) du § 2 devient :

$$-\frac{\pi^2}{T^2} \left\{ \xi \frac{\partial \zeta}{\partial(a, c)} + \zeta \frac{\partial \xi}{\partial(a, c)} \right\},$$

ou  $-\frac{\partial}{\partial(a, c)} \left\{ \frac{\pi^2(\xi^2 + \zeta^2)}{2T^2} \right\}.$

Si donc nous posons :

$$\Psi_1 = -\frac{p}{\rho} + g(c + \zeta) + \frac{\pi^2(\xi^2 + \zeta^2)}{2T^2}, \quad (3 \text{ bis})$$

les équations (2) deviendront :

$$\frac{d(u, w)}{dt} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial(a, c)}. \quad (2 \text{ ter})$$

Sous cette forme, elles coïncident (à l'indice près de  $\Psi$ ) avec les équations (2 bis) : soumises au même traitement que celles-ci, elles justifieraient l'existence d'un *potentiel des vitesses*  $\varphi_1$  et d'un *potentiel des déplacements*  $\Phi_1$ , les variables étant les *coordonnées moyennes* des molécules.

Comme on aurait :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \Psi_1, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \varphi_1,$$

l'équation (3 bis) donnerait [en ayant égard aux valeurs de première approximation dans l'estimation du terme complémentaire] :

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho g} &= c + \zeta + \frac{\pi^2 C^2}{2g\omega^2 T^2} e^{-\frac{2gc}{\omega^2}} - \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \\ &= c + \frac{\pi^2 C^2}{2g\omega^2 T^2} e^{-\frac{2gc}{\omega^2}} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial c} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

À la surface libre, où  $p = 0$  et  $c + \zeta = -h$ , on a :

$$h = \frac{\pi^2 C^2}{2g\omega^2 T^2} e^{-\frac{2gc}{\omega^2}} - \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}.$$

Dérivons cette relation par rapport à  $t$ ; comme

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial c},$$

il vient :  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial c} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \quad (8 \text{ bis})$

nous retrouvons l'équation (8), à l'indice près de la fonction  $\varphi_1$ .

Aux très grandes profondeurs,  $e^{-\frac{2gc}{\omega^2}}$  est indéfiniment décroissant, et l'on aura encore :

$$\text{pour } c = \infty, \quad \Psi_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \Phi_1 = 0.$$

Passons à l'équation de continuité. Les valeurs de première approximation donnent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial a} \frac{\partial \zeta}{\partial c} - \frac{\partial \xi}{\partial c} \frac{\partial \zeta}{\partial a} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c^2} - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a \partial c} \right)^2 \\ &= - \frac{C^2 g^2}{\omega^6} e^{-\frac{2gc}{\omega^2}}. \end{aligned}$$

L'équation de continuité complétée s'écrit alors :

$$\Delta\Phi_1 = \frac{\partial}{\partial c} \left( \zeta_0 - \frac{C^2 g}{2\omega^4} e^{-\frac{2gc}{\omega^2}} \right).$$

Si l'on dérive cette relation par rapport au temps, il vient encore :

$$\Delta\varphi_1 = 0.$$

Nous sommes ainsi amenés à satisfaire aux mêmes équations indéfinies et aux mêmes équations aux limites que dans le précédent paragraphe. Les calculs effectués subsisteront, et l'on aura :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= C_1 e^{-\frac{gc}{\omega^2}} \sin \frac{g}{\omega^2} (a - \omega t), \\ \Phi_1 &= \frac{C_1 \omega}{g} e^{-\frac{gc}{\omega^2}} \cos \frac{g}{\omega^2} (a - \omega t).\end{aligned}$$

Les conclusions formulées subsisteront : les lois du mouvement seront encore celles de Gestner.

La loi relative à la pression sera seule modifiée. Comme l'expression trouvée pour  $\Phi_1$  entraîne  $\Delta\Phi_1 = 0$ , l'équation de continuité donnera :

$$\frac{\partial}{\partial c} \left( \zeta_0 - \frac{C^2 g}{2\omega^4} e^{-\frac{2gc}{\omega^2}} \right) = 0;$$

la quantité entre parenthèses a donc une valeur constante tout le long d'une verticale ; comme pour  $c = \infty$ , les deux termes en sont nuls ; nous avons :

$$\zeta_0 = \frac{C^2 g}{2\omega^4} e^{-\frac{2gc}{\omega^2}}.$$

D'autre part, on a encore :

$$\zeta = \frac{\partial \Phi_1}{\partial c} = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t},$$

et par suite :

$$p = \rho g \left\{ c + \frac{\pi^2 C^2}{2g\omega^4 T^2} e^{-\frac{2gc}{\omega^2}} \right\} = \rho g \left\{ c + \frac{\pi^2 \omega^2}{g^2 T^2} \zeta_0 \right\}.$$

Comme  $gT = \omega\pi$ , il vient simplement :

$$p = \rho g (c + \zeta_0).$$

Si  $r$  est le rayon d'une trajectoire, vu que

$$r = \frac{C}{\omega} e^{-\frac{gc}{\omega^2}},$$

il viendra :  $\zeta_0 = \frac{g}{2\omega^2} r^2 = \frac{\pi^2}{T^2} r^2 : \frac{2\omega^2 \pi^2}{gT^2} = \frac{V^2}{2g}$ , en appelant  $V$  la vitesse linéaire constante de la molécule décrivant cette trajectoire. Alors  $p = \rho g \left( c + \frac{V^2}{2g} \right)$ .

La molécule subit dans son mouvement une pression constante égale à la pression statique correspondant à la cote de sa situation moyenne augmentée de la hauteur due à sa vitesse linéaire.

Il est aisément de reconnaître que les équations fournies par la seconde approximation :

$$\xi = \frac{C}{\omega} e^{-\frac{\pi c}{L}} \sin \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{L} \right),$$

$$\zeta = -\frac{C}{\omega} e^{-\frac{\pi c}{L}} \cos \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{L} \right),$$

$$p = \rho g \left( c + \frac{C^2}{2\omega^4} e^{-\frac{2\pi c}{L}} \right)$$

vérifient rigoureusement les équations indéfinies (1) et (2) du mouvement, ainsi que les conditions aux limites.

Dès lors, des termes du troisième ordre de petitesse qu'on adjoindrait aux expressions de  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $p$  pour les compléter ne devraient figurer (sauf erreur relative négligeable) que dans les parties linéaires des équations du mouvement, et par suite ils auraient les formes des termes de première approximation : on les joindrait à ceux-ci, et on aurait par suite les mêmes lois que plus haut. Toute approximation ultérieure conduirait à la même conclusion.

Ainsi la houle simple en eau infiniment profonde est nécessairement régie par les lois de Gerstner, — si du moins les déplacements sont assez petits pour qu'on puisse d'abord négliger les carrés et produits de ces déplacements dans les équations du phénomène et appliquer ensuite la méthode des approximations successives.

5. **Houle en profondeur finie.** — Lorsqu'il s'agit de la houle dans une masse d'eau de profondeur finie, la théorie est beaucoup moins avancée. Nous pouvons bien indiquer une solution du problème, mais non pas établir qu'elle est unique.

À la condition que le mouvement soit évanouissant aux grandes profondeurs, nous avons à substituer les conditions :  $\zeta = 0$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$ , pour  $c = H$ , si  $H$  est la côte du plan horizontal qui limite inférieurement la masse fluide.

Par analogie, nous chercherons à satisfaire aux

équations du mouvement et aux conditions aux limites en posant :

$$\xi = M \sin \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{L} \right), \quad \zeta = N \cos \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{L} \right),$$

$M$  et  $N$  étant des fonctions de la cote  $a$  seule. La trajectoire d'une molécule quelconque sera alors une ellipse ayant un axe vertical.

Nous nous bornerons à la première approximation, et nous porterons tout d'abord ces valeurs  $\xi$  et  $\zeta$  dans l'équation de continuité (1) dérivée par rapport au

temps :  $\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = 0.$

Il vient de suite :  $\frac{\partial N}{\partial c} = - \frac{\pi}{L} M. \quad (\alpha)$

D'autre part, comme on a :  $\frac{d^2(\xi, \zeta)}{dt^2} = - \frac{\pi^2}{T^2} (\xi, \zeta),$

les équations générales (2) se réduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial(a,c)} \left\{ - \frac{p}{\rho} + g(c + \zeta) \right\} = - \frac{\pi^2}{T^2} (\xi, \zeta);$$

elles donnent comme condition d'intégrabilité :

$$\frac{\partial \xi}{\partial c} = \frac{\partial \zeta}{\partial a},$$

ou  $\frac{\partial M}{\partial c} = \frac{\pi}{L} N. \quad (\beta)$

Les équations ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ) entraînent :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial c^2} = \frac{\pi^2}{L^2} M,$$

et par suite :

$$M = me^{\frac{\pi c}{L}} + ne^{-\frac{\pi c}{L}}, \quad N = me^{\frac{\pi c}{L}} - ne^{-\frac{\pi c}{L}}.$$

Les conditions relatives au fond se réduisent à :

$$M(H) = 0, \quad \text{ou} \quad me^{\frac{\pi H}{L}} - ne^{-\frac{\pi H}{L}} = 0;$$

$$\text{elles donnent : } m = \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\pi H}{L}}, \quad n = \frac{\lambda}{2} e^{\frac{\pi H}{L}},$$

$\lambda$  étant une constante. Alors :

$$M = \lambda \coshyp \frac{\pi(c-H)}{L}, \quad N = \lambda \sinhyp \frac{\pi(c-H)}{L},$$

et conséquemment :

$$\xi = \lambda \operatorname{ch} \frac{\pi(H-c)}{L} \sin \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{L} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial a},$$

$$\zeta = -\lambda \operatorname{sh} \frac{\pi(H-c)}{L} \cos \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{L} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial c},$$

$$\text{en posant : } \varphi = \frac{\lambda L}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi(H-c)}{L} \cos \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{L} \right).$$

Il existerait donc un *potentiel des déplacements*  $\varphi$ .

L'intégration des équations (2) donne simplement :

$$-\frac{p}{\rho g} + c + \zeta + \frac{\pi^2}{g T^2} \varphi = \text{const.},$$

ou, eu égard aux valeurs trouvées de  $\zeta$  et de  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho g} &= c + \lambda \left[ \operatorname{sh} \frac{\pi(H-c)}{L} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi L}{g T^2} \operatorname{ch} \frac{\pi(H-c)}{L} \right] \cos \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{L} \right) + \text{const.} \end{aligned}$$

A la surface libre, on a  $p=0$ ; d'où, à tout instant  $t$ , une relation entre les coordonnées ( $a, c$ ) des situations moyennes des molécules superficielles. En dérivant par rapport à  $t$  cette relation, nous sommes conduits à :

$$\operatorname{sh} \frac{\pi(H-c)}{L} - \frac{\pi L}{g T^2} \operatorname{ch} \frac{\pi(H-c)}{L} = 0.$$

Il résulte de là que les molécules qui forment la surface libre ont leurs situations moyennes dans un même plan horizontal  $c = \text{const.}$ , et il est loisible de supposer que c'est le plan  $xoy$ . Alors  $c = 0$ . Ainsi,  $H$  étant la distance de ce plan au fond, on a la relation :

$$\operatorname{tgh} \frac{\pi H}{L} = \frac{L\pi}{g T^2}, \quad \text{ou} \quad T = \sqrt{\frac{\pi L}{g} \operatorname{cotgh} \frac{\pi H}{L}}.$$

La surface libre d'équations paramétriques

$$\begin{aligned} x &= a + \lambda \operatorname{ch} \frac{\pi H}{L} \sin \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{L} \right), \\ z &= -\lambda \operatorname{sh} \frac{\pi H}{L} \cos \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{L} \right), \end{aligned}$$

a pour profil une *trochoïde elliptique*.

Pour avoir l'expression de la pression en un point quelconque, nous remplacerons dans la formule générale  $\frac{L\pi}{g T^2}$  par  $\operatorname{tgh} \frac{\pi H}{L}$  et nous noterons que pour  $c=0$ , on a  $p=0$ ; il vient ainsi :

$$\frac{p}{\rho g} = c - \frac{\lambda}{\operatorname{ch} \frac{\pi H}{L}} \operatorname{sh} \frac{\pi c}{L} \cos \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{L} \right).$$

Si l'on veut mettre en évidence le demi-axe vertical

de la trajectoire d'une molécule superficielle, comme

$$\text{il est : } h = \lambda \operatorname{sh} \frac{\pi H}{L},$$

$$\text{il vient}^1 : \xi = h \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(H-c)}{L}}{\operatorname{sh} \frac{\pi H}{L}} \sin \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{L} \right).$$

$$\zeta = -h \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(H-c)}{L}}{\operatorname{sh} \frac{\pi H}{L}} \cos \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{L} \right).$$

La célérité de propagation du mouvement est :

$$\omega = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{gL}{\pi} \operatorname{tgh} \frac{\pi H}{L}}.$$

En supposant que  $H$  croisse indéfiniment, on sera conduit aux formules des paragraphes précédents et qui sont l'expression des lois de Gerstner.

Nous reviendrons ultérieurement à cette étude pour examiner l'influence des frottements sur l'extinction de la houle.

**6. Clapotis<sup>2</sup>.** — Le colonel Emy a donné le nom d'*ondes clapoteuses* aux ondes produites par la superposition de deux houles propagées en sens inverse. Ce phénomène, qu'on appelle maintenant *clapotis*, se produit naturellement près des côtes et dans les ports quand une houle, arrivant du large, vient à rencontrer

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 8, p. 334.

<sup>2</sup> J. BOUSSINESQ, 4, p. 15. — F. NAU, 1<sup>re</sup> partie.

un obstacle vertical perpendiculaire à la direction de propagation, et s'y réfléchit de manière à donner naissance à une houle de sens contraire, de même amplitude et de même longueur de vague, qui se superpose à la première. Il peut être facilement réalisé et observé d'ailleurs dans des expériences de laboratoire (voir § 7).

Nous définirons le *clapotis simple* comme le mouvement résultant de la superposition de deux houles égales qui se propagent en sens opposés et à mouvements évanouissants aux grandes profondeurs.

Supposons les déplacements assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits. Les potentiels de déplacement des deux houles composantes sont nécessairement :

$$\Phi_1 = C \frac{\omega}{g} e^{-\frac{\pi c}{L}} \cos \pi \left( \frac{a}{L} - \frac{t}{T} \right),$$

$$\Phi_2 = C \frac{\omega}{g} e^{-\frac{\pi c}{L}} \cos \pi \left( \frac{a}{L} + \frac{t}{T} \right).$$

Le déplacement réel d'une molécule étant la somme géométrique des déplacements que produisent les houles isolées, ses composantes seront :

$$\xi = \frac{\partial \Phi_1}{\partial a} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial a}, \quad \zeta = \frac{\partial \Phi_2}{\partial c} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial c},$$

et le mouvement de clapotis admettra nécessairement un potentiel de déplacement de la forme

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2C \frac{\omega}{g} e^{-\frac{\pi c}{L}} \cos \frac{\pi a}{L} \cos \frac{\pi t}{T}.$$

Les composantes du déplacement d'une molécule sont donc :

$$\xi = -2C \frac{\omega\pi}{gL} e^{-\frac{\pi c}{L}} \sin \frac{\pi a}{L} \cos \frac{\pi t}{T},$$

$$\zeta = -2C \frac{\omega\pi}{gL} e^{-\frac{\pi c}{L}} \cos \frac{\pi a}{L} \cos \frac{\pi t}{T}.$$

Nous en déduirons :  $\frac{\xi}{\zeta} = \tan \frac{\pi a}{L}$ .

Ainsi les trajectoires de toutes les molécules dont les situations moyennes sont sur un même plan parallèle à  $yoz$  sont des droites également inclinées sur l'horizon.  
— Ces droites sont verticales pour  $a = nL$  et horizontales pour  $a = n\frac{L}{2}$ ,  $n$  étant un entier quelconque.

L'amplitude du mouvement d'une molécule a pour mesure  $4C \frac{\omega\pi}{gL} e^{-\frac{\pi c}{L}}$ ; elle décroît quand la profondeur augmente.

Comme les molécules de la surface libre ont leur situation moyenne dans le plan  $c=0$ , et comme on a  $\omega\pi=gT$ , les équations paramétriques de la surface libre seront :

$$x = a - 2C \frac{T}{L} \cos \frac{\pi t}{T} \sin \frac{\pi a}{L},$$

$$y = -2C \frac{T}{L} \cos \frac{\pi t}{T} \cos \frac{\pi a}{L};$$

elles définissent un profil *trochoidal circulaire*.

Considérons la famille des courbes lieux des positions moyennes ( $a, c$ ) des molécules, telles que toute petite trajectoire de molécule soit tangente à la courbe passant par son centre. — Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe est  $\frac{dc}{da}$ ; celui de la trajectoire est  $\cotg \frac{\pi a}{L}$ . L'équation différentielle des courbes en question est donc :

$$\frac{\pi}{L} dc = \cotg \frac{\pi a}{L} \cdot d\left(\frac{\pi a}{L}\right);$$

son intégration donne ( $k$  étant une constante arbitraire) :

$$e^{\frac{\pi c}{L}} = k \sin \frac{\pi a}{L}.$$

Ces courbes sont dites *courbes de clapotis*; elles portent sensiblement les petites trajectoires du liquide clapoteux. Elles coupent orthogonalement les surfaces lieux des positions moyennes des molécules d'égal potentiel des vitesses (à un instant donné) :

$$\varphi = 2C \frac{T}{L} e^{-\frac{\pi c}{L}} \cos \frac{\pi a}{L} \sin \frac{\pi t}{T} = \text{const.}$$

**7. Vérifications expérimentales.** — Les résultats obtenus sont conformes à de nombreuses observations.

1° Quand une houle chemine le long d'un mur vertical parallèle à la direction de propagation, on vérifie que la forme de la surface libre est assez exactement à profil trochoïdal circulaire.

2° Si l'on mesure dans des houles, par calme en

pleine mer, la période  $T$  et la longueur de vague  $2L$ , et si l'on construit l'ensemble des points de coordonnées ( $T$ ,  $L$ ) pour un grand nombre d'observations, on constate que la parabole  $T^2 = \frac{\pi}{g} L$  passe très sensiblement au milieu de la bande des points obtenus, et que les écarts se répartissent à égalité entre l'extérieur et l'intérieur de la parabole. En regard à la difficulté de mesurage de  $L$  et de  $T$ , cette vérification est très satisfaisante<sup>1</sup>.

Ainsi, parmi les observations faites à l'aide du trace-vagues de MM. Paris, on trouve :

1° Une série de cinq vagues assez régulières, pour lesquelles on a :

$$L = 20^m, \quad T = 2'',7, \quad \frac{gT^2}{\pi} = 22^m,8;$$

2° Une série de quatre vagues régulières, pour lesquelles on a :

$$L = 1^m,80, \quad T = 0'',725, \quad \frac{gT^2}{\pi} = 1^m,60.$$

Les écarts entre  $L$  et  $\frac{gT^2}{\pi}$  ne paraissent pas dépasser les erreurs possibles dans les observations.

3° Quant à la loi de la profondeur, elle n'a donné lieu à aucun contrôle quantitatif : il est difficile d'observer sous l'eau ; mais à une distance de la surface libre de l'ordre de  $2L$ , on constate que l'agitation est insensible, ce qui est conforme à la loi trouvée<sup>2</sup>.

4° La forme rectiligne des trajectoires du clapotis a

<sup>1</sup> A. PARIS, p. 731. — E. L. BERTIN, 1, *passim*; 2, p. 161.

<sup>2</sup> E. L. BERTIN, 2, p. 163.

été vérifiée par MM. Boussinesq et Terquem<sup>1</sup> même pour une profondeur finie, si toutefois la demi-hauteur d'onde n'excède pas le cinquième de la profondeur moyenne et de la demi-longueur d'onde L. « Il suffit de verser de l'eau dans une auge rectangulaire en verre, puis d'y provoquer des oscillations d'une demi-longueur d'onde L égale à la longueur de l'auge, en abais-  
sant et soulevant alternativement une planchette posée horizontalement sur le liquide, près d'un bout, et que l'on retire ensuite, et d'observer enfin d'une petite distance, avec la lunette d'un cathétomètre, les trajectoires que décrivent les poussières mêlées à l'eau : dès que le mouvement s'est régularisé, on voit les particules comprises dans le champ de la lunette décrire des trajectoires droites, dont la direction peut être appréciée en faisant tourner la lunette autour de son axe jusqu'à ce qu'un fil réticulaire recouvre précisément l'une d'elles. »

5° La chronophotographie est enfin venue apporter un contrôle encore plus précis : M. Marey, par des séries d'instantanés consécutifs, a fourni des images donnant la succession des états de la surface libre d'une eau clapoteuse et les trajectoires de particules brillantes mises en suspension dans cette eau : ces images mettent ainsi en évidence la forme des courbes de clapotis.

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 8, p. 317.

<sup>2</sup> J.-B. MAREY, p. 915. Les photographies données par M. Marey ont été reproduites par M. Nau dans sa thèse [Nat, p. 4, 5, 13, 14].

## CHAPITRE III

### ONDES DE TRANSLATION ; ONDE SOLITAIRE

**1. Onde solitaire; lois de Scott Russell; production et propriétés expérimentales des ondes de translation.** — En 1834, un ingénieur anglais, John Scott Russell, observant par hasard un bateau halé rapidement par deux chevaux dans un canal étroit, vit ce bateau s'arrêter brusquement, tandis que la masse d'eau mise en mouvement par le halage formait un gonflement vers la proue, s'en détachait, filait le long du canal en prenant un profil arrondi très régulier, d'environ 9 mètres de longueur et 0<sup>m</sup>.40 de flèche. L'intumescence se propagea avec une vitesse de 13 kilomètres à l'heure et put être suivie à cheval pendant 2 kilomètres, à peu près, conservant sa forme générale, mais s'étalant et s'aplatissant peu à peu.

Cette observation accidentelle a été l'occasion de belles recherches expérimentales, faites d'abord sous la direction de J. SCOTT RUSSELL<sup>1</sup>, en Angleterre, puis

<sup>1</sup> Le premier mémoire de Scott Russell, publié en 1836, au vol. XIV des *Transactions d'Edimburg*, et contenant les expériences de 1834 et 1835, a été traduit en français en 1837 [J.-S.]

par H. BAZIN<sup>1</sup> et par A. DE CALIGNY<sup>2</sup>, en France.

Le phénomène peut être reproduit au laboratoire très simplement.

A une extrémité d'un petit canal à fond horizontal, à parois verticales transparentes, rempli d'eau en repos à une hauteur  $H$ , et censé indéfini dans un sens, établissons un réservoir en arrière de la paroi terminale AB et remplissons-le à un niveau supérieur à celui du canal. La paroi AB est disposée en forme de vanne qu'on ouvre brusquement. La surcharge d'eau Q

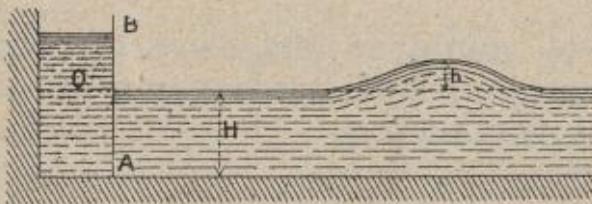


Fig. 5.

se répand tumultueusement dans le canal et forme bientôt un gonflement en saillie sur la surface du canal, gonflement à profil d'apparence sinusoïdale et qui se propage sans déformation sensible le long du canal.

RUSSELL, voir surtout la section III, p. 166. Les expériences furent répétées les années suivantes par Scott Russell, et leurs nombreux résultats ont été consignés par l'auteur dans le *Report of the fourteenth Meeting of the British Association for the advancement of Science held in York in september 1844*, vol. VI, p. 448; London, 1845.

<sup>1</sup> H. BAZIN, 2, p. 495-639. Ce travail a été présenté à l'Académie des sciences en 1863.

<sup>2</sup> A. DE CALIGNY. Voir diverses Notes dans les C. R. de l'Acad. des sciences de 1844, 1852, 1863, 1864, 1866, 1869.

Ce bourrelet constitue l'*onde solitaire* ou *onde de translation* de Scott Russell (solitary wave).

On réalise encore le même effet en refoulant l'eau du canal par un déplacement longitudinal brusque de sa paroi terminale fonctionnant comme un piston.

Scott Russell a résumé dans les lois suivantes les résultats de ses expériences relatives à un canal à section rectangulaire.

1<sup>o</sup> L'onde obtenue est unique, toute en saillie sur le niveau libre primitif du canal; sa surface est cylindrique, à génératrices horizontales et normales à la direction du canal.

Le profil, symétrique par rapport à la verticale de son sommet, présente seulement deux points d'inflexion; il est à peu près sinusoïdal quand la saillie  $h$  est très faible vis-à-vis de la profondeur  $H$ .

2<sup>o</sup> Chaque particule fluide, en repos avant que l'intumescence l'atteigne, décrit une trajectoire ouverte, sorte de demi-ellipse dont le grand axe est horizontal et a une grandeur constante, tandis que l'axe vertical, égal à la hauteur  $h$  de l'intumescence à la surface libre, décroît de la surface au fond où il est nul. Elle est ramenée au repos après le passage de l'onde.

Il suffit de placer dans le canal des poussières colorées pour observer ces trajectoires, et pour reconnaître que le passage de l'intumescence dans une section droite translate les molécules primitivement situées dans cette section et les amène définitivement dans une même autre section droite située à une distance de la première égale à l'axe horizontal commun de toutes les trajectoires, du côté de la propagation.

3<sup>o</sup> Le volume de l'intumescence est constamment

égal au volume  $Q$  de la masse liquide productrice de l'onde.

4° La vitesse de propagation, ou *célérité* de l'onde, a pour expression :

$$\omega = \sqrt{g(H + h)}.$$

5° Les lois précédentes supposent que le rapport  $\frac{h}{H}$  de la hauteur du gonflement à la profondeur du canal est petit. Si ce rapport se rapproche de l'unité, « l'onde se raccourcit, sa forme cesse d'être stable, et son sommet, se propageant plus vite que sa partie antérieure, surplombe enfin et tombe en avant, par fragments qui donnent naissance à tout autant de nouvelles ondes solitaires plus petites : on dit alors que l'onde déferle. »

Au lieu d'une intumescence, on peut produire, sous le niveau libre du canal, une dépression se propageant avec une forme et une célérité constantes, et constituant une *onde de translation négative*. A cet effet, on ouvre et ferme presque aussitôt une vanne pour laisser écouler une petite portion du liquide contenu dans le canal. Après quelques tourbillonnements, le mouvement se régularise, un creux se forme, qui se propage sous une forme à peu près invariable, avec la vitesse

$$\omega = \sqrt{g(H - h)},$$

$h$  étant la flèche de la dépression.

Cette onde négative est très peu stable, et par suite très difficile à produire : tandis que sa partie antérieure s'allonge sans cesse, à sa queue il se forme une suite d'ondes plus petites, de grandeurs décroissantes, alternativement convexes et concaves, et situées les unes

entièrement au-dessus, les autres entièrement au-dessous de la surface libre initiale.

H. Bazin a, de 1856 à 1858, refait en grand, sur le canal de Bourgogne, les expériences de Scott Russell et a vérifié à nouveau les lois que nous avons énoncées. Mais il a en outre étudié expérimentalement, sous le nom de *remous*, les intumescences ou dépressions produites par l'introduction ou l'enlèvement continu de liquide à l'entrée du canal. Un afflux d'eau permanent donne lieu à une onde qui s'allonge progressivement en s'avançant à la surface du canal : cette onde indéfinie est assimilable à une succession d'ondes solitaires isolées, et on constate en effet que la propagation de l'onde initiale formant la tête du remous s'opère suivant la loi  $\omega = \sqrt{g(H+h)}$ , mais la hauteur  $h$  de cette onde initiale est environ une fois et demie la hauteur du plan d'eau qui la suit. Si l'on augmente le débit de l'injection, la hauteur de l'onde initiale décroît ; elle finit par devenir inférieure à celle du remous en arrière, et le déferlement apparaît.

H. Bazin étudia aussi les ondes solitaires et remous, non plus en eau stagnante, mais dans un courant à pente constante : il constata que l'on peut étendre assez exactement aux ondes produites dans un courant les lois trouvées pour le cas d'un liquide en repos, pourvu que le mouvement soit rapporté à des axes animés de la vitesse moyenne des filets fluides. Il en déduit l'explication des phases principales de la propagation des marées dans la partie maritime des fleuves, et notamment de la formation de la *barre*, onde initiale de grande hauteur qui précède la marée, déferler avec violence aux points du fleuve où la profondeur initiale

est inférieure à une certaine limite, et produit le phénomène connu sous le nom de *mascaret*, dont les effets sont parfois si redoutables.

« Le caractère commun de tous ces phénomènes consiste en ce que la composante verticale des vitesses des molécules fluides y est, à une première approximation, négligeable devant leur composante horizontale; circonstance d'où il résulte que la pression varie presque hydrostatiquement aux divers points d'une même verticale, et que les accélérations dans les sens horizontaux, provenant principalement de la pente de la surface, sont presque les mêmes en ces points, ainsi par suite que les composantes horizontales des vitesses engendrées dans des temps assez courts pour ne pas donner trop de prise à l'influence des frottements du fond ou des bords. »

Divers efforts, tentés notamment par Earnshaw et Stokes, pour expliquer l'onde solitaire, avaient entièrement échoué. M. Boussinesq, après avoir fixé le véritable caractère qu'on vient d'énoncer, des phénomènes dont il s'agit, a pu, non seulement rendre compte de la formation et de la régularisation rapide de cette onde, donner sa vitesse de propagation et l'équation de sa coupe longitudinale, ainsi que déterminer les trajectoires paraboliques (à axe vertical dirigé vers le bas) qu'y décrivent les molécules liquides. Mais il a, de plus, retrouvé, par la même analyse, les détails les plus minutieux de la propagation des ondes négatives, des longues intumescences, des remous indéfinis.

C'est cette théorie, donnée en juin 1871 par M. Boussinesq, que nous allons exposer<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 3, *passim*; 8, p. 280-315, p. 360-425, p. 448-

2. Formation de l'équation aux dérivées partielles qui régit la hauteur d'une intumescence quelconque. — Nous nous limiterons ici au cas d'un liquide au repos, cas auquel on ramène celui d'un courant. La grande *longévité* de l'onde solitaire (mot par lequel Scott Russell exprime que l'onde parcourt de grands espaces sans se déformer d'une manière sensible) montre que, dans ces phénomènes, les frottements ont très peu d'action dès que le mouvement s'est régularisé : il nous sera permis, avec une approximation suffisante, de les négliger.

Enfin nous caractériserons les mouvements que nous voulons étudier par le fait suivant : *les vitesses horizontales des molécules fluides sont sensiblement égales dans toute l'étendue d'une section normale du canal.*

Rapportons le mouvement à des axes rectangulaires fixes, le plan  $xoy$  étant le fond supposé horizontal du canal, l'axe  $ox$  ayant la direction du canal. Ce canal, de longueur indéfinie, a une section rectangulaire constante. Les vitesses des molécules liquides sont alors parallèles au plan  $xoz$ , et ne dépendent pas de  $y$ ; la surface libre a une forme cylindrique.

Les composantes ( $u, v, w$ ) de la vitesse aux environs d'une molécule quelconque sont nulles avant que l'intu-

470. — De ces recherches, B. de Saint-Venant a tiré un exposé de la théorie de l'onde solitaire [B. DE SAINT-VENANT, 3], et M. Flamant, sous l'inspiration de M. Boussinesq lui-même, un exposé simplifié de la théorie des ondes de translation et des remous [A. FLAMANT, 2]. Ce dernier exposé a été condensé par M. Flamant dans son *Hydraulique* bien connue, et a été reproduit par MM. Pollard et Dudebout [POLLARD et DUDEBOUT, tome III]. Une exposition différente de la théorie de l'onde solitaire a été donnée par M. Maurice Lévy [M. LÉVY, 1<sup>re</sup> partie, ch. X].

mescence atteigne cette molécule. Dès lors, en vertu du théorème de Lagrange et de Cauchy, nous pourrons poser à tout instant :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

en désignant par  $\varphi$  une fonction de  $x, y, z$  et du temps  $t$ , à laquelle il est loisible, sans modifier ses trois dérivées  $u, v, w$  en  $x, y, z$ , de concevoir implicitement jointe une fonction arbitraire du temps. Eu égard à nos hypothèses, nous aurons constamment  $v=0$ , et la fonction  $\varphi$  ne dépendra pas de  $y$ .

Cette fonction  $\varphi$  étant, nous le savons, une fonction harmonique de  $(x, y, z)$ , nous aurons :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

De plus, nous pouvons écrire l'équation que nous avons établie au chapitre II, § 5, sous la forme :

$$\frac{P - P_0}{\rho} = g(H - z) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (2)$$

où  $P_0$  désigne la pression atmosphérique que je supposerai à chaque instant la même sur toute la surface libre, et  $H$  la profondeur primitive du fluide à l'état de repos.

Désignons par  $H + h$  la hauteur variable de la surface libre dans la partie en mouvement, sur la verticale du point  $(x, y)$  du fond. La hauteur  $h$  est une fonction de  $x$  et de  $t$ . Nous nous proposons de former une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre dont cette fonction  $h(x, t)$  est une intégrale

La fonction  $h$  est introduite par les conditions aux limites qu'il faut adjoindre aux équations indéfinies (1) et (2) que vérifient les deux fonctions inconnues  $\varphi$  et  $p$ .

À la surface libre, on a :  $z = H + h$ ,  $p = p_0$ ; et, de plus, une molécule s'y meut sans quitter la surface, en sorte que, quand  $t$  s'accroît de  $dt$ ,  $x$  de  $udt$ , la hauteur  $H + h$  varie de  $wdt$ . Nous aurons donc :

$$\left. \begin{aligned} gh + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \text{pour } z = H + h. \quad (3)$$

Au fond, les molécules glissent tangentiellement, en sorte que  $w = 0$ . Ainsi  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$  pour  $z = 0$ . (4)

Cela posé, nous allons préalablement montrer que la fonction  $\varphi(x, z, t)$  peut être développée, par rapport à  $z$ , en une série entière convergente dont les coefficients ne dépendent que de la vitesse aux divers points du fond. Désignons en effet par  $\varphi_0$  la fonction  $\varphi(x, 0, t)$ , valeur de  $\varphi$  aux points du fond. Comme  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$  pour  $z = 0$ , on peut écrire identiquement :

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^z dz \int_0^x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

ou encore, en vertu de l'équation (1) :

$$\varphi = \varphi_0 - \int_0^z dz \int_0^x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz. \quad (5)$$

Marquons par le symbole  $\left(\int_0^z dz\right)^n$  le résultat de  $n$  intégrations successives, de  $0$  à  $z$ , effectuées sur la fonction qui suivra ce symbole. Si nous remplaçons dans le terme final de l'équation (5) la fonction  $\varphi$  par le second membre même de (5); nous serons conduits à

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \left(\int_0^z dz\right)^4 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}.$$

Substituons à  $\varphi$ , dans le dernier terme de l'équation obtenue, sa valeur (5), et procérons ainsi indéfiniment. Nous obtiendrons après  $(n+1)$  opérations :

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 - \frac{z^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{z^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^4} - \dots \\ &\quad \pm \frac{z^{2n}}{2n!} \frac{\partial^{2n} \varphi_0}{\partial x^{2n}} \mp \left(\int_0^z dz\right) \frac{\partial^{2n+2} \varphi}{\partial x^{2n+2}}. \end{aligned}$$

Si l'on admet que  $\frac{\partial^{2n} \varphi}{\partial x^{2n}}$ , pour  $n$  croissant indéfiniment, n'augmente pas plus rapidement que la puissance  $2n^{\text{ème}}$  d'une quantité finie  $M$  [ « c'est ce qui doit généralement arriver, si l'on fait abstraction d'endroits ou de moments exceptionnels pour lesquels d'ailleurs la continuité du fluide ne serait pas assurée » ], le terme complémentaire, inférieur en valeur absolue à  $\frac{(Mz)^{2n+2}}{(2n+2)!}$ , tendra vers zéro quand  $n$  deviendra de plus en plus grand, et l'on aura le développement de  $\varphi$  que l'on avait annoncé.

Portons cette expression de  $\varphi$  dans les conditions (3) qui deviendront :

$$\left. \begin{aligned} & gh + \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \frac{(H+h)^2}{1.2} \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^2 \partial t} + \dots \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{(H+h)^2}{1.2} \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3} + \dots \right]^2 \\ & + \frac{1}{2} \left[ - \frac{(H+h)}{1} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \dots \right]^2 \end{aligned} \right\} = 0, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{H+h}{1} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \frac{(H+h)^3}{1.2.3} \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^4} + \dots \\ & + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{(H+h)^2}{1.2} \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3} + \dots \right] \end{aligned} \right\} = 0. \quad (7)$$

Nous supposerons la partie variable  $h$  de la profondeur, et par suite la vitesse au fond  $u_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}$ , très petites, et les dérivées successives relatives à  $x$  de plus en plus petites, de manière à assurer la convergence très rapide de la série  $\varphi$ . Dès lors, nous pourrons, *en première approximation*, ne conserver dans les équations (6) et (7) que les termes principaux et réduire

ces équations à :  $gh + \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = 0,$  (8)  
 $H \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$

L'élimination de  $\varphi_0$  entre ces équations donne :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = g H \frac{\partial^2 h}{\partial x^2},$$

et celle de  $h$  :  $\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} = g H \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}.$

Ainsi, en posant  $a = \sqrt{gH}$ , nous aurons, sous la forme la plus générale :

$$h = F(x - at) + F_1(x + at),$$

$$\varphi_o = f(x - at) + f_1(x + at),$$

les fonctions  $F, F_1, f, f_1$  étant arbitraires. Mais, pour vérifier la première équation (8), on doit avoir identiquement :  $[gF - af] + [gF_1 + af_1] = 0$ ,

$$\text{soit : } f = \sqrt{\frac{g}{H}} F, \quad f_1 = -\sqrt{\frac{g}{H}} F_1,$$

en sorte que nous aurons, en première approximation :

$$h = F(x - at) + F_1(x + at),$$

$$u_o = \frac{\partial \varphi_o}{\partial x} = \sqrt{\frac{g}{H}} \{ F(x - at) - F_1(x + at) \}.$$

Nous nous bornerons à l'étude des intumescences se propageant dans le sens des  $x$  positifs ; et il nous sera loisible d'admettre que l'origine des axes a été choisie de manière que, pour  $t = 0$ ,  $h$  et  $u_o$  soient nuls (ou du moins insensibles) pour toutes les valeurs positives de  $x$  ; dès lors  $F(x)$  et  $F_1(x)$  seront nuls pour toute valeur positive de l'argument, et en particulier  $F_1(x + at)$  sera nul pour toutes valeurs positives de  $x$  et de  $t$ . Toute la propagation future du mouvement dans le fluide en repos pour  $t = 0$  sera donc définie par :

$$h = F(x - at), \quad \text{et} \quad u_o = \frac{\partial \varphi_o}{\partial x} = \sqrt{\frac{g}{H}} h.$$

Revenons maintenant aux équations (6) et (7) pour en déduire des équations de *seconde approximation*. A cet effet, aux termes conservés dans les équations (8)

nous adjoindrons les valeurs principales des termes négligés eu égard à leur ordre de grandeur, ce qui donne :  $gh + \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \frac{H^2}{2} \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 = 0,$   
 $H \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \frac{H^3}{6} \frac{\partial^5 \varphi_0}{\partial x^4} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0.$

Mais, dans les petits termes complémentaires, nous admettrons que  $h$  et  $\varphi_0$  vérifient les lois de première approximation, ce qui permettra d'écrire les équations précédentes sous la forme :

$$\begin{aligned} gh + \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{g}{2} \left[ H^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{h^2}{H} \right] &= 0, \\ H \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial t} - \sqrt{gH} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{H^2}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{h^2}{H} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Éliminons  $\varphi_0$  entre ces deux équations. Il vient :

$$\left. \begin{aligned} gH \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{gH}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ H^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{h^2}{H} \right] \\ + \sqrt{gH} \frac{\partial}{\partial x \partial t} \left[ \frac{H^2}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{h^2}{H} \right] \end{aligned} \right\} = 0.$$

Dans le dernier des termes de seconde approximation, la parenthèse peut être regardée sensiblement comme une fonction de  $(x - \sqrt{gH} t)$ , et l'on remplacera par suite ce terme par

$$-\sqrt{gH} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{H^2}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{h^2}{H} \right].$$

Dès lors l'équation obtenue prendra la forme :

$$gH \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + gH \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{H^2}{3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{3}{2} \frac{h^2}{H} \right] = 0. \quad (10)$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles qui régit la fonction  $h(x,t)$  et que nous avions annoncée.

Posons :

$$\psi = \sqrt{gH} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{H^2}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{3}{4} \frac{h^2}{H} \right].$$

et appliquons au calcul du dernier petit terme de  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$   
la règle  $\frac{\partial}{\partial x \partial t} = -\sqrt{gH} \frac{\partial}{\partial x^2}$  (comme nous l'avons fait plus haut). Nous reconnaîtrons de suite qu'en vertu de (10) on a :  $\frac{\partial \psi}{\partial t} - \sqrt{gH} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ . (11)

D'après cette équation (11), la fonction  $\psi$  est donc une fonction quelconque de  $x + \sqrt{gH} t$ . Or par hypothèse, pour  $t=0$  et  $x>0$ , on a :  $\frac{\partial h}{\partial t}=0$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x}=0$ , et par suite  $\psi=0$ . La fonction  $\psi$  est donc nulle pour toute valeur positive de la variable, et par suite pour toute la propagation future du mouvement vers les  $x$  positifs.

L'équation qui régit la hauteur de l'intumescence en fonction de  $x$  et de  $t$  prend donc la forme très simple :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial}{\partial x} \left[ h + \frac{3}{4} \frac{h^2}{H} + \frac{H^2}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] = 0. \quad (12)$$

**3. Vitesse de propagation des diverses parties d'une intumescence.** — La notion de *célérité* de propagation de l'intumescence va nous fournir une interprétation élégante de l'équation (12).

Nous appellerons volume de l'intumescence la quan-

tité de liquide qui se trouve dans le canal, sur une largeur égale à l'unité, en plus que celle qu'il y aurait si le niveau primitif avait été conservé. La partie de ce volume comprise, à l'instant  $t$ , depuis la tête de l'intumescence jusqu'à la section normale d'abscisse  $x$  aura pour mesure :  $q = \int_x^\infty h dx.$

Imaginons un plan mobile, normal aux  $x$ , cheminant vers les  $x$  positifs, de manière à avoir devant lui le même volume  $q$  d'intumescence.

La vitesse de ce plan d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  sera dite la *célérité*  $\omega$  de propagation de la tranche de l'intumescence ayant pour abscisse  $x$  à l'instant  $t$ .

D'après cette définition, quand  $t$  varie de  $dt$ ,  $x$  de  $\omega dt$ ,  $q$  reste constant, et l'on a  $dq=0$ , soit en appliquant au calcul de  $dq$  la règle de différentiation des intégrales définies :

$$0 = -h \cdot \omega dt + \left( \int_x^\infty \frac{\partial h}{\partial t} dx \right) dt.$$

L'expression de  $\omega$  sera donc :

$$\omega = \frac{1}{h} \int_x^\infty \frac{\partial h}{\partial t} dx.$$

Remplaçons, sous le signe  $\int$ ,  $\frac{\partial h}{\partial t}$  par sa valeur tirée de l'équation (12) sous la forme d'une dérivée par rapport à  $x$ ; effectuons ensuite l'intégration, et observons que, pour  $x=\infty$ , c'est-à-dire très en avant de l'intumescence,  $h$  et ses dérivées sont nulles. Il viendra ainsi :  $\omega = \sqrt{gH} \left[ 1 + \frac{3h}{4H} + \frac{H^2}{6h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right]$ . (13)

Élevée au carré, cette formule donne *sensiblement* :

$$\omega^2 = g \left( H + \frac{3}{2} h + \frac{H^3}{3h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right).$$

Ainsi le carré de la vitesse de propagation d'une partie quelconque de l'intumescence est égal au produit de l'accélération  $g$  de la pesanteur, par la somme de la profondeur primitive, d'une fois et demie la hauteur  $h$  de cette partie de l'intumescence et du tiers de la courbure qu'y a la surface libre, multiplié par l'inverse de cette hauteur et par le cube de la profondeur primitive.

La comparaison des équations (12) et (13) donne :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\omega)}{\partial x} = 0.$$

Nous allons déduire de cette dernière équation la vitesse d'accroissement de  $h$  quand on suit un même élément d'intumescence, soit la dérivée  $\left(\frac{dh}{dt}\right)$  prise pour un observateur se déplaçant avec la vitesse  $\omega$  le long du canal. Comme pour des variations corrélatives  $dt$  et  $\omega dt$  de  $t$  et de  $x$ ,  $h$  varie de

$$dh = \frac{\partial h}{\partial t} dt + \frac{\partial h}{\partial x} \omega dt,$$

la dérivée cherchée aura pour expression, eu égard à l'équation précédente :  $\left(\frac{dh}{dt}\right) = -h \frac{\partial \omega}{\partial x}$ .

On peut donc écrire identiquement :

$$h \left( \frac{dh}{dt} \right) = - \frac{\partial(h^2 \omega)}{\partial x} + 2h\omega \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Comme, en vertu de (13), on a :

$$h^2\omega = \sqrt{gH} \left[ h^2 + \frac{3h^3}{4H} + \frac{H^2}{6} h \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right],$$

$$2h\omega \frac{\partial h}{\partial x} = \sqrt{gH} \frac{\partial}{\partial x} \left[ h^2 + \frac{h^3}{2H} + \frac{H^2}{6} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right],$$

il vient de suite :

$$\left( \frac{dh}{dt} \right) = - \frac{\sqrt{gH}}{4H} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h^3 \left( 1 + \frac{2H^2}{3} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \right) \right\}. \quad (14)$$

**4. Distribution des vitesses proprement dites.** — Revenons à la seconde des équations (9) du § 2. Remplaçons-y  $\frac{\partial h}{\partial t}$  par  $-\frac{\partial(h\omega)}{\partial x}$ ; elle donnera :

$$H \frac{\partial^2 \varphi_o}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ h\omega + \sqrt{gH} \left( \frac{H^2}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{h^2}{H} \right) \right].$$

Cette équation peut s'intégrer. Si l'on observe que  $\frac{\partial \varphi_o}{\partial x} = u_o$ , et que, pour  $x = \infty$ ,  $u_o$ ,  $h$  et ses dérivées s'annulent, il vient :

$$Hu_o = h\omega + \sqrt{gH} \left( \frac{H^2}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{h^2}{H} \right),$$

d'où, d'après (13) :

$$u_o = \sqrt{\frac{g}{H}} \left[ h - \frac{h^2}{4H} + \frac{H^2}{3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right]. \quad (15)$$

D'ailleurs, au degré d'approximation adopté, on a :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_o}{\partial x} - \frac{z^2}{2} \frac{\partial^3 \varphi_o}{\partial x^3} = u_o - \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 u_o}{\partial x^2},$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -z \frac{\partial^2 \varphi_o}{\partial x^2} + \frac{z^3}{6} \frac{\partial^4 \varphi_o}{\partial x^4} = -z \frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{z^3}{6} \frac{\partial^3 u_o}{\partial x^3};$$

si l'on tient compte de la valeur (15) de  $u_o$ , il vient :

$$u = \sqrt{\frac{g}{H}} \left[ h - \frac{h^2}{4H} + \left( \frac{H^2}{3} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right],$$

$$w = -z \sqrt{\frac{g}{H}} \left[ \left( 1 - \frac{h}{2H} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{3} \left( H^2 - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right]. \quad \left. \right\} (16)$$

Calculons enfin la *vitesse moyenne*  $U$  dans une tranche, c'est-à-dire la moyenne des valeurs de  $u$  sur toute l'étendue d'une section; on trouve de suite :

$$U = \frac{1}{H+h} \int_0^{H+h} u dz = \sqrt{\frac{g}{H}} \left[ h - \frac{h^2}{4H} + \frac{H^2}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right]. \quad (17)$$

On en déduit *sensiblement* :

$$U(H+h) = \sqrt{gH} \left[ h + \frac{3}{4} \frac{h^2}{H} + \frac{H^2}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] = h\omega.$$

Ainsi, on a sensiblement :  $U = \frac{h\omega}{H+h}$ . (18)

« On aurait pu trouver directement cette relation, en observant que le volume fluide  $(H+h) U dt$  qui

passe à travers une section durant un instant  $dt$ , est égal à celui  $h \cdot dt$  qui se trouve en plus au delà de cette section au bout du même instant, en vertu de la propagation de l'intumescence. »

### 5. Mouvement du centre de gravité d'une intumescence; invariants d'une intumescence.

— Proposons-nous d'étudier le mouvement du centre de gravité d'une intumescence complète de volume

invariable :  $Q = \int_{-\infty}^{+\infty} h dx.$

Soient  $(\xi, H + \eta)$  les coordonnées de ce point. En supposant le volume divisé en éléments  $dq = h dx$ , de centre de gravité  $\left(x, H + \frac{h}{2}\right)$ , on a :

$$Q\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x dq, \quad Q\eta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h dq.$$

Dérivons par rapport à  $t$  ces équations de définition ; notons que  $\frac{dx}{dt}$  n'est autre que la célérité  $\omega$  de la tranche d'abscisse  $x$  et que  $\frac{dh}{dt}$  est pris en laissant  $q$  constant, et nous aurons :

$$Q \frac{d\xi}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega dq, \quad 2Q \frac{d\eta}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dh}{dt}\right) dq.$$

Remplaçons  $\omega$  et  $\left(\frac{dh}{dt}\right)$  par les valeurs (13) et (14),  $dq$  éventuellement par  $h dx$ , et tenons compte de ce

Hydraulique générale.

qu'aux deux extrémités de l'intumescence  $h$  et ses dérivées sont nulles. Il vient :

$$\begin{aligned} Q \frac{d\zeta}{dt} &= \sqrt{gH} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dq + \frac{3}{4H} \int_{-\infty}^{+\infty} hdq \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{H^2}{6} \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{-\infty}^{+\infty} \right] = \sqrt{gH} \left[ Q + \frac{3}{4H} \cdot {}_2Q\eta \right], \\ {}_2Q \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\sqrt{gH}}{4H} \left[ h^3 \left( 1 + \frac{2H^2}{3} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0. \\ \text{Ainsi : } \frac{d\zeta}{dt} &= \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3\eta}{2H} \right), \quad \frac{d\eta}{dt} = 0. \end{aligned}$$

D'après cela,  $\eta$  et  $\frac{d\zeta}{dt}$  sont constants. D'où cet énoncé : Le centre de gravité d'une intumescence propagée dans l'eau en repos d'un canal se maintient constamment à une même hauteur au-dessus de la surface libre primitive ; la vitesse de propagation  $\frac{d\zeta}{dt}$  de ce centre est constante, et si l'on néglige le carré de  $\frac{\eta}{H}$  devant l'unité, comme on peut écrire :

$$\left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 = g(H + 3\eta),$$

on voit que le carré de cette vitesse de propagation s'obtient en multipliant le nombre  $g$  par la somme de la profondeur initiale et du triple de la hauteur du centre de gravité au-dessus de la surface libre primitive.

Un autre invariant attaché à une intumescence en mouvement est son *énergie*.

L'énergie totale d'une intumescence est la somme de son énergie potentielle et de son énergie cinétique. La première est évidemment le travail qu'accomplirait la pesanteur si l'intumescence venait à disparaître ; c'est par suite le produit du poids de l'intumescence par la hauteur de son centre de gravité au-dessus du niveau primitif du canal, soit  $\rho g Q \eta$ . Quand à l'énergie actuelle, ou demi-force vive, elle est :

$$\int_0^{H+h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \rho dx dz (u^2 + w^2),$$

ou bien si l'on néglige  $w^2$  devant  $u^2$  et si l'on remplace  $u^2$  par la valeur approchée  $\frac{gh^2}{H}$  :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \rho g \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{H+h} \frac{h^2}{H} dz \\ &= \frac{1}{2} \rho g \int_{-\infty}^{+\infty} h^2 \left(1 + \frac{h}{H}\right) dx; \end{aligned}$$

négligeons encore  $\frac{h}{H}$  devant l'unité, et notons que  $h dx = dq$  ; il viendra :

$$\frac{1}{2} \rho g \int_{-\infty}^{+\infty} h dq \quad \text{ou} \quad \rho g Q \eta.$$

L'énergie totale de l'onde est donc  $2\rho g Q \eta$ , soit le double du poids  $\rho g Q$  de l'intumescence multiplié par la hauteur  $\eta$  de son centre de gravité au-dessus de la surface libre primitive. Elle est constante, puisque  $\eta$

ne varie pas avec le temps, non plus que le volume  $Q$  de l'intumescence.

Les principes généraux de la mécanique conduisent tout naturellement aux résultats qui précédent. Mais M. Boussinesq a reconnu en outre l'existence d'un invariant bien plus caché, qu'il a appelé *moment d'instabilité de l'intumescence*. Cet invariant a pour expression :

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - 3 \frac{h^3}{H^3} \right] dx.$$

Nous verrons ultérieurement la raison de sa dénomination. Nous nous bornerons ici à vérifier sa constance, et à cet effet calculons  $\frac{dM}{dt}$ . Il vient :

$$\frac{dM}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)}{\partial x} - \frac{9}{H^3} h^2 \frac{\partial h}{\partial t} \right\} dx.$$

Rappelons-nous que  $\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial(h\omega)}{\partial x}$ ; une intégration par parties donne alors, en remarquant que les termes tout intégrés sont nuls aux limites :

$$\frac{dM}{dt} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial(h\omega)}{\partial x} - \frac{18}{H^3} h^2 \omega \frac{\partial h}{\partial x} \right\} dx.$$

Remplaçons  $\omega$  par sa valeur (13); nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} = & - \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{3}{2H} h \frac{\partial h}{\partial x} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right] - \frac{18}{H^3} h \frac{\partial h}{\partial x} \left[ h + \frac{3h^2}{4H} + \frac{H^2}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \right\} \sqrt{gH} dx. \end{aligned}$$

Après réduction, l'intégration indéfinie est immédiate, et les termes intégrés s'annulant aux limites, on

$$\text{a : } \frac{dM}{dt} = 0.$$

#### 6. Onde solitaire de Scott Russell ; sa forme.

— L'onde solitaire de Scott Russell se propage avec une forme sensiblement invariable : toutes ses tranches possèdent donc à tout instant la même célérité, et l'on obtiendra par suite les lois qui régissent cette intumescence spéciale en exprimant que  $\omega$  est constant.

La valeur de cette constante n'est autre que la célérité du centre de gravité ; si donc nous posons  $h_1 = 3\eta$  [ $h_1$  étant une constante comme  $\eta$ ], nous aurons :

$$\omega = \sqrt{g(H + h_1)},$$

ou encore, sensiblement, si  $\frac{h_1^2}{4H^2}$  est négligeable devant l'unité :  $\omega = \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{h_1}{2H} \right)$ .

Égalons à cette constante l'expression générale (13) de  $\omega$ , et nous aurons l'équation différentielle du profil

$$\text{de l'onde solitaire : } \frac{3h}{4H} + \frac{H^2}{6h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_1}{2H}.$$

Multipliée par  $4Hh \frac{\partial h}{\partial x}$ , cette équation s'intègre immédiatement et donne :

$$h^3 + \frac{H^3}{3} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 = h_1 h^3 + C.$$

Comme pour  $x=+\infty$ ,  $h$  et sa dérivée sont nuls, la quantité  $C$  est égale à zéro, et l'on a :

$$\frac{H^3}{3} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 = h^2 (h_1 - h). \quad (1)$$

Le coefficient angulaire  $\frac{\partial h}{\partial x}$  du profil à l'instant  $t$  ne s'annule que pour  $h=0$  et  $h=h_1$ , et la forme de l'équation (1) montre que l'on doit avoir partout  $h_1 > h$ . Comme  $h$  s'annule pour  $x=\infty$ , on a donc  $h_1 > 0$ . Il résulte de là que l'onde est tout entière en relief sur le niveau primitif, et que  $h_1$  est la hauteur de l'unique sommet de la courbe au-dessus de ce plan.

D'ailleurs l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h_1}{h} \right) \right]^2 = \frac{3h_1}{H^3} \left[ \left( \frac{h_1}{h} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right],$$

ou encore, en prenant comme fonction :

$$K = \frac{h_1}{h} - \frac{1}{2},$$

et en posant  $3h_1 = k^2 H^3$ :

$$\left( \frac{\partial K}{\partial x} \right)^2 = k^2 \left[ K^2 - \frac{1}{4} \right].$$

Si l'on dérive par rapport à  $x$ , il vient :

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = k^2 K,$$

ce qui exige que  $K$  ait la forme :  $A \coshyp k(x - c)$ ,  $A$  et  $c$  ne dépendant pas de  $x$ . En exprimant que cette fonction vérifie l'équation que nous avons dérivée, on est conduit à  $A^2 = \frac{1}{4}$ .

Ainsi :

$$\frac{h_1}{h} = \frac{1}{2} \{ 1 \pm \operatorname{ch} k(x - c) \} = \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} k(x - c),$$

ou —  $\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} k(x - c)$ .

La seconde équation obtenue est une solution parasite; la courbe correspondante a ses ordonnées constamment négatives et elle est asymptote d'une part au niveau primitif, de l'autre à l'ordonnée du sommet.

Nous avons donc :  $h = h_1 \operatorname{ch}^{-2} \frac{k}{2} (x - c)$ .

Le profil se translatant suivant  $ox$  avec la vitesse constante  $\omega$ , la fonction  $c$  du temps doit être de la forme :  $\omega t + \text{const}$ ; par un choix convenable de l'origine des abscisses ou des temps, nous ramènerons donc enfin l'équation du profil à la forme

$$h = h_1 \operatorname{ch}^{-2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3h_1}{H^2}} (x - \omega t). \quad (2)$$

Cette équation montre que la surface libre de l'onde solitaire, symétrique par rapport à la section normale  $x = \omega t$  de son sommet, s'abaisse avec continuité de part et d'autre de cette section, pour se raccorder asymptotiquement, pour  $x - \omega t = \pm \infty$  avec la surface libre primitive.

D'ailleurs, en vertu de l'équation différentielle initiale,  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$  s'annule pour  $h = \frac{2}{3} h_1$  seulement; donc la surface libre est convexe vers le haut aux points dont l'élévation est supérieure aux deux tiers de sa hauteur totale, et concave aux points plus bas.

Avant de passer à l'examen des propriétés de l'onde solitaire, observons qu'on aurait dû être conduit à la même équation en exprimant que la hauteur d'une tranche quelconque, pour un observateur se déplaçant avec la vitesse  $\omega$  le long du canal, est invariable ;  $\left(\frac{dh}{dt}\right)$  est donc nulle partout et toujours, et par suite, en vertu de l'équation (14), l'expression

$$h^3 \left[ 1 + \frac{2H^3}{3} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]$$

a une valeur constante, qui est d'ailleurs zéro à l'extrémité de l'intumescence. On a donc, en prenant pour variable, au lieu de  $x$ , le volume  $q$  de la partie d'intumescence située en avant de la tranche d'abscisse  $x$ , en sorte que  $hdx = dq$  :  $1 + \frac{2H^3}{3} \frac{d^2h}{dq^2} = 0$ , comme équation différentielle du profil à l'instant  $t$ .

Cette équation s'intègre immédiatement et donne :

$$h = \frac{3}{4H^3} (Cq - q^3) + C_1.$$

Comme pour  $x = +\infty$ , on a  $q = 0$ ,  $h = 0$ , il s'ensuit que  $C_1 = 0$ ; comme pour  $x = -\infty$ ,  $h$  est nul et  $q$  égal au volume total  $Q$  de l'intumescence, on a  $C = Q$ . Enfin, pour  $q = \frac{Q}{2}$ ,  $h$  atteint son maximum  $h_m = \frac{3Q^2}{16H^3}$ . Par suite :

$$h = 4h_m \frac{q}{Q} \left( 1 - \frac{q}{Q} \right). \quad (3)$$

Il est aisément de constater que cette équation est une conséquence de (2).

Si en effet on prend pour variable  $u = k(x - \omega t)$ ,

il vient :  $dx = \frac{1}{k} du$ ,  $h = \frac{4h_1 e^u}{(e^u + 1)^2}$ , et par suite :

$$q = \int_x^{+\infty} h dx = \frac{4h_1}{k} \int_u^{+\infty} \frac{de^u}{(e^u + 1)^2} = \frac{4h_1}{k(e^u + 1)}.$$

En particulier, pour  $x = -\infty$ , on a :  $Q = \frac{4h_1}{k}$ .

$$\text{Donc : } \frac{q}{Q} \left( 1 - \frac{q}{Q} \right) = \frac{e^u}{(e^u + 1)^2} = \frac{1}{4} \operatorname{ch}^{-2} \frac{u}{2}.$$

Le second membre de l'équation (3) coïncide donc avec l'expression (2) de  $h$ , si seulement on prend  $h_m = h_1$ .

**7. Propriétés de l'onde solitaire.** — Nous venons de reconnaître que  $h_1 = h_m = \frac{3}{16} \frac{Q^2}{H^3}$ . (4)

Ainsi la hauteur de l'onde solitaire vaut les trois sixièmes du carré de son volume total, par unité de largeur du canal, divisés par le cube de la profondeur primitive.

2° Comme on a pour mesure de la célérité :

$$\omega = \sqrt{g(H + h_1)}, \quad (5)$$

et que  $(H + h_1)$  est la hauteur du sommet de l'onde au-dessus du fond du canal, on se trouve avoir justifié la loi expérimentale de Scott Russell : le carré de la vitesse de propagation d'une onde solitaire est égal au produit du nombre  $g$  par la distance du sommet de l'onde au fond du canal.

3° Comme  $\eta = \frac{h_1}{3}$ , on voit que le centre de grâ-

vité d'une onde solitaire se trouve au tiers de sa hauteur (comme dans le triangle isocèle).

4° L'énergie totale de l'onde a pour expression  $2\rho g Q \eta$ , soit en remplaçant  $\eta$  par  $\frac{h_1}{3}$  et en tenant compte de (4) :  $\mathcal{E} = \rho g \left( \frac{Q}{2H} \right)^3$ . (6)

5° Proposons-nous maintenant de rechercher la forme des trajectoires des particules liquides pendant le passage de l'onde solitaire.

Considérons une particule de coordonnées primitives  $(x_1, y_1)$ . Soient  $(x, y)$  ses coordonnées à l'instant  $t$ . Comme  $h$  et aussi la vitesse au fond  $u_o$  ne dépendent que de l'argument  $x - \omega t$ , et comme, au degré d'approximation observé, on peut prendre sensiblement

$$[\S 6] : u = \frac{dx}{dt} = u_o, \quad w = \frac{dz}{dt} = -z \frac{\partial u_o}{\partial x},$$

nous pourrons écrire :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{H} \frac{\partial q}{\partial t}, \quad \frac{d \log z}{dt} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial u_o}{\partial t}.$$

La chose est évidente pour la seconde relation ; quant à la première, il suffit d'observer que de :

$$q = \int_x^{+\infty} h dx, \quad u_o = \sqrt{\frac{g}{H}} h, \quad \omega = \sqrt{g(H+h)},$$

$$\text{on déduit :} \quad \frac{\partial q}{\partial t} = Hu_o.$$

D'après cela, une intégration immédiate donne :

$$x - x_1 = \frac{q}{H}, \quad \log \frac{z}{z_1} = \frac{u_o}{\omega} = \frac{h}{H}.$$

Le logarithme népérien de  $\frac{z}{z_1}$  peut être remplacé, eu égard à la petitesse des déplacements dans le sens vertical, par  $\frac{z}{z_1} - 1$ .

Il vient donc enfin :

$$q = H(x - x_1), \quad h = \frac{H}{z_1}(z - z_1).$$

Revenons alors à l'équation (3) du § 6, soit :

$$h = \frac{3}{4H^3} q(Q - q),$$

et remplaçons-y  $q$  et  $h$  par les valeurs que nous venons de donner. Nous obtenons :

$$\frac{3Q^2z_1}{16H^4} - (z - z_1) = \frac{3z_1}{4H^2} \left[ x - x_1 - \frac{Q}{2H} \right]^2.$$

Cette équation représente une parabole à axe vertical tournant sa concavité vers le bas et dont le paramètre est  $\frac{2H^2}{3z_1}$ . L'amplitude horizontale  $x - x_1$  de l'arc décrit par la particule, valant  $\frac{q}{H}$ , ne grandit que de 0 à  $\frac{Q}{H}$  pendant que l'onde tout entière passe, et la molécule, après s'être élevée en tout de la quantité  $\frac{3Q^2z_1}{16H^4}$  dans la première moitié de sa course, s'abaisse progressivement de la même quantité dans la seconde moitié.

Ainsi « les trajectoires décrites lors du passage d'une onde solitaire sont des arceaux paraboliques symétriques par rapport à un axe vertical, et dont l'ampli-

tude horizontale constante est le quotient du volume de l'intumescence par la profondeur primitive, tandis que leur hauteur, égale à celle de l'onde pour les molécules superficielles, se trouve, pour les autres, proportionnelle à leur distance au fond. La distance du foyer de chaque arceau à sa directrice ne dépend pas de la hauteur de l'onde; elle est les deux tiers de la profondeur primitive pour les molécules superficielles, et elle varie, pour les autres molécules, en raison inverse de leur distance au fond ».

6<sup>e</sup> Nous allons enfin démontrer que, parmi toutes les intumescences ayant une énergie donnée, c'est l'onde solitaire qui a le moindre moment d'instabilité.

Ainsi, sous la condition que la quantité

$$\rho g \int_{-\infty}^{+\infty} h^2 dx = \mathcal{E}$$

soit constante, nous nous proposons de rendre minima l'intégrale  $M = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{3h^3}{H^3} \right] dx$ .

A cet effet, nous prendrons comme variable indépendante, au lieu de  $x$ , la quantité  $\lambda = \int_{-\infty}^x h^2 dx$ , variant de 0 à  $\frac{\mathcal{E}}{\rho g}$  quand  $x$  va de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

Comme, pour  $t$  constant,  $dx = \frac{d\lambda}{h^2}$ , il vient :

$$M = \int_0^{\frac{\mathcal{E}}{\rho g}} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\partial h^2}{\partial \lambda} \right)^2 - \frac{3h}{H^3} \right] d\lambda,$$

et les limites d'intégration sont les mêmes pour toutes les intumescences considérées.

Lorsqu'on passe d'une intumescence à une autre infinitement voisine, les fonctions  $h$  et  $M$  deviennent  $h + \varepsilon h$  et  $M + \varepsilon M$ , et l'on a :

$$\varepsilon M = \int_0^{\frac{\rho g}{\delta h}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \lambda} \frac{\partial \delta h^2}{\partial \lambda} + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \delta h^2}{\partial \lambda} \right)^2 - \frac{3\varepsilon h}{H^3} \right\} d\lambda.$$

Intégrons le premier terme par parties ; le terme intégré  $\frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \lambda} \delta h^2$  s'annule aux deux limites de l'intégration, et si, dans le terme qui reste,

$$-\int_0^{\frac{\rho g}{\delta h}} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial \lambda^2} \delta h^2 d\lambda,$$

on remplace  $\delta h^2$  par  $2h\delta h + (\delta h^2)$ , l'expression de  $\varepsilon M$  devient par regroupement de ses termes :

$$\begin{aligned} \varepsilon M = & - \int_0^{\frac{\rho g}{\delta h}} \left\{ \frac{\partial^2 h^2}{\partial \lambda^2} h + \frac{3}{H^3} \right\} \varepsilon h d\lambda \\ & + \int_0^{\frac{\rho g}{\delta h}} \left\{ \left( \frac{\partial \delta h^2}{\partial \lambda} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial \lambda^2} (\varepsilon h)^2 \right\} d\lambda. \end{aligned}$$

Pour que  $M$  soit extremum, il faut que  $\delta M$  ait un signe constant quel que soit le signe de la variation infinitement petite  $\varepsilon h$ ; ceci exige donc d'abord que le terme du premier degré en  $\varepsilon h$  soit nul, c'est-à-dire qu'on ait :

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial \lambda^2} h + \frac{3}{H^3} = 0.$$

$$\text{Or : } \frac{\partial h^2}{\partial \lambda} = \frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = 2 \frac{\partial h}{\partial q},$$

si l'on introduit la variable

$$q = \int_x^\infty h dx.$$

$$\text{Par suite : } \frac{\partial^2 h^2}{\partial \lambda^2} = 2 \frac{\partial^2 h}{\partial q^2} \frac{1}{h}.$$

L'équation de condition s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} + \frac{3}{2H^3} = 0,$$

et n'est autre que l'équation caractérisant, comme nous l'avons vu à la fin du § 6, l'onde solitaire.

Si c'est à partir de cette onde solitaire qu'on calcule la variation  $\delta M$ , on a, en remplaçant

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 h^2}{\partial \lambda^2} \text{ par } -\frac{3}{hH^3}; \\ & \delta M = \int_0^{\frac{S}{pg}} \left\{ \left( \frac{\partial \delta h^2}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{3}{2hH^3} (\delta h)^2 \right\} d\lambda, \end{aligned}$$

et comme pour l'onde solitaire  $h$  est essentiellement positif,  $\delta M$  sera positif pour toute variation infiniment petite de  $h$ ; cela prouve bien que le moment d'instabilité  $M$  est minimum pour l'onde solitaire.

D'ailleurs la valeur de ce minimum est, en remplaçant dans  $M$   $\frac{\partial h^2}{\partial \lambda}$  par  $2 \frac{\partial h}{\partial q}$  et  $d\lambda$  par  $hdq$ :

$$M_0 = \int_0^Q \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial q} \right)^2 - \frac{3h}{H^3} \right] hdq,$$

ou encore en substituant à  $h$  sa valeur  $\frac{3}{4H^3}(Qq - q^2)$  :

$$M_o = \left(\frac{3}{4H^3}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^Q (Q^3q - 6Q^2q^2 + 10Qq^3 - 5q^4) dq = -\frac{1}{10} \left(\frac{3}{4H^3}\right)^{\frac{1}{2}} Q^5.$$

Comme nous avons vu (4°) que pour l'onde solitaire  $\mathcal{E} = \rho g \left(\frac{Q}{2H}\right)^3$ , il vient enfin, par l'élimination de  $Q$  :

$$M_o = -\frac{27}{20} \frac{1}{H^4} \sqrt[3]{\left(\frac{\mathcal{E}}{\rho g}\right)^{\frac{5}{3}}}.$$

Pour juger d'après cela de la stabilité d'une intumescence donnée, on évaluera : 1° son énergie  $\mathcal{E}$ ; 2° son moment d'instabilité  $M$  ( $\mathcal{E}$  et  $M$  ne variant pas d'ailleurs d'un instant à l'autre); 3° le moment d'instabilité  $M_o$  de l'onde solitaire ayant  $\mathcal{E}$  pour énergie. Si  $M = M_o$ , l'intumescence n'est autre que l'onde solitaire, de forme invariable, et par suite stable. Si  $M$  dépasse peu  $M_o$ , la forme de l'intumescence, constamment variable, oscillera autour de celle de l'onde solitaire de même énergie, sans en différer jamais beaucoup; elle ne pourrait en effet s'en écarter notablement sans que le moment d'instabilité grandît, ce qui est impossible, puisqu'il ne varie pas d'un moment à l'autre. Ainsi la quantité positive  $M - M_o$  mesure en quelque sorte le champ de déformation possible de l'intumescence, et cela suffit à justifier le nom de moment d'instabilité donné à l'invariant  $M$  par M. Boussinesq.

**8. Propagation d'une intumescence quelconque.** — Quand l'intumescence est, ou positive et d'un volume ou d'une longueur considérable, ou négative, il n'y a plus de forme stable qu'elle puisse prendre. Mais la formule (13) du § 3 :

$$\omega = \sqrt{gH} \left[ 1 + \frac{3h}{4H} + \frac{H^2}{6h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right],$$

qui définit à tout instant la vitesse de propagation des diverses parties de l'intumescence, permet de prédire les circonstances qui se présenteront dans la propagation du mouvement.

Examinons tout d'abord le cas d'une intumescence

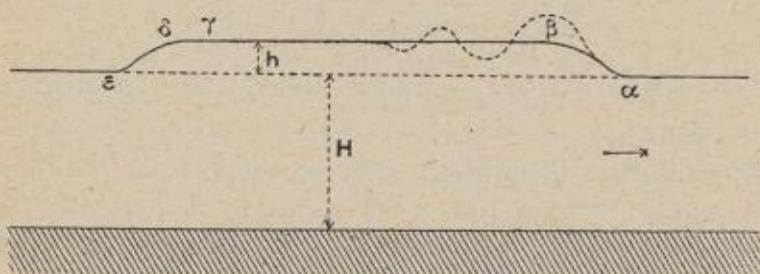


Fig. 6.

assez longue, mais limitée, telle qu'en produirait l'injection continue, dans le canal, d'un certain volume liquide y arrivant avec un débit constant pendant un temps notable.

Au début, peu après sa formation, le profil de l'intumescence comprendra une partie  $\beta\gamma$  à peu près horizontale, raccordée avec le niveau initial par des arcs infléchis suivant  $\alpha\beta$  et  $\gamma\delta\varepsilon$ .

Dans la partie médiane, la courbure est insignifiante,

et la célérité de la propagation a sensiblement pour mesure :

$$\omega = \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{H} \right),$$

ou encore, si le carré de  $\frac{h}{H}$  est négligeable devant l'unité :

$$\omega = \sqrt{g \left( H + \frac{3}{2} h \right)}.$$

Vers la queue de l'onde, en  $\hat{\epsilon}$ , la courbure devient appréciable, et  $h$  va en diminuant ; le troisième terme, négligé, de l'expression générale de  $\omega$  prend une valeur sensible, négative, puisque le profil tourne (jusqu'à l'inflexion du moins) sa convexité du côté des  $h$  positifs. Ainsi la célérité de la tranche située sous  $\hat{\epsilon}$  sera moindre que celle de la tranche située sous  $\gamma$ , dans la partie horizontale qui la précède. De là résulte une tendance de la queue de l'onde à se séparer du corps et à constituer une intumescence distincte qui se transforme en onde solitaire. Dans le cheminement du gros de l'onde, par le même mécanisme, le morcellement se reproduira, et l'intumescence se résoudra en une suite d'ondes décroissantes, cela, tant que la courbure au sommet de chacune d'elles soit assez forte pour que la vitesse du point le plus haut n'excède pas celle des portions adjacentes.

Ainsi se trouvent expliquées des observations très précises de Scott Russell sur le morcellement de la queue des longues intumescences.

Supposons maintenant qu'on fasse naître un remous indéfini, en versant continuellement et uniformément

du liquide à l'entrée du canal. L'onde alors n'aura plus de queue. Nous verrons évidemment une nappe liquide, dont la hauteur sera bientôt à peu près constante, s'avancer progressivement : sa vitesse de propagation multipliée par sa hauteur sera la mesure du volume liquide injecté par unité de temps et par unité de largeur du canal. La courbure de cette lame liquide étant insensible (abstraction faite de la tête de l'onde), on aura comme tout à l'heure :

$$\omega = \sqrt{g\left(H + \frac{3}{2}h\right)},$$

conformément à la loi expérimentale découverte par H. Bazin.

Mais, à la tête de l'onde, le raccordement avec le niveau primitif fait prendre à la courbure une valeur négative sensible ; même à égale hauteur, la vitesse de propagation des tranches de la partie en question sera, d'après l'expression de  $\omega$ , inférieure à celle de la lame. La tête de l'onde sera par suite comme inondée par l'afflux de la lame : elle s'exhaussera jusqu'à ce que son excès d'élévation compense l'influence du terme négatif de l'expression de  $\omega$  ; et de la sorte se trouve expliquée la formation de l'*onde initiale* signalée par H. Bazin. L'onde initiale se gonflera jusqu'à ce que la vitesse de son centre de gravité, qui est  $\sqrt{g(H + 3\eta)}$ , soit sensiblement celle de la lame même : ceci exige que l'on ait  $\eta = \frac{h}{2}$ . Pour l'onde solitaire, si  $h_m$  est la saillie, on a  $\eta = \frac{h_m}{3}$  ; pour l'onde initiale, la partie

antérieure est plus à pic, et cela relève un peu le centre de gravité; nous poserons donc

$$\eta = \frac{h(1+\varepsilon)}{3},$$

$\varepsilon$  étant une petite quantité positive. Par comparaison, nous aurons

$$h_m = \frac{3}{2} h \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

L'observation, difficile d'ailleurs, de l'onde initiale a donné à H. Bazin  $h_m = \frac{3}{2} h$ .

Considérons l'arrière de l'onde initiale. Son raccord avec la lame se fera par une partie concave, descendant sous le niveau de la lame; en effet, d'après le raisonnement fait au début de ce paragraphe, le terme fonction de la courbure rendra la célérité de la partie concave de l'onde initiale supérieure à celle de la lame: il se creusera donc un vide entre l'onde initiale et la lame. Toutefois le creux formé ne saurait atteindre le niveau primitif, car alors, au point bas,  $h$  deviendrait négatif et  $\omega$  y serait inférieur à la célérité des tranches suivantes, de là un afflux exhaussant de suite le niveau en ce point. Le même mode de raisonnement montre que la concavité qui suivra l'onde initiale ne pourra se raccorder à la lame qu'au moyen d'une partie convexe en saillie sur la lame, et ainsi de suite [voir le trait ponctué de la figure 6]. « Ces convexités et concavités auront des hauteurs décroissantes de l'une à l'autre, et bientôt insensibles, à cause sans doute des frottements intérieurs du fluide. La forme de l'onde

n'aura acquis un peu de stabilité que lorsque toutes les parties plus hautes que la lame placée à l'arrière seront convexes, et toutes les parties plus basses concaves, de manière que les points d'inflexion du profil longitudinal se trouvent à peu près sur le prolongement de la surface libre de cette lame. »

Examinons enfin les ondes négatives limitées. Par une éjection momentanée d'eau du canal, on produit une dépression présentant, au début de sa propagation, une partie concave se raccordant par deux parties convexes avec le niveau primitif. La forme de la dépression, tant que son altération n'est pas trop grande, montre que l'on a sensiblement  $\gamma = -\frac{1}{3} h_m$  ( $h_m$  étant la valeur absolue de l'abaissement maximum) : la vitesse de propagation du centre de gravité sera donc

$$\omega = \sqrt{g(H + 3\gamma)} = \sqrt{g(H - h_m)},$$

et cette loi est très sensiblement conforme aux expériences d'H. Bazin.

Mais l'onde se déforme très vite, comme l'indique d'ailleurs notre formule. Partout  $h$  est négatif; de plus, suivant  $\alpha\beta$  et  $\delta\varepsilon$ ,  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$  est positif; suivant  $\beta\gamma\delta$ , il est négatif (fig. 7). Dès lors, le fond du creux se propagera moins vite que les deux parties voisines; l'avant va donc s'allonger, tandis qu'à l'arrière la pente s'accentuera, puis une saillie s'y formera engendrant une onde positive. L'onde positive ainsi engendrée à la queue de l'onde négative aura à son arrière, pour se raccorder à la surface libre primitive, une partie concave qui ne pourra subsister, et par la répétition du raisonnement

fait plus haut, on se rendra compte de la génération d'une suite d'ondes alternativement positives et négatives ; ces ondes iront en décroissant, leur énergie totale  $\rho g \int_{-\infty}^{+\infty} h^2 dx$  étant constante et finie.

Dans les ondes négatives, le volume  $q$  d'intumescence  $\int_x^\infty h dx$  ne varie plus, d'après cela, dans un sens constant quand on recule de la tête de l'onde à

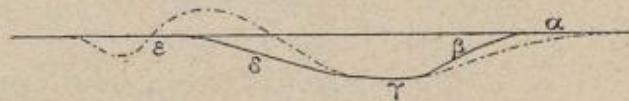


Fig. 7.

la queue. Il y a intérêt à introduire ce que M. Boussinesq appelle la *vitesse de propagation d'un élément d'énergie*, vitesse d'une tranche qui se déplace de manière à avoir constamment devant elle une même fraction de l'énergie totale de l'onde. Cette vitesse  $\omega'$  sera la valeur de  $\frac{dx}{dt}$  caractérisée par

$$\lambda = \int_x^\infty h^2 dx = \text{const.},$$

ou :

$$-h^2 dx + 2dt \int_x^\infty h \frac{\partial h}{\partial t} dx = 0.$$

$$\text{On a donc : } \omega' = \frac{2}{h^2} \int_x^\infty h \frac{\partial h}{\partial t} dx.$$

Comme nous savons que

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{gH} \left( h + \frac{3h^2}{4H} + \frac{H^2}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right),$$

il vient, par une intégration immédiate :

$$\omega' = \sqrt{gH} \left\{ 1 + \frac{h}{H} + \frac{H^2}{6} \left[ \frac{2}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}.$$

L'écart entre la célérité de volume et la célérité d'énergie est donc :

$$\omega' - \omega = \sqrt{gH} \left\{ \frac{h}{4H} + \frac{H^2}{6h^2} \left[ h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \right\},$$

$$\text{ou } \omega' - \omega = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{g}{H}} h \left\{ 1 + \frac{2H^3}{3} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right\}.$$

Comme  $\frac{\partial}{\partial q} = - \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x}$ , il vient :

$$\omega' - \omega = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{g}{H}} h \left[ 1 + \frac{2}{3} H^3 \frac{\partial^2 h}{\partial q^2} \right],$$

et l'on reconnaît que cette différence ne s'annule, comme il était évident, que dans le cas de l'onde solitaire, seule douée de stabilité.

**9. Propagation d'une longue intumescence à courbure insensible.** — « La tête d'une onde négative, s'allongeant sans cesse, finit par n'avoir plus une courbure appréciable, et il en serait évidemment de même de tout le corps d'une dépression sans fin, dont la profondeur croîtrait de plus en plus à mesure qu'on s'éloignerait de sa tête. L'étude de telles intumes-

cences à courbures insensibles en presque tous leurs points présente un intérêt particulier pour la pratique, parce que l'expérience montre que les crues des rivières, l'introduction et le retrait de ces crues dans les parties inférieures de leurs affluents, la propagation de la marée le long des fleuves ou des canaux qui communiquent avec la mer, se font en général d'une manière assez graduelle pour ne produire que des ondes de cette espèce<sup>1</sup>.

$$\text{On a alors : } \omega = \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{4H} \right),$$

et comme nous avons vu au § 3 que

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\omega)}{\partial x} = 0,$$

$$\text{il vient : } \frac{\partial h}{\partial t} + \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{2H} \right) \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Cette équation aux dérivées partielles du premier ordre admet pour intégrale générale

$$x - \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{2H} \right) t = f(h), \quad (1)$$

$f(h)$  étant une fonction arbitraire. De là cet énoncé<sup>2</sup> :

“ Lorsqu'une intumescence de très petite courbure se propage au sein de l'eau en repos d'un canal rectangulaire horizontal, et qu'on peut faire abstraction des frottements, la surface libre change, d'un instant à l'autre, de manière que chacune de ses ordonnées  $h$ , comptée au-dessus du niveau primitif, se transporte

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 8, p. 411.

<sup>2</sup> J. BOUSSINESQ, 8, p. 412.

(en apparence), en conservant sa grandeur et dans le sens de la propagation de l'onde, avec la vitesse

$$\sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{2H} \right);$$

cette vitesse est constante, pour l'ordonnée considérée, tant que la profondeur primitive H l'est elle-même.

Supposons qu'il s'agisse de la propagation des marées, considérée comme graduelle et bien continue, le long d'un canal horizontal débouchant dans l'Océan. Nous aurons (à peu près), à l'entrée du canal, pour  $x=0$  :

$$H+h=a\left[1+k \sin \frac{2\pi t}{T}\right], \quad (2)$$

$a$ ,  $k$ ,  $T$ ,  $H$  étant des constantes données. Alors, en comparant (1), pour  $x=0$ , à (2), on trouve, par l'élimination de  $t$ , la valeur explicite de  $f(h)$ , et par suite on obtient comme équation de la surface libre à tout instant  $t$  :

$$x=\sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{2H} \right) \left[ t - \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{H+h-a}{ka} \right].$$

La vitesse moyenne  $U$  dans une tranche a d'ailleurs pour mesure :

$$U=\frac{\omega h}{H+h}=\sqrt{gH} \left( 1 - \frac{h}{4H} \right) \frac{h}{H}. \quad (3)$$

L'influence des frottements atténue l'intérêt pratique de ces résultats.

Au bout d'un certain temps, et assez loin de l'embouchure, la marée devient insensible, la profondeur constante, et le régime du canal se règle de telle sorte

que l'afflux total durant une période,  $\int_0^T (H+h) U dt$ , soit nul. Si l'on remplace  $U$ , puis  $h$ , par leurs valeurs tirées successivement de (3) et de (2), il vient, par un calcul très simple, sous réserve de négliger, vis-à-vis du petit terme  $\frac{a-H}{a}$ , des termes de l'ordre de grandeur de son carré :  $H = a \left[ 1 + \frac{3}{8} k^2 \right]$ .

Ainsi le niveau moyen de la mer sera inférieur de  $\frac{3}{8} ak^2$  à celui de la surface libre du canal, dans les parties où les oscillations des marées sont devenues insensibles et la hauteur  $H$  constante.

B. de Saint-Venant<sup>1</sup> est parvenu, par une analyse très différente de celle-ci, aux formules

$$x - [3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}] t = f(h),$$

$$U = 2\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}.$$

Ces formules reviennent sensiblement à celles de M. Boussinesq, comme on le reconnaît en développant  $\sqrt{gH \left( 1 + \frac{h}{H} \right)}$  suivant les puissances croissantes de  $h$ .

<sup>1</sup> B. DE SAINT-VENANT, 4, p. 237.

## CHAPITRE IV

### ONDES D'ÉMERSION ET D'IMPULSION

1. **Définitions ; équations générales qui définissent le problème<sup>1</sup>.** — Les *ondes par émersion* se produisent en immergeant légèrement un corps solide dans un fluide au repos et en l'enlevant ensuite brusquement : le creux formé par le solide sera aussitôt comblé et tout le fluide se mettra en mouvement.

Les *ondes par impulsion* sont engendrées par des pressions variables exercées à la surface libre durant un temps très court, comme il s'en exerce à l'endroit de la surface d'un bassin où éclate un coup de vent.

Comme le liquide est supposé *préalablement en repos*, initialement le tourbillon ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) est nul en chaque point, et par suite, à tout instant ultérieur, il existera un potentiel des vitesses  $\varphi$  vérifiant l'équation de Laplace  $\Delta\varphi = 0$ . (1).

De plus, la seule force extérieure active étant la pesanteur, si l'axe des  $z$  est dirigé suivant la verticale descendante, nous aurons (1<sup>ère</sup> S<sup>on</sup>, Ch. I, § 5) :

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 13, p. 578.

$$\frac{p}{\rho} = gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + f(t).$$

Nous supposerons que les mouvements étudiés ont assez peu d'amplitude pour que les carrés des vitesses soient insignifiants devant les termes conservés ; et comme il nous est loisible d'inclure dans la fonction  $\varphi$  une fonction arbitraire du temps sans changer les composantes des vitesses, nous aurons simplement la

seconde équation  $\frac{p}{\rho} = gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2)$

Nous appellerons  $h$  l'élévation, sur la verticale  $(x, y)$  et à l'époque  $t$ , de la surface supérieure du fluide, et  $\varphi_0$  la valeur que la fonction  $\varphi$  y reçoit :  $h$  et  $\varphi_0$  seront des fonctions de  $x, y, t$ . Toute l'étendue de cette surface supérieure est supposée libre et à une pression constante, dont nous prendrons la valeur pour origine des pressions, — sauf dans la région restreinte et durant le temps très court de la génération des ondes.

*Primitivement* l'ensemble est à l'état de repos, et l'on a partout  $\frac{p}{\rho} = gz$ , soit  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ , en même temps que les trois dérivées de  $\varphi$  par rapport aux coordonnées sont partout nulles. La fonction  $\varphi$  se réduit donc à une constante qu'on peut prendre *égale à zéro*.

Ce régime cesse quand on enlève le solide ou qu'un coup de vent souffle ; soit  $\varepsilon$  la durée *très brève* de l'enlèvement ou du coup de vent : c'est la fin de cet

intervalle  $\varepsilon$  que nous prendrons pour origine du temps. Nous allons analyser le phénomène qui se passe depuis  $t = -\varepsilon$  jusqu'à  $t = 0$ .

1<sup>o</sup> *Ondes d'émersion.* — Durant l'instant  $\varepsilon$ , les ordonnées de la surface ne varieront pas sensiblement; elles seront nulles à l'extérieur de la région en contact avec le solide, et égales à celles de la surface limite du corps dans la région de contact; nous désignerons par  $F(x, y)$  la petite ordonnée  $h$  (au-dessous du niveau libre) de la surface du corps dans cette région,  $F$  étant une fonction *supposée donnée*. Pendant l'enlèvement du solide, dans la région de contact, la pression passe de la valeur  $\rho gh$  à celle de la pression atmosphérique 0; par suite, en vertu de l'équation (2),  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  croîtra de 0 à  $gh$ . Comme  $\varphi$  est initialement nulle, sa valeur au bout de l'intervalle  $\varepsilon$  sera de l'ordre de grandeur de  $gh\varepsilon$ , et sera négligeable dans les calculs où  $h$  ou ses dérivées partielles interviendront au premier degré.

D'après cela, les conditions initiales des ondes par émersion (pour  $t = 0$ ) sont :

$$\varphi_0 = 0, \quad h = F(x, y). \quad (3)$$

2<sup>o</sup> *Ondes d'impulsion.* — Durant le bref instant  $\varepsilon$ , à un moment donné, sur la verticale  $(x, y)$ , la pression superficielle, d'abord nulle, a la valeur  $p_0$ ; en vertu de (2), à cet instant,  $\varphi_0$ , d'abord nul, a une valeur qui est au plus de l'ordre de  $\frac{p_0\varepsilon}{\rho}$ , les vitesses superficielles seront du même ordre, et les chemins parcourus de l'ordre au plus de  $\frac{p_0\varepsilon^2}{\rho}$ ; en particulier,

l'ordonnée  $z=h$  de la surface libre, d'abord nulle, sera au plus de ce dernier ordre, et par suite elle sera insensible devant le premier et le dernier terme de l'équation (2). Nous pourrons donc écrire :

$$\frac{p_o}{\rho} = -\frac{\partial \varphi_o}{\partial t}, \text{ ou } \varphi_o = -\frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^t p_o dt.$$

Le second membre mesure, au facteur  $-\frac{1}{\rho}$  près, l'*impulsion totale* subie par l'unité d'aire de la surface, au point situé sur la verticale  $(x, y)$ . Nous supposons cette impulsion donnée en fonction de  $(x, y)$  à la fin de la période de génération des ondes. Nous aurons donc comme conditions initiales des ondes par impulsion (pour  $t=0$ ):  $\varphi_o = F_1(x, y)$ ,  $h=0$ , (4)  $F_1(x, y)$  étant une fonction donnée.

Examinons maintenant la période de développement des ondes, de l'instant  $t=0$  à celui  $t=+\infty$ , et formons les équations de condition relatives à la surface libre. Comme on y aura constamment  $p=0$  et  $z=h$ , il s'ensuivra :

$$h = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Une simplification importante peut être introduite en observant que  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  a très sensiblement la même valeur au point considéré de la surface et au pied  $(x, y)$  de la petite ordonnée  $h$  sur le plan  $z=0$  de la surface libre primitive. Nous aurons alors pour équation de la

surface libre  $h = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  (pour  $z=0$ ).

Une molécule fluide ne quittant pas la surface libre, et son ordonnée  $h$  étant fonction de  $x, y, t$ , nous

$$\text{aurons : } w = \frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v + \frac{\partial h}{\partial t},$$

ou, à des termes près du second ordre de petiteur et négligeables :  $\frac{\partial h}{\partial t} = w$  ;

$w$  n'est d'ailleurs que  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  qui, pour  $z = h$ , est sensiblement le même que pour  $z = 0$ ; nous aurons donc :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (\text{pour } z = 0).$$

Par élimination de  $h$ , nous reconnaissons que la fonction  $\varphi$  aura à vérifier, pour  $z = 0$ , et pour toute valeur positive de  $t$ , la relation

$$\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{pour } z = 0). \quad (5)$$

Enfin, le long des parois du bassin, les molécules se déplaceront tangentiellement à ces parois, et l'on

aura :  $\frac{d\varphi}{dn} = 0.$  (6)

Comme  $\varphi_0 = \varphi(x, y, h, t)$  se confond, sauf erreur négligeable, avec  $\varphi(x, y, 0, t)$  et que

$$h = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, y, h, t)}{\partial t}$$

se confond de même avec  $\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t}$ , nous pouvons résumer ainsi la mise en équations.

Il s'agit de déterminer une fonction  $\varphi(x, y, z, t)$  vérifiant l'équation  $\Delta\varphi = 0$ , et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\text{pour } z=0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0;$$

$$\text{aux parois,} \quad \frac{d\varphi}{dn} = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{pour } z=0 & \left\{ \begin{array}{l} \varphi=0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}=gF(x, y) \end{array} \right. \text{ (émersion),} \\ \text{et } t=0 & \left\{ \begin{array}{l} \varphi=F_1(x, y), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}=0 \end{array} \right. \text{ (impulsion).} \end{aligned}$$

2. **Unicité de la solution.** — Le problème ne comporte qu'une solution. Si en effet deux fonctions  $\varphi$  et  $\varphi + \varphi'$  vérifiaient les équations établies, leur différence  $\varphi'$  satisferait partout et toujours à

$$\Delta\varphi' = 0, \tag{7}$$

et l'on aurait :

$$\text{pour } z=0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial z} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} = 0; \tag{8}$$

$$\text{aux parois,} \quad \frac{d\varphi'}{dn} = 0;$$

$$\text{pour } z=0 \text{ et } t=0, \quad \varphi' = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0.$$

Multiplions l'équation (8) par  $-\frac{\partial \varphi'}{\partial t} dv$ , en désignant par  $dv$  un élément de volume entourant le point  $(x, y, z)$  à l'instant  $t$  et sommes pour toute l'étendue

du volume fluide. Il vient évidemment, en posant

$$\Delta_1 = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 ;$$

$$\frac{d}{dt} \int \Delta_1 \varphi' \cdot dv = 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right) \right\} dv. \quad (9)$$

En vertu de la formule d'Ostrogradsky, le second membre n'est autre que  $\int_s \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \frac{d\varphi'}{dn} ds$ , étendue à toute la surface qui limite le volume fluide; mais, sur toutes les parois supposées fixes, on a  $\frac{d\varphi'}{dn} = 0$ ; de plus, à la surface libre, nous pouvons prendre

$$\frac{d\varphi'}{dn} = - \frac{\partial \varphi'}{\partial z},$$

ou encore, en vertu de (8).  $-\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2}$ ; par suite, le second membre de (9) a pour valeur, en désignant par  $d\sigma$  un élément de la surface libre :

$$-\frac{1}{g} \frac{d}{dt} \int \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right)^2 d\sigma.$$

L'équation (9) est donc intégrable et donne :

$$\int \Delta_1 \varphi' \cdot dv + \frac{1}{g} \int \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right)^2 d\sigma = \text{const.} \quad (10)$$

Cela posé, revenons à l'équation (7), multiplions-la

par  $2\varphi'dv$ , et intégrons dans le même domaine, en remarquant que

$$2\varphi' \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right)^2.$$

Il vient par application de la formule d'Ostrogradsky :  $0 = \int 2\varphi' \frac{d\varphi'}{dn} ds - \int \Delta_1 \varphi' . dv$ .

Par suite, comme la première intégrale est nulle pour toute la paroi, et qu'à la surface libre, pour  $t=0$ ,  $\varphi'=0$ , on voit que pour  $t=0$ ,  $\int \Delta_1 \varphi' dv = 0$ .

Comme d'autre part, au même instant,  $\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0$  à la surface libre, la constante de l'équation (10) est nulle.

Or le premier membre de cette équation (10) ne peut être nul que si l'on a partout :

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire que si la fonction  $\varphi'$  est nulle en tout point et à tout instant, comme elle l'est pour  $t=0$  à la surface libre<sup>1</sup>.

**3. Cas des ondes superficielles<sup>2</sup>.** — Considérons spécialement le cas d'ondes assez courtes pour ne créer qu'une agitation quasi-superficielle : le phénomène n'est pas alors influencé par les circonstances du fond, en sorte qu'on peut faire abstraction du fond et supposer que le liquide s'étende indéfiniment vers le

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 8, p. 327-329.

<sup>2</sup> J. BOUSSINESQ, 13, p. 582-589.

bas. Admettons de plus que le bassin ait des parois verticales.

A une grande profondeur, soit pour  $z = \infty$ , les vitesses seront constamment nulles,  $\varphi$  aura une valeur constante qu'il est loisible de prendre nulle.

Dans ces conditions, je dis qu'en tous les points du

$$\text{fluide on a : } \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Soit en effet  $\tau$  le premier membre de cette équation. A la surface libre, on a  $\tau = 0$ , ainsi qu'au fond. De plus l'équation  $\Delta \varphi = 0$  entraîne :  $\Delta \tau = 0$ .

Multiplions cette équation par  $2\tau dv$ ,  $dv$  étant un élément de volume du liquide, et intégrons dans tout le domaine occupé par le fluide au-dessus d'un plan horizontal de cote Z. Il vient comme au paragraphe précédent :

$$0 = \int \tau \frac{d\tau}{dn} ds - \int \Delta \tau \cdot dv. \quad (11)$$

Or, d'une part, on a  $\tau = 0$  sur toute l'étendue de la surface libre.

D'autre part, le long des parois verticales, on a partout et constamment  $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ ; par suite, si l'on prend une même variation  $dn$  en grandeur et en direction le long d'une bande verticale, soit à toute profondeur, à tous les instants, on a :

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{d}{dn} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

$$\text{et par suite : } \frac{d\tau}{dn} = 0.$$

D'après cela, la première intégrale de l'équation (11)

n'est à appliquer qu'à la section horizontale Z ; comme là  $dn = dZ$ , si s est la surface, l'équation (11) donnera (si  $\tau$  n'est pas indépendant de  $x, y, z$ ) :

$$\int \frac{\partial \tau^2}{\partial Z} \frac{ds}{s} > 0;$$

supposons que le mode de décomposition de s en éléments soit indépendant de Z ; nous aurons :

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial Z} \frac{ds}{s} = \frac{\partial}{\partial Z} \left( \tau^2 \frac{ds}{s} \right),$$

et par suite :  $\frac{\partial}{\partial Z} \int \tau^2 \frac{ds}{s} > 0.$

Or  $\int \tau^2 \frac{ds}{s}$  est la valeur moyenne de  $\tau^2$  sur la section ; cette moyenne ne sera pas nulle si  $\tau$  est quelque part différent de zéro, et d'après cette inégalité, elle croîtra avec Z et ne pourra s'annuler à l'infini. On doit donc avoir partout  $\tau = 0$ .

La relation  $\tau = 0$  ainsi établie entraîne cette autre

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0,$$

ou encore, en tenant compte de la valeur de  $\tau$  :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{g^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} = 0.$$

En égard à  $\Delta \varphi = 0$ , nous voyons ainsi que la fonction  $\varphi$  vérifie les deux équations indéfinies :

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + g^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (13)$$

**4. Ondes superficielles produites par l'émergence d'un cylindre plongé dans un canal rectangulaire.** — Dans le cas des ondes que fait naître au sein de l'eau en repos d'un canal rectiligne quasi-indéfini, à bords verticaux et de largeur constante, l'émergence d'un solide cylindrique, à génératrices horizontales et normales à la direction du canal, occupant toute sa largeur, — les mouvements s'opèrent dans des plans parallèles à celui des  $xz$  et de la même manière dans tous; alors la fonction donnée  $F$  ne dépendra que de  $x$ , et la fonction  $\varphi$ , et par suite les fonctions  $p$ ,  $\tau$ ,  $h$  ne dépendront pas de  $y$ .

La fonction  $\varphi$  satisfait aux équations indéfinies déduites de (12) et (13) :

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + g^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (14)$$

et aux équations de condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{pour } z=0,$$

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0 \quad \text{aux parois,}$$

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = gF(x) \quad \text{pour } z=0, t=0.$$

Nous supposerons, pour abréger l'écriture, que les unités soient choisies de telle sorte que l'on ait  $g=1$ .

A l'intégration de ce système différentiel s'applique une méthode féconde due à M. Boussinesq<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 41; 42, Notes 1 et 2. — J. BOUSSINESQ, 43, p. 319 à 356, 357 à 664. — J. BOUSSINESQ, 23, tome II, compléments; 47<sup>e</sup> et 48<sup>e</sup> leçons, notamment pp. 498 à 515.

Le principe de cette méthode est dans une curieuse propriété de l'intégrale définie :

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(\frac{x^2}{2}\right) \psi\left(\frac{t^2}{2x^2}\right) dx,$$

où  $f$  et  $\psi$  désignent deux fonctions arbitraires et  $t$  un paramètre variable ; elle consiste en ce que

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \int_0^\infty f'\left(\frac{x^2}{2}\right) \psi\left(\frac{t^2}{2x^2}\right) dx,$$

et dans cette expression ne figurent que les dérivées premières de  $f$  et  $\psi$  prises par rapport à leur argument.

Prenons :

$$f\left(\frac{x^2}{2}\right) = \tilde{\mathcal{F}}\left(x - \frac{x^2}{2}, z\right) + \tilde{\mathcal{F}}\left(x + \frac{x^2}{2}, z\right),$$

la fonction arbitraire  $\tilde{\mathcal{F}}$  de deux arguments étant seulement assujettie à ce que sa dérivée première en  $x$  s'annule pour  $x = \pm\infty$ .

On reconnaît que  $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \int_0^\infty (\psi'' + \psi) f' dx$ .

Soit  $\gamma$  l'argument  $\frac{t^2}{2x^2}$  dont dépend  $\psi$  ; prenons pour  $\psi$  l'intégrale de l'équation différentielle du second

$$\psi'' + \psi = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}, \quad (15)$$

s'annulant ainsi que sa dérivée première pour  $\gamma = 0$ . Le second membre de l'équation précédente deviendra alors :

$$\frac{1}{t\sqrt{2}} \int_0^\infty \left[ \tilde{\mathcal{F}}'\left(x - \frac{x^2}{2}, z\right) + \tilde{\mathcal{F}}'\left(x + \frac{x^2}{2}, z\right) \right] d\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\text{ou } \frac{1}{t\sqrt{2}} \left[ \tilde{\mathcal{F}}\left(x + \frac{x^2}{2}, z\right) - \tilde{\mathcal{F}}\left(x - \frac{x^2}{2}, z\right) \right]_{z=0}^{z=\infty}.$$

ou enfin zéro, puisque  $\tilde{\mathcal{F}}(\pm\infty, z) = 0$ .

Nous satisfaisons donc à la première équation indéfinie (14) en prenant :

$$\varphi = \int_0^\infty \left[ \tilde{\mathcal{F}}\left(x - \frac{x^2}{2}, z\right) + \tilde{\mathcal{F}}\left(x + \frac{x^2}{2}, z\right) \right] \psi\left(\frac{t^2}{2x^2}\right) dx,$$

où figure une fonction arbitraire de deux variables dont nous allons disposer de façon à satisfaire aux autres conditions.

La transcendante  $\psi(\gamma)$  définie par l'équation (15) peut se mettre sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \psi(\gamma) &= \sin \gamma \int_0^{\sqrt{\gamma}} \cos m^2 dm - \cos \gamma \int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin m^2 dm, \\ \psi(\gamma) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sin \gamma - \cos \gamma) + \int_0^\infty e^{-2m\sqrt{\gamma}} \cos m^2 dm, \\ \psi(\gamma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{(\sqrt{2}\gamma)^3}{1 \cdot 3} - \frac{(\sqrt{2}\gamma)^5}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right], \end{aligned}$$

et, pour  $\gamma$  très grand, on a, à fort peu près :

$$\psi(\gamma) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right).$$

Revenons à la fonction  $\varphi$ ; un calcul de dérivation, suivi d'un changement de variable, donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \int_0^\infty \left[ \tilde{\mathcal{F}}\left(x - \frac{t^2}{2x^2}, z\right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\mathcal{F}}\left(x + \frac{t^2}{2x^2}, z\right) \right] \psi'\left(\frac{x^2}{2}\right) dx, \end{aligned}$$

et l'on a pour  $t=0$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2\tilde{J}(x, z) \int_0^\infty \psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) dx, \quad \text{soit} \quad \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \tilde{J}(x, z).$$

Par suite, la relation  $\Delta \varphi = 0$ , dérivée par rapport à  $t$  et spécifiée pour  $t=0$ , donne :

$$\frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial z^2} = 0;$$

la fonction  $\tilde{J}(x, z)$  satisfait à cette équation indéfinie et à deux autres équations de condition ; d'abord, comme

pour  $z=0$ ,  $t=0$ , on a :  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(x)$  [ $g=1$ ],

nous devons avoir :  $\tilde{J}(x, 0) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} F(x)$  ;

ensuite nous avons :  $\tilde{J}(\pm\infty, z) = 0$ .

La théorie connue du potentiel logarithmique fournit une fonction  $\tilde{J}(x, z)$  répondant à ces conditions, à

savoir :  $\tilde{J}(x, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zF(\xi)d\xi}{z^2 + (x - \xi)^2}$ ,

ou, en faisant le changement de variable  $\xi = x + z\eta$  :

$$\tilde{J}(x, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x + z\eta)}{1 + \eta^2} d\eta.$$

A cette valeur de  $\tilde{J}(x, z)$  correspond, après une interversion de l'ordre des intégrations, la fonction  $\varphi$  suivante :

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{1 + \eta^2} \int_0^\infty \left[ F\left(x + \frac{\alpha^2}{2} + z\eta\right) \right. \\ & \left. + F\left(x - \frac{\alpha^2}{2} + z\eta\right) \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) dx, \end{aligned} \quad (16)$$

$\psi(\gamma)$  étant la transcendante définie plus haut.

Il se trouve que la fonction  $\varphi$  ainsi obtenue satisfait à toutes les conditions du problème, ainsi que le montrent des calculs directs.

A cause de l'unicité établie de la solution, le problème est ainsi complètement résolu.

De l'expression de  $\varphi$  se déduit immédiatement l'équation de la surface libre, soit (en faisant  $g=1$ ) :

$$h = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{pour } z=0.$$

Pour  $z=0$ , l'intégrale double qui définit  $\varphi$  se réduit au produit de deux intégrales simples, dont l'une

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{1+\eta^2}$  est égale à  $\pi$ , et il vient, en dérivant par rapport à  $t$  :

$$h = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \left[ F\left(x - \frac{t^2}{2x^2}\right) + F\left(x + \frac{t^2}{2x^2}\right) \right] \psi\left(\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Décomposons cette intégrale en deux, et posons :

$$x \pm \frac{t^2}{2x^2} = a, \quad r = |x-a|, \quad dq = F(a)da;$$

comme la substitution de la variable  $a$  à l'ancienne  $x$  donne :

$$x = \frac{t}{\sqrt{2r}}, \quad dx = \mp \frac{tda}{2r\sqrt{2r}},$$

nous aurons :

$$h = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t^2}{4r}\right) \frac{F(a)da}{r\sqrt{r}} = \frac{t}{\pi} \int \psi\left(\frac{t^2}{4r}\right) \frac{dq}{r\sqrt{r}}. \quad (17)$$

Il est entendu que la fonction  $F$  est nulle en dehors de la bande d'immersion; quant à  $F(a)da = dq$ , c'est la *dépression élémentaire* produite *initialement* sur la bande superficielle comprise entre les abscisses  $a, a+da$ . Cette dépression élémentaire engendre à toute distance sensible  $r$  de cette bande la dénivellation :

$$h_a = \frac{tdq}{\pi r \sqrt{r}} \psi\left(\frac{t^2}{4r}\right),$$

ou, en utilisant le développement de  $\psi(\gamma)$  en série :

$$h_a = \frac{dq}{\pi r} \left[ \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)}{1} - \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots \right],$$

et, dans le cas où  $\frac{t^2}{2r}$  est très grand :

$$h_a = \frac{dq}{\sqrt{\pi r^2}} \left[ \sqrt{\frac{t^2}{2r}} \cos\left(\frac{t^2}{4r} - \frac{\pi}{4}\right) \right].$$

Ces deux dernières formules coïncident avec celles obtenues, au début du XIX<sup>e</sup> siècle, par Poisson et par Cauchy<sup>1</sup>, au moyen de procédés non seulement très pénibles, mais aussi d'un emploi des plus délicats, sinon incertain.

Nous allons sommairement déduire des formules établies quelques conséquences susceptibles d'une interprétation physique.

Soit  $2l$  la largeur de la bande d'immersion suivant les  $x$ ; l'origine étant choisie au milieu de cette bande, étudions le mouvement du côté des  $x$  positifs, en des

<sup>1</sup> S. D. POISSON, 4, p. 112 et 118. — A. CAUCHY, 5, p. 99.

points dont l'abscisse  $x$  est très grande en comparaison de la demi-longueur immergée  $l$  (on rappelle que les unités sont choisies de manière que  $g = 1$ ).

Pendant une brève période initiale, tant que le rapport  $\frac{l^2}{4l}$  a une très petite valeur, le mouvement est régi par des lois très simples données par Poisson.

Les seules valeurs de  $\alpha$  à considérer sont celles de l'ordre de petitesse de  $t$ , ou pour lesquelles  $\frac{x^2}{2}$  est très petit vis-à-vis de l'intervalle  $2l$ , d'où pourra ne pas sortir la variable donnant à  $F$  des valeurs différentes de zéro, et, dans ces conditions, la valeur de  $\varphi$  peut être réduite à :

$$\varphi = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x+z\eta)d\eta}{z^2 + \eta^2} = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zF(\xi)d\xi}{z^2 + (x-\xi)^2}.$$

À la dépression élémentaire  $dq = F(a)da$  correspond donc dans  $\varphi$  l'élément :

$$\varphi_a = \frac{tdq}{\pi} \frac{z}{z^2 + (x-a)^2}.$$

En posant :  $x-a=\rho \sin \theta$ ,  $z=\rho \cos \theta$ , on obtient comme éléments correspondants des vitesses  $u$  et  $v$  :

$$u_a = -\frac{tdq}{\pi \rho^2} \sin 2\theta, \quad w_a = -\frac{tdq}{\pi \rho^2} \cos 2\theta.$$

Ainsi : « chaque molécule fluide prend tout d'abord un mouvement uniformément accéléré, dont l'accélération, inverse du carré de la distance  $\rho$ , a la grandeur  $\frac{dq}{\pi \rho^2}$  et la direction opposée à celle qui fait l'angle  $2\theta$

avec la verticale. Si l'on conçoit, menés par la génératrice immergée  $x=a$  du solide dont l'enlèvement donne naissance aux ondes, les deux plans rectangulaires qui sont inclinés sous l'horizon de  $45^\circ$ , le fluide compris au-dessous ou dans l'angle de ces plans se soulèvera pour combler le creux initial, tandis que le fluide qui leur est extérieur ou supérieur s'abaissera. Dans les deux cas, les molécules se rapprocheront du plan vertical bissecteur de l'angle des deux précédents, ou mené le long du sillon creux de la surface. On voit encore : 1<sup>o</sup> que les vitesses produites au-dessous du même sillon décroissent sensiblement, pour des couches de plus en plus profondes, comme l'inverse du carré de la profondeur; 2<sup>o</sup> que la tête de l'onde concave naissante est animée d'une célérité très grande. En effet, les ordonnées  $h$  de la surface, à la distance  $x-a=\varphi$ , seront données par la formule  $h = \int_0^t w_a dt$ , soit, eu égard à la valeur de  $w_a$  prise avec  $2\theta = \pi$  (pour  $t$  très petit) :

$$h = \frac{t^2 dq}{2\pi\varphi^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\varphi}{t} = \sqrt{\frac{dq}{2\pi h}};$$

or cette relation exprime que chaque ordonnée très petite  $h$  se transporte, le long du canal, avec une célérité constante, inverse de la racine carrée de sa hauteur  $h$  et, par conséquent, infinie pour la tête  $h=0$ .

Il suffirait évidemment de remplacer  $dq$  par  $q = \int_{-l}^{+l} F(a) da$ , pour étendre les mêmes lois au cas réel d'un sillon creux initial ayant une largeur finie  $2l$ . Seulement on devra supposer alors la distance donnée  $\varphi$  de ce creux aux points où l'on étudie le mouvement beaucoup plus grande que  $l$ , afin qu'on puisse regarder

der  $\frac{1}{\rho}$  et  $\theta$  comme les mêmes pour tous les éléments  $dq$ .<sup>1)</sup>

Proposons-nous maintenant l'étude du mouvement pour les époques et pour les points quelconques, qui ne donnent pas toutefois au rapport  $\frac{t^2}{4\rho}$  une valeur très grande, en nous limitant aux couches superficielles pour que  $z$  soit très minime devant  $\rho$ , et à la région située du côté des  $x$  positifs par rapport au sillon élémentaire initial.

Dans l'expression (16) de  $\varphi$ ,  $F\left(x + \frac{x^2}{2} + z\eta\right)$  sera négligeable, eu égard à la grandeur de  $x$ . Nous poserons alors :  $x + z\eta - \frac{x^2}{2} = \xi$ ; d'où :

$$dx = \frac{-d\xi}{\sqrt{2(x - \xi + z\eta)}}, \quad \text{ou} \quad -\frac{d\xi}{\sqrt{2\rho}},$$

sensiblement. Par suite :

$$\varphi = \frac{2}{\pi^2 \sqrt{\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{1 + \eta^2} \int_{-t}^{+t} F(\xi) \cdot \psi \left[ \frac{t^2}{4|x - \xi + z\eta|} \right] d\xi.$$

A une dépression élémentaire  $dq = F(a)da$  correspond, puisque le rapport  $\frac{t^2}{4(x - \xi + z\eta)}$  vaut à peu près  $\frac{t^2}{4\rho}$  et reste fini, l'élément

$$\varphi_a = \frac{2dq}{\pi \sqrt{\rho}} \psi \left( \frac{t^2}{4\rho} \right).$$

<sup>1)</sup> J. BOUSSINESQ, 13, p. 612-613.

On en déduit comme éléments correspondants des vitesses, en notant que  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ :

$$u_a = \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} = -\frac{dq}{\pi \rho \sqrt{\rho}} \left[ \psi\left(\frac{t^2}{4\rho}\right) + \frac{t^2}{2\rho} \psi'\left(\frac{t^2}{4\rho}\right) \right],$$

$$w_a = \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial t^2} = \frac{dq}{\pi \rho \sqrt{\rho}} \left[ \psi'\left(\frac{t^2}{4\rho}\right) + \frac{t^2}{2\rho} \psi''\left(\frac{t^2}{4\rho}\right) \right].$$

Ces expressions, aux grandes distances  $\rho$ , sont de l'ordre de petitesse de  $\frac{1}{\rho \sqrt{\rho}}$ , et décroissent moins vite que dans la première période, où elles étaient de l'ordre de  $\frac{1}{\rho^2}$ .

Enfin, on a pour l'ordonnée  $h$  de la surface la dérivée  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  spécifiée pour  $z=0$ , soit :

$$h = \frac{tdq}{\pi \rho \sqrt{\rho}} \psi\left(\frac{t^2}{4\rho}\right) = \frac{8dq}{\pi t^2} \left[ \gamma^{\frac{3}{2}} \psi(\gamma) \right],$$

en posant  $\gamma = \frac{t^2}{4\rho}$ . Les diverses ondes sillonnant le fluide à l'instant  $t$  seront constituées par des parties saillantes comprises entre creux : les positions des creux et sommets successifs s'obtiendront par la condition  $\frac{\partial h}{\partial \rho} = 0$ , ou  $\frac{d}{d\gamma} \left[ \psi(\gamma) \cdot \gamma^{\frac{3}{2}} \right] = 0$ .

Si l'on a égard au développement de  $\psi(\gamma)$  en série, on est conduit à l'équation transcendante

$$\frac{1}{1} - \frac{2(2\gamma)^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots \pm \frac{(n+1)(2\gamma)^{2n}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n+1)} \mp \dots = 0.$$

La plus petite racine est  $\gamma = 1,537$  (Poisson); la suivante est  $\gamma = 4,18$  (Cauchy). Pour les racines suivantes,  $\gamma$  est déjà assez grand; et l'on peut substituer à  $\psi'(\gamma)$  l'expression approchée  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right)$ ; les valeurs de  $\gamma$  annulant  $\frac{\partial h}{\partial r}$  sont alors définies par

$$\operatorname{tg}\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2\gamma}.$$

Cette équation se résout par approximations successives; les racines en nombre infini deviennent bientôt équidistantes entre elles de  $\pi$ .

A la première racine correspond la première onde creuse, et l'on a :

$$\varphi = 0,3253 \frac{t^2}{2}, \quad h = 2,7583 \frac{dq}{t^2} = 0,4486 \frac{dq}{\varphi};$$

à la seconde racine correspond la première onde en relief et l'on a :

$$\varphi = 0,120 \frac{t^2}{2}, \quad h = -17,76 \frac{dq}{t^2} = -1,066 \frac{dq}{\varphi};$$

aux racines sensiblement équidistantes correspond une valeur de  $\psi'(\gamma)$  égale à peu près à  $\pm \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , et l'on a :

$$h = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{dq}{\varphi} = \pm \frac{tdq}{2\varphi\sqrt{\pi\varphi}};$$

cette hauteur croît, en un même endroit, d'une onde à celle qui suit.

Pour conclure, « tout se passe, à quelque distance de la dépression initiale, comme si la surface s'était

couverte instantanément, dans cette région, d'une infinité d'ondes ou de rides, dont les fonds ainsi que les sommets et même tous les points prendraient, le long du canal, lors de l'émersion du solide, des mouvements apparents de transport uniformément accélérés, avec vitesse initiale nulle, mais avec des accélérations

$$\frac{2\rho}{t^2} = \frac{1}{2\gamma}, \text{ variant de l'infini à zéro pour ces diverses}$$

parties élémentaires d'ondes; d'ailleurs, chacune de ces parties décroît en hauteur, à mesure qu'elle progresse, inversement à la distance parcourue ou au carré du temps écoulé, et apporte aux couches fluides superficielles des vitesses, tant horizontales que verticales, inversement proportionnelles au cube du même temps  $t^1$ . »

L'extension de ces lois au cas d'une dépression finie se fait sans peine sous la même réserve que pour la période initiale étudiée tantôt.

M. Boussinesq a poursuivi cette étude et déterminé les lois des ondes venant à la suite d'un nombre considérable d'autres, et pour lesquelles le rapport  $\frac{t^2}{4\gamma}$  est très grand. Il a aussi envisagé le cas général d'un bassin indéfini et d'un corps immergé de forme quelconque<sup>2</sup>.

Dans ce qui précède, nous avons envisagé surtout la propagation du mouvement dans le sens vertical. Tout récemment M. G. Rousier<sup>3</sup> a appliqué avec succès les mêmes procédés à l'étude de la propagation

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 13, p. 618.

<sup>2</sup> J. BOUSSINESQ, 13, pp. 619-639 et 640-648.

<sup>3</sup> G. ROUSIER, p. 29-41.

dans une direction quelconque et il a obtenu des résultats élégants.

**5. Ondes superficielles produites par impulsion.** — Les lois régissant les ondes produites par impulsion à la surface du liquide en repos d'un canal se déduisent de ce qui précède. Les équations indéfinies et aux limites sont les mêmes, mais les conditions

d'état initial (pour  $z$  et  $t$  nuls)  $\varphi = 0$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(x)$

sont remplacées par  $\varphi = F_1(x)$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ . Or il suffit de prendre la dérivée  $\varphi_1$  par rapport au temps  $t$  de la fonction  $\varphi$  relative aux ondes d'émission pour avoir l'expression de la fonction  $\varphi$  convenant aux ondes par impulsion, sous réserve d'y remplacer  $F$  par  $F_1$ .

En effet, la dérivée  $\varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  déduite de (16) vérifie, comme  $\varphi$ , l'équation indéfinie  $\Delta \varphi_1 = 0$ , la relation  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}$  spéciale à la surface libre et la relation  $\frac{d\varphi_1}{dn} = 0$  relative aux parois. Si  $F$  est remplacé par  $F_1$ , pour  $z$  et  $t$  nuls,  $\varphi_1$  coïncide avec  $F(x)$ ; et  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$  s'annule identiquement si  $z = 0$ ,  $t = 0$ .

Il est aisément de conclure de là les propriétés des ondes d'impulsion, dont tous les traits généraux sont les mêmes que ceux des ondes d'émission.

## DEUXIÈME SECTION

PHÉNOMÈNES DE MOUVEMENTS BIEN CONTINUS  
OÙ L'INFLUENCE DES FROTTEMENTS EST SENSIBLE

### CHAPITRE I

ÉCOULEMENT DE L'EAU DANS LES TUBES FINS

1. Équations générales d'un régime graduellement varié dans un écoulement bien continu. — Nous nous proposons d'appliquer les équations de Navier à l'établissement des lois générales qui régissent l'écoulement lent, sans tourbillonnements, de l'eau dans un tube fin, très long et bien calibré. Nous envisagerons une classe importante de cas auxquels convient le nom de *régime graduellement varié*<sup>1</sup>; pour ces cas, conformément aux observations d'Osborne Reynolds, les filets liquides sont presque rectilignes et parallèles sur de grandes longueurs, et ils ne présentent pas entre eux, à la traversée d'une section quelconque, des inégalités de vitesse très différentes de

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 2, p. 382-403. — J. BOUSSINESQ, 10, p. 335-346.  
— J. DELEMER, *passim*.

celles qu'on observerait dans un mouvement uniforme.

Nous donnerons à l'axe des  $x$  la direction de l'axe du tube et le sens du courant. Dans ces conditions, les composantes transversales  $v$ ,  $w$  de la vitesse d'une molécule seront, comparativement à la composante longitudinale  $u$ , des quantités très petites que nous regarderons comme étant du premier ordre de petiteur et dont nous négligerons les carrés et les produits ; leurs dérivées seront supposées du même ordre qu'elles, et en vertu de l'équation de continuité, la dérivée de  $u$  par rapport à  $x$  sera aussi de cet ordre.

Au contraire,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  et  $\frac{\partial u}{\partial z}$  seront finies : tandis que la vitesse d'un même filet fluide ne change guère entre deux points dont la distance est comparable au rayon du tube, la variation de vitesse qu'on observe en passant, dans une section normale, du filet central à ceux de la paroi, est considérable.

D'après ces hypothèses, les accélérations latérales  $v'$ ,  $w'$  seront négligeables vis-à-vis de l'accélération longitudinale  $u'$ . De plus, la petiteur du coefficient  $\varepsilon$  de frottement intérieur du fluide permet de ne garder, dans les équations de Navier (Introd., ch. II, C. § 2), parmi les termes dus aux frottements, que ceux où figurent la composante principale  $u$  ou ses dérivées également finies en  $y$  et  $z$ .

Les équations de Navier se réduisent alors à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - u' + \frac{\varepsilon}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z. \end{aligned}$$

Les deux dernières équations montrent que la pression  $p$  varie suivant la simple loi hydrostatique aux divers points d'une section quelconque normale à l'axe des  $x$ ;  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho g} \right)$  est donc constant sur toute l'étendue d'une telle section.

Soit  $i$  l'inclinaison de l'axe  $ox$  sur l'horizon; comme la composante longitudinale de la pesanteur rapportée à l'unité de masse est  $X = g \sin i$ , la première équation peut s'écrire :

$$\frac{\varepsilon}{\rho g} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + I = \frac{u'}{g}, \quad (1)$$

en posant :  $I = \sin i - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho g} \right)$ ;

la quantité  $I$ , qui a la même valeur en tous les points d'une section droite du tube, est dite *pente motrice*.

A l'équation aux dérivées partielles (1), nous devons adjoindre, comme unique condition limite (*Int.*, ch. II, E, § 2), l'équation  $u = 0$  à la paroi, le fluide ne présentant pas de surface libre.

**2. Cas d'un régime uniforme.** — Supposons tout d'abord que le fluide ait pris un état permanent dans lequel toutes les molécules soient animées d'un mouvement rectiligne et uniforme; les équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\rho g I}{\varepsilon} = 0, \quad (2)$$

$$u = 0 \quad (\text{à la paroi}),$$

déterminent la valeur de  $u$  en chaque point d'une section  $\sigma$ , si toutefois l'on se donne la valeur constante de  $I$  pour cette section.

La solution  $u$  est unique ; car la différence  $u_1$  de deux solutions, vérifiant les égalités  $\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0$ , et  $u_1 = 0$  (à la paroi), satisferait, en vertu de la formule de Riemann, à la condition

$$\int \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 \right] ds = 0,$$

laquelle entraîne la constance de  $u_1$  sur toute la section, et par suite sa nullité (puisque  $u_1$  est nul à la paroi).

Avant de déterminer la fonction  $u$  dans quelques cas particuliers de section, nous signalerons un résultat simple que fournissent d'élémentaires considérations d'homogénéité.

Imaginons un tube coaxial au tube donné, de section droite homothétique à celle de ce tube et ayant pour surface l'unité ; si  $(\eta, \zeta)$  sont les coordonnées du point homologue au point  $(y, z)$  de la section primitive, les formules de passage  $y = \eta \sqrt{\sigma}$ ,  $z = \zeta \sqrt{\sigma}$  transforment l'équation indéfinie (2) en

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[ \frac{\varepsilon u}{\rho g I_\sigma} \right] + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left[ \frac{\varepsilon u}{\rho g I_\sigma} \right] + 1 = 0,$$

tandis que l'équation à la paroi s'écrit :  $\frac{\varepsilon u}{\rho g I_\sigma} = 0$ .

Ces équations montrent que  $\frac{\varepsilon u}{\rho g I_\sigma}$  est, pour tous les tubes à sections homothétiques, une même fonction de  $\eta$  et  $\zeta$  ; d'où :

$$u = \frac{\rho g}{\varepsilon} I_\sigma f \left( \frac{y}{\sqrt{\sigma}}, \frac{z}{\sqrt{\sigma}} \right),$$

$f$  étant caractérisée par la forme de la section. Ainsi aux points correspondants de deux tubes de même forme, la vitesse longitudinale est proportionnelle au carré des dimensions transversales, proportionnelle à la densité et à la pente motrice, inversement proportionnelle au coefficient de frottement  $\varepsilon$ .

Quant au *débit*, ou volume fluide traversant une section dans l'unité de temps,  $Q = \int_S u d\sigma$ , il a pour

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\rho g I \sigma}{\varepsilon} \iint f \left( \frac{y}{\sqrt{\sigma}}, \frac{z}{\sqrt{\sigma}} \right) dy dz \\ &= \frac{\rho g I \sigma^2}{\varepsilon} \iint f(\eta, \zeta) d\eta d\zeta; \end{aligned}$$

comme l'intégrale est un coefficient numérique  $K$  dépendant de la forme de la section, on a :

$$Q = K \frac{\rho g I}{\varepsilon} \sigma^2.$$

### 3. Section circulaire. — Lois de Poiseuille.

— Si la section droite est circulaire,  $u$  est, par symétrie, fonction de la seule distance  $r$  de la molécule à l'axe  $ox$ . Transformons l'équation (2) en coordonnées polaires dans le plan de la section droite ; comme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right).$$

on obtient l'équation indéfinie

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) + \frac{\rho g I}{\varepsilon} = 0.$$

Cette équation s'intègre immédiatement. On a successivement :  $r \frac{du}{dr} = -\frac{\rho g I}{2\varepsilon} r^2 + A,$

$$u = -\frac{\rho g I}{4\varepsilon} r^2 + A \log r + B.$$

Pour déterminer les constantes A et B, nous observerons d'abord que dans un tube circulaire plein de liquide la vitesse est finie même pour  $r=0$ , ce qui exige que A soit nul, — puisque pour  $r=R$ , R étant le rayon intérieur du tube, u doit s'annuler. Il vient

ainsi :  $u = \frac{\rho g I}{4\varepsilon} (R^2 - r^2),$

et par suite :

$$Q = \frac{\rho g I}{4\varepsilon} \frac{\sigma^2}{\pi} \int_0^1 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) d\left(\frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{\rho g I}{8\pi\varepsilon} \sigma^2.$$

Le régime étant uniforme, le débit est constant pour toutes les sections, et comme les sections sont d'égale surface, la pente motrice I est constante tout le long du tube. Il est aisément d'obtenir l'expression de cette pente.

Soit  $h$  la hauteur, au-dessus d'un plan horizontal, d'un point quelconque de l'axe du tube ; on a :

$$\sin i = -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad \text{et} \quad I = -\frac{\partial}{\partial x} \left( h + \frac{p}{\rho g} \right).$$

Cette dérivée en  $x$  étant constante, si nous désignons par L la longueur de la portion considérée du tube, par  $h_0$  et  $p_0$ ,  $h_1$  et  $p_1$  les valeurs de  $h$  et  $p$  à l'entrée et

à la sortie de cette partie du tube, nous aurons simplement :  $I = -\frac{1}{L} \left( h_i - h_o + \frac{p_i - p_o}{\rho g} \right)$ .

En tenant compte de cette valeur de  $I$  et en remplaçant  $\sigma$  par  $\frac{\pi D^2}{4}$ , si  $D$  est le diamètre du tube, nous obtiendrons l'expression suivante du débit :

$$Q = \frac{\pi}{128} \frac{\rho g}{\varepsilon} \frac{D^4}{L} \left[ h_o - h_i + \frac{P_o - P_i}{\rho g} \right].$$

Des expériences très précises du docteur Poiseuille<sup>1</sup> sur des tubes circulaires très fins avaient, antérieurement à la théorie<sup>2</sup>, conduit aux lois exprimées par cette formule.

Les recherches de Poiseuille, entreprises comme introduction à l'étude de la circulation du sang dans les vaisseaux capillaires, et conduites avec un remarquable souci de la rigueur (mesure exacte du diamètre des sections, calibrage du tube, mesure précise du débit et de la différence de charge aux deux bouts du tube) se résument en effet dans les résultats suivants connus sous le nom de *lois de Poiseuille*<sup>3</sup> :

Le débit est proportionnel :

<sup>1</sup> POISEUILLE. Ce beau Mémoire est remarquablement résumé par M. Brillouin [BRILLOUIN, 2, t. I, p. 115-129].

<sup>2</sup> J. BOUSSINESQ, 4, p. 46.

<sup>3</sup> Voir aussi les expériences antérieures de Girard [GIRARD, p. 241] et de Hagen [Annales de Poggendorf, 1839]. « Je ne crois pas, dit E. Duclaux, qu'il soit juste d'associer, comme on l'a fait quelquefois, le nom de Hagen à celui de Poiseuille, à propos de la découverte de la véritable loi de l'écoulement des liquides dans les tubes capillaires. » [E. DUCLAUX, p. 439.]

1<sup>o</sup> A la différence de charge aux deux bouts du tube (loi des charges) ;

2<sup>o</sup> A l'inverse de la longueur du tube (loi des longueurs) ;

3<sup>o</sup> A la quatrième puissance du diamètre (loi des diamètres).

$$\text{Si l'on écrit : } Q = m \cdot \frac{D^4}{L} \left[ \rho g (h_o - h_i) + p_o - p_i \right],$$

$$\text{le coefficient } m \text{ est : } m = \frac{\pi}{128 \varepsilon}.$$

La valeur du coefficient  $m$  est connue dans chaque expérience de Poiseuille ; on peut donc en déduire la valeur du coefficient de frottement intérieur  $\varepsilon$ .  $m$  et par suite  $\varepsilon$  dépendent de la température et varient très rapidement avec elle ; les variations en ont été étudiées par Poiseuille entre 0°,5 et 45°. A la température de 10°, on a :  $\varepsilon = 0,01303$  (unités CGS) ;

à une température  $\tau$  estimée en degrés centigrades à partir de 10°, on a :

$$\varepsilon = \frac{0,01303}{1 + 0,02884 \tau + 0,000188 \tau^2}.$$

**4. Sections elliptique et autres.** — Dans ses expériences, Poiseuille mesurait à chaque extrémité de ses tubes deux diamètres rectangulaires dont il prenait la moyenne. L'étude du cas de l'écoulement dans les tubes peu elliptiques montrera que l'on peut, sans changer l'expression du débit, leur attribuer la forme circulaire et faire le rayon de la section fictive égale à la demi-somme des demi-axes.

L'expression  $\frac{\varepsilon u}{\rho g I \sigma} = \tau$  doit satisfaire à l'équa-

tion indéfinie  $\frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial z^2} + 1 = 0$ , et s'annuler à la paroi. Si  $b$  et  $c$  sont les demi-axes de l'ellipse section droite, la fonction

$$\varpi = \lambda \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right)$$

satisfait à la dernière condition quel que soit  $\lambda$ , et pour  $\lambda$  constant, elle satisfiera à l'équation indéfinie si

$$-2\lambda \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + 1 = 0.$$

Ainsi :

$$u = \frac{\rho g I}{2\varepsilon} \cdot \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right).$$

D'après cela, les courbes d'égale vitesse sont des ellipses semblables à la section du tube ; leur équation générale est :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \varphi,$$

le paramètre  $\varphi$  variant de 0 à 1.

L'aire de la couronne elliptique élémentaire comprise entre les ellipses d'égale vitesse  $\varphi$  et  $\varphi + d\varphi$  est  $\pi b c \cdot d\varphi$ . L'expression du débit est :

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^1 \frac{\rho g I}{2\varepsilon} \cdot \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} (1 - \varphi) \cdot \pi b c \cdot d\varphi \\ &= \frac{\rho g I}{4\varepsilon} \cdot \frac{bc}{b^2 + c^2} \cdot \frac{\sigma^2}{\pi}. \end{aligned}$$

Si l'on pose  $b = xc$ , le coefficient K de l'expression

générale du débit est  $\frac{\alpha}{4\pi(\alpha^2 + 1)}$ . A égalité de surface de section, le débit est maximum pour  $\alpha = 1$  (comme on le reconnaît en écrivant  $\frac{dK}{d\alpha} = 0$ ), c'est-à-dire quand on a affaire à un cercle; alors

$$K = \frac{1}{8\pi} = 0,0397,$$

Soit  $R$  la moyenne des demi-axes  $b$  et  $c$ ; par définition

$$b = R(1 + \theta), \quad c = R(1 - \theta);$$

si  $\sigma_1 = \pi R^2$ , on a :

$$Q = \frac{\rho g l}{8\epsilon} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\pi} \cdot \frac{(1 - \theta^2)^3}{1 + \theta^2}.$$

Supposons que  $2\theta = \frac{b - c}{R}$  soit assez petit pour que son carré soit négligeable devant l'unité, à l'ordre d'approximation admis; on pourra remplacer

$$\frac{(1 - \theta^2)^3}{1 + \theta^2} = 1 - 4\theta^2 + \dots$$

par l'unité, et l'on aura le résultat énoncé tout à l'heure.

Notons encore que la vitesse  $u$  est maxima pour le filet central et que sa valeur y est double de la vitesse moyenne  $\frac{Q}{\sigma}$ .

M. Boussinesq a encore envisagé diverses autres formes de sections, en particulier la forme rectangulaire. Sans développer le calcul, nous donnerons

l'expression du débit. Si  $2b$  et  $2c$  sont les dimensions du rectangle, on a<sup>1</sup> :

$$Q = p \cdot \frac{\rho g I}{\varepsilon} \frac{bc}{b^2 + c^2} \cdot \sigma^2,$$

avec :

$$p = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right) \left[ \frac{b}{c} \operatorname{tgh} k \frac{c}{b} + \frac{c}{b} \operatorname{tgh} k \frac{b}{c} \right] \right\},$$

où  $k$  varie par valeurs entières.

$$\text{Pour } \frac{b}{c} = 1, 2, 3, 4,$$

$$\text{on a : } p = 0,0703, \quad 0,0715, \quad 0,0731, \quad 0,0747, \\ 5, \quad 10, \quad \infty, \\ 0,0757, \quad 0,0786, \quad 0,0833.$$

Dans le cas d'une section carrée, on a  $b=c$ , et le coefficient  $K$  de l'expression générale du débit vaut 0,0351.

Enfin dans le cas d'une section droite en forme de triangle équilatéral, on trouve, en prenant pour axe des  $z$  une des hauteurs de la section, pour axé des  $y$  la base correspondante, et en appelant  $2c$  le côté :

$$u = \frac{3}{4} \frac{\rho g I}{\varepsilon} c^2 \cdot \frac{z}{c \sqrt{3}} \left[ \left( 1 - \frac{z}{c \sqrt{3}} \right)^2 - \frac{y^2}{c^2} \right],$$

$$Q = \frac{1}{20 \sqrt{3}} \frac{\rho g I}{\varepsilon} \sigma^2,$$

en sorte que le coefficient  $K$  vaut 0,0289.

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 2, p. 389-394; — p. 424.

**5. Cas d'un régime graduellement varié<sup>1</sup>.** —

Dans les expériences de Poiseuille, le liquide s'écoule hors d'un réservoir par un orifice circulaire, passe à travers un ajutage approprié, et pénètre dans le tube fin étudié. Les vitesses des filets liquides à l'entrée du tube seront bien toutes sensiblement égales et parallèles, mais n'engendreront pas un régime uniforme. Toutefois les conditions d'un régime graduellement varié se trouvent réalisées. Puis sous l'influence des frottements, ce régime tend à devenir uniforme après le parcours d'une certaine longueur du tube. Nous allons étudier les lois de ce passage d'un régime à l'autre.

A l'équation indéfinie (1) :

$$\frac{\varepsilon}{\rho g} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + I = \frac{u'}{g}, \quad (1)$$

où  $I = \frac{\partial}{\partial x} \left( h + \frac{P}{\rho g} \right)$ , nous devons adjoindre la condition de nullité de la vitesse à la paroi. Nous nous proposons de déduire de là une relation entre la pente motrice  $I$  et la vitesse moyenne  $U = \int_{\sigma} u \frac{d\sigma}{\sigma}$ , ou sa dérivée en  $x$ .

Multiplions à cet effet l'équation (1) par l'élément d'aire  $d\sigma$  entourant le point  $(y, z)$  de la section  $\sigma$  d'abscisse  $x$ ; intégrons à travers toute la section  $\sigma$  et divisons par  $\sigma$ ; l'application de la formule de Riemann

donne :  $\frac{\varepsilon}{\rho g \sigma} \int_{\chi} \frac{du}{dn} d\chi + I = \frac{1}{g} \int_{\sigma} u' \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad (3)$

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 14, notes 1 et 2.

$d\chi$  étant un élément du contour  $\chi$  de la section  $\sigma$ . Eliminons  $I$  entre les équations (1) et (3) et introduisons la vitesse moyenne  $U$ ; nous obtiendrons :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{u}{U} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{u}{U} \right) - \frac{1}{\sigma} \int_{\chi} \frac{d}{dn} \left( \frac{u}{U} \right) d\chi \\ = \frac{\varphi}{U} \left( u' - \int_{\sigma} u \frac{d\sigma}{\sigma} \right), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\frac{u}{U} = 0 \quad \text{à la paroi}, \quad \int_{\sigma} \frac{u}{U} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = 1.$$

Si le régime était uniforme,  $u'$  serait nul, et en posant  $\varphi = \frac{u}{U}$ , ces équations deviendraient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{\sigma} \int_{\chi} \frac{d\varphi}{dn} d\chi = 0, \\ \varphi = 0 \quad \text{à la paroi}, \quad \int_{\sigma} \varphi \frac{d\sigma}{\sigma} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

La fonction  $\varphi$ , qui ne dépend que de la forme de la section, est, dans le cas d'un tube circulaire :

$$\varphi = 2 \left( 1 - \frac{y^2 + z^2}{R^2} \right) = 2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Si le régime est graduellement varié, soit :

$$\varpi = \frac{u}{U} - \varphi$$

l'écart entre les deux régimes de vitesse longitudinale. En retranchant les diverses relations (5) de leurs correspondantes (4), nous aurons :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial z^2} - \frac{1}{\sigma} \int_{\Sigma} \frac{d\varpi}{dn} d\Sigma \\ & = \frac{\rho}{\varepsilon U} \left( u' - \int_{\sigma} u' \frac{d\sigma}{\sigma} \right), \\ & \varpi = 0 \quad \text{à la paroi,} \quad \int_{\sigma} \varpi d\sigma = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Multiplions les premières équations des groupes (5) et (6) respectivement par  $-\varpi d\sigma$  et  $\varphi d\sigma$ , ajoutons-les et intégrons à travers toute la section  $\sigma$ ; les dérivées du second ordre donnent les intégrales

$$\int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial(y, z)} \left[ \varphi \frac{\partial \varpi}{\partial(y, z)} - \varpi \frac{\partial \varphi}{\partial(y, z)} \right] d\sigma,$$

ou, au total,  $\int_{\Sigma} \left( \varphi \frac{d\varpi}{dn} - \varpi \frac{d\varphi}{dn} \right) d\Sigma$ , quantité nulle,

puisque  $\varphi$  et  $\varpi$  s'annulent à la paroi; il vient alors :

$$- \int_{\Sigma} \frac{d\varpi}{dn} d\Sigma = \frac{\rho}{\varepsilon U} \int_{\sigma} (\varphi - 1) u' d\sigma.$$

Si nous remplaçons  $\varpi$  par  $\frac{u}{U} - \varphi$  et si nous posons  $\mathcal{H} = - \int_{\Sigma} \frac{d\varphi}{dn} d\Sigma$ , cette équation nous donnera :

$$\int_{\Sigma} \frac{du}{dn} d\Sigma = - \mathcal{H} U - \frac{\rho}{\varepsilon} \int_{\sigma} (\varphi - 1) u' d\sigma.$$

Substituons l'expression ainsi trouvée dans le premier

terme de l'équation (3), et nous aurons comme expression de la pente motrice I.

$$I = \Re \frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{U}{\sigma} + \frac{1}{g} \int_{\sigma} \varphi u' \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad (8)$$

où il ne reste plus qu'à évaluer le dernier terme, soit :

$$\frac{1}{g U \sigma} \left( \int_{\sigma} u u' d\sigma - U \int_{\sigma} \tau u' d\sigma \right).$$

A partir de l'entrée du tube,  $U\tau$  devient bien vite fort petit par rapport à  $u$ , et, dans une première approximation, nous négligerons le second terme vis-à-vis du premier, quitte à pousser tout à l'heure l'approximation plus loin.

Pour évaluer le premier terme, remarquons que

$$u' = \lim \frac{\delta u}{\delta t} = \lim \frac{u \delta u}{\delta x},$$

$\delta u$  étant la variation, pendant le temps  $\delta t$ , de la vitesse  $u$  d'une molécule, et  $\delta x$  l'espace qu'elle a parcouru pendant ce même temps dans le sens des  $x$ . Si l'on note que  $\delta(u d\sigma) = 0$ , en vertu de la conservation du débit d'un même filet, on pourra écrire :

$$u u' d\sigma = \frac{u d\sigma}{2} \frac{\delta u^2}{\delta x} = \frac{1}{2} \frac{\delta(u^2 d\sigma)}{\delta x},$$

et par suite :

$$\int_{\sigma} u u' d\sigma = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} u^2 d\sigma = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \alpha U^2 \sigma \right),$$

en posant, suivant une notation traditionnelle chez les

$$\text{hydrauliciens : } \alpha = \int_{\sigma} \frac{u^2}{U^2} \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (9)$$

Comme  $U_\sigma$  est constant (conservation du débit), le dernier terme de l'équation (8) s'écrit :  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\alpha U^2}{2g} \right)$ , et l'équation (8) prend la forme suivante, eu égard à ce que  $I$  a pour expression  $-\frac{\partial}{\partial x} \left( h + \frac{p}{\rho g} \right)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h + \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) + \mathcal{K} \frac{\epsilon}{\rho g} \frac{U}{\sigma} = 0. \quad (10)$$

On peut donner à la parenthèse le nom de *hauteur totale de charge du courant dans la tranche d'abscisse  $x$* . En effet la charge en un point du filet est (d'après la définition donnée à propos du principe de D. Bernoulli, et en notant que la vitesse se confond sensiblement avec sa composante longitudinale) :

$$h + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}.$$

Multiplions cette charge par le débit  $dq = ud\sigma$  du filet, divisons par le débit total  $Q$  et intégrons à travers toute la section  $\sigma$ ; il viendra,  $h + \frac{p}{\rho g}$  restant constant sur toute la section :

$$h + \frac{p}{\rho g} + \frac{I}{U\sigma} \int_{\sigma} \frac{u^3}{2g} d\sigma, \quad \text{ou} \quad h + \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{U^2}{2g}.$$

Plaçons-nous dans le cas d'un tube circulaire; comme  $\frac{d\sigma}{dn} = -\frac{4}{R}$ , il vient  $\mathcal{K} = 8\pi$ , et le dernier terme de (10) sera  $\frac{8\pi U}{\rho g R^2}$ .

Comme nous aurons l'occasion de l'établir en détail

à l'occasion des écoulements par orifices, à l'entrée du tube consécutif à un ajutage moulé sur la veine qui jaillirait librement, les filets ont une même vitesse, et la charge totale a la même valeur qu'en un point du réservoir où la vitesse serait nulle, soit  $h_o + \frac{p_o}{\rho g}$ ,  $h_o$  et  $p_o$  étant l'altitude et la pression relative à la surface libre du réservoir. Si donc nous multiplions l'équation (10) par  $dx$ , et si nous intégrons entre les limites  $o$ , correspondant à la section initiale douée de la propriété signalée, et  $L$ , correspondant à une section quelconque du tube où  $h_1$  et  $p_1$  sont l'altitude et la pression, nous aurons :

$$h_1 - h_o + \frac{p_1 - p_o}{\rho g} + \alpha \frac{U^2}{2g} + \frac{8\varepsilon UL}{\rho g R^2} = 0.$$

Si l'on prend pour  $\alpha$  la valeur qui correspond au régime uniforme, en posant  $\tau = \frac{r^2}{R^2}$ , on a :

$$\alpha = \int_o^1 8(1 - \tau)^3 d\tau = 2,$$

et par suite :

$$\frac{8\varepsilon UL}{\rho g R^2} + \frac{U^2}{g} = h_o - h_1 + \frac{p_o - p_1}{\rho g}. \quad (11)$$

Si  $L$  est assez grand, le second terme du premier membre est insignifiant devant le premier : l'équation réduite traduit exactement une série d'expériences de Poiseuille relatives à de longs tubes et que ce physicien appelle sa *première série*; ce sont les expériences qui l'ont conduit aux lois qui portent son nom.

Mais ces lois cessaient d'être vérifiées quand les tubes étaient de faible longueur : Poiseuille a fait cependant

sur de tels tubes un certain nombre d'expériences dont il a scrupuleusement noté les résultats sans les interpréter, expériences qui constituent sa *seconde série*. C'est à M. Boussinesq, et après lui, à un de ses élèves, M. J. Delemer, qu'est due l'interprétation complète de cette seconde série<sup>1</sup>.

L'équation (11) donne à très peu près l'interprétation voulue. Cependant une légère correction est encore nécessaire, due à ce que nous avons, dans le dernier terme de l'équation (8), négligé le terme

$$-\frac{1}{g} \int_{\sigma} \bar{\omega} u' \cdot \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

**6. Interprétation des expériences de Poisseille relatives à des tubes assez courts.** — Nous allons montrer que l'intégrale négligée accroît simplement le terme en  $\frac{U^2}{g}$  d'une faible fraction de sa valeur, ce qui est conforme à un fait reconnu par M. Couette dans sa thèse.

A cet effet, il nous faut préalablement revenir sur la détermination de la fonction  $\bar{\omega}$ , au moyen du système (6).

Le tube étant circulaire, la symétrie du régime fait que  $\bar{\omega}$ , comme  $u$ , est fonction de  $r$  seul, et l'on a d'abord :  $\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r} \right)$ .

Si l'on considère l'expression de  $u'$ , comme  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ,

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 14, notes 3 et 4. — J. DELEMER, thèse. — Ce travail a été mis à contribution pour la rédaction du présent chapitre.

en désignant par  $W$  la petite composante radiale d'une molécule qui ne peut se mouvoir que dans un plan méridien du tube, on obtient :  $u' = u \frac{\partial u}{\partial x} + W \frac{\partial u}{\partial r}$ .

Enfin l'équation de continuité devient, ainsi qu'un très simple calcul le montre :  $r \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} (rW) = 0$ .

Remplaçons, dans l'expression de  $u'$ ,  $W$  par la valeur tirée de cette dernière équation,  $- \frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial u}{\partial x} r dr$ , et  $u$  par  $U (\varphi + \psi)$ ; négligeons les termes du second ordre par rapport à  $\psi$  ou à ses dérivées, et substituons à  $\varphi$  sa valeur  $2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$ . Il viendra :

$$u' = 2U^2 \left[ \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \int_0^r \frac{\partial \psi}{\partial x} d \left( \frac{r^2}{R^2} \right) \right]. \quad (12)$$

Dérivons par rapport à  $r$  la relation (12) et la première équation (6), et entre les équations obtenues :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial r} &= 2U^2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial r}, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon U} \frac{\partial u'}{\partial r}, \end{aligned}$$

L'élimination de  $\frac{\partial u'}{\partial r}$  donne l'équation aux dérivées partielles qui définit  $\psi$ .

Nous y prendrons pour variables :

$$\tau = \frac{r^2}{R^2}, \quad X = \frac{2\varepsilon x}{\varepsilon U R^2},$$

et pour fonction  $\psi = \tau \frac{\partial \varpi}{\partial \tau}$ . Cette équation s'écrira :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = \frac{1 - \tau}{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial X}. \quad (13)$$

Les conditions aux limites vérifiées par la fonction  $\Psi(\tau, X)$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \psi(0, X) &= 0, & \int_0^1 \psi(\tau, X) d\tau &= 0, \\ \psi(\tau, 0) &= 2\tau, & \psi(\tau, \infty) &= 0; \end{aligned}$$

on les déduit bien simplement des secondes équations (6), de la définition de  $\psi$  et du double fait suivant : dans la section initiale, tous les filets ont même vitesse (sauf aux petites distances de la paroi où  $u$  décroît très vite pour s'y annuler), en sorte que

$$\frac{u}{U} = 1 \text{ et } \varpi = 1 - \tau = 2\tau - 1;$$

d'autre part, dans les sections éloignées, le régime est uniforme et  $\varpi = 0$ .

L'équation (13) est analogue à celle qui régit le refroidissement d'une barre prismatique à conductibilité constante. On formera son intégrale générale par la superposition d'une infinité de solutions simples, produits d'une fonction de  $X$  par une fonction associée de  $\tau$ . Posons :

$$\psi_m = e^{-mx} \Psi_m(\tau),$$

$m$  étant une constante positive. Pour chaque valeur de  $m$ , cette fonction  $\psi_m$  satisfara à (13) si  $\Psi_m$  est choisi de manière que

$$\tau \Psi_m''(\tau) + m(1 - \tau) \Psi_m(\tau) = 0. \quad (14)$$

La fonction

$$\psi = \sum_m C_m \psi_m,$$

où les  $C_m$  sont des constantes arbitraires, et où la sommation est étendue à diverses valeurs de  $m$ , sera une solution de l'équation (13).

Nous chercherons à disposer des constantes  $C_m$  associées aux quantités  $m$ , de manière à satisfaire aux équations aux limites.

D'une part, pour  $X = \infty$ , tous les  $\Psi_m$  sont nuls. D'autre part, comme nous pouvons prendre pour  $\Psi_m$  la solution de (14) qui satisfait à

$$\Psi_m(0) = 0, \quad \Psi'_m(0) = 1,$$

nous aurons  $\psi_m(0, X) = 0$ . Enfin nous déterminerons la constante  $m$  de manière que l'on ait :

$$\int_0^1 \Psi_m(\tau) d\tau = 0.$$

Dès lors, il ne restera plus qu'à satisfaire à la condition  $\psi(\tau, 0) = \sum C_m \Psi_m(\tau) = 2\tau$ .

Cherchons le développement de  $\Psi_m$  en série de puissances, soit :

$$\Psi_m(\tau) = \tau - A\tau^2 + B\tau^3 - C\tau^4 + D\tau^5 - \dots;$$

les coefficients  $A, B, \dots$  sont liés à  $m$  par les relations

$$A = \frac{m}{2}; \quad B = \frac{m}{2 \cdot 3} (A + 1); \quad C = \frac{m}{3 \cdot 4} (B + A);$$

$$D = \frac{m}{4 \cdot 5} (C + B); \dots$$

et ces coefficients sont tous positifs si  $m$  est positif. On peut établir la convergence du développement,  $\tau$  étant compris entre 0 et 1.

La condition qui détermine  $m$  s'écrit :

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{A}{3} + \frac{B}{4} - \frac{C}{5} + \dots$$

M. Delemer a trouvé, pour les deux premières racines de cette équation transcendante :

$$m_1 = 8,02, \quad m_2 = 23,9,$$

et il a développé les solutions particulières correspondantes  $\Psi_1(\tau)$  et  $\Psi_2(\tau)$ .

Quant à la fonction  $\varpi$ , elle est donnée par

$$\varpi(\tau, X) = - \int_{\tau}^1 \psi \cdot \frac{d\zeta}{\zeta} = - \sum C_m e^{-mx} \Phi_m(\zeta),$$

en posant :

$$\begin{aligned} \Phi_m(\zeta) &= \int_{\tau}^1 \psi_m(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = a - \zeta + \frac{A}{2} \zeta^2 - \frac{B}{3} \zeta^3 + \dots, \\ a &= 1 - \frac{A}{2} + \frac{B}{3} - \frac{C}{4} + \dots \end{aligned}$$

Il reste à satisfaire à la condition

$$\varpi(\tau, 0) = - \sum C_m \Phi_m(\tau) = 2\tau - 1 = \varpi_0.$$

On ne peut la vérifier avec un nombre fini de constantes  $C_m$ . Aussi M. Boussinesq propose-t-il, généralisant une méthode de Gauss, de déterminer seulement les constantes  $C_m$  de manière que la somme des carrés des différences entre les valeurs du développement et les vraies valeurs de  $\varpi_0$  en chaque point soit minima.

Cette somme, pour toutes les valeurs de  $\tau$  comprises entre 0 et 1, est représentée par

$$\int_0^1 (\varpi_0 + c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + \dots)^2 d\tau.$$

En exprimant la nullité des dérivées par rapport à  $c_1, c_2, \dots$ , on obtient un système d'équations linéaires pour déterminer  $c_1, c_2, \dots$

M. Delemer a été ainsi conduit à l'expression suivante de  $\varpi$ :

$$\varpi = -6,66e^{-8,02X} \Psi_1(\tau) + 18,2e^{-23,9X} \Psi_2(\tau),$$

qui vérifie très sensiblement la dernière condition.

Comme en fin de compte il s'agit d'estimer

$$\frac{1}{g} \int_0^L dx \int_0^1 (-\varpi) u' d\tau,$$

on déduira de la formule (12) la valeur de  $u'$  en fonction de  $x, \tau$ , en y remplaçant les dérivés de  $\varpi$  par leurs valeurs déduites de l'expression de  $\varpi$  qu'on vient d'obtenir et en notant que  $X = \frac{2\pi x}{\rho UR^2}$ ; on remplacera ensuite dans l'intégrale à évaluer  $\varpi$  et  $u'$  par les valeurs trouvées. M. Delemer a effectué ce calcul et a trouvé pour expression du terme correctif, dès que  $L$  a une valeur sensible,

$$0,13462 \frac{U^2}{g}.$$

En résumé, le terme négligé au paragraphe précédent conduit à remplacer le coefficient de  $\frac{U^2}{g}$  qui est l'unité dans l'équation (11) par 1,1346.

M. Delemer a vérifié en détail la concordance de cette conclusion avec les résultats de la seconde série des expériences de Poiseuille, et expliqué par des considérations de physique expérimentale les écarts auxquels donnent lieu quatre de ces résultats.

## CHAPITRE II

### PHÉNOMÈNES DE FILTRATION

1. **Écoulement permanent de l'eau à travers les milieux poreux. Généralités<sup>1</sup>.** — On entend par *filtration* l'écoulement lent d'un fluide à travers les pores sensibles d'un milieu pulvérulent. Le phénomène type nous sera fourni par la filtration de l'eau à travers un tas de sable.

Les équations de Navier permettent de formuler, sur ce phénomène, des lois contrôlées par l'expérience.

Considérons une masse poreuse imprégnée d'eau, et supposons que le fluide, occupant les interstices des grains de sable, possède, dans toute région un peu étendue, de lents mouvements suivant une certaine direction générale. L'écoulement se fait dans les interstices contigus, alignés sensiblement suivant cette direction générale, formant par leur continuité des *tubes de transpiration*. Les parois de ces tubes fictifs se composent partiellement de la surface des grains de

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 8, p. 1-5 : Note sur les phénomènes de filtration. — J. BOUSSINESQ, 20, §§ 1 et 2.

sable, partiellement du fluide à peu près immobile qui remplit ceux des interstices aux issues desquels il se trouve soumis à une même pression. Le fluide mort qui remplit ainsi les interstices latéraux, s'ouvrant sur les tubes de transpiration, a pour rôle, durant la filtration, de « transmettre la pression d'un tube à l'autre », et de « rendre solidaires, au point de vue de la pression, les tubes voisins qu'il sépare ».

D'après ce que nous avons vu au § 1 du précédent chapitre, dans une section d'un tube capillaire traversée normalement en moyenne par les filets fluides, la pression suit la loi hydrostatique, tout comme dans le fluide mort. Si donc  $h$  est l'altitude, au-dessus d'un plan horizontal fixe de repère, d'un point  $(x, y, z)$  où la pression est  $p$ , on a, le long de tout chemin perpendiculaire à l'écoulement :  $dp = -\rho g dh$ ,

$$\text{ou} \quad d\left(h + \frac{p}{\rho g}\right) = 0.$$

La hauteur de charge  $\varphi = h + \frac{p}{\rho g}$ , constante dans la section normale d'un tube de transpiration, étant aussi constante à travers un pore rempli de fluide mort, on voit que l'écoulement général se fait, à travers toute la masse, normalement à la famille des surfaces d'égale charge  $\varphi = \text{const.}$

A un instant quelconque, « ces surfaces d'égale charge, censées suivies à travers le fin réseau fluide du milieu poreux, présentent d'innombrables irrégularités locales, ou sont comme hachées d'imperceptibles encoches, dont une à chaque bouche de tube, mais restent cependant continues dans l'ensemble. »

Dans un élément de tube de transpiration, la pente motrice sera :

$$I = - \frac{d\varphi}{dn},$$

$dn$  étant la normale infinitésimale à la surface d'égale charge correspondante, dans le sens de l'écoulement; le débit de cet élément de tube serait, si le régime était uniforme :

$$q = K \frac{\rho g I \sigma^2}{\varepsilon},$$

$\sigma$  étant la section du tube,  $\varepsilon$  le coefficient de frottement intérieur du fluide, et  $K$  un coefficient numérique dépendant de la forme de la section  $\sigma$   $\left[ \frac{1}{8\pi}$  pour une section circulaire,  $\frac{1}{20\sqrt{3}}$  pour une section triangulaire équilatérale ].

Pour un écoulement quelconque, l'application de cette expression du débit est encore justifiée pour des tubes aussi fins et où les inerties du fluide restent négligeables. « Cependant, à raison de l'extrême irrégularité des tubes dont il s'agit ici et des changements relativement rapides en résultant pour les petites vitesses qu'y prend le fluide, les termes où figurent les inerties dans les équations du mouvement peuvent bien être, en chaque point, du même ordre que les autres, dus soit aux frottements, soit aux variations de la pression. Mais ils ont leurs valeurs moyennes nulles dans toute petite étendue sensible, comme les accélérations mêmes, de sens divers : ce qui, on le conçoit,

doit réduire à zéro *leur effet général*, tant sur le débit des éléments plans, que sur les variations, entre régions voisines, de la pression et de la hauteur de charge. Il doit en être de même pour les termes compliqués, mais de signes également divers, exprimant les parties des frottements dues aux irrégularités locales des vitesses, c'est-à-dire aux différences, nulles en moyenne, des vitesses vraies, d'avec leurs valeurs correspondant à un régime uniforme sur la section que l'on considère et dans le voisinage<sup>1</sup>. »

Considérons alors un faisceau de tubes de transpiration découpant sur la surface d'égale charge  $\varphi$  une région assez restreinte pour que la pente motrice  $I$  soit la même partout. En faisant la somme des débits de tous les tubes qui forment le faisceau et divisant cette somme par celle de leurs sections intérieures sur la section  $\varphi$ , on aura la vitesse moyenne  $U$  de transpiration du liquide dans la région considérée

$$U = \frac{\rho g I}{\varepsilon} \cdot \frac{\sum K_\sigma \sigma^2}{\sum \sigma},$$

les sommes s'étendant à tous les petits tubes qui s'ouvrent dans cette région.

Nous poserons :

$$\frac{I}{\mu} = \frac{\rho g}{\varepsilon} \cdot \frac{\sum (K_\sigma) \sigma}{\sum \sigma} = \frac{\rho g}{\varepsilon} \text{ moy. } K_\sigma;$$

cette quantité est ce qu'on appelle le coefficient de dépense du milieu, pour la région envisagée. Nous aurons alors :  $I = \mu U$ .

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 24, t. I, p. 325.

Rendons-nous compte de l'ordre de grandeur de  $\mu$ , en supposant que le milieu poreux soit homogène dans toute son étendue, que ses grains soient sphériques, et que tous les tubes soient de même forme et de même section.

D'après cette dernière hypothèse, on a :

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{I}{K\sigma}.$$

Associons les grains sphériques de manière que trois d'entre eux soient tangents dans le plan d'un élément d'égale charge; le plan des centres y découpe un triangle curviligne assimilable à la section droite du tube de transpiration, le fluide mort remplissant les intervalles entre les sphères prises en files longitudinales. Menons les tangentes aux milieux des côtés de ce triangle curviligne : elles forment un triangle rectiligne équilatéral dont l'aire est, en fonction du rayon  $R$  des sphères :  $\sqrt{3} [7 - 4\sqrt{3}] R^2$  ou  $0,124 R^2$  (ainsi que le montre un calcul élémentaire); les parties d'aires voisines des sommets non comprises à la fois dans le triangle curviligne et dans le rectiligne sont relativement négligeables. Prenant alors pour  $K$  la valeur  $0,029$  relative au triangle équilatéral, et pour  $\sigma$  la valeur  $0,124 R^2$ , on trouve :

$$\mu = \frac{\varepsilon}{0,0009 \cdot \rho g (2R)^2}.$$

Si l'on prend pour unités de longueur et de temps le mètre et la seconde (comme le font les hydrauliciens), on est conduit, pour des grains d'un millimètre de diamètre (grandeur supérieure à celle des plus gros

grains), à une valeur de  $\mu$  voisine de 600. Ainsi  $\mu$  sera supérieur à 600 et d'autant supérieur à ce nombre que le sable sera plus fin.

Nous comparerons tout à l'heure le résultat de cet aperçu théorique aux observations de Darcy.

Si l'écoulement est permanent, le débit total à travers l'aire  $\sigma_1$  de la région considérée d'une surface d'égale charge est :

$$Q = m\sigma_1 U,$$

en désignant par  $m$  le rapport de la somme des sections vives des tubes suivant lesquels coule le liquide à la section fluide apparente  $\sigma_1$ . Ainsi

$$Q = \frac{m}{\mu} I_{\sigma_1} = - \frac{m}{\mu} \sigma_1 \frac{d}{dn} \left( h + \frac{p}{\rho g} \right).$$

Les hydrauliciens, au lieu d'introduire le coefficient  $m$ , ont préféré introduire un autre coefficient  $m'$ , rapport de l'espace occupé par les pores perméables du milieu à son volume apparent total, rapport évidemment supérieur à  $m$ , à cause des pores non disposés suivant les trajectoires des molécules fluides et où le liquide doit rester sensiblement stationnaire. Au coefficient  $\mu$ , ils substituent alors un coefficient  $\mu'$  défini par l'égalité  $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{m'}{m}$ , de manière à écrire l'équation précédente sous la forme

$$Q = - \frac{m'}{\mu'} \sigma_1 \frac{d}{dn} \left( h + \frac{p}{\rho g} \right).$$

A vue, il semble qu'approximativement  $m'$  soit le double de  $m$ ; par suite,  $\mu'$  serait le double de  $\mu$  et vaudrait donc au moins 1200.

Vers 1840, Darcy et Ritter<sup>1</sup> ont institué à Dijon des expériences sur la filtration, en constituant le fond horizontal d'un bassin par une couche épaisse de sable : ils ont reconnu que le débit par mètre carré de base d'une couche poreuse homogène est proportionnelle à la pression qui produit l'écoulement et en raison inverse de l'épaisseur de la couche. Ces deux lois ont été vérifiées ensuite par Duclaux<sup>2</sup>, et la première l'a été en outre par Bazin<sup>3</sup> et par Becquerel<sup>4</sup>; mais la vérification la plus précise a été faite par J. Brunhes<sup>5</sup> en 1881.

Dans ces expériences, où le sable est aussi homogène que possible, et où les deux faces de la couche filtrante sont horizontales, les surfaces d'égale charge sont des plans horizontaux;  $h$  ne varie pas le long d'une de ces surfaces, et le débit par unité d'aire sera par suite :

$$\mathcal{Q} = -\frac{m'}{\mu'} \cdot \frac{1}{\varphi g} \frac{dp}{dn}.$$

Si l'on suppose le régime devenu uniforme, la constance de  $\mathcal{Q}$  entraîne celle de la dérivée  $\frac{dp}{dn}$  prise suivant la verticale descendante, et la valeur de cette dérivée est le quotient de la différence des valeurs de la pression à la sortie et à l'entrée de la couche,  $P_1$  et  $P_o$ ,

<sup>1</sup> H. DARCY, 2, p. 590.

<sup>2</sup> E. DUCLAUX.

<sup>3</sup> H. BAZIN, 1, note A.

<sup>4</sup> BECQUEREL, p. 50.

<sup>5</sup> J. BRUNHES. Ce mémoire a été récemment résumé par B. Brunhes [B. Brunhes]. Une critique faite par M. B. Brunhes (p. 201) sur la validité d'application de la loi de Poiseuille ne paraît reposer que sur un malentendu.

par l'épaisseur  $E$  de la couche. On peut donc écrire :

$$Q = \frac{m'}{\mu'} \cdot \frac{P_o - P_i}{\rho g E},$$

et cette formule exprime bien les lois de Darcy.

Darcy et Ritter ont obtenu pour un sable assez grossier, tel que  $m'$  ait pour valeur 0,38 :

$$Q = 0,0003 \frac{P_o - P_i}{\rho g E};$$

pour ce sable, on aurait donc :  $\mu' = 1266$ .

D'après Dupuit<sup>1</sup>, aux sables très fins employés pour les filtres correspondent les valeurs  $m' = 0,30$  et  $\mu' = 5700$ .

Considérons encore le problème de l'écoulement par un tuyau ou par un canal découvert rempli de sable; ce problème est important soit dans la théorie des filtres, soit dans l'étude de la marche des eaux souterraines.

Prenons un axe longitudinal des abscisses  $s$  dirigé le long de l'axe même du tuyau, ou, quand le canal est découvert, suivant le profil longitudinal de la surface libre (d'ailleurs cachée par le milieu poreux). En chaque point  $M$  de l'axe, d'abscisse  $s$ , menons une section normale dont nous supposerons l'aire  $\sigma$  exprimée en fonction de  $s$ . Les parois du tuyau ou du canal, sensiblement cylindriques, obligeront le fluide à couler parallèlement à l'axe; les surfaces d'égale charge coïncideront avec les sections normales, et la dérivée  $\frac{d}{dn}$

<sup>1</sup> J. DUPUIT. Le huitième chapitre (pp. 229-293) n'est que la reproduction d'un mémoire présenté en 1857 à l'Académie des sciences [Rapport de Combes, C. R., t. LII, 2 juin 1861].

ne sera autre que la dérivée  $\frac{d}{ds}$  prise suivant l'axe.

Le débit à travers la section  $\sigma$  sera donc :

$$Q = -\frac{\mu'}{\rho} \sigma \frac{d}{ds} \left( h + \frac{p}{\rho g} \right),$$

$h$  et  $p$  étant l'altitude et la pression en M.

Si nous supposons établi le régime permanent entre une section initiale  $\sigma_0(h_0, P_0)$  et une section finale  $\sigma_1(h_1, P_1)$ , le débit  $Q$  sera constant, et l'on aura, à partir de M :

$$-d\left(h + \frac{p}{\rho g}\right) = Q \cdot \frac{\mu'}{m'} \cdot \frac{ds}{\sigma};$$

on en déduit :

$$h_0 - h + \frac{P_0 - p}{\rho g} = Q \int_0^s \frac{\mu'}{m'} \frac{ds}{\sigma};$$

cette équation fera connaître la pression  $p$  dans les diverses sections, dès qu'on connaîtra  $Q$ . Or si l'on intègre en particulier tout le long de l'arc L qui sépare les sections extrêmes  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$ , on obtient pour expression de ce débit :

$$Q = \frac{h_0 - h_1 + \frac{P_0 - P_1}{\rho g}}{\int_0^L \frac{\mu'}{m'} \frac{ds}{\sigma}}.$$

Dans le cas où la section normale et la nature du sable sont constantes le long du tuyau, le dénominateur se réduit à  $\frac{\mu'}{m'} \cdot \frac{L}{\sigma}$ , ou encore à  $\frac{\mu}{m} \frac{L}{\sigma}$ . On donne à ce dénominateur le nom de *résistance totale du tuyau* à l'écoulement.

2. **Débit d'un puits; d'une tranchée.** — La formule générale du débit permet d'expliquer diverses circonstances relatives aux filtrations qui se font tout autour des puits, ordinaires, absorbants ou artésiens<sup>1</sup>.

Considérons un massif poreux reposant par une surface horizontale sur un sous-sol imperméable, argileux par exemple; le massif a ses couches inférieures imprégnées d'eau, mais ses couches supérieures sont sou-

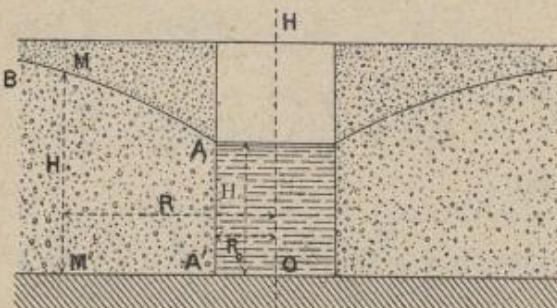


Fig. 8.

mises à la pression atmosphérique constante de l'air superposé à l'eau.

Supposons qu'on y ait creusé un puits circulaire vertical de rayon  $R_0$ : l'eau s'accumule dans le puits d'où on l'extrait, et où elle présente un niveau libre  $A$ , d'altitude  $H_0$  au-dessus du fond, et la surface limite du fluide dans le milieu perméable viendra rejoindre le bord de la section du puits à ce niveau libre. En égard à l'homogénéité du terrain, si le massif est indéfini ou de révolution autour de l'axe du puits, la surface

<sup>1</sup> Ces résultats ont été donnés pour la première fois par J. Dupuit, qui les a établis d'une autre manière [J. DUPUIT, ch. VIII].

limite et les surfaces d'égale charge seront de révolution autour du même axe.

Imaginons qu'on ait atteint, jusqu'à une certaine distance du puits, un régime permanent (par enlèvement continu de l'eau du puits, et par apport continu extérieur, soit que le massif soit indéfini, soit que, limité par un cylindre parallèle à la surface du puits, il constitue une espèce d'île circulaire au milieu d'une nappe d'eau à hauteur maintenue constante). Nous nous proposons de déterminer la forme de la méridienne AMB de la surface limite ainsi que le débit du puits, en admettant que, le long de la courbe AMB, la pente soit assez faible.

Les filets liquides dans ces conditions ont aussi une faible pente, et l'on peut regarder les surfaces d'égale charge comme étant des cylindres coaxiaux au puits. En fait, la méridienne de ces surfaces, sensiblement verticale, se recourbe vers le haut normalement à la surface libre; mais cette courbure, de l'ordre de la courbure de AM, ne se faisant sentir qu'à une très petite distance, peut être considérée comme nulle.

Calculons le débit à travers une de ces surfaces, de rayon R, et de hauteur H (du sous-sol à la surface libre). L'aire de cette surface est :  $\sigma = 2\pi RH$ , et la pente motrice évaluée en M est :

$$I = -\frac{dH}{dn} = \frac{dH^2}{dR}.$$

Le débit demandé est donc :

$$Q = \frac{m'}{\mu'} \cdot 2\pi RH \frac{dH}{dR} = \pi \frac{m'}{\mu'} \frac{dH^2}{d\log R}.$$

Le régime étant permanent, le volume de l'eau comprise entre surfaces d'égale charge reste invariable; Q est par suite le même pour toutes les surfaces d'égale charge, et en intégrant l'équation précédente à partir de  $R_o$ , rayon du puits, il vient :

$$Q \log \frac{R}{R_o} = \pi \frac{m'}{\mu'} (H^2 - H_o^2),$$

et cette relation entre R et H définit la courbe AMB.

Si, en particulier, on connaît la hauteur  $H_1$  de la nappe au-dessus du fonds, à la distance  $R_1$  de l'axe du puits, on aura comme expression du débit :

$$Q = \pi \frac{m'}{\mu'} \frac{H_1^2 - H_o^2}{\log \frac{R_1}{R_o}}.$$

Faisons croître indéfiniment le rayon  $R_o$  du puits, en laissant invariable la génératrice AA : le puits dégénérera en une tranchée dans un lit poreux. Or si nous posons, en général,  $\frac{R}{R_o} = 1 + \frac{X}{R_o}$ , nous pourrons écrire :

$$\begin{aligned} H^2 - H_o^2 &= \frac{\mu' Q}{\pi m'} \log \left( 1 + \frac{X}{R_o} \right) \\ &= \frac{2\mu'}{m'} \frac{Q}{2\pi R_o} \left[ X + \frac{X^2}{2R_o} + \dots \right]. \end{aligned}$$

$\frac{Q}{2\pi R_o}$  est le débit du puits par unité de longueur de sa périphérie. Si donc nous supposons que  $R_o$  croisse indéfiniment,  $\frac{Q}{2\pi R_o}$  tendra vers le débit  $q$  de la tranchée par unité de longueur; X tendra vers

la distance d'un plan d'égale charge au plan de la tranchée, et la relation précédente donnera :

$$H^2 - H_o^2 = \frac{2\mu'}{m} q X.$$

Le profil AMB de la surface libre sera donc une

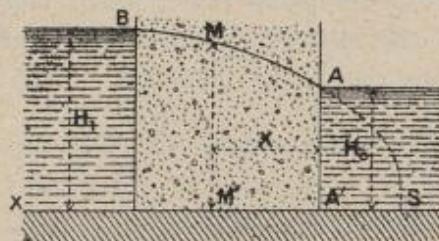


Fig. 9.

parabole à axe horizontal, ayant son sommet sur le fond de la tranchée, à une distance  $SA' = \frac{m'H_o^2}{2\mu'q}$  de la paroi, extérieurement au massif.

Les mêmes calculs s'appliqueraient à un puits arté-

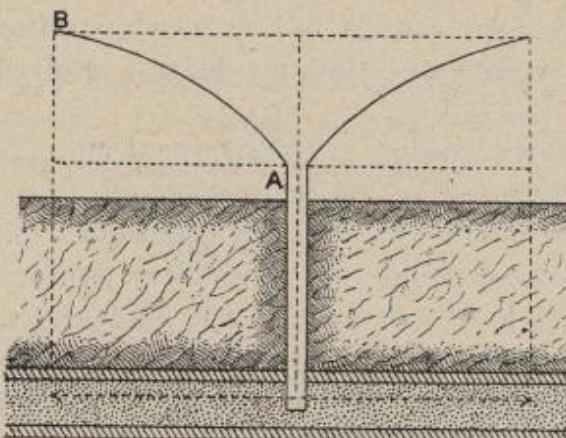


Fig. 10.

sien, dont la nappe liquide d'alimentation serait forcée entre deux couches imperméables horizontales et dont le tube, coupé au niveau de A, viendrait déverser l'eau dans un massif perméable : les filets seraient décrits en sens inverse du précédent.

Dans le cas d'un puits absorbant, la surface libre aurait encore une équation de même nature, mais le sens de sa concavité serait changé.

**3. Mouvement quasi uniforme des eaux souterraines<sup>1</sup>.** — L'eau qui s'infiltre à travers les pores d'un terrain perméable descend en filets à peu près verticaux jusqu'à ce qu'elle ait rencontré une couche imperméable qui l'arrête. Elle s'amarre sur cette couche, et, en même temps, elle chemine, avec une pente plus ou moins forte, vers les points bas. C'est à cette masse coulant sur une nappe imperméable à travers un terrain perméable qu'on donne le nom de *nappe aquifère*. Une telle nappe peut se diriger vers des points qui lui donnent issue au jour, ou bien elle peut s'enfoncer dans le sol et ne reparaître au jour qu'en des points très éloignés de son point de formation.

Nous allons étudier le mouvement non permanent d'une nappe aquifère, en supposant que le mouvement se fasse par filets à peu près rectilignes dans un lit sensiblement prismatique, et même, pour simplifier, dans un lit à section à peu près rectangulaire et de longueur constante  $l$ . Le mouvement se fait pareillement dans tous les plans verticaux parallèles au profil

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 8, p. 252-260 ; note sur le mouvement non permanent des eaux souterraines.

longitudinal, et nous pourrons ne considérer que ce qui se passe dans l'un d'eux.

Le mouvement se faisant sensiblement suivant la direction  $ox$  du lit (incliné d'un angle  $i$  sur l'horizon), les surfaces d'égale charge seront très sensiblement des plans normaux à  $ox$ . Considérons une section normale  $\sigma$  ou  $MM'$ , et évaluons pour elle la pente motrice en  $M$ . A cause du parallélisme des surfaces d'égale charge, on a  $I = -\frac{d\varphi}{dx}$ ,  $d\varphi$  désignant la différence

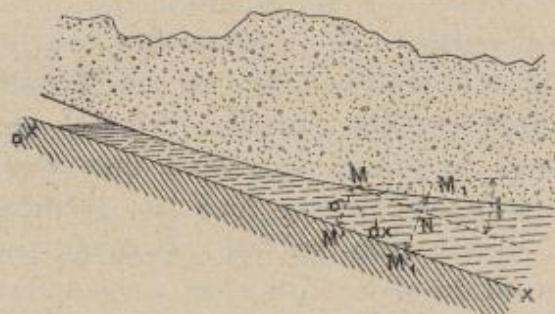


Fig. 41.

de charge aux extrémités  $M$  et  $N$  d'un filet élémentaire de longueur  $dx$ . La section normale  $M_1 M'_1$  passant par  $N$  a pour hauteur, au-dessus de  $MN$ ,

$$NM_1 = \frac{i}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx.$$

La charge est la même en  $M_1$  et en  $N$ ; nous sommes donc conduits à évaluer la différence des charges en  $M$  et en  $M_1$ , où la pression  $p$  n'est autre que la pression atmosphérique constante. Dès lors,  $I$  est le quotient par  $dx$  de la différence des altitudes des points

$M$  et  $M_1$ , et cette différence s'estime en projetant sur la verticale le contour  $MNM_1$ , ce qui donne :

$$MN \sin i - MN_1 \cos i.$$

Ainsi  $I = \sin i - \frac{\cos i}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial x}$ .

Par suite, le débit de la section  $MM'$  aura pour expression :  $Q = \frac{m'}{\mu'} \sigma \left( \sin i - \frac{\cos i}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)$ .

Quant le mouvement est permanent, ou que le débit  $Q$  est constant, cette relation, considérée comme équation différentielle en  $\sigma$ , permet de déterminer  $\sigma$  en fonction de  $x$ , pourvu que les coefficients qui y figurent soient connus dans les diverses sections, et que l'on sache la valeur de  $\sigma$  dans une section particulière. Notamment quand tous les coefficients sont constants, l'intégration se fait aisément sous forme finie. Le profil du niveau libre est ainsi déterminé.

Dans le cas où le cours d'eau à débit constant serait très long,  $\sigma$  serait sensiblement constant sur une grande

longueur et l'on aurait :  $Q = \frac{m'}{\mu'} \sigma \sin i$ .

Supposons maintenant que le régime ne soit pas permanent, par suite de pluies continues, ou par suite, au contraire, de sécheresse. Nous aurons à adjoindre à l'équation précédente qui fournit  $Q$  l'équation de continuité que nous obtiendrons ainsi : entre deux sections normales voisines, d'abscisses  $x$  et  $x + dx$ , le volume d'eau est  $m' \sigma dx$ ; de l'instant  $t$  à l'instant  $t + dt$ , ce volume varie de  $\frac{\partial(m' \sigma)}{\partial t} dx dt$ ; mais d'autre part,

$Q$  étant le débit à l'instant  $t$  dans la tranche  $x$ ,

$$\left( Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right)$$

sera le débit dans la tranche  $x + dx$ , et l'excédent de l'eau entrée par une face du volume considéré sur l'eau sortie par l'autre sera  $-\frac{\partial Q}{\partial x} dx dt$ , entre les instants  $t$  et  $t + dt$  : la condition de conservation des volumes fluides donnera donc :  $\frac{\partial(m'\sigma)}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ , ou

$$\frac{\partial(m'\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{m'\sigma}{\mu'} \left( \sin i - \frac{\cos i}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \right\} = 0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles qui régira les variations de  $\sigma$ , fonction de  $x$  et de  $t$ .

Si nous supposons constants les coefficients  $\mu'$ ,  $m'$ , cette équation pourra s'écrire :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\mu'} \frac{\partial}{\partial x} \sigma \left( \sin i - \frac{\cos i}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) = 0. \quad (1)$$

La quantité  $\frac{1}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial x}$ , qui n'est autre que l'inclinaison de la surface libre sur le fond, sera généralement, sauf en des points et à des instants exceptionnels, beaucoup plus petite que  $\sin i$ , et l'on pourra réduire à  $\sin i$  la parenthèse ; l'équation simplifiée

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sin i}{\mu'} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0,$$

admet pour intégrale générale :

$$\sigma = f \left( x - \frac{\sin i}{\mu'} t \right),$$

$f$  étant une fonction arbitraire, qu'on déterminera aisément par la condition que, pour  $x=0$ ,  $\sigma$  soit une fonction donnée de  $t$ . Ainsi le régime de la nappe souterraine sera déterminé si l'on connaît, à toute époque, son épaisseur, et par suite  $\sigma$ , près de l'extrémité du canal qui la contient.

Ce cas est réalisé dans les crues ou décrues lentes; les accroissements ou décroissements d'eau se font alors assez lentement pour que la surface libre soit parallèle au fond.

Le résultat obtenu peut même être étendu au cas où la section du lit n'est pas tout à fait rectangulaire et constante. Il donne lieu à l'énoncé suivant : *Chaque valeur de  $\sigma$  et la valeur correspondante  $\frac{m'}{\mu'} \sigma \sin i$  du débit  $Q$  se propagent d'amont en aval, avec la célérité  $\omega = \frac{\sin i}{\mu'}$ .*

Pour beaucoup de terrains perméables, on admet que  $m'$  est voisin de 0,20, et  $\mu'$  de 3000, en sorte que  $\omega$  est très faible.

La même méthode permettrait d'étudier le régime lentement variable aux alentours d'un puits.

M. Boussinesq a envisagé d'autres cas de simplification de l'équation (1); mais les résultats en sont un peu compliqués<sup>1</sup>.

#### 4. Mouvement varié d'une nappe aqueuse quelconque à travers un milieu perméable. — Dans les problèmes qu'on vient de traiter, le quasi

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 8, p. 257-258.

parallélisme des filets fluides entraînait la connaissance de la forme des surfaces d'égale charge. Nous supposons maintenant qu'on ne sache rien *a priori* sur ces surfaces, et nous nous proposons d'établir l'équation générale qui régit les phénomènes de filtration.

Dans un petit pore avoisinant un point M ( $x, y, z$ ), le débit de transpiration par unité de surface et de temps est :

$$q = -\frac{m}{\mu} \frac{d\varphi}{dn},$$

$d\varphi$  étant la variation de la charge quand on se déplace de  $dn$  dans le sens de l'écoulement, normalement à la surface d'égale charge passant par M. Si  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les cosinus directeurs de l'axe  $dn$  du pore considéré, on peut encore écrire :

$$q = -\frac{m}{\mu} \left( \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Cela posé<sup>1</sup>, « décrivons autour du point M une sphère de surface unité; soit  $\omega$  un élément d'aire de cette sphère. Associons tous ceux des tubes de transpiration dont la direction de l'axe  $dn$  reportée en M couperait  $\omega$ , et supposons que le rayon moyen de l'aire  $\omega$  ou que l'axe moyen du groupe de tubes ait pour cosinus directeurs ( $\alpha, \beta, \gamma$ ). Menons maintenant par M un élément plan, dont la normale ait pour cosinus directeurs  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ . Il y aura, évidemment, d'autant plus de tubes du groupe coupés par l'unité d'aire de ce plan, que celle-ci aura sa projection plus grande sur un plan perpendiculaire à tous leurs axes, plan où

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 24, t. I, p. 327-328.

leurs sections normales se trouveront distribuées d'une certaine manière, dépendant de la constitution du milieu poreux, et généralement variable avec la direction ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ). Si donc on appelle  $2i$  un certain coefficient, uniquement fonction, pour un même milieu, de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , le nombre des tubes du groupe qui auront forme et grandeur données, de chaque espèce existant dans le milieu, et que coupera l'unité d'aire de la projection considérée du petit plan, pourra être exprimée par  $2i\omega$ . Or il suit de là que ce nombre sera  $2i\omega \cos V$  pour l'unité d'aire même de l'élément plan donné,  $V$  désignant l'angle que fait la normale à l'élément avec la direction  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  du groupe.

Pour obtenir le débit  $Q$  à travers l'unité d'aire de l'élément plan, nous n'aurons, après avoir remplacé  $\cos V$  par  $(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)$ , qu'à faire la somme, d'abord, des volumes fluides  $q$  débités par les tubes du groupe traversant l'élément et qui ont formes ou calibres divers, et, ensuite, de toutes les sommes analogues pour les groupes qui correspondent aux éléments  $\omega$  d'une demi-sphère, ayant son pôle sur la normale à l'élément plan. Cette dernière sommation pourra être étendue à la sphère entière, à condition de remplacer  $2i$  par  $i$ ; car chaque tube appartient également aux groupes de deux éléments  $\omega$ , symétriques par rapport au centre de la sphère, et fournira même apport dans les deux groupes. Indiquons alors par le signe  $\Sigma$  des sommations étendues tant à toutes les natures de tubes qu'à toute la sphère. »

La valeur totale du débit de l'élément plan, par unité de surface, sera :

$$Q = - \sum \frac{m}{\mu} \left( \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) i\omega (\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1),$$

ou encore en posant :

$$\begin{aligned} A &= \sum \frac{m}{\mu} \alpha^2 i\omega, \dots, D = \sum \frac{m}{\mu} \beta \gamma i\omega, \dots \\ Q &= - \left( A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + F \frac{\partial \varphi}{\partial y} + E \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \alpha_1 - \left( F \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} + D \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \beta_1 - \left( E \frac{\partial \varphi}{\partial x} + D \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \gamma_1. \end{aligned}$$

Les coefficients de  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  sont les débits à travers les éléments plans menés en M perpendiculairement aux axes  $ox, oy, oz$  et orientés vers ces axes : nous les désignerons par  $Q_x, Q_y, Q_z$ .

L'équation indéfinie que nous nous proposons d'établir ne sera autre que l'équation de continuité traduite comme il suit. Considérons un élément infinitésimal  $d\tau$  ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de centre M ( $x, y, z$ ), d'arêtes  $dx, dy, dz$  parallèles aux axes de coordonnées. La somme algébrique des débits à travers le couple des faces du parallélépipède normales à  $ox$ , est, entre les instants  $t$  et  $t+dt$  :

$$dydz \cdot \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \cdot dt, \text{ soit } \frac{\partial Q_x}{\partial x} d\tau dt.$$

Par suite, la somme algébrique des débits à travers toute la surface du parallélépipède est :

$$\left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right) d\tau dt.$$

D'autre part, soit  $\mathfrak{M} d\tau$  le volume fluide contenu à l'instant  $t$  dans le volume apparent  $d\tau$  du milieu poreux ; sa variation entre les instants  $t$  et  $t+dt$  sera  $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} d\tau dt$ . En égalant les deux expressions, on obtient l'équation indéfinie

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z}. \quad (2)$$

A cette équation, il faut joindre, comme condition aux limites, que, sur tous les éléments de la surface imperméable, le débit  $Q$  est nul.

Les six coefficients  $A, B, C, D, E, F$  dépendent de la contexture de l'élément du milieu poreux entourant le point  $M$ ; ce sont des fonctions des coordonnées de ce point et du temps.

Lorsque le milieu homogène considéré est à structure identique dans toutes les directions autour d'un point quelconque, les coefficients  $A, B, C$  ont une même valeur  $K = \frac{1}{3} \sum \frac{m}{\mu} i_\omega$ , et les autres sont nuls; en sorte qu'on a simplement :

$$Q = -K \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \alpha_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \beta_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \gamma_1 \right) = -K \frac{d\varphi}{dN},$$

$dN$  étant une normale infinitésimale à l'élément plan d'orientation ( $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ).

Les débits à travers les éléments plans normaux aux axes de coordonnées deviennent alors :

$$Q_x = -K \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Q_y = -K \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Q_z = -K \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Ainsi,  $\mathfrak{M}$  et  $K$  étant des fonctions données de

$x, y, z, t$ , on aura pour déterminer la charge  $\varphi$  l'équation indéfinie :

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ K \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] = 0,$$

avec la condition limite  $\frac{dz}{dN} = 0$ , pour tous les éléments plans de la paroi imperméable.

A la surface libre souterraine, supposée soumise à la pression atmosphérique constante, la charge  $\varphi$  se réduit à l'altitude de la surface libre  $h$ , fonction de  $x, y$ , et de  $t$ , dont la valeur initiale  $h_0(x, y)$  est donnée, en sorte que  $\varphi [x, y, h_0(x, y), 0] = h_0(x, y)$ .

M. Boussinesq a tiré parti des équations que nous venons de former, équations susceptibles de simplification dans le cas d'un terrain à capacité aqueuse  $\mathcal{M}$  constante, et d'une nappe de petite épaisseur, et de faibles pentes au fond et à la surface libre. Nous renverrons le lecteur à son beau Mémoire<sup>1</sup> et nous nous bornerons ici à une première approximation, dont les équations peuvent être établies directement.

**5. Cas d'une nappe aqueuse n'ayant que de faibles pentes tant de fond que de superficie<sup>2</sup>.** — Envisageons donc une nappe aqueuse n'ayant qu'une faible épaisseur relativement à ses dimensions horizontales, et où le sous-sol imperméable, tout

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 21, p. 363-394.

<sup>2</sup> J. BOUSSINESQ, 20, p. 13-15.

comme la surface libre, n'a que de faibles pentes sur l'horizon. Dans ces conditions, le courant aura une direction à peu près la même le long d'une verticale quelconque, du fond à la surface libre; les filets fluides seront par suite sensiblement horizontaux, comme le sont presque ceux qui glissent sur le sol. Alors les surfaces d'égale charge qui sont normales à ces filets, pourront être confondues avec des cylindres verticaux. La charge  $\varphi$ , à un instant  $t$ , en un point  $(x, y, z)$ , sera alors la même qu'au plus haut point mouillé de la verticale  $(x, y)$ , point où la pression se réduit à la pression atmosphérique constante, et où la charge se réduit à l'altitude qui sera le  $z = h$  de la surface libre, si l'on prend pour plan  $xoy$  le plan de repère des altitudes. Nous admettrons encore de plus que le sol a même structure sur toute verticale : la capacité aqueuse  $\mathfrak{M}$  du sol et le coefficient spécifique  $K$  seront deux fonctions données de  $x$  et de  $y$ .

Enfin nous appellerons  $H$  la profondeur de la nappe imperméable au-dessous du plan  $xoy$ ;  $H$  sera une fonction aussi donnée de  $x, y$ , comptée positivement vers le bas.

Soit  $d\omega = dx dy$  la projection, sur  $xoy$ , d'un élément plan de surface de la nappe; considérons le prisme vertical indéfini dont  $d\omega$  est la section droite; le tronçon de ce prisme compris dans le milieu poreux entre le fond imperméable et la surface libre, à l'instant  $t$ , aura pour hauteur  $(H + h)$ , si l'on convient de compter le  $z$  de la surface libre positivement vers le haut, et son volume  $(H + h)d\omega$  contiendra un volume réel de fluide égal à  $\mathfrak{M}(H + h)d\omega$ ; durant l'intervalle  $dt$  consécutif à l'instant  $t$ , ce volume fluide

subira un accroissement  $\mathfrak{M} \frac{\partial h}{\partial t} d\omega dt$ ,  $\mathfrak{M}$  et  $H$  ne dépendant pas de  $t$ .

Nous allons exprimer que cet accroissement provient de l'excès des débits d'entrée sur les débits de sortie à travers les faces latérales du prisme, puisque nous supposons qu'il n'y a pas d'apport extérieur (s'il y avait apport extérieur et que cet apport superficiel fût une fonction connue  $\chi(x, y, t)$ , par unité de surface horizontale et de temps, il y aurait lieu d'ajouter  $\chi d\omega dt$  aux termes que nous allons écrire). Les faces parallèles au plan  $zoy$ , d'aire  $(H+h)dy$ , débitant respectivement  $Q_x(H+h)dydt$  et

$$\left( Q_x(H+h) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ Q_x(H+h) \right\} dx \right) dydt;$$

d'où l'excédent restant dans le prisme :

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left[ Q_x(H+h) \right] d\omega dt.$$

Or  $Q_x$  n'est autre que  $-K \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , et  $\varphi$  sur toute une verticale a la même valeur  $h$  qu'au plus haut point mouillé. L'excédent trouvé aura donc pour expression :  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ K(H+h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] d\omega dt$ . Les faces parallèles au plan  $zox$  donneraient de même comme excédent :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ K(H+h) \frac{\partial h}{\partial y} \right] d\omega dt.$$

Hydraulique générale.

7\*

Par comparaison, nous obtiendrons l'équation :

$$\mathfrak{M} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(H+h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K(H+h) \frac{\partial h}{\partial y} \right]. \quad (3)$$

Cette équation détermine les variations de la cote  $h$  de la surface libre dans le milieu perméable, cote fonction de  $x$ ,  $y$ ,  $t$ , dont la valeur pour  $t=0$  est supposée donnée.

Il y a lieu d'ajointre à cette équation des conditions aux limites que nous allons définir et traduire analytiquement.

Soit  $C$  une courbe fermée du plan  $xoy$ , telle que toutes les génératrices du cylindre vertical de base  $C$  rencontrent la nappe aqueuse, découpant sur le fond une courbe  $\Gamma$ ; soit  $\Gamma_1$  une portion de ce contour  $\Gamma$  de la nappe imperméable, portion que nous supposerons *arasée horizontalement*. Supprimons le milieu perméable extérieurement au cylindre précédent; entre les génératrices extrêmes du contour  $\Gamma_1$ , laissons à nu le milieu poreux, et revêtons d'une paroi imperméable le reste de la surface cylindrique. La nappe fluide enclose entre le fond et cette paroi s'écoulera par la bande ouverte; la facilité de l'écoulement à l'air libre, au-dessus de  $\Gamma_1$ , comparée à la lenteur forcée de l'écoulement à travers le milieu poreux, aura bientôt abaissé brusquement la hauteur de la nappe aqueuse, jusqu'à la rendre insignifiante sur  $\Gamma_1$ . — Nous aurons ainsi constitué une *source* dont  $\Gamma_1$  sera le *seuil d'écoulement*, et nous nous proposons d'étudier les variations du débit de cette source.

Nous prendrons pour plan  $xoy$  le plan du seuil  $\Gamma_1$ ; la courbe  $C$  dans ce plan comprendra l'arc  $\Gamma_1$ , que nous appellerons le *contour libre*; le reste  $C_1$  sera dit le *contour paroi*. A proximité du contour libre, la hauteur  $h$  de la surface est négligeable vis-à-vis de ce qu'elle est là où la pente de cette surface est modérée et où l'équation (3) est validement établie. Nous aurons donc, à très peu près, comme première condition limite :  $h=0$  sur le contour libre  $\Gamma_1$ .

En tous les points de la masse fluide projetés à proximité du contour paroi, le liquide circulera parallèlement à ce contour; à travers tout élément plan vertical parallèle à  $C_1$ , même pris un peu dans l'intérieur, là où vaut l'équation (3), le débit sera nul, et si l'on désigne par  $dn$  une petite normale horizontale à  $C_1$ , nous aurons comme seconde condition limite :

$$\frac{dh}{dn} = 0 \text{ sur le contour paroi } C_1.$$

Nous estimerons enfin le débit  $Q$  de la source à travers une surface cylindrique verticale parallèle à  $\Gamma_1$ , et un peu distante de cette courbe vers l'intérieur du massif. Soit  $(H+h)$  la hauteur mouillée d'une génératrice traversant un élément  $d\gamma_1$  de la trace de ce cylindre sur le plan  $xoy$ , trace très voisine de  $\Gamma_1$ . Nous aurons évidemment :

$$Q = \int_{\Gamma_1} K(H+h) \frac{dh}{dn} d\gamma_1.$$

Comme  $h$  est insignifiant près du seuil, nous pourrons réduire à  $H$  la parenthèse  $(H+h)$ , à moins que

$H$  ne s'évanouisse en moyenne à proximité du seuil de la source.

L'analyse permet d'aborder le problème de calcul intégral auquel on se trouve ramené; mais on n'obtient de résultats, relativement simples que dans deux cas :

1<sup>o</sup> Lorsque la dénivellation  $h$  de la surface libre au-dessus du seuil est négligeable vis-à-vis de la profondeur  $H$  de la nappe sous ce même seuil (seuil très haut); 2<sup>o</sup> Lorsque cette dénivellation  $h$  est au contraire très grande vis-à-vis de la profondeur  $H$  (seuil très bas).

**6. Régime d'une source en temps de sécheresse<sup>1</sup>.** — On a affaire au premier cas en temps de sécheresse et avec un sous-sol concave. Dans l'équation (3), la fonction inconnue  $h$  sera alors négligeable devant la fonction connue  $H$ , et l'on aura à intégrer l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre :

$$\mathfrak{M} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ KH \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ KH \frac{\partial h}{\partial y} \right].$$

Cette équation a été rencontrée naguère par Fourier, dans sa *Théorie analytique de la chaleur*, en traitant le problème du refroidissement d'une mince plaque plane, — et précisément, eu égard à certaines conditions imposées à cette plaque, avec les mêmes équations aux limites que nous avons obtenues ici.

Envisageons d'abord le cas où la nappe forme une bande cylindrique quasi indéfinie, comprise entre

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 20, Mém., p. 16-19.

deux bords parallèles,  $x=0$  correspondant au contour libre,  $x=L$  correspondant au contour paroi imperméable, et où  $\mathfrak{M}$ ,  $K$  et  $H$  sont des constantes.

L'équation précédente se réduira à

$$\frac{\mathfrak{M}}{KH} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

Cherchons-en une solution de la forme

$$h = U e^{-\alpha t},$$

$U$  étant une fonction de  $x$  et  $\alpha$  une constante positive. Il viendra, pour déterminer  $U$ , l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = -\frac{\mathfrak{M} \alpha}{KH} U,$$

dont l'intégrale générale est :

$$U = C \sin \left( \frac{\mathfrak{M} \alpha}{KH} x + C_1 \right),$$

$C$  et  $C_1$  étant des constantes arbitraires.

Voyons à satisfaire aux conditions aux limites, par un choix convenable des constantes :

$$h = 0 \text{ pour } x = 0, \quad \frac{dh}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = L.$$

$$\text{ou } U = 0 \text{ pour } x = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = L$$

$$\text{Il vient ainsi : } C_1 = 0 \text{ et } \cos \frac{\mathfrak{M} \alpha L}{KH} = 0,$$

et nous satisferons à toutes les conditions en posant :

$$h = C \sin \frac{\pi x}{2L} e^{-\alpha t},$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{\pi^2 KH}{4 \mathfrak{M} L^2}.$$

Le problème serait complètement résolu si la surface libre *initiale* avait pour équation

$$h_0 = C \sin \frac{\pi x}{2L} \quad (0 \leq x \leq L).$$

La solution particulière que nous venons de donner porte le nom de solution simple fondamentale. On peut établir qu'avec une surface libre initiale quelconque, l'expression de  $h$  se réduit plus ou moins rapidement à cette solution fondamentale.

Le débit par unité de longueur de seuil est alors :

$$q = KH \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{\pi KH}{2L} \cdot Ce^{-\alpha t},$$

ou encore, en désignant par  $h_m$  la dénivellation maxima qui se produit à la ligne de faite  $x = L$  :

$$q = \frac{\pi}{2} KH \cdot \frac{h_m}{L}.$$

Le coefficient  $\alpha$  du temps  $t$  dans l'exponentielle s'appelle *coefficient de tarissement de la source*, et on qualifie de *bonne* une source pour laquelle ce coefficient est très petit.

Deux sources sont *également bonnes* quand elles admettent même coefficient de tarissement.

D'après l'expression de  $\alpha$ , dans deux telles sources, admettant même structure de leur nappe d'alimentation, la profondeur  $H$  est proportionnelle au carré de la largeur  $L$  de la nappe.

A égalité de dénivellation maxima initiale, les débits

$$q = \left( \pi k \sqrt{\frac{H}{L^2}} h_m \right) \sqrt{H}.$$

de deux sources également bonnes de même constitution, sont entre eux comme les racines carrées des profondeurs des nappes.

Envisageons maintenant le cas général ; on cherchera à satisfaire à l'équation aux dérivées partielles en posant :

$$h = U e^{-\alpha t},$$

$\alpha$  étant une constante positive, et  $U$  une fonction de  $(x, y)$ . Les équations qui définissent  $U$  et  $\alpha$  sont alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( K H \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K H \frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \mathfrak{M} x U, \\ U = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad \frac{dU}{dn} = 0 \quad \text{sur } C_1. \end{cases}$$

Une telle solution est dite solution simple *fondamentale* de Fourier, et on peut encore établir que l'expression cherchée de  $h$  se réduit, plus ou moins rapidement, quand l'influence des données initiales cesse de se faire sentir, à cette solution fondamentale<sup>1</sup>.

La terminologie précédente étant conservée, deux sources également bonnes, dans le cas général, auront des débits par unité de longueur de seuil, proportionnels aux racines carrées des profondeurs de leurs nappes d'alimentation, si l'on passe d'une nappe à l'autre en multipliant les dimensions horizontales par un même nombre  $k$  et les hauteurs verticales  $H$  par le carré  $k^2$  de ce nombre.

En effet,  $K$  étant supposé le même en tous les points du milieu perméable, si l'on multiplie  $dx$ ,  $dy$ ,  $dn$  par  $k$  et  $H$  par  $k^2$ , les équations précédentes restent iden-

<sup>1</sup> Sur les propriétés de cette solution, on consultera avantageusement J. BOUSSINESQ, 24, t. I, p. 252 et suiv.

tiques à elles-mêmes et engendrent les mêmes valeurs de  $U$  et de  $\alpha$ . L'expression de  $h$  sera donc la même sur deux verticales homologues. Mais alors le débit total  $Q$ , comme son élément  $KH \frac{dh}{dn} d\gamma_1$ , se trouve multiplié par  $k^2$ , et le débit par unité de longueur de seuil par  $k$ , soit par la racine carrée du rapport des profondeurs homologues.

Voici une conséquence intéressante de ce résultat. Pour les deux sources que nous venons de considérer, le rapport  $\frac{h}{H}$  sera en raison inverse de  $H$  ou du débit *total*  $Q$ . Si donc l'une des sources a un débit très grand, ou, comme on dit, est très forte, le rapport  $\frac{h}{H}$  y sera incomparablement plus faible que dans l'autre, supposée à débit modéré. Par suite  $h$  sera bien plus vite négligeable devant  $H$  dans la forte source que dans l'autre. Autrement dit, il semble que les *très fortes sources*, qui sont celles que l'on capte pour l'alimentation en eau des villes, doivent généralement être régies par les lois indiquées, peu de temps après la cessation des pluies.

M. Maillet, qui a étudié les lois expérimentales du débit des sources de la Vanne (captée pour l'alimentation de Paris), a reconnu que la source de Cérilly obéissait à ces lois de juin à octobre; pour elle, le coefficient de tarissement est  $\alpha = 0,1066$ , si l'on prend le mois pour unité de temps. La source d'Aïn-Zeboudja, captée par la ville d'Alger, est dans les mêmes conditions de mai à octobre et correspond à  $\alpha = 0,264$ .

7. **Régime d'une source en hautes eaux.** — Pendant la période des fortes eaux, si la surface du fond est très peu creuse, la plus grande partie de la nappe liquide est au-dessus du niveau du seuil, et l'on se trouve dans le second cas signalé.

Les équations à traiter deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mathfrak{M} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial h^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial h^2}{\partial y} \right), \\ h=0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad \frac{dh}{dn}=0 \text{ sur } C_1. \end{array} \right.$$

L'équation indéfinie n'est pas linéaire, et l'intégration générale ne semble pas abordable.

Aussi M. Boussinesq<sup>1</sup> s'est-il borné à chercher la forme vers laquelle tend la surface libre quand, ainsi que l'expérience donne lieu de l'admettre, l'écoulement acquiert un régime, la fonction  $h$  tendant à devenir indépendante des données initiales. Mais même alors il n'y a pas généralement *conservation* de l'écoulement ; autrement dit,  $h$  n'est pas en général le produit d'une fonction de  $x$  et  $y$  par une fonction de  $t$ . Toutefois il en est ainsi lorsque la nappe aqueuse repose sur un lit horizontal, avec rebord vertical (sauf au seuil de la source). Alors  $h$  varie en raison inverse du temps  $\tau$  compté à partir d'une certaine origine ; le débit de la source est inversement proportionnel au carré de  $\tau$ . Ce régime est même remarquablement stable, les petits écarts qu'il comporte étant de l'ordre de l'inverse de la quinzième puissance de  $\tau$ .

Enfin M. Boussinesq<sup>2</sup> a cherché s'il existe pour le

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 20, Mém., p. 22-38.

<sup>2</sup> J. BOUSSINESQ, 20, Mém., p. 40-61.

sous-sol imperméable des formes courbes rendant possible un mode d'écoulement susceptible de conservation, au sens que nous avons donné à cette expression. Cela a lieu pour un lit où les fonctions  $h$  et  $H$  sont proportionnelles.

Dans ce cas,  $h$  varie comme  $\frac{ke^{-K\tau}}{1-e^{-K\tau}}$ ,

où  $k$  est un coefficient mesurant le degré de concavité du fond. Le débit de la source est alors proportion-

nel à  $\left( \frac{\frac{k}{2}}{\sinh \operatorname{hyp} \frac{K\tau}{2}} \right)^2$ , quantité qui se réduit sen-

siblement à  $k^2 e^{-K\tau}$  pour les valeurs assez grandes de  $\tau$ . La stabilité de ce régime est très grande dans le cas d'un lit concave.

Nous nous bornerons à ces indications, et nous renverrons le lecteur au Mémoire original, ainsi qu'aux *Essais d'Hydraulique souterraine et fluviale* de M.E. Maillet<sup>1</sup>, ingénieur des Ponts et Chaussées, où la question du débit des sources est étudiée au double point de vue théorique et expérimental, surtout pour le bassin de la Seine. D'ailleurs, la matière est loin d'être épuisée, et les jeunes physiciens trouveraient aisément, aux alentours de ces difficiles recherches, d'intéressants sujets d'étude.

<sup>1</sup> E. MAILLET.

## CHAPITRE III

### MOUVEMENTS DE ROTATION

1. **Mouvement permanent par filets horizontaux circulaires et coaxiaux<sup>1</sup>.** — Après le mouvement d'un fluide par filets rectilignes et parallèles, le plus simple est celui qui se fait par filets circulaires horizontaux ayant tous leurs centres sur une même verticale.

Soit  $oz$  cette verticale dirigée vers le haut;  $r$  la distance d'un point quelconque  $(x, y, z)$  à l'axe  $oz$ ;  $V$  la vitesse de la molécule qui passe par ce point et dont les composantes sont alors :

$$u = -\frac{y}{r} V, \quad v = \frac{x}{r} V, \quad w = 0.$$

L'équation de continuité se transforme en :

$$y \frac{\partial V}{\partial x} - x \frac{\partial V}{\partial y} = 0;$$

d'où :  $V = f(x^2 + y^2, z) = F(r, z).$

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 2, § 11, p. 407.

Nous aurons alors :  $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ ,

et un calcul tout simple donne :

$$\Delta u = -\frac{y}{r} \left( \Delta V - \frac{V}{r^2} \right), \quad \Delta v = \frac{x}{r} \left( \Delta V - \frac{V}{r^2} \right), \quad \Delta w = 0.$$

Comme le mouvement est permanent, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

et par suite :

$$u' = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{V^2}{r^2} x,$$

$$v' = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{V^2}{r^2} y,$$

$$w' = 0.$$

Les équations de Navier deviennent ;

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{V^2}{r^2} x - \frac{\varepsilon y}{r} \left( \Delta V - \frac{V}{r^2} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{V^2}{r^2} y + \frac{\varepsilon x}{r} \left( \Delta V - \frac{V}{r^2} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Multiplions ces équations respectivement par  $dx, dy, dz$ ; ajoutons-les et introduisons comme variables les coordonnées semi-polaires  $r, \theta = \text{arc tg } \frac{y}{x}, z$ . Nous aurons :

$$dp = \rho \frac{V^2}{r} dr + \varepsilon r \left( \Delta V - \frac{V}{r^2} \right) d\theta - \rho g dz. \quad (1)$$

La première condition d'intégrabilité consiste en ce

$$\text{que } \frac{\partial}{\partial z} \left[ \rho \frac{V^2}{r} \right] = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Le coefficient de  $d\theta$  ne dépend pas alors de  $z$ ; comme celui de  $dr$  ne dépend pas de  $\theta$ , le premier ne saurait dépendre de  $r$  et se réduit par suite à une constante;

$$\text{d'où : } r \left[ \Delta V - \frac{V}{r^2} \right] = c$$

$$\text{ou } \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2} - \frac{c}{r} = 0. \quad (3)$$

Par suite de la première condition, la section méridienne du fluide doit être l'espace illimité inférieurement, compris entre deux droites verticales. En effet, si les verticales du fluide rencontraient une paroi, on y aurait  $V = 0$ , d'après la condition relative à toute paroi mouillée, et alors la vitesse serait nulle partout.

Par suite de la seconde condition, on a :

$$V = \frac{A}{r} + \frac{cr}{2} \log \frac{r}{B},$$

$A$  et  $B$  étant deux constantes arbitraires. Dans le cas particulier où la constante  $c$  serait nulle, l'équation (3) admettrait pour intégrale  $V = Ar + \frac{B}{r}$ , et les calculs qui suivent se simplifieraient en conséquence.

En exprimant que  $V$  s'annule sur les deux verticales qui limitent la section méridienne du fluide et qui sont à des distances respectives  $r_0$  et  $r_1$  de l'axe, on

254 MOUVEMENTS BIEN CONTINUS A FROTTEMENTS SENSIBLES  
détermine les deux constantes A et B, et l'on obtient :

$$V = \frac{cr}{2} \left[ \log \frac{r}{r_0} - \frac{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}{1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}} \log \frac{r_1}{r_0} \right]. \quad (4)$$

On déduit de là :

$$\frac{dV}{dr} = \frac{c}{2} \left[ 1 + \log \frac{r}{r_0} - \frac{1 + \frac{r_0^2}{r^2}}{1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}} \log \frac{r_1}{r_0} \right];$$

positive pour  $r = r_0$ , négative pour  $r = r_1$ , cette dérivée ne s'annule qu'une fois quand  $r$  va de  $r_0$  à  $r_1$ . Ainsi la vitesse, nulle à la paroi intérieure, croît jusqu'à un certain maximum et décroît ensuite pour s'annuler à l'autre paroi.

L'expression de  $dp$  devient alors :

$$dp = \varphi \frac{V^2}{r} dr + c \varepsilon d\theta - \varphi g dz,$$

et ceci donne, en passant, la signification de la constante  $c$  :  $c = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \theta}$ ; par quadratures, il vient :

$$\frac{p}{\varphi} = \frac{\varepsilon}{p} c \theta - gz + \int^r \frac{V^2}{r} dr + \text{const.},$$

$V$  devant être remplacé par sa valeur (4).

Proposons-nous de calculer l'action tangentielle exercée par le fluide sur un élément de paroi. Supposons qu'on ait fait passer l'axe des  $x$  par le centre de

cet élément; les coordonnées de ce centre étant  $x=r$ ,  $y=0$ , on a (Introd., ch. II, C, § 1, *in fine*):

$$T_z = \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad T_y = 0,$$

$$\text{ou } T_z = \varepsilon r \frac{d}{dr} \left[ \frac{V}{r} \right] = \frac{\varepsilon c}{2} \left[ 1 - \frac{\frac{2r_0^2}{r^2}}{1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}} \log \frac{r_1}{r_0} \right].$$

Posons  $\frac{r_0^2}{r_1^2} = 1 - \eta$ ; en faisant  $r = r_0$ , puis  $r = r_1$ , on trouve :

$$\begin{aligned} (T_z)_0 &= \frac{\varepsilon c}{2} \left[ \frac{\log(1-\eta)}{\eta} + 1 \right] \\ &= \frac{\varepsilon c}{2} \left[ \frac{\eta}{2} + \frac{\eta^2}{3} + \frac{\eta^3}{4} + \dots \right], \\ (T_z)_1 &= \frac{\varepsilon c}{2} \left[ \frac{(1-\eta) \log(1-\eta)}{\eta} + 1 \right] \\ &= \frac{\varepsilon c}{2} \left[ \frac{\eta}{2} + \frac{\eta^2}{2 \cdot 3} + \frac{\eta^3}{3 \cdot 4} + \dots \right]. \end{aligned}$$

On reconnaît que la première expression est plus grande que la seconde: ainsi la paroi concave ou extérieure est soumise à un frottement moins considérable que la paroi convexe ou intérieure.

Calculons, pour terminer, la vitesse moyenne dans la section méridienne :

$$\psi = \frac{1}{r_1 - r_0} \int_{r_0}^{r_1} V dr.$$

En notant que  $r \log r$  est la dérivée de  $\frac{r^2}{2} \left( \log r - \frac{1}{2} \right)$ ,  
il vient :

$$\mathcal{V} = \frac{c}{4\varepsilon} \left[ \frac{r_1 + r_0}{2} - \frac{2}{r_1 + r_0} \left( \frac{r_0 r_1}{r_1 - r_0} \log \frac{r_1}{r_0} \right)^2 \right].$$

Introduisons le rayon moyen  $R = \frac{r_0 + r_1}{2}$  et la  
demi-largeur  $d = \frac{r_1 - r_0}{2}$ , et nous aurons :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{cR}{4\varepsilon} \left[ 1 - \left( \frac{R^2 - d^2}{2dR} \log \frac{R+d}{R-d} \right)^2 \right] \\ &= \frac{cd^2}{3R\varepsilon} \left[ 1 - \frac{2}{15} \left( \frac{d}{R} \right)^2 - \dots \right]. \end{aligned}$$

**2. Mouvement permanent dans un tube dont l'axe est horizontal et circulaire<sup>1</sup>.** — Le mouvement précédent ne peut se produire que dans le cas où il n'y a ni fond ni couvercle. Nous nous proposons maintenant d'étudier le mouvement permanent bien continu d'un liquide dans un tube dont l'axe est horizontal et circulaire, et dont la section, de grandeur constante, est un rectangle à base horizontale ayant une de ses dimensions très petite par rapport à l'autre.

Décomposons la vitesse d'une molécule fluide suivant le prolongement du rayon  $r$ , suivant la tangente au parallèle de rayon  $r$  et suivant la parallèle à l'axe  $oz$  ;

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 2, § 12, p. 413 ; — 9, p. 41.

$U, V, w$  étant ces trois composantes, nous aurons :

$$u = U \frac{x}{r} - V \frac{y}{r}, \quad v = U \frac{y}{r} + V \frac{x}{r}.$$

Comme le mouvement permanent est établi, nous admettrons que la vitesse est la même en deux points correspondants de deux sections méridiennes, ce qui revient à dire que  $U, V, w$  ne dépendent que de  $r$  et  $z$ .

Alors :

$$\Delta u = \frac{x}{r} \left( \Delta U - \frac{U}{r^2} \right) - \frac{y}{r} \left( \Delta V - \frac{V}{r^2} \right),$$

$$\Delta v = \frac{y}{r} \left( \Delta U - \frac{U}{r^2} \right) + \frac{x}{r} \left( \Delta V - \frac{V}{r^2} \right),$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2};$$

$\Delta U$  et  $\Delta V$  se déduisent de  $\Delta w$  par la substitution de  $U$  et  $V$  à  $w$ .

Le mouvement étant permanent, les dérivées partielles de  $u, v, w$  par rapport au temps sont nulles. Par

suite : 
$$u' = -\frac{x}{r} \left( \frac{V^2}{r} - U \frac{\partial U}{\partial r} \right)$$

$$-\frac{y}{r} U \left( \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \right) + w \left[ -\frac{y}{r} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{x}{r} \frac{\partial U}{\partial z} \right],$$

$$v' = -\frac{y}{r} \left( \frac{V^2}{r} - U \frac{\partial U}{\partial r} \right)$$

$$+\frac{x}{r} U \left( \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \right) + w \left[ \frac{x}{r} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{y}{r} \frac{\partial U}{\partial z} \right],$$

$$w' = U \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z}.$$

On déduit alors des équations de Navier :

$$dp = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \left( \Delta U - \frac{U}{r^2} \right) \\ + \rho \left( \frac{V^2}{r} - U \frac{\partial U}{\partial r} - w \frac{\partial U}{\partial z} \right) \end{array} \right\} dr$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \left( \Delta V - \frac{V}{r^2} \right) \\ + \rho \left( U \left[ \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \right] + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \end{array} \right\} r d\theta$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \Delta w - \rho \left( U \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ + w \frac{\partial w}{\partial z} - \rho g \end{array} \right\} dz.$$

Les coefficients de  $dr$  et de  $dz$  ne dépendant pas de  $\theta$ , celui de  $d\theta$  ne doit dépendre ni de  $r$ , ni de  $z$ , et par suite se réduit à une constante  $c$ ; d'où :

$$\varepsilon \left( \Delta V - \frac{V}{r^2} \right) + \rho \left[ U \left( \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \right) + \frac{\partial V}{\partial z} \right] = \frac{c}{r}. \quad (5)$$

Les conditions d'intégrabilité se réduisent alors à une seule :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \varepsilon \left( \Delta U - \frac{U}{r^2} \right) + \rho \left[ \frac{V^2}{r} - U \frac{\partial U}{\partial r} - w \frac{\partial U}{\partial z} \right] \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \varepsilon \Delta w - \rho \left( U \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\}. \quad (6)$$

Enfin l'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\text{ou } \frac{\partial}{\partial r} [rU] + \frac{\partial}{\partial z} [rw] = 0. \quad (7)$$

Les trois équations indéfinies (5), (6) et (7) déterminent les fonctions  $U, V, w$  de  $r$  et de  $z$ .

M. Boussinesq a intégré ce système dans l'hypothèse où la section méridienne, de forme rectangulaire, a sa hauteur verticale  $2h$  très petite vis-à-vis de sa base horizontale.

Prenons pour plan des  $xy$  le plan de l'axe circulaire du tube. La vitesse s'annulant contre les parois supérieure et inférieure,  $U, V$  et  $w$  s'annuleront pour les valeurs de  $z$  très voisines,  $h$  et  $-h$ ; « chacune de ces fonctions sera alors très petite pour les valeurs intermédiaires de  $z$  et aura par suite : 1° sa dérivée première, par rapport à  $z$ , qui s'annulera une fois de moins, beaucoup plus grande qu'elle-même; 2° sa dérivée seconde en  $z$ , qui s'annule encore une fois de moins, ou même ne s'annulera pas du tout, beaucoup plus grande encore. Il est d'ailleurs évident que les dérivées successives de  $V, U, w$ , par rapport à  $r$ , seront au contraire comparables à  $V, U, w$ , excepté pour les plus grandes ou les plus petites valeurs de  $r$ , c'est-à-dire aux points très voisins des deux bords, convexe ou concave, du tube: je suppose dans ce qui suit que l'on fasse abstraction de ces points. » L'équation de continuité (7) montre d'ailleurs que  $\frac{\partial w}{\partial z}$  est de l'ordre de petitesse de  $U$ ; d'où il suit que  $w$  est négligeable devant  $U$ . « Et l'on peut enfin reconnaître de différentes manières que  $U$  est beaucoup plus petit que  $V$ ; voici la plus simple. Considérons le volume compris à l'intérieur du tube, entre deux sections normales

ou méridiennes infiniment voisines, puis coupons cette tranche par un plan vertical perpendiculaire aux sections méridiennes; les parties correspondantes à celles-ci fournissant par hypothèse des débits égaux, la superposition de l'incompressibilité du fluide entraîne l'annulation du volume fluide total qui traverse dans un sens déterminé le plan vertical ainsi construit, ce qui revient à dire que la valeur moyenne le long d'une verticale est nulle, ou qu'on a  $\int_{-h}^{+h} U dz = 0$ . Donc la vitesse radiale  $U$  s'annule non seulement, comme  $V$ , aux deux limites  $\pm h$ , mais aussi dans l'intervalle, et elle est très petite en comparaison de  $V^1$ . »

Revenons alors aux équations (5), (6), (7) et négligeons, d'après ces remarques, les termes qui sont très petits par rapport à d'autres. Il vient :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{c}{r}, \quad (5')$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \rho \frac{V^2}{r} \right] = 0. \quad (6')$$

Quant à l'expression de  $dp$ , elle devient :

$$dp = \left( \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \rho \frac{V^2}{r} \right) dr + cd\theta - \rho gdz.$$

L'équation (5') s'intègre et donne, puisque  $V$  doit s'annuler pour  $z = \pm h$ :

$$V = \frac{ch^2}{2\varepsilon r} \left( 1 - \frac{z^2}{h^2} \right). \quad (8)$$

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 9, p. 41-42.

En tenant compte de la même condition et en désignant par  $A$  une fonction arbitraire de  $r$ , on déduit de l'équation (6')

$$U = \frac{\rho c^2 h^6}{8 \varepsilon^3 r^3} \left[ A \left( 1 - \frac{z^2}{h^2} \right) - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{z^4}{h^4} \right) + \frac{1}{15} \left( 1 - \frac{z^6}{h^6} \right) \right].$$

Si on exprime que  $\int_{-h}^{+h} U dz = 0$ , on trouve :

$$A = \frac{11}{15},$$

et par suite :

$$U = \frac{\rho c^2 h^6}{120 \varepsilon^3 r^3} \left( 1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \left( 2 - \sqrt{\frac{23}{7}} - \frac{z^2}{h^2} \right) \left( 2 + \sqrt{\frac{23}{7}} - \frac{z^2}{h^2} \right). \quad (9)$$

L'équation (7) devient alors intégrable en  $z$ ; d'où

$$w = \frac{2}{7} \cdot \frac{\rho c^2 h^7}{120 \varepsilon^3 r^4} \frac{z}{h} \left( 1 - \frac{z^2}{h^2} \right)^2 \left( 5 - \frac{z^2}{h^2} \right). \quad (10)$$

Enfin l'expression de  $dp$  donne

$$p = c\theta - \rho gz - \frac{3}{35} \frac{c^2 \rho h^4}{\varepsilon^2 r^2} + \text{const.} \quad (11)$$

Il est entendu que ces valeurs ne sont pas applicables aux points situés près des bords verticaux du tube.

Suivons une même molécule fluide, il vient :

$$\frac{dr}{dt} = U, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

d'où  $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2U}{r} \frac{dz}{dw}$ .

Or, d'après (7) et (9),  $\frac{\partial w}{\partial z}$  n'est autre que  $\frac{2U}{r}$ ;

donc  $\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0$ ,

ou  $d \log r^2 = d \log \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)^2 \left(5 - \frac{z^2}{h^2}\right)$ .

Ceci donne

$$r^2 = C \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)^2 \left(5 - \frac{z^2}{h^2}\right), \quad \text{ou} \quad r^2 w = \text{const.},$$

eu égard à la valeur de  $w$ . Ainsi la vitesse verticale  $w$  varie en raison inverse de  $r^2$ ; elle est la plus grande près de la paroi intérieure. En même temps, on constate que les molécules ne vont pas jusqu'à la paroi supérieure, car pour  $z = \pm h$ ,  $r$  serait nul, et il ne peut être inférieur à  $r_o$ .

Le temps employé par une molécule pour passer d'un niveau  $z_o$  à un niveau  $z$  s'obtiendra par la formule

$$t = \int_{z_o}^z \frac{dz}{w},$$

en y remplaçant  $\frac{1}{w}$  par sa valeur qui est proportionnelle à  $z \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)^2 \left(5 - \frac{z^2}{h^2}\right)$ .

Quant au mouvement de circulation, il est défini par

$$V = r \frac{d\theta}{dt} = (r^2 w) \cdot \frac{d\theta}{rdz};$$

comme  $r^2 w$  est constant pour une même molécule, il

$$\text{viendra : } (r^2 w)\theta = c \frac{h^2}{2\varepsilon} \int \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) dz.$$

Ainsi nous avons évalué, en fonction de l'altitude  $z$ , le temps  $t$  et les coordonnées polaires  $r, \theta$  de la molécule.

Nous allons interpréter mécaniquement les formules auxquelles nous sommes parvenus.

Comme  $U$  est pair en  $z$  et  $w$  impair, il y a symétrie du mouvement par rapport au plan des  $x, y$ ; nous pouvons donc n'étudier le mouvement que dans la région des  $z$  positifs.

$U$  est positif de  $z=0$  à

$$z = h \sqrt{2 - \sqrt{\frac{23}{7}}} = 0,431h,$$

négatif au delà. Les molécules situées sous le plan  $z=0,431h$  s'éloignent donc de l'axe et se dirigent vers la paroi extérieure; celles situées au-dessus de ce plan s'approchent au contraire de la paroi intérieure. La vitesse  $U$  présente deux maximums, correspondant

$$\text{à } z=0 \text{ et à } z=h \sqrt{\frac{5}{3} - \sqrt{\frac{76}{63}}} = 0,734h.$$

La vitesse verticale  $w$  est toujours positive; les molécules montent. Sur une verticale, cette vitesse est

maximum pour  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$  ou  $U = 0$ , c'est-à-dire pour  $z = 0,431h$ .

En résumé, « en même temps que le fluide avance dans le tube avec la vitesse  $V$ , il est animé d'un mouvement transversal beaucoup plus lent, symétrique par rapport au plan horizontal médian : la masse ne s'avance qu'en se tordant sans cesse. Dans la moitié supérieure, les molécules les plus éloignées de la paroi, c'est-à-dire celles qui ont la plus grande vitesse, se rapprochent du bord concave, tout en s'éloignant petit à petit du plan de symétrie. Arrivées à la distance  $0,431h$  de ce plan, elles reviennent vers le bord convexe, et continuent d'ailleurs à s'écartez du plan méridien et à perdre leur vitesse. Il est évident qu'après s'être suffisamment approchées du bord convexe, elles repassent dans les régions moyennes où la vitesse est assez grande, et recommencent un trajet pareil. Mais nos formules ne s'appliquent plus à cette partie du mouvement, tout comme elles ne peuvent pas s'appliquer à la totalité de la première partie : elles n'ont été établies que pour les points situés à une distance finie des bords latéraux<sup>1</sup>. »

**3. Expériences de M. Maurice Couette; nouvelle détermination du coefficient  $\epsilon$  de frottement intérieur de l'eau.** — L' entraînement d'un liquide compris entre deux cylindres verticaux indéfinis concentriques, l'un fixe, l'autre animé d'un mouvement de rotation, fournit un nouveau moyen de

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 2, p. 419.

déterminer le coefficient  $\varepsilon$ ; ce moyen a été signalé par *Margules*<sup>1</sup>, et plus récemment *M. Couette* en a tiré parti avec beaucoup de précision. Il y a concordance avec la valeur donnée par Poiseuille, si toutefois la rotation n'est pas trop forte, ce qui est naturel, les équations de Navier n'étant valables que pour des mouvements lents et bien continus.

Le mouvement se transmet par communication latérale d'une couche aux couches voisines, et lorsque la vitesse de rotation  $\Omega$  du cylindre extérieur a pris une valeur constante, les conditions du mouvement permanent étudié au § 1 semblent devoir être réalisées, pourvu qu'en même temps le liquide qui se trouve au contact immédiat des parois y adhère sans aucun glissement.

Nous allons évaluer le couple de frottement qui prend naissance sur la paroi du cylindre intérieur.

Par raison de symétrie, la force tangentielle de glissement a une valeur constante sur tous les éléments superficiels égaux d'un même cylindre limite, et sur un élément  $d\sigma$ , distant de  $r$  de l'axe, elle a pour mesure (§ 1) :  $\varepsilon r \frac{d}{dr} \left[ \frac{V}{r} \right] d\sigma$ ; son moment par rapport à l'axe  $oz$  est  $\varepsilon r^2 \frac{d}{dr} \left[ \frac{V}{r} \right] d\sigma$ .

L'hypothèse de l'identité du mouvement dans tous les azimuts entraîne  $c=0$ , et par suite :

$$V = Ar + \frac{B}{r},$$

<sup>1</sup> Dr MARGULES, p. 588-602.

A et B étant deux constantes que nous déterminerons par les conditions

$$V=0 \text{ pour } r=r_0 \text{ et } V=\Omega r_1 \text{ pour } r=r_1.$$

$$\text{Alors } \frac{V}{r} = \Omega \frac{\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}}{\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2}}.$$

Le moment élémentaire de frottement (sur l'élément  $d\sigma$ ) est donc

$$\frac{2\Omega\varepsilon r_1^2 r_0^2}{(r_1^2 - r_0^2)r} d\sigma.$$

Si l'élément est pris sur la surface du cylindre de rayon  $r_0$ , le moment total de frottement sur une tranche de hauteur égale à l'unité sera :

$$C = \frac{4\pi\Omega\varepsilon r_0^2 r_1^2}{(r_1^2 - r_0^2)}.$$

Le problème expérimental qui est de mesurer C a été habilement traité par M. Couette<sup>1</sup>, à l'aide d'un appareil formé de deux cylindres de diamètres très peu différents. Le cylindre extérieur tourne autour de son axe qui est vertical, sous l'action d'une dynamo. Quant à la paroi fixe, c'est un cylindre un peu plus petit, possédant une certaine mobilité autour de son axe, suspendu à un fil d'acier : il est maintenu en repos en équilibrant le frottement du liquide par la torsion d'un fil ou par des poids; pour qu'on puisse regarder la surface de ce cylindre intérieur comme découpée dans un cylindre indéfini, M. Couette la prolonge par des

<sup>1</sup> M. COUETTE, 1, p. 388-391; — 2, p. 6-35.

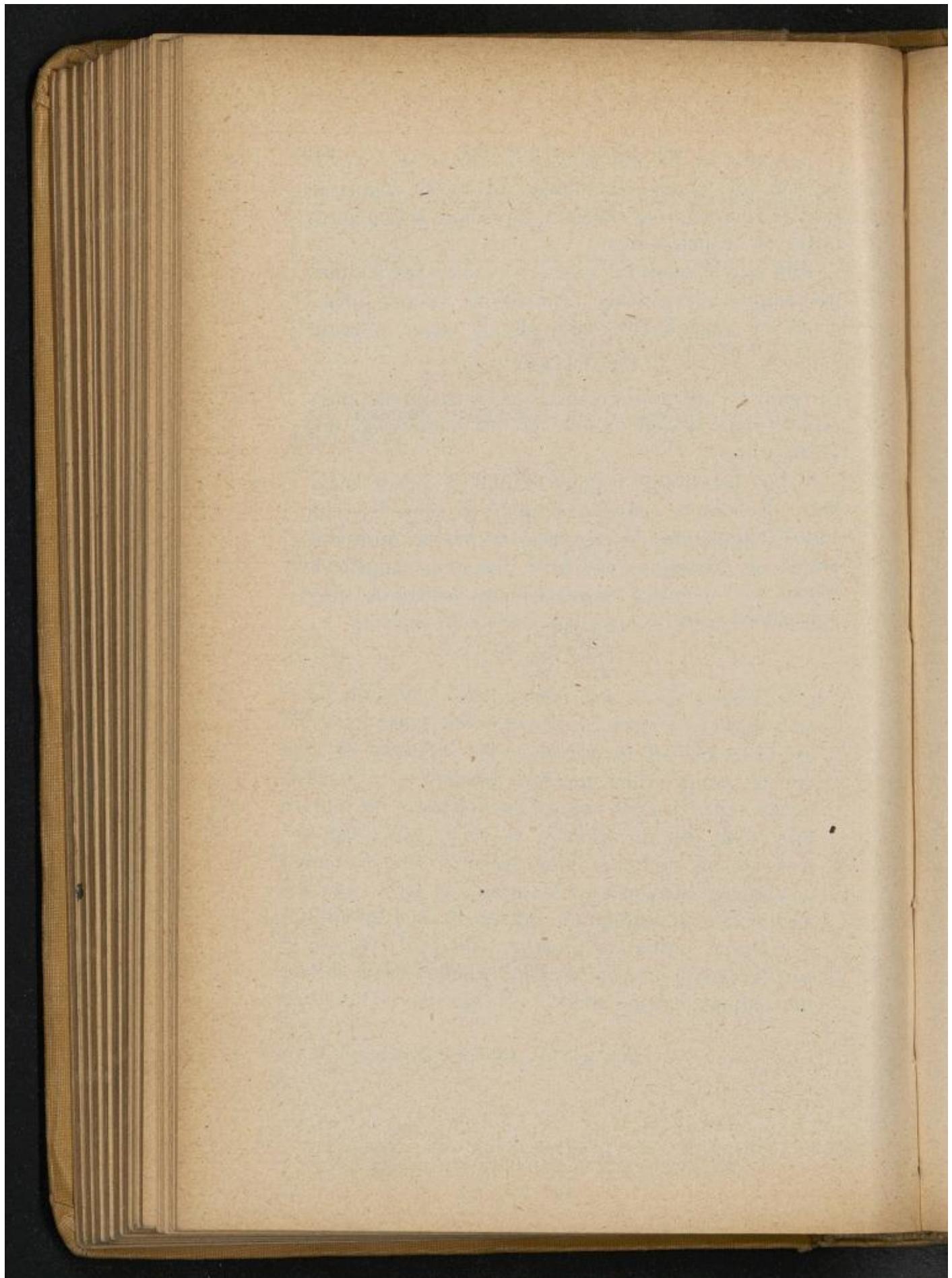
anneaux de garde absolument fixes, et donne au cylindre tournant une hauteur supérieure à la hauteur totale des cylindres fixes.

Tant que la vitesse de rotation n'excède pas 55 tours par minute, l'expérience confirme la formule précédente, et donne à  $16^\circ$  centigrades la valeur moyenne

$$\varepsilon = 0,01255;$$

eu égard à l'imparfaite réalisation des conditions théoriques, nous devons trouver là une vérification très satisfaisante.

Si l'on fait croître de plus en plus la vitesse angulaire, le régime s'éloigne de plus en plus de celui auquel s'appliquent les équations de Navier; après une période de transition, on arrive à ce qu'on appelle le *régime hydraulique* ou à mouvements *turbulents*, dont nous allons nous occuper dans la Section suivante.



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires

## TROISIÈME SECTION

### PHÉNOMÈNES DE MOUVEMENTS TURBULENTS

---

#### CHAPITRE I

##### MOUVEMENT PERMANENT UNIFORME DANS LES TUYAUX LARGES ET LES CANAUX

1. **Équations générales du mouvement graduellement varié.** — Dans les cours d'eau et dans les tuyaux à grande section, les écoulements cessent d'être bien continus : ils deviennent tumultueux et tourbillonnants, ou, suivant le mot anglais, *turbulents*. Nous avons analysé, dans l'Introduction, le passage du régime régulier au régime hydraulique ou turbulent, et nous avons établi les équations qui régissent ce dernier, au moins pour les mouvements qui se produisent dans les tuyaux ou canaux découverts à axe sensiblement droit, à lit à peu près cylindrique, — et qui sont graduellement variés.

Rappelons qu'un mouvement est dit *graduellement*

*varié* quand : 1° toutes les molécules, censées animées des vitesses moyennes locales, se meuvent de façon que leurs trajectoires ne fassent, avec la direction  $ox$  de l'axe du courant, que de très petits angles; 2° les mêmes circonstances qui se produisent dans une section normale à  $ox$ , se produisent presque au même instant dans les sections voisines ou même un peu plus éloignées, de manière que les dérivées en  $x$  de toutes les quantités à considérer soient petites.

Dans ces conditions, la vitesse longitudinale  $u$  a seule une valeur notable;  $\frac{\partial u}{\partial x, \partial t}$  sont des quantités petites,  $\frac{\partial(v, w)}{\partial x, \partial t}$  sont d'ordre de petitesse supérieur et par le fait négligeables.

Eu égard en outre à la petitesse du coefficient  $\varepsilon$  de turbulence, nous avons reconnu que les deux équations indéfinies du mouvement où figurent les composantes  $v'$ ,  $w'$  de l'accélération latérale, se trouvent débarrassées des termes en  $\varepsilon$ , et ces équations expriment que la pression moyenne  $p$  varie, à l'intérieur de chaque section normale à l'axe des  $x$ , comme dans un fluide sans frottement; puisque  $v'$ ,  $w'$  sont du second ordre de petitesse,  $p$  varie dans  $\sigma$  suivant la loi hydrostatique.

Soit alors  $p_0$  la pression moyenne au point où l'axe  $ox$  perce la section  $\sigma$ ; l'équation indéfinie du mouvement qui renferme l'accélération longitudinale  $u'$  s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left( \varphi X - \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) = \rho u'.$$

Si nous appelons  $i$  l'angle que fait l'axe  $ox$  du canal ou du tuyau avec l'horizon, en supposant qu'on aille de l'amont vers l'aval, la composante  $X$  de la pesanteur sera  $g \sin i$ , et la dernière parenthèse s'écrira  $\rho g I$ , en posant :

$$I = \sin i - \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p_o}{\partial x}.$$

Soit  $h_o$  l'*altitude* du point de  $\sigma$  situé sur  $ox$  et où la pression est  $p_o$ , au-dessus d'un plan horizontal arbitrairement choisi; comme  $\sin i = -\frac{\partial h_o}{\partial x}$ , il viendra :

$$I = -\frac{\partial}{\partial x} \left( h_o + \frac{p_o}{\rho g} \right). \quad (1)$$

La quantité  $I$ , dite *pente motrice*, est indépendante de  $y$  et de  $z$ .

La précédente équation, divisée par  $\rho g$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + I = \frac{u'}{g}, \quad (2)$$

sera l'équation indéfinie qui déterminera  $u$ .

Nous appellerons  $\sigma$  l'aire de la section normale *fluide*, et  $\chi$  le contour *mouillé* de cette section, portion de son contour total  $\chi'$  occupée par les parois. En un point  $(y, z)$  de la section  $\sigma$ , nous aurons pour expression de  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \rho g A_o \frac{\sigma}{\chi} u_o F \left( \frac{\chi y}{\sigma}, \frac{\chi z}{\sigma} \right), \quad (3)$$

$F$  étant une fonction positive de deux arguments, la même pour toutes les sections semblables;  $u_o$ , la vitesse à la paroi au point le plus bas de  $\sigma$ ;  $A_o$ , un coef-

ficient spécifique de l'état de la paroi en ce point le plus bas.

Soit  $\rho g B V^2$  le frottement extérieur, c'est-à-dire la résistance qu'oppose à l'écoulement du fluide l'élément de paroi contre lequel passe un filet fluide de vitesse longitudinale  $V$ . Si l'on désigne par  $B_0$  la valeur que prend le coefficient  $B$  au point le plus bas de  $\sigma$ , nous avons vu que l'on peut poser :

$$\Lambda_0 = \frac{\sqrt{B_0}}{k}, \quad (3')$$

$k$  étant un coefficient variant seulement avec la nature du fluide, et ne dépendant pas comme  $B_0$  de l'état de rugosité de la paroi.

A l'équation (2), il convient d'adoindre des conditions aux limites.

Près d'une paroi, en exprimant que la composante tangentielle de la pression sur la paroi est égale au frottement extérieur, nous avons trouvé la condition

$$\varepsilon \frac{du}{dn} = -\rho g B_0 f\left(\frac{\chi_y}{\sigma}, \frac{\chi_z}{\sigma}\right), \quad [\text{sur } \gamma] \quad (4)$$

$f$  étant une fonction positive de deux variables, définie par la relation

$$\frac{B}{B_0} \left( \frac{u}{u_0} \right)^2 = f\left(\frac{\chi_y}{\sigma}, \frac{\chi_z}{\sigma}\right), \quad (4')$$

valable sur le même contour mouillé  $\gamma$ .

Près de la surface libre, le frottement étant nul, la fonction  $u$  vérifiera la condition

$$\frac{du}{dn} = 0 \quad [\text{sur le contour libre}],$$

et  $p$  égalera la pression constante donnée de l'atmosphère superposée.

Nous examinerons en particulier deux cas usuels, le cas d'une section rectangulaire très large, théoriquement infinie en largeur, et le cas d'une section circulaire, — en supposant dans les deux cas les rugosités uniformément réparties sur tout le contour de la paroi. D'après cette dernière hypothèse, la vitesse à la paroi a une valeur constante  $u_0$ , et le coefficient  $B$  est partout le même; la fonction  $f$  se réduit alors à l'unité.

Dans le premier cas, si  $2h$  est la hauteur de la section, le rayon moyen  $\frac{\sigma}{\chi}$  est  $h$ ; de plus  $F = 1$ ,

$$\text{et l'on a : } \epsilon = \frac{\rho g}{k} \sqrt{B_0} u_0 h.$$

Dans le second cas, si  $R$  est le rayon de la section, le rayon moyen  $\frac{\sigma}{\chi}$  est  $\frac{R}{2}$ ; de plus on a :

$$\frac{1}{F} = \frac{r}{R} + \psi\left(\frac{r}{R}\right),$$

où  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  et où  $\psi$  est une fonction très petite, en sorte qu'on peut prendre sensiblement

$$\epsilon = \frac{\rho g}{k} \sqrt{B_0} u_0 \frac{R}{2} \cdot \frac{R}{r}.$$

**2. Transformation et propriétés des équations générales.** — Nous allons mettre l'équation indéfinie et les conditions aux limites qu'on vient de

rappeler, sous une forme valable pour toutes les sections semblables. Nous poserons à cet effet :

$$\eta = \frac{\chi}{\sigma} y, \quad \zeta = \frac{\chi}{\sigma} z.$$

Cette transformation entraîne

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\chi}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\chi}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{d}{dy} = \frac{\chi}{\sigma} \frac{d}{d\eta},$$

$d\eta$  étant un élément de normale au contour transformé, mené au point  $(\eta, \zeta)$  homologue de  $(y, z)$ .

$$\text{Comme } \frac{\chi}{\sigma} \frac{\varepsilon}{\rho g} = \frac{\sqrt{B_o}}{k} u_o F(\eta, \zeta),$$

les équations (1) et (2) deviennent après division par  $\frac{\chi}{\sigma} u_o^2 \frac{\sqrt{B_o}}{k}$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F(\eta, \zeta) \frac{\partial \left( \frac{u}{u_o} \right)}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F(\eta, \zeta) \frac{\partial \left( \frac{u}{u_o} \right)}{\partial \zeta} \right] \\ & + \frac{k}{\sqrt{B_o}} \frac{\sigma}{\chi} \frac{I}{u_o^2} = \frac{k}{\sqrt{B_o}} \frac{\sigma}{\chi} \frac{u'}{g u_o^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$F(\eta, \zeta) \frac{d}{dy} \left( \frac{u}{u_o} \right) = -k \sqrt{B_o} f(\eta, \zeta), \quad [\text{sur le contour}]. \quad (7)$$

La condition (7) sera applicable à tout le contour de la section, si l'on suppose seulement que la fonction  $f(\eta, \zeta)$ , qui n'est définie que sur le contour mouillé de la section, prenne la valeur zéro à la surface libre.

« Cette dernière condition relative à la surface libre sera satisfaite d'elle-même si l'on peut former la solution pour le cas d'un tuyau plein ayant sa section composée de la proposée et de sa symétrique par rapport à son bord supérieur (ou profil en travers horizontal de la surface libre), avec symétrie de structure des parois de part et d'autre; car la fonction de point  $u$  y prendra naturellement mêmes valeurs de part et d'autre de cette droite sur laquelle s'annulera dès lors sa dérivée suivant le sens normal, continue dans tout l'intérieur du contour total  $2\chi^1$ . »

Les équations (6) et (7) sont indépendantes du choix des axes dans le plan de la section  $\sigma$ : les seuls termes qui paraissent dépendre des axes sont les deux premiers qui, développés, s'écrivent sous la forme

$$F \Delta \frac{u}{u_0} + \Delta_1 F \cdot \Delta_1 \frac{u}{u_0} \cos \lambda,$$

en appelant  $\lambda$  l'angle des deux courbes  $F = \text{const.}$ ,  
 $\frac{u}{u_0} = \text{const.};$   $\Delta$  est le symbole  $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$  et  $\Delta_1$   
le symbole  $\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^2}$ , et tous deux restent  
invariants vis-à-vis de tout changement de coordonnées  
rectangulaires.

Le système des équations (6) et (7) définit une seule  
fonction  $\frac{u}{u_0}$  se réduisant à l'unité au point le plus  
bas de la section. En effet, s'il admettait deux solu-

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 18, broch., p. 25.

tions distinctes, leur différence  $\varphi(\eta, \zeta)$  satisferait aux équations  $\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right] = 0$ ,  $\frac{d\varphi}{d\gamma} = 0$  (sur le contour),  $\varphi = 0$  (au point le plus bas).

Multiplions l'équation indéfinie par  $\varphi d\sigma$  et intégrons à travers toute l'aire  $\sigma$ ; il vient, par application de la formule de Riemann,

$$\int_{\gamma'} \varphi F \frac{d\varphi}{d\gamma} d\gamma - \int F \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right)^2 \right] d\sigma = 0.$$

La première intégrale est nulle, et comme  $F$  est essentiellement positif, cette relation entraîne la nullité des dérivées de  $\varphi$ , par suite la constance de  $\varphi$ , et alors  $\varphi$ , nul au point le plus bas, serait nul partout.

Puisque ce système définit complètement le rapport  $\frac{u}{u_0}$ , la vitesse  $u$  sera déterminée en tous les points de la section dès qu'on connaîtra  $u_0$ . Or, si nous multiplions tous les termes de l'équation (6) par  $d\sigma = \frac{\sigma^2}{\gamma^2} d\eta d\zeta$ , et si nous intégrons à travers toute la section, les premiers termes donnent

$$\frac{\sigma}{\gamma} \int_{\gamma'} F \frac{d}{d\gamma} \left( \frac{u}{u_0} \right) d\gamma,$$

ou, en tenant compte de (7),

$$-k\sqrt{B_0} \sigma \int_{\gamma} f(\eta, \zeta) \frac{d\gamma}{\gamma}.$$

L'équation obtenue pourra donc s'écrire :

$$B_o u_o^2 \int_{\zeta} f(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{\sigma}{\zeta} \left[ 1 - \int_{\sigma} \frac{u'}{g} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} \right]. \quad (8)$$

L'intégrale qui figure dans le premier membre sera une constante pour toutes les sections de même forme : elle peut être regardée comme donnée. On déduira donc de cette relation (8) la connaissance de  $u_o$ , dès que la pente motrice  $I$  et la moyenne des accélérations  $u'$  seront données.

**3. Lois du régime uniforme dans des lits semblables.** — Nous étudierons tout d'abord le cas où les accélérations  $u'$  sont nulles.

L'équation (8) se simplifiera et donnera :

$$B_o u_o^2 \int_{\zeta} f(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{\sigma}{\zeta} I. \quad (9)$$

Revenons alors à l'équation (6) et remplaçons-y  $u'$  par zéro,  $\frac{\sigma}{\zeta} I$  par le premier membre de (9) ; il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F \frac{\partial \left( \frac{u}{u_o} \right)}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F \frac{\partial \left( \frac{u}{u_o} \right)}{\partial \zeta} \right] \\ & + k \sqrt{B_o} \int_{\zeta} f \frac{d\zeta}{\zeta} = 0. \end{aligned}$$

La forme de cette équation, celle de l'équation (7) et le fait que  $\frac{u}{u_o}$  se réduit à l'unité au point le plus bas du contour, conduisent à faire un changement de fonction, et à prendre comme nouvelle fonc-

tion inconnue, au lieu de  $\frac{u}{u_o}$ , la fonction  $F_1(\eta, \zeta)$  définie par

$$\frac{u}{u_o} = 1 + k\sqrt{B_o} F_1(\eta, \zeta). \quad (10)$$

Cette fonction  $F_1$  sera déterminée par les équations

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \right] + \int_{\zeta} f \frac{d\zeta}{\zeta} &= 0, \\ F \frac{dF_1}{d\eta} &= -f \quad (\text{sur le contour}), \\ F_1 &= 0 \quad (\text{au point le plus bas du contour}). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Nous reviendrons tout à l'heure à ce système.

Nous allons préalablement déduire des équations (9) et (10) la loi des *variations de la vitesse moyenne avec la pente motrice*.

La vitesse moyenne dans la section  $\sigma$  a pour expression, par définition

$$U = \int_{\sigma} u \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Si donc nous multiplions l'équation (10) par  $\frac{d\sigma}{\sigma}$  et que nous intégrons à travers  $\sigma$ , nous aurons :

$$\frac{U}{u_o} = 1 + k\sqrt{B_o} \mathfrak{M}F_1, \quad (12)$$

$\mathfrak{M}F_1$  étant la valeur moyenne de  $F_1(\eta, \zeta)$  dans l'étendue d'une section.

La relation annoncée entre  $I$  et  $U$  s'obtiendra en éliminant  $u_o$  entre les équations (9) et (12). Si nous dési-

gnons par  $\mathfrak{M}f$  la valeur moyenne de  $f(\gamma, \zeta)$  le long du contour mouillé de la section, nous avons :

$$u_o^2 = \frac{I}{B_o} \frac{\sigma}{\chi} I \cdot \frac{1}{\mathfrak{M}f},$$

et par suite

$$U = \left( \frac{I}{\sqrt{B_o}} \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}f}} + \frac{k \mathfrak{M}F_1}{\sqrt{\mathfrak{M}f}} \right) \sqrt{\frac{\sigma}{\chi} I}. \quad (13)$$

Si l'on désigne par  $\frac{I}{\sqrt{b}}$  la parenthèse constante du second membre, nous pourrons écrire cette équation sous la forme

$$bU^2 = I \frac{\sigma}{\chi}.$$

Cette formule a été signalée vers 1775 par *De Chézy*, et porte le nom de cet ingénieur<sup>1</sup> : en langage ordinaire, dans des lits semblables, la vitesse moyenne est proportionnelle à la racine carrée du produit du rayon moyen par la pente motrice.

<sup>1</sup> GIRARD, p. 251 (d'après les Mémoires manuscrits de l'Ecole des Ponts et chaussées). « Il paraît que, vers l'année 1775, M. de Chézy, directeur de l'Ecole des Ponts et chaussées, rechercha le premier, à l'occasion du canal de l'Yvette,..., une formule au moyen de laquelle on put établir les rapports constants entre la pente d'un aqueduc, les dimensions de sa section transversale et le volume d'eau qu'il doit amener... Il exprime la condition d'uniformité du mouvement par une équation de deux termes, dont le premier membre est le produit de la pente du canal par la surface de la section perpendiculaire à la direction du mouvement, et dont le second membre est le produit du périmètre des parois mouillées du canal, du carré de la vitesse du fluide et d'un coefficient constant. Il détermina ce coefficient par l'expérience... » P. 252. « Bossut le conclut de ses expériences sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite. »

Le coefficient de proportionnalité

$$\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{B_o}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}f}} + k \frac{\mathcal{M}F_1}{\sqrt{\mathcal{M}f}}, \quad (14)$$

dont l'expression se réduit à

$$\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{B_o}} + k \mathcal{M}F_1,$$

lorsque le degré de rugosité est le même sur tout le contour et que par suite  $f=1$ , varie d'ailleurs peu avec la forme de la section, ainsi que nous le reconnaîtrons par l'examen du cas de la section circulaire et de la section rectangulaire très large : il dépend surtout des rugosités de la paroi.

Les différences de vitesse absolue entre les divers points d'une section sont au contraire indépendantes des rugosités de la paroi.

Appelons en effet  $u_m$  la vitesse maxima à travers la section et soient  $\eta_o$ ,  $\zeta_o$  les coordonnées du point où elle se produit; en retranchant l'équation (10) de

$$\frac{u_m}{u_o} = 1 + k \sqrt{B_o} F_1(\eta_o, \zeta_o),$$

il vient :  $\frac{u_m - u}{u_o} = k \sqrt{B_o} [F_1(\eta_o, \zeta_o) - F_1(\eta, \zeta)].$

$$\text{Or} \quad u_o^* = \frac{b}{B_o} U^2 \frac{1}{\mathcal{M}f}.$$

Donc

$$\frac{u_m - u}{U \sqrt{b}} = \frac{k}{\sqrt{\mathcal{M}f}} \left[ F_1(\eta_o, \zeta_o) - F_1\left(\frac{\zeta}{\sigma} y, \frac{\zeta}{\sigma} z\right) \right]. \quad (15)$$

Comme d'après la loi de De Chézy,  $bU^2$  est indé-

pendant du degré de rugosité des parois, comme  $k$  et  $\mathfrak{M}f$ , il se trouve que la différence des vitesses absolues aux divers points d'une section est indépendante du degré de rugosité des parois. C'est un fait auquel H. Bazin a été conduit par l'expérience en étudiant le mode de variation des vitesses aux divers points d'une section : cet ingénieur a opéré d'abord sur des lits très lisses (par exemple, à parois en bois poli ou en ciment uni), puis sur des lits extrêmement rugueux (à parois tapissées de petits cailloux pointus, ou garnies de lattes clouées en travers).

Enfin si nous posons

$$K = \frac{k}{\sqrt{\mathfrak{M}f}} [F_1(\tau_0, \zeta_0) - \mathfrak{M}F_1],$$

l'équation (15), multipliée par  $\frac{d\sigma}{\sigma}$  et intégrée à travers la section, nous donnera :

$$\frac{u_m - U}{\sqrt{bU^2}} = K,$$

ou  $u_m = U + K \sqrt{\frac{\sigma}{\chi}} I. \quad (16)$

Le coefficient  $K$  qui figure dans cette relation varie très sensiblement avec la forme de la section, à l'opposé de ce qui se passe pour  $b$ .

L'utilisation des formules que nous venons d'établir suppose la connaissance de la fonction  $F_1$ , c'est-à-dire l'intégration de l'équation (11), intégration que nous ne savons pas effectuer en général.

**4. Cas d'une section rectangulaire très large.** — Le premier cas particulier que nous envisa-

gerons est celui d'une section rectangulaire très large, à grands côtés horizontaux et à parois homogènes.

Soit  $2h$  la hauteur intérieure s'il s'agit d'un tuyau,  $h$  la profondeur s'il s'agit d'un canal découvert. Le cas du tuyau se ramène au cas du canal, vu la symétrie des vitesses par rapport à la médiane horizontale de la section. Nous supposerons donc qu'il s'agisse d'un canal et que la trace du plan  $yox$  sur la section  $\sigma$  soit au niveau libre :  $z$  aura à varier de 0 à  $h$  et  $\frac{\partial u}{\partial z}$  s'annulera pour  $z=0$ .

La grande largeur du canal permet d'admettre que le mouvement est le même dans toute section verticale parallèle à  $ox$ ; dans ces conditions,  $F_1$  ne dépend pas de  $\tau$ . Comme d'ailleurs  $f=1$ ,  $F=1$ ,  $\frac{\sigma}{\chi}=h$ ,  $d\sigma=d\zeta$ , le système (11) devient :

$$\frac{d^2F_1}{d\zeta^2} + 1 = 0,$$

$$\frac{dF_1}{d\zeta} = -1 \text{ et } F_1 = 0, \text{ pour } z = h, \text{ soit } \zeta = 1,$$

$$\frac{dF_1}{d\zeta} = 0 \quad \text{pour } z = 0, \text{ soit } \zeta = 0.$$

Il vient de suite :

$$F_1 = \frac{1}{2}(1 - \zeta^2).$$

On en déduit :

$$\Im F_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \int_0^1 \zeta^2 d\zeta \right) = \frac{1}{3}.$$

La relation (14) donne alors

$$\frac{I}{\sqrt{b}} = \frac{I}{\sqrt{B_0}} + \frac{k}{3}.$$

La vitesse  $u$ , maximum en même temps que  $F_1$ , atteindra sa plus grande valeur  $u_m$  pour  $\zeta = 0$ ; la relation (15) donne par suite

$$\frac{u_m - u}{U\sqrt{b}} = k \left[ \frac{I}{2} - \frac{I}{2} (1 - \zeta^2) \right] = \frac{k}{2} \zeta^2 = \frac{k}{2} \frac{z^2}{h^2}.$$

Enfin on a :

$$K = k \left( \frac{I}{2} - \frac{I}{3} \right) = \frac{k}{6};$$

d'où, d'après (16),

$$\frac{u_m}{U} = 1 + \frac{k}{6} \sqrt{b}.$$

La précédente équation

$$u = u_m - \frac{k}{2} \frac{z^2}{h^2} \sqrt{Ih}$$

coïncide avec la relation fournie jadis par l'expérience à H. Bazin<sup>1</sup>

$$u = u_m - 20,6 \frac{z^2}{h^2} \sqrt{Ih}.$$

**5. Cas d'une section circulaire.** — Supposons en second lieu qu'on ait affaire à un tuyau circulaire ou à un canal demi-circulaire entièrement plein (cas qui se réunissent en un seul), les parois étant homogènes.

L'origine de la section sera prise en son centre. Par

<sup>1</sup> H. BAZIN, 1, p. 230.

symétrie, les vitesses seront les mêmes en tous les points situés à une même distance de ce centre.

Comme  $\frac{\sigma}{\chi} = \frac{R}{2}$ , si l'on pose

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \tau = \frac{1}{2} \sqrt{\eta^2 + \zeta^2},$$

on aura  $\frac{r}{R} = \tau$ ,  $F_1$  ne dépendra que de  $\tau$  et  $F$  sera l'inverse de  $\tau + \psi(\tau)$ . Par suite, la première équation (11) s'écrira :

$$\frac{1}{4} \left[ 2F \frac{dF_1}{d\tau} \cdot \frac{1}{\tau} + \tau \frac{d}{d\tau} \left[ F \frac{dF_1}{d\tau} \cdot \frac{1}{\tau} \right] \right] + 1 = 0,$$

ou plus simplement :

$$\frac{1}{4\tau} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\tau}{\tau + \psi(\tau)} \frac{dF_1}{d\tau} \right] + 1 = 0.$$

Comme la normale  $dy$  coïncide avec un élément de rayon, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{1}{\tau + \psi(1)} \frac{dF_1}{d\tau} = -1 \\ F_1 = 0 \end{array} \right\} \text{pour } \tau = 1.$$

Ces équations donnent successivement

$$\frac{\tau}{\tau + \psi(\tau)} \frac{dF_1}{d\tau} + 2\tau^2 = 0,$$

$$F_1 = \frac{2}{3} (1 - \tau^3) - 2 \int_1^\tau \tau \psi(\tau) d\tau,$$

ou, en posant

$$\Psi(\tau) = 2 \int_0^\tau \tau \psi(\tau) d\tau,$$

$$F_1 = \frac{2}{3} (1 - \tau^3) + \Psi(1) - \Psi(\tau).$$

On en déduit (puisque  $\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{2rdr}{R^2} = d\tau^2$ ) :

$$\mathfrak{M}F_1 = \frac{2}{5} + \Psi(1) - 2 \int_0^1 \tau \Psi(\tau) d\tau.$$

La relation (14) donne alors :

$$\frac{I}{\sqrt{b}} = \frac{I}{\sqrt{B_0}} + k \left[ \frac{2}{5} + \Psi(1) - 2 \int_0^1 \tau \Psi(\tau) d\tau \right].$$

La vitesse maxima se produisant par raison de symétrie sur l'axe du tuyau, où  $\tau = 0$ , nous aurons, d'après (15) :

$$\frac{u_m - u}{U\sqrt{b}} = k \left[ \frac{2}{3} \tau^3 + \Psi(\tau) \right].$$

Enfin on a :

$$K = k \left[ \frac{4}{15} + 2 \int_0^1 \tau \Psi(\tau) d\tau \right],$$

d'où, d'après (16),

$$\frac{u_m}{U} = 1 + k\sqrt{b} \left[ \frac{4}{15} + 2 \int_0^1 \tau \Psi(\tau) d\tau \right].$$

Dans le cas où, en première approximation, on néglige  $\psi(\tau)$ , on aura à faire  $\Psi(\tau) = 0$ . Ainsi, sensiblement :

$$\frac{I}{\sqrt{b}} = \frac{I}{\sqrt{B_0}} + \frac{2}{5} k,$$

$$\frac{u_m - u}{U\sqrt{b}} = \frac{2}{3} k \tau^3 = \frac{2}{3} k \frac{r^3}{R^3},$$

$$\frac{u_m}{U} = 1 + \frac{4}{15} k \sqrt{b}$$

L'avant-dernière équation s'écrit, en tenant compte de la relation de De Chézy  $\left[ bU^2 = I \frac{\sigma}{\zeta} = \frac{IR}{2} \right]$ :

$$u = u_m - \frac{2}{3} k \frac{r^3}{R^3} \sqrt{I \frac{R}{2}},$$

et elle coïncide avec la relation obtenue expérimentalement par H. Bazin<sup>1</sup>:

$$u = u_m - 2I \sqrt{2} \frac{r^3}{R^3} \sqrt{I \frac{R}{2}}.$$

**6. Comparaison de la théorie avec l'expérience.** — L'expérience, comme nous l'avons dit, a fait connaître depuis très longtemps la relation

$$bU^2 = I \frac{\sigma}{\zeta},$$

$b$  étant un coefficient peu variable avec la forme de la section. Dans le cas d'un canal découvert notamment plus large que profond, Tadini<sup>2</sup> et d'autres hydrauliciens ont même trouvé qu'on satisfaisait assez bien à un grand nombre d'expériences en faisant simplement  $b = 0,0004$  (les unités de longueur et de temps étant le mètre et la seconde). Dans le cas des tuyaux circulaires à parois rendues rugueuses par des dépôts, R. de Prony, d'Aubuisson, ... ont été conduits à des formules qui reviennent presque, dans des limites étendues, à poser  $b = 0,00036$ .

D'un autre côté, H. Bazin a représenté ses expé-

<sup>1</sup> H. BAZIN, 1, p. 242.

<sup>2</sup> A. TADINI.

riences de mesurage de vitesses à diverses profondeurs  $z$  au milieu de canaux rectangles par la formule

$$u = u_m - 20,6 \frac{z^2}{h^2} \sqrt{Ih};$$

mais comme les largeurs de ces canaux n'étaient que de 5 à 7 ou 8 fois la profondeur d'eau (en sorte qu'on ne pouvait négliger l'influence retardatrice du frottement des bords), H. Bazin conclut d'un raisonnement qu'il reconnaît lui-même manquer de précision qu'il faut, pour représenter ce qui aurait lieu dans un canal rectangle de largeur infinie, multiplier le coefficient 20,6 par la racine carrée de l'unité plus le rapport moyen des profondeurs aux demi-largeurs, c'est-à-dire par 1,15<sup>1</sup>, ce qui donnerait pour ce canal très large :

$$u = u_m - 23,7 \frac{z^2}{h^2} \sqrt{Ih}.$$

La comparaison avec la formule théorique que nous avons établie donnerait :  $k = 2 \times 23,7 = 47,4$ .

Un nombre ainsi corrigé peut paraître moins sûr que celui qui se déduit sans correction des expériences de mesurage des vitesses, à diverses distances  $r$ , dans un canal demi-cylindrique, faites aussi par Bazin qui les représente par la relation<sup>2</sup>  $u = u_m - 21 \sqrt{2} \frac{r^3}{R^3} \sqrt{\frac{IR}{2}}$ .

Par comparaison avec la formule théorique, nous avons :  $\frac{2}{3}k = 21\sqrt{2}$ ,  $k = \frac{63\sqrt{2}}{2} = 44,55$ .

<sup>1</sup> H. BAZIN, 1, Introduction, p. 26, et Mémoire, 3<sup>e</sup> partie, nos 35 et 37, p. 230 et 233.

<sup>2</sup> On notera que Bazin prend la formule de De Chézy sous la forme  $bU^2 = RI$ , en sorte que son coefficient  $b$  est double du nôtre.

Un ensemble d'inductions qui semblent assez légitimes ont conduit Bazin à forcer ce dernier chiffre, ce qui revient à donner à  $k$  la valeur 48.

Admettons cette valeur  $k=48$  que nous justifierons tout à l'heure.

Il en résulte :  $\frac{I}{\sqrt{b}} = \frac{I}{\sqrt{B_o}} + 16$  pour les sections rectangulaires très larges,  $\frac{I}{\sqrt{b}} = \frac{I}{\sqrt{B_o}} + 19$  pour les sections circulaires.

La forme de la section influe donc effectivement peu sur la valeur de  $b$ .

Dans le premier cas, à  $b=0,0004$  correspondent :

$$B_o=0,000865, \frac{u_o}{U}=0,68, \frac{u_m}{U}=1,16, \frac{u_o}{u_m}=0,58.$$

Dans le second cas, à  $b=0,00036$  correspondent :

$$B_o=0,000884, \frac{u_o}{U}=0,64, \frac{u_m}{U}=1,24, \frac{u_o}{u_m}=0,51.$$

Trente ans plus tard, H. Bazin<sup>1</sup> reprit cette étude. Les nouvelles expériences furent effectuées près de Dijon, sur un tuyau en ciment lisse de 0<sup>m</sup>,80 de diamètre et de 80 mètres de longueur, tuyau où le régime uniforme était parfaitement établi sur le milieu de la longueur. Une série de dix expériences, correspondant à diverses valeurs de  $I$  et de  $U$ , a conduit à une valeur de notre coefficient  $b$  sensiblement constante et égale en

<sup>1</sup> H. BAZIN, 4, p. 1-27. Ce mémoire a été présenté à l'Académie des sciences le 1<sup>er</sup> juin 1896; voir le rapport approbatif de M. Boussinesq, dans le C. R. de l'Académie du 29 juin 1896 (t. CXXII, p. 1250).

moyenne à  $b = 0,000\,166$ . Les nouvelles observations ont confirmé la proportionnalité approchée de  $(u_m - u)$  à  $r^3$ .

« La formule indiquée est celle qui correspond le mieux à l'ensemble des faits; elle doit être admise, en y ajoutant un terme correctif pour l'adapter à la partie centrale, où l'écart n'est pas du reste bien considérable. Cette correction n'était pas nécessaire pour les canaux à ciel ouvert, où les mouvements confus qui ont lieu aux environs de la surface libre s'opposent à la décroissance régulière des vitesses<sup>1</sup>. »

L'écart observé n'est sensible que vers l'axe du tuyau, là même où nos formules donneraient au coefficient de turbulence  $\epsilon$  une valeur infinie. A une seconde approximation, il faudrait faire entrer en compte la petite fonction  $\psi(r)$  d'abord négligée, et dont le rôle devient prédominant dans la région du désaccord. La précision des observations d'H. Bazin a permis à M. Boussinesq<sup>2</sup> de rechercher les lois de deuxième approximation du régime uniforme.

Nous ne développerons pas les calculs correspondants, et nous nous bornerons à signaler qu'ils ont conduit à admettre comme définitifs les résultats suivants :  $k = 48,60$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{B_0}} + 0,4215k, \quad \frac{u_m}{U} = 1 + 12,96\sqrt{b}.$$

Dans son Cours d'hydraulique de l'École des Ponts et chaussées (1905-1906), M. Rabut<sup>3</sup> estime qu'au

<sup>1</sup> H. BAZIN, 4, p. 26.

<sup>2</sup> J. BOUSSINESQ, 18, note 7, broch., p. 40.

<sup>3</sup> CH. RABUT, p. 129-131.

lieu du coefficient de turbulence adopté par M. Bous-sinesq, il faudrait prendre :

$$\varepsilon = \frac{\rho g}{k} \sqrt{B_0} \frac{R}{2} \sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Si l'on reprend dans cette hypothèse la théorie précédente, on est conduit à la formule

$$u = u_m - \frac{4}{5} k \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{RI}{2}}.$$

Comparée à l'ensemble des expériences d'H. Bazin, cette formule ne rend pas mieux compte des faits, comme je l'établirai en détail dans une publication ultérieure, et elle ne permet plus l'usage d'un même coefficient  $k$ , quelle que soit la forme de la section.

Quant aux expériences de J. Freemann<sup>1</sup> faites en 1888, pour déterminer la distribution des vitesses dans les jets sortant d'une pompe à incendie, sous forte pression, il ne saurait en être question ici; le diamètre du tuyau est trop petit pour que le régime turbulent s'établisse : on a affaire à un régime intermédiaire entre le régime continu et le régime hydraulique.

### 7. Régime intermédiaire entre le régime continu et le régime turbulent<sup>2</sup>. — Dans le cas,

<sup>1</sup> J. FREEMANN, Amer. Soc. of Civ. Engineers Trans., nov. 1889, t. XXI, p. 411, cité d'après H. BAZIN, 4, p. 23-25.

<sup>2</sup> Citons à cette occasion les belles recherches d'O. REYNOLDS [2]. Prenant le mouvement turbulent tel qu'il existe à un instant donné, il a cherché à établir un critérium pour décider si l'agitation tourbillonnaire augmente, diminue ou reste stationnaire quand la vitesse moyenne en un point du fluide augmente. Malgré l'exposé simplifié donné par H.-A. LORENTZ, nous n'avons pu faire état de ces vues dans cet ouvrage.

fréquent d'ailleurs dans la pratique, où les dimensions de la section ou la grandeur de la vitesse moyenne sont trop petites, le régime turbulent ne peut s'établir complètement : l'agitation ne masque pas complètement les effets du frottement régulier. La relation entre la vitesse moyenne  $U$ , la pente motrice  $I$  et le rayon moyen ne sera ni la relation de De Chézy, ni la relation de Poiseuille.

D'après la première de ces relations, la quantité  $I \frac{\sigma}{\chi} \frac{I}{U^2}$  serait constante, tandis que d'après la seconde, pour les tuyaux circulaires, cette même quantité varierait proportionnellement à  $\frac{I}{U}$  et à  $\frac{\chi}{\sigma}$ . Dans les cas intermédiaires qui nous occupent,  $I \frac{\sigma}{\chi} \frac{I}{U^2}$  croîtra avec les deux variables  $\frac{I}{U}$  et  $\frac{\chi}{\sigma}$ ; et si les valeurs qu'elles prennent sont assez petites, son développement de Mac-Laurin, réduit aux termes du premier degré, donnera ( $m, n, p$  étant trois coefficients positifs) :

$$I \frac{\sigma}{\chi} \frac{I}{U^2} = m \left( 1 + n \frac{\chi}{\sigma} + p \frac{I}{U} \right).$$

Les hydrauliciens ont arbitrairement supprimé l'un des deux derniers termes de la parenthèse.

R. de Prony<sup>1</sup> adoptait la formule

$$I = m \frac{\chi}{\sigma} U(U + p),$$

<sup>1</sup> R. DE PRONY, p. 70 et 82.

avec  $m = 0,000174$ ,  $p = 0,05$ ,

ce qui revenait à faire  $n = 0$ .

Darcy et Bazin ont trouvé préférable de faire  $p = 0$ , et ont adopté la formule  $I = m \frac{\gamma}{\sigma} U^2 \left( 1 + n \frac{\gamma}{\sigma} \right)$ , en supposant que  $m$  et  $n$  croissent avec le degré de rugosité de la paroi.

NATURE DE LA PAROI	$m$	$n$	OBSERVATEURS
Tuyaux en fer étiré ou en fonte lisse . . . . .	0,00025	0,0063	(Darcy).
Petits canaux à parois très unies . . . . .	0,00015	0,03	{ Bazin).
Petits canaux à parois en terre . . . . .	0,00028	1,25	

Les valeurs des coefficients numériques qui précèdent supposent que les unités de longueur et de temps sont le mètre et la seconde.

8. **Coefficients  $\alpha$  et  $\gamma$ .** — Avant de quitter l'étude du mouvement uniforme, nous calculerons deux coefficients qui interviennent dans l'étude de l'écoulement graduellement varié :  $1 + \gamma$ , rapport du carré moyen des vitesses à travers une section au carré de leur moyenne  $U$ , et  $\alpha$  rapport analogue du cube moyen des vitesses au cube de la vitesse moyenne :

$$1 + \gamma = \int_{\sigma} \left( \frac{u}{U} \right)^2 \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad \alpha = \int_{\sigma} \left( \frac{u}{U} \right)^3 \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

D'après nos formules :  $\frac{u}{U} = \frac{1 + k\sqrt{B_o}}{1 + k\sqrt{B_o} \Re F_1} F_1$ .

Dans le cas du rectangle infiniment large, on a :

$$F_1 = \frac{1}{2}(1 - \zeta^2), \quad \Re F_1 = \frac{1}{3}, \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{dz}{h} = d\zeta.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} 1 + \eta &= \int_0^1 \left[ 1 + \frac{k\sqrt{b}}{2} \left( \frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \right]^3 d\zeta = 1 + \frac{1}{45} k^2 b; \\ z &= \int_0^1 \left[ 1 + \frac{k\sqrt{b}}{2} \left( \frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \right]^3 d\zeta = 1 + \frac{1}{15} k^2 b \\ &\quad - \frac{2}{875} k^3 b \sqrt{b}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \eta = \frac{1}{45} k^2 b = 0,020,$$

$$z = 1 + 3\eta - \frac{2\sqrt{5}}{7} \eta \sqrt{\eta} = 1,058.$$

Dans le cas de la section circulaire, on a :

$$F_1 = \frac{2}{3}(1 - \varepsilon^3), \quad \Re F_1 = \frac{2}{5}, \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2} = 2\varepsilon d\varepsilon.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} 1 + \eta &= \int_0^1 \left[ 1 + \frac{2k\sqrt{b}}{2} \left( \frac{2}{5} - \varepsilon^3 \right) \right] 2\varepsilon d\varepsilon = 1 + \frac{1}{25} k^2 b; \\ z &= \int_0^1 \left[ 1 + \frac{2k\sqrt{b}}{2} \left( \frac{2}{5} - \varepsilon^3 \right) \right]^3 2\varepsilon d\varepsilon = 1 + \frac{3}{25} k^2 b \\ &\quad - \frac{4}{1375} k^3 b \sqrt{b}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \eta = \frac{1}{25} k^2 b = 0,033,$$

$$z = 1 + 3\eta - \frac{4}{11} \eta \sqrt{\eta} = 1,097.$$

## CHAPITRE II

### MOUVEMENT GRADUELLEMENT VARIÉ DANS LES TUYAUX LARGES ET LES CANAUX (PREMIÈRE APPROXIMATION)

1. Retour sur les équations fondamentales de l'écoulement graduellement varié<sup>1</sup>. — Reprenons le système d'équations établi dans les §§ 1 et 2 du précédent chapitre :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ F(\tau, \zeta) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{u_o} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F(\tau, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u}{u_o} \right) \right] + \frac{k}{\sqrt{B_o}} \frac{\sigma}{\zeta} \frac{I}{u_o^2} = \frac{k}{\sqrt{B_o}} \frac{\sigma}{\zeta} \frac{u'}{g u_o^2}, \quad (1)$$

$$F(\tau, \zeta) \frac{d}{d\tau} \left( \frac{u}{u_o} \right) = -k\sqrt{B_o} f(\tau, \zeta) \quad (\text{sur le contour}). \quad (2)$$

Nous en avons déduit déjà une importante relation :

$$B_o u_o^2 \bar{M} f = \frac{\sigma}{\zeta} \left( I - \frac{\bar{M} u'}{g} \right), \quad (3)$$

en désignant par  $\bar{M} f$  la moyenne des valeurs de  $f(\tau, \zeta)$

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 19, p. 7-12.

le long du contour mouillé  $\gamma$ , et par  $\bar{M} u'$  la moyenne des valeurs de  $u'$  sur toute l'aire  $\sigma$ .

Dans l'hypothèse où le régime est uniforme, nous avons été conduits à poser :  $\frac{u}{u_o} = 1 + k\sqrt{B_o} F_1(\eta, \zeta)$ , la fonction  $F_1$  étant définie par les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \right] + \bar{M} f &= 0, \quad (4) \\ F \frac{dF_1}{d\eta} &= -f \quad (\text{sur le contour}), \\ F_1 &= 0 \quad (\text{au point le plus bas du contour}). \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (5)$$

Dans le cas général, nous poserons, en introduisant cette fonction  $F_1$  et une nouvelle fonction inconnue  $F_2(\eta, \zeta)$  :

$$\frac{u}{u_o} = 1 + k\sqrt{B_o} F_1(\eta, \zeta) + \frac{k}{g\sqrt{B_o} u_o^2} \frac{\sigma}{\zeta} F_2(\eta, \zeta). \quad (6)$$

Retranchons alors des équations (1) et (2) respectivement les équations (4) et (5) multipliées par  $k\sqrt{B_o}$ , et introduisons la fonction  $F_2$  définie par (6); nous obtiendrons l'équation indéfinie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} \right] + gI - \frac{\zeta}{\sigma} B_o u_o^2 \bar{M} f &= u', \\ \text{ou, en tenant compte de (3).} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} \right] - (u' - \bar{M} u') &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Quant aux conditions aux limites, elles donnent :

$$\begin{aligned} \frac{dF_2}{d\eta} &= 0 \quad (\text{sur le contour}), \\ F_2 &= 0 \quad (\text{au point le plus bas du contour}). \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (8)$$

La connaissance des accélérations  $u'$  aux divers points d'une section entraîne dès lors la détermination complète et unique de la fonction  $\frac{u}{u_0}$ , moyennant l'intégration successive des équations (4-5) et (7-8).

**2. Relation entre la vitesse moyenne et la vitesse au point le plus bas.** — Prenons la moyenne des deux membres de l'égalité (6) qui définit  $\frac{u}{u_0}$ , sur toute la section envisagée ; il vient :

$$\frac{U}{u_0} = 1 + k \sqrt{B_0} \mathfrak{M} F_1 + \frac{k}{g \sqrt{B_0} u_0^2} \frac{\sigma}{\chi} \mathfrak{M} F_2. \quad (6')$$

Or on peut donner une expression simple du dernier terme de cette relation.

Multiplions en effet l'équation (4) par  $F_2$ , l'équation (7) par  $F_1$ , puis retranchons-les membre à membre ; nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F_2 F \frac{\partial F_1}{\partial \eta} - F_1 F \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F_2 F \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} - F_1 F \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} \right] \\ & + F_2 \mathfrak{M} f + F_1 (u' - \mathfrak{M} u') = 0. \end{aligned}$$

Après avoir multiplié cette nouvelle équation par  $\frac{d\sigma}{\sigma}$ , intégrons à travers toute la section, et appliquons la formule de Riemann pour transformer les deux premières intégrales de surface en intégrales curvilignes ; l'une des intégrales curvilignes obtenues  $-\int_{\chi} FF_1 \frac{dF_2}{ds} \frac{d\chi}{\chi}$  est nulle en vertu de (3), tandis que l'autre,  $\int_{\chi} FF_2 \frac{dF_1}{ds} \frac{d\chi}{\chi}$ , se réduit à

$-\int_{\gamma} f F_2 \frac{d\zeta}{\zeta}$ , d'après (5). L'équation obtenue s'écrit donc :

$$\mathfrak{M}f \cdot \mathfrak{M}F_2 + \mathfrak{M}(F_1 u') - \mathfrak{M}F_1 \cdot \mathfrak{M}u' = \int_{\gamma} f F_2 \frac{d\zeta}{\zeta},$$

$\mathfrak{M}(F_1 u')$  étant la valeur moyenne de  $F_1(\gamma, \zeta)u'$  dans toute la section considérée. Le second membre de cette équation « égale évidemment le produit de  $\mathfrak{M}f$  par une valeur de  $F_2$  intermédiaire entre la plus petite et la plus grande que prenne cette fonction le long du contour mouillé  $\gamma$ . Or, si les vitesses, aux divers points de la paroi, étaient réparties dans le mouvement varié comme dans le mouvement uniforme, on y aurait, d'après (6),  $F_2 = 0$ . Sans avoir besoin d'admettre qu'il en soit rigoureusement ainsi, il est clair, par analogie avec ce qui a lieu dans le régime uniforme, que les écarts relatifs de vitesse, propres au mouvement varié, seront bien moindres le long du contour mouillé que dans tout l'intérieur de la section. Autrement dit, la fonction  $F_2$  se maintiendra, le long de  $\gamma$ , beaucoup plus voisine que dans l'aire  $\sigma$  de sa valeur zéro réalisée au point le plus bas. Donc le second membre de la dernière équation est négligeable devant le premier terme du premier membre<sup>1</sup>.

$$\text{D'après cela, } \mathfrak{M}F_2 = \frac{\mathfrak{M}F_1 \cdot \mathfrak{M}u' - \mathfrak{M}(F_1 u')}{\mathfrak{M}f}$$

Nous pouvons donc mettre l'expression (6') de  $\frac{U}{u_0}$  sous la forme

$$\frac{U}{u_0} = \sqrt{\frac{B_0 \mathfrak{M}f}{b}}$$

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 19, broch., p. 13.

$$\left\{ 1 + k \sqrt{\frac{b}{\mathcal{M}f}} \frac{\sigma}{\chi} \frac{\mathcal{M}F_1 \cdot \mathcal{M}u' - \mathcal{M}(F_1 u')}{g B_o u_o^2 \mathcal{M}f} \right\}, \quad (9)$$

en nous souvenant de la relation (14) du précédent chapitre, qui donne :  $\sqrt{\frac{B_o \mathcal{M}f}{b}} = 1 + k \sqrt{B_o \mathcal{M}F_1}$ .

Nous étudions ici un régime où les vitesses diffèrent peu de ce qu'elles seraient en régime uniforme; les accélérations  $u'$  sont alors faibles, et le second terme  $\Lambda$  de la parenthèse dans (9) est très petit devant l'unité. Si donc nous élevons au carré la relation (9), ce qui

donne :  $B_o u_o^2 \mathcal{M}f = \frac{b U^2}{(1 + \Lambda)^2}$ ,

nous pouvons remplacer le second membre par  $b U^2 (1 - 2\Lambda)$ ; d'où :

$$B_o u_o^2 \mathcal{M}f = b U^2 - 2 \left( \frac{b U^2}{B_o u_o^2 \mathcal{M}f} \right) \cdot k \sqrt{\frac{b}{\mathcal{M}f}} \cdot \frac{\sigma}{\chi} \frac{\mathcal{M}F_1 \cdot \mathcal{M}u' - \mathcal{M}(F_1 u')}{g}.$$

Cette équation est susceptible de simplifications. Tout d'abord la parenthèse qui figure au dernier terme aurait pour valeur l'unité si le régime était uniforme; à cause de la petiteur du dernier facteur, il nous sera loisible de remplacer cette parenthèse par l'unité. Il vient ainsi :  $B_o u_o^2 \mathcal{M}f = b U^2$

$$- \frac{2 \sigma}{g \chi} \left\{ \mathcal{M} \left( k \sqrt{\frac{b}{\mathcal{M}f}} F_1 \right) \mathcal{M}u' - \mathcal{M} \left( k \sqrt{\frac{b}{\mathcal{M}f}} F_1 u' \right) \right\}.$$

Or  $k \sqrt{\frac{b}{\mathcal{M}f}} F_1$  serait, dans le régime uniforme,

$\frac{u - u_0}{U}$ ; eu égard à la petitesse de  $u'$ , le remplacement de la première quantité par la seconde sera permis; la parenthèse deviendra, au facteur  $\frac{1}{U}$  près :

$$[\mathfrak{M}u - \mathfrak{M}u_0]\mathfrak{M}u' - [\mathfrak{M}uu' - \mathfrak{M}u_0u'],$$

soit  $U\mathfrak{M}u' - \frac{1}{2}\mathfrak{M}(u^2)',$

en appelant  $\mathfrak{M}(u^2)'$  la valeur moyenne, dans la section, de la dérivée totale de  $u^2$  par rapport au temps.

En fin de compte, nous obtiendrons la relation :

$$B_0 u_0^2 \mathfrak{M}f = bU^2 + \frac{1}{g} \frac{\sigma}{\chi} \left[ \frac{1}{U} \mathfrak{M}(u^2)' - 2\mathfrak{M}u' \right]. \quad (10)$$

Le premier membre n'est autre que le *frottement moyen extérieur* de la paroi sur le fluide; car le frottement sur un élément  $d\chi$  du contour est  $Bu^2 d\chi$ , ou d'après la relation (4') du précédent chapitre,  $B_0 u_0^2 f d\chi$ ; sa valeur moyenne sera donc :  $\int_{\chi} B_0 u_0^2 f \frac{d\chi}{\chi}$ , soit  $B_0 u_0^2 \mathfrak{M}f$ .

Nous avons déjà l'expression (3) de ce frottement moyen extérieur; en les égalant, nous obtenons l'importante relation suivante, extension de la relation de De Chézy :

$$I = bU^2 \frac{\chi}{\sigma} + \frac{1}{g} \left[ \frac{1}{U} \mathfrak{M}(u^2)' - \mathfrak{M}u' \right]. \quad (11)$$

**3. Expression du frottement moyen extérieur et équation générale du mouvement graduellement varié.** — Nous nous proposons de transformer les expressions obtenues pour le frottement moyen extérieur et pour la pente motrice, de manière

à n'y laisser figurer que la vitesse moyenne  $\mathbf{U}$  et ses dérivées.

A cet effet, nous commencerons par établir un lemme.

Soit  $\Phi$  une fonction continue de  $x, y, z, t$ ; sa dérivée complète  $\Phi'$  par rapport au temps, dérivée prise en suivant durant l'intervalle de temps  $dt$  la particule fluide occupant à l'instant  $t$  la position  $(x, y, z)$ , sera, comme nous l'avons vu dans l'Introduction :

$$\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + w \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

ou bien, en tenant compte de l'équation de continuité  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ :

$$\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u\Phi) + \frac{\partial}{\partial y} (v\Phi) + \frac{\partial}{\partial z} (w\Phi).$$

Multiplions cette égalité par  $d\sigma$  et intégrons à travers toute la section  $\sigma$ ; il vient :

$$\int \Phi' d\sigma = \frac{\partial}{\partial t} \int \Phi d\sigma + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} u\Phi d\sigma, \quad (12)$$

les autres termes étant négligeables, eu égard aux hypothèses faites sur le mouvement graduellement varié que nous étudions ici.

En prenant successivement  $\Phi = 1$ ,  $\Phi = u$ ,  $\Phi = u^2$ , nous déduirons de cette formule les relations

$$0 = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{U}\sigma)}{\partial x}, \quad (13)$$

$$\sigma \mathfrak{M} u' = \frac{\partial (\mathbf{U}\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} u^2 d\sigma,$$

$$\sigma \mathfrak{M} (u^2)' = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} u^2 d\sigma + \frac{\partial}{\partial x} \int u^3 d\sigma.$$

Posons, suivant une notation consacrée :

$$1 + \eta = \int_{\sigma} \left( \frac{u}{U} \right)^2 \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad \alpha = \int_{\sigma} \left( \frac{u}{U} \right)^3 \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Les deux dernières relations précédentes s'écriront :

$$\sigma \mathfrak{M} u' = \frac{\partial (U \sigma)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (1 + \eta) U^2 \sigma,$$

$$\sigma \mathfrak{M} (u^2)' = \frac{\partial}{\partial t} (1 + \eta) U^2 \sigma + \frac{\partial}{\partial x} \alpha U^2 \sigma.$$

Dérivons  $(1 + \eta) U^2 \sigma$ , puis  $\alpha U^2 \sigma$  en les regardant respectivement comme étant les produits  $(1 + \eta) U \cdot U \sigma$  et  $\alpha U^2 \cdot U \sigma$ ; nous obtiendrons, après réductions évidentes :  $\mathfrak{M} u' = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial t} \cdot (1 + \eta) U - \eta \frac{U}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ ,

$$\mathfrak{M} (u^2)' = \frac{\partial}{\partial t} (1 + \eta) U^2 + U \frac{\partial \alpha U^2}{\partial x} - (\alpha - 1 - \eta) \frac{U^2}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Si l'on a égard à ces expressions,  $B_0 u_0^2 \mathfrak{M} f$  et  $I$  prennent les formes suivantes :

$$\left. \begin{aligned} B_0 u_0^2 \mathfrak{M} f &= b U^2 + 2(\alpha - 1 - \eta) \frac{\sigma}{\chi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{2g} \right) \\ &+ \frac{2\eta}{g} \frac{\sigma}{\chi} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{(1 + 3\eta - \alpha)}{g} \frac{U}{\chi} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ &+ \frac{\sigma}{\chi} \frac{U}{g} \left[ U \frac{\partial (\alpha - 2\eta)}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right], \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} I &= b U^2 \frac{\chi}{\sigma} + (2\alpha - 1 - \eta) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{2g} \right) \\ &+ \frac{1 + 2\eta}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\alpha - 1 - 2\eta}{g} \frac{U}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ &+ \frac{U}{g} \left[ U \frac{\partial (\alpha - \eta)}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Ces formules ont été données par M. Boussinesq en 1872<sup>1</sup>. Elles peuvent, dans une première approximation, être notablement simplifiées.

Les coefficients  $2(\alpha - 1 - \eta), \dots, (\alpha - \eta), \eta$ , pourront en effet être réduits à leurs valeurs à peu près constantes de régime uniforme dans tous les écoulements assez graduellement variés pour que les vitesses diffèrent peu de ce qu'elles sont dans ce régime, puisqu'ils sont multipliés par des dérivées de  $U$  ou de  $\sigma$  qui sont du premier ordre de petitesse; les quantités négligées sont au moins du second ordre. En outre, dans les écoulements envisagés, les changements de forme de la section  $\sigma$  capables d'influencer les valeurs de  $\alpha$  et  $\eta$  relatives au régime uniforme se produisent très lentement; « les petites parties variables de ces coefficients seront, comme celle même que contiendra le rapport  $\frac{u}{U}$  et d'où elles proviendront, de l'ordre des dérivées premières de  $U$  ou de  $\sigma$ ; et leurs dérivées en  $x$  ou en  $t$  atteindront, par suite, comme les dérivées secondes de  $U$  ou de  $\sigma$ , le deuxième ordre de petitesse. C'est dire qu'à une première approximation, le dernier terme, double, de chacune des équations (14) et (15), sera négligeable<sup>2</sup>. » Enfin comme les coefficients  $(1 + 3\eta - \alpha)$  et  $(\alpha - 1 - 2\eta)$  de  $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$  sont très petits par rapport aux coefficients de  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{2g} \right)$  et de  $\frac{\partial U}{\partial t}$ , les quatrièmes termes des expressions de  $B_o u_o^2 \mathfrak{M} f$  et

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 8, § 40, p. 521; — 19, p. 17.

<sup>2</sup> J. BOUSSINESQ, 19, p. 18.

de  $I$  seront très peu sensibles. Les formules (14) et (15) se réduiront donc à :

$$\begin{aligned} Bu_s^2 \mathfrak{M}f = bU^2 + 2(z - 1 - \eta) \frac{\sigma}{\chi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{2g} \right) \\ + \frac{2\eta}{g} \frac{\sigma}{\chi} \frac{\partial U}{\partial t}, \end{aligned} \quad (14')$$

$$\begin{aligned} I = bU^2 \frac{\chi}{\sigma} + (2z - 1 - \eta) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{2g} \right) \\ + \frac{1+2\eta}{g} \frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned} \quad (15')$$

Pour rendre ces résultats plus concrets, nous donnerons les valeurs numériques des coefficients dans les deux cas de parois homogènes que nous avons envisagés antérieurement.

Section rectangulaire large :

$$\left. \begin{aligned} u_s^2 &= 0,462 U^2 + 87,8 h \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{2g} \right) + 46,2 \frac{h}{g} \frac{\partial U}{\partial t}, \\ I &= 0,0004 \frac{U^2}{h} + 1,096 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{1,040}{g} \frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned} \right\}$$

Section circulaire :

$$\left. \begin{aligned} u_s^2 &= 0,407 U^2 + 72,4 R \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{2g} \right) + 37,1 \frac{R}{g} \frac{\partial U}{\partial t}, \\ I &= 0,00072 \frac{U^2}{R} + 1,161 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{1,066}{g} \frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned} \right\}$$

L'expression de  $u_s^2$  montre que, à égalité de vitesse moyenne  $U$ , la vitesse à la paroi croît quand le mouvement s'accélère soit d'amont en aval, soit sur place. L'une et l'autre accélérations tendent par suite à égaliser les vitesses à travers chaque section, conformé-

ment à une observation ancienne de Dupuit à propos de l'étude du mouvement permanent.

L'expression de  $I$  montre que la pente motrice est la somme de trois termes : le premier mesure la pente motrice nécessaire à vaincre le frottement extérieur dans l'hypothèse d'un régime uniforme ; le second est la pente nécessaire pour accélérer le mouvement d'amont en aval en accroissant la hauteur due à la vitesse moyenne  $\frac{U^2}{2g}$  ; le troisième est la pente nécessaire pour accélérer le mouvement sur place.

Voyons le parti qu'on pourra tirer de l'expression générale de la pente motrice et de l'équation de continuité prise sous la forme (13).

Dans le cas d'un tuyau plein, l'aire  $\sigma$  et l'altitude  $h_o$  de son centre sont données en fonction de  $x$ . Nous avons alors, pour déterminer la vitesse moyenne  $U$  et la pression  $p_o$  sur l'axe, en fonction de  $x$  et de  $t$ , les deux équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ h_o + \frac{p_o}{\rho g} + \alpha' \frac{U^2}{2g} \right] + b U^2 \frac{z}{\sigma} + \frac{1 + 2\eta}{g} \frac{\partial U}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\sigma U)}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

en posant  $\alpha' = 2\alpha - 1 - \tau$ .

Dans le cas d'un canal découvert, si  $i$  est l'inclinaison moyenne donnée (inclinaison du fond, par exemple) sur l'horizon, et si  $l$  est la largeur du canal à la surface libre dans la section d'abscisse  $x$ , on a :

$$I = \sin i - \frac{\cos i}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

<sup>1</sup> E. DUPUIT, p. 62.

Comme, dans une section,  $l$  durant le mouvement est sensiblement invariable, nous pourrons regarder  $l$  et  $i$  comme *donnés* en fonction de  $x$ . Les équations aux dérivées partielles :

$$\begin{aligned} -\sin i + \frac{\cos i}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{2g} \right) + bU^2 \frac{\gamma}{\sigma} \\ + \frac{1 + 2\alpha}{g} \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial (\sigma U)}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

déterminent la vitesse moyenne  $U$  et l'aire  $\sigma$  de la section en fonction de  $x$  et de  $t$ .

L'état initial du courant fluide étant connu, ces équations permettront d'en déduire ses états successifs.

Si le régime est supposé permanent, les équations établies deviendront des équations différentielles ordinaires.

#### 4. Propagation des ondes et des remous d'une médiocre hauteur le long d'un courant.

**Première approximation.** — Nous allons appliquer les résultats obtenus au paragraphe précédent à une question qui a donné lieu à une importante vérification expérimentale, à savoir à la propagation de l'intumescence produite par une variation rapide, mais momentanée, de la hauteur d'eau et de la vitesse moyenne à une extrémité du canal. Cette onde est dite *descendante* quand elle prend naissance à l'amont et se dirige suivant le courant; elle est au contraire *ascendante* quand elle prend naissance à l'aval et que la vitesse du courant ne suffit pas à arrêter sa marche vers l'amont. Nous nous proposons de calculer, dans l'un et l'autre cas, la vitesse de propagation d'une telle intumescence

et de comparer les résultats de la théorie aux observations d'H. Bazin ; nous verrons que l'accord est remarquablement précis.

Supposons l'inclinaison  $i$  du fond constante et très petite ; bornons-nous au cas d'un canal rectangulaire de très grande largeur constante, et admettons qu'avant la production de l'intumescence, le régime du fluide soit uniforme, avec une profondeur d'eau  $H$  et une vitesse moyenne  $U_0$ , censées données.

Nous désignerons par  $H + h$  et par  $U = U_0 + U'$  les valeurs que prennent, dans une tranche à un instant donné, lors du passage de l'intumescence, la hauteur d'eau et la vitesse moyenne,  $h$  et  $U'$  étant de petites fonctions de  $x$  et de  $t$ .

Avant le passage de l'onde, la pente motrice est mesurée par  $\frac{bU_0^2}{H}$ , d'après la loi de De Chézy ; durant le passage, chaque section se relève de  $h$ , en sorte que la pente motrice prend pour expression

$$I = \frac{bU_0^2}{H} - \frac{\partial h}{\partial x}.$$

D'autre part, en vertu de la formule (15) dans laquelle nous négligerons seulement le dernier terme, double, et en notant que  $\frac{I}{\sigma} = \frac{I}{H+h}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} I &= b \frac{(U_0 + U)^2}{H+h} + (\alpha - 1 - \eta) \frac{U_0 + U'}{g} \frac{\partial U'}{\partial x} \\ &\quad + \frac{1 + 2\eta}{g} \frac{\partial U'}{\partial t} - \frac{(\alpha - 1 - 2\eta)}{g} \frac{U_0 + U'}{H+h} \frac{\partial h}{\partial t}. \end{aligned}$$

Égalons les deux valeurs de  $I$ , et négligeons dans

l'équation obtenue les termes non linéaires en  $U'$ , en  $h$ , ou en leurs dérivées partielles ; en outre, comme le coefficient  $b$  est très petit, nous négligerons aussi les termes contenant en facteur  $bh$  ou  $bU'$ . Nous obtiendrons ainsi l'équation :

$$\frac{\partial h}{\partial x} + (2x - 1 - \eta) \frac{U_o}{g} \frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{1 + 2\eta}{g} \frac{\partial U'}{\partial t} - \frac{(x - 1 - 2\eta)}{g} \frac{U_o}{H} \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (16)$$

Quant à l'équation de continuité

$$\frac{\partial(H + h)}{\partial t} + \frac{\partial \{ (H + h)(U_o + U') \}}{\partial x} = 0,$$

elle se réduit, au même degré d'approximation, à

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial U'}{\partial x} + U_o \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

On serait conduit à des équations de première approximation exactement pareilles dans le cas d'un canal sensiblement prismatique, mais de forme quelconque.

Il suffit donc d'intégrer les équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants (16) et (17).

Éliminons  $U'$  entre ces équations. A cet effet dérivons par rapport à  $x$  l'équation (16), multiplions-la par  $H$ , puis remplaçons-y  $H \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2}$  et  $H \frac{\partial^2 U'}{\partial x \partial t}$  respectivement par

$$-\left[ \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} + U_o \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \text{ et } -\left[ \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + U_o \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \right],$$

expressions déduites de (17). Nous obtenons ainsi :

$$\left\{ [2x - 1 - \eta] - gH \right\} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + (3x - 1 - \eta) U_o \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + (1 + 2\eta) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0. \quad (18)$$

L'équation de Dalembert à laquelle nous sommes ainsi conduits admet pour intégrale générale, avec deux fonctions arbitraires  $\tilde{f}_1$  et  $\tilde{f}_2$  :

$$h = \tilde{f}_1(x - \omega_1 t) + \tilde{f}_2(x - \omega_2 t), \quad (19)$$

en désignant par  $\omega_1$  et  $\omega_2$  les racines de l'équation

$$(1 + 2\eta) \omega^2 - (3x - 1 - \eta) \omega U_o + (2x - 1 - \eta) U_o^2 - gH = 0.$$

Or nous avons établi au précédent chapitre (§ 8) que, dans le cas d'une section rectangulaire, on avait :

$$x = 1 + 3\eta - \frac{2\eta\sqrt{5\eta}}{7}.$$

L'équation caractéristique en  $\omega$  peut donc s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} & \omega^2 - 2\omega U_o + U_o^2 - gH \\ & + (2\omega^2 - 8\omega U_o + 5U_o^2) \eta \\ & + \frac{2\eta\sqrt{5\eta}}{7} (3\omega - 2U_o) U_o \end{aligned} \right\} = 0.$$

Si  $\eta$  était nul, on aurait :  $\omega = U_o \pm \sqrt{gH}$ .

Développons donc  $\omega$  en série suivant les puissances de  $\sqrt{\eta}$  sous la forme

$$\omega = U_o \pm \sqrt{gH} + A\eta^{\frac{1}{2}} + B\eta + C\eta^{\frac{3}{2}} + \dots$$

En substituant cette expression dans l'équation pré-

cédente et en annulant les coefficients des puissances successives de  $\sqrt{\gamma}$ , on trouve immédiatement :

$$A = 0$$

$$B = 2U_0 \pm \sqrt{gH} \frac{U_0^2 - 2gH}{2\sqrt{gH}},$$

$$C = -\frac{\sqrt{5}}{7} U_0 \left[ 3 \pm \frac{U_0}{\sqrt{gH}} \right].$$

Rappelons-nous d'ailleurs que, pour le régime uniforme et dans le cas d'une section rectangulaire très large, nous avons trouvé :

$$\gamma = \frac{1}{45} k^2 b \quad \text{et} \quad \frac{u_m}{U_0} = 1 + \frac{1}{6} k\sqrt{b}.$$

Il s'en suit que

$$\gamma = \frac{4}{5} \left( \frac{u_m - U_0}{U_0} \right)^2.$$

Si donc nous négligeons les termes d'ordre supérieur à  $\frac{3}{2}$  en  $\gamma$ , nous aurons :

$$\omega = U_0 \pm \sqrt{gH} + \frac{4}{5} \left[ 2 \pm \frac{U_0^2 - 2gH}{2U_0\sqrt{gH}} \right] \frac{(u_m - U_0)^2}{U_0} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}^{(20)}$$

$$- \frac{8}{35} \left( 3 \pm \frac{U_0}{\sqrt{gH}} \right) \frac{(u_m - U_0)^3}{U_0^2}.$$

Eu égard à ce que  $\gamma$  est inférieur à l'unité, on reconnaît que l'une des racines  $\omega_1$  est supérieure à  $U_0$ , tandis que l'autre  $\omega_2$  lui est inférieure.

L'expression (19) de  $h$  transforme l'équation (17)

$$\text{en } \frac{\partial}{\partial x} \left| (U_0 - \omega_1) \tilde{\mathcal{F}}_1 + (U_0 - \omega_2) \tilde{\mathcal{F}}_2 + HU' \right| = 0;$$

en désignant par  $\psi(t)$  une fonction de  $t$ , nous aurons donc :

$$\begin{aligned} U' = & \frac{\omega_1 - U_o}{H} \tilde{F}_1(x - \omega_1 t) \\ & + \frac{\omega_2 - U_o}{H} \tilde{F}_2(x - \omega_2 t) + \psi(t). \end{aligned}$$

Mais si l'on porte cette valeur de  $U'$  et la valeur (19) de  $h$  dans l'équation (16), en tenant compte de l'équation dont  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les racines, on reconnaît que cette équation (16) ne saurait être vérifiée qu'autant que  $\psi(t)$  se réduit à une constante. Comme il est loisible, sans changer l'expression de  $h$ , de remplacer  $\tilde{F}_1$  et  $\tilde{F}_2$  par  $\tilde{F}_1 + A$  et  $\tilde{F}_2 - A$ ,  $A$  étant une constante arbitraire, nous choisirons  $A$  de manière à faire disparaître la constante qui se trouvait explicitement dans la valeur de  $U'$ . Nous aurons donc :

$$\begin{aligned} U' = & \frac{\omega_1 - U_o}{H} \tilde{F}_1(x - \omega_1 t) \\ & + \frac{\omega_2 - U_o}{H} \tilde{F}_2(x - \omega_2 t). \quad (21) \end{aligned}$$

Les intumescences à étudier peuvent se propager dans le sens du courant ou en sens contraire. Nous placerons l'origine des abscisses en un point tel que, pour  $t = 0$ , les ondes n'aient pas encore atteint les sections qui ont des abscisses positives dans le premier cas ou des abscisses négatives dans le second. A l'instant  $t = 0$ , nous devons donc avoir :

$h = 0, U' = 0$ , soit  $\tilde{F}_1(x) = 0, \tilde{F}_2(x) = 0$   
 pour  $x > 0$  dans l'hypothèse des ondes descendantes,  
 pour  $x < 0$  dans le cas des ondes ascendantes. Si

donc nous ne considérons que des abscisses  $x$  supérieures à  $\omega_2 t$  dans le premier cas ( $x - \omega_2 t > 0$ ), ou inférieures à  $\omega_1 t$  dans le second cas ( $x - \omega_1 t < 0$ ), nous aurons  $\tilde{f}_2 = 0$  dans le premier cas, ou  $\tilde{f}_1 = 0$  dans le second cas.

Les expressions de  $h$  et de  $U'$  se réduisent alors à la forme  $h = \tilde{f}(x - \omega t)$ ,

$$U' = \frac{\omega - U_o}{H} \tilde{f}(x - \omega t) = (\omega - U_o) \frac{h}{H},$$

en appelant  $\tilde{f}$  l'une des fonctions  $\tilde{f}_1$  et  $\tilde{f}_2$ , et  $\omega$  l'une des racines  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , définies par les expressions (20), et dont celle,  $\omega_1$ , prise avec les déterminations supérieures de signe, correspond à des ondes allant vers l'aval et l'autre,  $\omega_2$ , prise avec les déterminations inférieures, à des ondes allant vers l'amont.

Comme toutes les parties de l'onde voisines de sa tête auront bientôt atteint des abscisses supérieures à  $\omega_2 t$  pour les ondes descendantes, et inférieures à  $\omega_1 t$  pour les ondes ascendantes, nous pouvons nous en tenir aux dernières formules écrites.

Ces formules montrent que les ordonnées  $h$  de l'intumescence, en saillie sur le niveau primitif, et les excès de vitesse  $U'$  produits par le passage de l'intumescence, semblent se déplacer le long du canal avec la célérité  $\omega$ .

Ainsi, des ondes ou remous de faible hauteur, produits dans un canal où existe un régime permanent uniforme, avancent, au moins à une première approximation, sans se déformer et avec une vitesse de propagation  $\omega$ , vers les  $x$  positifs, donnée par la formule (20).

**5. Comparaison de la théorie avec l'expérience.** — Avant que M. Boussinesq eût édifié la théorie précédente, H. Bazin avait étudié la propagation des ondes d'intumescence descendantes et ascendantes provoquées dans un courant par projection d'eau, et il avait été conduit empiriquement par ses expériences (faites sur une rigole parallèle au canal de Bourgogne, puis sur le canal de Bourgogne même) à la loi approximative :  $\omega = U_0 \pm \sqrt{gH}$ .

C'est que, dans ces expériences, la quantité  $\eta$  en général ne dépasse pas 0,02 à 0,03, et que le rapport  $\frac{U_0^2}{2gH} = \lambda^2$  est assez faible : alors les deux derniers termes de la formule (20) ont de minimes valeurs.

Toutefois, lorsqu'il s'agit d'*ondes qui remontent le courant avec une petite vitesse*, la valeur absolue  $|\omega_2|$  observée par Bazin<sup>1</sup> est inférieure à  $\sqrt{gH} - U_0$ .

Ceci est d'accord avec la théorie ; pour  $\lambda = 0,9$  par exemple et  $\eta = 0,02$ , on est conduit par la formule (20) à

$$|\omega_2| = (\sqrt{gH} - U_0) - 0,051 U_0;$$

la valeur des termes négligés atteindrait le vingtième de la vitesse fournie par la loi de Bazin, et l'écart a bien le sens indiqué par l'expérience.

D'autre part, dans le cas d'*ondes descendantes le long d'un courant très rapide à fond fort rugueux*,  $\eta$  et  $U_0$  peuvent prendre des valeurs considérables, et mettre en défaut la loi de Bazin<sup>2</sup>. Ainsi, en opérant sur

<sup>1</sup> H. BAZIN, 2, ch. 1, nos 21-27.

<sup>2</sup> H. BAZIN, 3.

la rigole de décharge du réservoir de Grosbois, rigole en maçonnerie établie suivant une forte pente (0,101 dans la partie supérieure où a été faite la première expérience, 0,037 dans la partie inférieure où ont été faites les deux autres expériences), H. Bazin a obtenu les résultats suivants :

$H$	$U_0$	$U_0 + \sqrt{gH}$	$\omega$ observé	Écart
0 <sup>m</sup> ,110	3,785	4,824	6,25	1,43
0 <sup>m</sup> ,150	2,744	3,957	4,32	0,37
0 <sup>m</sup> ,255	3,481	4,999	5,75	0,75

La loi de Bazin n'est plus valable. Mais le mesurage de  $u_m$  a permis l'évaluation directe de  $\eta$  et le calcul de la valeur théorique de  $\omega$ . On trouve, en désignant par  $\omega'_1$  la valeur de  $\omega_1$  déduite de la résolution complète de l'équation caractéristique en  $\omega$  :

$u_m$	$\eta$	$\frac{2}{7} \sqrt{5\eta}$	$\omega_1$	$\omega'_1$
5,51	0,166	0,043	6,511	6,190
3,49	0,059	0,009	4,327	4,311
4,55	0,075	0,013	5,589	5,555

Dans le cas de la première expérience,  $\eta$  a une valeur très grande, et alors la formule (20) est insuffisamment approchée. Dans tous les cas, les valeurs  $\omega'_1$  ne diffèrent guère des vitesses observées, lesquelles comportent des erreurs possibles de 3 pour 100 environ.

## CHAPITRE III

### MOUVEMENT GRADUELLEMENT VARIÉ DANS LES TUYAUX LARGES ET LES CANAUX (DEUXIÈME APPROXIMATION)

**1. Calcul préliminaire des composantes de la vitesse transversale.** — L'étude que nous venons de faire a conduit à une vitesse de propagation identique pour toutes les parties de l'intumescence : pour mettre en compte l'influence de la lente déformation de l'onde sur sa propagation, il faut recourir à une approximation supérieure, et ne plus négliger dans l'expression (15) de la pente motrice les termes en  $\frac{\partial(x - \eta)}{\partial x}$  et  $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ .

D'autre part, les expériences d'H. Bazin sur la distribution des vitesses dans un long tuyau de 80 mètres de longueur et de 0<sup>m</sup>,80 de diamètre ont montré que le régime uniforme se trouvait bien établi dans la seconde moitié du tuyau, mais qu'il ne régnait pas dans la première. Dans cette partie,

le fluide avait un mouvement graduellement varié, transitoire entre son mouvement à filets épanouis consécutif à la rapide contraction de l'entrée, et le régime uniforme établi dans la partie aval. La théorie de ce régime transitoire et des conditions de sa transformation en régime uniforme, faite complètement par M. Boussinesq, exige aussi une approximation plus élevée que celle dont nous nous sommes contentés au précédent chapitre.

Les deux problèmes que nous venons de poser exigent une évaluation de l'accélération longitudinale  $u'$  dans laquelle on ne peut plus négliger les termes qui contiennent en facteur les composantes transversales  $v$  et  $w$  de la vitesse. Nous allons donc préalablement étudier comment on peut déterminer ces fonctions  $v$  et  $w$ .

Nous avons, pour les définir, l'équation de continuité

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

et la condition d'intégrabilité de l'expression de  $dp$  dans une section transversale,

$$dp = \rho (Y dy + Z dz) - \rho (v' dy + w' dz),$$

soit

$$\frac{\partial v'}{\partial z} = \frac{\partial w'}{\partial y}. \quad (2)$$

A ces équations (1) et (2), il faut joindre la condition exprimant que les particules situées à la surface limite du fluide à l'instant  $t$  et animées des vitesses moyennes locales, s'y trouvent encore à l'instant  $t + dt$ . Quoique nous n'ayons en vue que les cas usuels d'une section rectangulaire très large et d'une

section circulaire, nous admettrons que l'équation du contour est de la forme

$$\psi\left(\frac{y-y_o}{b}, \frac{z-z_o}{c}\right) = \psi(\eta, \zeta) = 0, \quad (3)$$

en appelant  $b$  et  $c$  deux paramètres de grandeur de la section, *lentement* variables avec  $x$  et  $t$ ,  $y_o$  et  $z_o$  les coordonnées d'un point particulier de la section, tel que son centre.

Exprimons que la relation (3) reste vérifiée quand, à partir des valeurs actuelles de  $t$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , satisfaisant à (3), on fait croître ces variables respectivement de  $dt$ ,  $udt$ ,  $vdt$ ,  $wdt$ , ou sensiblement de  $dt$ ,  $U\varphi dt$ ,  $vdt$ ,  $wdt$ , en appelant  $\varphi$  l'expression de  $\frac{u}{U}$  dans l'hypothèse d'un régime uniforme à la traversée de la section d'abscisse  $x$ . La condition obtenue

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

s'écrit, en posant :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial y_o}{\partial t} + U\varphi \frac{\partial y_o}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial b}{\partial t} + U\varphi \frac{\partial b}{\partial x} \right). \\ w_1 &= \frac{\partial z_o}{\partial t} + U\varphi \frac{\partial z_o}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial c}{\partial t} + U\varphi \frac{\partial c}{\partial x} \right). \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} (v - v_1) + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} (w - w_1) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

La forme même de cette relation suggère l'idée -

de faire un changement de fonctions; soient  $L$  et  $M$  deux nouvelles fonctions inconnues que nous substituerons à  $v$  et  $w$ , et introduisons deux fonctions auxiliaires, arbitraires pour le moment, l'une  $P$  ne dépendant que de  $x$  et de  $t$ , l'autre  $G$  que de  $\eta$  et  $\zeta$ , en posant :

$$\left. \begin{aligned} v &= v_1 + b \left( P \frac{\partial G}{\partial \eta} + UL \right), \\ w &= w_1 + c \left( P \frac{\partial G}{\partial \zeta} + UM \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

La relation (4) s'écrit :

$$P \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right] + U \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} L + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} M \right] = 0.$$

Usons de l'indétermination de la fonction  $G$  pour annuler le coefficient de  $P$ , posant :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial G}{\partial \zeta} = 0; \quad (6)$$

alors la condition (4) se réduit à

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} L + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} M = 0. \quad (7)$$

La relation (6) exprime que  $G(\eta, \zeta) = 0$  représente une courbe coupant orthogonalement le contour  $\psi(\eta, \zeta) = 0$ ; si donc  $d\gamma$  est une normale élémentaire à cette dernière courbe, on aura :

$$\frac{dG}{d\gamma} = 0 \quad (\text{sur le contour}). \quad (8)$$

Portons maintenant dans l'équation de continuité (1) les expressions (5) de  $v$  et  $w$ , après avoir posé :

$$\frac{u}{U} = \varphi + \psi, \quad (9)$$

$\varphi$  étant la valeur de  $\frac{u}{U}$  dans l'hypothèse du régime uniforme, fonction de  $\eta$  et  $\zeta$ :  $\varpi$  sera le terme correctif, fonction de  $\eta$ , de  $\zeta$ , de  $x$  et de  $t$ , représentant le petit écart dû à la variation du régime. Nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{bc} \left( \frac{\partial bc}{\partial t} + U \varphi \frac{\partial bc}{\partial x} \right) + U \left( \frac{\partial L}{\partial \eta} + \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right) \\ & + P \Delta G + \varphi \frac{\partial U}{\partial x} = - \frac{\partial (\varpi U)}{\partial x}, \end{aligned}$$

après quelques réductions simples. Notons que l'aire de la section varie proportionnellement à  $a^2$ , en sorte

que :  $\frac{1}{bc} \left( \frac{\partial bc}{\partial t} + U \varphi \frac{\partial bc}{\partial x} \right)$   
n'est autre chose que  $\frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + U \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)$ , et tenons  
compte de la relation connue :  $\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial (\sigma U)}{\partial x} = 0$ ;  
la somme du premier terme double et du dernier terme  
de l'équation précédente vaudra  $\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} (1 - \varphi)$ . En  
outre, dans le second membre, le terme  $\varpi \frac{\partial U}{\partial x}$  est  
négligeable au degré d'approximation que nous observerons. En fin de compte, l'équation de continuité  
prendra la forme :

$$\begin{aligned} P \Delta G - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} (\varphi - 1) + U \left( \frac{\partial L}{\partial \eta} + \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right) \\ = - U \frac{\partial \varpi}{\partial x}. \quad (10) \end{aligned}$$

Comme on déduit des formules (10) et (12) du chapitre I, § 3 :

$$\varphi - 1 = \frac{u - U}{U} = \frac{k\sqrt{B_o}}{1 + k\sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1} [F_1(\eta, \zeta) - \mathfrak{M} F_1],$$

il nous suffira de choisir la fonction  $P$  de  $x$  et de  $t$ , laissée jusqu'ici arbitraire, par la condition :

$$P = \frac{k\sqrt{B_o}}{1 + k\sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1} \cdot \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (11)$$

pour faire prendre à l'équation (10) la forme nouvelle

$$\begin{aligned} P \left\{ \Delta G - [F_1(\eta, \zeta) - \mathfrak{M} F_1] \right\} \\ + U \left\{ \frac{\partial L}{\partial \eta} + \frac{\partial M}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right\} = 0. \end{aligned}$$

La fonction  $G$  n'est astreinte encore qu'à la condition (8) relative au contour; imposons-lui de satisfaire, à travers toute la section, à l'équation :

$$\Delta G = F_1(\eta, \zeta) - \mathfrak{M} F_1; \quad (12)$$

cette équation (12), jointe à (8), détermine complètement la fonction  $G(\eta, \zeta)$ , à une constante additive près, qui disparaît dans les dérivées de  $G$  figurant seules dans les composantes (5) de la vitesse.

Dans ces conditions, l'équation de continuité prend

$$\text{la forme très simple } \frac{\partial L}{\partial \eta} + \frac{\partial M}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (13)$$

La dérivée  $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$  est ici négligeable, à une première approximation, comme se trouvant de l'ordre des dérivées secondes de  $U$  et de  $\sigma$ , tandis que  $v$ ,  $w$  et,

par suite, les parties de  $L$ ,  $M$  à évaluer actuellement, sont comparables aux dérivées premières des mêmes quantités. L'équation réduite  $\frac{\partial L}{\partial \eta} + \frac{\partial M}{\partial \zeta} = 0$  (14) entraîne l'existence d'une fonction  $\Phi(\eta, \zeta, x, t)$  telle que :  $L = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \quad M = -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$ . (15)

Cette fonction  $\Phi$  a une valeur constante sur le contour ; là, en effet, on a :  $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} d\zeta = 0$ ,

ou, en tenant compte de la relation (7) :

$$L d\zeta - M d\eta = 0; \quad (16)$$

la forme trouvée (15) de  $L$  et  $M$  montre que sur le contour d'une section  $d\Phi = 0$ , ou  $\Phi = \text{const.}$  Il est loisible de supposer nulle cette constante, car on peut, sans changer  $L$  et  $M$ , et par suite  $v$  et  $w$ , adjoindre à  $\Phi$  une constante additive arbitraire.

Cette fonction  $\Phi$ , petite, de l'ordre de grandeur de  $L$  et  $M$ , nulle sur la surface limite du fluide, est même identiquement nulle dans les deux cas que nous avons en vue.

1° Pour une section rectangulaire très large,  $\psi$  et  $F_1$  ne dépendent que de  $\zeta$ ; de plus, le mouvement se faisant pareillement dans tous les plans verticaux parallèles à  $ox$ ,  $v$  est identiquement nul et  $w$  ne dépend que de  $\zeta$ . D'après (12) et (8),  $G$  ne dépend plus alors aussi que de  $\zeta$ . En recourant aux équations (5), on reconnaît que  $L$  est nul et que  $M$  est fonction de  $\zeta$  seulement. La relation (15) se réduit donc à  $\frac{\partial M}{\partial \zeta} = 0$ ;

en sorte que  $M$  est une constante, et par suite est nul puisqu'en vertu de (16),  $M$  s'annule sur le contour. Puisque  $L \equiv M \equiv 0$ , on a aussi  $\Phi \equiv 0$ .

2<sup>o</sup> Pour une section circulaire,  $\psi$ ,  $F_1$  et  $G$  ne dépendent que de  $\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$ ; de plus, le mouvement se faisant pareillement dans tous les plans menés par l'axe des  $x$ ,  $v$  et  $w$  sont les produits respectifs d'une même fonction de  $\tau$  par  $\eta$  et  $\zeta$ ; par suite, les équations (5) de définition de  $L$  et  $M$  montrent que  $L$  et  $M$  sont aussi les produits d'une autre fonction de  $\tau$  respectivement par  $\eta$  et  $\zeta$ . Cela revient à dire que  $L$  et  $M$  sont les dérivées relatives à  $\eta$  et à  $\zeta$  d'une fonction de  $\tau$ , soit  $\Phi_1$ , qui d'après (14) satisfait à

$$\Delta\Phi_1 = 0. \text{ Dès lors } \frac{\partial\Phi_1}{\partial\tau} = \frac{A}{\tau}, \quad L = \frac{A\eta}{\tau^2}, \quad M = \frac{A\zeta}{\tau^2},$$

$A$  étant une constante. Mais l'équation (16) ne saurait être vérifiée en tous les points du contour que si  $A = 0$ . On doit donc avoir  $L \equiv M \equiv 0$ , et par suite aussi  $\Phi \equiv 0$ .

Ainsi, dans ces deux cas, nous aurons simplement :

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{\partial y_o}{\partial t} + U_\varphi \frac{\partial y_o}{\partial t} + \eta \left( \frac{\partial b}{\partial t} + U_\varphi \frac{\partial b}{\partial x} \right) + P \frac{\partial G}{\partial \eta}, \\ w &= \frac{\partial b_o}{\partial t} + U_\varphi \frac{\partial z_o}{\partial x} + \zeta \left( \frac{\partial c}{\partial t} + U_\varphi \frac{\partial c}{\partial x} \right) + P \frac{\partial G}{\partial \zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Si l'on désigne par  $d_e$  une différentielle prise en suivant, durant l'instant  $dt$ , une même particule dans son mouvement local, la seconde relation qui lie  $v$  et  $w$ ,

$$\text{soit (2), s'écrit : } \frac{d_e}{dt} \left( \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = 0,$$

et avec les valeurs précédentes de  $v$  et  $w$ , elle est identiquement vérifiée.

Dans le cas le plus général, il faudrait adjoindre aux valeurs (17) de  $v$  et  $w$  respectivement

$$bU \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \quad \text{et} \quad -cU \frac{\partial \Phi}{\partial \eta},$$

et l'on aurait pour déterminer la fonction  $\Phi$  l'équa-

$$\text{tion : } \frac{d_e}{dt} (U \Delta \Phi) = 0.$$

**2. Expression de l'accélération longitudinale.** — Nous pouvons maintenant aborder le calcul de l'accélération longitudinale  $u'$ ; comme nous avons posé :  $u = U(\varphi + \omega)$ ,

$$\text{nous aurons : } u' = (\varphi + \omega) \frac{d_e U}{dt} + U \frac{d_e(\varphi + \omega)}{dt}.$$

Rappelons que  $y$  et  $z$  (ou  $\eta$  et  $\zeta$ ) ne figurent pas dans  $U$ , et que les termes non linéaires par rapport à  $v$ ,  $w$ ,  $\omega$ , et aux dérivées de  $u$ ,  $U$ ,  $\varphi$  en  $x$  et  $t$ , sont négligeables, comme d'ordre supérieur de petitesse.

Remplaçons  $\frac{d_e}{dt}$  par

$$\frac{\partial}{\partial t} + (\varphi + \omega) \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z};$$

nous obtiendrons, après réduction au degré d'approximation énoncé :

$$\begin{aligned} u' = & \frac{\partial U}{\partial t} \varphi + U \frac{\partial U}{\partial x} \varphi^2 + U \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right. \\ & \left. + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + U \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + U \omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

« A une première approximation du calcul de  $u'$ , on pourra même, *ici*, supprimer le dernier terme double, où figurent les deux dérivées de  $\varpi$  en  $x$  et  $t$ . En effet, dans le régime graduellement varié que nous considérons actuellement, la perturbation,  $\varpi$ , apportée par la *variation* de l'écoulement au mode de distribution des vitesses, est censée liée aux changements de  $\sigma$  et de  $U$  avec  $x$  et  $t$ , au point de n'être pas d'un ordre de grandeur plus élevé que les dérivées premières de  $\sigma$  ou  $U$  en  $x$  et  $t$ ; ce qui réduit les dérivées analogues de  $\varpi$  à l'ordre de petitesse supérieur des dérivées seconde de  $\sigma$  ou de  $U$ <sup>1</sup>. »

L'expression ainsi réduite de  $u'$  :

$$\begin{aligned} u' = & \frac{\partial U}{\partial t} \varphi + U \frac{\partial U}{\partial x} \varphi^2 + U \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right. \\ & \left. + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

devient, après substitution des valeurs obtenues pour  $v$  et  $w$ , dans le cas le plus général, et après quelques réductions simples :

$$\begin{aligned} u' = & \frac{\partial U}{\partial t} \varphi + U \frac{\partial U}{\partial x} \varphi^2 + PU \left( \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) \\ & + U^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right). \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul dans les deux cas qui nous préoccupent. De plus, même dans le cas le plus général, il est sans influence sur les valeurs moyennes

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 19, p. 28.

$\mathfrak{M}\varphi^m u'$  prises à travers une section, et cela fait disparaître  $\Phi$  de l'équation générale du mouvement

$$I = bU^2 \frac{\chi}{\sigma} + \frac{1}{g} \left[ \frac{\mathfrak{M}(u^2)'}{U} - \mathfrak{M}u' \right].$$

En effet, le dernier terme de  $u'$  donne dans  $\mathfrak{M}\varphi^m u'$ , à un facteur constant près :

$$\int_{\gamma} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi^{m+1}}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi^{m+1}}{\partial \zeta} \right) d\sigma,$$

soit :  $\int_{\gamma} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \varphi^{m+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \varphi^{m+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \right) \right\} d\sigma,$

expression qui se transforme en

$$\int_{\gamma'} \varphi^{m+1} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} d\zeta \right) \quad \text{ou} \quad \int_{\gamma'} \varphi^{m+1} d\Phi;$$

elle est nulle, puisque  $\Phi$  est constamment nul le long du contour.

Le terme qui dépend de  $G$  donne dans la moyenne

$$\frac{PU}{(m+1)\sigma} \int_{\gamma} \left[ \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi^{m+1}}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi^{m+1}}{\partial \zeta} \right] d\sigma,$$

ou :

$$\frac{PU}{(m+1)\sigma} \int_{\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \varphi^{m+1} \frac{\partial G}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \left( \varphi^{m+1} \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right) - \varphi^{m+1} \Delta G \right\} d\sigma.$$

Les deux premiers termes fournissent l'intégrale curviligne  $\int_{\gamma'} \varphi^{m+1} \frac{dG}{ds} d\gamma'$ , et cette intégrale est

nulle en vertu de (8). De plus, d'après (8) et (12),

$$\text{on a : } P\Delta G = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} (\varphi - 1).$$

L'expression précédente devient par suite

$$-\frac{U}{(m+1)\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \int_0^* (\varphi^{m+2} - \varphi^{m+1}) \frac{\partial \sigma}{\sigma}.$$

En égard à ces divers résultats, nous obtiendrons la relation

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\varphi^m u') &= \frac{\partial U}{\partial t} \mathcal{M}\varphi^{m+1} + U \frac{\partial U}{\partial x} \mathcal{M}\varphi^{m+2} \\ &\quad - \frac{U}{(m+1)\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} (\mathcal{M}\varphi^{m+2} - \mathcal{M}\varphi^{m+1}). \end{aligned}$$

Pour  $m=0$  et pour  $m=1$ , les valeurs moyennes de  $\varphi$ , de  $\varphi^2$  et de  $\varphi^3$  qui s'introduisent ne sont autres que  $1, 1+\eta$  et  $\alpha$ , ces dernières quantités étant évaluées pour le régime permanent. Comme  $(u^2)'$  ou  $2uu'$  a pour valeur approchée  $2U\varphi u'$ , l'équation générale

$$I = bU^2 \frac{\chi}{\sigma} + \frac{1}{g} \left\{ 2\mathcal{M}\varphi u' - \mathcal{M}u' \right\}$$

se transformera en

$$\begin{aligned} I &= bU^2 \frac{\chi}{\sigma} + \frac{1+2\eta}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + (2\alpha - 1 - \eta) \frac{\partial}{\partial x} \frac{U^2}{2g} \\ &\quad - \frac{\alpha - 1 - 2\eta}{g} \frac{U}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \end{aligned}$$

C'est précisément l'équation simplifiée dont nous sommes partis pour étudier la propagation des intumescences, et dont nous avons ainsi une démonstration nouvelle.

Revenons au cas particulier où  $\Phi = 0$ ; on a alors simplement  $u' = \frac{\partial U}{\partial t} \varphi + U \frac{\partial U}{\partial x} \varphi^2$

$$+ \frac{k\sqrt{B_o}}{1+k\sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1} \frac{U}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \left( \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \right).$$

Comme

$$\varphi - 1 = \frac{k\sqrt{B_o}}{1+k\sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1} [F_1(\eta, \zeta) - \mathfrak{M} F_1],$$

il vient :  $u' = \frac{\partial U}{\partial t} \varphi + U \frac{\partial U}{\partial x} \varphi^2$

$$+ \left( \frac{k\sqrt{B_o}}{1+k\sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1} \right)^2 \frac{U}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \left( \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \right).$$

Évaluons le dernier terme dans le cas particulier du rectangle très large. Nous avons à intégrer

$$\Delta G = F_1 - \mathfrak{M} F_1, \quad \frac{dG}{d\eta} = 0 \quad (\text{au contour}),$$

avec les valeurs

$$F_1 = \frac{1}{2} (1 - \zeta^2), \quad \mathfrak{M} F_1 = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} = -\zeta;$$

l'équation différentielle

$$\frac{d^2 G}{d\zeta^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \zeta^2,$$

jointe à la condition  $\frac{dG}{d\zeta} = 0$  pour  $\zeta = 1$ , donne :

$$\frac{dG}{d\zeta} = \frac{1}{6} \zeta (1 - \zeta^2).$$

Il vient par suite

$$u' = \frac{\partial U}{\partial t} \varphi + U \frac{\partial U}{\partial x} \varphi^2 + \left( \frac{k \sqrt{B_o}}{1 + k \sqrt{B_o} M F_1} \right)^2 \frac{U}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\zeta^2}{6} (\zeta^2 - 1).$$

3. **Lois de seconde approximation pour la distribution des vitesses à travers une section<sup>1</sup>.** — Revenons, puisque nous avons l'expression de  $u'$  :

$$u' = \frac{\partial U}{\partial t} \varphi + U \frac{\partial U}{\partial x} \varphi^2 + U P \left( \frac{\partial G}{\partial \gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right),$$

aux équations (7) et (8) du chapitre précédent

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ F \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} \right] = u' - M u',$$

$$\frac{dF_2}{d\gamma} = 0 \quad (\text{sur le contour}),$$

$$F_2 = 0 \quad (\text{au point le plus bas}),$$

équations qui serviront à calculer la fonction  $F_2$  et à faire connaître par suite la loi de variation des vitesses longitudinales aux divers points d'une section, par la formule

$$\frac{u}{u_o} = 1 + k \sqrt{B_o} F_1(\gamma, \zeta) + \frac{k}{g \sqrt{B_o} u_o^2} \frac{\sigma}{\chi} F_2(\gamma, \zeta).$$

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 19, p. 42-44.

Formons l'expression explicite de  $u' - \mathfrak{M} u'$ , soit de

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} (\varphi - \mathfrak{M} \varphi) + U \frac{\partial U}{\partial x} (\varphi^2 - \mathfrak{M} \varphi^2) \\ & + \frac{U}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \left( \frac{k \sqrt{B_o}}{1 + k \sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1} \right)^2 \\ & \times \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \right) \\ & - \mathfrak{M} \left( \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \right) \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Eu égard à l'expression de  $\varphi$ :

$$\varphi = 1 + \frac{k \sqrt{B_o}}{1 + k \sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1} (F_1 - \mathfrak{M} F_1),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi - \mathfrak{M} \varphi &= \frac{k \sqrt{B_o}}{1 + k \sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1} (F_1 - \mathfrak{M} F_1), \\ \varphi^2 - \mathfrak{M} \varphi^2 &= \frac{k \sqrt{B_o}}{(1 + k \sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1)^2} \\ & \times \left\{ 2(F_1 - \mathfrak{M} F_1) + k \sqrt{B_o} (F_1^2 - \mathfrak{M} F_1^2) \right\} \end{aligned}$$

La forme sous laquelle se présente alors le second membre  $u' - \mathfrak{M} u'$  de l'équation à intégrer nous conduit à poser :

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{k \sqrt{B_o}}{(1 + k \sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1)} \frac{\partial U}{\partial t} \tilde{F}_1(\eta, \zeta) \\ &+ \frac{k \sqrt{B_o}}{(1 + k \sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1)^2} U \frac{\partial U}{\partial x} \tilde{F}_2(\eta, \zeta) \\ &+ \left( \frac{k \sqrt{B_o}}{1 + k \sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1} \right)^2 \frac{U}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \tilde{F}_3(\eta, \zeta) + \tilde{F}(\eta, \zeta), \end{aligned}$$

et à déterminer les fonctions  $\tilde{F}_1$ ,  $\tilde{F}_2$ ,  $\tilde{F}_3$ , par les équations

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \zeta} \right] &= F_1 - \mathcal{M} F_1, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial \zeta} \right] &= 2(F_1 - \mathcal{M} F_1) \\ &\quad + k\sqrt{B_o} (F_1^2 - \mathcal{M} F_1^2), \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial \zeta} \right] &= \left( \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \right) \\ &\quad - \mathcal{M} \left( \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \right), \\ \frac{d(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3)}{ds} &= 0 \quad (\text{sur le contour}), \\ (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3) &= 0 \quad (\text{au point le plus bas}). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

La fonction complémentaire  $\tilde{F}$  se trouve alors déterminée par les équations

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \zeta} \right] = 0,$$

$$\frac{d\tilde{F}}{ds} = 0 \quad (\text{sur le contour}),$$

$$\tilde{F} = 0 \quad (\text{au point le plus bas}),$$

et, d'après ce que nous avons vu au chapitre I, § 2, p. 276, cette fonction  $\tilde{F}$  est identiquement nulle.

Supposons pour un instant qu'on ait intégré les équations (18); la fonction  $F_2$  se trouvera déterminée, et l'on aura par suite le mode de distribution des

vitesses. Si, dans le coefficient du petit terme en  $F_2$ , on remplace  $u_o$  par la valeur approchée

$$\frac{U}{1 + k\sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1},$$

il vient :  $\frac{u}{u_o} = 1 + k\sqrt{B_o} F_1$

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{k^2}{g} \frac{\sigma}{\chi} (1 + k\sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1) \tilde{\mathcal{F}}_1(\eta, \zeta) \frac{1}{U^2} \frac{\partial U}{\partial t} \\ &+ \frac{k^2}{g} \frac{\sigma}{\chi} \tilde{\mathcal{F}}_2(\eta, \zeta) \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial x} \\ &+ \frac{k^3}{g} \frac{\sqrt{B_o}}{\chi} \tilde{\mathcal{F}}_3(\eta, \zeta) \frac{1}{U} \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Revenons au système différentiel (18) et intégrons-le dans le cas d'une section rectangulaire très large. La variable  $\eta$  cesse alors de figurer dans nos équations. Comme on a de plus

$$F = 1, \quad F_1 = \frac{1}{2} (1 - \zeta^2), \quad \frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{1}{6} \zeta (1 - \zeta^2),$$

les équations à intégrer prennent la forme

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\mathcal{F}}_1}{d\zeta^2} &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \zeta^2; \\ \frac{d^2 \tilde{\mathcal{F}}_2}{d\zeta^2} &= \frac{1}{3} - \zeta^2 + \frac{k\sqrt{B_o}}{4} \left( \zeta^4 - 2\zeta^2 + \frac{7}{15} \right); \\ \frac{d^2 \tilde{\mathcal{F}}_3}{d\zeta^2} &= \frac{1}{6} \left( \zeta^4 - \zeta^2 + \frac{2}{15} \right); \\ \frac{d(\tilde{\mathcal{F}}_1, \tilde{\mathcal{F}}_2, \tilde{\mathcal{F}}_3)}{d\zeta} &= 0, \quad \text{pour } \zeta = 1; \\ (\tilde{\mathcal{F}}_1, \tilde{\mathcal{F}}_2, \tilde{\mathcal{F}}_3) &= 0, \quad \text{pour } \zeta = 0. \end{aligned}$$

On obtient bien simplement

$$\tilde{\mathcal{F}}_1 = -\frac{1}{24} (1 - \zeta^2)^2;$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_2 = -\frac{1}{12} (1 - \zeta^2)^2 + \frac{k \sqrt{B_o}}{120} (1 - \zeta^2)^2 (\zeta^2 - 3);$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_3 = \frac{1}{360} (1 - \zeta^2)^2 (3\zeta^2 - 1).$$

La loi de distribution des vitesses a donc pour expression,  $h$  étant la hauteur de la section et  $\zeta$  valant  $\frac{z}{h}$ ,

$$\frac{u}{u_o} = 1 + \frac{k}{2} \sqrt{B_o} (1 - \zeta^2) - \frac{k^2}{120g} \frac{h}{U} (1 - \zeta^2)^2$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} 5 \left( 1 + \frac{k}{3} \sqrt{B_o} \right) \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t} \\ + [10 + 3k \sqrt{B_o} (3 - \zeta^2)] \frac{\partial U}{\partial x} \\ + k \sqrt{B_o} \left( \frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \end{array} \right\}. \quad (20)$$

Dans le cas d'une section circulaire, les fonctions  $\tilde{\mathcal{F}}_1$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}_2$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}_3$  ne dépendent de  $\zeta$  et de  $\eta$  que par l'intermédiaire de  $\tau$ . Comme on a sensiblement  $F = \frac{1}{\tau}$ , le premier membre des équations (18) prend la forme  $\frac{1}{4\tau} \frac{d^2 \tilde{\mathcal{F}}}{d\tau^2}$ . En partant de

$$F_1 = \frac{2}{3} (1 - \tau^3),$$

et en notant que les fonctions  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$ ,  $\mathcal{F}_3$  et leurs dérivées par rapport à  $\tau$  doivent s'annuler pour  $\tau = 1$ , on déduit de suite des deux premières équations

$$\mathcal{F}_1 = -\frac{4}{45} (1 - \tau^3)^2,$$

$$\mathcal{F}_2 = -\frac{8}{45} (1 - \tau^3)^2 + \frac{2k\sqrt{B_o}}{405} (1 - \tau^3)^2 (5\tau^3 - 14).$$

Pour le calcul de  $\mathcal{F}_3$ , nous observerons que le second membre de l'équation correspondante vaut

$$\frac{1}{4} \left\{ \frac{dG}{d\tau} \frac{dF_1}{d\tau} - \mathfrak{M} \left( \frac{dG}{d\tau} \frac{dF_1}{d\tau} \right) \right\}$$

et que la fonction  $G$  satisfait à l'équation

$$\frac{1}{4\tau} \frac{d}{d\tau} \left( \tau \frac{\partial G}{\partial \tau} \right) = F_1 - \mathfrak{M} F_1,$$

sa dérivée s'annulant pour  $\tau = 1$ . On trouve

$$\text{d'abord } \frac{dG}{d\tau} = \frac{8}{15} \tau (1 - \tau^3);$$

$$\text{puis } \mathcal{F}_3 = \frac{2}{405} (1 - \tau^3)^2 (5\tau^3 - 2).$$

La loi de distribution des vitesses a donc pour expression,  $R$  étant le rayon de la section et  $\tau$  valant  $\frac{r}{R}$ ,

$$\frac{u}{u_o} = 1 + \frac{2}{3} k\sqrt{B_o} (1 - \tau^3) - \frac{1}{405} \frac{k^2}{g} \frac{R}{2U} (1 - \tau^3)^2$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} 36 \left( 1 + \frac{2}{5} k \sqrt{B_o} \right) \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t} \\ + \left[ 72 + 2k \sqrt{B_o} (14 - 5\varepsilon^3) \right] \frac{\partial U}{\partial x} \\ + 4k \sqrt{B_o} (2 - 5\varepsilon^3) \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \end{array} \right\}.$$

Le dernier terme de l'accolade disparaît dans le cas d'un tuyau rigide.

**4. Propagation des ondes et des remous dans un courant, le long d'un canal rectangulaire. Lois de seconde approximation<sup>1</sup>.** — Nous allons appliquer les généralités qui précèdent à la recherche de l'influence de la déformation des intumescences qui se propagent le long d'un canal rectangulaire, sur leur célérité.

Conservons les notations du § 4 du chapitre précédent. L'équation exacte du mouvement est :

$$\frac{b(U_o + U)^2}{H + h} + (2\alpha - 1 - \tau_l) \frac{U_o + U}{g} \frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{1 + 2\tau_l}{g} \frac{\partial U'}{\partial t} - \frac{(\alpha - 1 - 2\tau_l)}{g} \frac{U_o + U'}{H + h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{U_o + U'}{g} \left[ (U_o + U') \frac{\partial (\alpha - \tau_l)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_l}{\partial t} \right].$$

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 8, p. 425-447; — 19, p. 44-45.

Aux termes conservés en première approximation

$$H \left\{ g \frac{\partial h}{\partial x} + (2x - 1 - \eta) U_o \frac{\partial U'}{\partial x} + (1 + 2\eta) \frac{\partial U'}{\partial t} \right. \\ \left. - (x - 1 - 2\eta) \frac{U_o}{H} \frac{\partial h}{\partial t} \right\}$$

nous devons ajouter :

$$hg \frac{\partial h}{\partial x} + (2x - 1 - \eta) (U' H + U_o h) \frac{\partial U'}{\partial x} \\ + (1 + 2\eta) h \frac{\partial U'}{\partial t} - (x - 1 - 2\eta) U' \frac{\partial h}{\partial t} \\ + U_o H \left\{ U_o \frac{\partial(x - 2\eta)}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\}.$$

Les valeurs de première approximation obtenues au chapitre II,  $U' = \frac{\omega - U_o}{H} h$ ,  $h = \tilde{f}(x - \omega t)$ ,

peuvent, sauf erreur négligeable par rapport aux termes mêmes de seconde approximation, être substituées dans ces termes; rappelons-nous en outre que  $(\omega - U_o)^2$  est très sensiblement égal à  $gH$ .

Nous obtiendrons bien simplement :

$$\frac{1}{2} \omega(\omega - U_o) \frac{\partial}{\partial x} \frac{h^2}{H} \left( 3x - 5\eta - 3 + \frac{\sqrt{gH}}{U_o + \sqrt{gH}} \right) \\ + U_o H \left\{ U_o \frac{\partial(x - 2\eta)}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\}.$$

Il nous faut calculer maintenant les parties variables de  $\eta$  et de  $x$ .

Si  $\eta_1$  et  $x_1$  sont les valeurs de  $\eta$  et de  $x$  dans le cas

du régime uniforme, nous pouvons écrire, en négligeant les termes d'ordre supérieur de petiteur :

$$\iota + \eta = \int_{\sigma} (\varphi + \omega)^2 \frac{d\sigma}{\sigma} = \iota + \eta_1 + 2 \mathcal{M} \varphi \omega,$$

$$z = \int_{\sigma} (\varphi + \omega)^3 \frac{d\sigma}{\sigma} = z_1 + 3 \mathcal{M} \varphi^2 \omega.$$

Calculons donc  $\omega = \frac{u}{U} - \varphi$ , et pour cela revenons à l'expression (20) de  $\frac{u}{u_o}$  pour une section rectangulaire très large; remplaçons-y  $h$  par  $H+h$ ,  $U$  par  $U_o+U'$ ,  $\zeta^2$  par  $\iota - 2F_1$ ; en posant :

$$A = \frac{k^2}{30g} \frac{H}{U_o} \left\{ \begin{array}{l} 5 \left( \iota + \frac{k}{3} \sqrt{B_o} \right) \frac{\iota}{U_o} \frac{\partial U'}{\partial t} \\ + (10 + 6k\sqrt{B_o}) \frac{\partial U'}{\partial x} \\ - \frac{2}{3} k \sqrt{B_o} \frac{\iota}{H} \frac{\partial h}{\partial t} \end{array} \right\},$$

$$B = - \frac{k^3 \sqrt{B_o}}{15g} \frac{H}{U_o} \left[ 3 \frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{2}{H} \frac{\partial h}{\partial t} \right].$$

Nous obtiendrons :

$$\frac{u}{u_o} = \iota + k \sqrt{B_o} F_1 + A F_1^2 + B F_1^3,$$

et nous en déduirons :

$$\frac{U}{U_o} = \iota + k \sqrt{B_o} \mathcal{M} F_1 + A \mathcal{M} F_1^2 + B \mathcal{M} F_1^3.$$

Réduisons la valeur correspondante de  $\omega$ ,

$$\begin{aligned}\omega = & \frac{1 + k\sqrt{B_o} F_1 + AF_1^2 + BF_1^3}{1 + k\sqrt{B_o} \mathfrak{M}F_1 + A\mathfrak{M}F_1^2 + B\mathfrak{M}F_1^3} \\ & - \frac{1 + k\sqrt{B_o} F_1}{1 + k\sqrt{B_o} \mathfrak{M}F_1},\end{aligned}$$

à sa partie linéaire par rapport aux trois petites dérivées premières de  $U'$  en  $x$  et de  $U'$  et  $h$  en  $t$ , soit à sa partie linéaire en  $A$  et  $B$ ; il vient :

$$\omega = \frac{A(F_1^2 - \varphi \mathfrak{M}F_1^2) + B(F_1^3 - \varphi \mathfrak{M}F_1^3)}{1 + k\sqrt{B_o} \mathfrak{M}F_1}.$$

On en déduit immédiatement

$$\begin{aligned}\eta &= \tau_1 + \frac{2}{1 + k\sqrt{B_o} \mathfrak{M}F_1} \\ &\times \left\{ \begin{array}{l} A[\mathfrak{M}(\varphi F_1^2) - \mathfrak{M}\varphi^2 \mathfrak{M}F_1^2] \\ + B[\mathfrak{M}(\varphi F_1^3) - \mathfrak{M}\varphi^2 \mathfrak{M}F_1^3] \end{array} \right\}, \\ \alpha &= \alpha_1 + \frac{3}{1 + k\sqrt{B_o} \mathfrak{M}F_1} \\ &\times \left\{ \begin{array}{l} A[\mathfrak{M}(\varphi^2 F_1^2) - \mathfrak{M}\varphi^3 \mathfrak{M}F_1^2] \\ + B[\mathfrak{M}(\varphi^2 F_1^3) - \mathfrak{M}\varphi^3 \mathfrak{M}F_1^3] \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

Le calcul des coefficients de  $A$  et  $B$  dans ces expressions de  $\eta$  et de  $\alpha$  ne présente aucune difficulté à partir

$$\text{de : } F_1 = \frac{1}{2}(1 - \zeta^2), \quad \mathfrak{M}F_1 = \frac{1}{3}, \quad \mathfrak{M}F_1^2 = \frac{2}{15},$$

$$\mathfrak{M}F_1^3 = \frac{2}{35}, \quad \mathfrak{M}F_1^4 = \frac{19}{2520}, \quad \mathfrak{M}F_1^5 = \frac{79}{6720},$$

$$\text{et de : } \varphi = \frac{1 + k\sqrt{B_o} F_1}{1 + k\sqrt{B_o} \mathfrak{M}F_1}.$$

Ainsi le coefficient de  $A$  dans  $\eta$  a pour valeur :

$$\frac{4k\sqrt{B_o}}{315 \left(1 + \frac{1}{3}k\sqrt{B_o}\right)^2} \left(1 + \frac{1}{10}k\sqrt{B_o}\right).$$

En posant  $k=48$ ,  $B_o=0,000865$ , ces coefficients se déterminent numériquement. Soit donc

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_1 + eA + dB, \\ x &= x_1 + eA + fB.\end{aligned}$$

Nous sommes à même d'achever maintenant le calcul des termes de seconde approximation de l'équation générale du mouvement.

Comme on a très sensiblement  $x = 1 + 3\eta$ , qu'on s'en tient aux termes du premier ordre et qu'on peut estimer ces termes en usant des valeurs de première approximation de  $U'$  et de  $h$ , l'ensemble de ces termes s'écrit :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\omega(\omega - U_o) \left(4\eta_1 + \frac{\sqrt{gH}}{U_o + \sqrt{gH}}\right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{h^2}{H} \\ &+ U_o H (U_o - \omega) \frac{\partial \eta}{\partial x}.\end{aligned}$$

Or  $\frac{\partial \eta}{\partial x} = c \frac{\partial A}{\partial x} + d \frac{\partial B}{\partial x}$ ,

$$A = \frac{k^2}{30g} \frac{\omega}{U_o} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} k\sqrt{B_o} \\ + (10 + 6k\sqrt{B_o}) \frac{\sqrt{gH}}{U_o + \sqrt{gH}} \\ - 5 \left(1 + \frac{k}{3}\sqrt{B_o}\right) \frac{\sqrt{gH}}{U_o} \end{array} \right\} \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$B = \frac{k^2 \sqrt{B_o}}{15g} \omega \left( \frac{3}{U_o + \sqrt{gH}} - \frac{1}{U_o} \right) \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Posons :  $U_o^2 = \lambda^2 g H$ ;

$$m' = 2\gamma_{tt} + \frac{1}{2(\lambda+1)};$$

$$n = \frac{k^2}{15g} \left\{ \begin{array}{l} c \left[ \frac{1}{3} k \sqrt{B_o} + (5 + 3k \sqrt{B_o}) \frac{1}{\lambda+1} \right] \\ - \frac{5}{2\lambda} \left( 1 + \frac{k}{3} \sqrt{B_o} \right) \end{array} \right\} + dk \sqrt{B_o} \frac{2\lambda-1}{\lambda+1}$$

Les termes de seconde approximation prendront la forme

$$\omega(\omega - U_o) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ m \frac{h^2}{H} + nH \frac{\partial h}{\partial x} \right\}.$$

Nous aurons donc enfin comme équation complète du mouvement :

$$\left. \begin{array}{l} g \frac{\partial h}{\partial x} + (2x_t - 1 - \gamma_{tt}) U_o \frac{\partial U'}{\partial x} + (1 + 2\gamma_{tt}) \frac{\partial U'}{\partial t} \\ - (\alpha - 1 - 2\gamma_{tt}) \frac{U_o}{H} \frac{\partial h}{\partial t} + \omega(\omega - U_o) \frac{\partial}{\partial x} \\ \left\{ m \frac{h^2}{H^2} + n \frac{\partial h}{\partial x} \right\} = 0, \end{array} \right\} \quad (21)$$

et nous devons lui adjoindre l'équation de continuité complétée par les termes de seconde approximation

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial U'}{\partial x} + U_o \frac{\partial h}{\partial x} + (\omega - U_o) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^2}{H} \right) = 0. \quad (22)$$

Éliminons  $U'$  entre ces équations (21) et (22). A cet effet dérivons la première par rapport à  $x$ , la seconde

successivement par rapport à  $x$  et à  $t$ ; puis multiplions les équations obtenues respectivement par  $H$ ,

$$-(2z_1 - 1 - \tau_{11})U_o, \quad -(1 + 2\tau_{11})$$

et ajoutons-les membre à membre. Il vient, en remplaçant la dérivation par rapport à  $t$  du dernier terme

de (22) par l'opération  $-\omega \frac{\partial}{\partial x}$ :

$$\left. \begin{aligned} & [gH - (2z_1 - 1 - \tau_{11})U_o] \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ & - U_o(3z_1 - 1 - \tau_{11}) \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} - (1 + 2\tau_{11}) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \\ & + \omega(\omega - U_o) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( m_1 \frac{h^2}{H} + nH \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

en posant :

$$m_1 = m + 1 + 2\tau_{11} - (2z_1 - 1 - \tau_{11}) \frac{U_o}{U_o + \sqrt{gH}}.$$

L'équation (23) s'intégrera en introduisant les vitesses de propagation  $\Omega$  des diverses parties de l'intumescence, comme on l'a fait dans l'étude de l'onde solitaire.

Soit  $\Omega$  la vitesse (fictive) d'une section se transportant d'un instant à l'autre le long du canal, de manière à avoir devant elle constamment un même volume d'intumescence. Elle satisfait, comme on sait, à la relation

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\Omega)}{\partial x} = 0,$$

en sorte que, si l'on remplace dans l'équation (23)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad \text{par} \quad -\frac{\partial^2(h\Omega)}{\partial x \partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \quad \text{par} \quad -\frac{\partial^2(h\Omega)}{\partial x^2},$$

cette équation peut être intégrée par rapport à  $x$ . Il vient :

$$\left. \begin{aligned} & [gH - (2z_1 - 1 - \gamma_1)U_0] \frac{\partial h}{\partial x} \\ & + (3z_1 - 1 - \gamma_1)U_0 \frac{\partial(h\Omega)}{\partial x} + (1 + 2\gamma_1) \frac{\partial(h\Omega)}{\partial t} \\ & + \omega(\omega - U_0) \frac{\partial}{\partial x} \left[ m_1 \frac{h^2}{H} + nH \frac{\partial h}{\partial x} \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

La constante additive arbitraire se réduit à zéro ; car, aux endroits du canal où l'onde n'est pas encore parvenue,  $h$  et ses dérivées sont nuls, et par suite l'expression intégrée doit l'être aussi.

Cette équation peut être transformée. Posons en effet :  $\Psi = h(\Omega - \omega) - M\omega \left( m_1 \frac{h^2}{H} + nH \frac{\partial h}{\partial x} \right)$ , avec  $M = \frac{\omega - U_0}{2\omega - \frac{1 + \gamma_1 - 3z_1}{1 + 2\gamma_1} U_0}$ .

Dérivons cette expression  $\Psi$  par rapport à  $t$ , en notant que le dernier terme est assez petit pour qu'on puisse, sauf erreur négligeable, remplacer sa dérivation par l'opération  $-\omega \frac{\partial}{\partial x}$ ; remplaçons dans le résultat  $\frac{\partial h}{\partial t}$  par  $-\frac{\partial(h\Omega)}{\partial x}$  et  $\frac{\partial(h\Omega)}{\partial t}$  par sa valeur tirée de (24). Dérivons aussi  $\Psi$  par rapport à  $x$  et formons l'expression

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \left[ \omega - \frac{1 + \gamma_1 - 3z_1}{1 + 2\gamma_1} U_0 \right] \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

On reconnaît, par un calcul bien simple, que, eu

égard à l'équation caractéristique dont  $\omega$  est racine, cette expression est identiquement nulle.

S'il s'agit d'ondes descendantes,  $\omega = \omega_1$  et la parenthèse coïncide avec  $-\omega_2$ ; comme on a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \omega_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0,$$

$\Psi$  est une fonction de  $x - \omega_2 t$ .

S'il s'agit d'ondes ascendantes,  $\omega = \omega_2$ ; la parenthèse n'est autre que  $-\omega_1$ , et alors  $\Psi$  est fonction de  $x - \omega_1 t$ .

Avec les conventions faites, lors de l'étude de première approximation, sur la position de l'origine de  $x$ , et sur la région où l'on étudie le mouvement, on a identiquement, dans l'un et l'autre cas,  $\Psi = 0$ .

Ainsi

$$\Omega = \omega \left\{ 1 + M \left( m_1 \frac{h}{H} + n \frac{H}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right\}. \quad (25)$$

Cette formule permet d'étudier la marche des parties peu courbes d'une onde ou d'un remous, pour les-  
quelles  $\frac{\partial h}{\partial x}$  est négligeable; — de chercher la vitesse de propagation, à un instant donné, du centre de gravité d'une intumescence; — d'aborder divers problèmes qualitatifs analogues à ceux que nous avons examinés à propos de l'onde solitaire.

### 5. Mouvement graduellement varié qui se produit près de l'entrée évasée d'un tuyau de conduite.<sup>1</sup> — Envisageons le mouvement permanent

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 19, broch., p. 49-71. — M.-G. GRANDJEAN,  
*passim*.

graduellement varié qui se produit dans la partie amont d'un long tuyau rectiligne à section circulaire constante, après le mouvement à filets épanouis qui suit la contraction de l'entrée, et qui amène le régime uniforme régnant ensuite sur le reste de la longueur du tuyau. Pour plus de simplicité même, nous supposons que l'entrée soit assez bien évasée pour que la contraction s'y fasse entièrement, sans épanouissement ultérieur. Les filets fluides seront plus sensiblement rectilignes et parallèles dès la première section de la partie cylindrique du tuyau.

Dans ce mouvement,  $\sigma$ ,  $\chi$ ,  $U$  sont constants. Les termes qui prédominaient tout à l'heure disparaissent et laissent leur influence à des termes plus complexes antérieurement négligeables.

Les formules du chapitre II subsistent, il est vrai, jusqu'à (15); mais elles ne contiennent plus les termes que la théorie du régime uniforme permettait d'estimer. Notamment la formule générale (15) qui sert à définir le mouvement longitudinal se réduit à

$$I = bU^2 \frac{\chi}{\sigma} + \frac{U^2}{g} \frac{\partial(\alpha - \eta)}{\partial x}.$$

Revenons au calcul des vitesses transversales. Posons :

$$v = \frac{\sigma}{\chi} UL, \quad w = \frac{\sigma}{\chi} UM,$$

prenant L et M comme fonctions inconnues. Comme  $v$  et  $w$ , par suite de la symétrie du régime, sont respectivement les produits par  $y$  et par  $z$  d'une même fonction de  $x$  et de  $r$ , elles sont les dérivées partielles par rapport à  $y$  et à  $z$ , ou à  $\eta$  et à  $\zeta$  d'une même fonction

de  $x$  et de  $\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$ , fonction que nous prendrons sous la forme  $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ ,  $\Omega$  dépendant de  $x$  et de  $\tau$ .

$$\text{Ainsi : } L = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial \eta}, \quad M = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial \zeta}. \quad (26)$$

Sans changer  $L$  et  $M$ , on peut ajouter à  $\Omega$  une fonction arbitraire de  $\eta$  et  $\zeta$ : nous choisirons cette fonction arbitraire de manière que dans la première section  $x=0$ , où la valeur de  $\tau$  sera censée donnée, on ait :

$$\Delta \Omega + \tau = 0, \quad \frac{d\Omega}{dy} = 0 \quad (\text{sur le contour}). \quad (27)$$

L'équation de continuité, sous la forme (13), et la condition (8) deviennent, eu égard à ces valeurs (26) de  $L$  et de  $M$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Delta \Omega + \tau) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{d\Omega}{dy} \right) = 0 \quad (\text{sur le contour}).$$

Il en résulte que les équations (27), vérifiées dans une section, seront vérifiées dans toutes les sections. Si donc on connaît  $\tau(\tau)$  dans une section,  $\Omega$  sera défini par les équations (27), à une fonction additive près de  $x$ .

L'expression de l'accélération longitudinale  $u'$  comprend maintenant un terme  $U^2 \varphi \frac{\partial \tau}{\partial x}$ , antérieurement négligé (p. 324); elle s'écrit :

$$u' = U \left( v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + U^2 \varphi \frac{\partial \tau}{\partial x},$$

ou encore, en observant que  $\varphi$  ne dépend pas de  $x$  :

$$u' = U^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} - \varphi \Delta \Omega \right\}.$$

Substituons à  $\varphi$  sa valeur :

$$\varphi = 1 + \frac{k\sqrt{B_o}}{1 + k\sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1} (F_1 - \mathfrak{M} F_1);$$

notons que  $F_1$  et  $\Omega$  ne dépendent de  $\eta$  et de  $\zeta$  que par l'intermédiaire de  $\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$ , en sorte que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} = \frac{1}{4} \frac{\partial F_1}{\partial \tau} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau};$$

nous obtiendrons :

$$u' = - \frac{k\sqrt{B_o} U^2}{1 + k\sqrt{B_o} \mathfrak{M} F_1} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{1}{k\sqrt{B_o}} + F_1 \right) \Delta \Omega - \frac{1}{4} \frac{\partial F_1}{\partial \tau} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} \right\}. \quad (28)$$

Nous allons porter cette valeur de  $u'$  dans l'équation  $\frac{\partial}{\partial \eta} \left( F \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( F \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} \right) = u' - \mathfrak{M} u'$ ,

soit, puisque  $F = \frac{1}{\tau}$  et que  $F_2$  ne dépend que de  $\tau$  :

$$\frac{1}{4\tau} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \tau^2} = u' - \mathfrak{M} u', \quad (29)$$

équation à laquelle il faut joindre les conditions

$$\frac{\partial F_2}{\partial r} = 0, \quad F_2 = 1 \text{ pour } \tau = 1.$$

Comme  $\mathfrak{M} u'$  ne dépend que de  $x$  et de  $t$ , l'équa-

tion (29) entraîne  $\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{4\tau} \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} - u' \right] = 0$ . (30)

Inversement cette équation (30), jointe à la condition  $\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0$  pour  $z = 1$ , équivaut à (29); car son intégration donne :  $\frac{1}{4\tau} \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} - u' = \mathcal{F}(x, t)$ , et en prenant la moyenne des deux membres à travers toute la section, on obtient  $\mathcal{F} = -\mathfrak{M} u'$ .

C'est dans cette équation (30), que nous remplacerons  $u'$  par la valeur calculée (28). Nous y remplacerons aussi  $F_2$  par son expression en fonction de  $\Omega$  et de  $F_1$  que nous allons former.

Soient  $\varphi_o$  et  $\varpi_o$  les valeurs de  $\varphi$  et de  $\varpi$  sur le contour; nous avons :

$$\frac{u}{u_o} = \frac{\varphi + \varpi}{\varphi_o + \varpi_o} = 1 + k\sqrt{B_o} F_1 + \frac{k}{g\sqrt{B_o} u_o^2} \frac{\sigma}{\chi} F_2;$$

nous en déduisons pour le cas du régime uniforme :

$$\frac{\varphi}{\varphi_o} = 1 + k\sqrt{B_o} F_1.$$

Par différence, il vient :

$$\frac{k}{g\sqrt{B_o} u_o^2} \frac{\sigma}{\chi} F_2 = \frac{1}{\varphi_o + \varpi_o} \left\{ \varpi - \varpi_o \frac{\varphi}{\varphi_o} \right\}.$$

Remplaçons  $\frac{\varphi}{\varphi_o}$  par sa précédente expression,  $\varpi$  par  $-\Delta\Omega$  (en vertu de 27),  $\varphi_o + \varpi_o$  par  $\frac{u_o}{u}$ . Nous obtenons :

$$\frac{k}{g\sqrt{B_o} u_o U} \frac{\sigma}{\chi} F_2 = -\{\Delta\Omega + \varpi_o (1 + k\sqrt{B_o} F_1)\}.$$

Nous pouvons très sensiblement y remplacer le facteur  $u_o$  par sa valeur de régime uniforme, ce qui donne

$$\begin{aligned} F_2 = & - \frac{g\sqrt{B_o} U^2}{k(1 + k\sqrt{B_o} M F_1)} \\ & \times \frac{\zeta}{\sigma} [\Delta\Omega + \sigma_o (1 + k\sqrt{B_o} F_1)]. \end{aligned} \quad (31)$$

Substituons enfin dans l'équation (30) les valeurs (28) et (31) de  $u'$  et de  $F_2$ , en notant que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_1}{d\zeta^2} = & -4\zeta : \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{g}{k^2} \cdot \frac{1}{2R\zeta} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} [\Delta\Omega] \right. \\ & \left. - \left( \frac{1}{k\sqrt{B_o}} + F_1 \right) \frac{\partial \Delta\Omega}{\partial x} + \frac{1}{4\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Nous obtenons ainsi une équation aux dérivées partielles en  $\Omega$ , du cinquième ordre par rapport à  $\zeta$ .

A cette équation indéfinie, nous devons adjoindre certaines conditions aux limites.

Tout d'abord, au contour, nous devons avoir

$$\frac{\partial F_2}{\partial \zeta} = 0;$$

$F_2$  étant donné par la relation (31),  $F_1$  étant

$$\frac{2}{3} (1 - \zeta^3)$$

et la valeur  $\sigma_o$  de  $\sigma$  au contour valant —  $\Delta\Omega$  d'après (27), nous aurons donc la condition

$$\frac{\partial \Delta\Omega}{\partial \zeta} + 2k\sqrt{B_o} \Delta\Omega = 0 \text{ pour } \zeta = 1. \quad (33)$$

En second lieu, d'après la seconde équation (27), nous devons aussi avoir :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = 0 \quad \text{pour } \tau = 1. \quad (34)$$

Enfin, comme par raison de symétrie et de continuité, les fonctions  $\Omega$  et  $-\tau - \Delta\Omega$  seront maxima ou minima au centre de chaque section, nous aurons :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \Delta\Omega}{\partial \tau} = 0 \quad \text{pour } \tau = 0. \quad (35)$$

La fonction  $F_2$  s'annulera identiquement à la paroi, comme on le voit sur l'avant-dernière expression de cette fonction,  $\tau \varphi_0 - \tau_0 \varphi$  s'annulant au contour.

Nous allons satisfaire aux équations (32), (33), (34), (35) en prenant une somme de solutions simples dont chacune sera le produit d'une constante  $C$  par une exponentielle décroissant quand  $x$  croît et où figurera un coefficient positif d'extinction  $m$  constant, et par une fonction  $\Omega_1$  de  $\tau$  seul.

Autrement dit, nous poserons :

$$\Omega = \sum C e^{-m \frac{\rho}{k^2} \frac{R^2}{R^2 - x}} \Omega_1.$$

En exprimant que chaque terme de cette somme satisfait à l'équation (32), nous obtiendrons, pour déterminer la fonction  $\Omega_1$  correspondant à une valeur donnée de  $m$ , l'équation différentielle ordinaire du cinquième ordre :

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{1}{4\tau} \frac{d^2}{d\tau^2} (\Delta\Omega_1) + m \left[ \frac{\Delta\Omega_1}{k\sqrt{B_0}} + F_1 \Delta\Omega_1 - \frac{1}{4\tau} \frac{dF_1}{d\tau} \frac{d\Omega_1}{d\tau} \right] \right\} = 0. \quad (36)$$

C'est une équation linéaire, sans second membre, à coefficients variables.

On en déterminera une solution particulière vérifiant les trois conditions

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{d\tau} &= 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\Delta\Omega_1}{d\tau} = 0, \quad \text{pour } \tau = 0, \\ \frac{d\Omega_1}{d\tau} &= 0, \quad \text{pour } \tau = 1; \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

puis on déterminera  $m$  comme racine, astreinte à être positive, de l'équation transcendante :

$$\frac{d\Omega_1}{dz} - 2k\sqrt{B_o}\Delta\Omega_1 = 0, \quad \text{ou} \quad z=1. \quad (38)$$

En fin de compte, c'est le mode de distribution des vitesses qu'il nous est utile de connaître ; il est défini

$$\text{par } \frac{u}{U} = \varphi + \tau = \varphi - \Delta\Omega,$$

$$\text{c'est-à-dire par } \frac{u}{U} = \varphi - \sum C e^{-m \frac{g}{k^2} \frac{2}{R} x} \Delta \Omega_1. \quad (39)$$

Les coefficients  $C$  sont encore indéterminés, et il nous reste à exprimer que, sur une section initiale,  $x=0$  par exemple, la fonction  $\varpi$  prend des valeurs  $\varpi_i(z)$  données à travers toute la section  $\sigma$ . Les constantes  $C$  devront donc être choisies de manière que l'on ait :

$$\varpi_i + \sum C\Delta\Omega_i = 0.$$

Comme on ne peut effectivement prendre, dans cette somme, ordonnée suivant les racines  $m$  croissantes, qu'un nombre fini de termes, on devra tolérer des écarts  $\varpi_i + \sum C\Delta\Omega_i$ ; seulement on s'imposera de rendre

minima la moyenne de leurs carrés aux divers points de la section. Cela revient à rendre minima l'intégrale

$$\int_{\sigma} (\bar{\omega}_i + \sum C \Delta \Omega_i)^2 d\sigma.$$

« Il est clair que, à la limite où le nombre  $n$  des termes deviendrait infini et où la somme  $\sum C \Delta \Omega$  serait susceptible d'exprimer la fonction donnée —  $\bar{\omega}_i$ , l'intégrale précédente admettrait la valeur minima zéro, que donne l'égalité alors possible  $\sum C \Delta \Omega_i = -\bar{\omega}_i$  annulant chacun de ses éléments; en sorte que la recherche de cette valeur minima fournirait les vrais coefficients  $C$ . Il semble que si on détermine les coefficients  $C$ , même quand  $n$  est fini, par cette même condition de minimum, ils doivent bien tendre vers leurs vraies valeurs limites à mesure que leur nombre s'accroît. »

En exprimant ainsi que la somme des carrés des erreurs commises sur la valeur de  $\bar{\omega}_i$  dans les divers éléments (équivalents) de l'aire  $\sigma$  est minima par l'annulation des dérivées de l'intégrale par rapport aux paramètres  $C$  à déterminer, on obtient, s'il y a  $n$  solutions particulières, le système de  $n$  équations linéaires :

$$\sum C_j \int \Delta \Omega \Delta \Omega_j d\sigma = - \int \bar{\omega} \Delta \Omega_j d\sigma;$$

$\Delta \Omega_j$  désigne la partie de  $\Delta \Omega$  qui correspond à la  $j^{\text{ème}}$  racine de l'équation transcendante en  $m$ .

Revenons à l'expression (39) de  $\frac{u}{U}$ . Quand  $x$  croît, les termes de la somme s'évanouissent successivement, à commencer par les plus éloignés. A une distance de l'entrée égale à un nombre assez faible de rayons moyens, il ne subsiste guère, comme influent, que le

premier terme de la somme, correspondant à la plus petite racine positive de l'équation (38) :  $\tau$ , dans chaque section, variera alors proportionnellement à l'expression correspondante de  $\Delta\Omega$ .

Abordons maintenant le détail du calcul. Nous prendrons comme inconnue auxiliaire :

$$\Psi = \frac{1}{4\tau} \frac{d\Omega_1}{d\tau}; \quad (40)$$

nous aurons alors :

$$\Delta\Omega_1 = \frac{1}{\tau} \frac{d\Psi}{d\tau} = \frac{\Psi'}{\tau}. \quad (41)$$

L'équation (36), divisée par  $m$ , devient, après quelques calculs simples de remplacement de  $F_1$  par  $\frac{2}{3}(1 - \tau^3)$ , de  $\frac{d\Omega_1}{d\tau}$  et de  $\Delta\Omega$ , par leurs expressions en fonction de  $\Psi'$ , enfin de

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k\sqrt{B_o}} \text{ par } \frac{1}{k\sqrt{b}} - \frac{2}{5}: \\ & \frac{1}{4m} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{1}{\tau} \frac{d^2}{d\tau^2} \left( \frac{\Psi'}{\tau} \right) \right] \\ & + \left[ \frac{1}{k\sqrt{b}} + \frac{2}{3} \left( \frac{2}{5} - \tau^3 \right) \right] \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\Psi'}{\tau} \right) + 2\Psi = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Quant aux conditions définies, elles prennent les formes suivantes :

$$\begin{cases} \Psi(0) = 0, \quad \Psi(1) = 0, \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\Psi'}{\tau} \right) = 0 \quad \text{pour } \tau = 0, \\ \frac{1}{2k\sqrt{B_o}} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\Psi'}{\tau} \right) + \frac{\Psi'}{\tau} = 0 \quad \text{pour } \tau = 1. \end{cases} \quad (43)$$

Cherchons à satisfaire formellement à ces équations en prenant pour  $\Psi(\varepsilon)$  une série de puissances de  $\varepsilon$ .

D'après la première équation (43), ce développement ne contiendra pas de terme indépendant de  $\varepsilon$ .

La valeur (41) de  $\Delta\Omega$  devant restée finie au centre de la section, où  $\varepsilon = 0$ ,  $\Psi$  ne saurait contenir de terme du premier degré en  $\varepsilon$ .

Il n'y aura pas davantage dans  $\Psi$  de terme en  $\varepsilon^3$ , à cause de la troisième condition (43), ni de terme en  $\varepsilon^4$  qui donnerait dans le premier membre de (42) un terme irréductible avec aucun autre.

Les premiers termes du développement seront donc un terme en  $\varepsilon^2$  et un terme en  $\varepsilon^5$ .

Les exposants des termes suivants seront 8, 11, 14... ; car un terme en  $r^\alpha$ , substitué dans (42), engendre trois termes en  $r^{\alpha-6}$ ,  $r^{\alpha-3}$ ,  $r^\alpha$ , à coefficients différents de zéro pour  $\alpha > 5$  et dont les deux premiers ne pourront se réduire qu'avec d'autres issus de même des deux termes de  $\Psi$  où  $\alpha$  était moindre soit de 3, soit de 6 unités. Par suite, la différence des divers exposants  $\alpha$  est toujours un multiple de 3.

Comme  $\Psi$  n'est déterminé qu'à un facteur constant près, nous prendrons — 1 pour second coefficient, et écrirons :

$$\Psi(r) = A\varepsilon^2 - \varepsilon^5 + A_8\varepsilon^8 - A_{11}\varepsilon^{11} + A_{14}\varepsilon^{14} - \dots \quad (44)$$

Par substitution dans (42) et identification, on est conduit à une loi de récurrence qu'on met aisément sous la forme :

$$A_{3(n+2)+2} = \frac{4m}{3(n+2)[3(n+2)+2]}$$

$$\left\{ \frac{2(3n-1)}{3(3n+5)} A_{3n+2} + \left( \frac{1}{k\sqrt{b}} + \frac{4}{15} \right) A_{3(n+1)+2} \right\}.$$

Cette relation fournira les coefficients de  $\Psi'$  de proche en proche, en fonction de  $A$ .

Quant à  $A$ , il sera donné par la condition  $\Psi'(1)=0$ , soit par la relation

$$A = 1 - A_8 + A_{11} - A_{14} + \dots$$

M. Grandjean a démontré que la série  $\Psi'$  est convergente, et même absolument convergente.

La quantité  $m$  est alors fournie par la dernière des équations (43). Le développement de cette équation serait très compliqué. M. Grandjean a cependant explicité le premier membre sous forme de série double.

Nous ne ferons la recherche effective des racines  $m$  que dans le cas d'une paroi assez polie, ou, plus précisément, d'une valeur de  $b$  assez petite pour que, dans l'équation (42), le coefficient du second terme soit réductible à sa valeur moyenne inverse de  $\sqrt{b}$ , alors grande comparativement à son écart (variable entre

$\frac{4}{15}$  et  $-\frac{2}{5}$ ) d'avec cette moyenne.

Le troisième terme  $2\Psi'$  de l'équation (42) se trouve alors encore plus négligeable que la petite partie supprimée du terme en  $\frac{d}{dz}\left(\frac{\Psi'}{z}\right)$ ; car  $\Psi'$  s'annulant aux deux limites  $z=0$ ,  $z=1$ , est, en moyenne, dans l'intervalle, au plus de l'ordre de grandeur de sa dérivée première  $\Psi''$ , qui, tenue elle-même de s'y annuler

une fois, y est à peine comparable à sa dérivée  $\Psi''$ .  
Donc  $2\Psi$  disparaîtra devant le terme négligé en

$$\tau^3 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\Psi'}{\tau} \right).$$

Posons alors :

$$\Psi_1 = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\Psi'}{\tau} \right); \quad K = \frac{4m}{k\sqrt{b}}. \quad (45)$$

L'équation indéfinie (42) se transforme en

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\tau} \frac{d\Psi_1}{d\tau} \right) + K\Psi_1 = 0. \quad (46)$$

C'est une équation du second ordre dont l'intégration se ramènerait aisément à la recherche d'une intégrale particulière d'une équation de Riccati et à des quadratures.

Portons dans cette équation (46) le développement en série de la fonction  $\Psi_1$  déduit, par l'opération indiquée (45), du développement (44) de  $\Psi$ , soit :

$$\Psi_1 = -3.5\tau^2 + 6.8A_8\tau^5 - 9.11A_{11}\tau^8 + \dots$$

L'identification en  $\tau$  détermine de suite les coefficients successifs  $A_8, A_{11}, \dots$  et l'on est ainsi conduit à :

$$\begin{aligned} \Psi &= A\tau^2 - \tau^5 + \frac{K\tau^8}{6.8} - \frac{K^2\tau^{11}}{6.8.9.11} \\ &+ \frac{K^3\tau^{14}}{6.8.9.11.12.14} - \frac{K^4\tau^{17}}{6.8.9.11.12.14.15.17} + \dots \end{aligned}$$

En exprimant que  $\Psi(1) = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{K}{6.8} + \frac{K^2}{6.8.9.11} \\ &- \frac{K^3}{6.8.9.11.12.14} + \dots \end{aligned}$$

L'équation qui doit fournir les valeurs de  $m$  se forme alors de suite ; c'est :

$$\frac{1}{2k\sqrt{B_o}} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\Psi'}{\tau} \right) + \frac{\Psi'}{\tau} = 0 \quad \text{pour } \tau = 1,$$

soit :

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{K}{3.5} + \frac{K^2}{6.8.9.11} - \frac{K^3}{6.8.9.11.12.14} \\ + \frac{2k\sqrt{B_o}}{5} \left( 1 - \frac{2K}{6.8} + \frac{3K^2}{6.8.9.11} - \dots \right) \end{aligned} \right\} = 0, \quad (47)$$

ou encore, en désignant par  $f(K)$  la série figurant à la première ligne :

$$f(K) - 6k\sqrt{B_o} f(K) = 0.$$

Dans le cas des expériences d'H. Bazin, on a :

$$b = 0,000166, \quad \sqrt{B_o} = 0,0175, \quad k\sqrt{B_o} = 0,851$$

L'équation numérique (47) admet alors pour la première racine  $K_1 = 29,995$ , soit 30 ; pour seconde racine  $K_2 = 100,805$ , soit 100.

Les valeurs correspondantes de  $m$  sont :

$$m_1 = 4,7; \quad m_2 = 15,8.$$

Les exposants  $-m \frac{g}{k^2} \frac{2}{R} x$  ont donc les valeurs successives  $-0,0390 \frac{x}{R}; \quad -0,1312 \frac{x}{R}$ .

Les développements correspondants  $\Delta\Omega$ , ou  $\frac{1}{\tau} \Psi'(\tau)$ , se calculent facilement. M. Grandjean a trouvé :

$$\begin{aligned} \Delta\Omega_1 = 1,0686 - 5\tau^3 + 4,9991\tau^6 - 2,0826\tau^9 \\ + 0,4732\tau^{12} - 0,0675\tau^{15} + 0,0066\tau^{18} - 0,0004\tau^{21} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\Omega = & 0,2916 - 5 \tau^3 + 16,8008 \tau^6 - 23,5223 \tau^9 \\ & + 17,9634 \tau^{12} - 8,6228 \tau^{15} + 2,8406 \tau^{18} - 0,6817 \tau^{21} \\ & + 0,1245 \tau^{24} - 0,0179 \tau^{27} + 0,0021 \tau^{30} \\ & - 0,0002 \tau^{33} + \dots\end{aligned}$$

En appliquant la méthode des moindres carrés, comme nous l'avons expliqué, à la recherche des coefficients  $C$ , un calcul très pénible conduit à

$$C_1 = 0,20199 \quad C_2 = -0,25311.$$

Finalement, la série des solutions simples qui définit  $\varpi$ , limitée à ses deux premiers termes, donnera :

$$\begin{aligned}-\varpi = & 0,20199 e^{-0,0390 \frac{x}{R}} \Delta\Omega_1 \\ & - 0,25311 e^{-0,1311 \frac{x}{R}} \Delta\Omega_2.\end{aligned}$$

**6. Établissement approché du régime uniforme dans un tuyau de conduite. Confrontation de la théorie avec l'expérience<sup>1</sup>.** — Le résultat auquel nous venons d'aboutir permet de calculer la longueur nécessaire pour l'établissement approché du régime uniforme dans un tuyau lisse.

Quand  $\tau$  varie de 0 à 1 : 1<sup>o</sup>  $\Delta\Omega_2$  décroît de 0,2916 jusqu'à un certain minimum négatif égal à environ - 0,1 ; il croît ensuite jusqu'à 0,1780 : la plus grande valeur absolue du coefficient de la seconde exponentielle, dans l'expression de  $-\varpi$ , est par suite 0,074 ; 2<sup>o</sup>  $\Delta\Omega_1$  décroît de 1,0686 à - 0,603 : la plus grande valeur absolue du coefficient de la première exponentielle vaut alors 0,2159.

<sup>1</sup> J. BOUSSINESQ, 19, 9<sup>e</sup> note ; broch., p. 69. — M.-G. GRANDJEAN, p. 54-57. — H. BAZIN, 4, p. 14 et suiv.

Dès que  $x$  sera supérieur à  $18R$ , la seconde exponentielle sera moindre que  $0,1$  et le second terme de  $-\varpi$  sera inférieur à  $0,007$  : le négliger n'entraînera qu'une erreur insignifiante.

Supposons cette condition réalisée. Les valeurs initiales  $\varpi_i$  dans les expériences d'H. Bazin ne dépassant guère  $0,1$  et atteignant tout au plus  $0,15$ , nous regarderons le régime uniforme comme établi lorsque l'écart  $\varpi$  dû à la non-uniformité sera partout inférieur à  $0,01$ . Il en sera ainsi pour le premier terme dès qu'on aura :

$$0,2159 e^{-0,039 \frac{x}{R}} < 0,01, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{R} > 79.$$

Le dernier terme est alors absolument sans influence.

Ainsi le régime uniforme sera pratiquement établi après un parcours d'environ 40 diamètres, à partir de l'endroit où les filets fluides commencent à être sensiblement rectilignes et parallèles.

Si le tuyau n'est pas muni de la bouche parfaite-  
ment évasée que nous avons supposée, les filets fluides  
subiront vers l'entrée une convergence brusque suivie  
d'un épanouissement rapide avec frottement notable ;  
c'est là une singularité qui sera examinée dans un  
autre volume. Toutefois ce phénomène de contraction  
entraîne comme conséquence que le régime graduelle-  
ment varié ne s'établit qu'après un parcours égal à  
4 à 5 diamètres. Dès lors, l'établissement du régime  
uniforme dans un tuyau de conduite à parois polies  
demandera au maximum une longueur de 45 fois le  
diamètre du tuyau.

Cette conclusion est conforme aux observations de Bazin.

Dans les expériences déjà citées, faites sur un tuyau en ciment lissé de 80 mètres de longueur et de 0<sup>m</sup>,80 de diamètre, les vitesses des filets fluides furent mesurées à travers trois sections situées au quart, au milieu et aux trois quarts de la longueur. Ces vitesses coïncident aux points homologues des deux dernières sections, tandis qu'elles présentèrent un écart sensible dans la première. Le régime uniforme était donc établi après un parcours de 50 fois le diamètre, ce qui devait être d'après la théorie de M. Boussinesq.

Il y a plus : dans la première section d'abscisse

$$x = 20^m,50 = 51,25R,$$

les écarts  $\varpi$  observés coïncident sensiblement avec ceux qui résultent de l'application de la formule ci-dessus, pour des valeurs de  $\tau$  assez rapprochées. Le tableau ci-contre résume les résultats.

D'après l'expression théorique de  $\varpi$ , cet écart devrait s'annuler pour  $\tau = 0,659$  : l'expérience indique qu'il s'annule pour  $\tau = 0,60$  environ. C'est là une vérification très précise.

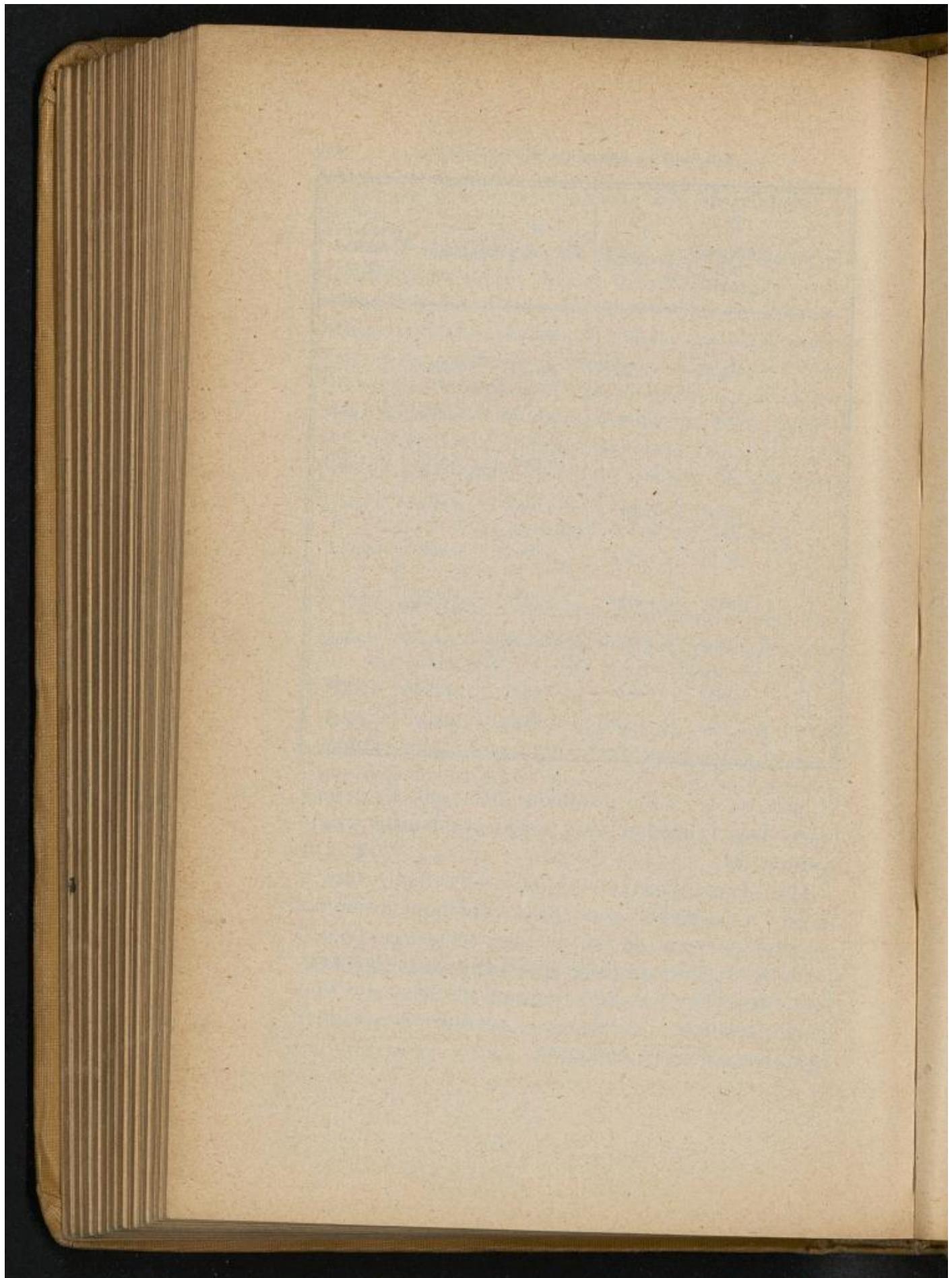
Les différences entre les valeurs calculées et observées de  $\varpi$  sont de l'ordre de grandeur des erreurs d'observation. De quelques millièmes à la paroi, l'écart prend sa plus grande valeur au centre où l'action régulatrice des parois se fait le moins sentir, et où cet écart n'atteint pas deux centièmes.

M. Grandjean a même pu justifier, par des considérations de physique expérimentale, la nécessité de ces différences (défaut de calibrage du tuyau ; degré

$\varepsilon = \frac{r}{R}$	$\frac{u}{U}$ (pour $x =$ 75 R ou 100 R).	$\frac{u}{U}$ (pour $x =$ 51, 25 R).	$-\varpi$ (observé).	$-\varpi$ (calculé).	Diffé- rence des valeurs de $\varpi$ .
0	1,1675	1,1205	0,0470	0,0292	-0,0178
$\frac{1}{8}$	1,1605	1,1190	0,0415	0,0290	-0,0125
$\frac{2}{8}$	1,1475	1,1065	0,0410	0,0271	-0,0139
$\frac{3}{8}$	1,1258	1,0970	0,0288	0,0224	-0,0064
$\frac{4}{8}$	1,0923	1,0825	0,0098	0,0142	+0,0044
$\frac{5}{8}$	1,0473	1,0570	-0,0097	0,0032	+0,0129
$\frac{6}{8}$	1,0008	1,0120	-0,0112	-0,0080	+0,0032
$\frac{7}{8}$	0,9220	0,9295	-0,0075	-0,0158	-0,0083
$\frac{15}{16}$	0,8465	0,8600	-0,0135	-0,0172	-0,0037
1	0,7415	0,7500	-0,0085	-0,0165	-0,0080

de poli de la paroi insuffisant pour que les termes omis dans l'équation (42) soient absolument négligeables, etc...).

Ainsi l'accord est tout à fait satisfaisant entre la théorie et la réalité. Mais, dans la pratique courante, on aura rarement des tuyaux de grandes sections à parois aussi polies que dans les expériences d'H. Bazin ; peut-être faudra-t-il alors pousser un peu plus loin l'approximation : c'est aux expérimentateurs qu'il appartient de nous renseigner.



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires

## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

BAZIN (H.).

1. *Recherches hydrauliques. 1<sup>re</sup> Partie : Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts* (Mémoires présentés par divers Savants étrangers à l'Académie des sciences, t. XIX, n° 1 ; 1865).
2. *Recherches hydrauliques. 2<sup>e</sup> Partie : Recherches expérimentales relatives aux remous et à la propagation des ondes* (Même recueil, t. XIX, n° 2 ; 1865).
3. *Expériences sur la propagation des ondes le long d'un cours d'eau torrentueux* (C. R. de l'Académie des sciences ; 15 juin 1885, t. C, p. 1492).
4. *Expériences nouvelles sur la distribution des vitesses dans les tuyaux* (Mémoires présentés par divers Savants étrangers à l'Académie des sciences, t. XXXII, n° 6 ; 1902).

BECQUEREL.

- Sur l'influence de la pression dans les phénomènes d'endosmose et d'exosmose* (C. R. de l'Académie des sciences, 8 juillet 1872, t. LXXV, p. 50).

BERNOULLI (Daniel).

- Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*; Argentorati, Strasbourg, 1738.

BERTIN (E.-L.).

1. *Étude sur la houle et le roulis* (Mémoires de la Société des Sciences naturelles de Cherbourg, 1869, t. XV).
2. *Notes sur la théorie et l'observation de la houle et du roulis* (Revue des Sociétés savantes, 2<sup>e</sup> série, t. V, 1870 ; p. 150-203).

BOUSSINESQ (J.).

1. *Théorie des phénomènes constatés par les expériences de M. Poiseuille* (C. R. de l'Académie des sciences, t. LXV, p. 46 ; 1<sup>er</sup> juillet 1867).

Hydraulique générale.

BOUSSINESQ (J.).

- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
2. *Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 2<sup>e</sup> série, t. XIII, 1868 ; p. 377 à 424).
3. *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, et dont l'amplitude est sensiblement pareille de la surface au fond* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XVII, 1872, p. 55-107 ; Résumé dans les C. R. de l'Académie : 19 juin 1871, t. LXXII, p. 755 ; — 24 juillet 1871, t. LXXIII, p. 256 ; — 13 novembre 1871, t. LXXIII, p. 1210 ; — Complété dans le Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XVIII, 1873, p. 55-107).
4. *Théorie des ondes liquides périodiques* (Mémoires présentés par divers Savants étrangers à l'Académie des sciences, t. XX, 1872 (pour 1869), p. 509-615).
5. *Essai théorique sur les lois trouvées expérimentalement par MM. Darcy et Bazin, pour l'écoulement uniforme de l'eau dans les canaux* (C. R. de l'Académie des sciences, t. LXXI, p. 389 ; 29 août 1870).
6. *Sur le mouvement permanent varié de l'eau dans les canaux découverts et dans les tuyaux de conduite* (C. R. de l'Académie des sciences, t. LXXIII, p. 34 et 101 ; 3 et 10 juillet 1871).
7. *De l'influence des forces centrifuges sur l'écoulement de l'eau dans les canaux prismatiques de grande largeur* (C. R. de l'Académie des sciences, t. LXXIV, p. 1026 ; 15 avril 1872).
8. *Essai sur la théorie des eaux courantes* (Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences, t. XXIII, n° 1, p. 1-680 ; 1877).
9. *Additions et éclaircissements au mémoire intitulé : Essai sur la théorie des eaux courantes* (Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences, t. XXIV, n° 2, p. 1-64 ; 1878).

BOUSSINESQ (J.).

10. Complément à une étude intitulée :  
*Essai sur la théorie des eaux courantes* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3<sup>e</sup> série, t. IV; p. 335-376; 1878).

11. Intégration de certaines équations aux dérivées partielles, par le moyen d'intégrales définies contenant sous le signe  $\int$  le produit de deux fonctions arbitraires (C. R. de l'Académie des sciences, t. XCIV, p. 33; 2 janvier 1882; — t. XCIV, p. 514; 20 février 1882).

12. Sur les ondes produites à la surface d'une eau tranquille par l'émission d'un solide (C. R. de l'Académie des sciences, t. XCIV, p. 71; 9 janvier 1882; — t. XCIV, p. 127; 16 janvier 1882; — t. XCIV, p. 1505; 5 juin 1882).

13. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, avec des notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'analyse (Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille; 4<sup>e</sup> série, t. XIII, 1885; 722 p.).

14. Théorie du mouvement permanent graduellement varié qui se produit près de l'entrée évasée d'un tube fin (C. R. de l'Académie des sciences; t. CX, p. 1160; 9 juin 1890; — t. CX, p. 1238; 16 juin 1890; — t. CXIII, p. 9; 6 juillet 1891; — t. CXIII, p. 49; 15 juillet 1891).

15. Théorie du mouvement permanent graduellement varié qui se produit près de l'entrée évasée d'un tuyau de conduite (C. R. de l'Académie des sciences, t. CX, p. 1292; 23 juin 1890).

16. Sur l'explication physique de la fluidité (C. R. de l'Académie des sciences, t. CXII, p. 1099; 18 mai 1891).

17. Sur la forme nécessairement pendulaire de la houle de mer, quant à l'expression des déplacements de chaque particule en fonction du temps (C. R. de l'Académie des sciences, t. CXX, p. 1240; 10 juin 1895; — t. CXX, p. 1310; 17 juin 1895).

BOUSSINESQ (J.).

- 18.** *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux dans les lits rectilignes à grande section. 1<sup>re</sup> Partie : Régime uniforme* (C. R. de l'Académie des sciences, t. CXII, p. 1289; 8 juin 1896; — t. CXII, p. 1369; 15 juin 1896; — t. CXII, p. 1445; 22 juin 1896; — t. CXII, p. 1517; 29 juin 1896; — t. CXIII, p. 7; 6 juillet 1896; — t. CXIII, p. 77; 13 juillet 1897; — t. CXXIII, p. 141; 24 juillet 1896). Ces notes ont été développées, annotées et réunies en une brochure. Paris, Gauthier-Villars, 1897, 64 p. in-4°.
- 19.** *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux dans les lits rectilignes à grande section. 2<sup>e</sup> Partie : Régimes graduellement variés* (C. R. de l'Académie des sciences, t. CXXIV, p. 1196; 31 mai 1897; — t. CXXIV, p. 1261, 7 juin 1897; — t. CXXIV, p. 1327; 14 juin 1897; — t. CXXIV, p. 1492; 28 juin 1897; — t. CXXV, p. 6; 5 juillet 1897; — t. CXXV, p. 69; 12 juillet 1897; — t. CXXV, p. 142; 19 juillet 1897; — t. CXXV, p. 203; 26 juillet 1897). Ces notes ont été développées, annotées et réunies en une brochure ; Paris, Gauthier-Villars, 1897, 76 p. in-4°.
- 20.** *Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources* (C. R. de l'Académie des sciences, t. CXXXVII, p. 5; 6 juillet 1903; — t. CXXXVII, p. 101; 13 juillet 1903; — t. CXXXVIII, p. 153; 20 juillet 1903; — t. CXXXVIII, p. 117; 18 janvier 1904). Ces Notes ont été développées dans un Mémoire inséré au Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5<sup>e</sup> série, t. X, 1904; p. 5-78.
- 21.** *Complément à un mémoire intitulé : Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources* (C. R. de l'Académie des sciences, t. CXXXIX, p. 387; 8 août 1904; — t. CXXXIX, p. 417; 16 août 1904; —

BOUSSINESQ (J.).

- t. CXXXIX, p. 441; 22 août 1904). Ces Notes ont été développées dans un Mémoire inséré au Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5<sup>e</sup> série, t. X, 1904; p. 363-394.
21. *Complément à un Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3<sup>e</sup> série, t. IV, 1878; p. 335-376).
22. *Leçons synthétiques de Mécanique générale* servant d'introduction au cours de Mécanique physique. Paris, Gauthier-Villars, 1889, in-8°.
23. *Cours d'Analyse infinitésimale*, en vue des applications mécaniques et physiques. Paris, Gauthier-Villars; 2 volumes in-8°, 1887-1890.
24. *Théorie analytique de la chaleur* mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. Paris, Gauthier-Villars; 2 volumes in-8°, 1901-1903.
25. *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*. Paris, 1879, Gauthier-Villars, in-8°.

BRILLOUIN (M.).

1. *Recherches récentes sur diverses questions d'Hydrodynamique. 1<sup>re</sup> Partie : Tourbillons* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1887). Ce travail a été aussi publié en brochure. Paris, Gauthier-Villars, 1891, in-4°.
2. *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. 1<sup>re</sup> Partie*. Paris, Gauthiers-Villars, 1907, in-8°.

BRUNHES (B.).

- Les lois de la filtration à travers les colonnes de sable, et les lois d'Ohm* (Journal de Physique théorique et appliquée, 4<sup>e</sup> série, t. V; mars 1907, p. 194-201).

BRUNHES (J.).

- Recherches expérimentales sur le passage des liquides à travers les substances perméables et les couches filtrantes*. Toulouse, Douladoure-Privat, 1881. (Mémoires de l'Académie des sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse, 1<sup>re</sup> série, 1881.)

CALIGNY (M<sup>is</sup> A. DE). *Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau et les machines hydrauliques à colonnes liquides oscillantes.* Versailles, 1880-83. in-8°. La première partie contient la reproduction de toutes les communications de l'auteur à l'Académie des sciences.)

CAUCHY (A.).

—

—

—

—

COUETTE (M.).

1. *De la pression ou tension dans un corps solide* (Exercices de Mathématiques, t. II, 1887; — reproduit dans les Œuvres complètes, 2<sup>e</sup> série, t. VII, p. 60-69. Paris, Gauthier-Villars, in-4°).

2. *Sur la condensation et la dilatation des corps solides* (Exercices de Mathématiques, t. II, 1827; reproduit dans les Œuvres complètes, 2<sup>e</sup> série, t. VIII, p. 82. Paris, Gauthier-Villars, in-4°).

3. *Sur les relations qui existent dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices* (Exercices de Mathématiques, t. II, 1827; reproduit dans les Œuvres complètes, 2<sup>e</sup> série, t. VII, p. 141. Paris, Gauthier-Villars, in-4°).

4. *Sur quelques théorèmes relatifs à la condensation et à la dilatation des corps* (Exercices de Mathématiques, t. III, 1828; reproduit dans les Œuvres complètes, 2<sup>e</sup> série, t. VIII, p. 278. Paris, Gauthier-Villars, in-4°).

5. *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur infinie; Mémoire couronné par l'Académie des sciences (concours de 1815)* [Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie des sciences, t. I, 1827; reproduit dans les Œuvres complètes, 1<sup>e</sup> série, t. I].

1. *Sur un nouvel appareil pour l'étude du mouvement des fluides* (C. R. de l'Académie des sciences, t. CVII, p. 388; 6 août 1888).

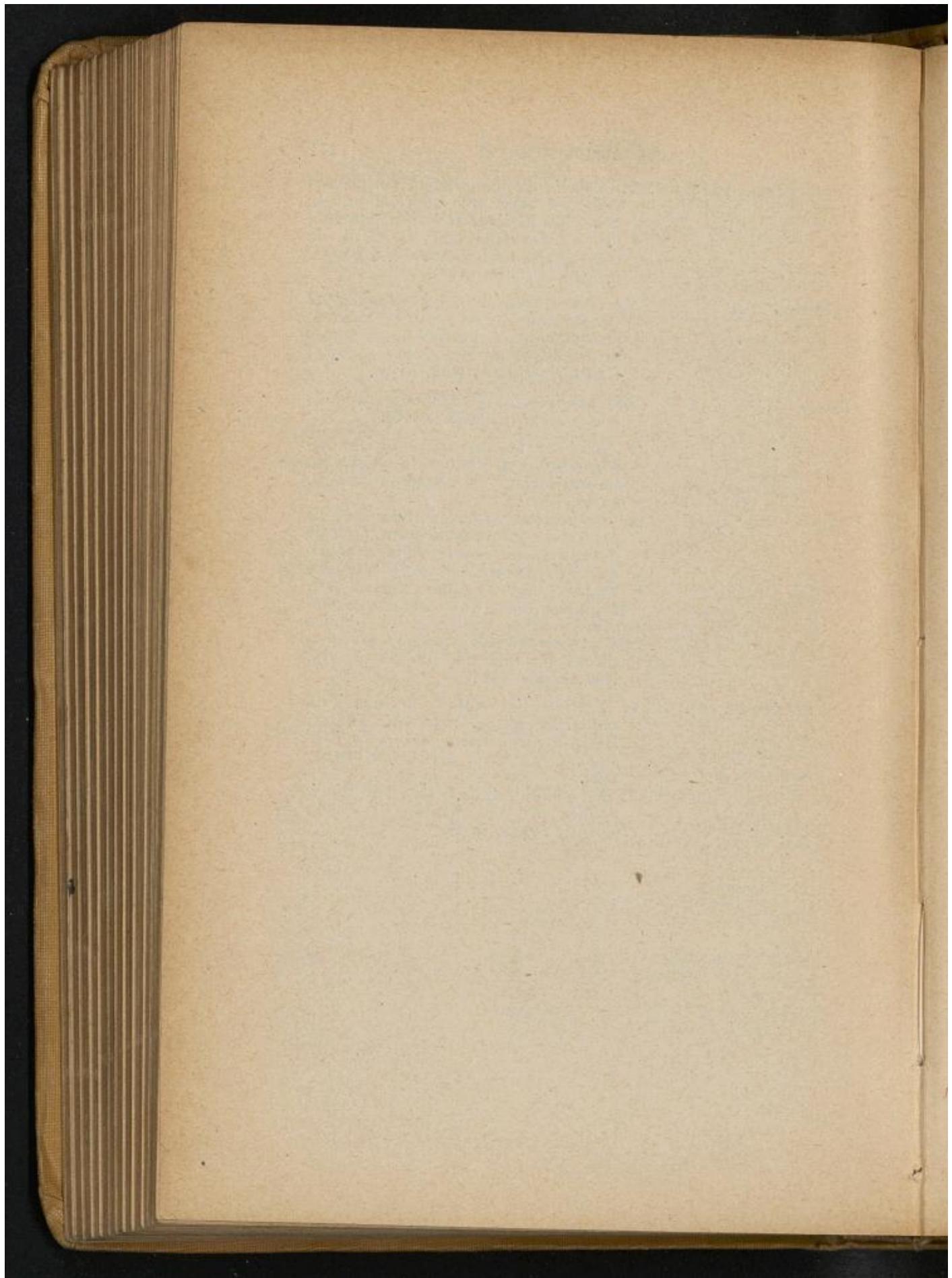
- COUETTE (M.).
- DARCY (H.).
- 
- DELEMER (J.).
- DUCLAUX (E.).
- DUPUIT (J.).
- EULER (L.).
- FLAMANT (A.).
- 
- GERSTNER (F. von).
2. *Études sur le frottement des liquides* (Thèse pour le doctorat ès sciences physiques; Faculté des Sciences de Paris, mai 1890). Paris, Gauthier-Villars, 1890, in-4°.
1. *Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux* (Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie des sciences, t. XV, p. 141; 1858).
2. et RITTER (Ch.). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dunod, Paris, 1856.
- Sur le mouvement varié de l'eau dans les tubes capillaires cylindriques, évasés à leur entrée, et sur l'établissement du régime uniforme dans ces tubes* (Thèse pour le doctorat ès sciences mathématiques; Faculté des sciences de Paris, mai 1895). Paris, Gauthier-Villars, 1895, in-4°.
- Recherches sur les lois des mouvements des liquides dans les espaces capillaires* (Annales de Chimie et de Physique, 4<sup>e</sup> série, t. XXV, 1872).
- Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables.* 2<sup>e</sup> éd., Paris, Dunod, 1863, in-4°.
- Principes généraux du mouvement des fluides.* Berlin, Histoire de l'Académie, t. XI, 1755.
1. *Exposé sommaire de la théorie actuelle des ondes liquides périodiques* (Annales des Ponts et chaussées, t. XV, 1<sup>re</sup> sem., 1888, p. 774-809).
2. *Des ondes liquides non périodiques et en particulier de l'onde solitaire* (Annales des Ponts et chaussées, t. XVII, 2<sup>re</sup> sem., 1889, p. 5-48).
- Theorie der Wellen.* Prag, 1804 [Mémoires de l'Acad. royale de Bohême, t. I; ou encore : Gilbert's Annalen der Physik, 1809, p. 412]. Traduit en français et annoté par B. de Saint-Venant (Annales des Ponts et chaussées, 1887, 1<sup>re</sup> sem., t. XIII, p. 31-86).

- GIRARD. *Mémoire sur le mouvement des fluides dans les tubes capillaires et l'influence de la température sur ce mouvement.* (Mémoires de l'Institut de France, t. XIV, 1<sup>re</sup> série; 1813-15 (1818), p. 249).
- GRANDJEAN (M.-G.). *Sur le régime permanent graduellement varié qui se produit à la partie amont des tuyaux de conduite et sur l'établissement du régime uniforme dans ces tuyaux* (Thèse pour le doctorat ès sciences mathématiques; Faculté des sciences de Paris, 22 janvier 1902). Paris, Gauthier-Villars, 1902, in-4°.
- HAHN (H.), HERGLOTZ (G.) et SCHWARZSCHILD (K.). *Ueber das Strömen des Wassers in Röhren und Kanalen* (Zeitschrift für mathematik und Physik; B. 51, 1904; p. 411-426).
- HELMHOLTZ (H.). *Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen* (Wissenschaftlich Abhandlungen von H. Helmholtz; 1882, Leipzig, B. I; p. 111-134; Crelle's Journal, B. 55; 1858, p. 22-55).
- LAGRANGE (J.-L.). *Mécanique analytique.* Paris, 1787; 2 vol. in-4°.
- LÉVY (M.). *Leçons sur la théorie des marées, 1<sup>re</sup> Partie.* Paris, Gauthier-Villars, 1898. In-4°.
- LORENTZ (H.-A.). *OEver den weerstand dien een vloeistof stroom in eene cilindrische huis onderwindt* (Kon. Akad. van Amsterdam, Verhandelingen; t. VI, p. 28-49; mai 1897).
- MAILLET (E.). *Essais d'hydraulique fluviale.* Paris, Hermann, 1905. In-8°.
- MAREY (J.-B.). *Le mouvement des liquides étudié par la chronophotographie* [C. R. de l'Acad. des sciences, t. CXVI, p. 915; mai 1893].
- MARGULES (Max.). *Ueber die Bestimmung des Reibungs und Gleitungs-Coefficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit* (Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlich Classe der Academie zu Wien; B. LXXXIII, 2<sup>e</sup> série, 1881).

- MOIGNO.  
*Leçons de mécanique analytique*, rédigées d'après les méthodes d'A. Cauchy. Paris, Gauthier-Villars, 1868. In-8°.
- NAU (F.).  
*Formation et extinction du clapotis* (Thèse pour le doctorat ès sciences mathématiques; Faculté des sciences de Paris, juin 1897). Paris, Gauthier-Villars, 1897. In-4°.
- NAVIER (E.).  
*Mémoire sur les lois du mouvement des fluides* (Mémoires de l'Académie des sciences, t. VI, 1823 (1827), p. 389).
- PARIS (A.).  
*Sur un trace roulis et un trace vague* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. LXIV, p. 731; 8 avril 1867).
- POLLARD et DUDEBOUT.  
*Théorie du Navire*. Paris, Gauthier-Villars, 1890-1894; 4 vol. in-8°.
- POISEUILLE (Dr.).  
*Sur le mouvement des liquides dans les tubes capillaires* (Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie des sciences; t. LX; 1842 (1846); p. 438).
- POISSON (S.-D.).  
—  
*1. Mémoire sur la théorie des ondes* (Mémoires de l'Académie des sciences; t. I, 1818, p. 71).  
*2. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps élastiques* (Mémoires de l'Académie des sciences, t. VIII, 1828; p. 357).
- PRONY (R. DE).  
—  
*Recherches physicomathématiques sur la théorie du mouvement des eaux courantes*. Paris, 1804.
- RABUT (Ch.).  
—  
*1. Cours d'hydraulique*. Paris, 1906, lithogr. Gr. in-4°.  
*2. Nouvelle formule de M. Bazin pour le calcul du débit des canaux découverts*. (Génie civil, 1898.)  
*3. Etude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts*. (Revue générale des sciences, 1898.)
- REYNOLDS (Osborne).  
*1. An experimental Investigation of the Circumstances which determine whether the Motion of water shall be*

- REYNOLDS (Osborne). *Direct or Sinuous; and of the Law of Resistance in Parallel Channels* (Proceedings of the Royal Society of London, t. XXXV, p. 84-99; 1883).
2. *An the dynamical Theory of incompressible viscous Fluids and the Determination of the Criterion.* (Philos. trans. of the royal Society of London; vol. CLXXXVI, Part. I; p. 123-164; 1895.)
- RÉSAL (H.). *Traité de Mécanique générale.* Paris, Gauthier-Villars, 1874; 7 vol. in-8°.
- RIEMANN (B.). *Mathematische Werke.* Leipzig, 1876.
- ROUSIER (G.). *Ondes par émersion.* (Thèse pour le doctorat ès sciences mathématiques. Faculté des Sciences de Paris; 12 mars 1908.) Paris, 1908, Gauthier-Villars. In-4°.
- RUSSELL (J.-S.).
- 1. *Expériences sur les lois de certains phénomènes hydrodynamiques qui accompagnent le mouvement des corps flottants* (Traduction française par Emmery et Mary; Annales des Ponts et chaussées, 1837, 2<sup>e</sup> sem.).
  - 2. *Experimental Researches into the Laws of Certain Hydrodynamical Phenomena that accompany the Motion of Floating Bodies, and have not previously been reduced into conformity with the known Laws of the Resistance of Fluids,* 63 pp. in-4°, 1839.
- SAINT-VENANT (Barré DE).
- 1. *De la houle et du clapotis* (Annales des Ponts et chaussées, 1888, 1<sup>re</sup> sem., p. 705-757).
  - 2. *De la houle et du clapotis* (C. R. de l'Académie des sciences; t. LXXIII, p. 521; 28 août 1871; t. LXXIII, p. 589; 4 sept. 1871).
  - 3. *Mouvement des molécules de l'onde dite solitaire, propagée à la surface d'un canal* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. CI, p. 1101; nov. 1885; t. CI, p. 1215; déc. 1885; t. CI, p. 1445, déc. 1885.)

- SAINT-VENANT (Barré de). 4. *Théorie du mouvement non permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit* (C. R. de l'Académie des sciences, t. LXXIII, p. 237; 24 juillet 1871).
- SAUTRÉAUX (C.). *Sur une question d'hydrodynamique* (Thèse pour le doctorat ès sciences mathématiques, Faculté des sciences de Paris, 15 novembre 1893). Paris, Gauthier-Villars, 1893. In-4°.
- TADINI (A.). *Del movimento et della misura delle acque correnti*. Milan, 1816.
- VENTURI (G.-B.).
- 1. *Essai sur les ouvrages physico-mathématiques de Léonard de Vinci* (lu à l'Institut en 1797). Paris et Padoue, an V (1797).
  - 2. *Recherches expérimentales sur le principe de communication latérale du mouvement dans les fluides, appliquée à l'explication de différents phénomènes hydrauliques*. Paris, 1797, 88 pages in-8° [Une traduction allemande de ce travail a été publiée dans les « Gilbert's Annalen der Physik », t. II, 1799, p. 418-465; t. III, 1800, p. 129-180].
- VINCI (Léonard de).
- 1. *Trattato del Moto e misura dell'acqua*. Inséré dans : *Raccolta d'autori Italiani che trattano del moto dell'aqua*, tomo X; p. 271-429. Bologna, 1826.
  - 2. *Les manuscrits de Léonard de Vinci*, publiés par Ch. Ravaïsson. Paris, Quantin, 1889. In-f°.



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires

## TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES MATIÈRES

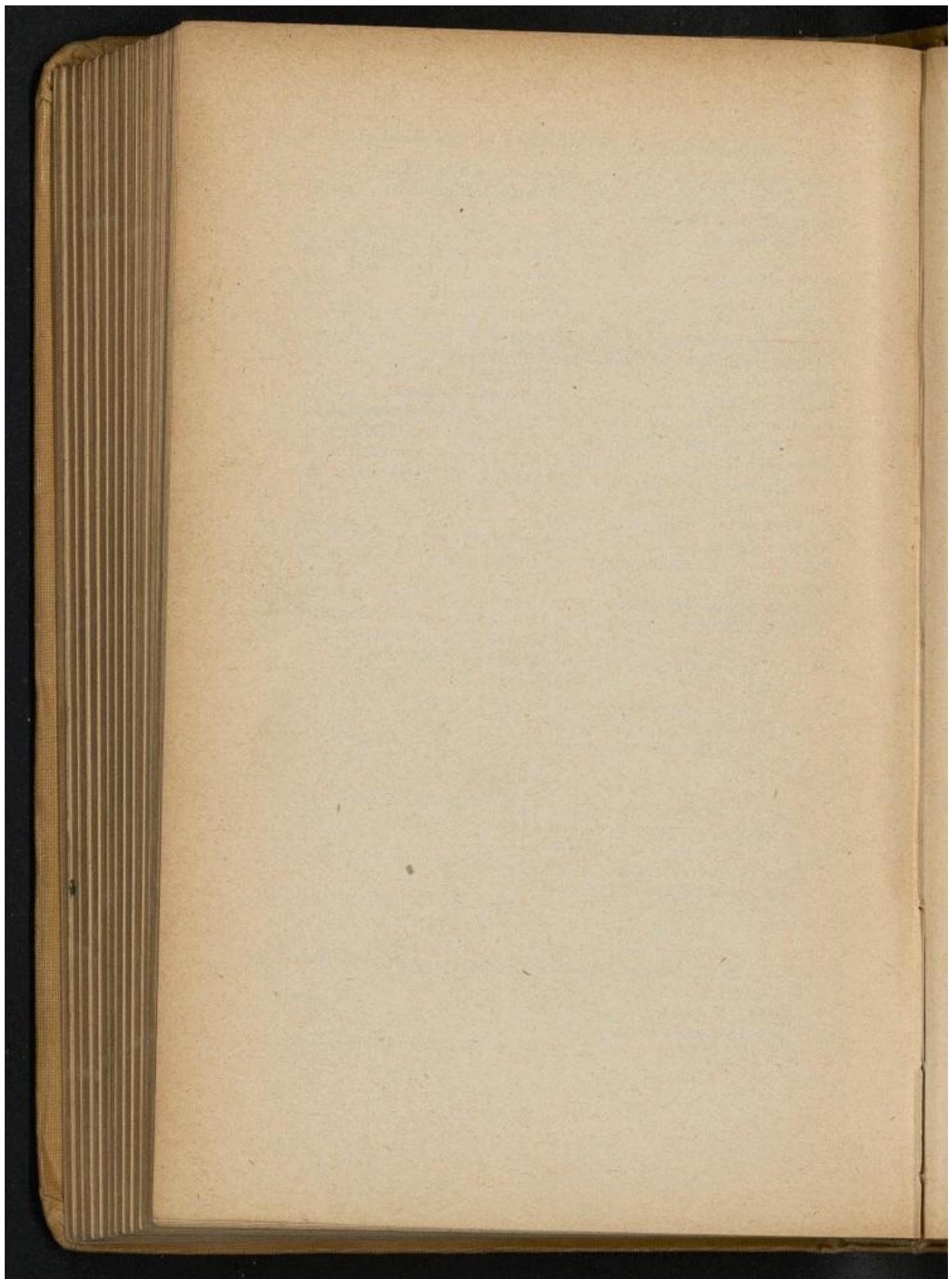
Accélération moyenne locale, 38.	CAUCHY, 3, 6, 10, 15.
Agitation locale, 39.	CAUCHY (équations de), 10.
Anisotropie, 18.	CAUCHY (théorème de), 79.
AUBUSSON (D.), 286.	Célérité, 96.
BAZIN (H.), 71, 128, 131, 281, 286, 287, 288, 289, 313.	Charge (hauteur de), 208, 218.
BECQUEREL (H.), 223.	CHÉZY (formule de DE), 279.
BÉNAZÉ (DE), 97.	Clapoteuses (ondes), 121.
BERNOULLI (D.) [Principe de], 77.	Clapotis, 121.
BERTIN (E.-L.), 97, 125.	Coefficient de tarissement, 246.
BOUSSINESQ (J.), 18, 20, 30, 38, 39, 52, 57, 58, 67, 68, 70, 71, 77, 80, 91, 98, 99, 100, 121, 126, 132, 148, 159, 167, 169, 170, 177, 180, 188, 191, 193, 199, 202, 203, 204, 210, 214, 217, 220, 230, 234, 235, 239, 244, 247, 249, 251, 256, 259, 260, 264, 275, 288, 289, 295, 298, 303, 313, 316, 324, 328, 334, 342, 356.	Conditions aux limites, 64.
BRILLOUIN (M.), 88, 199.	Continuité (équation de), 24, 28.
Browniens (mouvements), 19.	COUETTE (M.), 35, 53, 210, 264.
BRUNHES (J.), 223.	DARCY (H.), 37, 53, 224.
CALIGNY (DE), 98.	DARCY (lois de), 223.
Canaux (mouvement permanent dans les), 269.	Débit d'un puits, 226.
Canaux (mouvement graduellement varié dans les), 295-315.	Déformation pure, 12.
	Déformation infiniment petite, 10.
	DELEMER (J.), 194, 210, 214.
	Dilatation, 13.
	Dilatation cubique, 14.
	Dilatations principales, 15.
	Distorsion, 14.
	DUCLAUX (E.), 199, 223.
	DUPUIT (J.), 224-305.
	Écoulement, 22.
	Écoulement (dans les tubes fins), 193.
	Écoulement (dans les milieux poreux), 217.
	Élastique (état), 20.

374 TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES MATIÈRES

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| Ellipsoïde de dilatation, 15.         | LAGRANGE (variables de), 24.                    |
| Émersion (ondes d'), 170-172.         | Lames, 96.                                      |
| EMY, 97, 121.                         | Libre (surface), 64.                            |
| EULER (équations d'), 26.             | Lignes-tourbillons, 85.                         |
| EULER (variables d'), 24.             | Loi de la profondeur, 111.                      |
| <br>                                  |   |
| Filet fluide, 62.                     | MAILLET (E.), 248-250.                          |
| Filet-tourbillon, 86.                 | MARBY, 126.                                     |
| Filtration (phénomènes de), 217.      | MARGULES, 265.                                  |
| FLAMANT (A.), 100, 133.               | Mascaret, 132.                                  |
| Fluidité, 18-22.                      | MOIGNO, 17.                                     |
| FREEMANN (J.), 290.                   | Mouvement brownien, 19.                         |
| Frottement intérieur, 23.             | Mouvements giratoires, 88.                      |
| — — (force de), 30.                   | Mouvements orbitaires, 97.                      |
| — — (coefficient de), 35, 50.         | <br>  |
| <br>                                  | Nappe aquifère (mouvement d'une), 230, 234.     |
| GERSTNER (lois de), 96.               | NAU (F.), 121-126.                              |
| Giratoires (mouvements), 88.          | NAVIER (équations de), 34.                      |
| Glissements, 14.                      | NEWTON (I.), 97.                                |
| GOUY, 19.                             | Ondes clapoteuses, 121.                         |
| GRANDJEAN (M.), 353.                  | Ondes d'émersion, 170, 172.                     |
| GREEN (formule de), 72.               | — d'impulsion, 170, 172.                        |
| <br>                                  | — de translation, 127.                          |
| Hauteur de charge, 208.               | Onde solitaire, 127, 149, 153.                  |
| Hauteur totale de charge, 218.        | Orbitaire (mouvement), 97.                      |
| HELMHOLTZ (H.), 84.                   | Orthostatiques (éléments), 6.                   |
| Hétérotropie, 18.                     | OSTROGRADSKY (formule de), 72.                  |
| Houle de mer, 96, 101, 117.           | <br>  |
| <br>                                  | Pente motrice, 195.                             |
| Impulsion (ondes d'), 170, 172, 192.  | POISEUILLE (lois de), 197.                      |
| Intumescence (célérité d'une), 140.   | POISEUILLE (secondes expériences de), 210.      |
| Intumescence (invariants d'une), 145. | POISSON (équations de), 10.                     |
| — (loi de hauteur d'une), 133.        | Potentiel des déplacements, 106, 111, 113, 122. |
| — (longue), 166.                      | — des vitesses, 79.                             |
| Irrotationnels (mouvements), 93.      | Poreux (milieux), 217.                          |
| Isotropie, 18.                        | Pouls d'un courant, 38.                         |
| <br>                                  | Pression (sur un élément plan), 1.              |
| LAGRANGE (théorème de), 79.           | Pression moyenne locale, 43.                    |
| <br>                                  | Pression moyenne en un point, 21.               |

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES MATIÈRES 375

- |   |   |
|---|---|
| Pression principale, 6.                   | Solitaire (onde), 127.  |
| Profondeur (loi de la), 111.              | Source (régime d'une), 244, 249.                                  |
| PRONY (R. DE), 286, 291.                  | TADINI, 286.  |
| Puits (débit d'un), 226.                  | Tarissemant (coefficient de), 246.                                |
| RABUT (Ch.), 52, 289.                     | TERQUEM (A.), 126.  |
| REECH, 97.                                | Tourbillons, 84.  |
| Régime du fluide, 25.                     | Tranchée (débit d'une), 226.                                      |
| Régime hydraulique, 37.                   | Translation (onde de), 127.                                       |
| Régime graduellement varié, 51.           | Transpiration (tubes de), 217.                                    |
| Régime régulier, 37.                      | Turbulent (état), 36.   |
| Régime turbulent, 37.                     | Turbulent (mouvement), 269.                                       |
| Relation supplémentaire, 26, 29.          | Tuyaux larges (mouvement uniforme dans les), 269.                 |
| Remous (propagation des), 306.            | Tuyaux larges (mouvement graduellement varié dans les), 295, 315. |
| Résistance totale à l'écoulement, 225.    | Vagues, 96.   |
| REYNOLDS (O.), 35, 37, 53.                | VENTURI (J.-B.), 92.  |
| RIEMANN (formule de), 72.                 | VINCI (L. DE), 92, 97.  |
| RITTER, 223.                              | Viscosité (coefficient de), 35.                                   |
| Rotation (mouvements de), 251.            | Vitesse moyenne locale, 38.                                       |
| ROUSIER (G.), 191.                        | Vitesse de dilatation, 31.  |
| RUSSELL (Scott), 129, 149.                | Vitesse de glissement, 31.  |
| RUSSELL (lois de S.), 127.                | WEBER, 97.  |
| SAINTE-VENANT (B. DE), 97, 100, 133, 169. |   |



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires

# TABLE SYSTÉMATIQUE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS . . . . .

## INTRODUCTION

### ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES

## CHAPITRE I

### LOIS GÉNÉRALES QUI RÉGISSENT LES PRESSIONS ET LES DÉFORMATIONS A L'INTÉRIEUR DES MILIEUX CONTINUS.

§ 1. Pression sur un élément plan . . . . .	1
§ 2. Loi de variation de la pression avec la direction de l'élément plan . . . . .	3
§ 3. Éléments orthostatiques en un point . . . . .	6
§ 4. Relations entre les forces extérieures à distance et d'inertie sollicitant un élément matériel et les pressions autour d'un point de cet élément . . . . .	8
§ 5. Déformation infiniment petite d'un milieu . . . . .	10
§ 6. Dilatations principales . . . . .	15

## CHAPITRE II

### ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

#### A. Généralités sur les fluides.

§ 1. Propriété caractéristique des fluides . . . . .	18
§ 2. Des fluides à l'état élastique . . . . .	20
§ 3. Des fluides à l'état non élastique . . . . .	22

#### B. Équations générales du mouvement des fluides à l'état élastique.

§ 1. Variables de Lagrange et variables d'Euler . . . . .	24
§ 2. Équations indéfinies du mouvement ou équations d'Euler . . . . .	26
§ 3. Équation de continuité et relation supplémentaire . . . . .	28

*C. Équations générales des mouvements réguliers  
et bien continus des fluides à l'état naturel.*

§ 1. Forces de frottement intérieur introduites par le mouvement . . . . .	30
§ 2. Équations indéfinies du mouvement ou équations de Navier. . . . .	34

*D. Équations générales des mouvements tourbillonnaires  
et tumultueux des fluides à l'état naturel.*

§ 1. Des fluides à l'état turbulent . . . . .	36
§ 2. Vitesses, accélérations et déformations moyennes locales. . . . .	38
§ 3. Pressions moyennes locales ; formules qui les définissent. . . . .	43
§ 4. Expression du coefficient $\varepsilon$ des frottements intérieurs. . . . .	50
§ 5. Équations indéfinies du mouvement. . . . .	59

*E. Conditions initiales et conditions aux limites.*

§ 1. Cas d'un fluide parfait . . . . .	64
§ 2. Cas d'un fluide naturel à mouvements continus . . . . .	66
§ 3. Cas d'un fluide à mouvements turbulents. . . . .	67

## APPENDICE

Formules de Riemann et d'Ostrogradsky (ou de Green) . . . . .	72
---	----

## PREMIÈRE SECTION

PHÉNOMÈNES OÙ L'INFLUENCE DES FROTTEMENTS  
EST NÉGLIGEABLE

## CHAPITRE I

## THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

§ 1. Principe de Daniel Bernoulli . . . . .	77
§ 2. Théorème de Lagrange et de Cauchy . . . . .	79
§ 3. Propriétés fondamentales des tourbillons d'Helmholtz. . . . .	84
§ 4. Mouvements giratoires . . . . .	88
§ 5. Mouvements irrotationnels ; équations générales . . . . .	93

## CHAPITRE II

## HOULE DE MER; CLAPOTIS.

§ 1. Houle cylindrique régulière; lois de F. von Gerstner . . . . .	96
§ 2. Théorie de la houle : équations générales . . . . .	101
§ 3. Équations de première approximation ; leur intégration . . . . .	104
§ 4. Équations de seconde approximation . . . . .	112
§ 5. Houle en profondeur finie . . . . .	117
§ 6. Clapotis . . . . .	121
§ 7. Vérifications expérimentales . . . . .	124

## CHAPITRE III

## ONDES DE TRANSLATION; ONDE SOLITAIRE.

§ 1. Onde solitaire ; lois de Scott Russell; production et propriétés expérimentales des ondes de translation . . . . .	127
§ 2. Formation de l'équation aux dérivées partielles qui régit la hauteur d'une intumescence quelconque . . . . .	133
§ 3. Vitesse de propagation des diverses parties d'une intumescence . . . . .	140
§ 4. Distribution des vitesses proprement dites . . . . .	143
§ 5. Mouvement du centre de gravité d'une intumescence ; invariants d'une intumescence . . . . .	145
§ 6. Onde solitaire de Scott Russell ; sa forme . . . . .	149
§ 7. Propriétés de l'onde solitaire . . . . .	153
§ 8. Propagation d'une intumescence quelconque . . . . .	160
§ 9. Propagation d'une longue intumescence à courbure insensible . . . . .	166

## CHAPITRE IV

## ONDES D'ÉMERSION ET D'IMPULSION

§ 1. Définitions ; équations générales qui définissent le problème . . . . .	170
§ 2. Unicité de la solution . . . . .	175
§ 3. Cas des ondes superficielles . . . . .	177
§ 4. Ondes superficielles produites par l'émersion d'un cylindre plongé dans un canal rectangulaire . . . . .	180
§ 5. Ondes superficielles produites par impulsion . . . . .	192

## DEUXIÈME SECTION

PHÉNOMÈNES DE MOUVEMENTS BIEN CONTINUS  
OÙ L'INFLUENCE DES FROTTEMENTS EST SENSIBLE

## CHAPITRE I

## ÉCOULEMENT DE L'EAU DANS LES TUBES FINS

§ 1. Équations générales d'un régime graduellement varié dans un écoulement bien continu . . . . .	193
§ 2. Cas d'un régime uniforme . . . . .	195
§ 3. Section circulaire. Lois de Poiseuille . . . . .	197
§ 4. Sections elliptique et autres . . . . .	200
§ 5. Cas d'un régime graduellement varié . . . . .	204
§ 6. Interprétation des expériences de Poiseuille relatives à des tubes assez courts . . . . .	210

## CHAPITRE II

## PHÉNOMÈNES DE FILTRATION

§ 1. Écoulement permanent de l'eau à travers les milieux poreux. Généralités . . . . .	217
§ 2. Débit d'un puits ; d'une tranchée . . . . .	226
§ 3. Mouvement quasi uniforme des eaux souterraines . . . . .	230
§ 4. Mouvement varié d'une nappe aqueuse quelconque à travers un milieu perméable . . . . .	234
§ 5. Cas d'une nappe aqueuse n'ayant que de faibles pentes tant de fond que de superficie . . . . .	239
§ 6. Régime d'une source en temps de sécheresse . . . . .	244
§ 7. Régime d'une source en hautes eaux . . . . .	249

## CHAPITRE III

## MOUVEMENTS DE ROTATION

§ 1. Mouvement permanent par filets horizontaux circulaires et coaxiaux . . . . .	251
§ 2. Mouvement permanent dans un tube dont l'axe est horizontal et circulaire . . . . .	256
§ 3. Expériences de M. Couette ; détermination du coefficient de frottement intérieur de l'eau . . . . .	264

## TROISIÈME SECTION

### PHÉNOMÈNES DE MOUVEMENTS TURBULENTS

#### CHAPITRE I

##### MOUVEMENT PERMANENT UNIFORME DANS LES TUYAUX LARGES ET LES CANAUX

§ 1. Équations générales du mouvement graduellement varié . . . . .	269
§ 2. Transformation et propriétés des équations générales . . . . .	273
§ 3. Lois du régime uniforme dans des lits semblables . . . . .	277
§ 4. Cas d'une section rectangulaire très large . . . . .	281
§ 5. Cas d'une section circulaire . . . . .	283
§ 6. Comparaison de la théorie avec l'expérience . . . . .	286
§ 7. Régime intermédiaire entre le régime continu et le régime turbulent . . . . .	290
§ 8. Coefficients $\eta$ et $\alpha$ . . . . .	292

#### CHAPITRE II

##### MOUVEMENT GRADUELLEMENT VARIÉ DANS LES TUYAUX LAROES ET LES CANAUX

(PREMIÈRE APPROXIMATION)

§ 1. Retour sur les équations fondamentales de l'écoulement graduellement varié . . . . .	295
§ 2. Relation entre la vitesse moyenne et la vitesse au point le plus bas . . . . .	297
§ 3. Expression du frottement moyen extérieur et équation générale du mouvement graduellement varié . . . . .	300
§ 4. Propagation des ondes et des remous d'une médiocre hauteur le long d'un courant. Première approximation . . . . .	306
§ 5. Comparaison de la théorie avec l'expérience . . . . .	313

## CHAPITRE III

MOUVEMENT GRADUELLEMENT VARIÉ DANS LES TUYAUX LARGES  
ET LES CANAUX  
(DEUXIÈME APPROXIMATION)

§ 1. Calcul préliminaire des composantes de la vitesse transversale . . . . .	315
§ 2. Expression de l'accélération longitudinale . . . . .	323
§ 3. Lois de seconde approximation pour la distribution des vitesses à travers une section . . . . .	328
§ 4. Propagation des ondes et des remous dans un courant le long d'un canal rectangulaire. Lois de seconde approximation . . . . .	334
§ 5. Mouvement graduellement varié qui se produit près de l'entrée évasée d'un tuyau de conduite . . . . .	342
§ 6. Établissement approché du régime uniforme dans un tuyau de conduite . . . . .	356
INDEX BIBLIOGRAPHIQUE . . . . .	361
TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES MATIÈRES . . . . .	373
TABLE SYSTÉMATIQUE DES MATIÈRES . . . . .	375

OCTAVE DOIN ET FILS, ÉDITEURS, 8, PLACE DE L'ODÉON, PARIS

## ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

Publiée sous la direction du D<sup>r</sup> TOULOUSE

Nous avons entrepris la publication, sous la direction générale de son fondateur, le D<sup>r</sup> Toulouse, Directeur à l'École des Hautes-Études, d'une ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE de langue française dont on mesurera l'importance à ce fait qu'elle est divisée en 40 sections ou Bibliothèques et qu'elle comprendra environ 1000 volumes. Elle se propose de rivaliser avec les plus grandes encyclopédies étrangères et même de les dépasser, tout à la fois par le caractère nettement scientifique et la clarté de ses exposés, par l'ordre logique de ses divisions et par son unité, enfin par ses vastes dimensions et sa forme pratique.

### I

#### PLAN GÉNÉRAL DE L'ENCYCLOPÉDIE

**Mode de publication.** — L'*Encyclopédie* se composera de monographies scientifiques, classées méthodiquement et formant dans leur enchainement un exposé de toute la science. Organisée sur un plan systématique, cette Encyclopédie, tout en évitant les inconvénients des Traité<sup>s</sup>, — massifs, d'un prix global élevé, difficiles à consulter, — et les inconvénients des Dictionnaires, — où les articles scindés irrationnellement, simples chapitres alphabétiques, sont toujours nécessairement incomplets, — réunira les avantages des uns et des autres.

Du Traité, l'*Encyclopédie* gardera la supériorité que possède

un ensemble complet, bien divisé et fournissant sur chaque science tous les enseignements et tous les renseignements qu'on en réclame. Du Dictionnaire, l'*Encyclopédie* gardera les facilités de recherches par le moyen d'une table générale, l'*Index de l'Encyclopédie*, qui paraîtra dès la publication d'un certain nombre de volumes et sera réimprimé périodiquement. L'*Index* renverra le lecteur aux différents volumes et aux pages où se trouvent traités les divers points d'une question.

Les éditions successives de chaque volume permettront de suivre toujours de près les progrès de la science. Et c'est par là que s'affirme la supériorité de ce mode de publication sur tout autre. Alors que, sous sa masse compacte, un traité, un dictionnaire ne peut être réédité et renouvelé que dans sa totalité et qu'à d'assez longs intervalles, inconvenients graves qu'atténuent mal des suppléments et des appendices, l'*Encyclopédie scientifique*, au contraire, pourra toujours rajeunir les parties qui ne seraient plus au courant des derniers travaux importants. Il est évident, par exemple, que si des livres d'algèbre ou d'acoustique physique peuvent garder leur valeur pendant de nombreuses années, les ouvrages exposant les sciences en formation, comme la chimie physique, la psychologie ou les technologies industrielles, doivent nécessairement être remaniés à des intervalles plus courts.

Le lecteur appréciera la souplesse de publication de cette *Encyclopédie*, toujours vivante, qui s'élargira au fur et à mesure des besoins dans le large cadre tracé dès le début, mais qui constituera toujours, dans son ensemble, un traité complet de la Science, dans chacune de ses sections un traité complet d'une science, et dans chacun de ses livres une monographie complète. Il pourra ainsi n'acheter que telle ou telle section de l'*Encyclopédie*, sûr de n'avoir pas des parties dépareillées d'un tout.

L'*Encyclopédie* demandera plusieurs années pour être achevée ; car pour avoir des expositions bien faites, elle a pris ses collaborateurs plutôt parmi les savants que parmi les professionnels de la rédaction scientifique que l'on retrouve généralement dans les œuvres similaires. Or les savants écrivent peu et lentement : et il est préférable de laisser temporairement sans attribution certains ouvrages plutôt que de les confier à des auteurs insuffisants. Mais cette lenteur et ces vides ne présenteront pas d'in-

convénients, puisque chaque livre est une œuvre indépendante et que tous les volumes publiés sont à tout moment réunis par l'*Index de l'Encyclopédie*. On peut donc encore considérer l'*Encyclopédie* comme une librairie, où les livres soigneusement choisis, au lieu de représenter le hasard d'une production individuelle, obéiraient à un plan arrêté d'avance, de manière qu'il n'y ait ni lacune dans les parties ingrates, ni double emploi dans les parties très cultivées.

**Caractère scientifique des ouvrages.** — Actuellement, les livres de science se divisent en deux classes bien distinctes : les livres destinés aux savants spécialisés, le plus souvent incompréhensibles pour tous les autres, faute de rappeler au début des chapitres les connaissances nécessaires, et surtout faute de définir les nombreux termes techniques incessamment forgés, ces derniers rendant un mémoire d'une science particulière inintelligible à un savant qui en a abandonné l'étude durant quelques années ; et ensuite les livres écrits pour le grand public, qui sont sans profit pour des savants et même pour des personnes d'une certaine culture intellectuelle.

L'*Encyclopédie scientifique* a l'ambition de s'adresser au public le plus large. Le savant spécialisé est assuré de rencontrer dans les volumes de sa partie une mise au point très exacte de l'état actuel des questions ; car chaque Bibliothèque, par ses techniques et ses monographies, est d'abord faite avec le plus grand soin pour servir d'instrument d'études et de recherches à ceux qui cultivent la science particulière qu'elle représente, et sa devise pourrait être : *Par les savants, pour les savants*. Quelques-uns de ces livres seront même, par leur caractère didactique, destinés à devenir des ouvrages classiques et à servir aux études de l'enseignement secondaire ou supérieur. Mais, d'autre part, le lecteur non spécialisé est certain de trouver, toutes les fois que cela sera nécessaire, au seuil de la section, — dans un ou plusieurs volumes de généralités, — et au seuil du volume, — dans un chapitre particulier, — des données qui formeront une véritable introduction le mettant à même de poursuivre avec profit sa lecture. Un vocabulaire technique, placé, quand il y aura lieu, à la fin du volume, lui permettra de connaître toujours le sens des mots spéciaux.

## II

## ORGANISATION SCIENTIFIQUE

Par son organisation scientifique, l'*Encyclopédie* paraît devoir offrir aux lecteurs les meilleures garanties de compétence. Elle est divisée en Sections ou Bibliothèques, à la tête desquelles sont placés des savants professionnels spécialisés dans chaque ordre de sciences et en pleine force de production, qui, d'accord avec le Directeur général, établissent les divisions des matières, choisissent les collaborateurs et acceptent les manuscrits. Le même esprit se manifestera partout : éclectisme et respect de toutes les opinions logiques, subordination des théories aux données de l'expérience, soumission à une discipline rationnelle stricte ainsi qu'aux règles d'une exposition méthodique et claire. De la sorte, le lecteur, qui aura été intéressé par les ouvrages d'une section dont il sera l'abonné régulier, sera amené à consulter avec confiance les livres des autres sections dont il aura besoin, puisqu'il sera assuré de trouver partout la même pensée et les mêmes garanties. Actuellement, en effet, il est, hors de sa spécialité, sans moyen pratique de juger de la compétence réelle des auteurs.

Pour mieux apprécier les tendances variées du travail scientifique adapté à des fins spéciales, l'*Encyclopédie* a sollicité, pour la direction de chaque Bibliothèque, le concours d'un savant placé dans le centre même des études du ressort. Elle a pu ainsi réunir des représentants des principaux Corps savants, Établissements d'enseignement et de recherches de langue française :

<i>Institut.</i>	<i>Conservatoire des Arts et Métiers.</i>
<i>Académie de Médecine.</i>	<i>École d'Anthropologie.</i>
<i>Collège de France.</i>	<i>Institut National agronomique.</i>
<i>Muséum d'Histoire naturelle.</i>	<i>École vétérinaire d'Alfort.</i>
<i>École des Hautes-Études.</i>	<i>École supérieure d'Électricité.</i>
<i>Sorbonne et École normale.</i>	<i>École de Chimie industrielle de Lyon.</i>
<i>Facultés des Sciences.</i>	<i>École des Beaux-Arts.</i>
<i>Facultés des Lettres.</i>	<i>École des Sciences politiques.</i>
<i>Facultés de Médecine.</i>	<i>Observatoire de Paris.</i>
<i>Instituts Pasteur.</i>	<i>Hôpitaux de Paris.</i>
<i>École des Ponts et Chaussées.</i>	
<i>École des Mines.</i>	
<i>École Polytechnique.</i>	

## III

## BUT DE L'ENCYCLOPÉDIE

Au XVIII<sup>e</sup> siècle, « l'Encyclopédie » a marqué un magnifique mouvement de la pensée vers la critique rationnelle. A cette époque, une telle manifestation devait avoir un caractère philosophique. Aujourd'hui, l'heure est venue de renouveler ce grand effort de critique, mais dans une direction strictement scientifique ; c'est là le but de la nouvelle *Encyclopédie*.

Ainsi la science pourra lutter avec la littérature pour la direction des esprits cultivés, qui, au sortir des écoles, ne demandent guère de conseils qu'aux œuvres d'imagination et à des encyclopédies où la science a une place restreinte, tout à fait hors de proportion avec son importance. Le moment est favorable à cette tentative ; car les nouvelles générations sont plus instruites dans l'ordre scientifique que les précédentes. D'autre part, la science est devenue, par sa complexité et par les corrélations de ses parties, une matière qu'il n'est plus possible d'exposer sans la collaboration de tous les spécialistes, unis là comme le sont les producteurs dans tous les départements de l'activité économique contemporaine.

A un autre point de vue, l'*Encyclopédie*, embrassant toutes les manifestations scientifiques, servira comme tout inventaire à mettre au jour les lacunes, les champs encore en friche ou abandonnés, — ce qui expliquera la lenteur avec laquelle certaines sections se développeront, — et suscitera peut-être les travaux nécessaires. Si ce résultat est atteint, elle sera fière d'y avoir contribué.

Elle apporte en outre une classification des sciences et, par ses divisions, une tentative de mesure, une limitation de chaque domaine. Dans son ensemble, elle cherchera à refléter exactement le prodigieux effort scientifique du commencement de ce siècle et un moment de sa pensée, en sorte que dans l'avenir elle reste le document principal où l'on puisse retrouver et consulter le témoignage de cette époque intellectuelle.

On peut voir aisément que l'*Encyclopédie* ainsi conçue, ainsi réalisée, aura sa place dans toutes les bibliothèques publiques, universitaires et scolaires, dans les laboratoires, entre les mains

des savants, des industriels et de tous les hommes instruits qui veulent se tenir au courant des progrès, dans la partie qu'ils cultivent eux-mêmes ou dans tout le domaine scientifique. Elle fera jurisprudence, ce qui lui dicte le devoir d'impartialité qu'elle aura à remplir.

Il n'est plus possible de vivre dans la société moderne en ignorant les diverses formes de cette activité intellectuelle qui révolutionne les conditions de la vie; et l'interdépendance de la science ne permet plus aux savants de rester cantonnés, spécialisés dans un étroit domaine. Il leur faut, — et cela leur est souvent difficile, — se mettre au courant des recherches voisines. A tous, l'*Encyclopédie* offre un instrument unique dont la portée scientifique et sociale ne peut échapper à personne.

## IV

## CLASSIFICATION DES MATIÈRES SCIENTIFIQUES

La division de l'*Encyclopédie* en Bibliothèques a rendu nécessaire l'adoption d'une classification des sciences, où se manifeste nécessairement un certain arbitraire, étant donné que les sciences se distinguent beaucoup moins par les différences de leurs objets que par les divergences des aperçus et des habitudes de notre esprit. Il se produit en pratique des interpénétrations réciproques entre leurs domaines, en sorte que, si l'on donnait à chacun l'étendue à laquelle il peut se croire en droit de prétendre, il envahirait tous les territoires voisins; une limitation assez stricte est nécessitée par le fait même de la juxtaposition de plusieurs sciences.

Le plan choisi, sans viser à constituer une synthèse philosophique des sciences, qui ne pourrait être que subjective, a tendu pourtant à échapper dans la mesure du possible aux habitudes traditionnelles d'esprit, particulièrement à la routine didactique, et à s'inspirer de principes rationnels.

Il y a deux grandes divisions dans le plan général de l'*Encyclopédie*: d'un côté les sciences pures, et, de l'autre, toutes les technologies qui correspondent à ces sciences dans la sphère des applications. A part et au début, une Bibliothèque d'introduc-

tion générale est consacrée à la philosophie des sciences (histoire des idées directrices, logique et méthodologie).

Les sciences pures et appliquées présentent en outre une division générale en sciences du monde inorganique et en sciences biologiques. Dans ces deux grandes catégories, l'ordre est celui de particularité croissante, qui marche parallèlement à une rigueur décroissante. Dans les sciences biologiques pures enfin, un groupe de sciences s'est trouvé mis à part, en tant qu'elles s'occupent moins de dégager des lois générales et abstraites que de fournir des monographies d'êtres concrets, depuis la paléontologie jusqu'à l'anthropologie et l'ethnographie.

Étant donnés les principes rationnels qui ont dirigé cette classification, il n'y a pas lieu de s'étonner de voir apparaître des groupements relativement nouveaux, une biologie générale, — une physiologie et une pathologie végétales, distinctes aussi bien de la botanique que de l'agriculture, — une chimie physique, etc.

En revanche, des groupements hétérogènes se disloquent pour que leurs parties puissent prendre place dans les disciplines auxquelles elles doivent revenir. La géographie, par exemple, retourne à la géologie, et il y a des géographies botanique, zoologique, anthropologique, économique, qui sont étudiées dans la botanique, la zoologie, l'anthropologie, les sciences économiques.

Les sciences médicales, immense juxtaposition de tendances très diverses, unies par une tradition utilitaire, se désagrègent en des sciences ou des techniques précises ; la pathologie, science de lois, se distingue de la thérapeutique ou de l'hygiène, qui ne sont que les applications des données générales fournies par les sciences pures, et à ce titre mises à leur place rationnelle.

Enfin, il a paru bon de renoncer à l'anthropocentrisme qui exigeait une physiologie humaine, une anatomie humaine, une embryologie humaine, une psychologie humaine. L'homme est intégré dans la série animale dont il est un aboutissant. Et ainsi, son organisation, ses fonctions, son développement, s'éclairent de toute l'évolution antérieure et préparent l'étude des formes plus complexes des groupements organiques qui sont offerts par l'étude des sociétés.

On peut voir que, malgré la prédominance de la préoccupation pratique dans ce classement des Bibliothèques de l'*Encyclopédie scientifique*, le souci de situer rationnellement les sciences dans leurs rapports réciproques n'a pas été négligé. Enfin il est à peine besoin d'ajouter que cet ordre n'implique nullement une hiérarchie, ni dans l'importance ni dans les difficultés des diverses sciences. Certaines, qui sont placées dans la technologie, sont d'une complexité extrême, et leurs recherches peuvent figurer parmi les plus ardues.

**Prix de la publication.** — Les volumes, illustrés pour la plupart, seront publiés dans le format in-18 jesus et cartonnés. De dimensions commodes, ils auront 400 pages environ, ce qui représente une matière suffisante pour une monographie ayant un objet défini et important, établie du reste selon l'économie du projet qui saura éviter l'émettement des sujets d'exposition. Le prix étant fixé uniformément à 5 francs, c'est un réel progrès dans les conditions de publication des ouvrages scientifiques, qui, dans certaines spécialités, coûtent encore si cher.

---

## TABLE DES BIBLIOTHÈQUES

---

DIRECTEUR : Dr TOULOUSE, Directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL : H. PIÉRON, agrégé de l'Université.

### DIRECTEURS DES BIBLIOTHÈQUES :

1. *Philosophie des Sciences*. P. PAINLEVÉ, de l'Institut, professeur à la Sorbonne.

#### I. SCIENCES PURES

##### A. Sciences mathématiques :

2. *Mathématiques* . . . . J. DRACH, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.
3. *Mécanique* . . . . J. DRACH, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.

##### B. Sciences inorganiques :

4. *Physique* . . . . A. LEDUC, professeur adjoint de physique à la Sorbonne.
5. *Chimie physique* . . . . J. PERRIN, chargé de cours à la Sorbonne.
6. *Chimie* . . . . A. PICTET, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève.
7. *Astronomie et Physique céleste* . . . . J. MASCART, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris.
8. *Météorologie* . . . . B. BRUNHES, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Clermont-Ferrand, directeur de l'Observatoire du Puy-de-Dôme.
9. *Minéralogie et Pétrographie* . . . . A. LACROIX, de l'Institut, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
10. *Géologie* . . . . M. BOULE, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.

11. *Océanographie physique*. . . . . J. RICHARD, directeur du Musée Océanographique de Monaco.

C. Sciences biologiques normatives :

- |                       |  |
|-----------------------|--|
| 12. <i>Biologie</i> . | A. <i>Biologie générale</i> . . . . . M. CAULLERY, professeur adjoint à la Sorbonne.<br>B. <i>Océanographie biologique</i> . . . . . J. RICHARD, directeur du Musée Océanographique de Monaco. |
|-----------------------|--|

13. *Physique biologique*. . . . . A. IMBERT, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université de Montpellier.

14. *Chimie biologique*. . . . . G. BERTRAND, chargé de cours à la Sorbonne.

15. *Physiologie et Pathologie végétales* . . . . L. MANGIN, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.

16. *Physiologie*. . . . . J.-P. LANGLOIS, professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Paris.

17. *Psychologie*. . . . . E. TOULOUSE, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études, médecin en chef de l'asile de Villejuif.

18. *Sociologie* . . . . . G. RICHARD, professeur à la Faculté des Lettres de l'Université de Bordeaux.

- 
19. *Microbiologie et Parasitologie* . . . . . A. CALMETTE, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université, directeur de l'Institut Pasteur de Lille.

- |                         |   |
|-------------------------|---|
| 20. <i>Pathologie</i> . | A. <i>Pathologie médicale</i> . . . . . M. KLIPPEL, médecin des Hôpitaux de Paris.<br>B. <i>Neurologie</i> . . . . . E. TOULOUSE, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études, médecin en chef de l'asile de Villejuif.<br>C. <i>Path. chirurgicale</i> . . . . . L. PICQUÉ, chirurgien des Hôpitaux de Paris. |
|-------------------------|---|

D. Sciences biologiques descriptives :

21. *Paléontologie* . . . . . M. BOULE, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.

- |                        |   |
|------------------------|---|
| 22. <i>Botanique</i> . | A. <i>Généralités et phénomènes</i> . . . . . H. LECOMTE, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.<br>B. <i>Cryptogames</i> . . . . . L. MANGIN, professeur au Muséum d'Histoire naturelle. |
|------------------------|---|

## TABLE DES BIBLIOTHÈQUES

XI

23. *Zoologie* . . . . . G. LOISEL, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études.
24. *Anatomie et Embryologie* . . . . . G. LOISEL, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études.
25. *Anthropologie et Ethnographie* . . . . . G. PAPILLAULT, directeur adjoint du Laboratoire d'Anthropologie à l'École des Hautes-Études, professeur à l'École d'Anthropologie.
26. *Économie politique* . . . . . D. BELLET, professeur à l'École des Sciences politiques.

## II. SCIENCES APPLIQUÉES

## A. Sciences mathématiques :

27. *Mathématiques appliquées* . . . . M. d'OCAGNE, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique.
28. *Mécanique appliquée et génie* . . . . M. d'OCAGNE, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique.

## B. Sciences inorganiques :

29. *Industries physiques* . . . . H. CHAUMAT, sous-directeur de l'École supérieure d'Électricité de Paris.
30. *Photographie* . . . . A. SEYEWETZ, sous-directeur de l'École de Chimie industrielle de Lyon.
31. *Industries chimiques* . . . . J. DERÔME, professeur agrégé de physique au collège Chaptal, inspecteur des Établissements classés.
32. *Géologie et minéralogie appliquées* . . . . L. CAYEUX, professeur à l'Institut national agronomique, professeur de géologie à l'École des Mines.
33. *Construction* . . . . J. PILLET, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École des Beaux-Arts.

## C. Sciences biologiques :

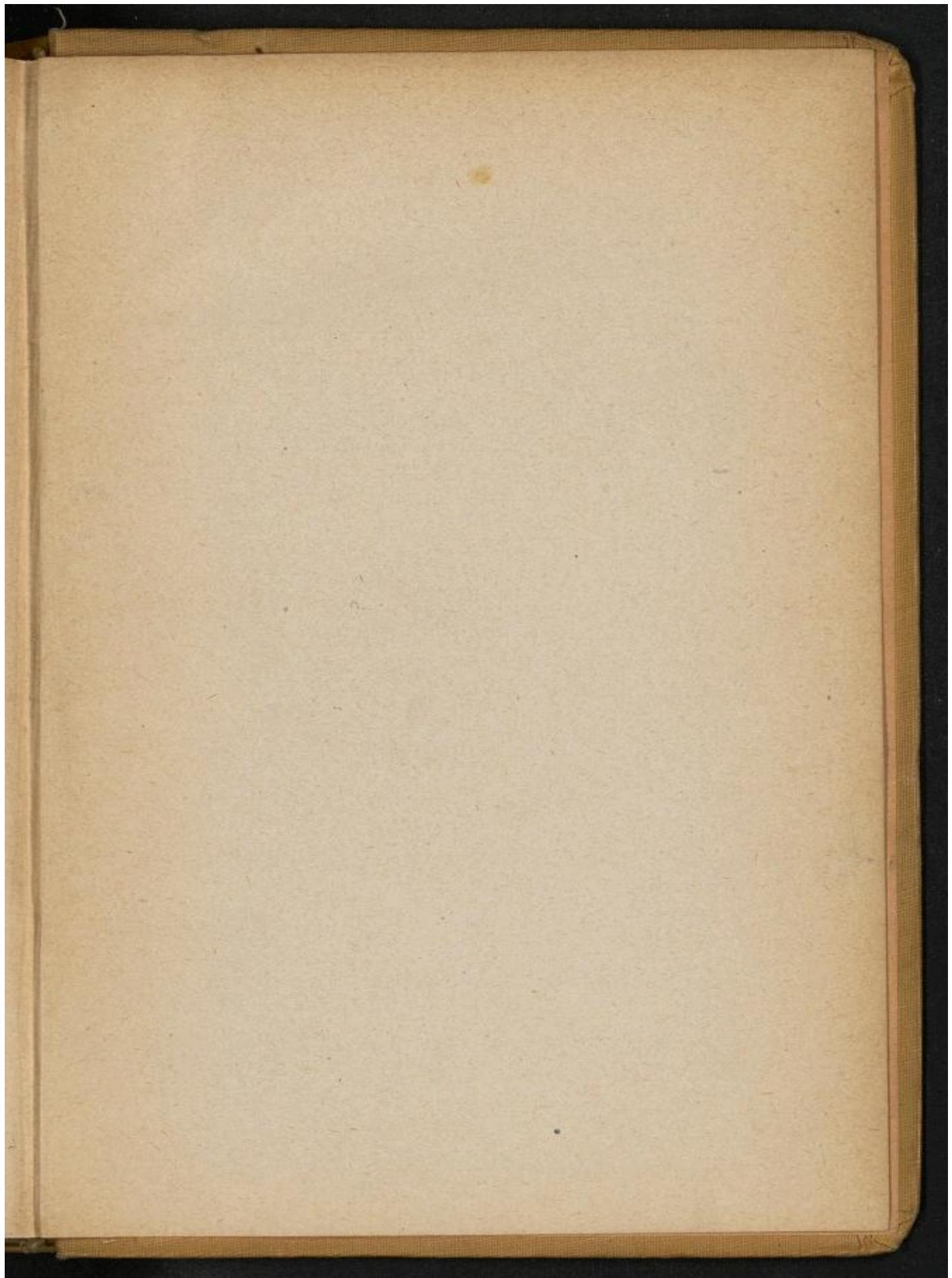
34. *Industries biologiques*. . . . G. BERTRAND, chargé de cours à la Sorbonne.
35. *Botanique appliquée et agriculture* . . . . H. LECOMTE, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.

36. *Zoologie appliquée* . . R. BARON, professeur à l'École vétérinaire d'Alfort.
37. *Thérapeutique générale et pharmacologie*. . G. POUCHET, membre de l'Académie de médecine, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université de Paris.
38. *Hygiène et médecine publiques* . . A. CALMETTE, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université, directeur de l'Institut Pasteur de Lille.
39. *Psychologie appliquée*. . E. TOULOUSE, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études, médecin en chef de l'asile de Villejuif.
40. *Sociologie appliquée*. . TH. RUYSEN, professeur à la Faculté des Lettres de l'Université de Bordeaux.

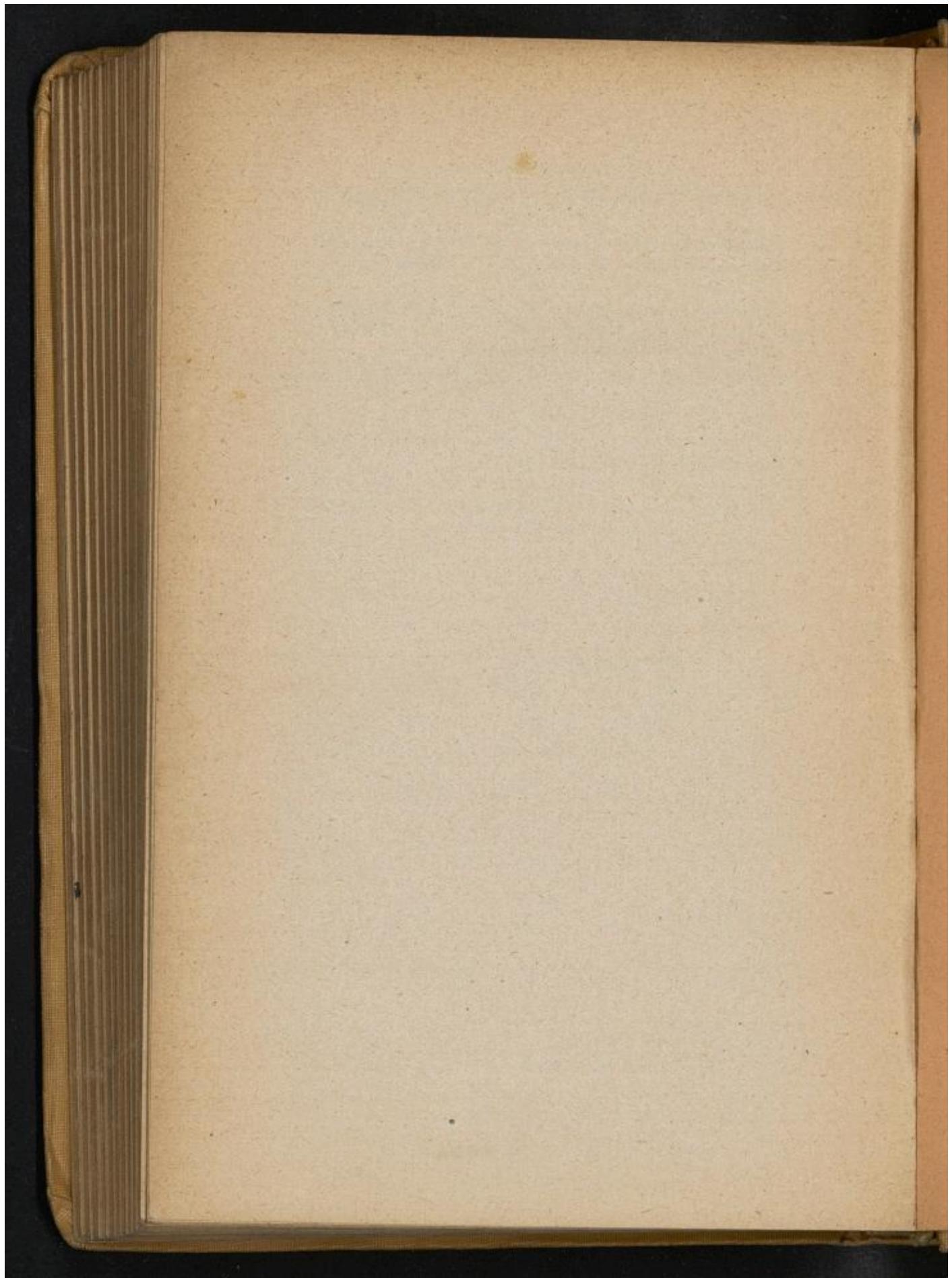
M. ALBERT MAIRE, bibliothécaire à la Sorbonne, est chargé de l'*Index de l'Encyclopédie scientifique*.



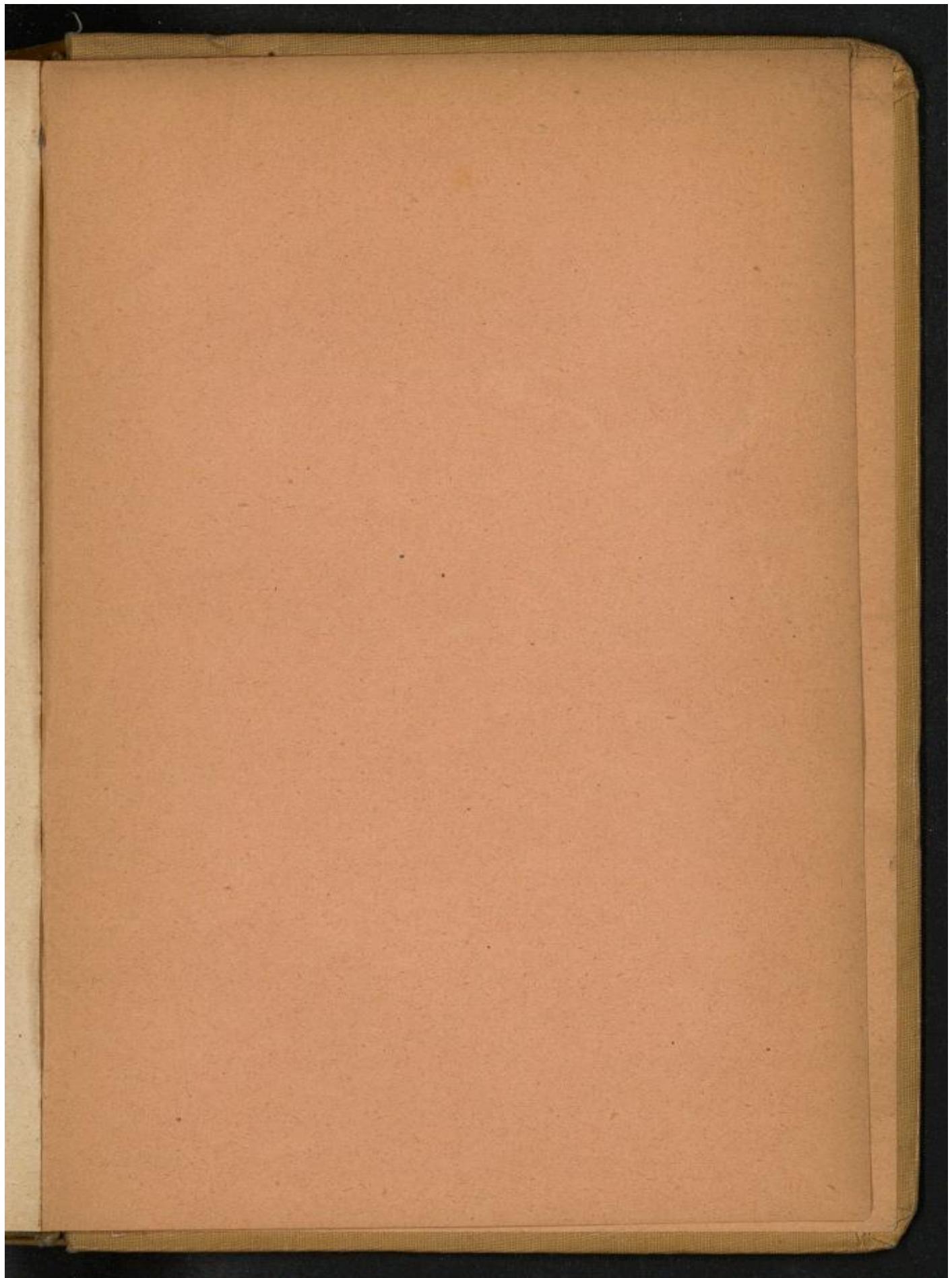
33452. — Tours, impr. Mame.



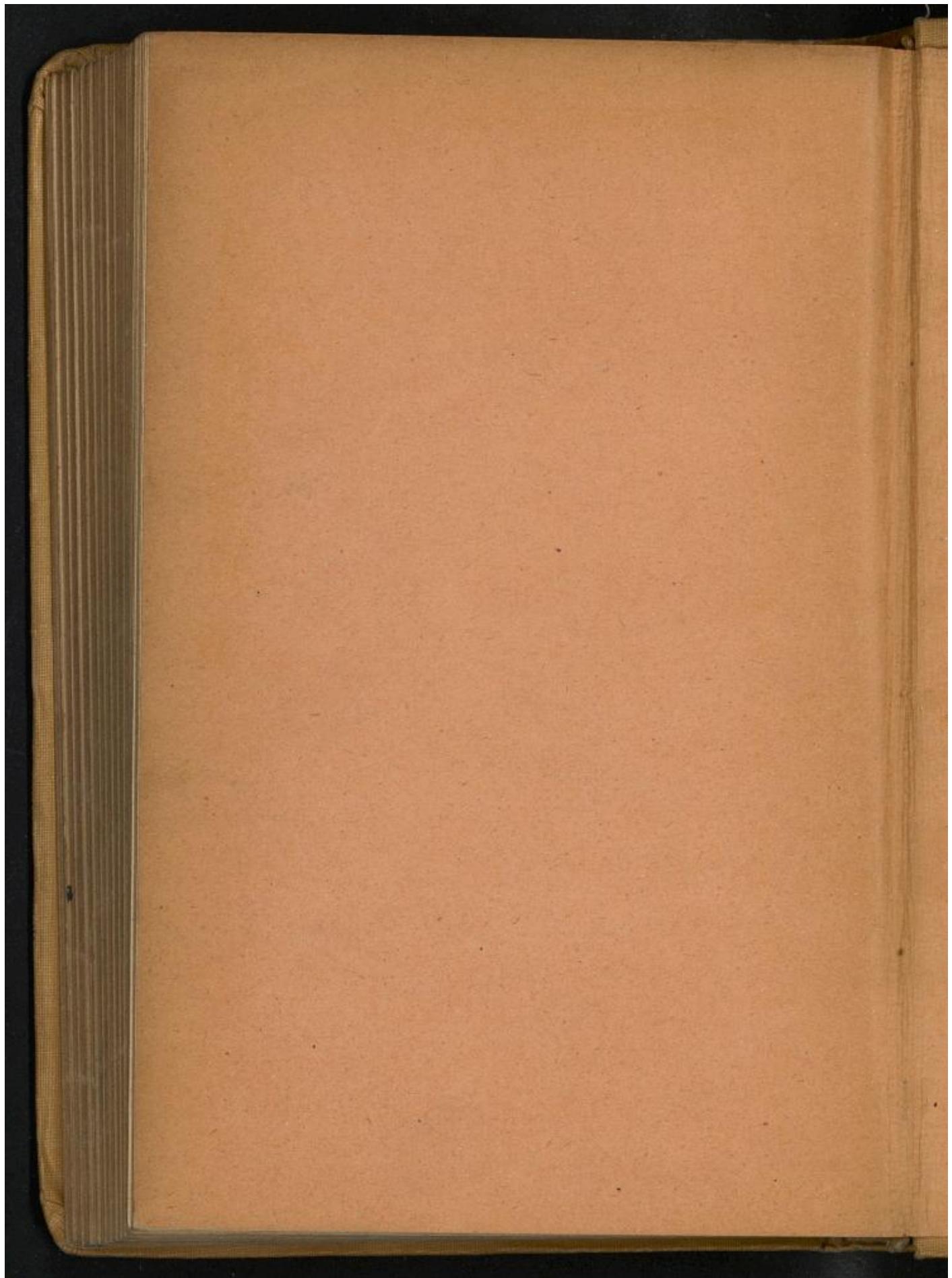
Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires



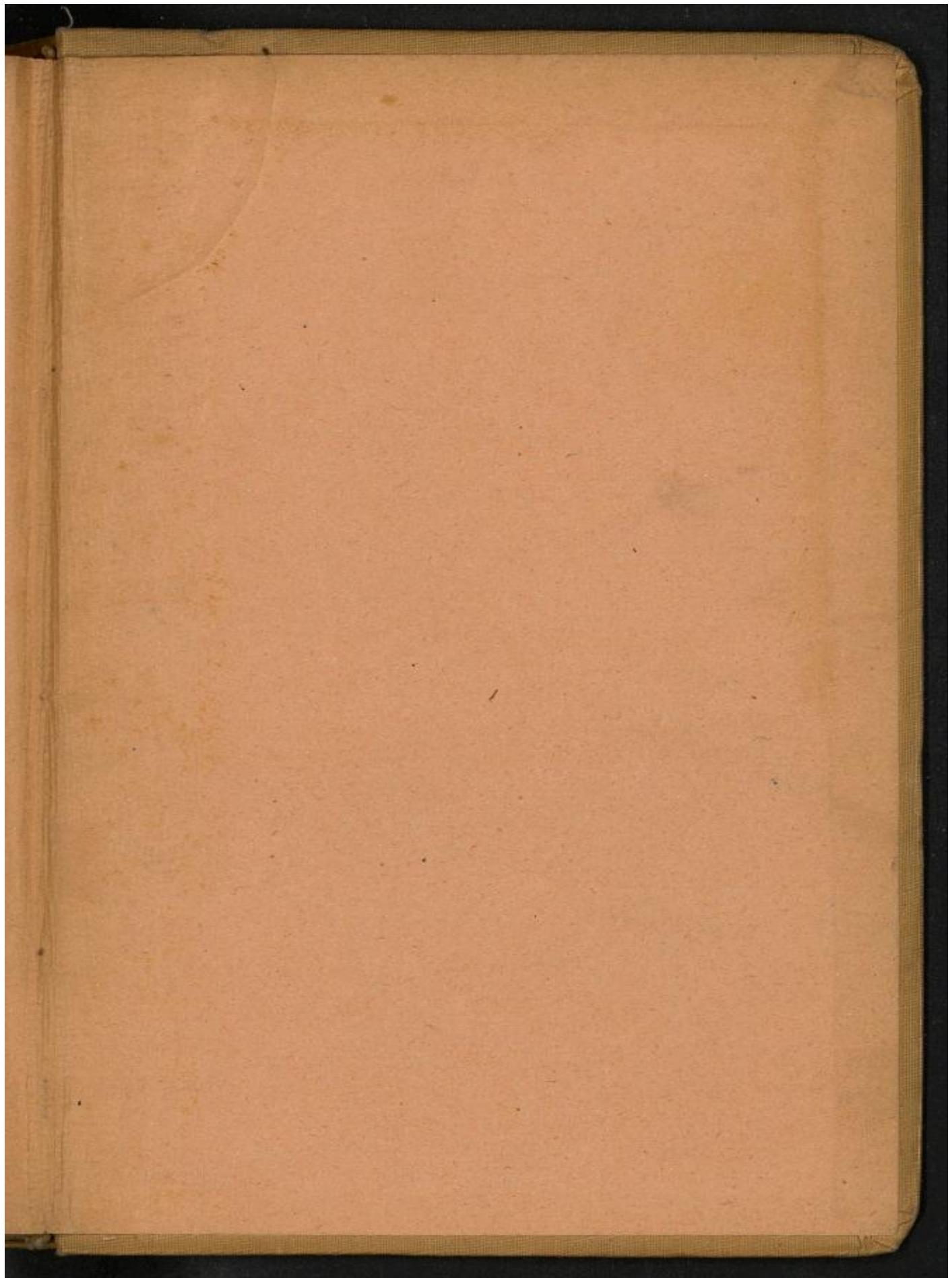
Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires



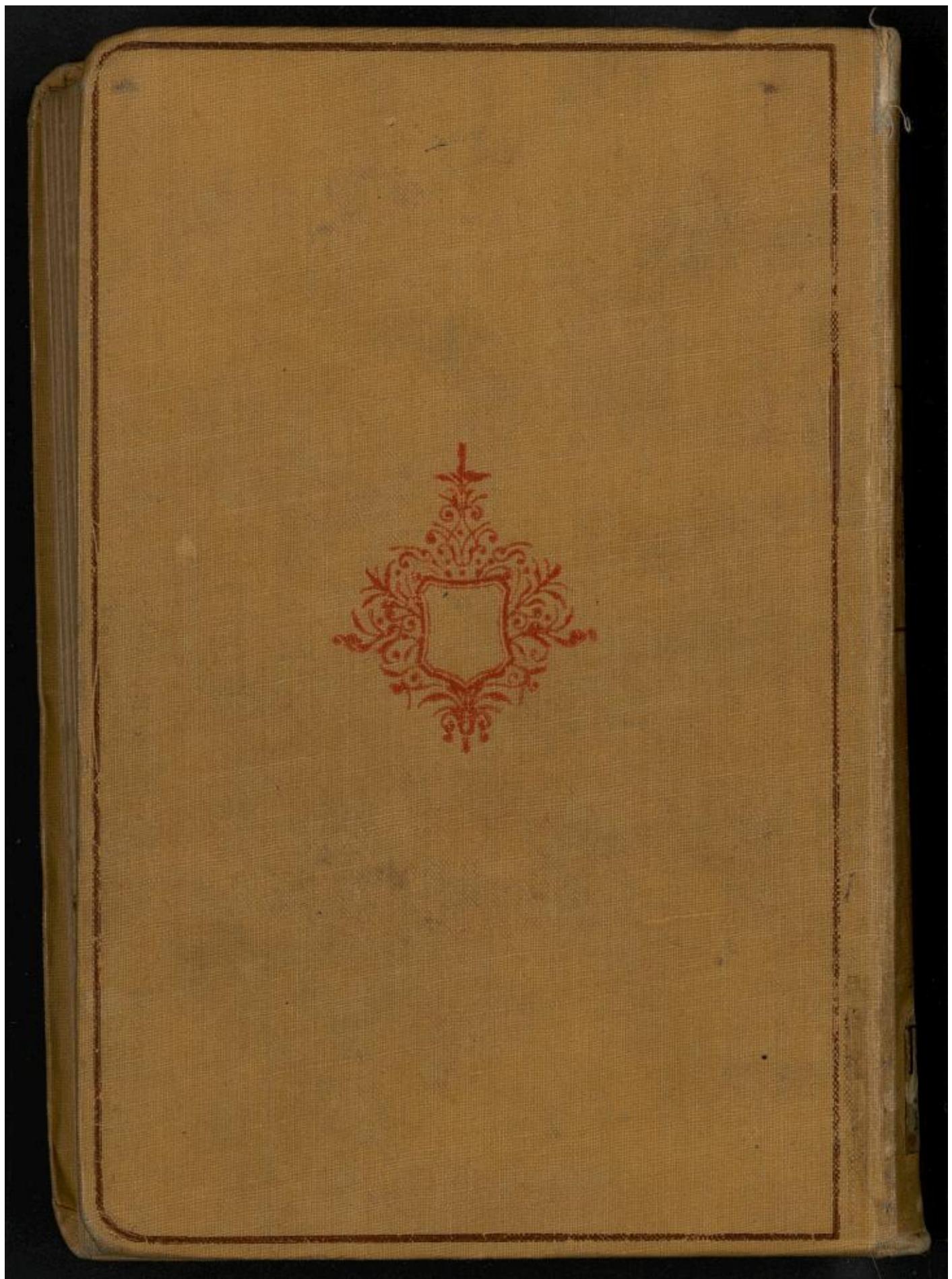
Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires

