Conditions d’utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- Le Conservatoire numérique communément appelé le Cnum constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d’œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s’inscrit dans le cadre de la loi nº 78-753 du 17 juillet 1978 :

- **la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue (Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - http://cnum.cnam.fr)**
- **la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l’objet d’une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.**

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- **les reproductions de documents protégés par le droit d’auteur, uniquement consultables dans l’enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l’autorisation préalable du titulaire des droits.**

4- Pour obtenir la reproduction numérique d’un document du Cnum en haute définition, contacter cnum(at)cnam.fr

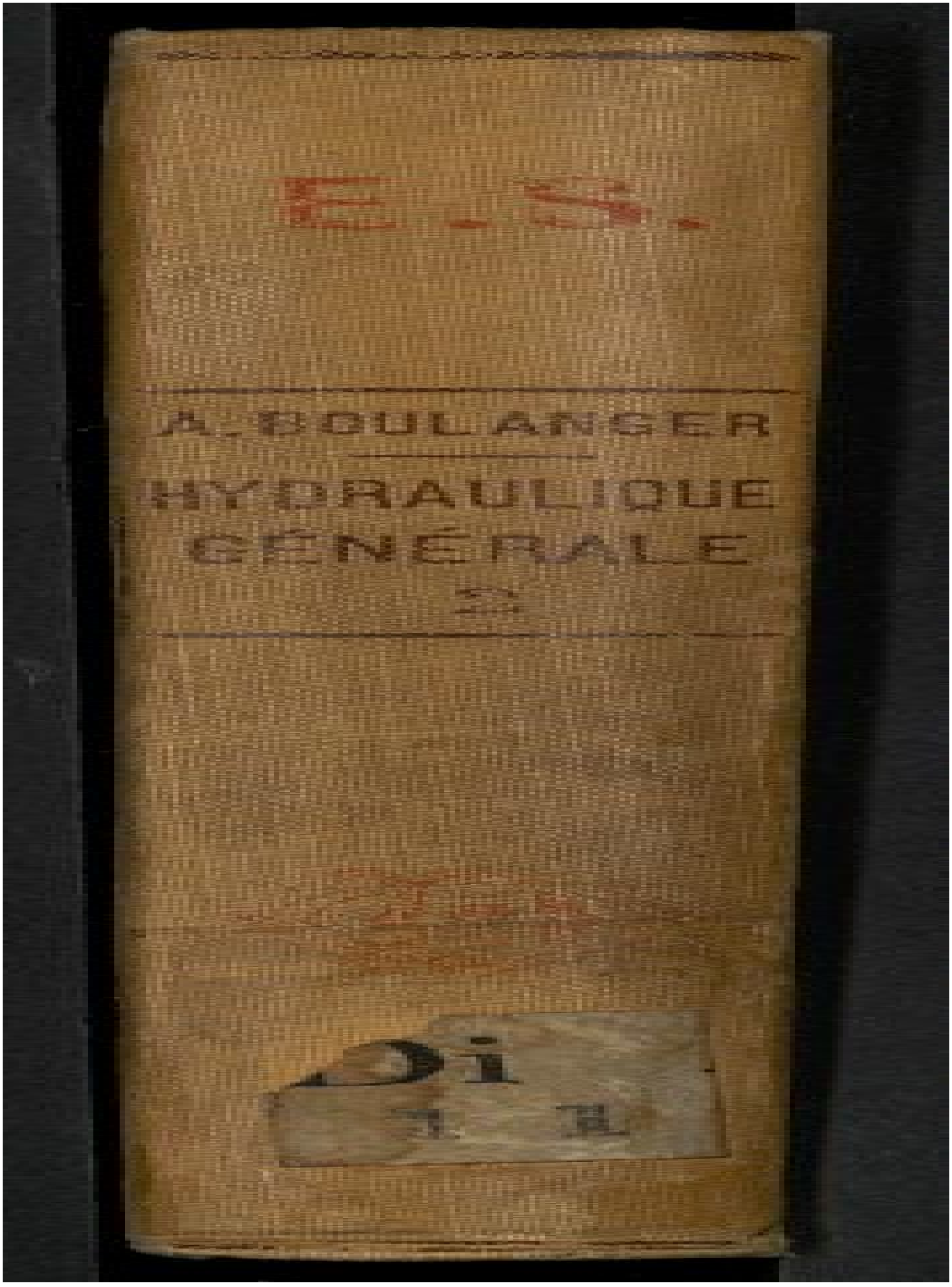
5- L’utilisateur s’engage à respecter les présentes conditions d’utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d’une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d’utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

NOTICE DE LA GRANDE MONOGRAPHIE	
Auteur(s) ou collectivité(s)	Boulanger, Auguste
Auteur(s)	Boulanger, Auguste (1866-1923)
Titre	Hydraulique générale
Nombre de volumes	2
Permalien	http://cnum.cnam.fr/redir?12DI11
Adresse	Paris : Octave Doin et fils, éditeurs, 1909
Collection	(Encyclopédie scientifique. Bibliothèque de mécanique appliquée et génie ; 8)
Collation	2 vol. (XVI-382-XII, VII-299-XII p.) : ill., diagrs. ; 19 cm
Sujet(s)	Hydraulique

NOTICE DU VOLUME	
Auteur(s) volume	Boulanger, Auguste (1866-1923)
Titre	Hydraulique générale
Volume	Tome II : Problèmes à singularités et applications
Adresse	Paris : Octave Doin et fils, éditeurs, 1909
Collation	1 vol. (VII-299-XII p.) : ill., diagrs. ; 19 cm
Nombre d'images	329
Cote	CNAM-BIB 12 Di 11 (2)
Sujet(s)	Hydraulique
Thématique(s)	Énergie
Typologie	Ouvrage
Langue	Français
Date de mise en ligne	20/05/2021
Date de génération du PDF	20/05/2021
Permalien	http://cnum.cnam.fr/redir?12DI11.2



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

12°Di 11 2

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DU Dr TOULOUSE

BIBLIOTHÈQUE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE ET GÉNIE

DIRECTEUR M. D'OCAGNE

Hydraulique Générale

Tome Second

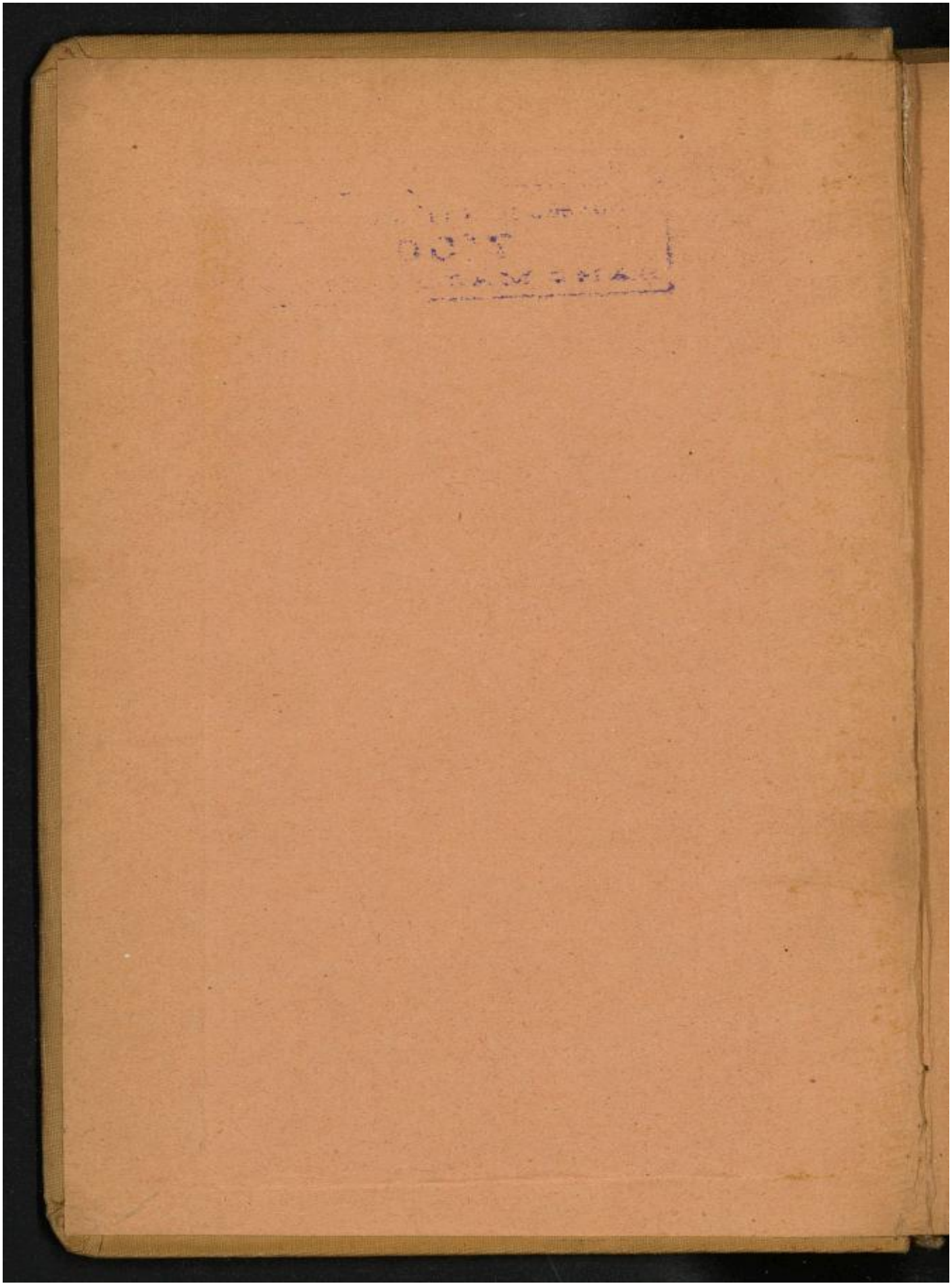
Problèmes a Singularités et Applications

PAR

A. BOULANGER

PARIS, O. DOIN ET FILS, EDITEURS

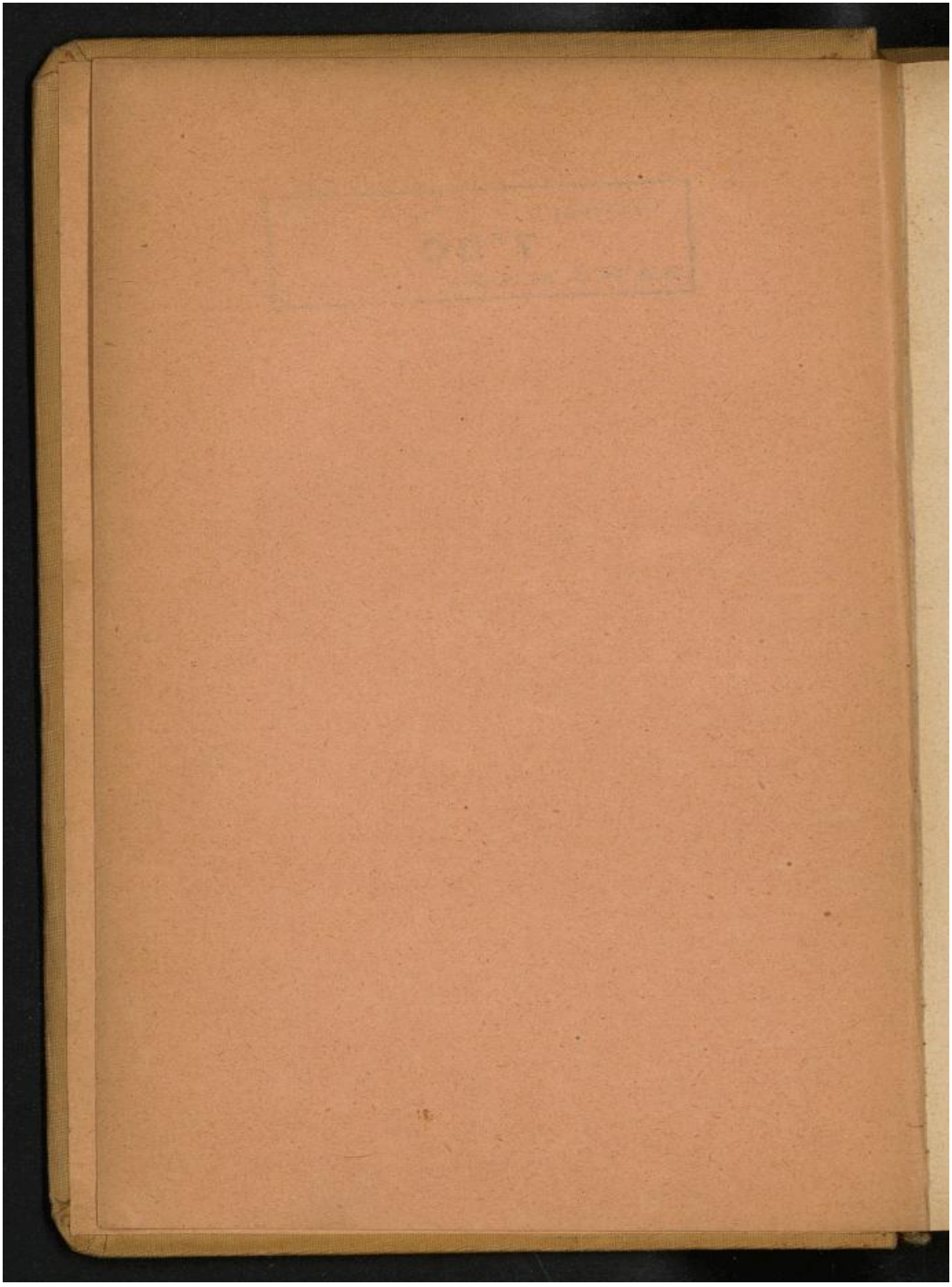
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nouveau p x (1er J ... ...)
7F50
SANS MAJO ATION

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION

du Dr TOULOUSE, Directeur de Laboratoire à l'École des Hautes Études.

Secrétaire général : H. PIÉRON, Agrégé de l'Université.

BIBLIOTHÈQUE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE ET GÉNIE

Directeur : M. D'OCAGNE

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées
Répétiteur à l'École polytechnique.

HYDRAULIQUE GÉNÉRALE

II

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

A

MONSIEUR J. BOUSSINESQ

ANCIEN PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE

PROFESSEUR A LA SORBONNE, MEMBRE DE L'INSTITUT

Hommage respectueux.

A. BOULANGER.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

12°Di 11(2)

HYDRAULIQUE GÉNÉRALE

PAR

A. BOULANGER

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
PROFESSEUR-ADJOINT DE MÉCANIQUE
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE

TOME II

PROBLÈMES A SINGULARITÉS ET APPLICATIONS

Avec 16 figures dans le texte

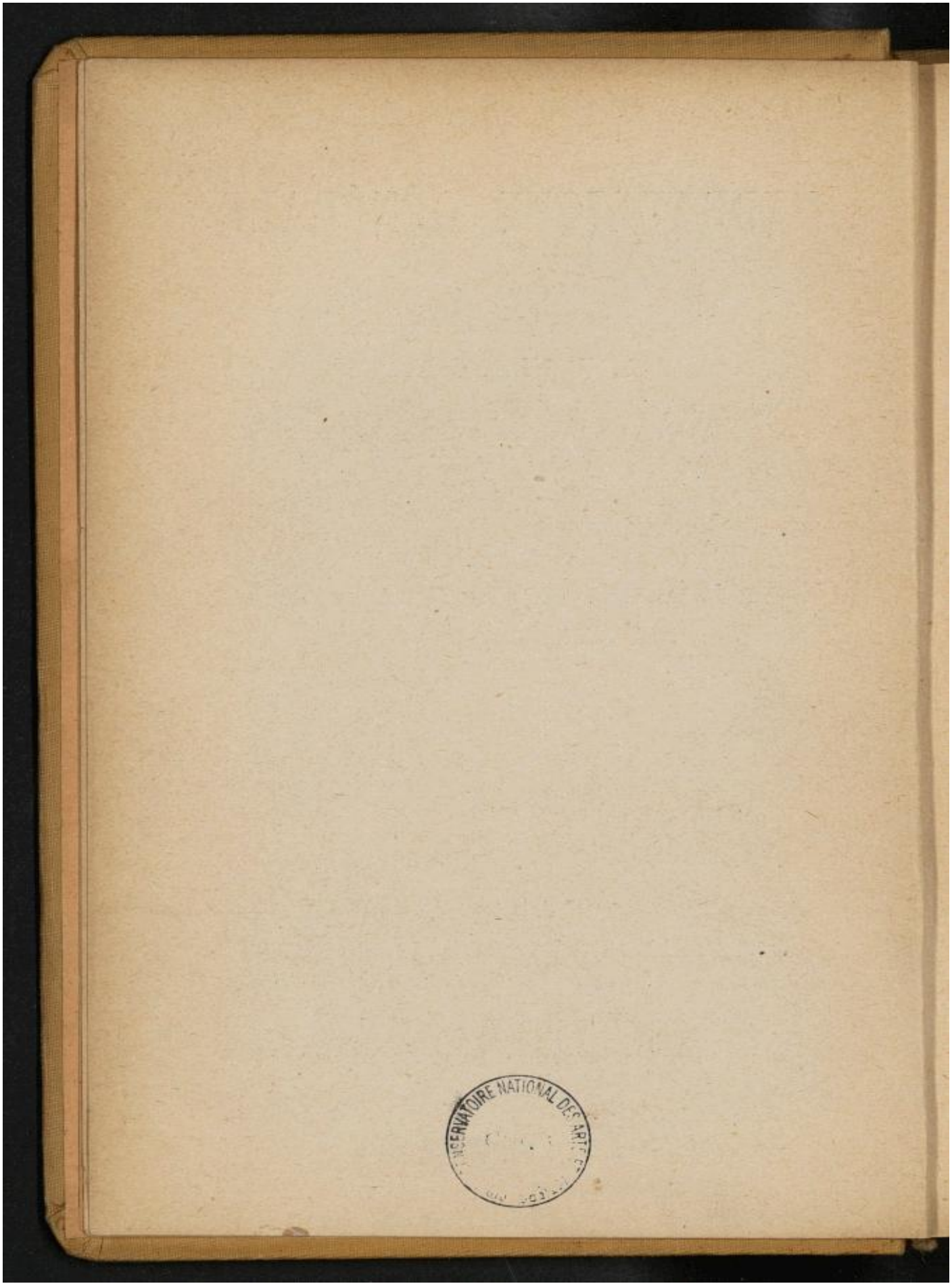
PARIS
OCTAVE DOIN ET FILS, ÉDITEURS
8, PLACE DE L'ODÉON, 8

1909

Tous droits réservés.

BIBLIOTHÈQUE DU CONSERVATOIRE NATIONAL des Arts et Métiers
12°Di 11 2
21 octobre 1920

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

AVANT-PROPOS

Nous avons énuméré, dans l'Avant-Propos du Tome I, les questions que nous réservions pour le présent Volume : au point de vue esthétique, leur caractère commun, en regard des problèmes déjà traités, est d'offrir un moins haut degré de perfection, d'exiger des postulats et des appels à l'expérience qui, bien que singulièrement réduits dans les solutions présentées ici, sont encore nombreux et portent sur des faits d'une simplicité moins frappante ; au point de vue du développement de la science, ces questions réclament encore, pour la plupart, de nouvelles et profondes recherches ; au point de vue pratique enfin, elles sont de celles dont l'Ingénieur demande instamment, sous une forme quelconque, une solution, fût-elle même empirique.

Reprenons, avec quelque détail, l'énumération que nous venons de rappeler.

Les problèmes traités dans le précédent Volume et relatifs au mouvement de l'eau dans les tuyaux et dans les canaux, supposent que le mouvement est graduellement varié dans toute la masse envisagée. Nous nous proposons d'examiner un certain nombre de cas où, dans des régions singulières, la variation graduelle des vitesses et leur quasi-parallélisme cessent d'avoir lieu : ce qui arrive, par exemple, aux endroits où la section du fluide subit, de l'amont vers l'aval, une diminution ou contraction brusque, à ceux où, inversement, elle présente un accroissement subit, à ceux encore où le tuyau ou le canal présente un coude de faible rayon faisant prendre aux filets une courbure notable.

Les phénomènes de contraction présentent sur ceux d'élar-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

gissement brusque une simplification importante : c'est que l'influence des frottements y est sensiblement négligeable, ainsi que le montrent les mesures de vitesse les plus précises faites sur des veines liquides. On est alors en droit d'appliquer à l'étude des faits de contraction des équations qui coïncident avec celles du mouvement des fluides parfaits. Nous examinerons surtout les écoulements par orifices et par déversoirs.

Les phénomènes d'élargissement de section vive ou d'épanouissement des filets exigent la mise en compte des frottements : la recherche de leurs lois est basée sur le principe de Borda et la formule du ressaut de Bellanger, perfectionnés par M. Boussinesq.

L'influence des coudes des tuyaux et des tournants des canaux découverts, très difficile à aborder, a donné lieu cependant à des aperçus utilisables.

Les phénomènes de mouvements ondulatoires, la propagation des ondes périodiques, des clapotis et des intumescences ne présentent les caractères que nous leur avons attribués, en négligeant les frottements du liquide, que pendant un temps relativement court, lors même que les mouvements sont bien continus. La houle, par exemple, offre à chaque instant une hauteur graduellement décroissante de vague en vague à mesure que l'on s'éloigne de son lieu de production. L'onde solitaire, dans ses pérégrinations, ne garde pas une forme invariable, et, tout en se déplaçant uniformément, elle s'aplatit peu à peu. Les lois d'extinction, d'amortissement de ces mouvements peuvent être étudiées d'une manière très complète.

La propagation des mêmes ondes à travers une colonne liquide contenue dans un tuyau élastique présente une importance pratique assez grande en vue de l'étude d'un phénomène qui se produit dans les canalisations d'eau et qui est connu sous le nom de *coup de bélier :* nous en ferons un examen détaillé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ledit phénomène sera ensuite envisagé du point de vue signalé par M. Alliévi. Cela nous fera sortir un peu du domaine que nous nous étions délimité; mais la question préoccupe trop les hydrauliciens pour que nous ayons pu songer à la laisser de côté, surtout après les résultats si simples obtenus par M. de Sparre.

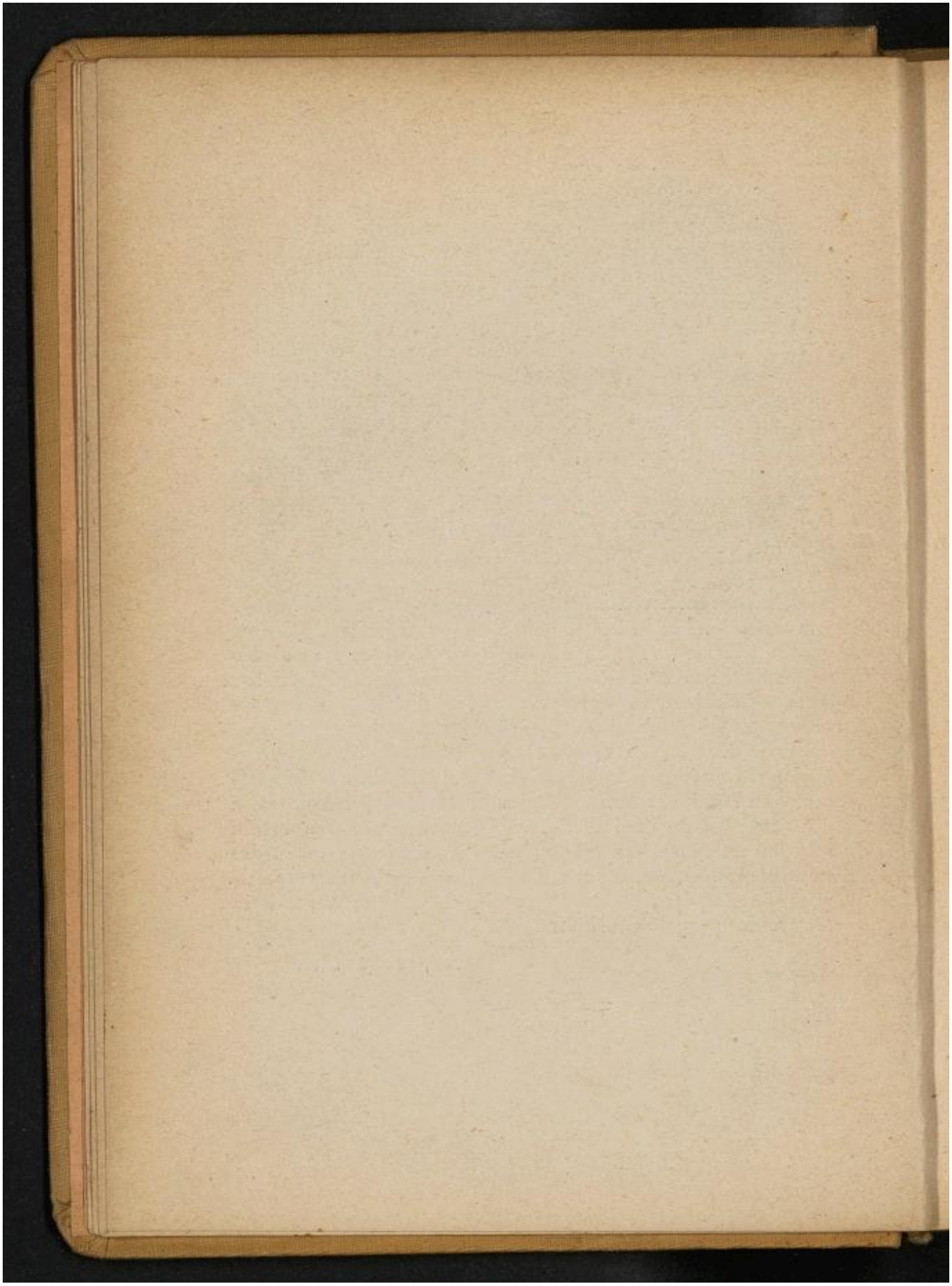
Enfin le problème de la résistance offerte au mouvement d'un solide par un fluide qui l'environne de toutes parts offre pour le physicien, comme pour l'ingénieur, un intérêt très vif : nous avons présenté le plus net des résultats acquis à son sujet.

Nous conserverons pour l'exposition la même division que dans le premier Volume, encore qu'elle paraisse rompre un peu l'ordre logique des questions : elle gradue bien les difficultés.

Malgré la condensation que nous avons cherché à donner à la rédaction, ce Précis présente encore une étendue assez grande : il n'en fallait pas moins pour donner une idée nette des travaux pénétrants de M. Boussinesq. En utilisant, dans sa théorie des mouvements tourbillonnaires et tumultueux, ce que les physiciens appellent une *méthode statistique*, méthode dont ils font aujourd'hui un usage courant dans la théorie cinétique de la matière, M. Boussinesq a été vraiment un *initiateur*. Mais, si la partie la plus pratique et la plus étendue de l'œuvre de l'éminent hydraulicien est la solution de la « désespérante énigme » du mouvement des eaux courantes, notre petit Livre montre qu'il n'est pas de question d'hydrodynamique appliquée qui ne doive à ce Maître des progrès considérables.

Lille, 20 août 1908.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

HYDRAULIQUE GÉNÉRALE

(PROBLÈMES A SINGULARITÉS ET APPLICATIONS)

PREMIÈRE SECTION

PHENOMÈNES OÙ L'INFLUENCE DES FROTTEMENTS EST NÉGLIGEABLE

CHAPITRE I

ÉCOULEMENT PAR LES ORIFICES

1. **Loi d'appel d'un fluide vers les diverses parties d'un orifice**[1]. — Nous allons traiter la question de l'écoulement d'un liquide pesant hors d'un vase par un *petit* orifice de forme quelconque pratiqué dans une mince paroi plane de ce vase, paroi relativement indéfinie et d'orientation quelconque, le jet liquide se produisant dans un espace où règne une pression constante.

L'orifice est ouvert à une distance assez grande des

[1] J. Boussinesq, **1**, p. 33-35; **2**, p. 537-545.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

bords de la paroi, et ses dimensions sont très petites par rapport à celles du fluide contenu dans le vase.

Nous prendrons pour origine des axes de référence le centre de gravité de l'orifice et pour axe des z la perpendiculaire à la paroi, dirigée hors du vase.

Les expériences de mesurage de vitesse faites sur la veine qui jaillit de l'orifice montrent que les frottements ont extrêmement peu d'importance ; on peut, par suite, regarder le mouvement moyen du fluide comme régi par les équations relatives aux fluides parfaits, et on est en droit d'appliquer le théorème de Lagrange et de Cauchy.

Si donc, à quelque distance de l'orifice, les vitesses initiales moyennes ont été nulles, il existera à tout instant ultérieur un potentiel φ des vitesses moyennes, lequel vérifiera l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi = 0, \qquad (1)$$

traduisant la condition de continuité ou d'incompressibilité.

Désignons par $f(x, y)$ la valeur, à l'époque t et aux divers points (x, y), de la composante de la vitesse normale à la paroi, valeur que nous supposerons *provisoirement donnée*, à chaque instant, et qui sera nulle aux points extérieurs à l'orifice. La fonction φ devra satisfaire à la relation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = f(x, y), \qquad \text{pour} \qquad z = 0. \qquad (2)$$

Eu égard à la petitesse des dimensions de l'orifice vis-à-vis de toutes les dimensions de la paroi et du vase, nous pouvons regarder la masse fluide comme indéfinie.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Très loin de l'orifice, les composantes u, v, w de la vitesse seront nulles, et φ ne sera qu'une simple fonction du temps. Comme on peut ajouter à φ une fonction arbitraire du temps sans changer ses dérivées en x, y, z, c'est-à-dire sans changer le régime des vitesses, il est loisible de supposer cette fonction arbitraire choisie de manière à ce que la fonction φ s'annule à l'infini.

Il ne saurait exister qu'une fonction φ vérifiant les conditions (1) et (2) et s'annulant à l'infini. En effet, la différence φ_1 de deux telles fonctions s'annulerait aussi à l'infini et satisferait aux relations

$$\Delta\varphi_1 = 0, \qquad (1')$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = 0, \qquad \text{pour} \qquad z = 0. \qquad (2')$$

Multiplions l'équation (1') par $2\varphi_1$ et par un élément $d\varpi$ du volume ϖ d'une demi-sphère décrite du côté des z négatifs, autour de l'origine comme centre, avec un rayon donné $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; intégrons le résultat dans toute l'étendue de la demi-sphère, après avoir remplacé $2\varphi_1\Delta\varphi_1$ par

$$\Delta\varphi_1^2 - 2\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right].$$

L'application de la formule de Green donne alors

$$\int \frac{d\varphi_1^2}{dn}\, d\sigma = 2\int_\varpi \left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi. \qquad (3)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Sur la surface du cercle σ_1 limitant l'hémisphère suivant le plan des xy, on a :

$$\frac{d\varphi_1^2}{dn} = \frac{\partial\varphi_1^2}{\partial z} = 0,$$

en vertu de (2'). Sur la surface σ de l'hémisphère même, on a :

$$\frac{d\varphi_1^2}{dn} = \frac{d\varphi_1^2}{dz};$$

si donc le second membre de (3) n'est pas nul, on aura : $\int_\sigma \frac{d\varphi_1^2}{dz}\, d\sigma > 0$, ou $\int_\sigma \frac{d\varphi_1^2}{dz} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} > 0$,

ou enfin :

$$\frac{d}{dz}\int_\sigma \varphi_1^2 \frac{d\sigma}{\sigma} > 0.$$

Cette inégalité montre que, si la valeur moyenne de φ_1^2 sur toute l'étendue de la demi-sphère n'est pas nulle, elle croît avec z. Elle ne saurait donc s'annuler à l'infini. Si cette valeur moyenne est nulle, le second membre de (3) est nul, et par suite φ_1 ne saurait dépendre de x, y, z, et, dépendant de t seulement, φ_1 ne saurait s'annuler constamment à l'infini sans être identiquement nul[1].

La fonction φ étant ainsi complètement définie, proposons-nous de la déterminer, ou, tout au moins, d'en donner une interprétation.

Soit ds un élément superficiel de l'orifice, entourant le point (ξ, η) : le débit à travers cet élément est $dQ = f(\xi, \eta)ds$. Imaginons qu'on ait étalé sur la sur-

[1] J. Boussinesq, 4, p. 585.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

face de l'orifice une couche de matière fictive attirant les particules fluides situées à l'intérieur du vase conformément à la loi de Newton, et qu'on ait attribué à l'élément ds la masse fictive $d\mathrm{Q}$ ou la densité superficielle $f(\xi,\eta)$. Les composantes de l'attraction exercée par cette couche sur une particule fluide de position (x, y, z), et rapportée à l'unité de masse, sont les dérivées par rapport à x, y, z de la fonction

$$\mathrm{V}=\int\frac{d\mathrm{Q}}{r},$$

où $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}$ et où l'intégration peut être étendue à tout le plan des xy, la fonction φ étant nulle en dehors de l'orifice.

Ce potentiel V satisfait à l'équation de Laplace

$$\Delta\mathrm{V}=0;$$

il tend vers zéro ainsi que ses dérivées à des distances extrêmement grandes de la surface attirante. Enfin on sait que la densité superficielle en un point de la surface attirante est le produit de $-\frac{1}{4\pi}$ par la somme des deux dérivées de la fonction V prises à partir de ce point dans les deux sens opposés normaux à la surface. La couche étant plane, V est symétrique de part et d'autre de son plan ; les deux dérivées en question sont égales entre elles et à l'une d'elles, $-\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial z}$, prise à partir de $z=0$, en allant vers les z négatifs. La densité superficielle se réduit donc à $\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial z}$, et l'on aura : $\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial z}=f(x,y)$, pour $z=0$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

D'après cela, la fonction $\frac{1}{2\pi} V$ satisfera aux conditions qui déterminent la fonction φ d'une manière unique. Nous aurons donc :

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dQ}{r},$$

et par suite :

$$(u, v, w) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial(x, y, z)} \int \frac{dQ}{r}.$$

Un calcul simple permettrait de vérifier, d'une manière directe, cette assertion. On partirait de l'une des trois expressions :

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+\xi', y+\eta') d\xi' d\eta'}{\sqrt{z^2 + \xi'^2 + \eta'^2}}, \qquad (4)$$

ou :

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} \frac{f(x+\rho\cos\omega, y+\rho\sin\omega)}{\sqrt{z^2+\rho^2}} \rho d\rho, \qquad (5)$$

dont la deuxième et la troisième dérivent de la première en posant $\xi' = x - \xi = \rho\cos\omega$, $\eta' = y - \eta = \rho\sin\omega$.

Bornons-nous à calculer la valeur de $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ pour $z = 0$. A cet effet, dérivons la troisième expression de φ par rapport à z, et posons dans le résultat $\rho = -z\rho'$;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la variable ρ', subtituée à ρ, est de même signe que ρ, $-z$ étant positif. Nous trouvons :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} f(x - z\rho'\cos\omega,$$

$$y - z\rho'\sin\omega)\frac{\rho' d\rho'}{(1+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

pour $z = 0$, il vient :

$$\frac{1}{2} f(x,y)\int_0^{\infty} (1+\rho'^2)^{-\frac{3}{2}} d\rho'^2 \quad \text{ou} \quad f(x,y).$$

Comme les dérivées du potentiel newtonien par rapport à x, y, z donnent les composantes de l'attraction au point (x, y, z), la vitesse de la particule de centre (x, y, z) coïncide, au facteur $\frac{1}{2\pi}$ près, avec la force attractive exercée en ce point. Ainsi, « la vitesse du fluide à l'intérieur du réservoir est égale en chaque point, pour la grandeur et pour la direction, à l'attraction qui y serait exercée, sur l'unité de masse, par une certaine quantité de matière qu'on aurait répandue en couche infiniment mince sur l'orifice, en la répartissant entre les diverses régions de celui-ci proportionnellement à la vitesse longitudinale effective qui s'y trouve produite. En d'autres termes, la dépense fournie par les diverses parties de l'orifice semble déterminer, sur le fluide intérieur, une sorte d'appel régi par la même loi que l'attraction newtonienne[1]. »

Les composantes u ou v de la vitesse transversale à

[1] J. Boussinesq, 2, p. 545.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'intérieur du réservoir s'obtiendront en dérivant, par rapport à x ou à y, l'expression (5) de φ. Faisons suivre cette dérivation des changements de variables indiqués plus haut; puis notons qu'intégrer par rapport à ω de π à 2π revient à intégrer par rapport à ω de o à π en changeant de signe cos ω et sin ω; nous obtiendrons, par exemple :

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\omega\, d\omega$$

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x-\rho\cos\omega, y-\rho\sin\omega) - f(x+\rho\cos\omega, y+\rho\sin\omega)}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\rho^2 d\rho.$$

On en déduirait v en changeant le premier facteur cos ω en sin ω.

A la traversée du plan de l'orifice, soit pour $z = o$, la composante transversale u devient :

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\omega\, d\omega$$

$$\int_0^{\infty} [f(x-\rho\cos\omega, y-\rho\sin\omega) - f(x+\rho\cos\omega, y+\rho\sin\omega)]\frac{d\rho}{\rho};$$

sous réserve que la fonction f admette des dérivées premières partout finies, u et v resteront finies et déterminées, malgré le dénominateur ρ qui s'annule à la limite inférieure d'une intégrale; car le numérateur s'annule aussi, et la limite de son quotient par ρ coïncide avec la valeur de $-2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\omega + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\omega\right)$ pour $\rho = o$. Au contraire, elle devient infinie au point (x, y) si la fonction f est discontinue en ce point. Ainsi « la vitesse transversale serait infinie, dans

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le plan de l'orifice, aux endroits où la vitesse longitudinale (normale à l'orifice) viendrait à varier brusquement d'un point à l'autre[1] ».

2. **Équations dont dépend la forme d'une veine ; conséquences.** — Nous avons admis, dans le paragraphe précédent, que l'on connaissait la fonction $f(x, y)$, composante longitudinale w de la vitesse. Pour déterminer cette fonction, il faudrait trouver l'expression de φ, non seulement pour les points intérieurs au vase, mais aussi pour ceux de la veine qui s'écoule. La fonction φ, solution de l'équation de Laplace, $\Delta\varphi = 0$, en vertu de l'équation d'incompressibilité, a ses dérivées en x, y, z qui s'annulent dans le réservoir à une distance infinie de l'origine ; sa dérivée en z est nulle en outre sur la paroi où est percé l'orifice. Elle vérifie enfin une relation exprimant qu'en tous les points de la surface libre de la veine, des molécules animées des vitesses locales moyennes glissent sur cette surface de façon à y rester constamment.

L'équation de la surface libre de la veine s'obtient en exprimant qu'en chacun de ses points la pression est égale à la pression p_a de l'atmosphère ambiante, et en utilisant l'extension de la relation de Bernoulli, établie pour les mouvements irrotationnels.

Si ζ est la distance d'une particule fluide à un plan horizontal fixe placé au-dessus, en sorte que

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d(g\zeta),$$

[1] J. Boussinesq, **2**, p. 545.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'expression

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{1}{2g}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]-\zeta+\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

sera une simple fonction de t. Comme à des distances notables de l'orifice, en tout point où la pression est p_0 et l'altitude ζ_0, la vitesse est insensible et les dérivées de φ négligeables, cette fonction de t se réduit à $\frac{p_0}{\rho g}-\zeta_0$, et l'on aura :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2+2\frac{\partial \varphi}{\partial t}=2gh, \qquad (6)$$

en désignant par h la *hauteur de charge*

$$h=\left(\zeta-\frac{p}{\rho g}\right)-\left(\zeta_0-\frac{p_0}{\rho g}\right).$$

L'équation de la surface libre s'obtiendra en remplaçant dans la relation ainsi trouvée p par p_a. Soit :

$$\psi(x, y, z, t)=2gh \qquad (7)$$

cette équation. La condition de glissement des molécules sur la surface libre (molécules animées des vitesses moyennes locales) se déduirait de cette équation en exprimant que celle-ci reste vérifiée lorsqu'on y donne simultanément à t, x, y, z les accroissements

$$dt, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}dt, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}dt, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}dt.$$

Nous ne nous proposons d'étudier la constitution de la veine qu'aux environs de l'orifice, entre cet orifice et l'endroit de la veine où les surfaces $\varphi=\text{const.}$, trajectoires orthogonales des filets, deviennent à peu près

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

planes et parallèles au plan de l'orifice; la première section où cette condition est réalisée est dite *section contractée :* c'est à elle que se termine la rapide convergence des filets produite à la sortie du vase. Comme la région comprise entre la section contractée et l'orifice est très restreinte, et que celle où le liquide du vase a une vitesse sensible est aussi restreinte, on pourra regarder ζ comme constant. Par suite aussi, il sera loisible d'admettre que h est constant sur la paroi de la partie envisagée de la veine, et la condition à former s'écrira :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial t}=0. \qquad (8)$$

La détermination de la fonction φ par l'ensemble des équations que nous avons établies paraît excéder la puissance de l'analyse, particulièrement à cause de la forme non linéaire des conditions spéciales relatives à la surface. Il en résulte l'impossibilité de déterminer, *par le calcul seul*, le débit total Q de l'orifice ainsi que son mode de répartition à travers l'orifice, même en se limitant au cas ordinaire d'un écoulement permanent.

Cependant, à supposer que l'ensemble des équations établies détermine complètement φ, nous allons en déduire quelques lois générales, et notamment montrer que, pour tous les orifices d'une même forme quelconque, le rapport $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ de l'aire de la section contractée à l'aire de l'orifice, ou *coefficient de contraction*, est constant, si la quantité h est sensiblement indépendante du temps et très grande relativement aux dimensions de l'orifice.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Aux variables x, y, z, t et à la fonction φ substituons les variables x_1, y_1, z_1, t_1 et la fonction φ_1 définies par

$$x = x_1\sqrt{\sigma}, \quad y = y_1\sqrt{\sigma}, \quad z = z_1\sqrt{\sigma},$$

$$t = t_1\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2gh}}, \quad \varphi = \sqrt{\sigma}\,\sqrt{2gh}\,\varphi_1;$$

les premières équations conservent la même forme, mais portent sur la fonction φ_1 et les variables x_1, y_1, z_1, l'orifice, semblable au proposé, ayant pour aire l'unité. L'équation (6) devient :

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}\right)^2+2\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}=1.$$

Si ψ_1 désigne tout le premier membre, comme

$$\psi = 2gh\psi_1,$$

il vient :

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial z_1}+\frac{\partial\psi_1}{\partial t_1}=0.$$

Les équations qui définissent φ_1 pour un orifice d'aire égale à l'unité et pour lequel $2gh$ vaut un, feront connaître une fonction $\varphi(x_1, y_1, z_1, t_1)$ ne contenant aucun paramètre de grandeur.

Pour un orifice semblable quelconque, on aura :

$$\varphi = \sqrt{\sigma}\,\sqrt{2gh}\,\varphi_1\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma}}, \frac{y}{\sqrt{\sigma}}, \frac{z}{\sqrt{\sigma}}, \frac{t\sqrt{2gh}}{\sqrt{\sigma}}\right).$$

On en déduit :

$$(u, v, w) = \sqrt{2gh}\,\frac{\partial\varphi_1(x_1, y_1, z_1, t_1)}{\partial(x_1, y_1, z_1)}.$$

Ainsi les composantes de la vitesse sont le produit de $\sqrt{2gh}$ par des fonctions de x_1, y_1, z_1, t_1. Pour un même état initial des vitesses [soit pour une même

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fonction $\varphi(x_1, y_1, z_1, 0)]$, ces composantes, aux points homologues, sont proportionnelles à $\sqrt{2gh}$, si on les considère, dans les divers vases, à des époques telles que $\frac{t\sqrt{2gh}}{\sqrt{\sigma}}$ ait la même valeur.

Si le mouvement est devenu permanent, t disparaît de l'expression de φ, et u, v, w se réduisent aux produits de $\sqrt{2gh}$ par des fonctions de x_1, y_1, z_1 seulement.

D'après cela, « à l'état permanent, les vitesses produites sous de fortes charges dans des réservoirs percés, en minces parois planes indéfinies, d'orifices d'une même forme quelconque, sont donc simplement proportionnelles aux racines carrées des hauteurs de charge et distribuées pareillement aux points homologues ; de manière que la forme des filets, celle de la veine et le coefficient de contraction soient indépendants de la charge et des dimensions absolues de l'orifice. De plus, pour un même mode de répartition des vitesses dans l'état initial (comme, par exemple, quand les vitesses sont partout nulles au commencement de l'écoulement), le régime permanent emploie à s'établir des temps inégaux, qui sont en raison directe des dimensions homologues des orifices et en raison inverse des racines carrées des hauteurs de charge[1]. »

Les expériences de Graeff, faites au réservoir du Furens (près de Saint-Étienne), ont montré la constance des coefficients de contraction pour des hauteurs de charge allant jusqu'à 40 mètres[2].

[1] J. Boussinesq, 2, p. 551-552.
[2] Graeff, p. 91, Note.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3. **Propriétés de la vitesse longitudinale à travers un orifice.** — L'impossibilité où l'on se trouve de déterminer le potentiel des vitesses dans le réservoir et dans la veine, et, par suite, la répartition du débit à travers l'orifice, a conduit à rechercher des propriétés de la vitesse longitudinale aux divers points de l'orifice, $w = f(x, y)$, qui permissent d'en trouver une expression approchée et qui pussent fournir une valeur sensiblement exacte du coefficient de contraction ou de débit, $m = \frac{\sigma_1}{\sigma}$, au moins dans les cas simples où la fonction f ne dépend que d'un argument, par exemple dans le cas où l'orifice a la forme d'un cercle ou d'un rectangle très allongé. Des quatre propriétés que nous allons indiquer, deux sont fournies par la théorie, une est d'origine expérimentale, et la quatrième est mixte, en ce sens qu'elle emprunte à l'expérience la notion de section contractée.

1° Lorsque l'écoulement est établi, la composante normale w à travers l'orifice est finie aux divers points de l'orifice; elle doit devenir infiniment petite contre les bords de l'orifice; sinon, nulle hors de l'orifice et finie sur le contour, elle présenterait sur ce contour une discontinuité qui nécessiterait que la composante transversale de la vitesse y devînt infinie. Ainsi, sur le contour de l'orifice, la fonction f doit s'annuler.

2° Les points du périmètre de l'orifice appartenant à la surface libre de la veine, les relations spéciales à cette surface y devront être vérifiées; notons que la dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ y est nulle, et remplaçons dans l'équa-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tion (8) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ par leurs valeurs tirées de (4) en regardant f comme variable avec t, et spécifiées pour $z = 0$; nous obtiendrons une relation où ne figurera comme inconnue que la fonction f, et qui pourra par suite servir à la détermination de cette fonction. Dans le cas particulier du mouvement permanent que nous envisageons exclusivement, la relation en question se réduira à :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 2gh, \quad \text{(sur le bord de l'orifice).}$$

Nous supposerons donnée la hauteur de charge h.

Si V_0 est la vitesse sur le contour de l'orifice, cette vitesse, tangente au plan de l'orifice, a, d'après cela, pour mesure $\sqrt{2gh}$.

3° H. Bazin[1] a mesuré (à l'aide d'un tube double de Pitot) la vitesse V du filet central, évidemment normale au plan de l'orifice pour les formes symétriques de celui-ci, et a déterminé son rapport à la vitesse précédente V_0. Il a obtenu, dans le cas d'un orifice circulaire de $0^m,10$ de rayon :

$$V = 0,632\ V_0,$$

et dans le cas d'un orifice rectangulaire de $0^m,20$ de hauteur sur $0^m,80$ de largeur (sensiblement assez large pour que la contraction latérale soit insignifiante) :

$$V = 0,690\ V_0.$$

4° Soit $\sigma_1 = m\sigma$ la section contractée traversée à peu près normalement par les filets fluides. Nous nous pro-

[1] H. Bazin, 1, p. 31 et 41.

BIBLIOTHÈQUE CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS CNAM

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

posons, dans le cas du mouvement permanent, de former une expression du coefficient de contraction m, qui montrera en particulier que ce coefficient est supérieur à $\frac{1}{2}$.

Nous appliquerons à cet effet le théorème des quantités de mouvement, projetées sur l'axe oz, à la masse fluide incluse, à l'instant t, entre la section contractée et une demi-sphère décrite, dans le réservoir, autour de l'origine comme centre; le rayon R de cette demi-sphère est supposé assez grand pour que le liquide du vase soit quasi en repos à son extérieur, en sorte que la pression y suive la loi hydrostatique, et que la surface de la sphère soit traversée avec des vitesses insensibles.

Pendant l'instant dt, la quantité de mouvement du fluide affluant dans la sphère est par suite négligeable. La variation de la quantité de mouvement de la masse liquide envisagée est donc égale à la quantité de mouvement du fluide sorti pendant le même instant par la section contractée; comme l'équation (6) montre, dans le cas du mouvement permanent, que la vitesse à la traversée de cette section est partout égale à $\sqrt{2gh}$, soit à V_0, la quantité cherchée sera $\rho m\sigma V_0 dt . V_0$, et sa valeur par unité de temps sera $\rho m\sigma V_0^2$. Nous devons égaler cette quantité à la somme algébrique des projections (suivant oz) des pressions supportées par la surface de la masse fluide considérée (les projections des poids sur oz étant nulles, car nous nous limiterons au cas d'une paroi verticale).

Cette surface est formée par l'hémisphère, par une portion σ' de la paroi où est pratiqué l'orifice, par la sec-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tion contractée et par une portion de la surface libre de la veine comprise entre l'orifice et la section contractée, lesquelles ont en tout σ pour projection sur le plan de l'orifice. Or en deux points situés l'un sur la sphère (où la vitesse est sensiblement nulle), l'autre sur le reste de la paroi, s'ils appartiennent à une même parallèle à oz, les pressions diffèrent de $\frac{1}{2}\rho V^2$ ou de $\frac{1}{2}\rho V_0^2$ [V désignant la vitesse du fluide qui glisse sur l'élément $d\sigma'$ de la paroi et V_0 la vitesse, à fort peu près commune, de celui qui sillonne la surface libre ou qui traverse la section contractée]. Par suite, la somme algébrique cherchée des projections des pressions sur oz se réduit à :

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2\sigma + \int \frac{1}{2}\rho V^2 d\sigma'.$$

Il vient ainsi :

$$\rho m\sigma V_0^2 = \frac{1}{2}\rho\left(V_0^2\sigma + \int V^2 d\sigma'\right),$$

ou :

$$m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{V^2}{V_0^2}\frac{d\sigma'}{\sigma}. \qquad (10)$$

La dernière intégrale, bien qu'inconnue, est positive; donc m est supérieur à $\frac{1}{2}$, comme nous l'avions annoncé.

4. Calcul approché du débit et de sa répartition entre les divers éléments superficiels

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'un orifice circulaire. — Le débit Q à travers l'orifice a pour expression :

$$Q = m\sigma V_0 = m\sigma\sqrt{2gh}\,.$$

H. Bazin a trouvé pour le cas d'un orifice circulaire : $m = 0{,}598$.

Nous allons montrer que les propriétés précédentes conduisent sensiblement à cette valeur.

La fonction f ne dépend que de la distance

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

et même est une fonction paire de r. Elle doit s'annuler pour $r = R$. Nous poserons donc :

$$f = V_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\left(c_0 + c_1\frac{r^2}{R^2} + c_2\frac{r^4}{R^4} + \dots\right),$$

c_0, c_1, c_2, ... étant des coefficients constants. Le débit pour une couronne élémentaire $d\sigma = 2\pi r dr$ sera donc, en posant $s = \frac{r^2}{R^2}$:

$$dQ = 2\pi r dr\,.\,V_0\sum c_n s^n(1-s) = \pi R^2 V_0\sum c_n(s^n - s^{n+1})\,ds.$$

Pour l'orifice entier, on aura :

$$Q = \sigma V_0\int_0^1 c_n(s^n - s^{n+1})\,ds.$$

En comparant les deux expressions de Q, on trouve :

$$m = \sum\frac{c_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{c_0}{1\,.\,2} + \frac{c_1}{2\,.\,3} + \frac{c_3}{3\,.\,4} + \dots \qquad (11)$$

Comme au centre $r = 0$, la valeur de f se réduit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à $c_0 V_0$; en l'égalant à la valeur $0{,}632\ V_0$ fournie par l'expérience, il vient : $c_0 = 0{,}632$.

Proposons-nous, d'autre part, de calculer la vitesse V en un point M de la paroi situé à une distance R′ de l'origine, supérieure à R_0. Par raison de symétrie, cette vitesse est dirigée suivant le rayon du point M ; quant à sa grandeur, elle se déduira du potentiel φ des vitesses, que nous calculerons préalablement.

Considérons une couronne élémentaire de l'orifice, de rayon r et de largeur dr ; deux rayons polaires issus de M et faisant entre eux l'angle infiniment petit $d\omega$ découpent dans cette couronne un parallélogramme élémentaire ; si ρ est la distance d'un sommet à M, la hauteur de ce parallélogramme est $\rho d\omega$; quant à sa base, elle est la variation du rayon polaire ρ lorsque, laissant ω constant, on donne à r la variation dr : ω étant l'angle polaire du sommet considéré, comme on a :

$$r^2 = R'^2 + \rho^2 - 2R'\rho\cos\omega,$$

cette variation de ρ est définie par :

$$r\,dr = (\rho - R'\cos\omega)\,d\rho ;$$

elle vaut :

$$\frac{r\,dr}{\rho - R'\cos\omega}, \quad \text{ou} \quad \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - R'^2\sin^2\omega}} ;$$

l'aire du parallélogramme est alors : $\dfrac{\rho\, r\,dr\,d\omega}{\sqrt{r^2 - R'^2\sin^2\omega}}$;

l'élément correspondant $\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{dQ}{\rho}$ du potentiel φ est :

$$\frac{1}{2\pi} f\left(\frac{r^2}{R^2}\right) \frac{r\,dr\,d\omega}{\sqrt{r^2 - R'^2\sin^2\omega}} .$$

Le potentiel de la couronne est donc (en notant qu'à une même valeur de ω correspondent deux éléments

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de l'intégrale calculée, attachés à deux déterminations de signes contraires du radical, de sorte que ω variant entre ses deux limites $\mp \arcsin \frac{r}{R'}$, chaque terme de l'intégrale doit être doublé) :

$$\frac{rdr}{\pi} f\left(\frac{r^2}{R^2}\right) \int_{-\arcsin\frac{r}{R'}}^{\arcsin\frac{r}{R'}} \frac{d\omega}{\sqrt{r^2 - R'^2 \sin^2\omega}}.$$

Introduisons la variable α définie par

$$\sin\alpha = \frac{R'}{r}\sin\omega,$$

et qui varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. On a :

$$d\omega = \frac{r}{R'}\frac{\cos\alpha}{\cos\omega}d\alpha = r\cdot\frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{R'^2 - r^2\sin^2\alpha}}.$$

Le potentiel précédent devient :

$$\frac{rdr}{\pi} f\left(\frac{r^2}{R^2}\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{R'^2 - r^2\sin^2\alpha}},$$

ou :

$$\frac{R^2}{\pi R'} f(s)ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - s\beta\sin^2\alpha}},$$

en posant $\beta = \frac{R^2}{R'^2}$. Par suite :

$$\varphi = \frac{R^2}{\pi}\int_0^1 f(s)\,ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R'd\alpha}{\sqrt{1 - s\frac{R^2}{R'^2}\sin^2\alpha}}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La vitesse cherchée V est, au signe près, la dérivée de φ par rapport à R'. Le calcul se fait sans difficulté, et grâce à une réduction remarquable il vient :

$$V = \frac{\beta}{\pi} \int_0^1 f(s)ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \beta s \sin^2 \alpha)^{-\frac{3}{2}} d\alpha. \quad (12)$$

Développons en série la puissance $-\frac{3}{2}$ du binôme; nous obtiendrons :

$$V = \frac{\beta}{2} \left\{ \int_0^1 f(s)ds + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \beta \int_0^1 sf(s)ds \right.$$
$$+ 5\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \beta^2 \int_0^1 s^2 f(s)ds + \dots$$
$$\left. \dots + (2q+1)\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2q-1}{2q}\right)^2 \beta^q \int_0^1 s^q f(s)ds + \dots \right\}.$$

Substituons à $f(s)$ sa valeur $V_0 \sum c_n (s^n - s^{n+1})$; effectuons les intégrations indiquées et rappelons-nous l'expression, trouvée tout à l'heure, du coefficient m. Il viendra :

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\beta}{2} \left\{ m + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \beta \sum \frac{c_n}{(n+2)(n+3)} \right.$$
$$+ 5\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \beta^2 \sum \frac{c_n}{(n+3)(n+4)} + \dots \quad (13)$$
$$\dots + (2q+1)\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2q-1}{2q}\right)^2 \beta^q$$
$$\left. \sum \frac{c_n}{(n+q+1)(n+q+2)} + \dots \right\}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'expression (12) de V permet de calculer la vitesse au bord de l'orifice. Là, on a $\beta = 1$. Par suite,

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{\pi} \sum c_n A_n,$$

en posant :

$$A_n = \int_0^1 (s^n - s^{n+1}) ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - s \sin^2 \alpha)^{-\frac{3}{2}} d\alpha.$$

Prenons pour variable, au lieu de α, $\tau = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, et au lieu de s, $\theta = 4\tau^2 s$; il vient :

$$A_n = \int_0^1 (1+\tau^2)^2 d\tau \int_0^{4\tau^2} \frac{\theta^n (4\tau^2 - \theta) d\theta}{(4\tau^2)^{n+2} \left[\sqrt{(1+\tau^2)^2 - \theta}\right]^3}.$$

Une intégration par partie, seule pour $n = 0$, suivie de l'emploi d'une relation de récurrence pour $n > 0$, conduit à :

$$A_0 = \frac{4}{3}; \qquad A_1 = \frac{4}{3^2} \cdot \frac{7}{5};$$

$$A_2 = \frac{4 \cdot 157}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}; \qquad A_3 = \frac{4 \cdot 73 \cdot 99}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9};$$

$$A_4 = \frac{5 \cdot 62417 \cdot 27}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11}; \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Ainsi, pour $R' = R$, on a :

$$\frac{V}{V_0} = \frac{4}{3\pi} \left(c_0 + \frac{7}{15} c_1 + \frac{157}{525} c_2 + \frac{803}{3675} c_3 + \ldots \right). \quad (14)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cela posé, revenons aux relations établies au précédent paragraphe. Nous avons trouvé :

$$\frac{V}{V_0} = 1 \quad \text{pour} \quad R = R',$$

$$m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{V^2}{V_0^2}\frac{d\sigma'}{\sigma}.$$

Comme on peut prendre pour $d\sigma'$ l'expression $\frac{2\pi R' dR'}{\pi R^2}$ ou $d\left(\frac{1}{\beta}\right)$ ou $-\frac{d\beta}{\beta^2}$, nous aurons, pour balayer toute la paroi, à faire varier β de 1 à 0. Eu égard aux formules (13) et (14), nous obtenons les relations :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{7}{15}c_1 + \frac{157}{525}c_2 + \frac{803}{3675}c_3 + \ldots = \frac{3\pi}{2} - c_0 = 1,7242, \\ &m = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\int_0^1 \left\{ m + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \beta \sum \frac{c_n}{(n+2)(n+3)} \right. \\ &\left. + 5\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \beta^2 \sum \frac{c_n}{(n+3)(n+4)} + \ldots \right\}^2 d\beta, \end{aligned}\right\}$$

auxquelles il faut joindre l'expression

$$m = \frac{c_0}{1.2} + \frac{c_1}{2.3} + \frac{c_2}{3.4} + \ldots$$

Notons en passant que la précédente égalité entraîne :

$$m > \frac{1}{2} + \frac{m^2}{8};$$

le coefficient de contraction est par suite supérieur à $2(2-\sqrt{3})$ ou à 0,536.

Cherchons maintenant à satisfaire à ces trois rela-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tions en ne gardant qu'un seul des coefficients $c_1, c_2, c_3, \ldots$ et voyons quel est celui qui permettra d'y satisfaire avec la plus grande approximation. Essayons successivement c_1, c_2, c_3, ..., c_6, ... La première équation donne la valeur du c essayé, la dernière la valeur correspondante de m. Ainsi on trouve :

$$\begin{aligned} c_1 &= 3{,}6947, \quad c_2 = 5{,}7656, \quad c_3 = 7{,}8909, \\ m_1 &= 0{,}9318, \quad m_2 = 0{,}7965, \quad m_3 = 0{,}7105, \\ c_4 &= 10{,}0502, \quad c_5 = 12{,}2329, \quad c_6 = 14{,}4320, \ldots \\ m_4 &= 0{,}6510, \quad m_5 = 0{,}6073, \quad m_6 = 0{,}5737, \ldots \end{aligned}$$

En substituant ces nombres successivement dans la relation intermédiaire, on reconnaît, après des calculs assez laborieux [1], que, pour c_5 et m_5, cette équation est très sensiblement vérifiée.

Ainsi, la loi de répartition du débit définie par :

$$w = V_0 (0{,}632 + 12{,}2329\, s^5)(1 - s),$$

ou : $$w = V_0 \left(0{,}632 + 12{,}2329 \frac{r^{10}}{R^{10}}\right)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

satisfait à toutes les conditions que nous avons trouvées ; et elle donne, pour coefficient de contraction, le nombre $$m = 0{,}6073,$$

très voisin du nombre 0,598, trouvé par H. Bazin. Ce résultat est d'autant plus satisfaisant que l'existence de petits frottements négligés ici doit, pour la vitesse $0{,}632\, V_0$ observée au centre, réduire légèrement le débit vers les bords.

Il est aisé de suivre les variations de w : « la vitesse

[1] J. Boussinesq, **3**, p. 274-277; ou 2e Note.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

longitudinale décroît lentement autour du centre, à cause de l'inclinaison de plus en plus grande des filets, jusqu'à la distance $r = 0{,}6075\,R$, où elle atteint son minimum $0{,}45160\,V_0$. Au delà, l'influence de l'accroissement de vitesse, dû aux diminutions de pression qu'entraînent les forces centrifuges, l'emporte sur celle de l'inclinaison ; et w grandit jusqu'à la distance $r = 0{,}90205\,R$, où elle atteint son maximum $0{,}93065\,V_0$. Aux distances supérieures, l'influence des inclinaisons de plus en plus fortes des filets l'emporte de nouveau, pour réduire finalement à zéro le débit, $V_0 f(1)$ sur le bord, où cependant la vitesse d'écoulement atteint son maximum V_0[1]. »

5. **Calcul approché du débit et de sa répartition entre les divers éléments superficiels d'un orifice rectangulaire très large.** — Supposons que l'orifice rectangulaire ait ses arêtes horizontales assez grandes par rapport à ses arêtes verticales $2b$ pour qu'on puisse les regarder comme indéfinies, en sorte que l'écoulement se fasse identiquement dans tout plan perpendiculaire à la grande dimension. Prenons la grande médiane du rectangle comme axe des x. A la distance η de cet axe, la vitesse w aura une expression de la forme

$$w = V_0 \left(c_0 + c_1 \frac{\eta^2}{b^2} + c_2 \frac{\eta^4}{b^4} + \dots \right) \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2} \right),$$

ou, en appelant s le rapport $\frac{\eta^2}{b^2}$:

$$w = V_0 \sum c_n (s^n - s^{n+1}).$$

[1] J. Boussinesq, **3**, p. 277.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour $s=0$, $w=V=0{,}690\,V_0$, en sorte que

$$c_0=0{,}690.$$

En formant l'expression du débit (par unité de largeur d'orifice), on obtient :

$$2\int_0^b w\,d\eta = bV_0\int_0^1 \Sigma c_n(s^n-s^{n+1})\frac{ds}{\sqrt{s}},$$

et on en conclut la valeur suivante du coefficient de contraction :

$$m=2\sum\frac{c_n}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$=2\left[\frac{c_0}{1.3}+\frac{c_1}{3.5}+\frac{c_2}{5.7}+\dots\right].$$

Estimons maintenant la vitesse V dans le plan de l'orifice, aux distances y supérieures à b.

Un élément $d\xi d\eta$ de la bande d'orifice, de largeur $d\eta$, située à la distance η de ox, donne une attraction sur un point placé en (x, y), valant :

$$\frac{f(s)\,d\xi d\eta}{2\pi\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]},$$

et ayant pour composante normale à ox :

$$\frac{f(s)}{2\pi}(y-\eta)\,d\eta\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]^{-\frac{3}{2}}d\xi.$$

Intégrée de $\xi=-\infty$ à $\xi=+\infty$, cette expression donnera l'attraction exercée par toute la bande; c'est :

$$\frac{f(s)d\eta}{2\pi(y-\eta)}\left[\frac{\xi-x}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty},$$

ou :

$$\frac{f(s)\,d\eta}{\pi(y-\eta)}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Associons à cette bande la bande symétrique ; l'attraction résultante sera :

$$\frac{f(s)d\eta}{\pi}\left(\frac{1}{y-\eta}+\frac{1}{y+\eta}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{f(s)}{\pi}\cdot\frac{b}{y}\cdot\frac{1}{1-\frac{b^2}{y^2}s}\frac{ds}{\sqrt{s}}.$$

Pour avoir l'attraction exercée par l'orifice entier, c'est-à-dire la vitesse au point (x, y) considéré, il suffit d'intégrer l'expression trouvée de $s=0$ à $s=1$. En remplaçant $f(s)$ par sa valeur $V_0\sum c_n(s^n-s^{n+1})$, et en substituant à $\left(1-\frac{b^2}{y^2}s\right)^{-1}$ son développement en série donné par la formule du binôme, on obtient :

$$\frac{V}{V_0}=\frac{4}{\pi}\frac{b}{y}\left\{\sum\frac{c_n}{(2n+1)(2n+3)}\right.$$
$$+\frac{b^2}{y^2}\sum\frac{c_n}{(2n+3)(2n+5)}$$
$$\left.+\frac{b^4}{y^4}\sum\frac{c_n}{(2n+5)(2n+7)}+\dots\right\}.$$

En passant à la limite, pour $y=b$, on trouve :

$$\frac{V}{V_0}=\frac{2}{\pi}\sum\frac{c_n}{2n+1} \quad \text{(au bord de l'orifice).}$$

Raisonnons comme pour le cas de l'orifice circulaire. Nous obtiendrons les relations :

$$\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{5}+\frac{c_3}{7}+\dots=\frac{\pi}{2}-c_0=0{,}8808,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\frac{m}{2}=\frac{1}{4}+\int_0^\infty \frac{V^2}{V_0^2}\frac{d\gamma}{b}=\frac{1}{4}+\frac{4}{\pi^2}\int_0^1\left[\frac{m}{2}\right.$$
$$+\gamma^2\sum\frac{c_n}{(2n+3)\ (2n+5)}$$
$$\left.+\gamma^4\sum\frac{c_n}{(2n+5)\ (2n+7)}+\dots\right]^2 d\gamma\,;$$

auxquelles il faut joindre la relation établie plus haut :

$$\frac{m}{2}=\frac{c_0}{1.3}+\frac{c_1}{3.5}+\frac{c_2}{5.7}+\dots$$

Tout d'abord on déduit de là :

$$\frac{m}{2}>\frac{1}{4}+\frac{m^2}{\pi^2},$$

ou $m>\frac{\pi^2}{4}\left(1-\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}\right)$, ou 0,565.

Cherchons à satisfaire à ces trois conditions avec un seul des coefficients c_1, c_2, c_3, ..., tous les autres étant supposés nuls. On tire la valeur de ce coefficient de la première équation ; la troisième donne la valeur correspondante de m, et on essaye quel est celui d'entre ces coefficients qui donne la vérification la plus approchée de la seconde équation. On trouve :

$c_1=2{,}6424$,	$c_2=4{,}4040$,	$c_3=6{,}1656$,
$\frac{m_1}{2}=0{,}4062$.	$\frac{m_2}{2}=0{,}3558$,	$\frac{m_3}{2}=0{,}3279$,
$c_4=7{,}9272$,	$c_5=9{,}6888$,	.....
$\frac{m_4}{2}=0{,}3101$,	$\frac{m_5}{2}=0{,}2978$,	.....

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et c'est pour $c_4 = 7{,}9272$ que la vérification est le plus satisfaisante [1].

Ainsi, la loi de vitesse longitudinale

$$w = V_0\left(0{,}690 + 7{,}9272\,\frac{\eta^8}{b^8}\right)\left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right)$$

remplit toutes les conditions que nous avons établies : elle conduit au coefficient de contraction $m = 0{,}620$, qui coïncide avec la valeur expérimentale 0,626 donnée par H. Bazin.

La vitesse w décroît quand on s'éloigne de l'axe jusqu'à la distance $\eta = 0{,}57826\,b$, de part et d'autre de l'axe, où elle atteint son minimum $0{,}5252\,V_0$; au delà, elle croît et atteint son maximum $0{,}8003\,V_0$ à la distance $\eta = \pm 0{,}8220\,b$, de part et d'autre de l'axe ; elle diminue enfin jusqu'aux bords de l'orifice où elle s'annule, tandis que la vitesse totale atteint son maximum V_0.

En somme, nous avons satisfait aux conditions que devait vérifier la loi de répartition du débit, en adoptant une expression de la forme :

$$w = (a + bs^n)(1 - s),$$

soit en comprenant un exposant parmi les paramètres à déterminer.

Les écarts de quelques millièmes qui existent entre le théorie et l'expérience peuvent tenir à ce que la masse fluide n'était pas de dimensions assez grandes par rapport aux dimensions de l'orifice ; cependant, dans les expériences d'H. Bazin, la hauteur de charge sur le centre de l'orifice circulaire ou sur l'axe horizontal de

[1] J. Boussinesq, **3**, p. 281-283.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'orifice rectangulaire atteignait 1 mètre, soit dix fois la demi-hauteur de l'orifice, ce qui suffit pour que nous puissions la regarder comme très grande.

6. **Indications sur le problème complet de l'écoulement par un orifice.** — La question restreinte que nous avons traitée est, pour le moment, la partie accessible du problème de l'écoulement par un orifice. Le problème complet, comprenant la détermination de la forme des filets fluides qui constituent la veine, a été traité analytiquement par *Helmholtz*[1] dans le cas d'un liquide *sans pesanteur* et d'un orifice rectangulaire horizontal très large, de manière à n'avoir à considérer que des mouvements identiques dans des plans parallèles. Le lien de l'équation de Laplace à deux variables avec la théorie des fonctions d'une variable complexe et avec la représentation conforme d'un plan sur un plan a permis d'étudier dans ce cas la forme de la surface libre de la veine. La méthode donnée par Helmholtz a été généralisée par Kirchhoff[2], puis par M. Sautreaux[3], dont la thèse constitue un exposé très clair de la présente question.

Cette théorie conduit[4], pour le coefficient de contraction de la veine, à la valeur :

$$\frac{\pi}{2+\pi} \quad \text{ou} \quad 0{,}6110,$$

(à grande distance de l'ouverture), et elle donne pour

[1] H. von Helmholtz, *in fine*.
[2] Kirchhoff, Vorlesungen XXI und XXII, p. 271-307.
[3] C. Sautreaux, Thèse. Voir aussi M. Brillouin, chap. II, Écoulement des liquides, Jets, p. 41-72.
[4] C. Sautreaux, p. 62.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rapport de la vitesse au centre de l'orifice, à la vitesse sur le bord, le nombre $k = 0{,}6479$, fourni par la résolution de l'équation [1]

$$\log \frac{1+k}{1-k} = \frac{1}{k}.$$

Ces nombres s'écartent sensiblement des nombres 0,626 et 0,690 trouvés par H. Bazin.

Enfin M. P. Alibrandi [2] s'est proposé d'étendre la théorie de M. Boussinesq au cas d'un liquide compressible ; il a établi quelques propriétés de maxima ou de minima pour le débit de l'orifice, et a examiné l'influence mutuelle de deux ou plusieurs orifices voisins.

Seul B. de Saint-Venant [3] s'est préoccupé d'étudier ce qui se passe dans la masse fluide en mouvement dans le vase, c'est-à-dire la manière dont les vitesses s'y dirigent et s'y distribuent, en mettant en œuvre les équations de M. Boussinesq données plus haut.

[1] C. Sautreaux, p. 64-65.
[2] P. Alibrandi, *passim*.
[3] B. de Saint-Venant, 6 et 7.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE II

ÉCOULEMENT PAR LES DÉVERSOIRS

1. **Écoulement d'une nappe liquide par un déversoir à seuil épais.** — Un *déversoir* est un orifice superficiel vertical, rectangulaire, dont le côté horizontal supérieur aurait été supprimé et les côtés verticaux prolongés : le liquide coule alors exclusivement entre les bords verticaux qui sont les *joues* du déversoir et le côté horizontal qui en est le *seuil* ou la *crête*.

Quand l'épaisseur du seuil est très petite (seuil constitué par une feuille de tôle ou par une planche taillée en biseau), le déversoir est *en mince paroi;* dans le cas contraire, il est à *crête épaisse*.

Nous supposerons que le courant affluent sur le déversoir ainsi que le canal de fuite aient même largeur de section que le déversoir, de manière que les filets fluides n'éprouvent pas de déviation latérale à l'approche des joues et que les mouvements soient absolument pareils dans toutes les sections verticales normales à la direction de la crête : on a alors ce qu'on appelle un *déversoir sans contraction latérale*.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Dans l'impossibilité de donner une théorie satisfaisante de l'écoulement par-dessus un déversoir mince, encore qu'il soit permis de supposer établi le régime permanent et de négliger les frottements comme dans tous les phénomènes de contraction rapide, *Bélanger*[1], en 1841, envisageait le déversoir à crête épaisse qui n'a qu'un intérêt théorique. Dans ce déversoir, les filets fluides supérieurs du canal d'amont s'infléchissent vers le seuil, sur lequel ils deviennent tous rectilignes, hori-

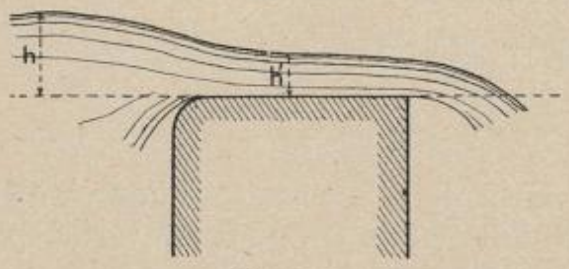


Fig. 1.

zontaux et parallèles entre eux : la nappe déversante présente alors une suite de sections où il n'y a plus de convergence des filets et qui vont jouer le rôle de la section contractée dans l'écoulement par orifice. Ces conditions sont presque réalisées quand l'épaisseur du seuil est assez grande et que son arête amont est arrondie : en réalité, la surface de la nappe est imperceptiblement ondulée.

Eu égard au parallélisme des filets au-dessus de la crête, la pression varie là suivant la loi hydrostatique d'un filet à l'autre ; elle suit d'ailleurs aussi cette loi

[1] J.-B. Bélanger, 3, p. 21-22; n° 41.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans le canal d'amont, assez loin pour que la vitesse des filets soit insignifiante. Désignons alors par h l'altitude du niveau libre du canal, à l'endroit où les filets courbes prennent naissance, par h' l'altitude du niveau libre de la lame recouvrant le seuil, altitudes comptées au-dessus du plan horizontal du seuil, par z l'altitude d'un point d'un filet au-dessus du seuil, par V la vitesse en ce point, par z_1 l'altitude d'un point du même filet dans la région tranquille. Le théorème d'invariance de Bernoulli donne la relation :

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p_a + \rho g(h' - z)}{\rho g} + z = \frac{p_a + \rho g(h - z_1)}{\rho g} + z_1 ;$$

d'où $$V = \sqrt{2g(h - h')} .$$

Cette valeur de la vitesse, commune à tous les filets au-dessus de la crête, donne comme débit par unité de largeur du déversoir :

$$Q = h' \sqrt{2g(h - h')} .$$

« Q, dit Bélanger, s'annule pour $h = h'$ et pour $h' = 0$. Entre ces deux valeurs, *il y en a une pour laquelle* Q *devient un maximum qui semble devoir être la dépense effective*[1]. » Le maximum est atteint pour $h' = \frac{2}{3} h$, et il a pour valeur $\frac{2}{3\sqrt{3}} h \sqrt{2gh}$ ou $0{,}385\, h \sqrt{2gh}$, et ce débit est en effet à peu près conforme aux résultats de l'observation.

Cette assertion de Bélanger, émise très timidement, est devenue ultérieurement un postulat admis par tous les hydrauliciens sous le nom de *principe du débit*

[1] J.-B. Bélanger, p. 22.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

maximum; M. Boussinesq l'a justifié de deux manières différentes[1]; nous citerons textuellement le plus récent exposé de cette justification[2].

« Imaginons d'abord que le niveau, en aval du barrage, soit maintenu aussi peu inférieur que l'on voudra au niveau d'amont, grâce à un second barrage assez haut pourvu d'une vanne de fond, et, par conséquent muni d'un orifice variable, arbitrairement réductible. Alors la masse fluide, à l'aval du déversoir, se trouvera, dans son ensemble, presque stagnante, à raison de sa grande section; et la seule dénivellation très notable offerte par la surface de l'eau aux environs du déversoir sera celle, $h - h'$, qui aura produit la vitesse V exigée, sur le seuil, par la réduction relative de section due au barrage, aussi forte que l'on veut si h est assez petit ou le barrage assez haut. On pourra donc regarder h et h' comme les hauteurs, au-dessus du seuil, des deux niveaux de l'eau dans les parties calmes des réservoirs d'amont et d'aval. Toutefois, le niveau dans le réservoir d'aval étant essentiellement distinct de celui du bord supérieur de la section contractée, et devant même, s'il vient à baisser au delà d'une certaine limite, en différer beaucoup, nous désignerons sa hauteur par h'', sauf à poser $h'' = h'$ (sensiblement) tant que h'' sera assez grand. h'' pourra devenir négatif à mesure que baissera le niveau d'aval.

Tant que celui-ci est encore assez haut pour que la continuation de son lent abaissement fasse, à hauteur d'amont h constante, varier le débit, on dit que le

[1] J. Boussinesq, 2, p. 571-573; 6, 2e Note, p. 585.
[2] J. Boussinesq, 5, p. 3-8.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

déversoir est *noyé* (pour exprimer que la nappe déversante ne se dégage pas, même près du barrage, du liquide tourbillonnant ou stationnaire qui occupe le réservoir d'aval. Le débit $\sqrt{2gh''^2(h-h'')}$ dépend donc alors des *deux* données *distinctes* h et h'', mutuellement indépendantes entre certaines limites.

Ainsi la hauteur h'' d'aval, d'abord égale à h et en train de diminuer avec une grande lenteur, donnera lieu à une série d'écoulements, très sensiblement permanents, de plus en plus rapides, où le débit $\sqrt{2gh''^2(h-h'')}$, primitivement nul, ira en grandissant. Mais un tel accroissement cesse d'être possible lorsque $h''=\frac{2}{3}h$; après quoi le débit, ne pouvant pas, évidemment, décroître par les abaissements ultérieurs du niveau d'aval, qui continueraient à réduire sur le seuil la résistance à l'écoulement ou à faciliter celui-ci, et ne pouvant non plus dépasser le maximum de son expression, déjà censé atteint, $\frac{2}{3\sqrt{3}}h\sqrt{2gh}$, restera forcément stationnaire, de manière à rendre désormais fixe la hauteur h' du niveau sur le seuil, égale à $\frac{2}{3}h$ si elle a jusque-là décrû comme h'', et à créer, par suite, une dénivellation $h'-h''$ de plus en plus grande à l'aval du déversoir, ou à empêcher le niveau sur le seuil de suivre le niveau d'aval dans son abaissement indéfini.

« On pourra donc regarder h' comme égal à h'' tant que h'' vaudra au moins $\frac{2}{3}h$; et tant qu'il en sera

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ainsi, le débit aura pour expression $Q=\sqrt{2gh''^2(h-h'')}$. Alors le fait que la constance du débit Q se produit *au moment où son expression précédente devient maximum*, est une conséquence naturelle de la *continuité des phénomènes*. Car le principe de Fermat donne pour le moment du maximum celui où s'annule $\frac{\partial Q}{\partial h''}$, dérivée qui s'évanouit définitivement lorsque Q cesse de varier : pour être continue, cette dérivée devait donc bien n'arriver que graduellement à sa valeur zéro, ou la formule précédente cesser de régir le phénomène *à l'instant précis du maximum et non avant.* »

Lorsque le déversoir a atteint ce régime de débit maximum et que h'' continue à décroître par valeurs négatives, la nappe liquide commence par rester en contact, par sa face inférieure, avec la masse tourbillonnante du fluide d'aval ; tant qu'il en est ainsi, le *déversoir* est dit *noyé en dessous*. Puis l'air atmosphérique pénètre sous la nappe (et on peut hâter cette pénétration en disposant convenablement les joues du barrage) : le déversoir est alors dit *à nappe libre*. Si on évite au contraire cette pénétration, avec une charge h assez forte, la nappe vient s'appliquer contre le barrage, et l'on dit que le *déversoir* est *à nappe adhérente*.

Nous donnerons encore un rapide aperçu de la première manière donnée par M. Boussinesq pour justifier le principe du débit maximum dans le cas du déversoir de Bélanger. Imaginons à nouveau le niveau d'aval maintenu, d'abord, aussi peu différent que l'on veut du niveau d'amont, par une résistance quelconque à l'écoulement dans le canal de fuite, et supposons qu'en

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

réduisant peu à peu cette résistance l'on abaisse lentement le niveau d'aval.

Chaque abaissement élémentaire de ce niveau se propage, sur le seuil, sous la forme d'une petite onde de translation, négative, ascendante, animée, par rapport à la masse fluide, de la vitesse de propagation $\sqrt{gh'}$ (Tome I, 1re section, Ch. III, § 2). Pour que le régime sur le seuil devienne indépendant du niveau d'aval, il faut que cette vitesse de propagation soit inférieure à la vitesse de translation V du fluide sur le seuil, car alors seulement l'onde dont il s'agit ne pourra remonter le courant. L'état cherché du déversoir sera atteint au moment où l'on aura :

$$V = \sqrt{gh'} \quad \text{ou} \quad 2g(h - h') = gh',$$

soit $h' = \frac{2}{3}h$. A partir de ce moment, l'onde, immobilisée à l'extrémité aval du seuil par la vitesse de translation, cesse de progresser sur le seuil, devenu désormais infranchissable aux perturbations d'aval ; et, par suite, l'écoulement est désormais invariable sur le seuil. Donc le débit fourni à cet instant-là n'est plus susceptible d'être dépassé ; et l'on voit qu'il atteint précisément alors la valeur maxima donnée par Bélanger.

Nous avons, dans ce qui précède, admis que le réservoir d'amont soit constitué de manière à laisser à h une valeur constante pour tous les débits à envisager. Supposons maintenant que le *débit* Q soit *constant* : alors h se réglera sur h' de telle sorte qu'on ait toujours : $h'\sqrt{2g(h - h')} = f(h, h') = Q.$

Pour des niveaux h'' d'aval graduellement décroissants, on aura d'abord sensiblement $h' = h''$, et h'

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

décroîtra comme h'' ; h, d'après la formule précédente, décroîtra aussi, et cela jusqu'au moment où la vitesse de translation V sur le seuil sera assez grande pour y empêcher la transmission des perturbations d'aval : alors h' deviendra constant, et aussi h. En somme, h et h' sont des fonctions de h'' décroissant avec h'' et se réduisant simultanément à des constantes. La loi de continuité porte à penser que les dérivées de ces fonctions sont infiniment petites quand les fonctions vont atteindre leurs valeurs constantes : en particulier, $\frac{dh'}{dh''}$ tend vers zéro quand le régime approche de son état invariable.

Or, au moment où cet état est réalisé, « la dénivellation $(h - h')$ peut être considérée comme un obstacle à la propagation des ondes négatives ascendantes, aussi grand que l'est, sur le seuil même, la vitesse de translation V *engendrée précisément par cette dénivellation*, car il est naturel que ces deux formes, *statique* et *dynamique*, d'une même entité, s'équivaillent dans le problème[1]. » Autrement dit, la dénivellation $(h - h')$ doit s'opposer alors à l'accroissement du débit, pour un abaissement élémentaire $-dh'$ du niveau sur le seuil, tout autant que la vitesse de translation V, régnant sur celui-ci, s'oppose à ces abaissements élémentaires $-dh'$, pour des abaissements ultérieurs $-dh''$ du niveau d'aval ; et l'on aura $\frac{\partial Q}{\partial h'} = 0$, en même temps que $\frac{dh'}{dh''} = 0$.

[1] J. Boussinesq, 5, p. 7.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ainsi le régime du déversoir deviendra invariable, et l'on aura $\frac{dh'}{dh''} = 0$, au moment où le débit Q, *considéré comme fonction de* h', sera extremum, comme l'exprime la condition $\frac{\partial Q}{\partial h'} = 0$. Dans le cas qui nous occupe, cet extremum est un maximum.

Cet ensemble de considérations justifie amplement le principe du débit maximum entrevu par Bélanger.

2. **Vérifications expérimentales.** — H. Bazin[1] a étudié systématiquement les conditions dans lesquelles l'horizontalité des filets fluides est réalisée sur le seuil et dans lesquelles le frottement sur le seuil ne ralentit pas la vitesse d'écoulement. Ces conditions se sont trouvées sensiblement réalisées pour des hauteurs de charge h variant de $0^m,15$ à $0^m,40$ sur un seuil de $0^m,80$ de longueur. Or il se trouve que le coefficient m de la formule du débit $Q = mh\sqrt{2gh}$ a varié de 0,37 à 0,39 ; ces valeurs sont bien voisines du nombre 0,385 donné par Bélanger.

3. **Écoulement d'une nappe liquide par un déversoir en mince paroi. — Hypothèses fondamentales.** — Le déversoir en mince paroi, dont la crête, terminant un barrage vertical ou incliné, se réduit à une arête horizontale, et dans lequel la nappe tombe librement dans l'air (sa surface inférieure restant toujours soumise à la pression atmosphérique, ou à une pression voisine donnée), est le plus simple et le mieux défini après le déversoir de Bélanger : le phéno-

[1] H. Bazin, 2, 5e Article, p. 39-47.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mène d'écoulement est alors parfaitement constant et se prête à une détermination précise du débit.

Considérons dans la nappe une tranche normale à la crête. La trace supérieure, d'abord horizontale, à une distance h au-dessus du niveau du seuil, s'infléchit lentement vers la crête, puis plus rapidement au delà, devenant presque verticale si le niveau d'aval est assez bas. La trace inférieure part tangentiellement à la face

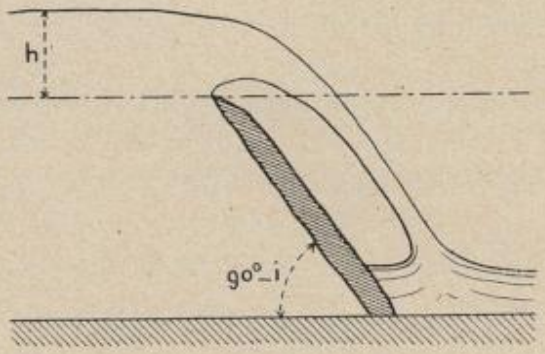


Fig. 2.

amont du barrage, monte vers la trace supérieure, puis sous le poids de la nappe s'infléchit rapidement, devient horizontale à une hauteur ε au-dessus du seuil, puis s'abaisse pour devenir sensiblement parallèle à la trace supérieure. Cette allure de la trace inférieure, prévue par M. Boussinesq, a été vérifiée en 1886 par H. Bazin[1]; à côté du barrage était pratiquée une chambre avec paroi en verre, permettant de voir le dessous de la nappe; en traçant sur cette paroi latérale transparente des traits de repère horizontaux et verticaux, on a pu

[1] H. Bazin, **2**, 2e Mémoire, p. 42, 43, et Appendice.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

déterminer le profil exact de la nappe, et notamment constater le fait du relèvement ε de la nappe au delà et au-dessus du seuil, fait qui avait échappé aux anciens hydrauliciens.

Le profil observé de la nappe révèle l'existence, un peu en avant du sommet de la trace inférieure, d'une section sensiblement verticale et traversée normalement par tous les filets fluides situés dans la tranche considérée ; aux divers points de cette section contractée, les filets sont bien parallèles, mais ils ne sont pas rectilignes.

Pour établir sa théorie approchée de l'écoulement sur déversoir, en 1887, M. Boussinesq[1] a admis comme *première hypothèse* la loi de structure des filets la plus simple qu'on puisse imaginer : vu que la courbure de la trace inférieure est plus forte que celle de la trace supérieure, il suppose que, *sur la section contractée, les filets sont des courbes parallèles*, c'est-à-dire ayant le même centre de courbure sous la nappe déversante, à une distance R_0 de la trace inférieure.

Soit h' la hauteur verticale, au-dessus du seuil, du haut de la section contractée, p_0 la pression exercée sous la nappe [lorsque la pression n'est pas la même en tous les points, p_0 désigne la pression au point le plus bas de la section contractée, point d'altitude sensiblement égale à ε ; nous convenons d'ailleurs d'estimer les pressions par leur excès sur la pression atmosphérique]. Les rapports :

$$c = \frac{\varepsilon}{h}, \qquad K = \frac{h'}{h}, \qquad N = \frac{p_0}{\rho g h}$$

[1] J. Boussinesq, 6, 1re Note, p. 18.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

jouent dans la suite un rôle important : on les appelle respectivement la *contraction inférieure*, la *contraction supérieure* et la *pression relative sous la nappe*.

La *seconde hypothèse* de la théorie de M. Boussinesq[1] [sous sa dernière forme, donnée en 1908 et où tout appel à l'expérience est évité] concerne la contraction inférieure c.

Tout d'abord la contraction inférieure c est une fonction bien déterminée de la contraction supérieure K et de l'angle i du barrage avec la verticale ascendante.

Si l'on écrit en effet les équations générales d'Euler et l'équation de continuité, on en déduit de suite que quatre mêmes fonctions $\frac{p}{\rho gh}$, $\frac{u}{\sqrt{gh}}$, $\frac{v}{\sqrt{gh}}$, $\frac{w}{\sqrt{gh}}$, de $\frac{x}{h}$, $\frac{y}{h}$, $\frac{z}{h}$, indépendantes de h, sinon par ces variables, les mêmes aux points homologues sur des barrages semblables à dimensions proportionnelles à h, satisfont à ces quatre équations indéfinies et aux conditions définies exprimant 1° que p s'annule sur la face supérieure de la nappe et prend, sur la face inférieure, des valeurs données proportionnelles à h, nulles dans le cas de la nappe libre, et 2° que les filets font avec la verticale ascendante, au passage sur la crête, l'angle i donné. Pour toutes ces nappes semblables, avec mêmes modes d'écoulement et vitesses proportionnelles à $\sqrt{gh}$, les rapports c et K ont les mêmes valeurs : c et K sont par suite des fonctions bien déterminées de i et de h (par l'intermédiaire de N); en éli-

[1] J. Boussinesq, 5, p. 12-13.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

minant h entre leurs expressions, on obtient c en fonction de K et de i.

La contraction inférieure c s'annule pour $i = -\frac{\pi}{2}$ et atteint son maximum C pour $i = +\frac{\pi}{2}$. L'angle du filet supérieur et du filet inférieur à l'arrivée sur le

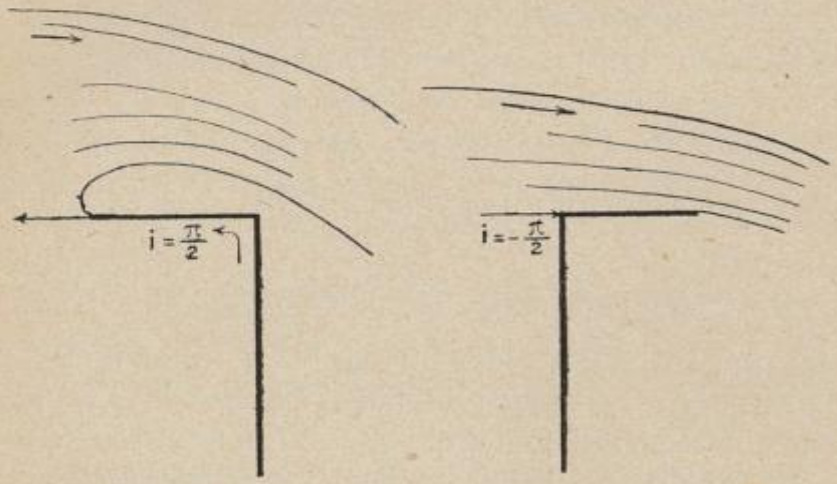


Fig. 3.

seuil est zéro dans le premier cas, π dans le second; pour une inclinaison i du barrage, il est $\frac{\pi}{2} + i$. M. Boussinesq admet la proportionnalité constante de c à cet *angle de convergence* $\frac{\pi}{2} + i$, et il pose :

$$\frac{c}{C} = \frac{\frac{\pi}{2} + i}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}. \qquad (1)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour déconcertante que puisse paraître au premier abord cette hypothèse, elle permet d'établir une théorie rationnelle en conformité complète avec l'expérience.

La seule réserve à faire, c'est qu'il n'y ait pas de mouvement sensible auprès d'aucune paroi autre que celle aboutissant au seuil; ce qui exclut le cas des barrages à faible hauteur, où l'action du fond influe sur la structure de la nappe.

En particulier, si $i = 0$, c'est-à-dire si la face amont du barrage est verticale, on aura :

$$c = \frac{1}{2} C.$$

Quant à la quantité C, valeur de la contraction inférieure relative au cas où $i = \frac{\pi}{2}$, et fonction de la seule variable K, nous verrons ultérieurement qu'il est possible de la déterminer.

La *troisième* et dernière *hypothèse* consiste dans l'extension du *principe du débit maximum*. Supposons, comme à propos du déversoir de Bélanger, que l'on abaisse graduellement le niveau d'aval : pour une charge constante h donnée, il arrive un moment où le niveau sur la section contractée, h', reste invariable. Cette constance de h' se produit quand la dénivellation $(h - h')$, génératrice de l'écoulement à travers la section contractée, et équivalent statique de cet écoulement, suffit à empêcher la transmission des perturbations d'aval entre la section contractée et l'aval du déversoir. Dès lors, au moment où h' devient indépendant de h'' et où, par raison de continuité, $\frac{dh'}{dh''}$ tend vers zéro,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le débit Q devient indépendant d'une diminution ultérieure de h', et la dérivée $\frac{\partial Q}{\partial h'}$ (où Q est exprimé en fonction de h et de h') sera aussi nulle.

Si Q est invariable et non h, h se réglera sur h' de manière à donner à l'expression $f(h, h')$ du débit sa valeur constante, et la condition $\frac{\partial f}{\partial h'} = 0$ définit h' en fonction de h.

La condition $\frac{\partial f}{\partial h'} = 0$, eu égard à $f(h, h') = \text{const.}$, ou à $\frac{\partial f}{\partial h}\frac{dh}{dh'} + \frac{\partial f}{\partial h'} = 0$, équivaut à $\frac{dh}{dh'} = 0$.

Donc h considéré comme fonction de h' est extremum, et, en fait, minimum. Le postulat que nous motivons ainsi équivaut à cet autre : l'écoulement sur un déversoir devient permanent et stable quand le niveau d'amont est le plus bas qu'il peut être en fournissant le débit exigé Q. Il devient alors « l'expression du sentiment, naturel à l'hydraulicien, de la nécessité, pour tout écoulement stable, de se faire le plus bas possible, ou avec le moins de dénivellations possible, sur le lit donné du cours d'eau ».

4. **Formules générales relatives au calcul de l'expression du débit.** — Envisageons un filet MM', issu d'un point M du réservoir d'amont où la vitesse est insensible, et aboutissant en un point M' de la section contractée IJ, tel que $IM' = z$, que la vitesse soit V et la pression p (défalcation faite de la pression atmosphérique). Appliquons-lui le théorème de Bernoulli. Si l'on note que le point le plus bas I de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la section contractée est très voisin du sommet S de la trace inférieure de la nappe, et si on appelle α l'angle de la section contractée avec la verticale, on obtient :

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + \varepsilon + z\cos\alpha = h;$$

on déduit de là, puisque $\varepsilon = ch$:

$$\frac{p}{\rho g} = h(1-c) - z\cos\alpha - \frac{V^2}{2g}. \qquad (2)$$

L'équation d'Euler relative à l'axe IJ, pris pour axe

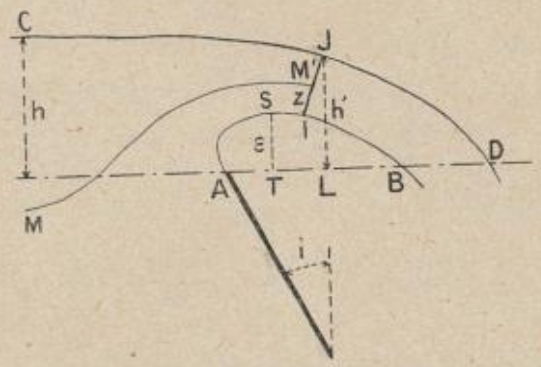


Fig. 4.

des z, donne d'autre part, puisque l'accélération en M', suivant cet axe, coïncide avec l'accélération normale $\frac{V^2}{R_0 + z}$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g\cos\alpha + \frac{V^2}{R_0 + z}. \qquad (3)$$

Éliminons p entre les relations (2) et (3) : il suffit pour cela de dériver (2) par rapport à z et d'éliminer

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\frac{\partial p}{\partial z}$ entre la relation obtenue et (3). Il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{V}{R_0 + z} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial z}[V(R_0 + z)] = 0.$$

Le produit $V(R_0 + z)$ a donc une valeur constante dans toute la section IJ. En I, $z = 0$, la vitesse est V_0 et la pression est $p_0 = N\rho gh$; en J, $z = \eta$, la vitesse est V_1 et la pression est nulle. On a donc :

$$(R_0 + z)V = R_0 V_0 = (R_0 + \eta)V_1, \qquad (4)$$

V_0 et V_1 étant définies, d'après (2), par les relations :

$$Nh = h(1 - c) - \frac{V_0^2}{2g},$$

$$0 = h(1 - c) - \eta \cos\alpha - \frac{V_1^2}{2g}.$$

Comme d'ailleurs,

$$\eta \cos\alpha = h' - \varepsilon = h(K - c),$$

il s'ensuit que :

$$V_0 = \sqrt{2gh(1 - c - N)}, \qquad (5)$$

$$V_1 = \sqrt{2gh(1 - K)}. \qquad (6)$$

Nous poserons, pour simplifier l'écriture :

$$N + c = N', \quad n = \sqrt{\frac{1 - N'}{1 - c}}, \quad k = \sqrt{\frac{1 - K}{1 - N'}}. \qquad (7)$$

Si l'on tient compte de la seconde égalité (4) et des expressions (5) et (6) de V_0 et de V_1, on reconnaît que le rapport des rayons de courbure des filets extrêmes $\frac{R_0}{R_0 + \eta}$ ou $\frac{V_1}{V_0}$ n'est autre que k.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les notations adoptées permettent d'écrire les relations suivantes que nous utiliserons ultérieurement :

$$\left.\begin{aligned} &N = (1-c^2)(1-n^2),\\ &N' = 1-(1-c)n^2,\\ &1-K = (1-c)n^2k^2 = (1-N')k^2,\\ &V_1 = V_0 k,\\ &\frac{\eta_1}{h} = \frac{1-c}{\cos\alpha}(1-n^2k^2),\\ &\frac{R_0}{h} = \frac{k}{1-k}\frac{\eta_1}{h} = \frac{1-c}{\cos\alpha}\frac{k}{1-k}(1-n^2k^2). \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Quant au débit par unité de largeur du déversoir, estimé à travers la section contractée, son expression est :

$$Q = \int_0^{\eta_1} V\,dz = R_0 V_0 \int_0^{\eta_1} \frac{dz}{R_0 + z}$$

$$= R_0 V_0 \log\frac{R_0+\eta_1}{R_0} = R_0 V_0 \log\frac{1}{k},$$

ou encore, en remplaçant V_0 par son expression (5) et $\frac{R_0}{h}$ par la dernière expression (8),

$$Q = mh\sqrt{2gh}, \quad (9)$$

à condition de poser :

$$m = \frac{(1-c)^{\frac{3}{2}}}{\cos\alpha}\cdot\frac{nk-n^3k^3}{1-k}\log\frac{1}{k}. \quad (10)$$

m est ce que l'on appelle le *coefficient de débit* du déversoir.

Comme l'angle α est très petit, on peut, dans m, réduire $\cos\alpha$ à l'unité sans erreur sensible.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Avant d'appliquer les deux derniers postulats à la recherche des conditions d'invariabilité du régime, spécifions les deux cas que nous envisagerons particulièrement :

1° Cas (A). — Le déversoir est à *nappe libre* : l'atmosphère extérieure communique librement avec le dessous de la nappe. On a alors constamment $p_0 = 0$, et par suite $N = 0$, $N' = c$, $n = 1$;

$$k = \sqrt{\frac{1 - K}{1 - c}}, \quad m = (1 - c)^{\frac{3}{2}} (k + k^2) \log \frac{1}{k}.$$

Plus généralement, la nappe est déprimée ou soulevée, si, sous elle, est emprisonnée une masse gazeuse à pression constante donnée, inférieure ou supérieure à la pression atmosphérique : p_0 et par suite N a alors une *valeur constante donnée*, négative ou positive.

2° Cas (B). — Le déversoir est à *nappe noyée en dessous*. Le dessous de la nappe est alors occupé par une eau morte, tourbillonnante, soumise à des pressions croissant à peu près, de haut en bas, d'après la loi hydrostatique. La pression au niveau du seuil sera alors

$$p_0 + \rho g \varepsilon = N \rho g h + \rho g c h = N' \rho g h ;$$

le paramètre N' sera le rapport de cette pression à $\rho g h$, et sera la pression relative, au niveau du seuil, sous la nappe noyée en dessous. Lorsque h' ou K variera (le niveau d'aval s'abaissant), nous admettrons que N' *est constant et donné*, comme si le dessous de la nappe était, pour chaque hauteur h de charge, mis en communication, par un tuyau débouchant contre le seuil, à l'arrière du barrage, avec une masse considérable d'eau en repos, située dans un réservoir latéral indépendant.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ce point précisé, nous avons, d'après la seconde hypothèse, $c = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}\right) C$;

nous allons calculer C en fonction de K.

Envisageons[1] un déversoir armé supérieurement d'une plaque horizontale large et mince, dirigée vers l'amont

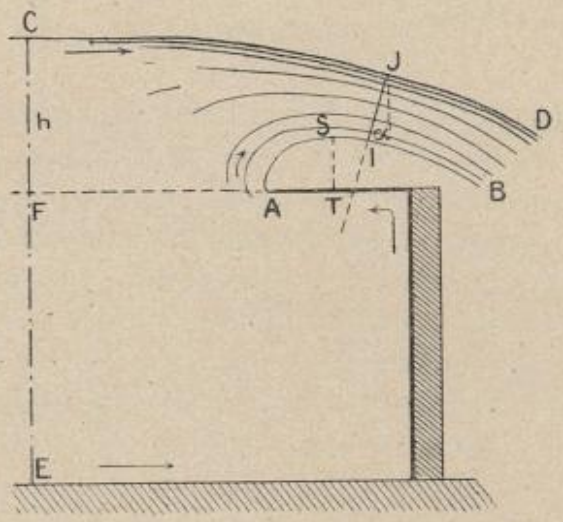


Fig. 5.

et rejetant les filets inférieurs vers l'amont. Nous allons appliquer le théorème des quantités de mouvement projetées sur une horizontale perpendiculaire au barrage, à la masse fluide comprise à l'amont de la section contractée et à l'aval d'une section verticale CE assez éloignée du déversoir pour que le liquide s'y élève à la hauteur h au-dessus de la crête et que les vitesses y soient inappréciables.

[1] J. Boussinesq, 5, p. 25-29.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pendant l'intervalle de temps dt, eu égard à la permanence du régime, la variation de la quantité de mouvement projetée sera :

$$\int_0^{\eta} (\rho V dt) dz \,.\, V \cos\alpha \,;$$

la dérivée, par rapport au temps, de cette quantité de mouvement vaudra par suite :

$$\rho \cos\alpha \int_0^{\eta} V^2 dz.$$

Nous devons égaler ce résultat à la somme des projections des forces extérieures agissant sur la masse fluide considérée. Ni les poids, ni les pressions normales sur les joues du déversoir ne donnent de composante suivant notre axe de projection. Les frottements ne sont sensibles qu'aux points où les vitesses sont notables, soit au voisinage de l'arête A ; même là, la région de frottement est assez restreinte pour qu'on ne tienne pas compte de cette action. Enfin, sur la masse située au-dessous du niveau du seuil, les pressions, sensiblement hydrostatiques, s'équilibrent. Au-dessus du seuil, nous aurons, par unité de largeur :

1° $\int_0 \rho g u du$ ou $\frac{1}{2}\rho g h^2$ fournie par la portion CF de la section d'amont, située au-dessus du seuil ;

2° $-\cos\alpha \int_0^{\eta} p dz$ fournie par la section contractée ;

3° $-p_0 \varepsilon$ ou $-\mathrm{CN}\rho g h^2$ fournie par le dessous de la nappe, de I en A, dans le cas d'une nappe soulevée ou déprimée ; ou bien $-\left(p_0\varepsilon + \frac{1}{2}\rho g \varepsilon^2\right)$, ou

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$-C\left(N+\frac{1}{2}C\right)\rho g h^2$, ou encore $-C\left(N'-\frac{1}{2}C\right)\rho g h^2$ fournie par la même surface, dans le cas d'une nappe noyée en dessous.

Nous obtenons donc finalement l'équation :

$$\rho g \cos\alpha \int_0^{\eta_1} \left(\frac{V^2}{g}+\frac{p}{\rho g}\right) dz = \frac{1}{2}\rho g h^2(1-2CN), \qquad (A)$$

dans le cas (A) d'une nappe soulevée ou déprimée; et l'équation :

$$\rho g \cos\alpha \int_0^{\eta_1} \left(\frac{V^2}{g}+\frac{p}{\rho g}\right) dz = \frac{1}{2}\rho g h^2(1-2CN'+C^2), \qquad (B)$$

dans le cas (B) d'une nappe noyée en dessous.

Remplaçons $\frac{p}{\rho g}$ par son expression (2), puis V par l'expression que fournissent les équations (4-5), en notant que c prend ici la valeur C. Le premier membre de l'équation (A) ou (B), divisé par $\frac{1}{2}\rho g h^2$, donne :

$$2\cos\alpha \int_0^{\eta_1} \left[\frac{R_0^2}{(R_0+z)^2} h(1-C-N) + h(1-C) - z\cos\alpha\right] \frac{dz}{h^2},$$

ou :

$$2\cos\alpha(1-C-N)\frac{R_0}{R_0+\eta_1}\cdot\frac{\eta_1}{h} + 2\cos\alpha(1-C)\frac{\eta_1}{h} - \frac{\eta_1^2\cos^2\alpha}{h^2}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour les mêmes valeurs de K et de N ou de N′, nous appellerons ν et $\varkappa$ les valeurs de n et de k relatives au présent déversoir, posant :

$$\nu = \sqrt{\frac{1-N'}{1-C}}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{1-K}{1-N'}}, \quad N + C = N'.$$

Remplaçons alors, dans la dernière expression, $\frac{R_0}{R_0+\eta}$ par $\varkappa$, $\frac{\eta}{h}\cos\alpha$ par $(1-C)(1-\nu^2\varkappa^2)$, d'après (8), et $(1-C-N)$ ou $(1-N')$ par $(1-C)\nu^2$; nous obtenons :

$$(1-C)^2(1-\nu^2\varkappa^2)\left[1+\nu^2\varkappa(2+\varkappa)\right].$$

Dans le cas (A), nous n'envisagerons que le déversoir usuel, à nappe libre. Alors $N=0$, $N'=C$, $\nu=1$, et l'équation correspondante se réduit simplement à :

$$\frac{1}{1-C} = (1+\varkappa)\sqrt{1-\varkappa^2}. \qquad (A_1)$$

Dans le cas (B), nous noterons que l'on a identiquement : $1-2CN'+C^2=(1-C)^2(1-2\nu^2)$
$+(1-C)2\nu^2$,
et l'équation correspondante devient, après quelques simplifications, en observant que, pour N′ donné, on a $\varkappa = k$:

$$\frac{1}{1-C} = 1+k-\nu^2k^3\left(1+\frac{k}{2}\right). \qquad (B_1)$$

La relation ainsi établie, entre C et K, permettrait, si on pouvait l'expliciter par rapport à C, d'exprimer le débit en fonction de h et de h', et par suite de déter-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

miner les conditions d'établissement du régime invariable, en appliquant le principe du débit maximum. Le fait qu'elle est implicite va compliquer un peu le calcul.

5. **Cas du déversoir à nappe libre**[1]. — Nous avons trouvé comme expression du débit Q de l'unité de largeur du déversoir la formule :

$$Q = mh\sqrt{2gh},$$

où le coefficient de débit m est, pour chaque valeur du rapport K : $m = f(k)(1-c)^{\frac{3}{2}}$,

avec $k = \sqrt{\frac{1-K}{1-c}}$, et $f(k) = (k+k^2)\log\frac{1}{k}$.

De plus, on a : $c = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}\right)C$,

avec $\frac{1}{1-C} = (1+z)\sqrt{1-z^2}$, $z = \sqrt{\frac{1-K}{1-C}}$.

Ces formules permettent d'exprimer m en fonction de la contraction supérieure $K = \frac{h'}{h}$. Nous avons à écrire que, Q étant exprimé en fonction de h et h', la dérivée $\frac{\partial Q}{\partial h'}$ est nulle, et cela revient à écrire :

$$\frac{dm}{dK} = 0,$$

ou encore : $\frac{f'(k)}{f(k)}\frac{dk}{dK} - \frac{3}{2}\frac{1}{1-c}\frac{dc}{dK} = 0$

BIBLIOTHÈQUE CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS

[1] J. Boussinesq, 7, 1re Note, p. 668-671.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La relation $k^2(1-c) = 1 - K$,

dérivée par rapport à K, donne

$$2(1-c)k\frac{dk}{dK} = k^2\frac{dc}{dK} - 1,$$

en sorte que l'équation précédente peut se mettre sous la forme : $\frac{f'(k)}{f(k)}\left(1 - k^2\frac{\partial c}{\partial K}\right) + 3k\frac{\partial c}{\partial K} = 0,$

ou encore : $f'(k) = \left\{kf'(k) - 3f(k)\right\}k\frac{\partial c}{\partial K}.$ (11)

Comme on a, d'une part

$$\frac{dc}{dK} = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}\right)\frac{dC}{dz} : \frac{dK}{dz},$$

et d'autre part :

$$\left.\begin{aligned} C &= 1 - \frac{1}{(1+z)\sqrt{1-z^2}}, \\ K &= 1 - \frac{z^2}{(1+z)\sqrt{1-z^2}}, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

il en résulte, par un calcul bien simple :

$$\frac{dc}{dK} = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}\right)\frac{2z-1}{z(2-z)}. \quad (13)$$

Le paramètre k est aussi exprimable en fonction de z, puisque $k = \sqrt{\frac{1-K}{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{\pi}\right)C}}$,

et que (12) donne K et C en fonction de z.

L'équation (11) peut donc être regardée comme une équation définissant la valeur de z, et par suite celles de K, C, k, c et enfin de m, pour le régime invariable.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Examinons le cas, particulièrement important, du barrage vertical (où $i = 0$), auquel H. Bazin a consacré ses deux premiers Mémoires relatifs aux déversoirs. On est alors conduit tout naturellement à une solution très approchée de l'équation (11). Le premier membre de cette équation

$$(1+2k)\left\{\log\frac{1}{k}-\frac{1+k}{1+2k}\right\}$$

s'annule pour une valeur de k, racine de l'équation transcendante : $\dfrac{1+k}{1+2k}=\log\dfrac{1}{k}$.

La résolution de cette équation donne :

$$k_0 = 0{,}46854.$$

D'autre part, le second membre de la même équation (11) s'annule pour $\varkappa=\dfrac{1}{2}$, valeur qui annule $\dfrac{dc}{d\mathrm{K}}$, et à laquelle correspondent, comme valeurs de c et de k [en vertu de (13)] :

$$c=\frac{1}{2}\mathrm{C}=\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{27}}=0{,}1151,$$

$$k=\varkappa\sqrt{\frac{1-2c}{1-c}}=0{,}46634.$$

Les valeurs de k qui annulent chacun des deux membres de l'équation (11) sont extrêmement voisines. Nous sommes ainsi conduit à chercher la racine $\varkappa$ de cette équation, aux environs de 0,5.

Par des essais successifs on trouve que, en donnant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à $\varkappa$ les valeurs 0,5033 et 0,5034, l'excédent du premier membre de (11) sur le second est successivement 0,00006 et $-0,00019$. Un calcul par parties proportionnelles donne pour la racine cherchée :

$$\varkappa = 0,503324.$$

Pour cette valeur de $\varkappa$, on obtient :

$$C = 0,2302, \quad c = 0,1151, \quad \frac{dc}{dK} = 0,004412,$$

$$k = 0,46945, \quad f(k) = 0,52164, \quad f'(k) = -0,00325,$$

$$[kf'(k) - 3f(k)]\, k \frac{dc}{dK} = -0,003245.$$

L'écart est de 0,000005 : la vérification a lieu à une approximation qu'on ne peut dépasser avec les tables employées.

Quant au coefficient de débit m, sa valeur correspondante est : $m = 0,4342$,

tandis que, d'après l'avant-dernière relation (8), l'épaisseur relative de la nappe dans la section contractée est :

$$\frac{\eta}{h} = 0,6899.$$

Revenons au cas d'un barrage incliné. Supposons que l'angle i du barrage avec la verticale soit assez petit (en valeur absolue) pour que dans la formule

$$c = \left(1 + \frac{2i}{\pi}\right)\frac{C}{2},$$

le carré du terme en i dans la parenthèse soit négligeable. Un calcul dont le point de départ est le même que dans le cas précédent, mais qui est un peu

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

plus compliqué[1], conduit aux résultats suivants :

$$m = 0{,}4342\left(1 - 0{,}3902\,\frac{i}{\pi}\right),$$

$$c = 0{,}1151\left(1 + 2\,\frac{i}{\pi}\right),$$

$$k = 0{,}4694 - 0{,}0224\,\frac{i}{\pi},$$

$$\frac{r_1}{h} = 0{,}6899 - 0{,}1609\,\frac{i}{\pi}.$$

6. **Vérifications expérimentales.** — Pour confronter les résultats précédents avec ceux des observations d'H. Bazin, la difficulté est de dégager, parmi des expériences extrêmement nombreuses et variées, celles où les conditions de la théorie sont très sensiblement réalisées. M. Boussinesq a soumis les diverses séries d'expériences à une critique très serrée[2], de laquelle il résulte que le nombre qu'il convient de regarder comme le coefficient de débit fourni par l'expérience, dans le cas du déversoir vertical, est :

$$m = 0{,}43,$$

que celles de la contraction inférieure et de l'épaisseur relative de la section contractée sont :

$$c = 0{,}112, \qquad \frac{r_1}{h} = 0{,}668.$$

L'accord entre ces nombres et ceux fournis par la théorie est tout à fait satisfaisant.

[1] J. Boussinesq, 5, p. 35-37.
[2] J. Boussinesq, 5, p. 39; H. Bazin, 2, 1er et 2e Mémoires.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Dans le cas des déversoirs inclinés, pour :

$i = 45°,\quad 33°,\quad 18°,\quad -18°,\quad -33°,\quad -45°,$

le rapport du coefficient de débit à celui qui conviendrait au déversoir vertical est théoriquement :

0,902, 0,927, 0,960, 1,040, 1,073, 1,098,

tandis que l'expérience conduit à :

0,926, 0,935, 0,959, 1,046, 1,086, 1,115,

et ici encore l'accord est satisfaisant.

D'autres vérifications sont fournies par le déversoir à armature horizontale rejetant vers l'amont les filets supérieurs.

7. **Cas du déversoir à nappe noyée en dessous**[1]. — Les mêmes principes permettent d'envisager le cas du déversoir à nappe noyée en dessous, dans les conditions que nous avons précisées (§ 4, cas B) : la pression $N'\rho gh$ au niveau du seuil est supposée constante comme h ; N' est un nombre donné.

Bornons-nous au cas du barrage vertical pour lequel $C = 2c$; nous avons établi les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned} m &= (1-c)^{\frac{3}{2}}(nk - n^3k^3)\frac{\log k}{k-1}, \\ n &= \sqrt{\frac{1-N'}{1-c}}, \qquad k = \sqrt{\frac{1-K}{1-N'}}; \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{1-2c} &= 1 + k - \nu^2k^3\left(1 + \frac{k}{2}\right), \\ \nu &= \sqrt{\frac{1-N'}{1-2c}} = n\sqrt{\frac{1-c}{1-2c}}. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

[1] J. Boussinesq, **7**, 3e Note; **5**, p. 47.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous avons à développer la condition exprimée par la relation : $\frac{dm}{dK} = 0$,

ou :

$$\frac{3}{2}\frac{1}{c-1}\frac{dc}{dK} + \frac{1-3n^2k^2}{nk-n^3k^3}\left(n\frac{dc}{dK} + c\frac{dn}{dK}\right) + \left(\frac{1}{k\log k} - \frac{1}{k-1}\right)\frac{dk}{dK} = 0.$$

Comme la dérivation des secondes équations (14) donne, N′ étant constant :

$$2(c-1)\frac{dn}{dK} + n\frac{dc}{dK} = 0,$$

$$-1 = (1-N')2k\frac{dk}{dK} = 2kn^2(1-c)\frac{dk}{dK},$$

les dérivées de n et de k s'éliminent de suite, et l'on trouve :

$$\frac{n^2k^2}{1-n^2k^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k}\right] = \frac{n^2k^2}{1-n^2k^2}\frac{dc}{dK},$$

ou

$$1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2k^2} - 1\right)\left(\frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k}\right) = \frac{dc}{dK}. \quad (16)$$

D'autre part, la dérivation des équations (15) donne :

$$\frac{2}{(1-2c)^2}\frac{dc}{dK} = \left[1 - \nu^2k^2(3+2k)\right]\frac{dk}{dK} - k^3(2+k)\nu\frac{d\nu}{dK},$$

$$(1-2c)\frac{d\nu}{dK} - \nu\frac{dc}{dK} = 0,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et la valeur trouvée de $\frac{dk}{d\mathrm{K}}$ peut s'écrire :

$$\frac{dk}{d\mathrm{K}} = -\frac{1}{2k\nu^2(1-2c)}.$$

Éliminons entre ces trois équations les dérivées de k et de ν ; il vient :

$$\frac{2}{1-2c}\frac{dc}{d\mathrm{K}} = \frac{\nu^2k^2(3+2k)-1}{k\nu^2} - k^3\nu^2(2+k)\frac{dc}{d\mathrm{K}},$$

ou encore, en remplaçant $\frac{1}{1-2c}$ par sa valeur (15) :

$$\frac{dc}{d\mathrm{K}} = \frac{\nu^2k^2(3+2k)-1}{4k\nu^2(1+k)}. \qquad (17)$$

Telle est l'expression à substituer au second membre de l'équation (16), pour obtenir l'équation dont la discussion va déterminer toutes les circonstances de l'écoulement étudié.

Comme cette équation renferme un paramètre arbitraire N′, nous ne pouvons songer à la résoudre explicitement. Nous nous proposons alors de prendre au contraire k comme arbitraire, comme variable indépendante, et d'exprimer en fonction de cette variable les quantités N′, c, n, ν, m. Ces expressions obtenues, nous les traduirons en tables, puis en graphiques, lesquels nous feront connaître (par interpolation) la valeur de k, et par suite le coefficient de débit ainsi que la contraction inférieure correspondant à une valeur donnée de N′.

Posons : $$\frac{2}{\varphi(k)} = \frac{1}{\log k} + \frac{1}{1-k}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On déduit immédiatement de (16) et (17) :

$$\frac{1}{k^2\varphi(k)}\,\frac{1}{n^2}-\frac{1}{4k(1+k)}\,\frac{1}{\nu^2}=1+\frac{1}{\varphi(k)}-\frac{k(3+2k)}{4(1+k)},$$

et comme on a, par définition de n et ν :

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1-c}{1-N'},\qquad \frac{1}{\nu^2}=\frac{1-2c}{1-N'},$$

il en résulte la relation :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2k}\left[\frac{1}{k\varphi(k)}-\frac{1}{2(1+k)}\right](1-2c)+\frac{1}{2k^2\varphi(k)}\\&=\left[\frac{1}{\varphi(k)}+\frac{4+k-2k^2}{4(1+k)}\right](1-N').\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

D'un autre côté, si l'on remplace dans la première équation (15) ν^2 par $\dfrac{1-N'}{1-2c}$, on trouve de suite :

$$(1+k)(1-2c)=1+k^3\left(1+\frac{k}{2}\right)(1-N').\qquad(19)$$

Nous obtenons ainsi deux équations linéaires en $(1-2c)$ et en $(1-N')$, qui font connaître ces quantités en fonction de k.

Posons, pour abréger l'écriture :

$$\alpha=\frac{k\varphi(k)}{2(1+k)(2+k)},$$

$$\beta=\frac{k^2}{2(2+k)},$$

$$\gamma=5+\frac{4}{k}-\frac{3}{2}k^2.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La résolution des équations (18) et (19) par rapport à $(1-N')$ donne :

$$k^2(1-N') = \frac{1-\alpha}{1+\alpha\gamma-\beta}. \qquad (20)$$

Posons encore :

$$\varpi = \frac{1-\alpha}{1+\alpha\gamma-\beta}\left(1+\frac{1}{2}k\right).$$

Nous aurons alors :

$$c = \frac{k}{2(1+k)}(1-\varpi). \qquad (21)$$

N' et c étant connus pour chaque valeur de k, on calculera n par l'expression de définition

$$n^2 = \frac{1-N'}{1-c}, \qquad (22)$$

et enfin le coefficient de débit par l'expression

$$m = (1-c)^{\frac{3}{2}} n^3 k^3 \left(\frac{1}{n^2k^2}-1\right)\frac{\log k}{k-1}.$$

Au point de vue du calcul pratique, il y a intérêt à transformer cette dernière expression en exprimant $\log k$ en fonction de $\varphi(k)$, à l'aide de la relation qui définit $\varphi(k)$. En posant :

$$\theta = \frac{1}{n^2k^2}, \qquad \lambda = -2\frac{1-k}{\varphi(k)},$$

on obtient bien simplement :

$$m = \left(\frac{1-c}{\theta}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\theta-1}{1+\lambda}. \qquad (23)$$

M. Enache de la Olt[1], qui a mis les formules de

[1] N. Enache de la Olt, p. 23-27.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

M. Boussinesq sous les formes (20,...23), a traduit ces résultats en nombres ; nous allons reproduire le tableau qu'il a établi, et dont la dernière colonne donne le rapport du coefficient de débit m défini par la formule (23) au coefficient de débit $m_1 = 0{,}4342$ obtenu pour le déversoir vertical à nappe libre.

k	$\varphi(k)$	N′	c	m	$\frac{m}{m_1}$
0,273	3,4042	— 1,8109	0,0817	0,5793	1,3342
0,275	3,3072	— 1,7669	0,0822	0,5771	1,3291
0,300	3,3445	— 1,2924	0,0880	0,5513	1,2696
0,325	3,3798	— 0,9283	0,0936	0,5280	1,2160
0,350	3,4138	— 0,6431	0,0990	0,5070	1,1677
0,400	3,4765	— 0,2327	0,1090	0,4705	1,0886
0,450	3,5344	0,0419	0,1174	0,4403	1,0140
0,500	3,5886	0,2326	0,1267	0,4136	0,9526
0,600	3,6872	0,4756	0,1412	0,3728	0,8586
0,700	3,7760	0,6158	0,1536	0,3396	0,7821
0,800	3,8666	0,7032	0,1631	0,3146	0,7245
0,900	3,9310	0,7607	0,1703	0,2950	0,6794
1,000	4,0000	0,8000	0,1750	0,2795	0,6437

8. **Vérifications expérimentales.** — Confrontons ces conclusions théoriques avec l'expérience. H. Bazin[1] a représenté ses résultats d'observation par les trois formules empiriques suivantes :

$$\frac{m_e}{m_1} = 1{,}01 - 0{,}245\,N'\left(1 + \frac{N'}{5}\right),$$

[1] H. Bazin, 2, 4e Mémoire, p. 257 et suiv.; Résumé, p. 144 146, 147.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

(pour N′ compris entre les limites —0,9 et 0,3);

$$\frac{m_e}{m_1} = 1 - 0{,}235\,N'(1 + N'),$$

(pour N′ compris entre les limites 0,3 et 0,6);

$$\frac{m_e}{m_1} = 1{,}05\sqrt[3]{1 - N'},$$

(pour N′ supérieur à 0,6);
nous avons affecté le coefficient de débit de l'indice e, pour marquer qu'il s'agit de la valeur de ce coefficient obtenue expérimentalement, m_1 étant toujours égal à 0,4342.

La première formule correspond aux nappes noyées en dessous et dégagées du remous d'aval, lesquelles donnent les résultats les plus nets; les deux autres conviennent aux nappes noyées en dessous et relatives à des valeurs de N′ qui ne leur permettent pas de se dégager du remous d'aval.

M. Enache a calculé le rapport $\frac{m_e}{m_1}$ par ces formules empiriques, en donnant à N′ les valeurs du précédent tableau, sauf les trois premières qui sortent du champ des pressions relatives produites sous les nappes noyées en dessous proprement dites, pour lesquelles Bazin a construit sa première formule.

Le tableau des résultats montre que les valeurs théoriques sont plus fortes, d'environ deux centièmes, que les valeurs trouvées expérimentalement. Les courbes construites en prenant pour abscisses les valeurs de N′ et pour ordonnées les valeurs soit de $\frac{m}{m_1}$, soit de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

N′	$\frac{m}{m_1}$	$\frac{m_e}{m_1}$	ÉCART
— 0,9283	1,2160	1,1952	0,0208
— 0,6431	1,1677	1,1473	0,0204
— 0,2327	1,0836	1,0405	0,0431
0,0419	1,0140	0,9960	0,0180
0,2336	0,9526	0,9323	0,0203
0,4756	0,8586	0,8351	0,0235
0,6158	0,7821	0,7633	0,0188
0,7032	0,7245	0,7004	0,0241
0,7607	0,6794	0,6519	0,0275

$\frac{m_e}{m_1}$, sont de même allure et presque identiques, comme on le voit sur le graphique reproduit ci-après.

M. Boussinesq explique l'écart en observant que les pertes de force vive translatoire, négligées par la théorie et employées à faire tourbillonner sous la section contractée une masse fluide étrangère à la nappe déversante, doivent être plus fortes quand cette masse est de l'eau que lorsque c'est de l'air et, par suite, en réduisant à la fois la vitesse moyenne et le débit, atténuer un peu plus les numérateurs m que les dénominateurs m_1.

Si l'on observe que *la théorie de M. Boussinesq n'emprunte à l'expérience aucune donnée* QUANTITATIVE, *aucun élément* NUMÉRIQUE, on sera sûrement frappé par la petitesse de l'écart entre la théorie et l'observation.

Nous avons limité le calcul à $k=1$, ou à $N'=0,8$. Pour $k=1$, le rayon de courbure R_0 est infini ; au delà, les filets fluides de la masse déversante devien-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

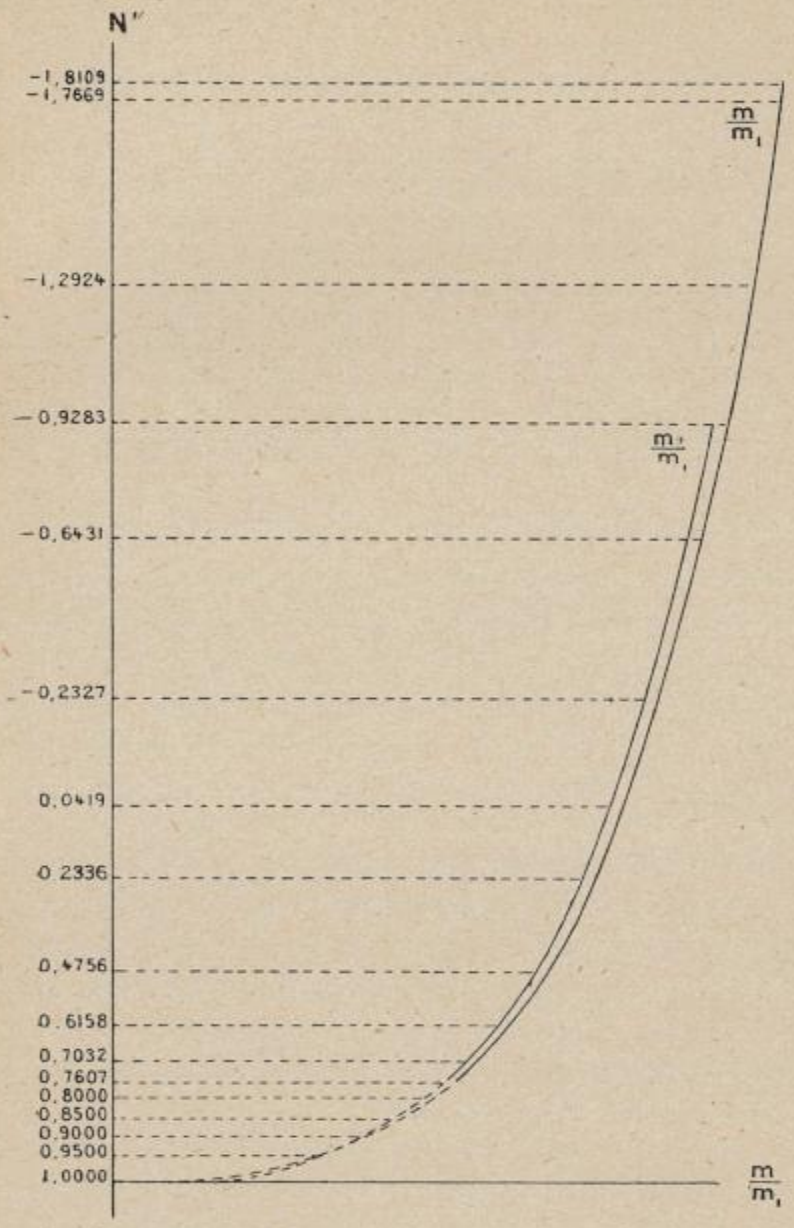


Fig. 6.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

draient concaves vers le haut si la loi du phénomène ne changeait pas.

Dès que les filets arrivent à être rectilignes et presque horizontaux à la traversée de la section contractée, la nappe ne plonge plus sous le remous d'aval ; elle s'étale à la surface de ce remous (comme elle présente alors quelques ondulations, H. Bazin la nomme *nappe ondulée*). A partir de cet instant, le rayon de courbure R_0 reste extrêmement grand ; on peut par suite poser constamment $k = 1$, ou encore $K = N'$. Comme K devient constant, m le devient aussi, et il n'y a plus lieu d'appliquer le principe du débit maximum.

Pour $k = 1$, les formules (21), (22), (23) donnent :

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{3N' - 1}{8} ; \\ n^2 &= \frac{8}{3} \cdot \frac{1 - N'}{3 - N'} ; \\ m &= \frac{1 + 5N'}{8} \sqrt{1 - N'} . \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

M. Enache a mis ces formules en nombres pour diverses valeurs de N' comprises entre $N' = 0{,}8$ et $N' = 1$; il a comparé les nombres trouvés pour $\frac{m}{m_1}$ à ceux $\frac{m_e}{m_1}$ que donne, pour les nappes ondulées, la troisième formule empirique de Bazin (valable pour $N' > 0{,}6$) : il y a presque coïncidence entre les résultats.

La simplicité des formules (24) a suggéré l'idée d'essayer jusqu'à quel point elles seraient applicables pour des valeurs de N' inférieures à 0,8 : on constate qu'elles

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

N′	c	m	$\frac{m}{m_1}$	$\frac{m_e}{m_1}$
0,800	0,1750	0,2795	0,6437	0,6140
0,850	0,1937	0,2542	0,5854	0,5579
0,900	0,2125	0,2174	0,5007	0,4873
0,926	0,2315	0,1914	0,4409	0,4408
0,950	0,2375	0,1607	0,3701	0,3868
0,975	0,2437	0,1162	0,2674	0,3070
1,000	0,2500	0,0000	0,0000	0,0000

sont admissibles jusqu'à $N' = 0,7$. Les courbes à abscisses N′ et à ordonnées $\frac{m}{m_1}$ ou $\frac{m_e}{m_1}$ pour $N' > 0,8$, courbes tracées en pointillés, semblent par suite prolonger avec continuité les courbes analogues précédemment tracées.

9. **Indications sur quelques questions complémentaires.** — La théorie des déversoirs a donné lieu à des recherches de perfectionnement que nous signalerons succinctement.

1° Nous avons supposé précédemment le barrage assez haut pour rendre négligeables les petites vitesses acquises par le fluide sur la section d'amont où la surface de l'eau est sensiblement horizontale. M. Boussinesq a essayé de mettre en compte ces vitesses acquises à l'amont, pour les déversoirs dont la hauteur n'est pas très grande comparativement à la charge; il a notamment étudié l'influence de ces vitesses d'amont sur la contraction inférieure dans le cas d'un déversoir à armature horizontale, et il a confronté

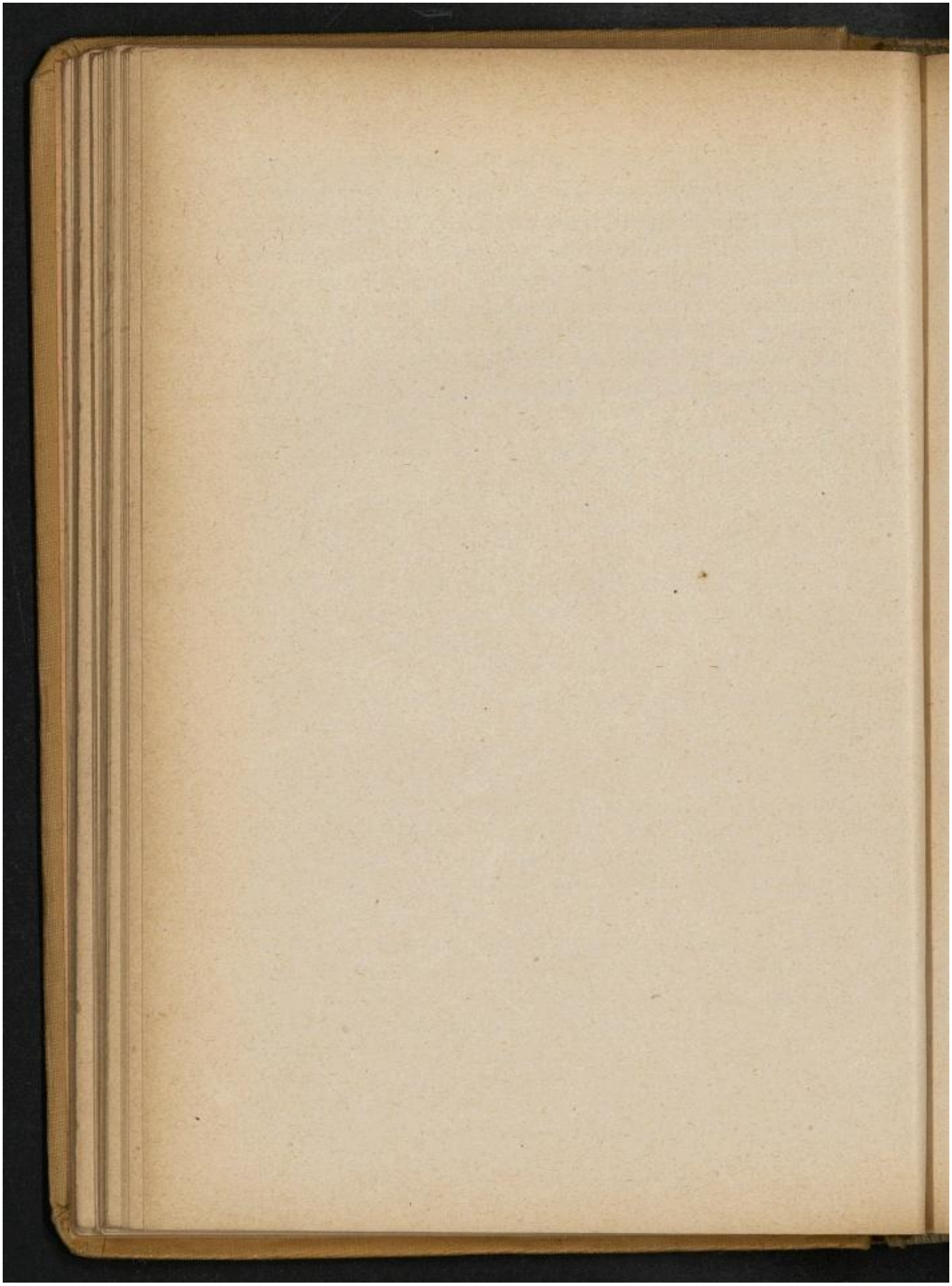
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les résultats obtenus avec ceux d'expériences de Bazin[1].

2° L'hypothèse que nous avons faite dans le cas des nappes noyées en dessous, de regarder N′ comme une constante donnée, avait pour but d' « extraire du problème réel sa partie la plus abordable ». M. Boussinesq[2] a tenté de rattacher cette pression N′ à l'élévation h'' du déversoir au-dessus du canal de fuite, et d'obtenir une limite supérieure de cette fonction $N'(h'')$.

[1] J. Boussinesq, 5, p. 72-91; 6, 2e Note.
[2] J. Boussinesq, 5, p. 66-72.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

DEUXIÈME SECTION

PHÉNOMÈNES DE MOUVEMENTS BIEN CONTINUS OU L'INFLUENCE DES FROTTEMENTS EST SENSIBLE

CHAPITRE I

EXTINCTION GRADUELLE DE LA HOULE

1. **Perturbations apportées par les frottements à la propagation des ondes.** — Nous avons obtenu, pour les ondes d'oscillation et de translation à mouvements bien continus, des lois très simples, que confirme l'observation quand elle porte sur une zone superficielle d'étendue modérée. En fait, ces lois ne sont qu'approximatives. La houle cylindrique, par exemple, n'est rigoureusement périodique que par rapport au temps; la hauteur des vagues va en décroissant graduellement à mesure que l'on s'éloigne du lieu de production : seules, les ordonnées qui séparent les creux d'avec les crêtes se propagent invariables. L'onde solitaire subit de même une lente déformation. Cette *extinction* des ondes est due aux frottements que nous avons négligés et que nous allons tenter de mettre en compte.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous envisagerons dans ce Chapitre le cas le plus simple, celui où il n'y a aucune paroi à distance finie dont l'influence se fasse sentir (houle en profondeur infinie, ou houle de haute mer avec mouvement insensible aux grandes profondeurs). Pour les ondes de translation telles que l'onde solitaire, pour le clapotis près d'une côte abrupte, pour les mouvements oscillatoires dans les vases, les parois, au contraire, en annulant ou en réduisant fortement les vitesses à leur contact, engendrent dans leur voisinage d'énormes glissements relatifs de couche sur couche, et par suite des frottements d'une grandeur exceptionnelle : le phénomène dont la région voisine des parois est ainsi le siège sera analysé au Chapitre suivant.

Pour évaluer avec précision les effets des frottements intérieurs, il faudrait intégrer les équations différentielles complètes du mouvement. Encore que ces équations soient aisées à former dans le cas de mouvements bien continus où les saillies des ondes sont trop faibles pour qu'il y ait déferlement, leur intégration dépasse les forces de l'Analyse : nous nous bornerons à établir une loi approchée qui sera fournie par l'estimation de la perte incessante d'énergie qu'éprouvent les ondes par le fait des frottements, estimation facile à déduire des équations en question.

Indiquons brièvement le parti que nous tirerons de l'unique équation fournie par le théorème des forces vives. Soit une houle cylindrique simple étudiée à une grande distance de la région où l'ont produite des coups de vent plus ou moins périodiques. Cette houle progresse avec une célérité constante ω, et sur une faible étendue, elle obéit aux lois de Gerstner. La période $2T$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par rapport au temps reste invariable, et la demi-longueur de vague L, liée à ω et à T par les relations :

$$L = \omega T, \quad \omega = \sqrt{\frac{gL}{\pi}},$$

ne change pas plus que ω et T durant la propagation.

Dans l'hypothèse d'un fluide sans frottement, le profil des vagues est une trochoïde circulaire dont la hauteur au-dessus ou au-dessous du niveau primitif $z = 0$ est, avec nos notations $H = \frac{C}{\omega}$, et dont les équations paramétriques ont été obtenues au Tome I (I^re^ section, Ch. II, n° 3). Dans le cas d'un fluide naturel, le profil observé affecte bien cette forme pour un champ modéré de variation de l'abscisse longitudinale x; mais dès que x augmente sensiblement, la hauteur H décroît graduellement. Nous regarderons alors H ou C comme une fonction de x, que nous déterminerons de manière à satisfaire à l'équation donnée par le principe des forces vives.

2. **Calcul de la perte incessante d'énergie qu'éprouvent les ondes par le fait des frottements**[1]. — L'axe des z étant pris suivant la verticale descendante, les équations indéfinies de Navier, pour un fluide pesant, s'écrivent :

$$\rho(u', v', w' - g) = -\frac{\partial p}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{N}_x, \mathfrak{T}_z, \mathfrak{T}_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{T}_z, \mathfrak{N}_y, \mathfrak{T}_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{T}_y, \mathfrak{T}_x, \mathfrak{N}_z);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

[1] J. Boussinesq, **2**, Additions, p. 27; **8**, 1re Note.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

u', v', w' sont les composantes de l'accélération au point (x, y, z), p la pression moyenne au même point, $-p+\mathfrak{N}_x$, $-p+\mathfrak{N}_y$, $-p+\mathfrak{N}_z$, $\mathfrak{T}_x, \mathfrak{T}_y, \mathfrak{T}_z$ les composantes des pressions sur des éléments plans normaux aux axes. On a d'ailleurs :

$$\mathfrak{N}_x = 2\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \ldots$$

$$\mathfrak{T}_x = \varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right), \ldots, \ldots$$

Si l'on pose $p = \rho g z + \mathrm{P}$,

ces équations prennent la forme symétrique .

$$\left.\begin{aligned} \rho(u', v', w') = &-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{N}_x, \mathfrak{T}_z, \mathfrak{T}_y) \\ &+\frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{T}_z, \mathfrak{N}_y, \mathfrak{T}_x)+\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{T}_y, \mathfrak{T}_x, \mathfrak{N}_z); \\ &\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

On reconnaît les équations indéfinies du mouvement d'un fluide fictif dépourvu de pesanteur, et dont il reste à préciser les conditions aux limites.

A la surface libre, la pression extérieure est nulle (déduction faite de la pression atmosphérique supposée invariable). Comme cette surface libre est peu inclinée sur le plan des xy, les composantes de la pression sur un de ses éléments sont très sensiblement exprimées par $-\mathfrak{T}_y$, $-\mathfrak{T}_x$, $p-\mathfrak{N}_z$. On aura donc, pour $z=-h$ (h étant l'altitude d'un point de la surface *au-dessus* du niveau moyen) :

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0, \quad p-2\varepsilon\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

D'autre part, la vitesse verticale w du fluide coïncidera, au signe près, avec la vitesse d'accroissement de la hauteur h de la surface libre au-dessus du niveau moyen, vitesse calculée en suivant une même molécule :

$$w = -\left(\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} + w\frac{\partial h}{\partial z}\right);$$

sa partie principale est $-\frac{\partial h}{\partial t}$.

Enfin, au fond, pour $z = \infty$, (u, v, w) sont nuls.

Si nous faisons le changement de fonction :

$$p = \rho g z + \mathrm{P},$$

nous aurons les équations aux limites à associer aux équations (1) :

$$\text{pour } z = -h, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \mathrm{P} - 2\varepsilon\dfrac{\partial w}{\partial z} = \rho g h, \\ w = -\left(\dfrac{\partial h}{\partial t} + u\dfrac{\partial h}{\partial x} + v\dfrac{\partial h}{\partial y} + w\dfrac{\partial h}{\partial z}\right); \end{cases}$$

pour $z = \infty$, $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$.

Ces conditions conviennent à un fluide dépourvu de pesanteur, mais dont la surface libre subirait du dehors la pression normale variable $\rho g h$.

Soit $d\varpi = dx\,dy\,dz$ un élément de volume entourant le point (x, y, z); multiplions les quatre équations (1) respectivement par :

$$u\,d\varpi\,dt, \quad v\,d\varpi\,dt, \quad w\,d\varpi\,dt, \quad -\mathrm{P}\,d\varpi\,dt$$

et ajoutons-les; puis intégrons l'équation obtenue pour tout un volume donné ϖ du fluide.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si $dm = \rho d\varpi$, on obtient comme premier membre :

$$d \cdot \sum \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) dm,$$

la sommation $\sum$ étant étendue à toute la masse incluse dans ϖ.

Quant au second membre, il se décompose en une intégrale de surface et en une intégrale de volume par l'application d'une formule connue de Lagrange[1].

Il vient pour la première intégrale, en notant que,

[1] *Note sur une formule d'intégration due à Lagrange.* — Soit l'intégrale $I = \sum \frac{\partial U}{\partial x} d\varpi$ étendue à un volume déterminé, U étant une fonction continue de x, y, z. Considérons au point $(x = o, y, z)$ un élément superficiel $d\omega$, base d'un prisme élémentaire parallèle à ox. Soient $a_1, a_2, \ldots$ les intersections successives (dans le sens de ox) d'une arête du prisme élémentaire avec la surface du volume; α_i le cosinus de l'angle que forme, avec ox, la normale extérieure $a_i N_i$ à cette surface au point a_i; $d\sigma_i$ l'élément superficiel découpé en a_i; U_i la valeur de U au point a_i; en prenant $d\varpi = d\omega dx$ et en intégrant par rapport à x, on a :

$$I = \sum \left[- U_1 + U_2 - U_3 + \ldots \right] d\omega.$$

Or $$d\omega = - \alpha_1 d\sigma_1 = + \alpha_2 d\sigma_2 = - \alpha_3 d\sigma_3 = \ldots,$$

et par suite

$$I = \sum \left(U_1 \alpha_1 d\sigma_1 + U_2 \alpha_2 d\sigma_2 + \ldots \right) = \sum U \alpha d\sigma,$$

$d\sigma$ étant un élément quelconque de la surface et α le cosinus de l'angle de sa normale extérieure avec ox.

Soit maintenant V désignant une fonction de x, y, z, l'intégrale $J = \sum V \frac{\partial U}{\partial x} d\varpi$. Comme $V \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial (UV)}{\partial x} - U \frac{\partial V}{\partial x}$, nous aurons, par application de la formule précédente :

$$J = \sum \frac{\partial (UV)}{\partial x} d\varpi - \sum U \frac{\partial V}{\partial x} d\varpi = \sum UV \alpha d\sigma - \sum U \frac{\partial V}{\partial x} d\varpi,$$

le produit UV se rapportant à la surface, dans la première intégrale [*Mécanique analytique*, liv. I, sect. VII, 29 et 30].

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale extérieure à l'élément superficiel $d\sigma$,

$$\alpha(-\mathrm{P}+\mathfrak{I}_x)+\beta\mathfrak{C}_z+\gamma\mathfrak{C}_y, \ldots$$

ne sont autre chose que les composantes P_x, P_y, P_z, suivant les axes, de la pression extérieure appliquée à l'élément $d\sigma$ de surface[1] :

$$dt\int_\sigma(\mathrm{P}_x u+\mathrm{P}_y v+\mathrm{P}_z w)\,d\sigma.$$

Comme udt, vdt, wdt sont les composantes du déplacement, durant l'instant dt, du centre de l'élément $d\sigma$, l'expression précédente représente le travail élémentaire produit, pendant cet instant, par les pressions exercées à la surface du fluide.

Parmi ces pressions, nous distinguerons celles qui s'exercent à la surface libre Σ ; là, nous avons :

$$\mathrm{P}_x=0,\quad \mathrm{P}_y=0,\quad \mathrm{P}_z=\rho gh,\quad w=-\frac{dh}{dt}.$$

La partie de l'intégrale précédente afférente à cette surface est donc ($d\Sigma$ pouvant d'ailleurs être confondu avec sa projection sur le plan xoy) :

$$-dt\int_\Sigma \rho gh\frac{dh}{dt}\,d\Sigma,$$

ou

$$-d\int_\Sigma \frac{1}{2}\rho gh^2 d\Sigma.$$

[1] On applique la formule I à l'intégration des termes tels que $-\frac{\partial(u\mathrm{P})}{\partial x}$, et la formule J à l'intégration de ceux de la forme $u\frac{\partial\mathfrak{I}_x}{\partial x}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Quant à l'intégrale de volume, elle s'écrit :

$$-dt\int_{\varpi}\left[\mathfrak{N}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\mathfrak{T}_z\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\dots\right]d\varpi,$$

ou encore :

$$-dt\int_{\varpi}\varepsilon\left\{2\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\sum\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}d\varpi.$$

Nous sommes ainsi conduits à la relation :

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)dm+\sum_{\Sigma}\frac{1}{2}\rho g h^2 d\Sigma\right\}$$

$$=\sum_{\sigma-\Sigma}(\mathrm{P}_x u+\mathrm{P}_y v+\mathrm{P}_z w)d\sigma$$

$$-\varepsilon\sum_{\varpi}\left\{2\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\sum\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}d\varpi.$$

Soit, pour la masse totale du volume liquide ϖ considéré, $\mathcal{E}$ *l'énergie actuelle* ou *cinétique*, et $\mathcal{E}_1$ *l'énergie potentielle de pesanteur* (par rapport à l'état d'équilibre) à l'instant t :

$$\mathcal{E}=\sum\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)dm,\quad \mathcal{E}_1=\sum_{\Sigma}\frac{1}{2}\rho g h^2 d\Sigma.$$

Soit enfin $d\mathfrak{T}_e$ le travail élémentaire (durant le temps dt consécutif à l'instant t) des pressions P exercées sur la surface du volume ϖ par le fluide ambiant. L'équation établie s'écrit :

$$d(\mathcal{E}+\mathcal{E}_1)=d\mathfrak{T}_e$$

$$-\varepsilon dt\sum_{\varpi}\left\{2\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\sum\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}d\varpi.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ainsi la variation (durant l'intervalle dt) de l'énergie totale de la masse envisagée diffère de la somme des travaux des pressions exercées à la surface par le fluide ambiant, de la quantité

$$d\mathcal{E}_f = -\varepsilon dt \int_\varpi \left\{ 2 \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \sum \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right\} d\varpi,$$

qui mesure la part d'énergie absorbée par les frottements intérieurs (pendant ledit intervalle de temps).

3. **Application à la houle cylindrique simple**[1]. — Nous allons appliquer cette relation, dans le cas d'une houle cylindrique, au volume compris, à l'instant t, entre deux plans parallèles aux plans des orbites ou parallèles à xoz, et distants de l'unité (par exemple, $y_0 = -\frac{1}{2}$ et $y_1 = \frac{1}{2}$) et deux autres plans parallèles à yoz, d'abscisses x_0, x_1. Nous supposons que ces deux abscisses correspondent à deux points d'ordonnées nulles de la surface libre et renferment un nombre entier n de vagues ($x_1 - x_0 = 2n\mathrm{L}$), n étant assez grand pour que la hauteur H des vagues soit sensiblement plus faible près du plan x_1 que près du plan x_0.

La houle étant cylindrique, on a toujours et partout

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

De plus, dans une étendue restreinte, le mouvement est régi par les lois de Gerstner : au point (x, z) d'un plan normal à oy, occupé à l'instant t par une molé-

[1] J. Boussinesq, 8, 2e Note.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cule fluide de position moyenne (a, c), la vitesse a pour composantes (u, w) les dérivées par rapport à a, c de la fonction :

$$\varphi = Ce^{-\frac{gc}{\omega^2}} \sin\left(\frac{ga}{\omega^2} - \frac{gt}{\omega}\right) = Ce^{-\frac{\pi c}{L}} \sin\left(\frac{\pi a}{L} - \frac{\pi t}{T}\right);$$

x et z sont liés à a et c par les relations :

$$x = a - \frac{C}{\omega} e^{-\frac{\pi c}{L}} \sin\left(\frac{\pi a}{L} - \frac{\pi t}{T}\right),$$

$$z = c - \frac{C}{\omega} e^{-\frac{\pi c}{L}} \cos\left(\frac{\pi a}{L} - \frac{\pi t}{T}\right).$$

La dérivation montre que $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial c}$ et $\frac{\partial x}{\partial c}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$ diffèrent (en valeur absolue) les premières de l'unité, les secondes de zéro, de moins de $\frac{\pi H}{L}$, et comme nous supposons que la hauteur H est très petite vis-à-vis de L, nous pourrons, au moins comme approximation, dans l'estimation du petit travail des frottements intérieurs, négliger ces termes en $\frac{H}{L}$, et confondre a et c avec x et z. Nous prendrons donc pour u, w les dérivées en x, z de la fonction :

$$\varphi = Ce^{-\frac{\pi z}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L} - \frac{\pi t}{T}\right).$$

« Il n'y aura d'écart sensible d'avec les lois de Gerstner qu'à la surface libre, sur une faible épaisseur. Car l'absence à peu près complète de frottement extérieur de la part de l'atmosphère a pour conséquence,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dès que ε n'est plus nul, l'égalité à zéro de la vitesse relative de glissement des couches liquides les plus superficielles, et, par suite, une altération de ces vitesses relatives de glissement de couches sur couches, aux environs de la surface, mais sans changement perceptible des vitesses mêmes, vu la faible épaisseur où leur dérivée dans le sens vertical est ainsi modifiée. Il n'y a pas évidemment là d'élévation dans l'ordre de grandeur de ces vitesses de glissement, ou des frottements corrélatifs, ni, par suite, introduction d'un travail résistant comparable, sous volume insensible, à celui des frottements non moindres mis en jeu dans toute la masse sous-jacente ébranlée, et l'on peut évaluer à très peu près l'énergie absorbée par les résistances passives comme si les lois de Gerstner s'appliquaient jusqu'à la surface libre[1]. »

Nous allons d'abord montrer que le travail $d\mathfrak{T}_e$ est nul pour le volume envisagé. A la surface du fond, cela résulte de ce qu'il n'y a pas de mouvement; sur les plans y_0 et y_1, de ce que les pressions y sont toutes normales, par symétrie, et que les déplacements ont lieu dans ces plans. Restent les deux plans x_0 et x_1 déterminés par la condition de correspondre à des dénivellations nulles de la surface libre. Or l'altitude h a pour expression la valeur, pour $c=0$, de $-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$; d'où, x étant confondu avec a, la relation :

$$\cos\left(\frac{\pi x}{L}-\frac{\pi t}{T}\right)=0$$

vérifiée, à l'instant t, par x_0 et x_1. Il en résulte que

[1] J. Boussinesq, 8, 1re Note, § 1.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est nul dans les deux plans, en sorte que les molécules s'y déplacent verticalement. Comme sur un élément quelconque de ces plans, élément normal à ox, les composantes de la pression sont N_x, T_z, T_y et que la dernière seule pourrait donner un travail non nul, il suffit de constater que :

$$T_y = \varepsilon\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 2\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} = 0,$$

dans les plans x_0, x_1 ; or cela résulte de ce que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z}$ contient en facteur $\cos\left(\frac{\pi x}{L} - \frac{\pi t}{T}\right)$.

Ainsi $d\mathcal{T}_e \equiv 0$.

Observons d'autre part qu'en vertu de l'équation de continuité et de l'existence d'un potentiel des vitesses, on a : $\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$.

Dans ces conditions, l'équation établie au paragraphe précédent se réduit à :

$$\frac{d(\mathcal{E} + \mathcal{E}_1)}{dt} = -4\varepsilon \int_\varpi \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] d\varpi.$$

Nous allons calculer des expressions approchées des diverses quantités qui figurent dans cette relation.

Des formules rappelées on déduit aisément :

$$u^2 + v^2 + w^2 = \frac{\pi^2 C^2}{L^2} e^{-\frac{2\pi z}{L}} = \pi g \frac{H^2}{L} e^{-\frac{2\pi z}{L}},$$

$$h = \left(-\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{z=0} = H \cos\left(\frac{\pi x}{L} - \frac{\pi t}{T}\right),$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2=\frac{\pi^4 C^2}{L^4}\,e^{-\frac{2\pi z}{L}}=\pi^3 g\,\frac{H^2}{L^3}\,e^{-\frac{2\pi z}{L}}.$$

Il en résulte que, pour une vague de longueur $2L$, les énergies actuelle et potentielle ont pour valeurs (les limites d'intégration par rapport à z étant très sensiblement o et ∞) :

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}\rho\pi g\,\frac{H^2}{L}\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi z}{L}}\,.\,2L\,dz=\frac{1}{2}\rho g H^2 L,$$

$$\mathcal{E}_1=\frac{1}{2}\rho g H^2\int_0^{2L}\cos^2\left(\frac{\pi x}{L}-\frac{\pi t}{T}\right)dx=\frac{1}{2}\rho g H^2 L.$$

L'énergie *totale* d'une vague est donc

$$E=\rho g H^2 L.$$

Enfin l'énergie absorbée par les frottements, entre les instants t et $t+dt$, est, pour le volume envisagé :

$$d\mathcal{E}_f=-4\varepsilon dt\int_{x_0}^{x_1}\pi^3 g\,\frac{H^2}{L^3}\,dx\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi z}{L}}\,dz$$

$$=-2\varepsilon dt\int_{x_0}^{x_1}\frac{\pi^2 g H^2}{L^2}\,dx,$$

ou encore :

$$d\mathcal{E}_f=-2\,\frac{\pi^2\varepsilon}{\rho L^3}\,dt\int_{x_0}^{x_1}E\,dx.$$

Ceci posé, envisageons les n vagues comprises, à l'instant t, entre les abscisses x_0 et x_1; *suivons-les dans leur propagation* durant une période $2T$, et calculons de deux manières leur variation d'énergie.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Durant l'intervalle de temps assez court 2T, une vague suivie dans son mouvement garde à fort peu près sa forme et son énergie; chaque vague d'ailleurs s'est substituée à celle qui la précédait; l'ensemble a gagné une vague à la suite du plan x_1, et il en a perdu une à la suite du plan x_0. Si donc on désigne par E_1, E_0 respectivement l'énergie totale d'une vague aux limites x_1 et x_0, les vagues intermédiaires gardant leur énergie dans leur remplacement mutuel, la variation totale d'énergie du groupe sera $E_1 - E_0$.

Évaluons d'autre part cette variation comme somme des pertes successives d'énergie des tranches envahies et abandonnées et de l'énergie absorbée par les frottements. Pendant un instant dt quelconque (entre t et $t+2T$), le système perd une tranche en queue et en gagne une en tête, leur épaisseur commune étant ωdt. Comme aux extrémités du train de vagues, la dénivellation h est nulle, l'énergie potentielle de pesanteur de chacune de ces tranches est nulle. Quant à l'énergie actuelle, elle est, pour une tranche :

$$\frac{1}{2}\rho g\frac{H^2}{L}\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi z}{L}}\,.\,\omega dt\,.\,dz = \frac{1}{4}\rho g H^2 \omega dt$$

$$= \frac{1}{4}E\,.\,\frac{\omega dt}{L};$$

l'excès de l'énergie gagnée en tête sur l'énergie perdue en queue est donc $\frac{1}{4}(E_1 - E_0)\frac{\omega dt}{L}$. En intégrant pour la durée 2T, comme $\int \omega dt = 2L$, il vient pour l'excès total $\frac{1}{2}(E_1 - E_0)$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Quant à l'énergie perdue par le train de vagues, du fait des frottements, pendant un intervalle dt, elle a pour valeur :

$$d\mathcal{E}_f = -2\frac{\pi^2\varepsilon}{\rho L^3}\,dt\int_{x_0}^{x_1} E\,dx;$$

pour une période $2T$, elle vaudra $\left(\text{en notant que } T=\frac{L}{\omega}\right)$:

$$\int_0^{2T} d\mathcal{E}_f, \text{ soit } -\frac{4\pi^2\varepsilon}{\rho L^2\omega}\int_{x_0}^{x_1} E\,dx.$$

Nous sommes ainsi conduits à la relation

$$E_1 - E_0 = \frac{1}{2}(E_1 - E_0) - \frac{4\pi^2\varepsilon}{\rho L^2\omega}\int_{x_0}^{x_1} E\,dx,$$

ou :
$$E_1 - E_0 + \frac{8\pi^2\varepsilon}{\rho L^2\omega}\int_{x_0}^{x_1} E\,dx = 0,$$

et cette relation peut enfin se mettre sous la forme :

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{dE}{dx} + \frac{8\pi^2\varepsilon}{\rho L^2\omega}E\right)dx = 0.$$

La fonction sous le signe d'intégration varie avec x d'une manière très lente et très graduelle; le fait que l'intégrale s'annule pour tout intervalle $2nL$, n étant assez grand, entraîne donc qu'elle s'annule identiquement et que E satisfasse à l'équation

$$\frac{dE}{dx} + \frac{8\pi^2\varepsilon}{\rho L^2\omega}E = 0.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

C'est l'équation cherchée du problème, Si l'on pose :

$$\alpha = \frac{8\pi^2\varepsilon}{\rho L^2\omega},$$

une intégration immédiate donne

$$E = E^0 e^{-2\alpha x},$$

E^0 étant l'énergie d'une vague pour $x = 0$, à la sortie de la région où naît la houle régulière.

Comme E vaut très sensiblement $\rho g H^2 L$, si l'on désigne par H^0 la demi-hauteur des vagues pour $x = 0$, on obtient, en extrayant la racine carrée des deux membres de la dernière équation, la relation :

$$H = H^0 e^{-\alpha x}.$$

Telle est la *loi de décroissance de hauteur des vagues avec la distance*.

Le coefficient α est dit *coefficient d'extinction de la houle avec la distance*. Si on l'exprime soit en fonction de L, soit en fonction de T, en utilisant les relations $L = \omega T$, $\frac{L}{\pi} = \frac{\omega^2}{g}$, il vient :

$$\alpha = 4\pi^2\sqrt{\pi g}\,\frac{\varepsilon}{\rho g}\,L^{-\frac{5}{2}} = \frac{4\pi^5}{g^2}\cdot\frac{\varepsilon}{\rho g}\,T^{-5}.$$

Ainsi « le coefficient d'extinction, avec la distance, d'une houle simple, est inversement proportionnel à la puissance $\frac{5}{2}$ de la longueur 2L des vagues ou à la cinquième puissance de la période 2T »[1].

Si l'on adopte pour ε la valeur donnée par Poiseuille

[1] J. Boussinesq, 8, 2e Note, *in fine*.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

(à 10° centigrades) et si l'on prend pour g la valeur 981, on trouve (en unités CGS) :

$$\alpha = 0{,}03 L^{-\frac{5}{2}} = 17 \cdot 10^{-9} T^{-5}.$$

La décroissance de H est très lente. Voyons, par exemple au bout de quel parcours la hauteur H est réduite de $\frac{1}{100}$ de sa valeur initiale. On a alors :

$$e^{-\alpha x} = 0{,}99, \quad \text{ou très sensiblement} \quad \alpha x = 0{,}01 ;$$

d'où :
$$\frac{x}{2L} = \frac{0{,}01}{2\alpha L} = \frac{1}{6} L\sqrt{L} .$$

Pour une vague de 2 mètres de longueur d'onde ($L = 100$), on aurait $\frac{x}{2L} = 166$. Le décroissement de $\frac{1}{100}$, pour une telle vague qui est déjà courte, n'aura lieu qu'après un parcours d'environ 166 longueurs totales de vague.

L'influence des frottements est donc très faible, et il était bien légitime de les négliger en première approximation.

4. **Réduction à une houle simple de toute agitation confuse, mais périodique, des flots**[1]. — Le résultat qu'on vient d'obtenir permet de se rendre compte comment, d'un mélange confus de lames soulevées par un ouragan, peut sortir, à une distance assez grande, à quelques centaines de kilomètres, une houle simple.

[1] J. Boussinesq, **8**, 3e Note.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Supposons que, dans une région et pendant un certain temps, le vent souffle en tempête, avec des rafales à peu près périodiques, engendrant une agitation de la masse liquide, ayant la période 2T des rafales. Admettons, pour simplifier, que les conditions de génération de cette agitation soient telles que la surface libre soit cylindrique, et envisageons le mouvement ainsi entretenu assez loin de son lieu de production.

« Il est naturel que ce mouvement soit réductible à des mouvements plus simples, admettant sa période 2T et une progression analogue, c'est-à-dire soit décomposable en une infinité de systèmes de houles à demi-périodes sous-multiples de T, car ces houles constituent évidemment le type idéal ou simple des mouvements de l'espèce considérée. » Nous allons montrer que la plus longue de ces houles est douée d'une longévité ou persistance beaucoup plus grande que les autres, qui s'éteignent relativement vite devant celle-là.

Donnons-nous en effet arbitrairement, dans la section $x = 0$, la dénivellation en fonction périodique du temps; développons-la en série de Fourier sous la forme :

$$h = \sum_{i=1}^{i=\infty} H_i \cos\left(k_i - \frac{i\pi t}{T}\right).$$

Nous pouvons regarder le terme de rang i comme l'expression de la dénivellation, dans la section $x = 0$, d'une houle simple de demi-période $T_i = \frac{T}{i}$ et dont le mouvement dériverait du potentiel des vitesses :

$$\varphi_i = H_i \omega_i e^{-\frac{\pi z}{L_i}} \sin\left(k_i + \pi \frac{x}{L_i} - \pi \frac{t}{T_i}\right),$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ω_i et L_i étant la vitesse de propagation et la demi-longueur d'onde, liées à T_i par les relations bien connues.

Mais d'autre part, les équations du mouvement, même avec mise en compte des frottements, étant linéaires à une première approximation (équations indéfinies (1) du § 2 et équations définies correspondantes), leurs intégrales générales peuvent se former par combinaison linéaire d'intégrales simples. En outre, le mouvement résultant de la superposition des houles qu'on vient de définir (chacune d'elles se propageant comme si elle était seule), reproduit l'agitation effective telle qu'elle existe dans le plan $x=0$ et satisfait aux équations du problème. Il est naturel, par suite, d'admettre que ce mouvement coïncide avec l'agitation effective pour toute valeur de x.

Parmi les houles composantes, la plus longue, de période $2T$, est dite la houle *fondamentale;* les autres, de périodes $\frac{2T}{i}$ (i entier), en sont les *harmoniques*.

Soit α le coefficient d'extinction de la première, α_i celui de l'harmonique de rang i. On a, m étant un coefficient numérique :

$$\alpha = mT^{-5}, \qquad \alpha_i = mi^5 T^{-5} = \alpha i^5.$$

Le coefficient de réduction de hauteur, après un parcours x, est, pour la houle fondamentale, $f = e^{-\alpha x}$, et pour l'harmonique de rang i :

$$f_i = e^{-\alpha_i x} = e^{-\alpha x i^5} = f^{i^5}.$$

Les termes de la suite numérique f^{i^5} :

$$f, \quad f^{32}, \quad f^{243}, \ldots$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

décroissent, dès que f est un peu moindre que 1, avec une rapidité extrêmement grande. Ainsi, pour

$f=0{,}875$, on a : $f^{32}=0{,}0139$, $f^{243}=8\times 10^{-15}$,...

Il résulte de là que, sur un parcours capable d'atténuer tant soit peu la houle fondamentale, toutes les houles harmoniques sont presque complètement éteintes.

Mais, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, il faut un trajet considérable pour produire le premier effet, et par conséquent, pour dégager la houle fondamentale qui subsiste seule avec une grande persistance.

5. **Application au clapotis cylindrique**[1]. — Considérons, à une assez grande distance d'une côte, un clapotis cylindrique dû à la superposition de deux houles égales, l'une venant du large et l'autre de la côte, celle-ci produite par la réflexion de celle-là. Nous regardons la profondeur comme infinie ; l'influence de la paroi réfléchissante n'est d'ailleurs pas à mettre en compte.

Au même degré d'approximation que pour la houle, lorsque les frottements sont négligés, le mouvement coïncide très sensiblement avec celui qui dérive du potentiel des vitesses où les coordonnées moyennes des molécules ont été remplacées par les coordonnées actuelles :

$$\varphi=-2Ce^{-\frac{\pi z}{L}}\cos\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi t}{T};$$

[1] J. Boussinesq, **2**, Additions, p. 33-35; F. Nau, Thèse, p. 6-10.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

potentiel qui s'écrit, en introduisant le maximum H de $h = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{z=0}$, ordonnée de la surface libre :

$$\varphi = -\mathrm{H}\frac{g\mathrm{T}}{\pi} e^{-\frac{\pi z}{\mathrm{L}}} \cos\frac{\pi x}{\mathrm{L}} \sin\frac{\pi t}{\mathrm{T}}.$$

Étudions le clapotis en un lieu d'étendue restreinte. La physionomie du phénomène reste celle que définit ce potentiel, durant un temps modéré. Mais la hauteur décroît peu à peu quand le temps croît, et nous allons appliquer les considérations précédentes à la recherche de la *loi de décroissance de cette hauteur en fonction du temps*.

On trouve, pour un champ d'étendue 2L (en notant que $\mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{\mathrm{L}}{g}}$) :

$$\int \frac{1}{2}(u^2 + w^2)\,dm = \rho \mathrm{H}^2 \frac{g^2\mathrm{T}^2}{\mathrm{L}} \sin^2\frac{\pi t}{\mathrm{T}} \int_0^\infty e^{-\frac{2\pi z}{\mathrm{L}}}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\rho g \mathrm{H}^2 \mathrm{L} \sin^2\frac{\pi t}{\mathrm{T}};$$

$$\int_\Sigma \frac{1}{2}\rho g h^2 d\Sigma = \frac{1}{2}\rho g \mathrm{H}^2 \mathrm{L} \cos^2\frac{\pi t}{\mathrm{T}} \int_{x_0}^{x_0+2\mathrm{L}} \cos^2\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\rho g \mathrm{H}^2 \mathrm{L} \cos^2\frac{\pi t}{\mathrm{T}};$$

d'où : $$\mathrm{E} = \mathcal{E} + \mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}\rho g \mathrm{H}^2 \mathrm{L}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour le même intervalle, on a, entre les instants t et $t+dt$:

$$d\mathcal{E}_f = -4\varepsilon H^2 g \frac{\pi^3}{L^3} \sin^2 \frac{\pi t}{T}\, dt \int_0^\infty e^{-\frac{2\pi z}{L}} \cdot 2L dz,$$

ou :
$$d\mathcal{E}_f = -4\varepsilon H^2 g \frac{\pi^2}{L} \sin^2 \frac{\pi t}{T}\, dt.$$

La relation : $d(\mathcal{E}+\mathcal{E}_1) = d\mathcal{E}_f$

donne donc, L étant invariable :

$$\frac{d(H^2)}{H^2} + \frac{8\varepsilon\pi^2}{\rho L^2} \sin^2 \frac{\pi t}{T}\, dt = 0,$$

ou :
$$\frac{dH}{H} + \frac{2\varepsilon\pi^2}{\rho L^2}\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{T}\right) dt = 0.$$

Soit H_0 la valeur de H pour $t=0$; on obtient par intégration :

$$\log\frac{H}{H_0} + \frac{2\varepsilon\pi^2}{\rho L^2}\left(t - \frac{T}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{T}\right) = 0.$$

La parenthèse est comprise entre $t - \frac{T}{2\pi}$ et $t + \frac{T}{2\pi}$; si t est égal à un grand nombre de périodes, $\frac{T}{2\pi}$ sera insignifiant devant t, et l'on aura simplement :

$$H = H_0 e^{-\alpha_1 t},$$

en posant :
$$\alpha_1 = \frac{2\pi^2\varepsilon}{\rho L^2}.$$

Le coefficient α_1 est dit *coefficient d'extinction* du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

clapotis *avec le temps;* il règle la diminution continuelle et graduelle de la hauteur H *sur place*.

Ce coefficient varie en raison inverse du carré de la longueur d'onde ; d'où il résulte que les ondes les plus courtes sont celles qui s'éteignent le plus vite.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE II

EXTINCTION GRADUELLE DES ONDES DE TRANSLATION

1. **Loi de variation de la vitesse à proximité d'une paroi**[1]. — Nous allons envisager maintenant des problèmes où il faut mettre en compte l'influence des parois.

Les parois introduisent dans leur voisinage immédiat des perturbations considérables. En effet, les lois du mouvement donnent, dans le cas d'une onde de translation, d'une houle en profondeur finie, d'un clapotis dans un bassin ou dans un vase, une vitesse notable près de la paroi, tandis que le frottement immobilise la couche mince de liquide en contact avec la paroi. Cette contradiction est levée par l'effet des glissements énormes des couches les unes sur les autres, qui produisent des frottements en rapport avec eux-mêmes.

On ne peut donc utiliser *près des parois* les expressions de u, v, w fournies par l'étude du mouvement de

[1] J. Boussinesq, 9, §§ 10, 11, 14, 15; p. 347-358.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la masse : là, la loi de variation de la vitesse est à chercher.

Considérons le mouvement à proximité d'une petite portion de paroi et admettons que les trajectoires des molécules soient sensiblement rectilignes et parallèles, ainsi qu'il en va dans les applications envisagées. Prenons, sur la paroi fixe, une parallèle à ces trajectoires pour axe ox, une perpendiculaire dans le plan tangent à la surface pour axe oy, la normale orientée vers l'intérieur du fluide pour axe oz.

La vitesse longitudinale u varie extrêmement vite avec z; car, sur la paroi même, elle est nulle, et très près de la paroi, elle a pris la valeur finie u_0, dite *vitesse au fond*, qu'elle aurait pour $z=0$ s'il n'y avait pas de frottement.

Comme, dans la région étudiée, on a $v=0$, les équations indéfinies du mouvement se réduisent à :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - u' + \frac{\varepsilon}{\rho}\Delta u,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - w' + \frac{\varepsilon}{\rho}\Delta w,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Puisque $w=0$ pour $z=0$, on déduit de la dernière équation $w = -\int_0^z \frac{\partial u}{\partial x}\,dz$; w a donc une valeur insensible pour les petites valeurs de z, et il en est de même de ses dérivées en x.

L'accélération normale w' est alors négligeable comme

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

w, et $\frac{\varepsilon}{\rho}\Delta w$ ne contient comme terme sensible que $\frac{\varepsilon}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$, égal à $-\frac{\varepsilon}{\rho}\frac{n_z\partial}{\partial x\partial z}$.

Si de plus u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont de petites quantités, comme cela a lieu dans les problèmes d'ondes ordinaires, l'accélération longitudinale u' se réduit à peu près à $\frac{\partial u}{\partial t}$ et Δu à $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Les équations simplifiées du mouvement montrent alors que $\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ est une quantité finie, en sorte que $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ est très grand de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$; mais alors $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$, qui est comparable à $\frac{\partial u}{\partial z}$, sera de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ et $\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$ sera de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$, c'est-à-dire insensible devant des termes finis tels que ρZ et $\frac{\partial p}{\partial z}$.

Finalement on obtient les équations réduites :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z.$$

La seconde équation montre que p varie d'une manière graduelle avec z (Z, composante de la pesanteur, étant constante), c'est-à-dire varie de quantités insignifiantes quand on passe de la surface $z = 0$ à la couche

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

très voisine où les perturbations ne se font plus sentir.

Nous pouvons donc conserver à $\frac{\partial p}{\partial x}$ sa valeur quand nous appliquons la première équation à cette couche, où u prend la valeur u_0, ce qui nous donne la relation : $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\rho}\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}$.

Nous obtenons ainsi par soustraction l'équation :

$$\frac{\partial^2 (u - u_0)}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\partial (u - u_0)}{\partial t}, \qquad (1)$$

qui est l'équation indéfinie du problème, à laquelle il faut joindre les équations définies :

$u - u_0 = -u_0$ à la paroi (pour $z = 0$),

$u - u_0 = 0$ à l'intérieur [au-dessus de la couche mince, ou pour $z = \infty$ [1]],

u_0, vitesse à la paroi, étant donnée en fonction du temps par la théorie ordinaire des ondes.

Ces équations définissent une fonction unique $U = u - u_0$, au moins dans les deux cas suivants : 1° s'il s'agit de petites oscillations dans lesquelles la valeur de $(u - u_0)$ n'augmente pas indéfiniment avec le temps ; 2° s'il s'agit de mouvements ayant commencé depuis un temps modéré, en sorte qu'on ait $u - u_0 = 0$ pour $t = -\infty$.

En effet, si deux telles fonctions existaient, leur différence u_1 satisferait aux conditions :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0,$$

$$u_1 = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = \infty.$$

[1] Voir la note de la page 102.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Multiplions la première équation par $u_1 dz$ et intégrons le résultat de $z = 0$ à $z = \infty$; en intégrant par parties le premier terme et en notant que u_1 s'annule aux limites, nous obtiendrons l'équation :

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2 dz + \frac{\rho}{2\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty u_1^2 dz = 0.$$

Multiplions-la par dt et intégrons, dans l'hypothèse d'un mouvement oscillatoire, entre deux instants séparés par une période 2T, et, dans celle d'une intumescence propagée le long d'un canal, à partir d'un instant où le mouvement n'existait pas encore et où l'on avait $u_1 = 0$. Il vient, soit :

$$\int_t^{t+2T} dt \int_0^\infty \left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2 dz = 0,$$

soit :

$$\int_{-\infty}^t dt \int_0^\infty \left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2 dz + \frac{\rho}{2\varepsilon}\int_0^\infty u_1^2 dz = 0.$$

Nous trouvons là des intégrales à éléments essentiellement positifs.

Dans le premier cas, l'équation établie exige que l'on ait $\frac{\partial u_1}{\partial z} \equiv 0$, et par suite, $u_1 \equiv 0$, car u_1 s'annule pour $z = 0$.

Dans le second cas, on doit avoir aussi $u_1 \equiv 0$.

L'unicité de la solution du système considéré est ainsi établie.

Dès lors, u_0 étant, près de la paroi, une fonction donnée du temps, F(t), la question est de trouver *une*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fonction $U = u_0 - u$, satisfaisant aux conditions :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial U}{\partial t}, \qquad (1')$$

$U = F(t)$ pour $\zeta = 0$, $U = 0$ pour $\zeta = \infty$, en prenant pour variable $\zeta = z\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}$ au lieu de z.

L'équation (1') est celle du mouvement de la chaleur dans un fil[1]. Elle admet comme intégrale particulière :

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\zeta^2}{4t}}.$$

Cette équation étant linéaire, $\frac{\partial U_1}{\partial \zeta} = \zeta t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\zeta^2}{4t}}$ en est aussi une intégrale particulière, et il en est encore de même de $\zeta(t-\alpha)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\zeta^2}{4(t-\alpha)}}$, α étant une constante arbitraire.

Il résulte enfin de là que, $f(\alpha)$ étant une fonction arbitraire du paramètre α,

$$U = \int_0 \frac{\zeta f(\alpha)}{(t-\alpha)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\zeta^2}{4(t-\alpha)}} d\alpha$$

satisfait à l'équation (1'). En posant :

$$\frac{\zeta}{\sqrt{t-\alpha}} = 2\mu,$$

[1] E. Mathieu, p. 217-218.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on donnera à cette solution la forme :

$$U = 4 \int_{\frac{\zeta}{2\sqrt{t}}}^{k} f\left(t - \frac{\zeta^2}{4\mu^2}\right) e^{-\mu^2} d\mu,$$

la limite supérieure k est une constante indéterminée. Prenons $k = \infty$ et faisons, dans U, $\zeta = 0$; il vient : $4f(t) \int_0^\infty e^{-\mu^2} d\mu$ ou $2\sqrt{\pi}\, f(t)$;

cette expression coïncidera avec $F(t)$ si l'on prend :

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} F(\alpha).$$

D'ailleurs la solution :

$$U = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\zeta}{2\sqrt{t}}}^{\infty} F\left(t - \frac{\zeta^2}{4\mu^2}\right) e^{-\mu^2} d\mu,$$

s'annule pour $\zeta = \infty$, comme on le reconnaît aisément en posant $\mu = \frac{\zeta}{\sqrt{m}}$, et satisfait par suite à toutes les conditions imposées. La *loi de variation de la vitesse près de la paroi* est donc exprimée par la relation[1] :

$$u - u_0 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon t}}}^{\infty} F\left(t - \frac{\rho z^2}{4\varepsilon\mu^2}\right) e^{-\mu^2} d\mu. \quad (2)$$

[1] Nous avons admis plus haut que, dès que l'on sortait de la couche mince qui est le siège de perturbations, z pouvait être regardé comme infini, malgré que la couche fût très peu épaisse. C'est que, si z est égal à la petite épaisseur de la couche, $z\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2. **Perte d'énergie à proximité d'une paroi.** — La perte d'énergie absorbée par les frottements intérieurs pendant un instant dt, pour un volume ϖ, est (Ch. I, § 2) :

$$d\mathcal{E}_f = -\varepsilon dt \int_\varpi \left\{ 2 \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \sum \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right\} d\varpi.$$

Pour un élément, d'aire $d\sigma$, de la couche liquide voisine d'une paroi, dans laquelle le terme en $\frac{\partial u}{\partial z}$ est de beaucoup prédominant, elle vaudra donc :

$$d\mathcal{E}_f = -\varepsilon d\sigma dt \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz.$$

D'autre part, multiplions par $(u - u_0)\, dz$ l'équation :

$$\frac{\partial^2 (u - u_0)}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial (u - u_0)}{\partial t},$$

et intégrons le résultat de $z = 0$ à $z = \infty$ en appliquant l'intégration par parties au premier membre ; désignons par $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$ la valeur de $\frac{\partial u}{\partial z}$ pour $z = 0$, et tenons compte des conditions limites ; nous trouvons :

$$u_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 - \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon} (u - u_0)^2 dz.$$

est extrêmement grand, à cause de la petitesse de ε. Prendre l'infini comme limite supérieure de z ne change pas par suite le résultat final.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Par suite, l'expression de $d\mathcal{E}_f$ prend la forme :

$$d\mathcal{E}_f = -\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 u_0 \, d\sigma \, dt$$

$$+ d\sigma \, dt \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \frac{\rho}{2} (u - u_0)^2 \, dz. \qquad (3)$$

S'il s'agit d'un mouvement périodique, de période $2T$, en intégrant entre les instants t et $t + 2T$, on trouve zéro pour l'intégrale du second terme.

S'il s'agit d'une intumescence limitée se mouvant le long d'un canal, en intégrant entre deux instants où $(u - u_0)$ est nul sur l'élément considéré, on trouve le même résultat.

La perte totale d'énergie est la même dans les deux cas que si l'expression de $d\mathcal{E}_f$ se réduisait à

$$d\mathcal{E}_f = -\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 u_0 \, dt \, . \, d\sigma.$$

D'où cette conclusion : « le frottement à la paroi $\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$ par unité d'aire ne travaille pas, puisque la vitesse à la paroi est nulle ; mais il développe des frottements intérieurs, qui détruisent un certain travail total, précisément égal à celui qu'il aurait détruit lui-même si la vitesse à la paroi avait été celle, u_0, qui s'observe aux points intérieurs, peu distants, où cette vitesse cesse de varier rapidement[1]. »

Envisageons maintenant une onde propagée le long d'un canal avec une vitesse constante ω ; t entre dans

[1] J. Boussinesq, 9, p. 351.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

F par l'argument $t - \frac{x}{\omega}$. Alors u dépend de t par le même argument. On peut, par suite, écrire l'expression (3) sous la forme :

$$d\mathcal{E}_f = -\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 u_0 \, d\sigma \, dt$$

$$\cdot \quad -\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{\rho}{2}(u-u_0)^2 \, dz \, . \, d\sigma \, dt.$$

Pour obtenir l'*énergie totale absorbée sous l'influence de la paroi, par unité de largeur de la paroi*, pendant l'intervalle dt consécutif à l'instant t, il suffira de remplacer $d\sigma$ par dx et d'intégrer pour toute la longueur de l'onde considérée; ce qui donne, en notant que le terme portant sur une intégrale prend la même valeur aux deux limites de l'intégration :

$$\int \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 u_0 dx,$$

au facteur dt *près*, l'intégration étant étendue à toute la longueur de l'onde.

Supposons en particulier qu'il s'agisse d'une onde périodique simple pour laquelle on ait :

$$u_0 = \mathrm{A}\cos\left(\frac{\pi t}{\mathrm{T}} - \frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right).$$

L'application de la formule (2) [§ 1] conduit à :

$$u - u_0 = -\mathrm{A}e^{-z\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon \mathrm{T}}}} \cos\left(\frac{\pi t}{\mathrm{T}} - \frac{\pi x}{\mathrm{L}} - z\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon \mathrm{T}}}\right).$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On déduit de là :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = A\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}\left[\cos\left(\frac{\pi t}{T}-\frac{\pi x}{L}\right)\right.$$
$$\left.-\sin\left(\frac{\pi t}{T}-\frac{\pi x}{L}\right)\right].$$

L'intégrale précédente a donc pour valeur :

$$\int_0^{2L}\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 u_0 dx$$
$$= A^2\sqrt{\frac{\rho\pi\varepsilon}{2T}}\int_0^{2L}(\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)dx,$$

où : $$\alpha = \frac{\pi t}{T}-\frac{\pi x}{L},$$

soit : $$A^2 L\sqrt{\frac{\rho\pi\varepsilon}{2T}}.$$

Or $$A^2L^2 = \int_0^{2L} u_0^2 dx.$$

Si donc on pose : $\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\rho\pi\varepsilon}{2T}}$, on a :

$$\int_0^{2L}\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 u_0 dx = \int_0^{2L}\varepsilon_1 u_0 . u_0 dx.$$

On reconnaît que l'énergie absorbée par l'action de paroi peut alors être évaluée comme si la vitesse à la paroi était u_0 et que le frottement extérieur valût le produit de cette vitesse u_0 par le coefficient constant ε_1, sorte de coefficient fictif de frottement extérieur.

Le coefficient ε_1 est grand vis-à-vis de ε, à la racine carrée duquel il est proportionnel.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

M. Nau a appliqué les résultats précédents à l'étude de l'extinction du clapotis dans un vase rectangulaire et des mouvements oscillatoires dans un tube en U ; il a confronté ses conclusions avec l'expérience. La complication des calculs ne permet pas de résumer ici cet intéressant travail [1].

3. **Extinction des ondes de translation.** — Considérons le cas d'une longue intumescence pour laquelle l'énergie à évaluer est, entre les instants t et $t+dt$, au facteur dt près :

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 u_0 dx.$$

Calculons $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$ en utilisant la formule (2) du § 1. L'avant de l'intumescence se raccordant asymptotiquement avec le fluide immobile situé devant elle, la fonction F ne prendra de valeurs finies que pour de très grandes valeurs du temps t. Nous pouvons donc prendre zéro pour limite inférieure de l'intégrale qui donne u. Il vient alors :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\rho z}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} F'\left(t - \frac{x}{\omega} - \frac{\rho z^2}{4\varepsilon\mu^2}\right) \cdot e^{-\mu^2} \frac{d\mu}{\mu^2},$$

ou, moyennant le changement de variable

$$\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\frac{1}{\mu} = \nu :$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\sqrt{\frac{\rho}{\pi\varepsilon}} \int_0^{\infty} F'\left(t - \frac{x}{\omega} - \nu^2\right) e^{-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon\nu^2}} d\nu.$$

[1] F. Nau, Thèse, p. 21-36 et 36-43.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'énergie à calculer a donc pour expression :

$$2\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F\left(t-\frac{x}{\omega}\right)dx\int_{0}^{\infty} F'\left(t-\frac{x}{\omega}-\nu^2\right)d\nu.$$

Nous appliquerons ce résultat au cas d'une onde solitaire dont la saillie maxima, sur le niveau libre initial, h_1, ne soit pas très grande vis-à-vis de la profondeur H du canal. Alors, très sensiblement, la vitesse de propagation ω vaut $\sqrt{gH}$, et les vitesses sont égales de la surface au fond ; si h désigne la hauteur d'intumescence sur la section d'abscisse x, la valeur commune des vitesses u dans la tranche est $\sqrt{\frac{g}{H}}\,h$, et h a pour expression :

$$h=h_1\,\mathrm{ch}^{-2}\frac{1}{2H}\sqrt{\frac{3h_1}{H}}\,(x-\omega t),$$

ou :

$$h=h_1\,\mathrm{ch}^{-2}\frac{\xi}{c},$$

en posant : $\xi=x-\omega t$, $c=2H\sqrt{\frac{H}{3h_1}}$.

Eu égard à la complication des intégrations auxquelles on est conduit[1], M. Boussinesq substitue au profil réel celui d'équation

$$h=h_1\cdot\frac{c_1^2}{c_1^2+\xi^2},$$

qui a la même allure et la même hauteur ; il choisit de plus c_1 de manière que les deux profils donnent pour l'onde la même énergie, soit pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}h^2dx$ la

[1] A. Boulanger, 2.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

même valeur. On reconnaît aisément que c_1 est alors lié à c par la relation :

$$c \cdot \frac{4}{3} = c_1 \cdot \frac{\pi}{2};$$

d'où :
$$c_1 = \frac{16}{3\pi} H \sqrt{\frac{H}{3h_1}}.$$

Posons :
$$\varphi(m) = \frac{1}{1+m^2}.$$

Nous aurons par suite :

$$F = u_0 = \sqrt{\frac{g}{H}}\, h_1\, \varphi(m),$$

avec $x = c_1 m + \omega t, \qquad dx = c_1 dm;$

et l'on déduit de là :

$$F'\left(t - \frac{x}{\omega} - \nu^2\right) = -\sqrt{\frac{g}{H}}\, h_1 \frac{\omega}{c_1}\, \varphi'(m+n^2),$$

en posant : $n^2 = \frac{\nu^2 \omega}{c_1}$; d'où $d\nu = dn \sqrt{\frac{c_1}{\omega}}$.

L'expression ci-dessus de l'énergie absorbée pendant l'instant dt (rapportée à l'unité de temps) est donc :

$$-2\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi}}\, \frac{g}{H} h_1^2 \sqrt{c_1 \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(m)dm \int_0^{\infty} \varphi'(m+n^2)dn.$$

On posera $m = \operatorname{cotg} 2\eta$, et l'on en déduira [1] :

$$\int_0^{\infty} \varphi(m+n^2)dn = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin^{\frac{3}{2}}\eta \cos^{\frac{1}{2}}\eta.$$

[1] J. Boussinesq, **10**, § 15.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En dérivant les deux membres par rapport à m, et multipliant par $\varphi(m)dm$ ou $\sin^2 2\eta dm$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(m)dm \int_{0}^{\infty} \varphi'(m+n^2)dn$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin^{\frac{3}{2}}\eta \cos^{\frac{1}{2}}\eta\right]' \sin^2 2\eta \, . \, d\eta,$$

et, tous calculs faits : $\frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.

Remplaçons c_1 et ω par leurs valeurs et nous aurons, en fin de compte, pour valeur de l'énergie absorbée par l'action de paroi pendant l'intervalle dt, par unité de largeur du canal :

$$dE_f = -\frac{\sqrt{2\rho\pi\varepsilon}}{3\sqrt[4]{3}} \sqrt{H}\, g^{\frac{3}{4}} h_1^{\frac{7}{4}} dt.$$

Quant au travail absorbé par les frottements intérieurs, si l'on observe que $v=0$, que u et w ne dépendent pas de y, que u ne dépend pas de z, que $w = -z\frac{\partial u_0}{\partial x}$, et qu'enfin $u = \sqrt{\frac{g}{H}}\, h = u_0$, on trouve pour son expression, par application de la formule générale :

$$\varepsilon \int_0^H \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 4\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)^2 \right\} dz\, dx,$$

soit :

$$\varepsilon g \left\{ 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{H^2}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^2 dx \right\};$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

il est négligeable devant le travail absorbé par l'action du fond, ε étant très petit vis-à-vis de $\sqrt{\varepsilon}$, et l'onde étant très aplatie.

Ainsi, dans la propagation d'une onde solitaire le long d'un canal, l'influence de l'action de la paroi prédomine sur celle des frottements intérieurs.

La loi d'extinction de l'onde solitaire est maintenant bien aisée à établir. Nous avons en effet trouvé, dans le premier Volume (p. 154), comme valeur de l'énergie totale de l'onde solitaire, par unité de largeur du canal :

$$E = \frac{2}{3}\rho g Q h_1,$$

avec

$$Q = 4H\sqrt{\frac{Hh_1}{3}}.$$

D'où :

$$E = \frac{8}{3\sqrt{3}}\rho g (Hh_1)^{\frac{3}{2}}.$$

Si l'on suppose que le canal soit extrêmement large, pour que l'action des parois latérales soit minima devant celle du fond, en exprimant que la variation de E pendant l'instant dt :

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\rho g H^{\frac{3}{2}} h_1^{\frac{1}{2}} dh_1,$$

est égale à l'énergie absorbée par l'action de paroi correspondante dE_f, on aura :

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\rho g H^{\frac{3}{2}} h_1^{\frac{1}{2}} dh_1 + \frac{\sqrt{2\pi\rho\varepsilon}}{3\sqrt[4]{3}}\sqrt{H}\, g^{\frac{3}{4}} h_1^{\frac{7}{4}} dt = 0.$$

Remplaçons dans cette formule l'élément de temps dt par le rapport à $\omega = \sqrt{gH}$ du chemin dx que par-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

court le sommet de l'onde pendant l'instant dt. Nous pourrons l'écrire :

$$h_1^{-\frac{5}{4}} dh_1 + \frac{1}{12\,\mathrm{H}} \sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{H}} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho g} \sqrt{\frac{3}{g}}}\, dx = 0.$$

Supposons qu'après un parcours X du sommet de l'onde, la saillie ait passé de la valeur h_1^0 à la valeur h_1. L'intégration de la relation que nous venons d'établir donne :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{h_1}} - \frac{1}{\sqrt[4]{h_1^0}} = \frac{1}{48\,\mathrm{H}} \sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{H}} \frac{\varepsilon}{\rho g} \sqrt{\frac{3}{g}}}\, \mathrm{X}.$$

Soit K le coefficient de X ; on tire de là :

$$h_1 = \frac{h_1^0}{(1 + \mathrm{K} \sqrt[4]{h_1^0}\, \mathrm{X})^4}.$$

Le décroissement de la hauteur avec le parcours a lieu bien plus lentement que dans le cas de la houle ou du clapotis, l'exponentielle $e^{\alpha \mathrm{X}}$ étant remplacée par l'expression rationnelle $(1 + \mathrm{K} \sqrt[4]{h_1^0}\, \mathrm{X})^4$.

Les mêmes principes permettraient d'envisager des problèmes plus complexes, et même d'étudier l'extinction des ondes produites au sein d'une colonne liquide remplissant un tube élastique, au moins dans le cas où les petits déplacements de la paroi mouillée seraient de bien moindre amplitude que les mouvements mêmes du fluide.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE III

RÉSISTANCE OPPOSÉE PAR UN FLUIDE AU MOUVEMENT D'UN SOLIDE IMMERGÉ DANS CE FLUIDE

1. **Résistance subie par une sphère en mouvement dans un fluide**[1]. — Supposons qu'un solide d'orientation constante soit complètement plongé dans un fluide indéfini. Pour simplifier l'exposition[2], bornons-nous au cas où ce solide est une sphère de rayon R, à laquelle on imprime une translation rectiligne, F(t) étant le chemin parcouru par son centre jusqu'à l'instant t.

Soient u, v, w les composantes de la vitesse, à l'instant t, d'une particule fluide, suivant trois axes rectangulaires fixes, le premier ayant la direction de la translation de la sphère. Nous admettons essentiellement que le mouvement est assez lent pour que les vitesses restent bien continues et faibles, de façon à pouvoir en négliger les carrés et les produits.

[1] J. Boussinesq, **14**; **16**, p. 224-242.

[2] M. Boussinesq a donné, dans une Addition à ses *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur*, une exposition développée des questions dont nous donnons seulement ici un aperçu [J. Boussinesq, **16**].

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous allons rapporter le mouvement du fluide à trois axes ($Cxyz$) ayant pour origine le centre mobile C de la sphère et parallèles aux axes de référence précédents.

« Aux instants successifs t, les mêmes coordonnées x, y, z seront donc celles de points différents, dont la situation par rapport à la sphère deviendra la même; et les dérivées par rapport à t de u, v, w et de la pression moyenne p, exprimeront les variations de u, v, w, p, non pas *sur place*, mais en passant d'un de ces points aux suivants.

Au reste, ces dérivées ne différeront pas, au degré d'approximation adopté, de celles qui seraient prises sur place; car elles ne les dépasseront que des produits, négligeables, par $F'(t)$ des dérivées de u, v, w, p par rapport à x. »

Dans ces conditions, nous pourrons appliquer les équations de Navier dans ce système de coordonnées, et nous aurons, en admettant que le fluide soit *sans pesanteur*, les équations indéfinies :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial(x, y, z)} + \rho \frac{\partial(u, v, w)}{\partial t} - \varepsilon \Delta(u, v, w) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

A ces équations, nous devons joindre des conditions aux limites.

1° Supposons que la masse fluide ait été initialement au repos. Encore qu'on puisse établir que les frottements intérieurs activent la propagation au loin de la perturbation introduite par la présence du solide[1],

[1] J. Boussinesq, **17**; **16**, p. 220.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

nous regarderons le mouvement comme insensible aux grandes distances, et nous exprimerons en conséquence que u, v, w, p s'annulent à une distance infinie de l'origine.

2° La sphère étant mouillée par une couche fluide qui lui adhère, nous aurons à écrire que pour

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R,$$

on a : $u = F'(t)$, $v = 0$, $w = 0$. (2)

M. Boussinesq a montré[1] qu' « en supposant négligeable, après un temps fini quelconque à partir du début des mouvements, l'influence totale, sur la perturbation étudiée, des parties du fluide existant en dehors d'une sphère décrite, avec un rayon r suffisamment grand autour d'un point fixe plus ou moins voisin du centre du corps », les équations précédentes n'admettent qu'une seule solution. Ce fait de l'unicité de la solution s'établit d'une manière très analogue à celles que nous déjà employées dans les questions de ce genre.

Nous allons expliciter cette solution unique. Exprimons u, v, w, p au moyen d'une fonction auxiliaire unique de t, x, y, z par les formules[2] :

$$\left.\begin{aligned} u &= \Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \\ v &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}, \quad w = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z}, \\ p &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon\Delta\varphi\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

[1] J. Boussinesq, **16**, p. 226.
[2] J. Boussinesq, **4**, p. 278.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'équation de continuité et les deux dernières équations (1) sont identiquement vérifiées, tandis que la première équation (1) astreint φ à satisfaire à l'équation

$$\Delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\varepsilon}{\rho}\Delta\varphi\right)=0.$$

Cherchons à y satisfaire en prenant pour φ une fonction ne dépendant de x, y, z que par l'argument $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Alors :

$$\Delta\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\varphi}{\partial r^2},$$

et l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\frac{\partial(r\varphi)}{\partial t}-\frac{\varepsilon}{\rho}\frac{\partial^2 r\varphi}{\partial r^2}\right]=0.$$

Une double intégration par rapport à r donnera :

$$\frac{\partial(r\varphi)}{\partial t}-\frac{\varepsilon}{\rho}\frac{\partial^2 r\varphi}{\partial r^2}=Ar+B, \qquad (4)$$

A et B étant des fonctions arbitraires du temps. Comme on peut adjoindre à φ une fonction arbitraire du temps, sans changer en rien les valeurs (3) de u, v, w, p, il nous est loisible de supposer nulle la fonction A.

Si l'on forme les conditions à la surface de la sphère, on trouve d'abord, en exprimant que $(v, w)=0$:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r};$$

puis, en écrivant que $u=F'(t)$, on obtient :

$$F'(t)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ainsi, pour $r = R$, on a :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{2} F'(t).$$

Si φ_0 est la valeur de la fonction φ à la surface de la sphère (pour $r = R$), l'équation (4) donne dès lors :

$$\frac{\partial}{\partial t}(R\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{\rho}\frac{3}{2} RF'(t) = B,$$

et elle-même devient, par élimination de B, et en posant $\Phi = r\varphi - R\varphi_0 + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\rho} RF(t)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{\rho}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}. \qquad (5)$$

Nous sommes ainsi conduits à former une solution de l'équation qui régit le mouvement de la chaleur dans un fil, se réduisant, pour $r = R$, à :

$$F_1(t) = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\rho} RF(t).$$

Si nous prenons pour variable $z = (r - R)\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}$, nous avons à trouver une solution de l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \qquad (6)$$

coïncidant avec $F_1(t)$ pour $z = 0$.

Rappelons-nous que l'intégrale définie :

$$\Phi = \int_0^\infty \psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) f\left(\frac{z^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

où f et ψ sont deux fonctions arbitraires assujetties

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

seulement à rendre l'intégrale finie et déterminée, admet pour dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \int_0^\infty \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) f''\left(\frac{z^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha.$$

Si donc nous posons :

$$f = \mathcal{F}\left(t - \frac{z^2}{2\alpha^2}\right),$$

la fonction $\mathcal{F}$ étant seulement astreinte à s'annuler pour la valeur $-\infty$ de son argument, nous aurons :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \int_0^\infty \mathcal{F}'\left(t - \frac{z^2}{2\alpha^2}\right) \psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -\int_0^\infty \mathcal{F}'\left(t - \frac{z^2}{2\alpha^2}\right) \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha.$$

Cette fonction Φ, associée à $\mathcal{F}$, sera une intégrale de l'équation (6) si l'on pose $\psi' + \psi = 0$, ou encore si l'on prend $\psi = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$. La fonction correspondante

$$\Phi = \int_0^\infty \mathcal{F}\left(t - \frac{z^2}{2\alpha^2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$$

se réduit, pour $z = 0$, à :

$$\mathcal{F}(t) \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha, \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}(t)\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

et elle répondra à la question si $\mathcal{F}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, F_1(t)$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Revenons à la variable r. Nous aurons :

$$\Phi = \frac{3\varepsilon R}{\rho\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty F\left[t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(r-R)^2}{2\alpha^2}\right] e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha.$$

Il est aisé de reconnaître que la valeur de φ qui s'en déduit conduit à des expressions de u, v, w, p qui s'annulent quand r croît indéfiniment.

Nous avons donc complètement résolu le problème posé, en admettant que $F(-\infty) = 0$, c'est-à-dire que la sphère a d'abord été au repos.

Notons cependant encore que, pour $r = R$, on a :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varphi\right)_{r=R} = \frac{1}{2}R^2F'(t) + \varphi_0;$$

or un calcul direct donne :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{3R}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty F'\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\alpha^2}{2}\right) e^{-\frac{(r-R)^2}{2\alpha^2}} d\alpha;$$

d'où, en égalant la valeur obtenue pour $r = R$ à la précédente :

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2}R^2F'(t) - \frac{3R}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty F'\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha. \quad (7)$$

Cela posé, envisageons les pressions exercées par le fluide sur la sphère solide : par raison de symétrie, elles admettent une résultante passant par le centre, dirigée suivant l'axe Cx de la translation. Pour calculer cette résultante, nous n'avons qu'à évaluer la somme des composantes des pressions suivant l'axe Cx. Si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale extérieure en un point d'un élément $d\sigma$ de la sphère, nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

avons à prendre, sur toute la surface de la sphère, l'intégrale

$$\int p_x d\sigma \quad \text{ou} \quad \int (\alpha N_x + \beta T_z + \gamma T_y)\, d\sigma,$$

où N_x, T_z et T_y ont pour valeurs :

$$N_x = -p + 2\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} = -p + 2\varepsilon \left(\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right),$$

$$T_z = \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \varepsilon \left[\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} - 2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \right],$$

$$T_y = \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \varepsilon \left[\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial z} - 2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z} \right],$$

et à la changer de signe [les pressions exercées par le fluide sur la sphère étant égales et directement opposées à celles subies par le fluide].

Nous allons d'abord évaluer cette intégrale pour une sphère de rayon $r > R$, puis nous ferons tendre r vers R. Notons que φ et $\Delta\varphi$ ne dépendent de x, y, z que par l'intermédiaire de r, et que l'on a :

$$p = \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \Delta \varphi \right) \frac{x}{r},$$

$$\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \beta = \frac{y}{r} = \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{z}{r} = \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Le coefficient de l'élément différentiel $d\sigma$ a alors pour valeur

$$- \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \Delta \varphi \right) \frac{x^2}{r^2} + \varepsilon \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial r} \left(1 + \frac{x^2}{r^2} \right)$$

$$- 2\varepsilon \left\{ \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \right\}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Comme on a :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

un calcul très simple donne pour le coefficient de -2ε la valeur

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{x^2}{r^2}\left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial r^3} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right].$$

La sommation est maintenant bien aisée ; en observant que $\int d\sigma = 4\pi r^2$, $\int \frac{x^2}{r^2}\, d\sigma = \frac{4\pi r^2}{3}$, on obtient comme expression de la résistance cherchée :

$$\mathcal{R}_x = \frac{4\pi r^2}{3}\left\{\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial t} - 5\varepsilon\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial r}\right.$$

$$\left. + 2\varepsilon\left[3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^3\varphi}{\partial r^3} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]\right\}.$$

La parenthèse carrée a pour valeur $\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial r}$. Il vient donc enfin :

$$\mathcal{R}_x = \frac{4\pi r^2}{3}\left\{\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial t} - 3\varepsilon\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial r}\right\},$$

sous réserve de faire tendre r vers R.

L'équation (4), qui s'écrit (vu que $A = 0$) :

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon\Delta\varphi = \frac{B\varphi}{r},$$

donne par dérivation par rapport à r, eu égard à la valeur trouvée pour B :

$$\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial t} - \varepsilon\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial r} = \frac{R}{r^2}\left[\frac{3}{2}\varepsilon F'(t) - \rho\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}\right].$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En portant dans $\mathcal{R}_x$ l'expression qui en résulte pour $\varepsilon \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial r}$, nous aurons :

$$\mathcal{R}_x = \frac{4\pi r^2}{3}\left\{-2\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\, \partial t} + \frac{3R}{r^2}\left[\frac{3}{2}\varepsilon F'(t) - \rho \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\right]\right\}.$$

Pour $r = R$, $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{2} RF'(t)$, en sorte que l'on a, en fin de compte :

$$\mathcal{R}_x = -MF''(t) + 6\pi\varepsilon RF'(t) - 4\pi\rho R \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}.$$

Dans cette formule, M est la masse fluide déplacée par la sphère.

Si nous voulons ne laisser figurer que la fonction donnée $F(t)$, nous devons remplacer $\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}$ par sa valeur déduite de (7) :

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = -\frac{R^2}{2} F''(t) - \frac{3R}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty F''\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha,$$

ou, en subtituant à α la variable $\tau = t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\alpha^2}{2}$:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = -\frac{R^2}{2} F''(t) + \frac{3R\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{\pi\rho}} \int_t^{-\infty} \frac{F''(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Il vient, après une réduction bien simple :

$$\mathcal{R}_x = \frac{M}{2} F''(t) + 6\pi\varepsilon RF'(t) + 6R^2\sqrt{\pi\rho\varepsilon} \int_{-\infty}^{t} \frac{F''(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \qquad (8)$$

Rappelons-nous que $F'(t)$ n'est autre que la vitesse

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du centre de la sphère par rapport à des axes invariables, suivant le premier de ces axes, soit $V_x(t)$.

Si la sphère était animée d'une translation quelconque par rapport à ces axes, on superposerait les trois solutions correspondant à ses vitesses suivant les axes des x, des y et des z.

2. **Cas particuliers; confrontation avec l'observation.** — 1° Dans l'hypothèse de la fluidité parfaite ($\varepsilon = 0$), la formule (8) se réduit à :

$$R_x = \frac{1}{2} M \frac{dV_x}{dt}.$$

La résistance opposée par le fluide au déplacement du solide est la moitié de la force qui imprimerait à la masse fluide déplacée statiquement par la sphère une accélération absolue égale à l'accélération de la sphère solide.

Ce résultat, démontré pour la première fois par *Poisson*[1], est conforme à une très ancienne observation de Du Buat sur les oscillations d'un pendule sphérique dans l'eau, observation que cet hydraulicien interprétait en disant que « le pendule a sa masse fictivement accrue de la moitié environ de celle du fluide qu'il déplace », — ou encore en disant que « le pendule traîne à son arrière ou pousse à son avant une poupe et une proue fluides dont le volume total est à peu près la moitié du sien » [le fait d'un petit excédent variable sera justifié tout à l'heure].

2° Supposons qu'on mette en compte les frottements

[1] S.-D. Poisson, p. 570.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

intérieurs, et que le mouvement de la sphère soit devenu depuis très longtemps uniforme[1].

$F''(\tau)$ est nul sauf pour de très grandes valeurs de $t-\tau$; si la vitesse V_x constante s'est produite en un temps très court vis-à-vis de l'intervalle écoulé depuis lors, on peut écrire :

$$\mathcal{R}_x = 6\pi\varepsilon R V_x + 6R^2\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\cdot\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\int F''(\tau)\,d\tau,$$

ou :
$$\mathcal{R}_x = 6\pi\varepsilon R V_x + 6R^2\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\,\frac{V_x}{\sqrt{t-\tau}}.$$

La résistance se rapproche asymptotiquement de la valeur $6\pi\varepsilon R V_x$.

3° Supposons enfin que le mouvement du centre de la sphère soit périodique, et même pendulaire : la vitesse, d'abord nulle, est devenue depuis assez longtemps du type

$$F'(t) = a\cos kt.$$

Posons $t = \tau + \frac{\beta^2}{k}$. Il viendra :

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{F''(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau = 2\left\{\begin{array}{l} -a\sqrt{k}\,\sin kt\displaystyle\int_0^\infty \cos\beta^2 d\beta \\ +a\sqrt{k}\,\cos kt\displaystyle\int_0^\infty \sin\beta^2 d\beta \end{array}\right\}.$$

On reconnaît les intégrales de Fresnel, qui valent

[1] J. Boussinesq, **16**, p. 239.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, en sorte que le second membre se réduit à

$$\left[\frac{1}{\sqrt{k}}F''(t)+\sqrt{k}\,F'(t)\right]\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

La formule (8) donne alors :

$$\mathcal{R}_x=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{M}{2}\left(1+\dfrac{9}{2R}\sqrt{\dfrac{2\varepsilon}{\rho k}}\right)F''(t)\\ +6\pi\varepsilon R\left(1+R\sqrt{\dfrac{\rho k}{2\varepsilon}}\right)F'(t)\end{array}\right\}.$$

Cette expression a été donnée par *Stokes*[1].

La partie principale correspond à la poupe ou proue fictive de Du Buat : l'expression de la résistance de Du Buat est multipliée par $1+\frac{9}{2R}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\rho k}}$; ce facteur est supérieur à un ; il est plus grand pour de petites sphères que pour de grosses, plus grand pour une longue durée d'oscillation que pour une brève. Tous ces résultats sont conformes aux observations de Du Buat[2].

3. **Résistance subie par un cylindre circulaire indéfini en mouvement dans un fluide.** — La même méthode s'applique au cas où le solide est un cylindre circulaire indéfini, animé d'une translation rectiligne normale à son axe.

L'axe du cylindre étant pris pour axe des z et la direc-

[1] G.-G. Stokes, p. 25 ; form. 51.

[2] Du Buat, t. II, p. 226 ; chap. VII : Mesure de la portion de fluide qui accompagne un corps en mouvement dans un fluide indéfini.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tion de la translation pour celle de l'axe des x, on n'a qu'à réduire dans les équations du problème précédent les coordonnées x, y, z à x, y et les composantes u, v, w de la vitesse à u, v. La fonction φ dont dépendent u, v, p s'exprime au moyen d'une intégrale définie du type $\int_0^\infty \psi\left(\frac{\alpha^{2p}}{2}\right) f\left(\frac{z^2}{2\alpha^p}\right) d\alpha$, mais on est dans le cas limite où l'exposant constant p devient infini.

La même marche[1] conduit à :

$$\varphi - f(t)\log\frac{r}{R} + 2\frac{\varepsilon}{\rho}F(t) = \int_0^\infty \mathcal{F}\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{r^2}{2\alpha^2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

La fonction $\mathcal{F}$ est déterminée implicitement par la relation :

$$\int_0^\infty \mathcal{F}\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{R^2}{2\alpha^2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha} = 2\frac{\varepsilon}{\rho}F(t),$$

et la fonction $f(t)$ a pour expression explicite :

$$f(t) = R^2F'(t) + \int_0^\infty \mathcal{F}\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{R^2}{2\alpha^2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\alpha d\alpha.$$

La résistance $\mathcal{R}_x$ subie par l'unité de longueur du cylindre vaut :

$$\mathcal{R}_x = M\left[\frac{2}{R^2}f'(t) - F''(t)\right],$$

[1] J. Boussinesq, **14**, p. 937; **16**, p. 244-248.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

M étant la masse du fluide déplacé par cette unité de longueur du cylindre.

La fonction $\mathcal{F}$ est donnée par une relation bien difficile à utiliser quand c'est la loi $F(t)$ du mouvement du cylindre que l'on se donne.

M. Boussinesq a développé le calcul[1] en admettant au contraire qu'on se donne $\mathcal{F}(t) = \cos kt$. Posons alors :

$$R\sqrt{\frac{\rho k}{\varepsilon}} = e^{\nu},$$

$$I.\cos \text{ ou } \sin\tau = \int_0^\infty \cos \text{ ou } \sin\left(\frac{e^{2\nu}}{2\alpha^2}\right).e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha},$$

I étant la racine carrée positive de la somme des carrés des deux intégrales et τ un arc fonction continue de ν. La seconde de nos équations et celle qui en résulte par différentiation relativement à t, donnent :

$$2R^2e^{-2\nu}kF(t) = I\cos(kt-\tau),$$
$$2R^2e^{-2\nu}F'(t) = -I\sin(kt-\tau).$$

Le mouvement correspondant du cylindre est donc pendulaire.

La suivante de nos équations donne, en éliminant $\cos(kt-\tau)$ et $\sin(kt-\tau)$ du résultat d'une différentiation relative à ν :

$$f(t) = R^2[2Ak F(t) + (1+2B)F'(t)],$$

en posant :

$$A = e^{-2\nu}\frac{d}{d\nu}\log\frac{1}{I}, \quad B = e^{-2\nu}\frac{d\tau}{d\nu}.$$

[1] J. Boussinesq, **15**; **16**, p. 255-262.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Enfin la résistance a pour expression

$$\mathcal{R}_x = M\left\{4Ak F'(t) + (1+4B)F''(t)\right\}.$$

Il reste à déterminer les deux coefficients A et B qui, considérés comme fonctions de ν, satisfont aux deux équations différentielles :

$$\frac{dA}{d\nu} + 2A = e^{2\nu}(A^2 - B^2),$$

$$\frac{dB}{d\nu} + 2B = 2e^{2\nu}AB - 1.$$

Ce système peut être intégré au moyen des fonctions de Bessel.

Par approximations successives, on est vite conduit aux expressions approchées :

$$A = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-2\nu}}{8}\right), \quad B = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{e^{-2\nu}}{8}\right),$$

qui donnent des valeurs pratiquement suffisantes dès que e^{ν} dépasse 2.

En fin de compte, on trouve :

$$\mathcal{R}_x = M\left(1 + \frac{2}{R}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\rho k}}\right)F''(t)$$

$$+ 2\pi\varepsilon\left(1 + 2R\sqrt{\frac{\rho k}{2\varepsilon}}\right)F'(t).$$

Cette formule est très analogue à celle qui a été obtenue pour la sphère.

Dans l'hypothèse $\varepsilon = 0$, on a seulement

$$\mathcal{R}_x = MF''(t);$$

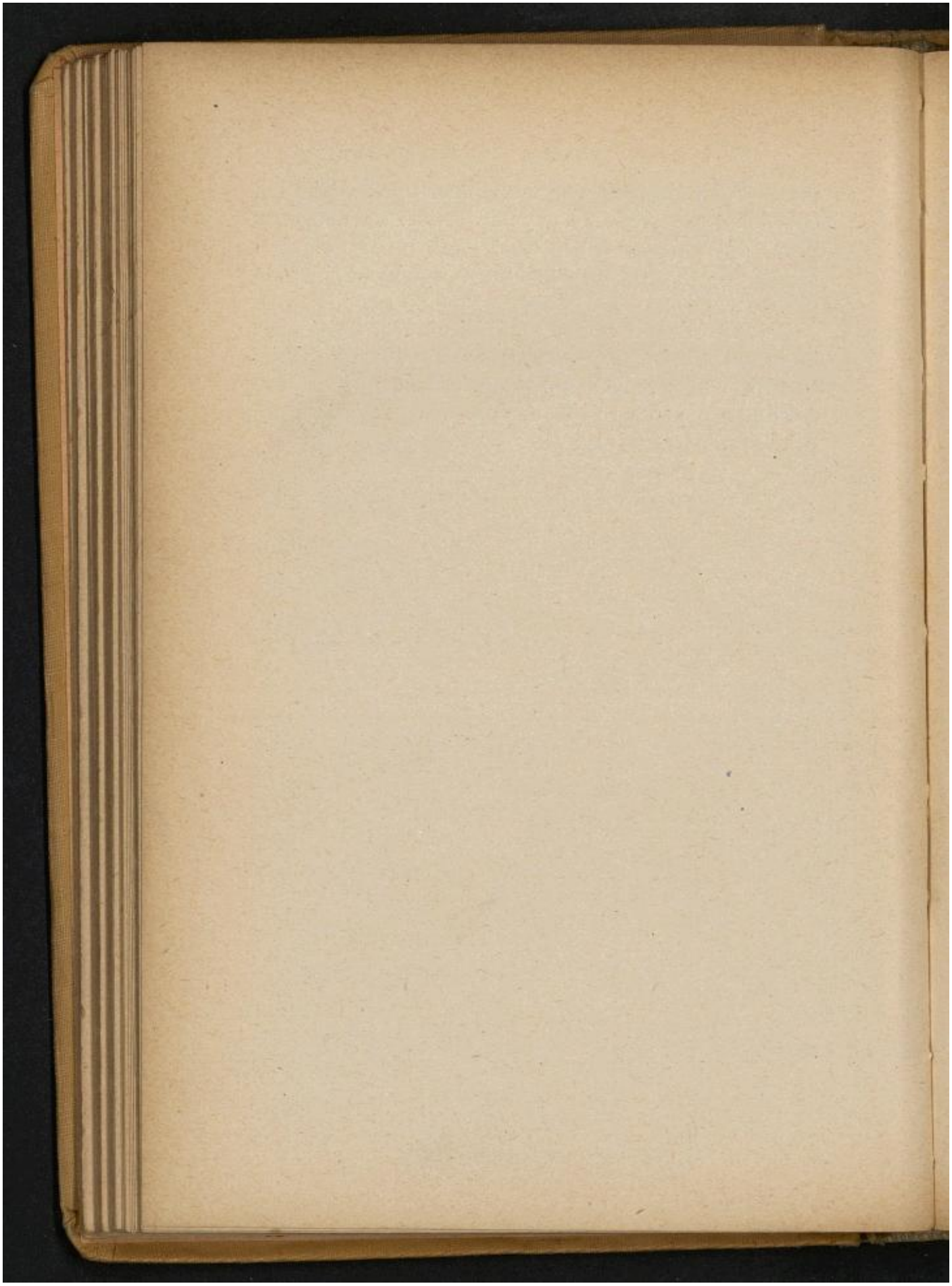
la résistance est égale à la force qui imprimerait à la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

masse fluide déplacée par le cylindre une accélération coïncidant avec celle du cylindre solide. La poupe ou proue fluide fictive de Du Buat aurait un volume égal à celui du cylindre, et même un peu supérieur si ε n'est pas nul.

Ce cas du mouvement pendulaire a été traité pour la première fois par *Stokes*, en usant d'une méthode beaucoup plus longue que la précédente ; — en vue d'estimer la petite résistance éprouvée par la tige des pendules.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TROISIÈME SECTION

PHÉNOMÈNES DE MOUVEMENTS TURBULENTS

CHAPITRE I

MOUVEMENT PERMANENT DANS LES TUYAUX LARGES ET LES CANAUX PRÉSENTANT DES SINGULARITÉS

1. **Équation fondamentale du mouvement permanent graduellement varié.** — Nous avons longuement étudié, dans le précédent Volume (3e section, Chap. III), le mouvement turbulent graduellement varié, dans un canal ou dans un tuyau de forme cylindrique ou sensiblement cylindrique. Nous avons notamment établi (*loc. cit.*, § 3) les expressions suivantes de la pente motrice I et du frottement extérieur moyen (par unité de surface) en fonction de la vitesse moyenne U :

$$I = bU^2 \frac{\chi}{\sigma} + (2\alpha - 1 - \eta) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{1 + 2\eta}{g} \frac{\partial U}{\partial t},$$

$$B_0 u_0^2 \mathfrak{M} f = bU^2 + 2(\alpha - 1 - \eta) \frac{\sigma}{\chi} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{2\eta}{g} \frac{\sigma}{\chi} \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Envisageons maintenant le cas particulièrement important où le mouvement est *permanent*. Alors la vitesse moyenne U et la section σ sont indépendantes du temps, et si l'on pose :

$$\alpha' = 2\alpha - 1 - \eta_1, \quad \beta = 2(\alpha - 1 - \eta_1),$$

les équations précédentes et l'équation de continuité s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} I &= bU^2 \frac{\chi}{\sigma} + \alpha' \frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right), \\ B_0 u_0^2 \mathfrak{M} f &= bU^2 + \beta \frac{\sigma}{\chi} \frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right), \\ \frac{d(U\sigma)}{dx} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

La valeur constante que conserve $U\sigma$ dans les sections normales successives est la *dépense* Q du tuyau ou du canal.

La pente motrice I a pour double expression

$$I = \sin i - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\zeta - \frac{p_0}{\rho g}\right), \qquad (2)$$

i étant l'inclinaison, sur l'horizon, de l'axe hydraulique, au point où la pression est p_0 et où cet axe perce la section à travers laquelle la vitesse moyenne est U; ζ étant la cote verticale du même point, comptée de haut en bas à partir d'un plan horizontal fixe.

Les coefficients α' et β peuvent être, pour une même forme de section et un même degré de rugosité des parois, regardés comme des constantes; on a même très sensiblement $\alpha = 1 + 3\eta_1$, et par suite :

$$\alpha' = 1 + 5\eta_1, \quad \beta = 4\eta_1.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous avons d'ailleurs donné la valeur de γ_1 dans le cas d'une section rectangulaire et d'une section circulaire. — Pour ces deux formes de section, il résulte de nos calculs antérieurs que l'on a :

$\alpha' = 1{,}096, \quad \beta = 0{,}076$ (section rectangulaire large),

$\alpha' = 1{,}161, \quad \beta = 0{,}128$ (section circulaire).

La première équation (1) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha' \frac{U^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} - \zeta\right) + b\frac{\chi}{\sigma} U^2 = 0. \quad (3)$$

La quantité $\alpha' \frac{U^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} - \zeta$ serait constante si le coefficient de frottement b était nul. En fait, elle subit, d'une section à l'infiniment voisine, la variation $b\frac{\chi}{\sigma} U^2 dx$. La variation totale qu'elle subit entre deux sections quelconques est ce qu'on appelle la *perte de charge* correspondante, *due aux frottements*.

Si les deux sections percent l'axe hydraulique sensiblement au même niveau, la perte de charge sera la variation de l'expression $\alpha' \frac{U^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g}$.

Si la pression est la même en tous les points de l'axe hydraulique, ce qui a lieu dans un canal découvert, la perte de charge sera la variation de l'expression $\alpha' \frac{U^2}{2g} - \zeta$.

La même équation peut encore se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes, déduites de (1)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en remplaçant I par sa première expression (2) et U par $\frac{Q}{\sigma}$:

$$\left.\begin{aligned} \sin i - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx} &= b\frac{\chi}{\sigma^3}Q^2 + \alpha'\frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right), \\ \sin i - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx} &= \frac{Q^2}{\sigma^3}\left(b\chi - \frac{\alpha'}{g}\frac{d\sigma}{dx}\right). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Cette équation (3) ou (4) a été donnée par M. Boussinesq[1] pour remplacer une équation analogue, due à Bélanger, modifiée par Coriolis et donnée dans les traités usuels d'Hydraulique, malgré son insuffisante approximation.

Quant à la seconde équation (1), elle devient, en notant que $\frac{1}{U}\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dx}$,

$$\frac{B_0}{b}\frac{u_0^2}{U^2}\mathfrak{M}f = 1 - \frac{\beta}{bg}\frac{1}{\chi}\frac{d\sigma}{dx}. \quad (5)$$

Pour les sections rectangulaire large et circulaire, $\frac{\beta}{b}$ ou $\frac{4\eta}{b}$ vaut $\frac{4}{45}k^2$ et $\frac{4}{25}k^2$, et l'on a, avec nos notations ordinaires :

$$\left.\begin{aligned} \frac{B_0}{b}\frac{u_0^2}{U^2} &= 1 - \frac{4k^2}{45g}\frac{dh}{dx}, \\ \frac{B_0}{b}\frac{u_0^2}{U^2} &= 1 - \frac{4k^2}{25g}\frac{dR}{dx}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

2. Utilisation de l'équation fondamentale[2].

[1] J. Boussinesq, **2**, p. 112.
[2] J. Boussinesq, **2**, p. 114-121.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

— Soit à étudier le mouvement permanent dans un tuyau plein d'eau.

L'aire σ de la section, son périmètre mouillé χ et la pente i (qu'on peut supposer légèrement variable) sont connus en fonction de l'abscisse x. En intégrant alors la seconde équation (4) le long d'une partie de l'axe hydraulique où l'hypothèse fondamentale de la très faible courbure des filets fluides est réalisée, nous obtiendrons une relation finie entre l'abscisse x, la dépense Q et la variation de la pression p_0 sur l'axe.

Il peut se présenter des endroits où le quasi parallélisme des filets n'a plus lieu, soit que la section varie brusquement d'étendue ou de forme, soit que l'axe du tuyau prenne une courbure notable. Ce sera l'objet principal de ce Chapitre d'établir, au moins dans d'importants cas particuliers, des règles spéciales pour obtenir une relation entre les valeurs prises par la pression p_0 en amont et en aval de ces régions critiques.

L'écart des valeurs p_0 se trouve alors être à peine de l'ordre de grandeur de la force vive du fluide (rapportée à l'unité de masse) : il peut être négligé quand les charges sont grandes sans que les vitesses (et par suite la force vive) le soient, ainsi que cela se présente dans les longues conduites de distribution d'eau. Dans ces conditions, l'intégration précédente peut être effectuée même à travers les régions critiques.

Dans tous les cas, soit au moyen de l'équation (4), soit au moyen de règles spéciales aux points singuliers où cette équation n'est plus valable, nous pouvons calculer, en fonction de l'abscisse et de Q, les variations de la pression sur l'axe, p_0. Inversement, le débit Q

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

s'obtiendra en fonction de la variation totale de p_0, entre deux sections déterminées du tuyau, écart aisé à estimer si le tuyau part en amont d'un réservoir et aboutit en aval dans un autre réservoir ou débouche à l'air libre.

Envisageons maintenant le cas d'un réseau de tuyaux ramifiés les uns sur les autres. Pour chaque tuyau du réseau, nous savons exprimer la dépense en fonction des pressions exercées, l'une un peu en aval de son entrée, l'autre un peu en amont de son issue. — S'il s'agit de longues conduites de distribution où l'énergie cinétique et les écarts de pression corrélatifs de ses variations brusques sont insignifiants, on pourra considérer la pression p_0 comme ayant la même valeur aux environs d'un embranchement. Nous aurons alors autant d'équations que de tuyaux ou de dépenses Q, mais il y figurera autant d'inconnues auxiliaires p_0 qu'il y aura de points de ramification : en exprimant, en chacun de ces points, que la somme algébrique des dépenses (pendant l'unité de temps) afférentes à tous les tuyaux qui s'y joignent, est égale à zéro, on aura autant d'équations que d'inconnues auxiliaires, et le problème du calcul des dépenses en fonction des pressions extrêmes sera déterminé. — Dans le cas général, ces dernières équations subsistent ; mais il faudrait établir une règle conduisant, pour chaque point de ramification, à autant de relations qu'il y a de tuyaux réunis moins un, ces relations liant les pressions qui, dans chaque tuyau, s'exercent dès les premières tranches où le quasi-parallélisme des filets est réalisé.

Soit à étudier, en second lieu, le mouvement permanent dans un canal découvert. La constance de p_0 à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la surface libre simplifie l'équation (4) qui devient :

$$\sin i = \frac{Q^2}{\sigma^3}\left(b\chi - \frac{\alpha'}{g}\frac{d\sigma}{dx}\right).$$

L'abscisse x est sensiblement confondue avec l'arc s de l'axe hydraulique superficiel. Soit i_0 la valeur que devrait avoir l'inclinaison i à la surface libre pour que la section consécutive à la section σ d'abscisse x fût équivalente à celle-ci. Si l est la largeur du canal à fleur d'eau, on voit de suite que :

$$d\sigma = l(i_0 - i)\,dx;$$

d'où :

$$\sin i = \sin\left(i_0 - \frac{1}{l}\frac{d\sigma}{dx}\right) = \sin i_0 - \frac{\cos i_0}{l}\frac{d\sigma}{dx}.$$

Dès lors l'équation du mouvement permanent prend la forme :

$$\left(1 - \frac{\alpha'}{g\cos i_0}\frac{Q^2}{\sigma^2}\frac{l}{\sigma}\right)\frac{\cos i_0}{l}\frac{d\sigma}{ds} = \sin i_0 - \frac{bQ^2}{\sigma^2}\cdot\frac{\chi}{\sigma}. \qquad (7)$$

i_0 est parfaitement déterminé pour toute section donnée dont les éléments σ, χ, l sont connus et aux environs de laquelle la forme du lit est aussi connue.

Alors l'équation (7), qui, eu égard à la petitesse de i_0, peut se réduire à :

$$\left(1 - \frac{\alpha'}{g}\frac{Q^2}{\sigma^2}\frac{l}{\sigma}\right)\frac{1}{l}\frac{d\sigma}{ds} = i_0 - \frac{bQ^2}{\sigma^2}\frac{\chi}{\sigma}, \qquad (8)$$

fait connaître les variations $d\sigma$ de la section normale le long du canal ; « elle permettra de construire de proche en proche, en allant soit vers l'amont, soit vers l'aval, le profil longitudinal de la surface libre, ou

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

plutôt les parties de ce profil qui ne présenteront pas de courbure sensible. »

Mais il faut observer que cette équation n'est valable que sous restriction. Si l'on se reporte en effet aux conditions d'établissement de l'équation fondamentale (Vol. I, 3e section, Ch. II, §§ 1 et 2) et au procédé d'approximations successives employé, on reconnaît que nos équations ne sont valables qu'autant que, dans l'expression du frottement moyen extérieur, le second terme n'est qu'une petite quantité vis-à-vis du premier, ou que, dans l'équation (5) ci-dessus, le second terme est petit vis-à-vis de l'unité. Ainsi la valeur absolue de ce petit terme $\frac{\beta}{bg}\frac{1}{\chi}\left|\frac{d\sigma}{dx}\right|$, soit, en tenant compte de (7) : $\frac{\beta}{bg}\frac{l}{\chi\cos i_0}\cdot\frac{\left|\sin i_0 - \frac{bQ^2}{\sigma^2}\cdot\frac{\chi}{\sigma}\right|}{\left|1 - \frac{\alpha'}{g\cos i_0}\frac{Q^2}{\sigma^2}\frac{l}{\sigma}\right|}$, doit être une petite fraction de l'unité, et ne pas excéder tout au plus un cinquième.

Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, le mouvement n'est plus graduellement varié.

Il ne l'est pas davantage dans les régions où le lit s'écarte notablement de la forme prismatique, présentant un coude de faible rayon, une variation subite de pente, un changement brusque de forme ou de grandeur de sa section : les filets fluides prennent dans ces endroits critiques des courbures assez grandes. On doit alors recourir à des règles particulières pour obtenir une relation entre les sections normales qui précèdent et suivent immédiatement la région singulière, là où le quasi-parallélisme des filets est réalisé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Toutefois, si les vitesses étaient très petites dans une région critique, la surface libre du canal serait sensiblement horizontale, et les sections limites auraient la partie horizontale de leur contour à une même cote : dans ce cas, des règles spéciales ne sont pas nécessaires.

D'après cela, ces règles supposées établies, il semble qu'on pourrait, connaissant la dépense et les conditions d'une section initiale, déterminer de proche en proche, par l'emploi de l'équation (7) ou des règles en question, l'état du fluide tout le long du canal.

Il y a empêchement à procéder ainsi dans toute région où se produit un *ressaut*, région située à distance notable d'une région critique, où le lit est à peu près cylindrique, et où le régime cesse d'être graduellement varié. Bien qu'une règle spéciale, dite *formule du ressaut*, fasse connaître l'accroissement total éprouvé par la section de l'amont à l'aval du ressaut, on n'en pourrait tirer parti pour définir tout à fait l'état du liquide dans le canal que si la position du ressaut était connue ou déterminable. Mais « cela n'a lieu que lorsqu'il est possible de connaître un point de chacun des deux profils longitudinaux et peu courbes de la surface libre, qui aboutissent au ressaut en venant, l'un de l'amont, l'autre de l'aval ; on peut alors construire ces profils tout entiers, obtenir ainsi en fonction de s (ou de x) les deux sections σ_0, σ_1, qui, pour une même abscisse, correspondent, la première au profil d'amont, la seconde au profil d'aval, et déterminer enfin l'abscisse s au moyen de l'équation qui résulte de la substitution de ces valeurs dans la formule même du ressaut[1] ».

[1] J. Boussinesq, 2, p. 119-120.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3. **Perte de charge due à un accroissement brusque de la section vive : formule de M. Boussinesq.** — C'est le *chevalier de Borda* qui, en 1766, a attiré l'attention sur la perte de charge qui se produit dans les tuyaux de conduite, aux points où les filets fluides divergent brusquement : l'expression approchée de cette perte, qu'il a donnée sans la justifier suffisamment (se bornant à raisonner par analogie), est devenue classique sous le nom de *principe de Borda*.

J.-B. Bélanger[2] a très ingénieusement rattaché l'établissement de la formule de Borda à une application du théorème des quantités de mouvement et a rendu le résultat très plausible. La même méthode de démonstration a permis aussi à Bélanger d'évaluer la perte de charge qu'éprouve un liquide, coulant dans un canal cylindrique découvert, quand il y a un ressaut, c'est-à-dire quand la section fluide croît brusquement : son résultat s'appelle la *formule du ressaut*.

En 1878, *M. Boussinesq*[3], envisageant un cas beaucoup plus général d'accroissement brusque de la *section vive*, a donné une expression de la perte de charge qui comprend comme cas particuliers le principe de Borda (amélioré) et la formule du ressaut. C'est cette expression que nous allons établir.

Envisageons une masse fluide s'écoulant dans un lit de direction constante, d'un mouvement permanent.

[1] Borda (Ch. de), nos 11-20, p. 590-598 : Des questions d'hydrodynamique dans lesquelles on doit admettre une perte de force vive.

[2] J.-B. Bélanger, **1**, p. 31-35; **2**, no 55 et Additions, § 4.

[3] J. Boussinesq, **9**, p. 366-370; C. R., 30 septembre 1878, t. LXXXVII, p. 491.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Imaginons que la section normale à cette direction soit, sur quelque parcours, à peu près invariable, puis subisse d'amont en aval un accroissement brusque, pour redevenir ensuite constante.

Les filets liquides, ainsi que l'observation le montre, parallèles avant l'élargissement de la section, s'épanouissent pour reprendre, plus loin, leur quasi-parallélisme. Mais entre le faisceau épanoui des filets en régime permanent et la paroi du lit, une masse fluide non emportée dans la translation et appelée pour cette raison *fluide mort* reçoit, par l'action de ces filets, un mouvement tourbillonnant sur place, et absorbe de ce fait, par unité de temps, une certaine quantité d'énergie que nous nous proposons d'estimer.

A cet effet, nous appliquerons le théorème des quantités de mouvement au volume liquide compris, à un instant donné, entre deux sections σ_0 et σ_1 précédant et suivant immédiatement l'épanouissement des filets, et accompagné dans son mouvement durant un temps très court θ.

Si l'accroissement de section est dû à un élargissement du lit solide, nous supposerons le changement de dimensions assez brusque pour qu'il soit fini du côté de l'aval dans la section σ_0 traversée normalement par les filets sur une partie de sa surface dite *section vive*. De toute manière, nous admettrons que la surface limite solide est cylindrique entre les sections σ_0 et σ_1, ou tout au moins qu'elle puisse être rendue de cette forme sans modifier l'écoulement ; autrement dit encore, que cette surface ne s'écarte de la forme cylindrique que là où elle est en contact avec le fluide mort.

La pression varie suivant la loi hydrostatique à tra-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

vers chaque section limite σ_0, σ_1. La section σ_1 et la partie de σ_0 qui forme la section vive sont en effet traversées normalement par les filets fluides ; quant au reste de σ_0, il est en contact avec le fluide mort, animé de mouvements très lents et qu'on peut regarder comme stagnant.

Ces préliminaires posés, nous allons exprimer que la variation de la quantité de mouvement, projetée suivant l'axe du courant, de la masse fluide ci-dessus définie est égale au produit par θ de la somme algébrique des projections, sur la même direction, des forces extérieures appliquées à cette masse.

Par suite de la permanence du mouvement, la variation de la quantité de mouvement est égale à l'excès de la quantité de mouvement existant dans la tranche envahie par le fluide sur celle existant dans l'espace abandonné par notre volume fluide ; elle vaut donc, en marquant par les indices 1 et 0 des fonctions spécifiées respectivement dans les deux sections limites σ_1 et σ_0 :

$$\left[\int_\sigma u(\rho u\theta d\sigma)\right]_1 - \left[\int_\sigma u(\rho u\theta d\sigma)\right]_0.$$

Rappelons-nous notre notation :

$$1+\eta = \int_\sigma \frac{u^2}{U^2}\frac{d\sigma}{\sigma},$$

et appelons $\mu\sigma_0$ la partie de σ_0 qui en forme la section vive, U_0 la *vitesse moyenne à travers cette section vive* en dehors de laquelle la vitesse longitudinale est nulle. L'expression précédente prend la forme :

$$\rho\theta\left[(1+\eta_1)\sigma_1 U_1^2 - (1+\eta_0)\mu\sigma_0 U_0^2\right],$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou encore, en notant que $\sigma_1 U_1 = \mu\sigma_0 U_0 = Q$:

$$\rho Q\vartheta\left[(1+\eta_1)U_1 - (1+\eta_0)U_0\right].$$

Passons aux actions extérieures. Elles comprennent :

1° l'excès de la pression totale P_0 supportée par la section σ_0 et par la surface libre, s'il en existe une, sur la pression totale P_1 subie par la section σ_1, pressions estimées dans le sens du courant ; d'où : $P_0 - P_1$;

2° la composante (suivant l'axe du lit) du poids du fluide considéré ; nous la négligerons, ce qui revient à supposer que l'axe du lit est horizontal, ou encore, s'il a quelque pente, que la distance des sections σ_1 et σ_0 est assez petite pour rendre insignifiante cette composante ;

3° le frottement des parois, rendu sensible par l'épanouissement des filets. Cette action tangentielle a pour valeur, sur l'étendue des parois qui séparent les deux sections σ_0 et σ_1, d'abscisses s_0 et s_1 :

$$-\rho g \int_{s_0}^{s_1} ds \int_{\chi} Bu_0^2 d\chi.$$

Dans l'impossibilité d'évaluer exactement cette expression, estimons-la comme si le mouvement n'était que graduellement varié, auquel cas on aurait pour valeur de Bu_0^2 (la paroi étant à structure homogène)

$$bU^2 + \frac{\beta}{\chi}\frac{Q}{g}\frac{dU}{ds},$$

en vertu de la seconde équation (1). Il vient ainsi :

$$-\rho g \int_{s_0}^{s_1} bU^2\chi ds - \rho Q \int_{s_0}^{s_1} \beta \frac{dU}{ds} ds.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le premier terme est négligeable devant le second, l'écart des abscisses $s_1 - s_0$ étant petit vis-à-vis de celui des vitesses $U_1 - U_0$, et le coefficient b étant très petit vis-à-vis de β.

Quant à β, qui vaut sensiblement 4η, sa plus grande valeur correspond à la section sur laquelle les vitesses diminuent le plus du centre au bord, et par suite à la section σ_1 où le frottement des parois est le plus retardateur[1].

Le second terme est alors compris entre

$$-\rho Q\beta_1(U_1 - U_0) \quad \text{et} \quad -\rho Q\beta_0(U_1 - U_0);$$

nous prendrons pour expression approchée de sa valeur

$$-\rho Q\left[(\beta U)_1 - (\beta U)_0\right].$$

Réunissons ces résultats. Il vient, après enlèvement du facteur θ :

$$\rho Q\left[(1+\eta_1)U_1 - (1+\eta_0)U_0\right] = P_0 - P_1 - \rho Q\left[(\beta U)_1 - (\beta U)_0\right],$$

ou, en reconnaissant dans $1+\eta+\beta$ le coefficient α' :

$$P_1 - P_0 = \rho Q\left[(\alpha' U)_0 - (\alpha' U)_1\right]. \qquad (9)$$

Le coefficient α' :

$$\alpha' = 2\int_\sigma \frac{u^3}{U^3}\frac{d\sigma}{\sigma} - \int_\sigma \frac{u^2}{U^2}\frac{d\sigma}{\sigma}$$

varie d'ailleurs de 1 à 1,17 environ.

Nous allons donner, de $P_1 - P_0$, une autre expression. Soient p_0 et p_1 les pressions unitaires aux points les plus hauts de σ_0 et de σ_1 : ce sont les pressions qui

[1] J. Boussinesq, 2, p. 124.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

s'exercent sur la surface libre voisine lorsqu'il en existe une, et chacune d'elles se transmet à travers toute la section correspondante suivant la loi hydrostatique; soit encore h la différence de cote verticale entre les points les plus hauts de σ_0 et σ_1 (ou l'élévation du liquide entre σ_0 et σ_1). Il vient :

$$P_1 - P_0 = \int_{\sigma_1} (p_1 + \rho g z)\, d\sigma$$
$$- \int_{\sigma_0} [p_0 + \rho g (z - h)]\, d\sigma - \int_{\sigma_1 - \sigma_0} p_0 d\sigma,$$

ou, en désignant par z_0 et z_1 les distances du centre de gravité de chacune des sections σ_0 et σ_1 au plan horizontal du point le plus haut de σ_1 :

$$P_1 - P_0 = p_1\sigma_1 - p_0\sigma_0 - p_0(\sigma_1 - \sigma_0)$$
$$+ \rho g h \sigma_0 + \rho g (z_1\sigma_1 - z_0\sigma_0).$$

D'autre part, projetons orthogonalement σ_0 sur σ_1, et soit H la distance du centre de gravité de la différence $\sigma_1 - \sigma_0$ au même plan horizontal. On a, par application du théorème des moments :

$$H(\sigma_1 - \sigma_0) + z_0\sigma_0 = z_1\sigma_1.$$

Enfin nous poserons $H = \frac{h}{1+m}$, et nous obtiendrons après réductions :

$$P_1 - P_0 = (p_1 - p_0)\sigma_1 + \frac{\rho g h}{1+m}(\sigma_1 + m\sigma_0). \quad (10)$$

Égalons les expressions (9) et (10), en remplaçant Q par $\sigma_1 U_1$, et divisons par $\rho g \sigma_1$. Il vient :

$$\frac{p_1 - p_0}{\rho g} + \frac{h}{1+m}\left(1 + m\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) = \frac{1}{g} U_1(\alpha'_0 U_0 - \alpha'_1 U_1). \quad (11)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cette relation, mise sous la forme :

$$\frac{p_1 - p_0}{\rho} + \frac{gh}{1+m}\left(1 + m\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) = \frac{Q^2}{\sigma_1}\left(\frac{\alpha'_0}{\mu\sigma_0} - \frac{\alpha'_1}{\sigma_1}\right), \tag{12}$$

donne la différence de pression entre les points les plus hauts des deux sections σ_0 et σ_1.

Nous allons lui donner une autre forme. Ajoutons aux deux membres de (11) l'expression $\frac{\alpha'_1 U_1^2 - \alpha'_0 U_0^2}{2g}$, et nous aurons comme expression de la perte de charge entre σ_0 et σ_1 :

$$\left.\begin{aligned} \Lambda &= \left(\frac{\alpha' U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}\right)_1^0 - h \\ &\equiv \frac{\alpha'_0(U_0 - U_1)^2 + (\alpha'_1 - \alpha'_0)U_1^2}{2g} + \frac{mh(\sigma_0 - \sigma_1)}{(1+m)\sigma_1}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ou encore, en remplaçant h par sa valeur tirée de (11) :

$$\left.\begin{aligned} \Lambda \equiv{}& \frac{\alpha'_0(U_0 - U_1)^2 + (\alpha'_1 - \alpha'_0)U_1^2}{2g} \\ &+ \frac{p_1 - p_0}{\rho g}\,\frac{m(\sigma_1 - \sigma_0)}{\sigma_1 + m\sigma_0} \\ &+ \frac{(\alpha'_1 U_1 - \alpha'_0 U_0)U_1}{g}\,\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_1 + m\sigma_0}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Telle est la formule générale que nous nous proposions d'établir et dont nous allons faire diverses applications.

4. **Élargissement brusque d'un tuyau; formule de Borda.** — Supposons que le liquide sorte d'un tuyau pour entrer dans un autre de section plus grande, l'un et l'autre étant pleins de liquide.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Alors $\sigma_0 = \sigma_1$ et le dernier terme de l'expression (13) de A disparaît.

De plus, le mode de distribution des vitesses étant peu différent, sur les deux sections, de ce qu'il est dans les tuyaux où est établi le régime uniforme, nous pouvons poser $\alpha'_0 = \alpha'_1 = \alpha'$, et il vient simplement :

$$A = \alpha' \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g}. \qquad (15)$$

Ainsi *la perte de charge est, au facteur α' près, égale à la hauteur due à la vitesse perdue* $U_0 - U_1$.

En réduisant α' à l'unité, on obtient le principe de Borda.

La formule (12) donne alors :

$$\frac{p_1 - p_0}{\rho g} + h = \frac{\alpha'(1-\mu)}{\mu} \frac{Q^2}{\sigma_1^2}. \qquad (16)$$

5. **Écoulement par un ajutage cylindrique.** — Imaginons que la section σ_0 soit la section contractée d'un jet jaillissant d'un réservoir par un orifice de section σ_1 auquel on a adapté un ajutage cylindrique horizontal de même grandeur. Au début de l'écoulement, les filets convergent à l'entrée du tube, la veine se contracte, puis elle s'épanouit et vient prendre contact avec la paroi du tube. L'air resté dans l'ajutage autour de la section contractée est peu à peu entraîné par les molécules liquides, et le vide partiel produit est rempli par l'eau : bientôt l'ajutage est complètement rempli d'eau, mais le fluide avoisinant la section contractée est du *fluide mort* tournoyant lentement sur place.

Dans la section contractée σ_0, les vitesses différeront

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

peu, d'après le principe de D. Bernoulli, de leur moyenne U_0 définie par :

$$\frac{U_0^2}{2g} + \frac{p_0 - p_a}{\rho g} + \zeta = 0,$$

ζ étant la hauteur du niveau du réservoir au-dessus de l'axe de l'ajutage, et p_a la pression atmosphérique qui s'exerce au-dessus du réservoir. Dès lors, pour cette section, on aura sensiblement $\eta = 0$, et par conséquent $\alpha'_0 = 1$.

Supposons l'ajutage trop court pour que le régime uniforme ait eu le temps de s'établir. La distribution des vitesses est devenue notablement différente de l'égale répartition, mais ces vitesses ne différeront pas encore autant de leur moyenne que si le tuyau était long. Nous prendrons alors comme valeur approchée de α'_1 la moyenne entre les valeurs extrêmes qui, pour une section circulaire, sont 1 et 1,161, soit donc $\alpha'_1 = 1{,}080$. La perte de charge a donc pour valeur :

$$\Lambda = \frac{(U_0 - U_1)^2 + 0{,}080\, U_1^2}{2g}.$$

Si l'on note que la partie vive de σ_0 est, d'après l'expérience, $0{,}60\,\sigma_0$, et que par suite U_1 est égal à $0{,}60\,U_0$, il vient : $\Lambda = 0{,}472 \frac{U_1^2}{2g}$.

L'ajutage débouchant dans l'atmosphère, la pression p_1 dans la dernière section σ_1 est égale à p_a. De plus, les sommets de σ_0 et de σ_1 sont sensiblement à la même cote, et l'on a alors, d'après la définition (13) de Λ :

$$\Lambda = \frac{U_0^2 - 1{,}080\, U_1^2}{2g} + \frac{p_0 - p_a}{\rho g} = -1{,}080 \frac{U_1^2}{2g} + \zeta.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En égalant les deux valeurs trouvées de Λ, on obtient :

$$1{,}552\,U_1^2 = 2g\zeta, \qquad \text{ou} \qquad U_1 = 0{,}82\sqrt{2g\zeta}\,.$$

L'expérience conduit effectivement, en moyenne, à cette valeur de U_1.

Supposons maintenant que l'ajutage ait une longueur assez grande pour que le régime uniforme puisse s'y établir. Il convient alors de prendre pour α_1' la valeur 1,161 (section circulaire), et l'on a successivement, en procédant comme tout à l'heure :

$$\Lambda = \frac{(U_0 - U_1)^2 + 0{,}161\,U_1^2}{2g} = 0{,}605\,\frac{U_1^2}{2g},$$

$$\Lambda = \frac{U_0^2 - 1{,}161\,U_1^2}{2g} + \frac{p_0 - p_a}{\rho g} = -\,1{,}161\,\frac{U_1^2}{2g} + \zeta,$$

$$1{,}726\,U_1^2 = 2g\zeta, \qquad \text{ou} \qquad U_1 = 0{,}76\sqrt{2g\zeta}\,.$$

On traiterait de même le cas où la section de l'ajutage est plus grande que l'orifice en mince paroi auquel il est adapté [1].

6. **Ressaut superficiel dans un canal découvert ; formule du ressaut.** — Envisageons le mouvement dans un canal découvert. Comme nous l'avons dit, il arrive parfois qu'un courant d'eau s'écoulant dans un lit cylindrique régulier présente, loin de toute singularité de ce lit, et sur une faible longueur, une brusque variation de niveau : on passe d'un profil continu à un autre profil continu par une exhaustion rapide accompagnée d'ondulations et souvent de déferlement. Ce phénomène, appelé *ressaut superficiel*, a été

[1] J. Boussinesq, **2**, p. 127-128.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

étudié expérimentalement par Bidone, Darcy, Baumgarten et H. Bazin. Les conditions de sa production résulteront de la théorie qui va suivre.

Les sections amont et aval, σ_0 et σ_1, sont en contact

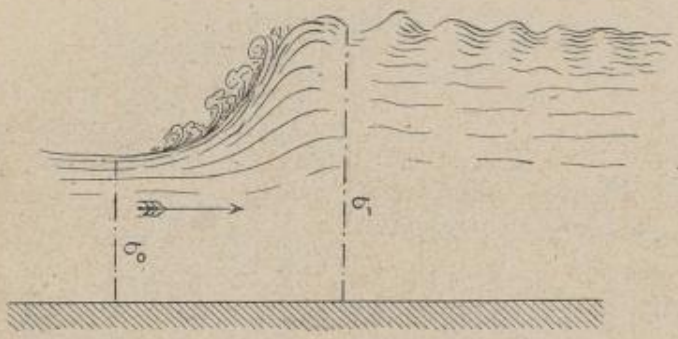


Fig. 7.

avec l'atmosphère par le haut de leur contour; nous aurons donc $p_0 = p_1 = p_a$.

Comme il n'y a pas de raison pour que la distribution des vitesses soit très différente dans les deux sections, nous admettrons que l'on a : $\alpha'_0 = \alpha'_1 = \alpha'$.

La formule (14) se réduit alors à

$$\Lambda = \alpha' \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g} + \alpha' \frac{(U_1 - U_0)U_1}{g} \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_1 + m\sigma_0},$$

tandis que la relation (12) s'écrit :

$$gh \frac{\sigma_1 + m\sigma_0}{1 + m} = \alpha' Q^2 \left(\frac{1}{\mu\sigma_0} - \frac{1}{\sigma_1} \right). \qquad (18)$$

Déterminons h et m. Supposons que la largeur l de la partie en saillie soit constante, et désignons par i_0 l'inclinaison du lit du canal censé très sensiblement cylindrique. Si l'on projette orthogonalement la section

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

normale d'amont σ_0 sur la section d'aval σ_1, la différence entre σ_1 et l'aire projection est un rectangle de largeur l, de hauteur $\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{l}$, et dont le centre est à une distance verticale du sommet de σ_1 égale à :

$$H = \frac{h}{1+m} = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{2l} \cos i_0.$$

En outre, si s_1 et s_0 sont les abscisses des deux sections suivant le lit, le théorème des projections donne :

$$h = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{l} \cos i_0 + (s_1 - s_0) \sin i_0 ;$$

le second terme est généralement négligeable devant le premier, en sorte que l'on a $h = 2H$, et par suite $m = 1$.

La relation (18) devient dans ces conditions :

$$\sigma_1^2 - \sigma_0^2 = \frac{2\alpha' Q^2 l}{g \cos i_0} \left(\frac{1}{\mu \sigma_0} - \frac{1}{\sigma_1} \right). \qquad (19)$$

En général, la section d'amont σ_0 ne présentera pas de *section morte* : à travers tous ses éléments, les vitesses seront comparables entre elles et à leur moyenne U_0, et l'on aura donc $\mu = 1$. Alors l'équation (19) s'abaisse et donne :

$$\sigma_0 \sigma_1 (\sigma_0 + \sigma_1) = \frac{2\alpha' Q^2 l}{g \cos i_0}. \qquad (20)$$

Si l'on regarde σ_0 comme donné, σ_1 sera la racine positive de l'équation du second degré (20) :

$$\sigma_1 = \frac{2\alpha' Q^2 l}{g \cos i_0} : \left(\frac{\sigma_0^2}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_0^4}{4} + \frac{2\alpha' Q^2 l \sigma_0}{g \cos i_0}} \right).$$

Ce résultat montre que « sur un cours d'eau dont la dépense Q et la largeur l à fleur d'eau sont sensiblement constantes, les sections σ_1 qui suivent immé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diatement un ressaut sont d'autant plus grandes que les sections σ_0 qui la précèdent sont plus petites[1] ».

Comme la quantité $\sigma_0\sigma_1(\sigma_0+\sigma_1)$ est comprise [σ_0 et σ_1 étant positifs] entre $2\sigma_0^3$ et $2\sigma_1^3$, l'équation (20) montre que $\sqrt[3]{\frac{\alpha' Q^2 l}{g\cos i_0}}$ est comprise entre σ_0 et σ_1, et il en résulte que les expressions :

$$1-\frac{\alpha' Q^2 l}{\sigma_0^3 g\cos i_0} \quad \text{et} \quad 1-\frac{\alpha' Q^2 l}{\sigma_1^3 g\cos i_0}$$

sont de signes contraires.

Nous utiliserons ces conclusions ultérieurement, en examinant les conditions de formation du ressaut. Indiquons cependant qu'un cours d'eau est dit *tranquille* en un point donné si le binôme $1-\alpha'\frac{U^2}{g\cos i_0}\frac{l}{\sigma}$ est positif, et *torrentueux* si ce binôme est négatif. Avec cette terminologie, un ressaut séparera une partie tranquille d'une partie torrentueuse qui la précède.

Revenons à l'expression Λ de la perte de charge. Si nous notons que $Q=U_1\sigma_1=\mu U_0\sigma_0$, et que $m=1$ dans le cas que nous envisageons, il vient :

$$\Lambda=\frac{\alpha' Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\mu\sigma_0}-\frac{1}{\sigma_1}\right)\left\{\frac{1}{\mu\sigma_0}-\frac{1}{\sigma_1}+\frac{2}{\sigma_1}\cdot\frac{\sigma_0-\sigma_1}{\sigma_0+\sigma_1}\right\}.$$

Si l'on se sert de la relation (19) pour éliminer Q, on trouve après quelques réductions simples :

$$\Lambda=\frac{\cos i_0}{4\mu l\sigma_0\sigma_1}(\sigma_1-\sigma_0)\left\{(\sigma_1-\mu\sigma_0)^2+(1-\mu)\sigma_0(\sigma_1+\mu\sigma_0)\right\}. \qquad (21)$$

[1] J. Boussinesq, **2**, p. 131.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Dans le cas où $\mu = 1$, cette formule de M. Boussinesq donne : $$\Lambda = \frac{(\sigma_1 - \sigma_0)^3 \cos i_0}{4 l \sigma_0 \sigma_1}. \qquad (22)$$

Supposons que le canal soit à section rectangulaire et à faible pente. On a alors :

$$\sigma_1 = \zeta_1 l, \qquad \sigma_0 = \zeta_0 l, \qquad \cos i_0 = 1,$$

(ζ_1 et ζ_0 étant les profondeurs du canal après et avant le ressaut), et par suite :

$$\Lambda = \frac{(\zeta_1 - \zeta_0)^3}{4 \zeta_1 \zeta_0}. \qquad (23)$$

Cette expression particulière a été obtenue directement par Bélanger : la perte de charge est égale au quart du cube de la hauteur du ressaut divisé par le produit des profondeurs du canal avant et après le ressaut.

7. **Confrontation avec l'expérience.** — Les observations quantitatives de ressauts ont porté sur des canaux à section rectangulaire et à faible pente. Revenons alors à l'équation (20) pour y remplacer σ_0, σ_1, $\cos i_0$ respectivement par $l\zeta_0$, $l\zeta_1$ et 1 ; introduisons de plus la dépense par unité de largeur du canal $q = \frac{Q}{l}$, et nous aurons :

$$\zeta_0 \zeta_1 (\zeta_0 + \zeta_1) = \frac{2\alpha' q^2}{g};$$

on en déduit de là :

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{\zeta_0^2}{4} + \frac{2\alpha' q^2}{g \zeta_0}} - \frac{\zeta_0}{2}.$$

Quant à la valeur de α', dans le cas d'une section

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rectangulaire et en supposant le régime uniforme établi, elle est très sensiblement 1,1.

Il y a concordance entre les résultats fournis par cette formule et ceux de l'expérimentation, ainsi qu'on peut en juger par les exemples suivants pris au hasard, par M. Boussinesq[1], parmi les observations relatées dans les *Recherches hydrauliques* de Darcy et Bazin[2].

NUMÉROS DES SÉRIES ET DES EXPÉRIENCES	ζ_0	q	VALEURS DE ζ_1	
			OBSERVÉES	CALCULÉES
	m		m	m
Série 89, exp. nº 9. . .	0,270	0,516	0,36	0,35
Série 90, — 2. . .	0,158	0,258	0,24	0,24
— , — 5. . .	0,252	0,516	0,38	0,38
Série 91, — 1. . .	0,173	0,319	0,30	0,29
— , — 9. . .	0,268	0,516	0,37	0,36
Série 92, — 1. . .	0,090	0,154	0,19	0,20
— , — 2. . .	0,127	0,258	0,28	0,28
— , — 3. . .	0,174	0,361	0,34	0,33
— , — 4. . .	0,186	0,413	0,37	0,37
— , — 6. . .	0,213	0,516	0,43	0,43
— , — 7. . .	0,241	0,568	0,44	0,44
Série 94, — 3. . .	0,191	0,361	0,30	0,31
Série 95, — 2. . .	0,430	1,571	0,92	0,94

On s'est borné à donner les hauteurs ζ_1 à un centimètre près; les rides et l'écume qui se produisent au sommet de σ_1 ne permettent pas une approximation plus grande.

[1] J. Boussinesq, **2**, p. 135.
[2] H. Darcy, **3**, séries 89 à 95, et atlas, pl. 28.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

8. **Extension du principe de Borda au cas des canaux découverts.** — Revenons au cas général où la section σ_0 comprend une partie vive $\mu\sigma_0$ et une partie morte $(1-\mu)\sigma_0$.

La section σ_1 est alors définie par l'équation du troisième degré (19) : en faisant successivement dans cette équation $\sigma_1 = -\infty$, 0, σ_0, $+\infty$, on reconnaît l'existence de trois racines réelles séparées par ces nombres; la racine négative est à écarter; celle qui est inférieure à σ_0, rendant le premier membre de (19) négatif, donne, en vertu de cette équation, $\sigma_1 < \mu\sigma_0$, alors que, les filets s'épanouissant, la section vive augmente de $\mu\sigma_0$ à σ_1. La troisième racine, supérieure à σ_0, sera celle à adopter, et à substituer dans l'expression (21) de la perte de charge Λ.

Dans bien des applications, le relèvement $\frac{\sigma_1-\sigma_0}{l}\cos i_0$ de la surface libre entre les deux sections σ_0, σ_1 est assez petit pour que le carré de $(\sigma_1-\sigma_0)$ soit négligeable devant $(\sigma_1-\sigma_0)$ lui-même.

Posons $\sigma_0 = \sigma_1(1-\varepsilon)$; si l'on néglige les termes en ε^2 devant ceux en ε, il vient :

$$\frac{\mu(\sigma_1^2-\sigma_0^2)\sigma_0\sigma_1}{\sigma_1-\mu\sigma_0} = \frac{2\mu\varepsilon\sigma_1^3}{1-\mu} + \ldots = \frac{2\mu\sigma_1^2(\sigma_1-\sigma_0)}{1-\mu} + \ldots,$$

et l'équation (19) se réduit à :

$$\sigma_1-\sigma_0 = \frac{\alpha' Q^2 l}{\sigma_1^2 g\cos i_0}\left(\frac{1}{\mu}-1\right) = \frac{\alpha' l U_1^2}{g\cos i_0}\left(\frac{1}{\mu}-1\right).$$

D'autre part, la même substitution dans l'expression (21) de Λ donne :

$$\Lambda = \frac{\cos i_0}{4\mu l}(\sigma_1-\sigma_0)\left\{(1-\mu)^2+(1-\mu)(1+\mu)\right\},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou : $$\Lambda = \frac{\cos i_0}{2l}(\sigma_1 - \sigma_0)\left(\frac{1}{\mu} - 1\right).$$

Remplaçons $(\sigma_1 - \sigma_0)$ par la valeur précédente, et nous aurons :

$$\Lambda = \frac{\alpha'}{2g} U_1^2 \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 = \alpha' \frac{(U_1 - U_0)^2}{2g},$$

en notant que $\sigma_1 U_1 = \mu \sigma_0 U_0$ donne $U_1 = \mu(1 - \varepsilon) U_0$. Cette expression coïncide avec celle de Borda. D'où l'énoncé suivant :

« La perte de charge due à un brusque accroissement de section peut se calculer par le principe de Borda, non seulement dans le cas d'un tuyau, mais encore dans celui d'un canal découvert, quand la section vive du fluide y grandit dans un rapport beaucoup plus considérable que la section fluide totale[1]. »

9. **Perte de charge due à un changement brusque de direction.** — Imaginons que deux tuyaux ou deux canaux cylindriques A et B, de même

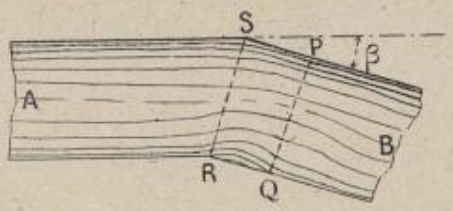


Fig. 8.

section droite, faisant entre eux un *petit* angle β, aient en commun une section plane également inclinée sur leurs directions, et que l'eau y circule de A vers B.

[1] J. Boussinesq, 2, p. 138.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Soit S la région saillante ou convexe du coude ainsi formé, R la région rentrante ou concave.

A proximité du coude, les filets fluides situés dans A et avoisinant S se recourbent assez sensiblement, sous l'influence de l'excès de pression produit par le changement de direction de la paroi ; au contraire, les filets avoisinant R gardent leur direction jusqu'un peu au delà du coude. Il en résulte une convergence des filets qui cesse dans une *section contractée* PQ située à une petite distance du coude. Au delà, les filets s'épanouissent et viennent occuper la section entière de B.

Comme le principe de D. Bernoulli s'applique avec une exactitude assez grande à tous les phénomènes de contraction, la perte de charge produite par le coude ou tournant brusque est due à peu près exclusivement à l'accroissement subi par la section vive un peu après le coude, à l'entrée de B. Nous l'évaluerons donc en appliquant le principe de Borda qui, établi pour les tuyaux, est aussi valable, à fort peu près, pour les canaux découverts, entre deux sections dont la première n'est pas très inférieure à la seconde, encore que sa partie vive soit bien plus faible (*suprà*, § 8).

Soit μ le rapport de la partie vive de la section contractée à l'aire totale de cette section ; U la vitesse moyenne dans B après épanouissement des filets. La perte de charge aura pour expression :

$$\Lambda = \alpha' \frac{U^2}{2g} \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 .$$

Nous allons chercher[1] des expressions approchées

[1] J. Boussinesq, **2**, p. 597-600.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du coefficient μ et de la distance δ qui sépare la section contractée du point d'intersection des axes des tuyaux ou canaux, — dans le cas d'une section circulaire ou d'une section rectangulaire large.

1° Dans le cas d'une section circulaire, la solidarité des filets est notablement plus grande que dans le cas d'une section beaucoup plus large que haute : « la contraction s'opère presque à la fois pour tous les filets. Le rapport $1 - \mu$ de la partie morte de la section contractée à cette section entière ne peut évidemment pas dépendre des valeurs absolues de ces diverses aires et doit varier seulement avec l'angle β : nul pour $\beta = 0$, il sera naturellement proportionnel à β ou à $\sin\beta$, pour les petites valeurs de l'inclinaison mutuelle des deux tuyaux, les seules que nous ayons ici en vue, et, si g_1 désigne un coefficient positif dépendant seulement de la forme de la section, on pourra poser $1 - \mu = g_1 \sin\beta$, ou simplement $\mu = 1 - g_1\beta$. Quant à la distance absolue δ, qui sépare la section contractée du point d'intersection des axes des deux tuyaux, on conçoit qu'elle doit être sensiblement proportionnelle à l'intervalle moyen qui est en quelque sorte donné aux filets fluides pour opérer leur déviation, c'est-à-dire à la longueur du prolongement de l'axe du premier tuyau, à partir de son intersection avec l'axe du second tuyau, jusqu'à la rencontre de la paroi extérieure de ce dernier : ce prolongement vaut à fort peu près $\frac{a}{2\beta}$ (si a est le diamètre du tuyau), et, en appelant g'_1 un coefficient constant pour tous les tuyaux circulaires, il viendra : $\delta = g'_1 \frac{a}{\beta}$. »

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous sommes ainsi conduits, dans le cas d'une section circulaire, à :

$$\mu = 1 - g_1\beta, \qquad \delta = g_1' \frac{a'}{\beta}.$$

2° Dans le cas de canaux découverts à section rectangulaire [1], d'une profondeur h très petite par rapport à la largeur a, les filets fluides sont beaucoup moins solidaires les uns des autres que dans le cas précédent, à cause de cette plus grande largeur relative : les premiers filets qui se heurtent au bord extérieur S peuvent y augmenter un peu de hauteur, sans faire naître, à la surface, des pentes transversales sensibles, et, par suite, sans refouler brusquement les autres filets.

« Alors des filets fluides de plus en plus éloignés du bord S ne changent de direction qu'à des distances du coude de plus en plus grandes; par suite, à égale largeur a, la déviation des filets contigus au bord S et leur parallélisme à l'axe du second tuyau ne s'effectuent qu'à une distance du coude d'autant plus grande que la profondeur h est plus petite. Cette distance serait donc sensiblement proportionnelle au rapport $\frac{a}{h}$, si les filets fluides voisins de la paroi extérieure et déjà contractés ne tendaient à s'épanouir et ne hâtaient ainsi la déviation et la contraction des plus intérieurs. Par conséquent, la distance δ ne doit pas croître tout à fait dans un rapport aussi grand que $\frac{a}{h}$, quand h diminue, et on peut la supposer

[1] J. Boussinesq, **11**, p. 429.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

proportionnelle à $\left(\frac{a}{h}\right)^{1-\nu}$, en désignant par ν un petit nombre positif, peu dépendant de β dans des limites étendues. Comme la distance δ est d'ailleurs, d'après des considérations qui viennent d'être exposées, en raison directe de $\frac{a}{\beta}$, elle vaudra $g_2 \frac{a}{\beta}\left(\frac{a}{h}\right)^{1-\nu}$, si l'on appelle g_2 un coefficient constant.

« Quant à la valeur de la contraction $1-\mu$, il est permis, dans le cas particulier d'une section très large, de la déduire avec une approximation suffisante de celle de la distance δ. En effet, la déviation s'effectuant successivement et graduellement pour les divers filets, les plus voisins du bord intérieur R ne doivent guère changer de direction qu'au moment où la contraction est complète, c'est-à-dire à la distance δ du coude. Or, à cette distance, leur éloignement de la paroi intérieure du second canal, avec laquelle ils font le petit angle β, est devenu $\delta\beta$, et cet éloignement mesure la largeur de la partie morte de la section contractée, c'est-à-dire le produit de la contraction $1-\mu$ par la largeur totale a; on a donc sensiblement : $1-\mu = \frac{\delta\beta}{a}$. »

Nous sommes ainsi conduits, dans le cas d'une section rectangulaire très large, à :

$$\mu = 1 - g_2\left(\frac{a}{h}\right)^{1-\nu}, \qquad \delta = g_2 \frac{a}{\beta}\left(\frac{a}{h}\right)^{1-\nu}.$$

Il convient d'observer que la valeur obtenue de la contraction $1-\mu$ est approchée par excès, car on attribue à la partie morte des sections autant de hauteur qu'à la partie vive et une largeur un peu trop forte.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il semble naturel de supposer que l'épanouissement des filets en aval de la section contractée est d'autant plus rapide que la contraction antérieure a été plus brusque ; car, « en général, toute détente amenée par une compression lui est comme proportionnée sous le rapport des diverses circonstances qu'elle présente. » Dès lors, la distance c du point de rencontre des axes à la section où les filets reprennent leur parallélisme, est à peu près proportionnelle à δ, et l'on a comme longueur minima que puisse avoir le tronçon B, pour que nos formules soient applicables :

$$c = G_1^2 \frac{a}{\beta}, \qquad \text{ou} \qquad c = G_2^2 \frac{a}{\beta}\left(\frac{a}{h}\right)^{1-\nu},$$

selon que la section est circulaire ou rectangulaire, G_1^2 et G_2^2 désignant deux coefficients constants.

10. **Perte de charge due à un coude ou à un tournant arrondis.** — Imaginons maintenant qu'un tuyau ou un canal ait pour axe une ligne polygonale régulière de côté C inscrite dans un cercle de rayon $\mathcal{R}$ assez grand, et qu'il soit formé d'une succession de parties cylindriques identiques, ayant pour directions les côtés de cette ligne et se coupant suivant des courbes planes (orientées comme au § 9).

Si C est supérieur à c, la perte de charge Λ, due au changement brusque de direction quand on passe d'un tronçon au suivant, est donnée par l'expression du § 9. La perte de charge Λ', rapportée à l'unité de longueur de l'axe, sera donc :

$$\Lambda' = \frac{\Lambda}{C} = \alpha' \frac{U^2}{2g} \frac{1}{C}\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Remplaçons λ par les expressions données précédemment, en notant que l'on a sensiblement $C = \mathcal{R}\beta$; il viendra :

$$\Lambda' = \alpha' \frac{g_1^2}{2g} U^2 \frac{C}{\mathcal{R}^2}, \quad \text{ou} \quad \alpha' \frac{g_2^2}{2g} \frac{U^2}{C} \left(\frac{a}{h}\right)^{2-2\nu}.$$

Supposons que l'on multiplie le nombre des côtés de la ligne polygonale et que C tende vers sa valeur minima c : Λ' décroît si la section est circulaire et croît si elle est rectangulaire.

Quand C atteint sa valeur limite c [1], « les deux phénomènes de contraction et d'épanouissement successifs des filets se produisent *sans interruption*, comme dans un tuyau ou dans un canal à axe courbe; et l'on est alors d'autant plus tenté d'assimiler le tuyau ou le canal polygonal à un tuyau ou canal continu, dont l'axe aurait en chaque point la courbure correspondante $\frac{1}{\mathcal{R}}$, que leur aspect est sensiblement pareil, vu la petitesse supposée de la largeur a, et par suite du côté c, par rapport au rayon $\mathcal{R}$. Le seul changement qui semble devoir résulter d'un arrondissement plus complet consiste en ce que, si on le réalisait, la contraction et l'épanouissement deviendraient moins distincts, parce qu'ils ne se produiraient plus, alternativement, sur les mêmes sections pour tous les filets, mais qu'ils auraient lieu à la fois, pour des filets différents, sur toutes les sections, savoir, la contraction sur la partie des sections la plus voisine de la paroi extérieure, contre laquelle viennent se heurter à chaque instant les filets animés

[1] J. Boussinesq, 2, p. 601.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des plus grandes vitesses, et l'épanouissement, sur l'axe ou sur la partie des sections contiguë aux autres parois ; sans doute, ce défaut d'accord, en empêchant les épanouissements d'être aussi complets, aurait pour conséquence de réduire un peu les pertes de charge, mais dans un rapport qui paraît devoir varier seulement avec le mode de distribution, en deux groupes, de tous les filets, les uns contractés, les autres dilatés. Or ce mode est sans doute moyennement le même à l'intérieur de toutes les sections d'un même genre, circulaires ou rectangulaires. »

Dans ces conditions, la perte de charge par unité de longueur d'un coude ou d'un tournant arrondis, se déduira de l'expression Λ' en y remplaçant C par c et notant que $c = \mathcal{R}\beta$, ce qui donne, par l'élimination de β :

$$c = G_1\sqrt{a\mathcal{R}}, \quad \text{ou} \quad c = G_2 h\sqrt{\frac{\mathcal{R}}{a}}\left(\frac{a}{h}\right)^{\frac{3-\nu}{2}},$$

Il vient ainsi, τ_1 et τ_2 étant deux coefficients constants :

$$\Lambda' = \tau_1\frac{U^2}{\mathcal{R}}\sqrt{\frac{a}{\mathcal{R}}}, \quad \text{ou} \quad \tau_2\frac{U^2}{h}\sqrt{\frac{a}{\mathcal{R}}}\left(\frac{a}{h}\right)^{\frac{1-3\nu}{2}},$$

selon que la section est circulaire ou rectangulaire large.

11. **Confrontation avec l'expérience.** — Du Buat semble s'être le premier préoccupé de mesurer la perte de charge due à la courbure. Ses expériences ont été faites avec divers tuyaux coudés, de 1 pouce à 2 pouces de diamètre, en déterminant les augmentations de charge d'eau nécessaires pour y

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

faire prendre au fluide la même vitesse que dans des tuyaux entièrement droits de même longueur et de même grosseur. B. de Saint-Venant a déduit d'une formule empirique de Du Buat une formule de la forme de celle que nous avons obtenue ; il l'a mise en nombres et l'a comparée aux expériences précitées ; il a été conduit à adopter l'expression :

$$\Lambda' = 0{,}0049\,\frac{U^2}{\mathcal{R}}\sqrt{\frac{a}{\mathcal{R}}}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{204}\,\frac{U^2}{2g}\,\frac{1}{\mathcal{R}}\sqrt{\frac{a}{\mathcal{R}}}.$$

Les résultats fournis par cette formule coïncident avec les mesures de Du Buat, comme on le reconnaît sur le tableau suivant, où l'on a réuni quelques exemples pris au hasard parmi ceux donnés par B. de Saint-Venant [1].

NUMÉROS DES EXPÉRIENCES	LONGUEUR L DE L'AXE DU COUDE	RAYON DE COURBURE $\mathcal{R}$	VALEUR DE $\Lambda' L$	
			CALCULÉE	OBSERVÉE
		Diamètre $a = 0{,}02707$		
90	0,2161	0,0573	0,0671	0,0674
93	0,4665	0,1360	0,0397	0,0406
100	0,1441	0,0573	0,0212	0,0203
		Diamètre $a = 0{,}05417$		
110	1,3996	0,2720	0,2433	0,2339

Pour les tournants arrondis des rivières, de nombreuses observations ont été faites par Lahmeyer sur l'Elbe, la Fulda, la Sprée et le Weser. La formule par

[1] B. de Saint-Venant, 1, p. 41.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

laquelle l'hydraulicien allemand a essayé de rendre compte de ses résultats est un cas particulier de celle à laquelle nous sommes parvenus, correspondant à $\nu = \frac{1}{3}$. En fait, ν est un très petit nombre positif, et l'exposant $\frac{1-3\nu}{2}$ est très faible, en sorte que $\left(\frac{a}{h}\right)^{\frac{1-3\nu}{2}}$ varie très lentement avec $\frac{a}{h}$. Il vient alors simplement

$$\Lambda' = \tau_2 \frac{U^2}{h}\sqrt{\frac{a}{\mathcal{R}}}.$$

Pour l'Elbe et la Fulda, on a obtenu :

$$\tau_2 = 0{,}0004 \quad [60 \text{ observations}].$$

Pour le Weser et la Sprée, on a obtenu :

$$\tau_2 = 0{,}00023 \quad [124 \text{ observations}].$$

12. **Équation du mouvement graduellement varié dans un tuyau ou un canal à axe courbe.** — La perte de charge due à la courbure de l'axe d'un tuyau ou d'un canal est en somme assez faible. « En vertu du principe de la superposition des petits effets, cette perte de charge doit simplement s'ajouter à celles qui se produiraient seules si l'axe cessait d'être courbe, et conserver à peu près, lorsque les sections normales varient très graduellement de forme et de dimensions, la même valeur que dans le cas où ces sections sont exactement égales et où le mouvement se fait de la même manière sur toutes[1]. »

[1] J. Boussinesq, **2**, p. 605.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'équation du mouvement graduellement varié non permanent sera donc (§ 1) :

1° dans le cas d'un tuyau à section circulaire de rayon R $[a = 2R]$:

$$I = \frac{2bU^2}{R} + \alpha' \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{1+2\eta}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \tau_1 \frac{U^2}{\mathcal{R}}\sqrt{\frac{2R}{\mathcal{R}}};$$

2° dans le cas d'un canal à section rectangulaire large, de profondeur h et de largeur a :

$$I = \frac{bU^2}{h} + \alpha' \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{1+2\eta}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \tau_2 \frac{U^2}{h}\sqrt{\frac{a}{\mathcal{R}}},$$

s étant l'abscisse curviligne estimée suivant l'axe et $\mathcal{R}$ le rayon de courbure de cet axe.

Si l'on suppose que le mouvement est permanent, cette équation se réduit à l'une ou l'autre des suivantes :

$$I = \frac{2U^2}{R}\left[b + \tau_1 \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{R}{\mathcal{R}}\right)^{\frac{3}{2}}\right],$$

$$I = \frac{U^2}{h}\left[b + \tau_2\sqrt{\frac{a}{\mathcal{R}}}\right].$$

13. **Retour à la perte de charge due à un changement brusque de direction.** — Revenons au cas d'un coude brusque pour essayer de donner une expression explicite de la perte de charge. Considérons à cet effet la masse fluide comprise entre une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

section σ_0 située un peu en amont du coude et une section σ_1 située un peu en aval : les sections normales égales σ_0 et σ_1 sont supposées choisies telles que les filets fluides les traversent normalement. Appliquons à cette masse liquide le théorème des quantités de mouvement, en projection sur l'axe du tuyau d'aval, la masse étant suivie pendant un intervalle de temps infiniment court θ.

A cause de la permanence du régime, la variation de la quantité totale de mouvement est la différence des quantités de mouvement des tranches fluides qui auront traversé respectivement les sections σ_1 et σ_0 ; soit, puisque ces sections sont traversées avec la même vitesse U, $\rho Q\theta(U - U\cos\beta)$.

Le quotient de cette variation par θ, soit

$$2\rho QU\sin^2\frac{\beta}{2},$$

est égal à la somme des projections, sur l'axe du tuyau d'aval, des forces extérieures appliquées à la masse envisagée.

Le poids et les frottements extérieurs ne donnent que des termes négligeables, et nous n'avons à mettre en compte que les pressions superficielles normales.

Soient p_0 et p_1 les pressions sur l'axe dans les deux sections σ_0 et σ_1. Nous n'altérerons pas la somme à évaluer en retranchant de toutes les pressions une même valeur p_0. La section σ_1 donne alors la composante $(p_1 - p_0)\sigma_1$. et la section σ_0 une composante nulle. Les pressions normales des parois du tuyau d'aval ont des projections nulles sur l'axe de ce tuyau. Enfin les excès (algébriques) de pression sur la paroi

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'amont, provenant de la courbure des filets liquides, ont, eu égard à la symétrie par rapport au plan des axes, une résultante $\mathfrak{P}$ située dans ce plan, normale à l'axe du tuyau d'amont, faisant avec l'axe de projection un angle complémentaire de β, et donnant comme projection $\mathfrak{P}\sin\beta$.

Il vient ainsi :

$$2\rho QU\sin^2\frac{\beta}{2}=\mathfrak{P}\sin\beta-(p_1-p_0)\sigma_1.$$

Or, d'une part, $Q=U\sigma$, σ étant la valeur commune de σ_0 et de σ_1; d'autre part, la perte de charge entre σ_0 et σ_1 est $\Lambda=\frac{p_0-p_1}{\rho g}$, car la vitesse U est la même à travers les deux sections, et ces sections sont très sensiblement au même niveau. Nous aurons donc :

$$\Lambda=\frac{U^2}{2g}\left(2\sin\frac{\beta}{2}\right)^2-\frac{\mathfrak{P}}{\rho g\sigma}\sin\beta.$$

Si $\mathfrak{P}$ avait une valeur minime et si β était faible, on aurait sensiblement :

$$\Lambda=\frac{U^2}{2g}\beta^2,$$

ce qui est conforme à certaines observations de Péclet.

Pour $\beta=90^\circ$, on a :

$$\Lambda=\frac{U^2}{g}-\frac{\mathfrak{P}}{\rho g\sigma}.$$

Or une expérience de Venturi donne $\Lambda=0{,}75\frac{U^2}{g}$, et une autre d'A. de Caligny[1] donne très sensiblement

[1] A. de Caligny, p. 539.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\frac{U^2}{g}$. Ces résultats concordent qualitativement avec la formule établie, la valeur de $\mathfrak{P}$ étant moindre dans la seconde expérience que dans la première, ainsi qu'il résulte d'une remarque du dernier expérimentateur.

S'il s'agissait d'un tournant brusque d'un canal à section rectangulaire, $\mathfrak{P}$ ne serait pas négligeable. Les filets fluides voisins de l'angle rentrant R gardent alors leur hauteur primitive jusqu'au passage du coude et au delà, et les filets contigus à l'angle saillant S, retardés par le coude, se gonflent déjà à quelque distance en amont de celui-ci. Par suite, le canal d'amont exercera par le bord S un excès non hydrostatique $\mathfrak{P}$ de pression beaucoup plus sensible que si la solidarité des filets avait été aussi grande que dans un tuyau circulaire coudé et que si, conséquemment, le gonflement s'était trouvé dans le canal d'amont pareil sur les deux rives et sur toute la largeur. Aussi a-t-on seulement alors $\mathfrak{P} < \frac{U^2}{2g}\left(2\sin\frac{\beta}{2}\right)^2$.

14. **Perte de charge due à un changement brusque de direction et à un accroissement brusque simultané de section vive.** — Supposons maintenant que le tuyau d'aval ait une section supérieure à celle du tuyau d'amont, les axes des deux tuyaux étant dans un même plan à peu près horizontal. Alors les filets liquides sont moins contraints de se courber à la sortie du premier tuyau; les courbures prises sont insensibles, et l'excès non hydrostatique de pression exercé sur le tuyau d'aval à proximité du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

coude est bien inférieur à ce qu'il pouvait être tout à l'heure : nous pouvons le négliger.

Reprenons la masse fluide comprise entre les sections inégales σ_0 et σ_1, l'une antérieure au coude, l'autre postérieure, toutes deux traversées normalement par les filets. Les vitesses moyennes de traversée, U_0 et U_1, sont définies par la condition :

$$U_0\sigma_0 = U_1\sigma_1 = Q.$$

Appliquons à cette masse le théorème des quantités de mouvement, en projection sur l'axe du tuyau d'aval, en opérant comme aux §§ 3 et 13, et en notant que les centres des deux sections sont sensiblement au même niveau.

L'équation (9) du § 3 a ici pour équivalente :

$$(p_1 - p_0)\sigma_1 - \mathfrak{P}\sin\beta = \rho Q\left[(\alpha' U)_0\cos\beta - (\alpha' U)_1\right],$$

U_0 étant remplacé par sa composante $U_0\cos\beta$ suivant l'axe du tuyau d'aval.

Quant à la perte de charge entre les deux sections, son expression est ici :

$$\Lambda = \left(\frac{p}{\rho g} + \alpha'\frac{U^2}{2g}\right)_0 - \left(\frac{p}{\rho g} + \alpha'\frac{U^2}{2g}\right)_1.$$

$\mathfrak{P}$ étant insignifiant et β faible, il vient, par élimination de $(p_0 - p_1)$:

$$\Lambda = \frac{Q}{g\sigma_1}\left[\alpha'_1 U_1 - \alpha'_0 U_0\cos\beta\right] + \frac{1}{2g}\left[\alpha'_0 U_0^2 - \alpha'_1 U_1^2\right],$$

ou, approximativement, en donnant à α'_1 et à α'_0 la même valeur α' :

$$\Lambda = \frac{\alpha'}{2g}\left[U_1^2 - 2U_1 U_0\cos\beta + U_0^2\right].$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou enfin :

$$\Lambda = \alpha' \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g} + \alpha' \frac{U_0 U_1}{2g} \left(2 \sin \frac{\beta}{2}\right)^2.$$

Cette formule est une généralisation de celle de Borda [1].

Enfin on pourrait encore envisager le cas d'un tuyau ou d'un canal débouchant sous une petite pente dans un canal découvert où la section croîtrait rapidement jusqu'à une certaine valeur σ_1 [2].

Les résultats obtenus supposent que $\mathfrak{P}$ est à peu près nul ; il ne conviendrait pas de les appliquer à des cours d'eau de largeur considérable par rapport à leur profondeur, ainsi qu'il a été expliqué à la fin du § 13.

[1] J. Boussinesq, **2**, p. 609.
[2] J. Boussinesq, **2**, p. 610.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE II

ÉTABLISSEMENT DU RÉGIME DES COURS D'EAU NATURELS

1. **État hydraulique d'un canal où un régime sensiblement uniforme serait possible**[1]. — Considérons un canal dont le lit est prismatique, ou au moins est tel que l'eau puisse y couler d'un mouvement à peu près uniforme. En combinant l'équation du mouvement graduellement varié avec la formule du ressaut et avec quelques remarques intuitives résultant de la notion de stabilité du mouvement permanent, il est possible de fixer complètement les conditions du régime du canal.

Nous envisagerons surtout le cas où toutes les sections normales du canal sont des rectangles, de même largeur l assez grande : la profondeur h est seule variable. Les conclusions auxquelles nous arriverons pourront être étendues aisément au cas général, moyennant quelques restrictions que nous indiquerons et qui sont le plus souvent réalisées dans les cours d'eau naturels.

[1] J. Boussinesq, **2**, p. 141-145.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Reprenons, dans cette hypothèse et en admettant que la pente générale soit faible, l'équation du mouvement graduellement varié [3e partie, Ch. I, § 2, équation (8)] et remplaçons-y σ par lh et le rayon moyen par h. Il vient :

$$\left(1 - \frac{\alpha'}{g}\frac{Q^2}{l^2}\frac{1}{h^3}\right)\frac{dh}{ds} = i_0 - \frac{bQ^2}{l^2}\frac{1}{h^3}. \qquad (1)$$

La quantité i_0, dite *pente du lit*, est l'inclinaison que devrait avoir la surface libre pour que les sections voisines de la section d'abscisse s lui fussent équivalentes ; elle se confond ici avec la *pente du fond* ; ses variations sont supposées peu étendues.

Nous admettrons même que ces variations de i_0 et celles de la structure des parois et de la hauteur h, quand s croît, soient assez lentes pour réaliser la condition suivante : si, pour une section, le second membre de (1) s'annule ou prend sa plus petite valeur absolue, pour les sections voisines, *sur une étendue finie*, ce second membre prendra aussi très sensiblement la valeur zéro ou cette même valeur minimum.

Pour $i_0 > 0$, la valeur h' de h annulant le second membre de (1) sera racine de l'équation :

$$h'^3 i_0 - \frac{b'Q^2}{l^2} = 0$$

(en marquant par un accent les valeurs que prennent pour $h = h'$ les diverses fonctions que nous rencontrons). Cette hauteur h' est d'autant plus grande que i_0 est plus petit.

Pour $i_0 < 0$, le second membre de (1), toujours négatif, sera le plus petit possible (en valeur absolue)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

quand h sera le plus grand possible : soit h' cette grande valeur de h.

D'après notre dernière hypothèse, sur une région finie, la hauteur h restera à fort peu près égale à h', car l'équation (1) peut s'écrire :

$$\left(1-\frac{\alpha'}{g}\frac{Q^2}{l^2}\frac{1}{h^3}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{h}\right)=\left(b\frac{Q^2}{l^2}\frac{1}{h^3}-i_0\right)\frac{1}{h^2},$$

et le second membre est très voisin de zéro sur un parcours fini si $i_0>0$, à cause de la petite valeur de la parenthèse, et si $i_0<0$, à cause de la grandeur de h.

Cette région de profondeur à peu près constante sera d'autant plus étendue que la structure des parois sera plus uniforme et que le fond différera moins d'un plan.

D'autre part, « on sait que le régime uniforme tend à s'établir dans les cours d'eau qui le comportent, c'est-à-dire dans ceux dont le lit est sensiblement prismatique et d'une pente positive, que ce régime y existe effectivement ou à fort peu près, pourvu qu'ils aient une certaine longueur; et l'on sait aussi, lorsqu'il s'agit, au contraire, d'un canal ayant une pente de fond i_0 négative, mais suffisamment long, que la vitesse U y tend vers une valeur constante égale à zéro, à mesure qu'on s'éloigne de son extrémité aval. Et, en effet, dans ces deux cas, les circonstances dont peut dépendre l'écoulement sur chaque section en particulier ne varient plus sensiblement dès qu'on est assez éloigné des extrémités du canal pour que l'influence de celles-ci ne se fasse plus sentir. Il est donc naturel d'admettre les principes suivants :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1° Dans des cours d'eau très longs et dont le lit est de forme sensiblement prismatique sur une étendue considérable, le régime uniforme, ou, plus exactement, un régime consistant en ce que la vitesse moyenne U y varie extrêmement peu d'une section à l'autre, se trouve établi à des distances un peu grandes, soit de l'extrémité amont, soit de l'extrémité aval.

2° Le même régime existerait dès l'extrémité amont, si les conditions dans lesquelles se fait l'alimentation du canal ne s'y opposaient pas, et il tend à s'établir, c'est-à-dire que (le débit Q et par suite la hauteur de régime uniforme h' étant supposés donnés) l'inverse $\frac{1}{h}$, proportionnel à U, s'approche de $\frac{1}{h'}$, dès qu'on quitte l'extrémité amont pour marcher vers l'aval.

3° Le même régime existerait aussi à l'extrémité aval, si les conditions de déversement du liquide ne s'y opposaient pas, et il tend à s'établir à mesure qu'on remonte vers l'amont, à partir de cette extrémité, ou, ce qui revient au même, $\frac{1}{h}$ s'écarte de plus en plus de $\frac{1}{h'}$ quand, parti d'un point où existe ce régime, on s'avance vers l'extrémité aval du cours d'eau.

4° Généralement, si l'on fait abstraction du cas limite irréalisable pour lequel on aurait en toute rigueur $h = h'$, c'est-à-dire uniformité parfaite du régime, on pourra dire que les parties du cours d'eau où $\frac{1}{h}$ tend vers $\frac{1}{h'}$, à mesure qu'on marche vers l'aval, sont soumises à la fois à l'action du lit et à celle de l'extrémité amont, tandis que les parties où

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\frac{1}{h}$ s'éloigne, au contraire, de $\frac{1}{h'}$ sont sous la double dépendance du lit et de l'extrémité aval. En d'autres termes, dans un cours d'eau d'un débit donné et dont le lit, sensiblement prismatique, a une structure peu variable d'une section à l'autre, toute partie le long de laquelle le mouvement est graduellement varié dépend des circonstances produites à l'extrémité amont ou de celles qui le sont à l'extrémité aval, suivant que l'inverse $\frac{1}{h}$ de la profondeur fluide s'approche ou s'éloigne, en suivant le fil de l'eau, de la valeur particulière $\frac{1}{h'}$, qui correspond à l'uniformité du régime[1]. »

Supposons donc que l'on admette ces postulats suggérés par l'observation et qu'on connaisse les conditions d'alimentation et d'évacuation du canal. Faisons en outre abstraction de deux portions assez courtes, vers amont et vers aval, où le régime s'établit et où il se détruit, et où le mouvement n'est peut-être pas graduellement varié. Nous allons montrer qu'on peut alors déterminer l'état hydraulique du canal sur toute son étendue.

Dans cette étude, nous aurons à distinguer plusieurs cas selon l'ordre de grandeur relative de la hauteur h' et de la hauteur h'' qui annule la parenthèse

$$\left(1 - \frac{\alpha'}{g}\frac{Q^2}{l^2}\frac{1}{h^3}\right)$$

[1] J. Boussinesq, 2, p. 142-144.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

figurant au premier membre de l'équation (1) :

$$h'' = \sqrt[3]{\frac{\alpha'}{g}\frac{Q^2}{l^2}}.$$

Cette valeur de h s'est déjà présentée à nous au § 6 du Chapitre précédent : les hauteurs d'eau de part et d'autre d'un ressaut comprennent h''.

Soit i_0''' la pente du lit au point où la hauteur est h'' ; on distinguera deux cas selon le signe de la quantité

$$i_0''' - \frac{bQ^2}{l^2}\frac{1}{h''^3} \quad \text{ou} \quad i_0''' - \frac{bg}{\alpha'}.$$

2. **Cas d'un canal de faible pente** $\left(i_0 < \frac{bg}{\alpha'}\right)$. — Si tout le long du canal la pente est inférieure à $\frac{bg}{\alpha'}$, nous aurons en particulier : $i_0''' - \frac{bQ^2}{l^2}\frac{1}{h''^3} < 0$.

Posons :

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= 1 - \frac{\alpha'}{g}\frac{Q^2}{l^2}\frac{1}{h^3}, \\ \Delta_1 &= i_0 - \frac{bQ^2}{l^2}\frac{1}{h^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Δ va de $-\infty$ à 0 quand h varie de 0 à h'' et de 0 à 1 quand h varie de h'' à $+\infty$.

Le binôme Δ a déjà été rencontré à propos du ressaut (Chap. I, § 6, en remplaçant σ_0 par hl et $\cos i_0$ par 1) ; comme nous l'avons dit, le régime est appelé *tranquille* quand Δ est positif, *torrentueux* quand Δ est négatif. Nous voyons donc que le régime sera tranquille ou torrentueux selon que h sera supérieur ou inférieur à h''.

Δ_1 varie aussi dans le même sens (i_0 variant entre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de très petites limites) quand h va de o à $+\infty$, s'annulant pour $h = h'$ si i_0 est positif.

Dans le cas actuel, Δ_1 est négatif pour $h = h''$; c'est donc que h'' *est inférieur à* h'.

La forme du profil longitudinal de la surface libre est définie par l'équation différentielle

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\Delta_1}{\Delta}. \qquad (3)$$

a) Si $h < h''$, $\frac{\Delta_1}{\Delta}$ est positif; h croît et s'approche, quand on va vers l'aval, de la hauteur h' de régime uniforme. Donc (§ 1, 4°), la hauteur h ne prendra des valeurs inférieures à h'' que dans une portion du canal située sous la dépendance des circonstances produites à l'extrémité amont.

La longueur d'une telle portion est limitée des deux côtés ; en effet, si même la première section amont était nulle, l'équation (3) donnant, pour $h = o$,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{bg}{\alpha'},$$

l'inclinaison de la surface libre sur le fond y serait positive; à partir d'elle, la profondeur deviendrait donc très vite finie, et elle atteindrait sur un chemin fini sa valeur limite, un peu moindre que h'', au delà de laquelle le mouvement ne saurait rester graduellement varié (car, pour $h = h''$, $\frac{dh}{ds}$ serait infini; le profil aurait sa tangente perpendiculaire à la direction du lit, ce qui est incompatible avec l'hypothèse du parallélisme approché des filets fluides).

Ainsi l'écoulement ne peut être torrentueux, quand

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la pente du lit est faible, que dans une portion du cours d'eau sous la dépendance de l'amont et dont l'étendue est limitée. Le remous de gonflement produit

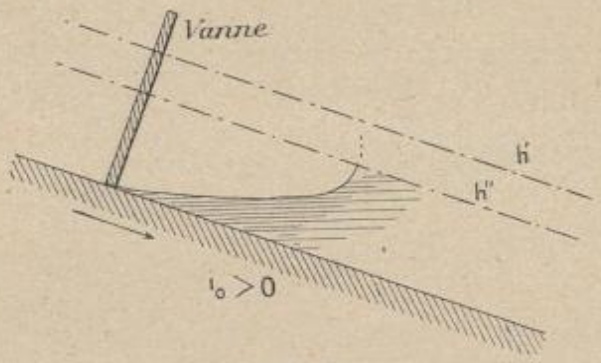


Fig. 9.

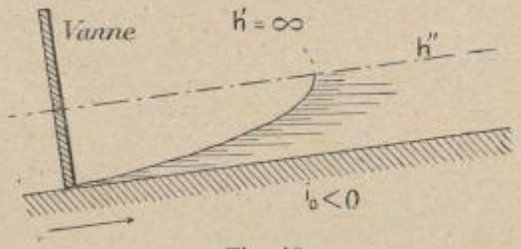


Fig. 10.

suppose l'existence d'une vanne supérieure étranglant le débit.

b) Si $h > h''$, il faut distinguer deux cas selon que h est inférieur ou supérieur à h', le second cas ne pouvant se produire que pour une valeur positive de i_0. Δ est positif, mais Δ_1 est positif ou négatif selon que h est supérieur ou inférieur à h'. Dans les deux cas, quand on suit le courant, h s'éloigne constamment de la valeur h', qui correspond au régime uniforme. Donc

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

(§ 1, 4°), la portion correspondante du cours d'eau est sous la dépendance des conditions produites à l'extrémité aval.

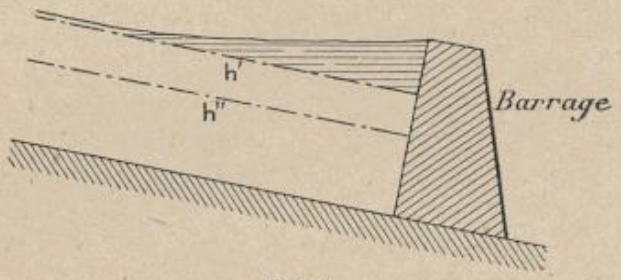


Fig. 11.

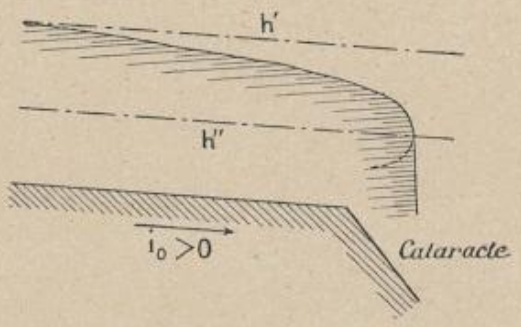


Fig. 12.

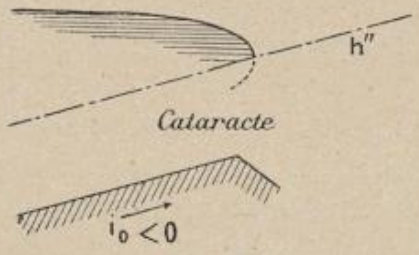


Fig. 13.

La longueur d'une telle portion peut se prolonger indéfiniment vers l'amont, le régime tendant à devenir

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

uniforme ; en effet, la dérivée $\frac{dh}{ds}$ est de l'ordre de $(h - h')$; elle tend vers zéro en même temps que $(h - h')$, mais sans pouvoir atteindre sa limite dans un canal prismatique.

Ainsi l'écoulement ne peut être tranquille, la pente étant faible, que dans une région sous la dépendance de l'aval ; l'étendue de cette région, illimitée vers l'amont, s'arrête vers l'aval, avant que la hauteur ait atteint la valeur h'' pour laquelle le mouvement ne saurait rester graduellement varié.

Envisageons maintenant un cours d'eau dans toute son étendue. Un profil limité (a) ne peut se continuer par un profil (b) que par la production d'un changement brusque de niveau, soit d'un *ressaut*, ainsi que l'expérience le montre. Il est dès lors naturel de se demander s'il peut se produire plusieurs ressauts le long d'un cours d'eau.

« Il est impossible que plusieurs parties distinctes, à régime graduellement varié et reliées chacune à la suivante par un ressaut, soient toutes placées sous la dépendance de l'extrémité amont, ou toutes sous la dépendance de l'extrémité aval ; car les conditions dans lesquelles se trouvent les diverses sections normales du canal, par rapport à l'extrémité considérée, changent de moins en moins vite à mesure qu'on s'éloigne de celle-ci, et tout régime placé sous sa dépendance ne peut que varier de plus en plus graduellement en allant vers l'aval, s'il s'agit de l'extrémité amont, ou en allant vers l'amont, s'il s'agit de l'extrémité aval. Donc le cours d'eau ne peut offrir tout au plus qu'un seul ressaut, reliant une partie sous la dépendance de l'extré-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mité amont, et où l'écoulement est torrentueux, à une autre, dépendant de l'extrémité aval, où l'écoulement est, au contraire, tranquille[1]. »

La détermination complète de l'état hydraulique d'un canal prismatique résulte immédiatement de là.

1° Les conditions d'alimentation font connaître la hauteur de la première section d'amont, et l'équation (3) permet de calculer le profil de la partie supérieure du courant, tant que cette équation reste applicable ; 2° les conditions de déversement fournissent la hauteur de la dernière section d'aval, et la même équation permet de construire le profil de la partie inférieure du courant qu'on remonte aussi loin qu'on veut ; 3° pour relier par un ressaut les deux courbes obtenues, on cherchera à fixer un point du lit du canal où les hauteurs fournies par chacun des profils satisfassent à la formule du ressaut. En fait, le ressaut se produit *sensiblement* au point où le profil supérieur rencontrerait orthogonalement la parallèle au fond du lit, de cote h''.

L'impossibilité de placer le ressaut indiquerait que le profil doit être formé d'une courbe unique.

3. Cas d'un canal de forte pente $\left(i_0 > \frac{bg}{\alpha'}\right)$.

— Si, tout le long du canal, i_0 est supérieur à $\frac{bg}{\alpha'}$, Δ_1 sera positif pour $h = h''$. Par suite, h'' *sera supérieur à* h'.

a) Si l'on a $0 < h < h'$, h croît pour se rapprocher asymptotiquement de h'. Le régime est réglé par l'amont (§ 1, 4°), où une vanne étrangle le débit d'ali-

[1] J. Boussinesq, 2, p. 147.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

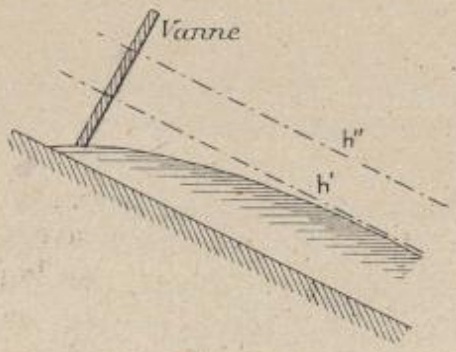


Fig. 14.

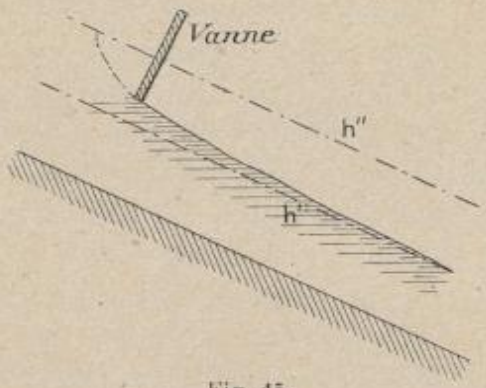


Fig. 15.

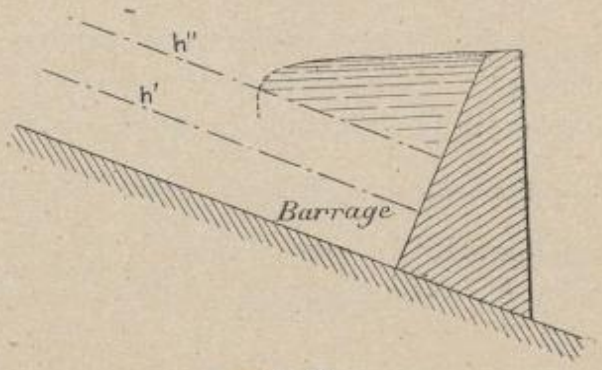


Fig. 16.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mentation : il se produit un remous de gonflement convexe.

b) Si l'on a $h' < h < h''$, h décroît pour se rapprocher encore asymptotiquement de h'. Le régime est réglé par l'amont comme dans le cas précédent : il se forme un remous d'abaissement concave.

c) Si l'on a enfin $h'' < h$, h croît de plus en plus, s'éloignant de h', quand on descend le courant.

Le régime est commandé par l'aval, où un barrage éloigné fait naître un remous de gonflement convexe.

A l'inverse de ce qui se passait pour un canal de faible pente, ce sont les parties conditionnées par l'amont qui peuvent être prolongées aussi loin qu'on veut vers l'aval et tendent vers un régime uniforme.

On reconnaîtrait, comme au paragraphe précédent, qu'il ne saurait exister plus d'un ressaut.

La détermination complète de l'état hydraulique du cours d'eau est alors immédiate, soit qu'on ait deux profils distincts avec ressaut, soit qu'on ait un profil unique.

Un travail de l'ingénieur belge *Boudin* fournit des exemples intéressants d'application de ces généralités[1].

4. **Cas d'un canal à pente tantôt faible, tantôt forte.** — Supposons enfin que, sur des fractions notables de la longueur du canal, i_0 soit alternativement inférieur et supérieur à $\frac{bg}{\alpha'}$, tout en variant très graduellement; h'' sera alternativement inférieur et supérieur à h'. « La longueur totale du cours d'eau

[1] G. Boudin; B. de Saint-Venant, 4.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sera alors généralement assez considérable pour qu'un régime sensiblement uniforme y existe à une certaine distance des deux extrémités ; il n'y aura donc de difficulté que pour les deux bouts amont et aval, qu'il suffira de considérer séparément, sur des longueurs finies, comme deux canaux distincts rentrant dans l'un des cas précédents. Il sera possible de déterminer séparément l'état de chacun d'eux, car le régime uniforme sera établi à une de leurs extrémités, tandis que l'autre extrémité se trouvera dans des conditions connues, dérivant du mode d'alimentation ou du mode d'évacuation du cours d'eau total [1]. »

5. **Classification des cours d'eau** [2]. — h'' et h' étant les valeurs de h pour lesquelles s'annulent Δ et Δ_1, c'est-à-dire telles que l'on ait :

$$i_0 - \frac{bQ^2}{h''^3} = 0, \qquad 1 - \frac{\alpha' Q^2}{g h''^3} = 0,$$

nous venons de distinguer deux catégories de canaux, selon que h' est supérieur ou inférieur à h'', et par suite :

1° Selon que l'on a $1 - \frac{\alpha' Q^2}{g h'^3} > 0$ ou < 0, ou encore $U'^2 <$ ou $> \frac{gh'}{\alpha'}$ [h' est la hauteur qui correspondrait au régime uniforme] ;

2° Ou bien selon que l'on a $i_0 - \frac{bQ^2}{h''^3} < 0$ ou > 0, ou encore $i_0 <$ ou $> \frac{gb}{\alpha'}$.

[1] J. Boussinesq, 2, p. 150.
[2] J. Boussinesq, 2, p. 151-154.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si l'on fait : $g = 9^{m},809$, $\alpha' = 1,1$, $b = 0,0004$, on trouve comme valeur moyenne de la pente critique séparant les deux catégories : $\frac{gb}{\alpha'} = 0,0036$.

En réalité, b varie un peu avec la nature des parois et avec la profondeur[1]. Le tableau suivant donne un aperçu des variations de la pente critique.

PROFONDEUR	$0^{m},50$	1^{m}	2^{m}	5^{m}	10^{m}
Parois unies.	0,0018	0,0016	0,0014	0,0013	0,0013
Parois en pierres rugueuses.	0,0057	0,0038	0,0029	0,0022	0,0019
Parois en terre	0,0094	0,0059	0,0041	0,0029	0,0023

Il est rare qu'un canal et il n'arrive jamais qu'un cours d'eau naturel ait une section transversale régulière, une pente constante et un lit sensiblement rectiligne. Toutefois la discussion précédente s'applique encore identiquement à tout canal découvert dont la forme du lit est telle, que la profondeur moyenne $\frac{\sigma}{l}$

[1] H. Bazin a résumé les résultats des expériences de Darcy et les siennes propres dans les formules suivantes :

$$b = \begin{cases} 0,00015 \left(1 + 0,03 \frac{\chi}{\sigma}\right) . \ . \ . & \text{Parois très unies,} \\ 0,00019 \left(1 + 0,07 \frac{\chi}{\sigma}\right) . \ . \ . & \text{Parois unies,} \\ 0,00024 \left(1 + 0,25 \frac{\chi}{\sigma}\right) . \ . \ . & \text{Parois peu unies,} \\ 0,00028 \left(1 + 1,25 \frac{\chi}{\sigma}\right) . \ . \ . & \text{Parois en terre.} \end{cases}$$

(H. Bazin, 3, 2e partie, ch. I.)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et le rayon moyen $\frac{\sigma}{\chi}$ croissent sur une même section avec l'étendue de cette section, et dont la pente du lit est peu variable avec σ. L'aire σ joue analytiquement le rôle de h, et le critère de distinction des deux sortes de cours d'eau devient :

$$i_0 \gtrless \frac{gb}{\alpha'}\frac{\chi'}{l'}, \quad \text{ou} \quad U'^2 \lessgtr \frac{g}{\alpha'}\frac{\sigma'}{l'},$$

σ', χ', l' correspondant à l'uniformité du régime.

Barré de Saint-Venant a appelé *rivières* les cours d'eau de la première catégorie et *torrents* ceux de la seconde.

D'après l'étude précédente, dans les rivières, un exhaussement ou un abaissement de la surface libre déterminé par une cause locale se propage indéfiniment vers l'amont en s'atténuant.

Dans les torrents, les mêmes causes de variation de niveau ne font sentir leur influence qu'à une petite distance à l'amont des obstacles ou dépressions. L'énergie cinétique du fluide semble ici lui permettre de franchir l'obstacle sans exiger la poussée d'un excédent accumulé à l'arrière de cet obstacle.

Exceptionnellement et sur une faible étendue, un torrent peut se trouver à l'état tranquille et une rivière à l'état torrentueux.

Dans le cas où l'expression $i_0 - \frac{gb}{\alpha'}\frac{\chi'}{l'}$ est très voisine de zéro, nous verrons qu'il convient de distinguer une troisième classe de cours d'eau qu'on appellera des *torrents de pente modérée*. Cette distinction exige pour s'imposer une étude de seconde approximation où l'on tiendra compte de la courbure des filets.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

6. **Influence de la mobilité du lit.** — Les cours d'eau naturels ont le plus souvent un lit de forme variable : le sol qui le constitue peut être délayé et emporté. Cet affouillement se produit, non pas tant par pesanteur ou poussée (à moins que la pente soit très forte ou qu'une crue subite envahisse un lit à sec), que par action de contact : aux points où on le constate en effet, « la vitesse des filets fluides contigus atteint une certaine valeur sensiblement constante pour une nature déterminée des matières qui composent le fond, variable, au contraire, avec leur grosseur, leur densité, leur forme, leur degré de tassement et leur mode d'insertion[1] ». La vitesse minimum que doit atteindre l'eau pour entamer le sol mesure en quelque sorte la résistance du lit à l'érosion.

La pente du fond et la grandeur de la section se régleront donc, au bout d'un certain temps, de telle sorte qu'en aucun point la vitesse effective de l'eau n'excède cette vitesse limite, vers laquelle tend la vitesse au fond au moment des grandes eaux qu'accompagnent les fortes érosions. La vitesse moyenne U dans une section et par suite aussi le produit $i_0 \frac{\sigma}{\chi}$ qui est sensiblement proportionnel au carré de U, aux points où existe à peu près le régime uniforme ($\Delta_1 = 0$), tendront vers des limites sensiblement constantes pour tous les cours d'eau coulant sur un lit de nature déterminée. Ainsi le produit de la pente du fond par la profondeur est, en moyenne, une quantité assez peu variable d'un bout à l'autre, au moment

[1] J. Boussinesq, 2, p. 155.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des hautes crues, pour tous les cours d'eau dont le lit, constitué à peu près de la même manière, est parvenu à une stabilité relative après s'être suffisamment creusé ou comblé[1].

D'après cela, les torrents, qui ont de fortes pentes, ne sauraient être que de petits cours d'eau, tandis que les rivières, qui ont des pentes faibles, peuvent être de grands cours d'eau.

En général, à mesure qu'on s'éloigne de la source, les matériaux qui forment le fond du lit sont de plus en plus fins, par suite de leur inégale facilité d'entraînement. La valeur constante de $i_0 \frac{\sigma}{\chi}$ va par suite en diminuant, et comme $\frac{\sigma}{\chi}$ va souvent en croissant, en particulier par suite de l'apport d'affluents, la pente diminue plus rapidement que la profondeur n'augmente.

Admettons même que le lit d'une rivière ait atteint la pente qui convient à sa stabilité. Le manque de résistance des rives viendra souvent troubler le régime établi. La forme du lit ne prendra de fixité que si les berges ne présentent que de petites pentes transversales et si elles sont suffisamment résistantes là où elles reçoivent le choc du courant. Notamment, aux tournants, la berge concave est exposée à des affouillements d'autant plus à craindre que la déviation des filets est plus brusque.

La loi générale que nous avons énoncée plus haut entraîne cette conséquence, sur laquelle *Dausse* a attiré

[1] J. Boussinesq, **2**, p. 157.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'attention : « le resserrement, sur une longueur notable, des cours d'eau qui ont eux-mêmes réglé leur lit, réduit leur pente en déterminant, à l'entrée et sur la majeure partie de l'étranglement, l'entraînement des matériaux du fond, qui se déposent ensuite à la sortie. » C'est ainsi que des endiguements ont pu modifier des rapides de la Garonne.

Le resserrement même très localisé, tel que celui produit par un *couple* (système de deux digues transversales jetées en regard l'une de l'autre sur les deux côtés d'une même section normale du lit), peut être aussi utilisé pour régulariser le lit en direction : lors des crues, l'énergie cinétique de l'eau, suivant la direction du courant et à proximité de la section réduite formée, approfondira vers le milieu le lit du cours d'eau et fixera la position de son thalweg.

Le développement de ces considérations appartient à l'hydraulique fluviale ; aussi nous bornerons-nous à ces aperçus, pour insister seulement sur l'approfondissement qui se produit à un tournant : les formules de M. Boussinesq permettent une évaluation qui a été confirmée par l'observation.

L'étude, faite au Tome I, des mouvements de rotation supposés bien continus permet de se figurer ainsi ce qui se passe dans un tournant. « La force centrifuge y amène sans cesse contre le bord extérieur ou concave les couches supérieures de la masse fluide, qui se trouvent animées des vitesses les plus grandes ; après avoir été recouvertes par celles qui les suivent, ces couches doivent, sous l'impulsion de celles-ci, s'enfoncer d'abord, commencer ensuite à se détendre ou à perdre en tourbillonnements une partie de leur force

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

vive, puis revenir, en glissant sur le fond et tout en continuant d'ailleurs à suivre le courant, vers le bord intérieur ou convexe, près duquel elles émergent lentement pour s'engager à nouveau dans un trajet pareil. On voit que la berge concave, si elle n'est pas très résistante, sera sans cesse affouillée de haut en bas, de manière à devenir tout à la fois profonde et presque verticale, tandis que la berge convexe, sur laquelle viennent s'épanouir ou se détendre les filets après avoir subi une contraction sur la première, recevra la plus grande partie des débris arrachés à celle-ci et ne pourra conserver qu'une pente douce[1]. »

Supposons qu'au bout d'un temps assez long un régime permanent se soit établi, pendant de hautes eaux. C'est que la berge convexe se sera atterrie presque en tous ses points jusqu'à ne laisser aux sections vives que la largeur a nécessaire pour que la vitesse moyenne U atteigne la valeur limite correspondant à l'érosion du lit.

L'équation du mouvement se réduit alors à (Ch. I, § 12, *in fine*) :

$$I = \frac{U^2}{h}\left(b + \tau_2\sqrt{\frac{a}{\mathfrak{R}}}\right).$$

Soit h_0 la profondeur moyenne qui conserverait à la pente superficielle I sa valeur si l'on transformait en un plan le cylindre vertical passant par le thalweg. Nous aurons :

$$I = \frac{bU^2}{h_0}.$$

Durant les grandes crues, la pente superficielle I est

[1] J. Boussinesq, **2**, p. 612.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

presque constante sur un long parcours ; h_0 est par suite la profondeur sensiblement constante mesurée dans les parties droites du cours d'eau.

Comme le coefficient $\frac{\tau_2}{b}$ vaut environ $\frac{3}{4}$, l'élimination de I entre les relations précédentes donne pour l'accroissement de profondeur dû à la courbure :

$$h - h_0 = \frac{3}{4} h_0 \sqrt{\frac{a}{\mathcal{R}}}. \qquad (\alpha)$$

Si le rayon de courbure $\mathcal{R}$ varie, la largeur a de la section vive variera aussi, mais bien moins rapidement, car la constance du débit ahU et par suite de l'aire ah exige que a varie en raison inverse de h dont une petite partie seule varie avec $\mathcal{R}$. En première approximation, on pourra donc regarder a et $\mathcal{R}$ comme des éléments indépendants. L'approfondissement dû à la courbure est alors proportionnel à la profondeur constatée, pour une même pente superficielle, durant les grandes crues, aux endroits où le thalweg est rectiligne ; à la largeur de la section vive et à la courbure effective du thalweg.

Comparons à l'observation la loi obtenue. L'ingénieur des Ponts et Chaussées *Fargue* a mesuré en eaux basses la plus grande profondeur de la Garonne dans un grand nombre de sections, à des endroits où le fleuve est endigué et présente une largeur variant de 180 à 200 mètres, soit en moyenne $a = 190$ mètres. Il a aussi évalué sur une bonne carte les rayons de courbure aux mêmes points.

« Admettons que la formule (α) dans laquelle h et h_0 ont désigné jusqu'ici les profondeurs moyennes des sections vives aux époques de grande crue, s'applique

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aussi approximativement aux profondeurs mesurées sur le thalweg, ou que les rapports $(h - h_0) : h_0$ aient à peu près les mêmes valeurs quand h et h_0 désignent les profondeurs moyennes dont il vient d'être parlé que lorsque ce sont les profondeurs sur le thalweg[1]. » Prenons alors $a = 190$ mètres et $h_0 = 8^m,75$, chiffre qui, d'après les données de Fargue, doit être voisin de la vérité. Il vient :

$$h - h_0 = \frac{3}{4} \cdot 8{,}75 \sqrt{\frac{190}{\mathcal{R}}} = 2{,}85 \sqrt{\frac{1000}{\mathcal{R}}}.$$

$\frac{1000}{\mathcal{R}}$ est la courbure kilométrique du tournant.

On déduira de là la profondeur totale H des basses eaux le long du thalweg, en ajoutant à l'approfondissement $h - h_0$ la profondeur observée, au moment des mesures, sur les *maigres* produits vers les points où la courbure était nulle, profondeur de $1^m,50$ environ. La formule

$$H = 1{,}5 + 2{,}85 \sqrt{\frac{1000}{\mathcal{R}}},$$

où l'on remplacera la courbure kilométrique successivement par 0,5; 1; 1,5; ...; 8,0, donne des valeurs de H qui peuvent être reportées sur les planches où Fargue a consigné ses observations[2]. La courbe $\left(H, \frac{1000}{\mathcal{R}}\right)$ obtenue est située entre les courbes expérimentales qui concernent : 1° la profondeur maxima des *mouilles* considérée comme fonction des courbures maxima correspondantes; 2° la profondeur moyenne

[1] J. Boussinesq, **2**, p. 614.
[2] Fargue, **1**, pl. 156; fig. 3 et 5.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de tout un bief mesurée le long du thalweg considérée comme fonction de la moyenne des courbures sur la longueur du bief.

Fargue a indiqué aussi comment on pouvait obtenir un approfondissement suffisant de certains maigres de trop grande largeur en réduisant cette largeur par des digues longitudinales. Pour la *passe de Mondiet*, la largeur était de 204 mètres, tandis que dans les deux coudes d'amont et d'aval, elle n'atteignait que 170 et 176 mètres. En réduisant la largeur de la passe à 165 mètres, Fargue a obtenu un accroissement permanent de profondeur de $1^{m},30$ [1].

Or, soit $a' = 165$ mètres la nouvelle largeur; vu la difficulté d'estimer la largeur initiale de la section vive (la rivière faisant alors ventre), nous lui attribuerons pour valeur a la moyenne entre la largeur effective, 204 mètres, et la largeur moyenne vers les coudes, 175 mètres; soit donc $a = 185^{m},5$; soit enfin h la nouvelle profondeur en hautes eaux, h_0 la profondeur primitive qui était de $8^{m},75$.

Prenons comme précédemment $h - h_0$ comme expression approchée de l'approfondissement permanent. La constance du débit donnant la relation $ah_0 = a'h$, il vient :

$$h - h_0 = \frac{a - a'}{a'} \cdot h_0 = \left(\frac{188,5}{165} - 1\right) \cdot 8,75 = 1^{m},25.$$

Ce résultat est bien voisin de celui, $1^{m},30$, donné par l'observation [2].

[1] Fargue, 2, p. 308 et 309; $2^{m},20 - 0^{m},90 = 1^{m},30$.
[2] J. Boussinesq, 11, p. 430-431.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE III

MOUVEMENT PERMANENT VARIÉ DANS UN CANAL A SECTION RECTANGULAIRE, EU ÉGARD A LA COURBURE DES FILETS FLUIDES

1. Établissement de l'équation générale[1]. — Nous avons supposé implicitement, dans l'étude faite au Chapitre II, que l'inclinaison mutuelle des divers filets fluides était petite, et aussi que cette inclinaison ne variait notablement que sur de grandes longueurs, ou, ce qui revient au même, que la courbure des filets était insensible. Si la première condition est réalisée presque partout dans les cours d'eau, il n'en va pas de même de la seconde, quand le lit présente une courbure longitudinale accentuée, ou quand la pente, voisine de $\frac{gb}{\alpha'}$, provoque le passage du régime tranquille au régime torrentueux ou inversement. Nous allons voir comment il convient de transformer l'équation fondamentale pour tenir compte de la courbure des filets.

[1] J. Boussinesq, **2**, § 18, p. 178-189; § 40, p. 521-529.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous n'envisagerons que le cas d'un canal dont les sections sont rectangulaires et ont leur base horizontale constante très large par rapport à la profondeur d'eau h, et nous admettrons que le profil longitudinal du fond a une pente assez lentement variable d'un point à l'autre.

Nous pouvons faire alors dans nos calculs $v = 0$. Mais la courbure des filets rend l'accélération transversale w' comparable à la petite accélération longitudinale u', et l'équation fondamentale d'où nous sommes partis (1er Volume, 3e partie, Chap. I, p. 270) doit être complétée. La pression moyenne p ne peut plus être considérée comme variant suivant la loi hydrostatique dans une même section ; on a :

$$p = p_0 - \rho g z \sin i - \rho \int_{z_0}^{z} w' dz.$$

Le second membre $\frac{u'}{g}$ de l'équation (2) [*loc. cit.*, p. 271] doit donc être accrue de

$$\lambda = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z} w' dz,$$

z_0 étant le z de la trace de la surface libre sur le plan de la section d'abscisse x considérée.

En posant $\frac{z - z_0}{h} = \zeta$, il est loisible de dériver sous le signe de sommation et d'écrire λ sous la forme

$$\lambda = -\frac{1}{g} \int_{0}^{\zeta} h \frac{\partial w'}{\partial x} d\zeta,$$

car les dérivées en x de la limite inférieure, ou de h,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ne donnent, une fois multipliées par la très petite fonction w', qu'un produit négligeable.

Dans la suite des transformations de ladite équation (2), et notamment dans l'équation (1) du Chapitre II [§ 1, p. 295], il y aura donc lieu d'augmenter $\frac{u'}{g}$ de la quantité λ. Finalement, l'équation (11) [p. 300]

$$I = bU^2 \frac{\chi}{\sigma} + \frac{1}{g}\left[\frac{1}{U}\mathfrak{M}(u^2)' - \mathfrak{M}u'\right]$$

aura son second membre accrû de

$$\frac{1}{U}\mathfrak{M}2u\lambda - \mathfrak{M}\lambda,$$

soit de

$$M = -\frac{1}{g}\mathfrak{M}\left\{[2(\varphi+\varpi)-1]\int_0^\zeta h\frac{\partial w'}{\partial x}\,d\zeta\right\},$$

en posant, suivant nos notations, $u = U(\varphi+\varpi)$, et en marquant par le symbole $\mathfrak{M}$ une moyenne prise à travers la section considérée.

La suite de ces transformations repose sur le seul fait qu'on admet la quasi-égalité des vitesses des filets fluides et la petitesse commune des dérivées de U et de σ. Si donc nous parvenons à estimer l'expression M, en l'adjoignant au second membre de l'équation générale (15) [1er Volume, 3e partie, Chap. II, § 3, p. 302], nous rendrons cette équation applicable au cas qui nous occupe.

Nous allons calculer une valeur de première approximation de ce terme correctif M, en nous plaçant dans le cas de parois assez polies : « le coefficient de frottement extérieur B_0 sera supposé assez faible pour réduire au premier ordre de petitesse la différence $(\varphi - 1)$, et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aussi, d'après l'équation (19) [1er Volume, p. 331], les inégalités relatives de vitesse des filets fluides à l'état de régime varié, où elles sont exprimées par $(\varphi+\varpi-1)$. Alors, d'une part, $(\varphi+\varpi)^2$ et $(\varphi+\varpi)^3$ sont très sensiblement $1+2(\varphi+\varpi-1)$ et $1+3(\varphi+\varpi-1)$. Leurs valeurs moyennes ne se distinguent donc plus de 1 ; ce qui réduit le second membre de l'équation (15) [p. 302] à ses trois premiers termes, où même les coefficients $2\alpha-1-\eta$ et $1+2\eta$ deviennent l'unité. » L'équation cherchée sera donc :

$$I=\frac{bU^2}{h}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U^2}{2g}\right)+\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t}+M, \quad (1)$$

où M aura pour expression :

$$M=-\frac{1}{g}\mathfrak{M}\int_0^{\zeta} h\frac{\partial w'}{\partial x}\,d\zeta.$$

Nous sommes ainsi amenés au calcul de w', et préalablement à celui de la vitesse transversale w. Il nous suffit de nous reporter à l'expression donnée dans le 1er Volume, p. 322, formules (17), en notant : 1° que la quantité c dans le cas d'une section rectangulaire large n'est autre que h, unique paramètre de grandeur de la section ; 2° que le dernier terme est, comme P, de l'ordre de grandeur de $\sqrt{B_0}\frac{\partial h}{\partial t}$, d'après la formule (11), p. 320, et par suite est négligeable. Il vient ainsi, puisqu'au degré d'approximation admis, φ est remplaçable par l'unité :

$$w=\frac{\partial z_0}{\partial t}+U\frac{\partial z_0}{\partial x}+\zeta\left(\frac{\partial h}{\partial t}+U\frac{\partial h}{\partial x}\right).$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cette expression peut s'écrire symboliquement :

$$w = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(z_0 + \zeta h\right),$$

ζ figurant comme une quantité indépendante de x et de t.

Nous déduirons de là w' par la formule

$$w' = \frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x},$$

(le terme en $w\dfrac{\partial w}{\partial x}$ étant d'un ordre supérieur de petitesse) ; il vient :

$$w' = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(z_0 + \zeta h\right),$$

et nous obtenons enfin, U étant regardé comme un facteur constant dans le symbole opératoire :

$$\frac{\partial w'}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial z_0}{\partial x} + \zeta\frac{\partial h}{\partial x}\right).$$

Il en résulte en premier lieu que :

$$\int_0^{\zeta} h\frac{\partial w'}{\partial x}\,d\zeta = h\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\zeta + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\zeta^2}{2}\right),$$

et enfin que :

$$\mathfrak{M}\int_0^{h} h\frac{\partial w'}{\partial x}\,d\zeta = h\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial z_0}{\partial x} + \frac{1}{6}\frac{\partial h}{\partial x}\right).$$

Soit i la pente du profil longitudinal du fond ; comme on a : $i = \dfrac{\partial(z_0 + h)}{\partial x}$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

il vient :

$$M = \frac{h}{2g}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{2}{3}\frac{\partial h}{\partial x} - i\right).$$

Si nous observons que i dépend de x et non de t, nous aurons en définitive :

$$M = \frac{U^2 h}{g}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{2}{U}\frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 h}{\partial t^3}\right) \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}\end{array}\right\}. \quad (2)$$

Telle est la quantité qu'il convient de substituer dans l'équation (1) pour obtenir l'équation demandée.

2. **Cas du mouvement permanent**[1]. — Lorsque le mouvement est permanent, h ne dépend pas du temps et l'expression M se réduit à

$$M = \frac{U^2 h}{g}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{3}\frac{dh}{dx} - \frac{1}{2}i\right).$$

Or l'équation de continuité réduite à

$$\frac{d(hU)}{dx} = 0$$

donne : $\frac{dh}{dx} = -\frac{h}{U}\frac{dU}{dx} = -\frac{h}{U^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2}\right)$,

et, eu égard au degré d'approximation admis, nous pouvons remplacer $\frac{d^3 h}{dx^3}$ par $-\frac{h}{U^2}\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{U^2}{2}\right)$.

D'autre part, on a pour la pente de surface I :

$$I = \frac{dz_0}{dx} = i - \frac{dh}{dx}.$$

[1] J. Boussinesq, 2, § 19, p. 189-194.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'équation (1) du mouvement devient alors :

$$i+\frac{h^2}{2}\frac{U^2}{gh}\frac{d^2i}{dx^2}=\left\{\begin{array}{c} b\dfrac{U^2}{h}+\dfrac{dh}{dx} \\ +\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{U^2}{2g}\right)-\dfrac{1}{3}h^2\dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{U^2}{2g}\right)\end{array}\right\}. \quad (3)$$

Si nous préférons y faire figurer la pente superficielle I, il vient de suite :

$$I+\frac{h^2}{2}\frac{U^2}{gh}\frac{d^2I}{dx^2}=\left\{\begin{array}{c} b\dfrac{U^2}{h}+\dfrac{dh}{dx} \\ +\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{U^2}{2g}\right)+\dfrac{h^2}{6}\dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{U^2}{2g}\right)\end{array}\right\}. \quad (4)$$

La première équation ne contiendra pas d'autre inconnue que la profondeur h et ses dérivées première et troisième par rapport à x, si on élimine U à l'aide de la relation $\mathfrak{Q}=Uh$, où figure le débit constant $\mathfrak{Q}$ par unité de largeur du canal. Elle permettra de suivre les variations de la profondeur d'eau.

La seconde équation permet de suivre immédiatement les variations de la pente I prise par la surface d'un cours d'eau à courbure faible (le second terme en $\frac{d^2I}{dx^2}$ étant alors négligeable), connaissant la profondeur h, la vitesse moyenne U et les dérivées première et troisième de cette vitesse moyenne.

3. **Intégration de l'équation du mouvement permanent dans l'hypothèse d'un fond plan, lorsque le régime uniforme se détruit ou s'établit.** — Supposons que la pente i du fond soit constante.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'équation (3) après remplacement de U par $\frac{\mathfrak{Q}}{h}$ devient :

$$\frac{\mathfrak{Q}^2}{3g}\frac{d^3h}{dx^3}+\left(h-\frac{1}{g}\frac{\mathfrak{Q}^2}{h^2}\right)\frac{dh}{dx}=hi-b\frac{\mathfrak{Q}^2}{h^2}. \quad (5)$$

Le coefficient b, en moyenne égal à 0,0004, est fonction de la profondeur h; nous le désignerons par $b(h)$.

Soit H la profondeur constante de régime uniforme. Elle est caractérisée par la relation $H^3i=\mathfrak{Q}^2b(H)$, qui permettra d'éliminer $\mathfrak{Q}^2$ de l'équation (5) et donnera :

$$\frac{1}{3}\frac{d^3h}{dx^3}+\left(\frac{gb(H)}{H^3i}-\frac{1}{h^3}\right)h\frac{dh}{dx}=gh\left[\frac{b(H)}{H^3}-\frac{b(h)}{h^3}\right]. \quad (6)$$

Imaginons que le cours d'eau soit suffisamment long pour que le régime uniforme soit établi sur une partie notable de sa longueur, et proposons-nous d'étudier le mouvement dans la région supérieure où ce régime s'établit et dans la région inférieure où il se détruit. Dans ces conditions, h est voisin de H, et si nous posons : $h=H(1+\varpi)$,
ϖ est voisin de zéro. Nous remplacerons $b(h)$ par $b(H)+H\varpi b'(H)$, et nous développerons les coefficients de l'équation (6) suivant les puissances croissantes de ϖ. Nous obtiendrons :

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^3\varpi}{dx^3}-\frac{3}{H^2}\left\{\left(1-\frac{gb(H)}{i}\right)-\left(2+\frac{gb(H)}{i}\right)\varpi+\dots\right\}\frac{d\varpi}{dx}\\ -9\frac{gb(H)}{H^3}\left(1-\frac{Hb'(H)}{3b(H)}\right)\varpi+\dots=0.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si la pente n'est pas voisine de la valeur $gb(\mathrm{H})$, le coefficient de $\frac{d\varpi}{dx}$ peut être réduit à son premier terme, et si nous désignons par f la quantité $1 - \frac{\mathrm{H}b'(\mathrm{H})}{3b(\mathrm{H})}$, nous serons amenés à intégrer l'équation différentielle linéaire et homogène à coefficients constants :

$$\frac{d^3\varpi}{dx^3} - \frac{3}{\mathrm{H}^2}\left(1 - \frac{gb(\mathrm{H})}{i}\right)\frac{d\varpi}{dx} - 9\frac{fgb(\mathrm{H})}{\mathrm{H}^3}\varpi = 0. \quad (8)$$

Si la pente est voisine de $gb(\mathrm{H})$, la partie principale du terme en $\frac{d\varpi}{dx}$ est $\frac{9}{\mathrm{H}^2}\varpi\frac{d\varpi}{dx}$; l'équation n'est plus à coefficients constants, et sa discussion paraît très difficile; cependant ce qui suit serait encore applicable aux points où ϖ est négligeable vis-à-vis de $1 - \frac{gb(\mathrm{H})}{i}$, c'est-à-dire assez près de la région où le régime uniforme est supposé établi.

L'équation *caractéristique* associée à l'équation linéaire (8) est :

$$r^3 - \frac{3}{\mathrm{H}^2}\left(1 - \frac{gb(\mathrm{H})}{i}\right)r - 9\frac{fgb(\mathrm{H})}{\mathrm{H}^3} = 0. \quad (9)$$

Elle admet une seule racine positive r_1, et les deux autres racines sont fournies par l'équation :

$$r^2 + r_1 r + 9\frac{fgb(\mathrm{H})}{\mathrm{H}^3 r_1} = 0.$$

Ces deux dernières racines seront confondues quand on aura : $$r_1^3\mathrm{H}^3 = 36fgb(\mathrm{H}), \quad (10)$$

c'est-à-dire quand la pente du fond aura pour valeur i_0,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

défini par l'équation (9), où r est remplacé par l'expression r_1 tirée de (10), soit par :

$$\frac{gb(\mathrm{H})}{i_0} = 1 - \frac{1}{4}\left[36fgb(\mathrm{H})\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Selon que la racine positive r_1 de (9) est inférieure ou supérieure à la valeur définie par (10), les autres racines de (9) sont imaginaires ou réelles. Or la racine r_1 croît avec i; car si l'on considère r comme fonction de i, l'équation (9) donne par dérivation et par combinaison de l'équation dérivée avec (9) :

$$\left[2r^3 + 9\frac{fgb(\mathrm{H})}{\mathrm{H}^3}\right]\frac{dr}{di} = 3\frac{gb(\mathrm{H})r^2}{\mathrm{H}^2 i^2},$$

et il est évident que, pour r positif, $\frac{dr}{di}$ est positif. Donc, selon que la pente i est inférieure ou supérieure à i_0 [valeur pour laquelle r_1 satisfait à (10)], l'équation (9) admettra deux racines imaginaires conjuguées ou deux racines négatives.

1er cas : $i < i_0$. Les racines de l'équation (9) étant r_1 et $-\frac{r_1}{2} \pm \sqrt{-\nu^2}$, si l'on pose $\nu^2 = \frac{9fgb(\mathrm{H})}{\mathrm{H}^3 r_1} - \frac{r_1^2}{2}$, l'intégrale générale de l'équation (8) sera :

$$\varpi = \mathrm{A}e^{r_1 x} + \mathrm{B}e^{-\frac{1}{2}r_1 x}\sin\nu\,(x - \mathrm{C}),$$

A, B, C étant des constantes arbitraires.

Si l'on étudie la région qui précède celle où le régime uniforme est établi, ϖ doit s'annuler pour x très grand (moyennant un choix convenable de l'origine), et A doit être extrêmement petit. L'expression de ϖ se réduit dès lors à son second terme. La partie

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

variable $H\varpi$ de l'ordonnée de la surface libre varie donc « comme dans une courbe sinusoïdale dont les ordonnées conserveraient entre elles le même espacement, mais seraient réduites dans un rapport croissant en progression géométrique pour des accroissements en progression arithmétique des abscisses. La surface libre vraie serpente donc alternativement au-dessus et au-dessous de celle du régime uniforme, tout en s'en approchant de plus en plus. La distance constante de deux points consécutifs où elle coupe cette surface du régime uniforme est égale à $\frac{\pi}{\nu}$, et la rapidité avec laquelle le profil longitudinal de la surface libre s'approche de son asymptote, qui est le profil du régime uniforme, est mesurée par $\frac{r_1}{2}$. Comme r_1 est d'autant plus grand et ν d'autant plus petit que i est plus près d'égaler i_0, les rides ou ondulations de la surface, dans divers canaux de même profondeur H, seront d'autant plus longues et subiront de l'une à l'autre un aplatissement d'autant plus grand que la pente i du fond sera plus grande[1] ».

Si l'on étudie la région où le régime uniforme se détruit, ce sera, avec un choix convenable de l'origine, pour des abscisses négatives très grandes, que ϖ sera insensible; B devra être extrêmement petit, et ϖ se réduira à son premier terme. La surface libre ne présente alors aucune ondulation; elle s'élève ou s'abaisse progressivement, suivant le signe de A, avec une rapidité marquée par la grandeur de r_1.

[1] J. Boussinesq, 2, p. 200.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2e *cas* : $i > i_0$. — En appelant $-\nu'^2$ la quantité que nous désignions tout à l'heure par ν^2, et qui est maintenant négative, les racines de l'équation (9) seront r_1, $-\frac{r_1}{2}-\nu'$, $-\frac{r_1}{2}+\nu'$, et l'intégrale générale de l'équation (8) aura la forme :

$$\varpi = Ae^{r_1 x} + \left(Be^{-\nu' x} + Ce^{\nu' x}\right) e^{-\frac{1}{2} r_1 x}.$$

En reculant suffisamment l'origine vers l'amont, si l'on étudie le mouvement avant qu'il devienne uniforme, on pourra, comme plus haut, réduire ϖ à son second terme ($\varpi = 0$ pour $x = \infty$), et même faire en sorte que, dans la région considérée, le terme en $e^{-\nu' x}$ soit insensible devant le terme en $e^{\nu' x}$. Il reste alors simplement :

$$\varpi = Ce^{\left(-\frac{r_1}{2}+\nu'\right)x}.$$

La surface libre s'élève ou s'abaisse progressivement quand on remonte le courant à partir de la région où le régime est uniforme, mais sans présenter d'ondulations comme dans le cas précédent.

En avançant convenablement l'origine vers l'aval, si l'on étudie la destruction du mouvement uniforme, on réduira ϖ à son premier terme. La surface libre s'élève dès lors ou s'abaisse progressivement quand on descend le courant, sans production d'ondulations. Mais comme r_1 est plus grand que la valeur absolue de $\nu' - \frac{r_1}{2}$, le relèvement ou l'abaissement sera plus rapide que vers l'amont.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4. Nouvelle classification des cours d'eau. — Supposons que l'on ait $i < gb(\mathrm{H})$. Si l'on négligeait la courbure des filets fluides, le terme en $\frac{d^3\varpi}{dx^3}$ disparaîtrait de l'équation (8), l'équation caractéristique s'abaisserait au premier degré, donnant une racine positive qui serait :

$$r_1 = \frac{1}{\mathrm{H}} \frac{3fgb(\mathrm{H})}{\frac{gb(\mathrm{H})}{i} - 1}, \qquad (11)$$

tandis que l'équation complète donnerait :

$$r_1 = \frac{1}{\mathrm{H}} \frac{3fgb(\mathrm{H})}{\left(\frac{gb(\mathrm{H})}{i} - 1\right) + \frac{\mathrm{H}^2 r_1^2}{3}}.$$

Les deux autres racines croîtraient indéfiniment. La valeur (11) de r_1 est supérieure à la valeur réelle de cette racine. L'erreur relative commise par excès sera inférieure à une certaine fraction $\frac{1}{n}$ si l'on a :

$$\frac{\mathrm{H}^2 r_1^2}{3} < \frac{1}{n}\left[\frac{gb(\mathrm{H})}{i} - 1\right],$$

ou (*à fortiori*) :

$$f^2 g^2 b^2(\mathrm{H}) < \frac{1}{3n}\left[\frac{gb(\mathrm{H})}{i} - 1\right]^3,$$

ou enfin si l'on a :

$$i < \frac{gb(\mathrm{H})}{1 + \sqrt[3]{3n}\,[fgb(\mathrm{H})]^{\frac{2}{3}}}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ainsi, « calculer r_1 par la formule (11), c'est simplement ne pas tenir compte de la courbure des filets aux points où l'on a $\varpi = Ae^{r_1 x}$, c'est-à-dire à ceux où le régime uniforme se détruit, et cela n'est permis, à une erreur relative près de $\frac{1}{n}$, que dans les cours d'eau dont la pente de fond vérifie la dernière inégalité. Comme on ne peut guère admettre d'erreur relative supérieure à $\frac{1}{9}$, 9 est à peu près la valeur minimum qu'on puisse attribuer à n sans rendre inexacte la formule (11). » Si l'on remplace n par 9, il vient :

$$i < \frac{gb(\mathrm{H})}{1 + 3\left[fgb(\mathrm{H})\right]^{\frac{2}{3}}}.$$

Supposons maintenant que la pente de fond soit notablement supérieure à $gb(\mathrm{H})$. Négliger la courbure des filets, ou supprimer le terme du troisième ordre dans l'équation caractéristique, c'est réduire cette équation au premier degré, en rendant deux racines infinies ; l'unique racine conservée est négative et est la limite de $\nu' - \frac{r_1}{2}$. La substitution de cette valeur limite à $\nu' - \frac{r_1}{2}$ revient à négliger la courbure des filets aux points où l'on a $\varpi = Ce^{\left(-\frac{r_1}{2} + \nu'\right)x}$, c'est-à-dire aux points où le régime uniforme est sur le point de s'établir. On reconnaîtrait comme plus haut que l'erreur relative commise par défaut est inférieure à $\frac{1}{9}$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

(valeur au-dessus de laquelle l'erreur ne saurait être admissible) si l'on a :

$$i > \frac{gb(\mathrm{H})}{1 - 3\left[fgb(\mathrm{H})\right]^{\frac{2}{3}}}.$$

Ces considérations ont conduit M. Boussinesq[1] à la classification suivante des cours d'eau, où il prend pour base, parmi les circonstances que présentent l'établissement et la destruction du régime uniforme, celles sur lesquelles la courbure des filets fluides n'a pas d'influence sensible et qui pourraient se calculer au moyen de l'équation du mouvement permanent graduellement varié, et celles, au contraire, qui ne peuvent se calculer sans faire intervenir la considération de cette courbure.

« Les cours d'eau se divisent, à ce point de vue, en trois catégories : 1° cours d'eau ayant une pente de fond inférieure à la limite $\frac{gb(\mathrm{H})}{1 + 3\left[fgb(\mathrm{H})\right]^{\frac{2}{3}}}$ et chez lesquels la courbure des filets fluides est sensible aux points où le régime uniforme s'établit, négligeable à ceux où il se détruit ; 2° cours d'eau ayant une pente comprise environ entre :

$$\frac{gb(\mathrm{H})}{1 + 3\left[fgb(\mathrm{H})\right]^{\frac{2}{3}}} \quad \text{et} \quad \frac{gb(\mathrm{H})}{1 - 3\left[fgb(\mathrm{H})\right]^{\frac{2}{3}}}$$

et chez lesquels la courbure des filets fluides ne peut être négligée, ni aux points où le régime uniforme s'établit, ni à ceux où il se détruit ; 3° enfin cours d'eau ayant une pente supérieure à cette dernière limite

[1] J. Boussinesq, 2, p. 207.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et chez lesquels le régime uniforme s'établit graduellement, sans intervention sensible des courbures, pour se détruire au contraire rapidement. La première catégorie est la seule chez laquelle le liquide se relève très graduellement, c'est-à-dire sans ressaut, aux endroits où une cause retardatrice, telle qu'un barrage, détruit le régime uniforme : c'est la seule qui mérite la dénomination de *rivière*. La seconde et la troisième comprennent, par suite, tous les cours d'eau auxquels convient le nom de *torrent;* on peut les distinguer en appelant *torrents de pente modérée* ceux de la seconde catégorie, et *torrents rapides* ceux de la troisième. Ils diffèrent en ce que, dans ces derniers, le régime s'établit assez graduellement pour qu'on puisse faire abstraction de la courbure des filets, ce qui n'a pas lieu dans les seconds. »

5. **Forme des longs ressauts dans les torrents de pente modérée ; confrontation expérimentale**[1]. — Revenons à un cas que nous avons laissé de côté et où l'équation (8) cesse d'être valable, celui où i est très voisin de $gb(\mathrm{H})$ sans que ϖ soit négligeable devant la différence $i - bg(\mathrm{H})$. Reprenons l'équation (7) dont nous multiplierons tous les termes par $\frac{\mathfrak{Q}^2}{3g}$ ou $\frac{\mathrm{H}^3 i}{3gb(\mathrm{H})}$; elle donne, si l'on pose $\frac{i}{gb(\mathrm{H})} = 1 + \gamma$, et si l'on limite les termes approchés à leur partie principale :

$$\frac{\mathfrak{Q}^2}{3g}\frac{d^3\varpi}{dx^3} = \mathrm{H}(\gamma - 3\varpi)\frac{d\varpi}{dx} + 3fi\varpi. \qquad (12)$$

[1] J. Boussinesq, 2, p. 211 et suiv.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Sans songer à intégrer cette équation, on peut amorcer sa discussion en admettant que ϖ et γ soient de petites quantités ayant leurs produits et carrés négligeables devant leurs premières puissances, et que i soit négligeable vis-à-vis de la petite quantité γ supposée positive. Dans cette hypothèse, nous examinerons sommairement les circonstances offertes par la destruction du régime uniforme, lorsqu'il se forme un remous d'exhaussement, c'est-à-dire lorsque la quantité ϖ, nulle pour x négatif et très grand, devient positive.

L'équation (12) donne successivement :

$$\frac{\mathfrak{Q}^2}{3g}\frac{d^2\varpi}{dx^2} = \mathrm{H}\varpi\left(\gamma - \frac{3}{2}\varpi\right) + 3if\int_{-\infty}^{x}\varpi dx, \quad (13)$$

$$\frac{\mathfrak{Q}^2}{3g}\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)^2 = \mathrm{H}\varpi^2(\gamma - \varpi)$$

$$+ 6if\left[\varpi\int_{-\infty}^{x}\varpi dx - \int_{-\infty}^{x}\varpi^2 dx\right]. \quad (14)$$

Négligeons dans ces équations, à une première approximation, les termes en i, eu égard à la petitesse de i par rapport à γ. L'équation (12) montre que la courbure superficielle $\mathrm{H}\frac{d^2\varpi}{dx^2}$, nulle pour $x = -\infty$, devient positive et croît avec x [car, dans le second membre, le facteur $\frac{d\varpi}{dx}$ est positif, ϖ croissant d'abord], et qu'après avoir grandi jusqu'à ce que $\varpi = \frac{1}{3}\gamma$, elle décroît ensuite. L'équation (13) montre que cette courbure est positive jusqu'à ce que ϖ

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

atteigne $\frac{2}{3}\gamma$ et devient ensuite négative. L'équation (14) enfin montre que ϖ ne saurait excéder γ et que l'inclinaison $H\frac{d\varpi}{dx}$ de la surface sur le fond s'annule en changeant de signe quand ϖ, parti de zéro, est arrivé à sa limite supérieure γ. Le profil offre donc une première ondulation convexe dont la hauteur, au-dessus du prolongement de la surface libre du régime uniforme, vaut à peu près $H\gamma$.

Le profil prendrait au delà une forme symétrique de la précédente, sans la présence du terme en i qui, dans (13), accroît constamment $\frac{d^2\varpi}{dx^2}$ et tend à relever la tangente à ce profil. Aussi le second membre de l'équation (14) s'annule-t-il à nouveau, pour redevenir positif, avant que ϖ soit devenu égal à zéro. A partir de ce moment, ϖ se remet à croître, et par conséquent la première convexité du ressaut est suivie d'une autre convexité un peu plus élevée, et ainsi de suite, tant que la différence $\gamma - \varpi$, devenant voisine de zéro, soit trop faible pour laisser sans influence notable le dernier terme de l'équation (14) : notre procédé d'approximations successives cesse alors d'être applicable.

M. Boussinesq[1] est parvenu, par divers artifices d'approximation, à calculer les ordonnées des points hauts et des points bas des ondulations successives, qui s'élèvent par gradins jusqu'au niveau supérieur du ressaut.

[1] J. Boussinesq, 2, p. 214-216.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les expériences d'H. Bazin apportent à cette théorie une confirmation remarquable. Les nombreux ressauts observés par cet ingénieur sont les uns longs, les autres courts. Les premiers se présentent dans des torrents peu rapides et sont toujours sillonnés transversalement par un certain nombre d'ondulations, « comme si l'ascension de l'eau était hésitante et mal assurée. » Les seconds, produits exclusivement dans des torrents de forte pente, sont les seuls dans lesquels la surface libre s'élève sans osciller, « d'un seul bond et comme poussée par ce qui précède, » bien qu'il y ait encore, mais après le gonflement et non au bas, un certain nombre de rides.

6. **Indications relatives à l'influence de la courbure du fond sur la forme de la surface libre.** — Rétablissant la *courbure* du fond, M. Boussinesq s'est proposé d'étudier l'influence que peut avoir cette courbure, notamment quand elle est alternativement de sens opposés, sur la forme de la surface libre, en supposant les profondeurs moyennes peu différentes de celles du régime uniforme (pour un même débit et une même pente *générale* du fond).

L'intégration de l'équation obtenue est surtout facile quand le fond présente une série d'ondulations d'égale longueur (longueur supposée sensiblement plus grande que la profondeur d'eau), mais de hauteurs graduellement croissantes ou décroissantes. Si ces ondulations sont aussi de même hauteur, le résultat trouvé indique que la surface libre présentera elle-même des ondulations régulières, généralement *en avance* sur celles du fond, mais concordantes dans un cas remarquable.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les torrents de pente modérée sont, de tous les cours d'eau, ceux qui reflètent à leur surface, avec le plus d'amplification, les ondulations régulières du fond. Les torrents rapides viennent ensuite, et ceux qui ont le plus de pente en amoindrissent l'amplitude verticale.

Enfin M. Boussinesq a cherché les formes courbes du fond pour lesquelles la surface libre a, soit aux points où le régime uniforme existe, soit à ceux où il s'établit et à ceux où il se détruit, le même profil longitudinal que si le fond était plat.

Nous renverrons pour l'examen détaillé de toutes ces questions à l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*[1].

[1] J. Boussinesq, 2, p. 218-241.

Nous ne ferons aussi que signaler les recherches de M. Boussinesq sur le *mouvement quasi permanent des cours d'eau*. L'influence des frottements et de la pente du fond, qui est en général une cause de complication dans les mouvements non permanents, quand elle n'intervient que comme perturbatrice, peut au contraire produire une simplification considérable quand elle prend une valeur suffisante pour masquer, à une première approximation, la non-permanence du régime. Ce cas se présente notamment lors des crues et décrues des rivières. « La théorie est assez simple quand on se borne à supposer que les variations de régime étudiées se produisent assez lentement pour que la vitesse moyenne diffère peu, à chaque instant, de ce qu'elle serait dans un écoulement permanent où la pente de superficie et la profondeur recevraient leurs valeurs actuelles. Cette théorie avait été ébauchée par Breton, Graëff et Kleitz, qui avaient notamment évalué la vitesse avec laquelle se propage chaque valeur du débit. M. Boussinesq, passant à une deuxième approximation (beaucoup plus difficile), calcule la correction qu'il faut faire subir à l'expression de la hauteur d'eau corrélative à un débit donné, pour tenir compte de la non-permanence du régime. Il reconnaît, par exemple, que la profondeur vraie est moindre, ou la vitesse plus forte, pour un certain débit, quand celui-ci est en train de croître que lorsqu'il diminue : circonstances dont on peut conclure rigoureusement, en recourant à la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

condition de conservation des volumes fluides, que les crues s'aplatissent peu à peu, etc... Il explique aussi, très simplement, la forme bombée et la forme concave que présente souvent le profil d'un cours d'eau, suivant qu'il éprouve une crue ou une baisse rapides. » (J. Boussinesq, **18**, p. 22.) Ces questions sont du ressort de l'*Hydraulique fluviale*. [J. Boussinesq, **2**, § 39, p. 470-487.]

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE IV

PROPAGATION DES ONDES DANS LES TUYAUX ÉLASTIQUES

1. **Formule de Thomas Young.** — Le problème de la propagation des ondes le long d'une colonne liquide (compressible ou non) enfermée dans un tube à parois élastiques a été naturellement posé aux théoriciens par l'expérience ; il intéresse à la fois le physiologiste, le physicien et l'ingénieur.

Pour le physiologiste, les battements du pouls sont le résultat du passage, dans un vaisseau doué d'élasticité, d'ondes sanguines lancées par la systole ventriculaire. Distinguant dans la circulation du sang le mouvement de courant et le mouvement ondulatoire, *Thomas Young* (1808) et *E.-H. Weber* (1827) ont réduit la théorie du pouls à la solution de notre problème. — Le physicien a été conduit au même problème par la nécessité de rendre compte de la différence entre la vitesse du son observée dans une masse fluide quasi indéfinie et celle observée dans une colonne fluide remplissant un tube cylindrique. Cette divergence fut attribuée par Helmholtz à l'élasticité et au frottement de la paroi. Lorsque des expériences pré-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cises de Kundt et Lehmann, de Dvorak eurent fourni des données quantitatives suffisantes pour donner lieu à un contrôle d'explication, une théorie mettant en ligne l'élasticité de la paroi, la compressibilité du fluide, les dimensions du tube, fut édifiée par *D.-J. Korteweg* (1878) et rendit compte d'une grosse partie de l'écart observé. — L'hydraulicien enfin rencontre notre problème s'il veut étudier le phénomène bien connu sous le nom de *coup de bélier*, qui se produit dans les canalisations de distribution d'eau en causant parfois des accidents et en gênant souvent la régularisation des turbines précédées d'une longue conduite, et qui est provoqué par toute variation brusque de la vitesse d'écoulement et, par suite, de la pression. Tout récemment, la solution de ce problème a fourni à *M. L. Allievi* des règles pratiques concernant l'installation de telles canalisations.

La question a été abordée en 1775 par *Euler*, mais sans succès. Le premier résultat précis a été obtenu par *Young*[1] en 1808.

La propagation des ébranlements dans un fluide élastique, soit indéfini, soit enclos dans un tube rigide, était chose connue : l'idée d'Young fut d'en transporter la théorie au cas d'un fluide incompressible enclos dans une paroi élastique, en faisant jouer à l'élasticité du tube le rôle de la compressibilité du fluide. En particulier, dit Young, le raisonnement qu'on emploie pour déterminer la vitesse de propagation d'un ébranlement à travers un fluide élastique[2] est applicable au

[1] Th. Young, § 3, *Of the Propagation of an Impulse through an elastic Tube.*

[2] Cette vitesse a pour expression $\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\rho}}$, $\mathcal{E}$ étant le module

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cas d'un fluide incompressible contenu dans un tube élastique, en fixant la grandeur du module d'après la corrélation qui existe entre la variation de pression et la dilatation du tuyau.

Soient R le rayon du tube à l'état naturel, $R+r$ son rayon sous l'influence de la pression mesurée par une colonne de liquide de hauteur h. Supposons la nature de la paroi telle que sa tension varie proportionnellement à l'allongement unitaire de sa circonférence. Si E est le coefficient d'élasticité de la substance formant la paroi, le rayon, de valeur R à l'état naturel, prendra la valeur $R+r$ sous l'influence d'une tension élastique $E\frac{r}{R}$. La tension totale sur une section diamétrale d'une portion du tube (supposé de faible épaisseur a) de longueur égale à l'unité sera $E\frac{r}{R}2a$, et la pression unitaire correspondante sur les parois aura pour valeur $E\frac{r}{R}\frac{2a}{2(R+r)}$; elle serait produite par une colonne liquide de hauteur

$$h=\frac{Era}{\rho gR(R+r)}.$$

Si la proportionnalité était valable pour toute valeur de la dilatation, celle-ci serait infinie quand la colonne aurait pour hauteur

$$h_1=\frac{Ea}{\rho gR}.$$

d'élasticité du fluide et ρ sa densité. Elle a été obtenue par *Newton* [Philosophiæ naturalis principia mathematica, Prop. XLIX; Prob. XI; Cor. 2 : Datis medii densitate et vi elastica, invenire velocitatem pulsuum].

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Je dis[1] que *la vitesse de propagation d'un ébranlement est la moitié de la vitesse acquise par un grave tombant librement de la hauteur* h_1 :

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2gh_1} \quad \text{ou} \quad \omega = \sqrt{\frac{Ea}{2R\rho}}. \qquad (1)$$

En effet, dans la formule de Newton, le module $\mathcal{E}$ est le rapport d'une variation élémentaire de pression en un point du milieu à la variation unitaire de volume correspondante, en sorte que si, dans un tube rigide rempli d'un fluide élastique, un tronçon de longueur Δ se raccourcit de δ sous l'influence d'un accroissement de pression Π, on a : $\mathcal{E} = \Pi : \frac{\delta}{\Delta}$. Cela étant, considérons le cas d'un tuyau élastique rempli d'un fluide incompressible, en admettant, comme le fait implicitement Young, que les actions mutuelles des anneaux juxtaposés composant le tube soient négligeables. Si, sous l'influence d'une variation de pression Π, le rayon R et la longueur Δ d'un tronçon du fluide deviennent respectivement $R + r$ et $\Delta - \delta$, l'incompressibilité du fluide entraîne la relation

$$\left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 = 1,$$

ou, eu égard à la petitesse de δ et de r, $\frac{\delta}{\Delta} = 2\frac{r}{R}$.
Mais, nous l'avons vu, la variation de pression capable de produire une dilatation r du rayon R a pour valeur

[1] Cette démonstration est celle d'Young, sauf adoption du langage moderne et des notations qui seront utilisées par la suite.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\Pi = E\frac{a}{R}\frac{r}{R+r}$, ou, comme r est petit vis-à-vis de R :

$$\Pi = \frac{\partial}{\Delta}\cdot\frac{Ea}{2R} = \frac{\partial}{\Delta}\cdot\rho\cdot\frac{gh_1}{2}.$$

Pour qu'une même variation de pression Π produise un même rapprochement des bases de la tranche dans les deux cas, il faut et il suffit que le module $\mathcal{E}$ du fluide élastique soit tel que $\mathcal{E} = \rho\cdot\frac{gh_1}{2}$. Si $\mathcal{E}$ est ainsi choisi, le mouvement des tranches fluides sera le même dans les deux cas, et en particulier les vitesses de propagation des ébranlements coïncideront; leur valeur commune $\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\rho}}$ aura pour expression $\omega = \sqrt{\frac{gh_1}{2}}$.

Soit H la hauteur d'une colonne liquide capable de produire l'éclatement du tuyau; comme $h_1 > H$, on a :

$$\omega > \frac{1}{2}\sqrt{2gH}.$$

Pour une carotide de chien, la hauteur H (supplémentaire de la pression artérielle moyenne) ayant été évaluée de 185 pieds anglais, Young en conclut : $\omega > 54$ pieds, soit $16^m,40$ par seconde. Ce physicien ne se proposa pas de mesurer la vitesse de propagation des ondes, bien qu'il fût l'inventeur de la méthode d'inscription chronographique dont Marey et son école tirèrent parti plus tard pour cette détermination.

E.-H. Weber s'est le premier préoccupé de cette mesure, en opérant sur des intumescences analogues à l'onde solitaire des canaux, propagées le long d'une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

colonne fluide remplissant un tuyau en caoutchouc vulcanisé et produites par écrasement d'une extrémité de ce tuyau ; il a tiré un habile parti de procédés de mesure très rudimentaires. Son frère, W. Weber, esquissa une théorie qui devait faire suite à un mémoire expérimental daté de 1834 et qui ne fut publié qu'en 1866, après sa mort. En désignant par k le rapport, considéré comme constant, de la dilatation radiale du tuyau à l'accroissement de pression qui la produit, W. Weber trouve comme expression de la vitesse de propagation des ondes en question :

$$\omega = \sqrt{\frac{R}{2k\rho}} ;$$

la constante k était déterminée par Weber à l'aide d'une expérience auxiliaire. — Un tuyau de $16^{mm},5$ de rayon ayant subi une dilatation radiale de $2^{mm},75$ sous une surcharge de 3500 millimètres d'eau, l'application de la formule précédente donnait $\omega = 10033$ millimètres par seconde, tandis qu'une mesure directe avait conduit à $\omega = 11400$ millimètres.

En 1875, *J.-B. Marey* a appliqué la méthode d'inscription chronographique à l'étude de la propagation des mêmes intumescences ; il fut amené ainsi à formuler diverses lois *qualitatives*, son travail ne contenant aucune indication numérique. A cette occasion, *H. Résal* [1], dans une courte note, établit la formule d'Young par la méthode de W. Weber, qui toutes deux lui étaient inconnues. Nous indiquerons tout à l'heure la méthode en la généralisant.

[1] H. Résal, p. 698.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2. **Formule de D.-J. Korteweg.** — En 1878, *M. Korteweg*[1], ayant surtout en vue la propagation du son dans une colonne liquide, se proposa de mettre en compte à la fois l'élasticité de la paroi et la compressibilité du fluide.

Il eût été aisé d'y parvenir en restant dans les idées d'Young.

Soit E_1 le coefficient d'élasticité du fluide supposé compressible.

Dans le raisonnement fait plus haut, l'équation de conservation du volume d'un tronçon est remplacée par

$$\Pi = E_1 \left\{ \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - 1 \right\} = E_1 \left\{ \frac{2r}{R} - \frac{\delta}{\Delta} \right\}.$$

Or on a d'une part $\Pi = \frac{Ea}{R} \cdot \frac{r}{R}$, et l'on détermine d'autre part $\mathcal{E}$ par la condition $\mathcal{E}\frac{\delta}{\Delta} = \Pi$, de manière que le mouvement des tranches soit le même dans le tuyau donné que dans le tuyau associé. La vitesse de propagation dans le tuyau donné est alors :

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\rho}},$$

et elle vérifie la relation :

$$\frac{1}{E_1} = \frac{2R}{Ea} - \frac{1}{\rho\Omega^2},$$

ou :

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{1}{\omega^2} + \frac{\rho}{E_1}, \qquad (2)$$

ω étant fourni par la formule d'Young. C'est là même

[1] D.-J. Korteweg, **1**, 3e partie, p. 101-111.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le résultat de D.-J. Korteweg, que L. Alliévi a retrouvé en 1901. Comme $\sqrt{\frac{E_1}{\rho}}$ est la vitesse du son dans le fluide supposé indéfini, on voit que l'inverse du carré de la vitesse Ω de propagation égale l'inverse du carré de la vitesse du son dans le liquide, plus l'inverse du carré de la vitesse que l'on aurait pour un liquide incompressible et qui serait donnée par la formule d'Young.

La formule précédente suppose implicitement que la paroi du tuyau n'a qu'une épaisseur négligeable par rapport à son diamètre. D.-J. Korteweg[1] a montré que, s'il n'en est pas ainsi, la relation (2) subsiste, à la condition de remplacer le module d'élasticité E par un autre coefficient E′ ayant la valeur suivante, où λ et μ sont les constantes de Lamé relatives à la matière dont le tube est formé et qu'on regarde comme isotrope :

$$E' = \frac{1 + \frac{a}{2R}}{\frac{(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)} + \frac{1}{\mu}\frac{a}{2R}\left(1+\frac{a}{2R}\right)}.$$

Cette expression se transforme aisément si l'on préfère introduire le coefficient E et le coefficient η de contraction latérale, donnés en fonction de λ et de μ par les formules :

$$E = \mu \cdot \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}, \qquad \eta = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

[1] D.-J. Korteweg, 1, p. 90.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

M. Boussinesq a repris, comme nous le verrons, l'extension de Korteweg, dans l'hypothèse plus vraisemblable où la substance du tube présente seulement un axe longitudinal d'isotropie, les tuyaux ayant d'ordinaire leur matière constituée autrement suivant leur longueur que dans les sens transversaux.

Les recherches de Weber, de Résal et de Korteweg admettent enfin essentiellement le parallélisme des tranches du fluide, soit l'égalité des vitesses prises suivant l'axe par tout un tronçon élémentaire de la colonne, les frottements qui tendraient à inégaliser les vitesses étant négligées. C'est encore M. Boussinesq qui a tenté de s'affranchir de cette hypothèse.

Esquissons sommairement la méthode suivie dans les travaux antérieurs à 1905. — Comptons les valeurs des pressions à partir de celle de la pression extérieure supposée constante. Soient p, σ, U la pression, l'aire de la section et la vitesse correspondant à une tranche du tuyau définie par son abscisse x et à un instant t. Eu égard à l'hypothèse des tranches, la première équation de l'hydrodynamique donne la relation :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (3)$$

si on néglige la pesanteur, ce qui suppose le tuyau sensiblement horizontal.

L'équation de continuité s'écrit d'ailleurs :

$$\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sigma U)}{\partial x} = 0, \qquad (4)$$

en notant que la densité ρ n'est plus constante; si E_1 est le coefficient d'élasticité du liquide, inverse de sa

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

compressibilité, et ρ_0 la densité correspondant à la pression extérieure, on a :

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{E_1}\right). \qquad (5)$$

Quant à σ, de valeur initiale $\sigma_0 = \pi R^2$, il vaut :

$$\sigma = \sigma_0 + 2\pi R r,$$

en appelant r l'accroissement du rayon intérieur sous l'influence de la surpression p.

Nous emprunterons à la théorie de l'élasticité des solides une relation entre p et r. Les formules de Lamé relatives à l'équilibre d'élasticité d'un cylindre circulaire creux de longueur indéfinie donnent, à l'état statique, la relation :

$$p = \frac{E' a r}{R^2},$$

E' ayant la valeur que nous avons donnée tout à l'heure.

On admet que cette relation reste la même à l'état dynamique qu'à l'état statique, ce qui revient à négliger les inerties du tube, et qu'un anneau infiniment étroit se dilate radialement comme un cylindre de longueur indéfinie. Il vient alors :

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{2Rp}{E'a}\right). \qquad (6)$$

Remplaçons ρ et σ par les valeurs (5) et (6) dans l'équation de continuité, et nous aurons, en négligeant les termes du second ordre par rapport à p, à U et à leurs dérivées. :

$$\left(\frac{1}{E_1} + \frac{2R}{E'a}\right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \qquad (7)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'élimination de p ou de U entre les équations (3) et (7) donne l'une ou l'autre des équations :

$$\frac{\partial^2(U,p)}{\partial t^2} = \Omega^2 \frac{\partial^2(U,p)}{\partial x^2}, \qquad (8)$$

en posant : $$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{2R\rho}{E'a} + \frac{\rho}{E_1}.$$

Les équations (8) et (3) donnant :

$$U = f(x - \Omega t) + f_1(x + \Omega t),$$
$$p = \rho\Omega\left[f(x - \Omega t) - f_1(x + \Omega t)\right],$$

la conclusion est immédiate.

Laissons là ces considérations historiques et reprenons en détail l'analyse du phénomène.

3. **Résistance élastique opposée par un tuyau au gonflement de la colonne liquide qui le remplit**[1]. — Pour pouvoir aborder assez aisément le problème de la propagation des ondes à travers une colonne fluide remplissant un tuyau élastique, on admet que les anneaux juxtaposés dont se compose le tuyau agissent chacun pour son compte sur le fluide intérieur sans s'influencer mutuellement. Si l'on voulait tenir compte des actions mutuelles des anneaux, et, par suite, des actions qu'exerceraient à distance les uns sur les autres, par leur intermédiaire, les tronçons sous-jacents de la colonne liquide, les équations du mouvement de cette colonne seraient à peu près inextricables. Cette hypothèse fondamentale ne serait complètement valable que si la paroi du tube

[1] J. Boussinesq, 12, 2°.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

était formée de fibres annulaires très résistantes réunies par des fibres longitudinales extrêmement extensibles et compressibles : elle conviendrait à « un tuyau se composant, par exemple, d'anneaux séparément homogènes, sans largeur ni épaisseur sensibles, juxtaposés et superposés en nombre immense, ou, encore, des enroulements d'un long fil élastique à spires infiniment rapprochées, analogues aux trachées des végétaux, anneaux ou enroulements que relierait entre eux une sorte de parenchyme lâche, ou une toile affectée d'une double infinité de petits plis longitudinaux et transversaux ». Il y a lieu dès lors d'attribuer à la paroi une structure *hétérotrope*, différente dans le sens longitudinal de ce qu'elle est dans les sens transversaux, de manière à pouvoir, *à la limite*, supposer cette paroi infiniment compressible ou extensible suivant sa longueur, ou encore composée d'anneaux contigus sans actions mutuelles sensibles.

Soit donc un tube élastique, homogène, mais *isotrope seulement autour de ses fibres longitudinales;* ses rayons intérieur et extérieur, R et $R_1 = R + a$, à l'état naturel, sont quelconques. Sa surface extérieure étant libre de toute pression, la surface intérieure est soumise à une pression uniforme p. Nous nous proposons de calculer la variation correspondante du rayon intérieur.

L'axe du tuyau est pris pour axe ox. En exprimant que la contexture est symétrique autour de parallèles à cet axe ox (isotropie latérale), on obtient[1] comme

[1] Voir par exemple : CLEBSCH, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, traduction de B. de Saint-Venant, p. 77; — ou encore A. BOULANGER, 3, p. 67, *in fine*.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

expressions des tensions en un point M intérieur à la paroi :

$$N_x = \lambda'\theta + \nu\delta_x, \qquad T_x = \mu g_x,$$
$$N_y = \lambda\theta + \lambda'\delta_x + 2\mu\delta_y, \qquad T_y = \mu' g_y.$$
$$N_z = \lambda\theta + \lambda'\delta_x + 2\mu\delta_z, \qquad T_z = \mu' g_z.$$

δ_x, δ_y, δ_z, g_x, g_y, g_z sont les dilatations et glissements au point considéré ; θ est la dilatation superficielle $\delta_y + \delta_z$ d'éléments plans normaux à ox, environnant ce même point ; λ, μ, ν, λ', μ' sont cinq coefficients constants caractéristiques du milieu.

Nous regarderons les déformations comme symétriques autour de l'axe des x : cela revient à négliger le poids du liquide et du tuyau vis-à-vis de la pression intérieure, et aussi les appuis extérieurs du tuyau. Le déplacement transversal du point M peut alors être représenté par les formules : $\frac{v}{y} = \frac{w}{z} = \frac{\varepsilon}{r}$, dans lesquelles ε ne dépend de y et de z que par l'argument $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, distance de M à l'axe ox ; et par suite on a : $\theta = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\varepsilon}{r}$.

Si l'on substitue dans les équations générales de Cauchy[1] les expressions des (N, T) en fonction de u et de ε, on constate, par un calcul bien simple, que ces équations se réduisent à deux et peuvent être mises sous la forme :

$$(\lambda' + \mu')\frac{\partial \theta}{\partial x} + \left\{\mu'\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \nu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\} u = 0,$$
$$(2\mu + \lambda)\frac{\partial \theta}{\partial r} + \mu'\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + (\lambda' + \mu')\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial x} = 0,$$

[1] Voir t. I, p. 10.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les forces extérieures et les inerties étant supposées négligeables.

Ces équations seront satisfaites identiquement si nous supposons que ε (et par suite θ) ne dépend que de r, que u est le produit Cx de l'abscisse par une constante, et qu'enfin $\frac{d\theta}{dr}$ se réduit à une constante $2A$. On a alors :

$$\varepsilon = Ar + \frac{B}{r},$$

et les expressions explicites des (N, T) s'en déduisent aisément. En particulier, pour un point situé dans le plan xoz, z est égal à r et y est nul ; on trouve :

$$N_x = 2\lambda' A + \nu C, \qquad T_x = 0,$$

$$N_y = 2\lambda A + \lambda' C + 2\mu\left(A + \frac{B}{r^2}\right), \qquad T_y = 0,$$

$$N_z = 2\lambda A + \lambda' C + 2\mu\left(A - \frac{B}{r^2}\right), \qquad T_z = 0.$$

Les constantes arbitraires se déterminent de manière à vérifier les conditions aux limites. A la face externe du tuyau, pour $r = R_1 = R + a$, N_z est nul. A la face interne, pour $r = R$, N_z est égal à $-p$. Enfin, comme N_x est une constante, on reconnaît que l'action mutuelle de deux anneaux contigus est uniformément répartie sur leur base commune, et l'on exprimera simplement que cette action mutuelle est nulle, comme nous l'admettons, en égalant cette constante à zéro. Nous aurons en somme les trois équations :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$2\lambda A + \lambda' C + 2\mu\left[A - \frac{B}{(R+a)^2}\right] = 0,$$

$$2\lambda A + \lambda' C + 2\mu\left[A - \frac{B}{R^2}\right] + p = 0,$$

$$2\lambda' A + \nu C = 0.$$

A, B, C étant déterminés par ces équations, le déplacement radial d'un point de la face interne du tuyau aura pour valeur :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(R) = AR + \frac{B}{R}.$$

On trouve sans peine :

$$\frac{2a(a+2R)\varepsilon_1}{pR} = \frac{R^2\nu}{(\lambda+\mu)\nu - \lambda'^2} + \frac{(R+a)^2}{\mu}.$$

Soit m le *module du tuyau*, rapport de son épaisseur a à son diamètre $2R$. Cette relation peut s'écrire :

$$(1+m)\frac{a\varepsilon_1}{pR^2} = \frac{(\lambda+2\mu)\nu - \lambda'^2}{(\lambda+\mu)\nu - \lambda'^2} \cdot \frac{1}{4\mu} + m(1+m)\frac{1}{\mu},$$

et c'est précisément la relation que nous voulions établir.

Des cinq coefficients d'élasticité caractéristiques de la paroi, un seul μ et une fonction des quatre autres interviennent. Si E' est le *coefficient d'élasticité transversale* (ou coefficient d'élasticité des fibres annulaires) et G_1 *le coefficient de résistance à la déformation transversale* (qui peut être déterminé directement par des expériences de torsion), on a [1] :

$$E' = 4\mu \cdot \frac{(\lambda+\mu)\nu - \lambda'^2}{(\lambda+2\mu)\nu - \lambda'^2}, \qquad G_1 = \mu;$$

[1] A. Clebsch, *loc. cit.*, p. 83-84.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de plus, si η' est le rapport de la contraction latérale des fibres circulaires à la dilatation longitudinale de ces fibres, qu'elle accompagne, on a aussi :

$$\mu = \frac{E'}{2} \cdot \frac{1}{1+\eta'}.$$

Avec ces notations de B. de Saint-Venant, la relation précédente prend la forme :

$$\frac{p}{\varepsilon_1} = E\frac{a}{R^2}, \qquad (10)$$

le coefficient E ayant pour expression :

$$E = E' \cdot \frac{1+m}{1+2(1+\eta')m(1+m)}. \qquad (11)$$

Ces résultats ont été établis par M. Boussinesq sans passer par les équations de Cauchy, — en substituant au parallélépipède de Cauchy un volume élémentaire (de longueur 1 dans le sens des x), compris entre deux cylindres de rayons respectifs r et $r+dr$, et deux plans menés suivant l'axe, inclinés l'un sur l'autre d'un angle infiniment petit γ, volume dont il forme directement les conditions d'équilibre.

Quand le module m du tube tend vers zéro, le coefficient E tend vers le coefficient d'élasticité des fibres circulaires, tout en lui restant supérieur, et la relation (10) devient celle qu'admettait Résal, d'après un raisonnement un peu sommaire emprunté à la Résistance des matériaux.

Les raisonnements qui précèdent, admissibles pour un tube lâche et mince en caoutchouc, « ne s'appliquent guère, il est vrai, à une conduite d'eau, non seulement rigide, mais enfoncée dans un terrain qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

s'oppose à ses mouvements un peu étendus. Néanmoins, admettons que les ondes s'y propageant n'aient qu'une longueur restreinte, ou, si elles sont longues, que l'excès de pression dû à leur passage soit de signes variés, et nul en moyenne sur des longueurs modérées. Comme, dans chaque section, cet excès donne, sur toute la paroi concave d'un anneau, des efforts ayant, suivant tout axe coordonné, composante totale et moment total nuls, l'effet de ces efforts pour déformer et entraîner le tuyau ne peut être que très local, c'est-à-dire devenir insignifiant à toute distance comprenant un nombre suffisant de fois le rayon R ; car il suffirait, en les transportant sur l'axe (supposé alors relié à la paroi), de les déplacer d'une quantité égale à R, négligeable par conséquent, à côté de la distance dont il s'agit, pour les faire annihiler les uns par les autres. — Donc les déformations du tuyau ne seront appréciables, si l'onde est courte, que dans son voisinage : elles ne tendront alors, nulle part, à produire, par leur accumulation, des déplacements sensibles. Et si, au contraire, l'onde est indéfinie, mais composée de parties de longueur restreinte, donnant lieu à des excès de pression moyennement nuls, on conçoit que les déformations d'un tronçon du tuyau, dues à la totalité des parties de l'onde éloignées, seront encore négligeables, en raison de la neutralisation mutuelle, qui s'y produira, des effets d'efforts positifs et d'efforts négatifs exercés assez près les uns des autres. — Le tuyau ne tendant ainsi à éprouver que des déformations, ou très localisées, ou de signes contraires sur des tronçons voisins, il n'en résultera nulle part, comme on voit, des déplacements notables, suscep-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tibles, par suite, d'être très gênés par la résistance du terrain ou même par celle des extrémités (si l'on en est assez loin) ; et l'hypothèse de l'indépendance mutuelle d'anneaux contigus à surface extérieure libre devra donner encore, par les formules (10) et (11) qu'elle entraîne, une approximation acceptable[1]. »

D'ailleurs, M. Boussinesq a envisagé un cas simple[2] où se calculent aisément l'action mutuelle des anneaux juxtaposés et l'influence de cette action mutuelle sur la propagation des ondes liquides dans le tuyau : c'est le cas d'un tuyau droit et raide, sans pesanteur, maintenu seulement par ses deux extrémités. La modification des lois du mouvement est assez minime, et notamment la vitesse de propagation des ondes ne dépend pas du degré de fixité des sections extrêmes.

4. **Propagation des petits mouvements à travers une colonne liquide remplissant un tuyau élastique horizontal**[3]. — Imaginons d'abord que la colonne liquide, horizontale, soit *en repos*. Supposons-la même sans pesanteur ni pression. « Puis, restituons-lui son poids, avec une pression constante le long de l'axe, mais complétée, partout ailleurs, par une petite partie, qui sera, ici, censée insignifiante, variable hydrostatiquement du haut au bas des sections ; et admettons que la colonne, en revenant alors au repos, ait éprouvé, à partir de la section $x = 0$ restée dans son plan primitif, les petites contractions soit cubiques, soit surtout en longueur, nécessaires à l'existence de

[1] J. Boussinesq, **12**, 2°, § 6 ; **13**, p. 360-361.
[2] J. Boussinesq, **12**, 3° ; **13**, p. 367-368.
[3] J. Boussinesq, **12**, 1° ; **13**, § 2, 7, 8, 9.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cette pression, vu les légères dilatations latérales simultanées qui tendront les fibres annulaires du tuyau, d'une manière sensiblement uniforme sur toute la circonférence, pour leur permettre d'équilibrer cette même pression intérieure. Produisons enfin sur la pression dont il s'agit, à partir d'un moment donné, une variation commune à toute la section $x = 0$, en déplaçant, par exemple, légèrement celle-ci, normalement à son plan.

« Il en résultera plus ou moins vite, dans toute la colonne, des déplacements presque parallèles à l'axe et aussi, par suite, des variations de la pression p sensiblement pareilles sur toute l'étendue des sections normales, ou fonction seulement de x et de t. Chaque tronçon de la colonne, primitivement compris entre les abscisses x_0 et $x_0 + dx_0$, acquerra suivant les x, par l'effet des chutes de pression s'y observant, des vitesses longitudinales u communes, assez lentement variables avec x_0 *en raison de leur rapide propagation;* et les tronçons se conserveront ainsi presque cylindriques durant des temps notables, à cause de la petitesse qu'ont les frottements dans les fluides.

« Appelons ξ le déplacement total, jusqu'à l'époque t et suivant les x, de la première base du tronçon, d'abscisse primitive x_0, mais d'abscisse actuelle $x = x_0 + \xi$; et soient δ le petit écartement relatif $\frac{\partial \xi}{\partial x_0}$ des deux bases du tronçon, δ' la dilatation analogue, comparable à δ, des rayons R de celles-ci. L'accroissement $R\delta'$ des rayons sera négligeable à côté de ξ, et par suite, les vitesses et accélérations, *suivant les rayons*, tant du tronçon fluide que de la paroi, seront peu de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

chose à côté de celles du mouvement *longitudinal* du fluide. C'est dire que les inerties en jeu dans le tuyau, transversales, ou même, par suite, longitudinales, et aussi celles du fluide *suivant les sens normaux à l'axe*, seront insensibles *comparativement aux inerties du fluide suivant l'axe*.

« Or celles-ci, dues à la *différence* des pressions exercées sur les deux bases du tronçon, pressions *presque égales* même quand la distance de ces bases est prise comparable à R, sont très faibles à côté de la pression sur une seule base, ou encore, sur une section méridienne du tronçon menée suivant l'axe, et, aussi, à côté de la tension de l'anneau de paroi, de même longueur suivant les x, qui contient le tronçon fluide et s'oppose à la pression supportée par la section méridienne. Donc, à bien plus forte raison, les inerties, normalement à l'axe, de cet anneau de paroi et du tronçon fluide, sont négligeables par rapport à la pression dont il s'agit ou à la tension de l'anneau. »

Dans ces conditions, la relation (10) que nous avons établie au précédent paragraphe est applicable et donne (chaque anneau se comportant comme s'il était seul en présence du tronçon fluide sous-jacent de même longueur) :

$$\delta' = \frac{\varepsilon_1}{R} = \frac{R}{a}\frac{p}{E}.$$

D'autre part, la pression p est le produit du coefficient E_1 d'élasticité du liquide (inverse de la compressibilité) par la contraction cubique effective, somme changée de signe, de la dilatation longitudinale δ et des dilatations, $2\delta'$ en tout, éprouvées par le fluide

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans deux sens latéraux rectangulaires entre eux :

$$p = -\mathrm{E}_1(\delta + 2\delta').$$

Remplaçons δ' par la valeur précédente et δ par $\frac{\partial \xi}{\partial x_0}$; il viendra :

$$p = -\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{E}_1} + \frac{2\mathrm{R}}{\mathrm{E}a}} \frac{\partial \xi}{\partial x_0}. \qquad (12)$$

Cela posé, la première équation d'Euler donne, en remplaçant par x_0 la variable indépendante $x = x_0 + \xi$, vu la petitesse de $\frac{\partial \xi}{\partial x_0}$, et en y réduisant la densité actuelle ρ du liquide par la densité constante ρ_0 d'état naturel (sauf erreur négligeable au second membre) :

$$u' \text{ ou } \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_0}.$$

Substituons à p sa valeur (12), et nous aurons comme équation aux dérivées partielles du problème :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Omega^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2}, \qquad (13)$$

en posant : $$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{\rho_0}{\mathrm{E}_1} + \frac{\rho_0}{m\mathrm{E}}.$$

La dérivation de l'équation (13) par rapport à t et à x_0 montre que la vitesse u, la dilatation longitudinale δ ou $\frac{\partial \xi}{\partial x_0}$, et, par suite, la pression, d'après (12), vérifieront la même équation aux dérivées partielles. Ainsi, U désignant la vitesse moyenne à travers

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la section d'abscisse x, vitesse identique, ici, à la dérivée, u, de ξ en t, nous aurons l'équation double :

$$\frac{\partial^2(p, U)}{\partial t^2} = \Omega^2 \frac{\partial^2(p, U)}{\partial x_0^2}. \qquad (14)$$

« A raison de leur propagation rapide, les valeurs de ξ, U, p sont, à très peu près, communes non seulement à toute une tranche, mais aussi à ses voisines ; de sorte que les dérivées par rapport à t, prises, dans (13) et (14), en suivant une même particule, reviennent sensiblement à des dérivées prises sur place ou sans faire varier x, comme il y aurait justement lieu de le supposer pour avoir de vraies dérivées partielles en t, si x redevenait variable indépendante au lieu de x_0. Or, alors, la petitesse des dérivées de ξ en x_0 permettrait de remplacer simplement dx_0 par dx, dans les dérivées partielles prises sans faire varier t. » Les équations (14) s'écriraient alors :

$$\frac{\partial^2(p, U)}{\partial t^2} = \Omega^2 \frac{\partial^2(p, U)}{\partial x^2}. \qquad (15)$$

« Reconnaissons enfin que ces équations subsistent quand la colonne liquide est déjà, au moment où d'assez rapides changements de la pression l'atteignent près d'une section $x = 0$, en train de couler par filets rectilignes et parallèles *inégalement rapides*, animés de vitesses u_0 comparables à celles que vont produire ces changements et, par conséquent, toujours très petites à côté de la célérité Ω. C'est ce qui arrive, par exemple, quand la longueur du tuyau est suffisante pour que les petits frottements des filets et de la paroi, quoique négligeables sur des parcours x comme ceux que nous considérons ici, aient établi, concurrem-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ment avec une petite *pente motrice* ainsi neutralisée par eux, un régime uniforme dans la région des x positifs.

« Alors la première équation d'Euler est applicable aux mouvements ondulatoires *survenus assez vite ;* car les frottements et la petite composante de la pesanteur suivant les x (ou le petit décroissement analogue de la pression) y sont relativement insensibles. Or, les vitesses *engendrées* $u - u_0$ étant encore censées principalement longitudinales, la pression p et, par suite, la densité ρ, égale à $\rho_0\left(1 + \frac{p}{E}\right)$, d'après la loi de compressibilité du liquide, continuent à ne dépendre guère que de x et de t. Donc l'accélération u' est encore commune à toute une section σ et même (vu la rapidité de la propagation comparativement à la différence des *parcours effectifs* jusqu'à l'instant t), commune à tout le fluide d'une région de longueur modérée. Les accroissements $u - u_0$ de vitesse, dus aux accélérations u', sont, par suite, pareils pour tout ce fluide, et égaux à leur *moyenne*, $U - U_0$ (à très peu près), dont la dérivée en t, prise sur place, exprime, dès lors, sensiblement u'. Ainsi la première équation d'Euler donne à très peu près :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (16)$$

« Faisons, d'autre part, dans l'équation de la conservation des masses :

$$\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sigma U)}{\partial x} = 0,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la substitution :

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{E_1}\right),$$

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + 2\,\frac{\varepsilon_1}{R}\right) = \sigma_0 \left(1 + \frac{p}{mE}\right).$$

« Il viendra aisément, vu la valeur de $\frac{1}{\Omega^2}$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0 \Omega^2}\,\frac{\partial p}{\partial t}. \qquad (17)$$

« Or l'élimination soit de U, soit de p, entre (16) et (17) donne bien les deux équations (15) cherchées. »

5. **Propagation des ondes de translation à l'intérieur d'un tuyau élastique horizontal ; extinction de l'onde solitaire**[1]. — Nous avons dit que E.-H. Weber s'est proposé de déterminer expérimentalement la vitesse de propagation d'une onde dans un fluide *incompressible* en repos remplissant un tuyau en caoutchouc vulcanisé. Il s'est adressé à cet effet à des intumescences très analogues à l'onde solitaire, intumescences qu'il produisait par compression brusque d'une portion terminale du tuyau fermé aux deux bouts. W. Weber, comparant la vitesse observée ω_1 à la vitesse calculée ω de propagation des petits mouvements dans les tuyaux élastiques, attribua l'écart notable constaté ($10^m,03$ calculé pour $11^m,40$ observé) à la mesure imprécise d'éléments intervenant dans le calcul de ω. En fait, l'approximation de la théorie de W. Weber était insuffisante, et il y a lieu de reprendre ici les considérations développées dans le précédent

[1] A. Boulanger, **1** et **2**.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Volume à propos des ondes de translation des canaux.

Les variations de la pression aux divers points d'une section normale par le fait de la pesanteur étant insignifiantes, eu égard à la grandeur de la pression moyenne du fluide à l'état de repos, nous regarderons le tuyau comme restant de révolution autour de son axe initial, et nous étudierons la déformation de sa section méridienne.

Soient ox l'axe du tuyau indéfini dans le sens du déplacement de l'intumescence. R_0 le rayon initial du tuyau, R le rayon de la section d'abscisse x à l'instant t, u, w les composantes, au même instant, de la vitesse en un point M d'abscisse x et distant de r de ox, suivant ox et suivant le rayon extérieur de M.

L'onde de Weber produit, au moment de son passage dans une section, des vitesses presque identiques, en sorte que u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ varient peu avec r; de plus, elle est douée d'une longévité assez grande pour marquer le peu d'influence des frottements et la possibilité d'user des équations du mouvement des fluides à frottements négligeables.

Aux équations d'Euler et d'incompressibilité :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial x}+\rho u'=0, \qquad \frac{\partial p}{\partial r}+\rho w'=0,\\ &r\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial (wr)}{\partial r}=0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

il faut joindre une double condition limite : 1° à la surface du tuyau, pour $r=R$, p doit se réduire à

$$p_1=a+k\frac{R^2-R_0^2}{R_0^2},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

a étant la pression interne initiale et k un coefficient constant $\left(k = \frac{mE}{R_0}\right)$; 2° si u_1 et w_1 sont les valeurs de u et w pour $r = R$, on a :

$$w_1 = \frac{\partial R}{\partial t} + u_1 \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Soit U la vitesse longitudinale moyenne dans une section donnée, valant $\frac{2}{R^2}\int_0^R rudr$. On en déduit :

$$\frac{\partial (R^2 U)}{\partial x} = 2\int_0^R \frac{\partial (ru)}{\partial x} dr + 2Ru_1 \frac{\partial R}{\partial x},$$

et comme la troisième équation (18) donne, en observant que, par symétrie, $w = 0$ pour $r = 0$,

$$Rw_1 = -\int_0^R \frac{\partial (ru)}{\partial x} dr,$$

il vient :

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \frac{\partial (R^2 U)}{\partial x} = 0. \qquad (A)$$

D'autre part, la seconde et la première équations (18) donnent successivement :

$$p = a + k\frac{R^2 - R_0^2}{R_0^2} + \rho\int_r^R w'dr,$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{k}{\rho R_0^2}\frac{\partial R^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\int_r^R w'dr + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &+ u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\int_r^0 r\frac{\partial u}{\partial x} dr \end{aligned}\right\} = 0. \qquad (B)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Première approximation. — Remplaçons les équations (A) et (B) par :

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + R_0^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad (A_1)$$

$$\frac{k}{\rho R_0^2} \frac{\partial R^2}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 ; \qquad (B_1)$$

cela revient à négliger des termes du second ordre par rapport à la vitesse longitudinale, à la variation du rayon ; à tenir compte de la lente variation de u avec r, de la petitesse de w et de ses variations vis-à-vis de u. Ces équations entraînent :

$$\frac{\partial^2(R^2, U)}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho} \frac{\partial^2(R^2, U)}{\partial x^2}. \qquad (C)$$

Supposons l'origine des x placée de manière que, pour $t = 0$, les ondes n'aient pas encore envahi les sections à abscisses positives. U étant nulle pour $x = \infty$, où $R = R_0$, nous aurons :

$$R^2 = F(x - \omega t), \qquad U = \omega \frac{R^2 - R_0^2}{R_0^2}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{\rho}}.$$

La déformation du tuyau se propage avec la vitesse ω calculée par Weber.

Seconde approximation. — Reprenons l'équation (A)

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + R_0^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}[(R^2 - R_0^2)U] = 0, \qquad (A_2)$$

ainsi que l'équation (B) ; remplaçons-y les plus importants des termes négligés par les valeurs que leur donnerait la première approximation.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La troisième équation (18), de laquelle on déduit :

$$w = \frac{1}{r}\int_r^0 r\frac{\partial u}{\partial x}\,dr,$$

fournit, pour partie principale de w', $\frac{r}{2R_0^2}\frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2}$, ou, d'après (C) : $\frac{\omega^2}{2R_0^2}\,r\frac{\partial^2 R^2}{\partial x^2}$. L'équation (B) sera remplacée par :

$$\frac{k}{\rho R_0^2}\frac{\partial R^2}{\partial x} + \omega^2\frac{R^2 - r^2}{4R_0^2}\frac{\partial^3 R^2}{\partial x^3} + \frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Multiplions tous les termes par $2rdr$ et intégrons de 0 à R ; il vient :

$$\frac{k}{\rho R_0^2}\frac{\partial R^2}{\partial x} + \frac{\omega^2}{8}\frac{R^2}{R_0^2}\frac{\partial^3 R^2}{\partial x^3} + \int_0^R \frac{\partial u}{\partial t}\,d\left(\frac{r^2}{R^2}\right) + U\frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Limitons les deuxième et troisième termes à leurs parties principales. Nous aurons enfin :

$$\frac{k}{\rho R_0^2}\frac{\partial R^2}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\omega^2}{8}\frac{\partial^2 R^2}{\partial x^2} + \frac{U^2}{2}\right\} = 0. \quad (B_2)$$

Posons $\tau = \frac{R^2 - R_0^2}{R_0^2}$, et remplaçons dans chaque dernier terme des équations (A_2) et (B_2), qui est de seconde approximation, U par sa valeur $\omega\tau$ de première approximation. Nous obtenons les équations

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \omega\frac{\partial \tau^2}{\partial x} = 0, \quad (A_3)$$

$$\frac{k}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + \omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{R_0^2}{8}\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{2}\right\} = 0. \quad (B_3)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Éliminons U entre ces équations, en observant que le dernier terme peut être assimilé à une simple fonction de $x - \omega t$; il vient :

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \omega^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{R_0^2}{8}\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{3}{2}\tau^2\right) = 0. \qquad (D)$$

Le dernier terme étant encore assimilable à une fonction de $x - \omega t$, on déduit de (D) :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{R_0^2}{16}\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{3}{4}\tau^2 + \tau\right\} = 0. \qquad (E)$$

Nous allons transformer cette équation (E) en introduisant la notion de célérité de propagation de l'intumescence, vitesse fictive ω' d'une tranche qui se déplace en laissant devant elle un volume constant de fluide ; si l'on exprime que $\int_x^\infty \tau dx$ ne change pas quand t varie de dt et x de $\omega' dt$, il vient :

$$\int_x^\infty \frac{\partial \tau}{\partial t} dx - \tau\omega' = 0.$$

L'équation (E) donne alors, en observant que, pour $x = \infty$, τ et ses dérivées sont nulles :

$$\omega' - \omega\left\{\frac{R_0^2}{16}\frac{1}{\tau}\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{3}{4}\tau + 1\right\} = 0. \qquad (F)$$

Nous nous bornerons ici à utiliser cette équation à la recherche des ondes de translation dont toutes les parties se propagent également vite, sans aucune déformation apparente ; pour elles, ω' sera constant. Soit $\omega' = \omega\left(1 + \frac{a}{2}\right)$; prenons pour variable $\xi = \frac{x}{R_0}$;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

nous aurons successivement :

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \xi^2} + 12\tau^2 - 8a\tau = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial \xi}\right)^2 = 8\tau^2(a - \tau),$$

en notant que, très loin, τ et $\frac{\partial \tau}{\partial x}$ sont nuls.

a sera le maximum de τ, et l'onde à forme constante ne pourra être qu'une intumescence ou onde positive de Weber, ayant son profil du type de l'onde solitaire des canaux.

On déterminera le paramètre a d'après le volume Q de l'intumescence ou d'après la longueur l écrasée du tube : $Q = \pi R_0^2 l$.

L'intumescence étant symétrique par rapport à la tranche d'aire maximum ($\tau = a$), si l'on prend τ pour variable, on a :

$$\frac{Q}{2} = \int_a^0 \pi (R^2 - R_0^2) \frac{d\tau}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)},$$

ou :

$$\frac{l_1}{R_0^2} = \int_0^a \frac{d\tau}{\sqrt{2(a - \tau)}} = \sqrt{2a}.$$

Ainsi *l'équation du profil et la vitesse de propagation seront :*

$$R^2 = R_0^2 + \frac{l^2}{2} \operatorname{sec\,hyp}^2 \frac{l(x - \omega' t)}{R_0^2},$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \left(1 + \frac{l^2}{4R_0^2}\right). \qquad (G)$$

Dans l'exemple de Weber, on avait $\omega' = 11091$ millimètres, $\omega = 10033$ millimètres, $2R_0 = 41$ millimètres

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Mais l n'a pas été déterminé; pour $l = 14$ millimètres, il y aurait accord. C'est vraisemblablement moins que la largeur de la règle de bois employée pour comprimer le tube, car Weber ne comprimait pas complètement le tuyau pour éviter l'adhérence des parois, en vue de la production subséquente d'une onde négative ou de dépression.

D'après mes propres expériences, il reste un désaccord entre la vitesse ω' donnée par la formule (G) et celle observée. On rendrait mieux compte des faits en admettant que la pression en un point de la paroi contienne, outre les termes utilisés, un petit terme proportionnel à la courbure longitudinale de la section méridienne; en d'autres termes, en admettant que, pour $r = R$, p se réduise à :

$$p_1 = a + k\frac{R^2 - R_0^2}{R_0^2} + A\frac{\partial^2 R^2}{\partial x^2}.$$

Eu égard à la petitesse de $R - R_0$, le terme correctif est très sensiblement égal à $2AR_0\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$. Le coefficient constant A est spécifique du tube. Il est aisé de reprendre la suite des calculs qui précèdent; on est conduit à introduire dans l'équation (B) un terme supplémentaire en $A\frac{\partial^3 R^2}{\partial x^3}$, en sorte que le coefficient $\frac{\omega^2}{8}$ de $\frac{\partial^2 R^2}{\partial x^2}$ dans la dernière parenthèse de l'équation (B_2) se trouve accrû de A. On posera $A = \frac{\omega^2}{8}\alpha$, et le dernier terme en $\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}$ des équations (D), (E), (F) est simplement multiplié par $1 + \alpha$. I

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

suffit de faire le changement de variable $x = x_1\sqrt{1+\alpha}$ pour être ramené à la même équation de profil, les variables étant R, x_1 et la vitesse de transport ω'. Il s'ensuit que la vitesse de propagation du profil réel est :

$$\omega'' = \omega'\sqrt{1+\alpha} = \sqrt{\frac{k}{\rho}}\left(1+\frac{l^2}{4R_0^2}\right)\sqrt{1+\alpha}\,.$$

La petite constante négative α se détermine en mesurant les valeurs de ω'' pour diverses valeurs de l.

D'ailleurs, la vitesse de propagation est graduellement amortie par l'influence des frottements:

Si l'on fait abstraction des frottements, l'énergie d'une onde invariable de Weber, somme de la force vive actuelle du fluide et du travail que produirait l'intumescence en s'aplatissant sous la pression de l'enveloppe, a pour expression :

$$\mathcal{E} = \frac{\pi k}{R_0^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(R^2-R_0^2)^2dx = \frac{\pi k l^3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{\cosh^4\eta},$$

(en posant $lx = R_0^2\eta$), ou :

$$\mathcal{E} = \frac{\pi k l^3}{3}.$$

La valeur de $\mathcal{E}$ caractérise, tout comme celle de l, une onde solitaire de Weber, et le profil, la vitesse de propagation, le maximum de dilatation radiale s'expriment de suite en fonction de $\mathcal{E}$ au lieu de l. On reconnaît d'ailleurs la stabilité de l'onde en suivant la méthode donnée à propos de l'onde solitaire des canaux.

Il est aisé d'indiquer la loi du lent décroissement de l'énergie, de la vitesse de propagation et de la dilata-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tion radiale, sous l'influence des résistances de frottement localisées dans une mince couche contiguë à la paroi.

Soit $u_0 = F(t)$ la vitesse qu'on aurait à la paroi s'il n'y avait pas de frottement. D'après ce que nous avons vu (2e section, Chap. II, § 3), les frottements intérieurs développés par la variation rapide de vitesse près de la paroi détruisent, pendant le temps dt, une quantité d'énergie égale à :

$$2\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F\left(t-\frac{x}{\omega'}\right)dx\int_{0}^{\infty} F'\left(t-\frac{x}{\omega'}-\nu^2\right)d\nu,$$

par unité de longueur de contour du tuyau (au facteur dt près).

Comme l'expression de l'énergie de l'onde par unité de longueur de contour peut d'autre part s'écrire :

$$\frac{\mathcal{E}}{2\pi R_0}=\frac{\rho R_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} U^2dx=\frac{\rho R_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} F^2\left(t-\frac{x}{\omega'}\right)dx,$$

l'équation qui définira le mouvement amorti s'écrira :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}+\frac{2\varepsilon_1}{\rho R_0}\mathcal{E}=0,$$

en posant :

$$\varepsilon_1=2\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi}}\int_{0}^{\infty} d\nu\,\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)F'(\tau-\nu^2)d\tau}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\tau)\,d\tau},$$

$$\left(\tau=t-\frac{x}{\omega'},\quad \text{en sorte que}\quad d\tau=-\frac{dx}{\omega'}\right).$$

C'est dans la détermination de ce coefficient ε_1 qu'est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

incluse la difficulté de l'étude de l'affaiblissement graduel des intumescences. Ici, nous avons :

$$u_0 = F(t) = \frac{l^2}{2R_0^2}\sqrt{\frac{k}{\rho}}\,\mathrm{sechyp}^2\left(\frac{l\omega' t}{R_0^2} - \text{const.}\right).$$

Si nous posons :

$$G(\sigma) = e^{\sigma}(e^{\sigma}+1)^{-2},$$

il viendra :

$$\varepsilon_1 = \frac{2}{R_0}\sqrt{\frac{2\rho\varepsilon\omega' l}{\pi}}\int_0^{\infty} dn\,\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} G(\sigma)G'(\sigma - n^2)d\sigma}{\int_{-\infty}^{+\infty} G^2(\sigma)d\sigma}.$$

On trouve aisément :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G^2(\sigma)d\sigma = \frac{1}{6};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(\sigma)G'(\sigma - n^2)d\sigma$$

$$= \frac{(1+u)(6+6u+u^2)}{u^4}\left[\log(1+u) - \frac{3u(u+2)}{u^2+6u+6}\right],$$

avec $u = e^{n^2} - 1$. Soient $u = \frac{2x}{1-x}$ et

$$y = \frac{3-x^2}{x^4\sqrt{\log\frac{1+x}{1-x}}}\left(\log\frac{1+x}{1-x} - \frac{6x}{3-x^2}\right) = H(x).$$

Il vient : $\varepsilon_1 = \frac{1,5}{R_0}\sqrt{\frac{2l\omega'\rho\varepsilon}{\pi}}\int_0^1 H(x)dx.$

J'ai dessiné à très grande échelle et fort exactement la courbe $y = H(x)$, qui part de l'origine, tangente

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à oy, s'infléchit vers ox et s'élève asymptotiquement à $x=1$, limitant avec $y=0$ et $x=1$ une aire finie; j'ai prolongé l'arc jusqu'à ce qu'il soit distant de $x=1$ de moins qu'une épaisseur de trait; j'ai mesuré, à l'aide d'un planimètre d'Amsler, par répétition, l'aire ainsi délimitée et obtenu une limite supérieure de l'erreur commise (eu égard à la branche infinie). $\int_0^1 H(x)$ est comprise entre 0,448 et 0,452, ou égale à 0,450, avec une erreur en plus ou en moins inférieure à deux millièmes.

L'expression de ε_1 en fonction de l'énergie $\mathcal{E}$ de l'onde à un instant donné est, par suite, en posant $\mathcal{E}=\frac{8\pi k R_0^3}{3\lambda^2}$:

$$\varepsilon_1 = 1{,}35\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi R_0}}\sqrt[4]{\frac{k}{\rho}}\frac{\sqrt{\lambda^4+1}}{\lambda^3},$$

et l'équation du mouvement amorti se transforme en

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^4+1}} = 0{,}9\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho\pi R_0^3}}\sqrt{\frac{k}{\rho}}\,t = mt,$$

$\left(\lambda_0=\sqrt{\frac{2R_0}{l_0}}\right.$, $\left.l_0$ caractérisant le volume d'eau refoulé$\right)$.

Première approximation. — λ croît à partir de λ_0; si l'unité est négligeable devant λ_0^4, on aura :

$$\lambda = \lambda_0\left(1+\frac{m}{\lambda_0}t\right).$$

Par suite,

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{\rho}}\left\{1+\frac{l_0^2}{4R_0^2}:\left(1+\frac{m}{\lambda_0}t\right)^4\right\}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Seconde approximation. — Si l'intumescence a une masse plus importante, on emploiera les fonctions elliptiques d'invariants $g_2 = 1$, $g_3 = 0$. On calculera u_0 par la condition :

$$p(u) = \frac{R_0}{l_0} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{R_0^2}{l_0^2}} ;$$

on construira les deux courbes d'ordonnées respectives :

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{d \log p(u)}{du},$$

$$\lambda - mt = \lambda_0 + 2 \left[\zeta(u_0) - \zeta(u) \right],$$

qui se déduisent immédiatement de représentatives bien connues ; on déterminera λ à un instant donné en intercalant entre ces deux courbes, suivant les ordonnées, un segment mt et en prenant l'ordonnée correspondante de la première courbe ; d'où le graphique de $\lambda(t)$.

6. **Cas d'un tuyau oblique à l'horizon.** — « Nous ne nous sommes pas occupé au § 4 du cas d'un tuyau soit vertical, soit, plus généralement, oblique à l'horizon, cas dans lequel la pression p et, par suite, la dilatation proportionnelle $2\delta'$ de la section normale fluide σ acquièrent, aux divers points de l'axe du tuyau pris pour axe des x, une partie variable *permanente* due au poids du liquide. Pourvu que ce nouveau terme de p, *fonction de x seul*, ne soit pas d'un ordre de grandeur plus élevé que celui qu'y ajoutent les ondes, il s'éliminera, de lui-même, 1° de l'équation du mouvement (16), d'où il fera disparaître le terme de pesanteur introduit par la pente de l'axe et qu'il est destiné à neutraliser ; 2° de la condition (17)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de continuité, où p ne figure que par sa dérivée en t, justement nulle pour le terme en question. Donc, si l'on réduit, dans les équations (15) définitives, la pression p à sa partie *non permanente*, ces équations s'appliquent, quelle que soit l'*inclinaison de l'axe*, et conduisent aux lois de propagation du mouvement ondulatoire obtenues pour un tuyau horizontal [1]. »

7. **Mouvement graduellement varié de l'eau dans un tuyau élastique.** — Les résultats établis au § 4 ne seraient plus valables si les changements de pression ou de vitesse, produits aux environs de la section $x = 0$, étaient engendrés assez lentement pour laisser, durant la propagation, une influence notable aux frottements ou à la pente motrice neutralisée jusque-là par ceux-ci. Le phénomène devient alors cette altération du régime uniforme que nous avons appelée un *régime graduellement varié*. L'équation (17) n'est plus applicable, et avec les frottements interviennent les inégalités de vitesse des filets fluides. Reprenons donc la théorie développée antérieurement [1er Vol., 3e sect., Chap. II] dans le cas d'un fluide incompressible se mouvant dans un lit cylindrique à parois rigides, et voyons comment il convient de la modifier dans le cas présent.

Établissons d'abord quelques relations. Comme le fluide est supposé *compressible*, la densité est variable et l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

[1] J. Boussinesq **15**, p. 367.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si donc Φ est une fonction continue de x, y, z, t, ayant pour dérivée complète :

$$\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u\frac{\partial \Phi}{\partial x} + v\frac{\partial \Phi}{\partial y} + w\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

on peut écrire :

$$\rho\Phi' = \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\Phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\Phi).$$

D'autre part, la *relation supplémentaire* est :

$$\rho = \rho_0\left(1 + \frac{p}{E_1}\right),$$

E_1 désignant le coefficient d'élasticité (inverse de la compressibilité) du liquide. E_1 a une valeur considérable : pour l'eau, d'après les expériences de Grassi, à la température de 13°, si l'on prend pour unité de pression le kilogramme par mètre carré, on a :

$$E_1 = 217 \times 10^6.$$

Par suite, $\mu = \frac{1}{E_1}$ est très petit. Remplaçons donc ρ par $\rho_0(1 + \mu p)$; par un raisonnement déjà fait (*loc. cit.*, p. 301), nous obtiendrons la relation :

$$\int_\sigma (1 + \mu p)\Phi' d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma (1 + \mu p)\Phi d\sigma + \frac{\partial}{\partial x}\int (1 + \mu p)u\Phi d\sigma,$$

dans laquelle nous substituerons à Φ successivement 1, u et u^2.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1° Pour $\Phi = 1$, $\Phi' = 0$, on a, U étant la vitesse moyenne :

$$0 = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial (U\sigma)}{\partial x} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma p d\sigma + \frac{\partial}{\partial x} \int_\sigma p u d\sigma \right\}.$$

A cause de la petitesse du facteur μ, nous pouvons, dans l'évaluation de la parenthèse, négliger les termes du premier ordre de petitesse et remplacer la pression p par la valeur p_0 qu'elle prend sur l'axe (dans la même tranche). Cette parenthèse prend alors la valeur :

$$\frac{\partial (p_0 \sigma)}{\partial t} + \frac{\partial (p_0 \sigma U)}{\partial x},$$

et nous obtenons la relation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma (1 + \mu p_0) + \frac{\partial}{\partial x} \sigma U (1 + \mu p_0) = 0. \qquad (19)$$

2° Pour $\Phi = u$ ou $\Phi' = 1$, on a, en posant :

$$\int_\sigma \left(\frac{u}{U} \right)^2 \frac{d\sigma}{\sigma} = 1 + \eta$$

et en négligeant les termes en $\mu u'$:

$$\int_\sigma u' d\sigma = \frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma (1 + \mu p) u d\sigma + \frac{\partial}{\partial x} \int_\sigma (1 + \mu p) u^2 d\sigma,$$

soit :

$$\sigma \mathfrak{M} u' = \frac{\partial}{\partial t} \sigma U (1 + \mu p_0) + \frac{\partial}{\partial x} \sigma U^2 (1 + \eta)(1 + \mu p_0). \qquad (20)$$

3° Soit enfin $\Phi = u^2$; posons : $\int_\sigma \left(\frac{u}{U} \right)^3 \frac{d\sigma}{\sigma} = \alpha.$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous aurons de même :

$$\int_\sigma (u^2)' d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma (1+\mu p) u^2 d\sigma + \frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma (1+\mu p) u^3 d\sigma,$$

soit :

$$\sigma \mathfrak{M}(u^2)' = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t}\sigma U^2 (1+\eta)(1+\mu p_0) \\ + \dfrac{\partial}{\partial x}\sigma U^3 \alpha (1+\mu p_0) \end{array} \right\}. \qquad (21)$$

En tenant compte de l'équation (19) qui n'est autre que l'équation de la conservation des masses, il est loisible de simplifier les expressions de $\mathfrak{M}u'$ et de $\mathfrak{M}(u^2)'$. Il vient :

$$\mathfrak{M}u' = (1+\mu p_0)\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial t} + U\dfrac{\partial}{\partial x}[(1+\eta)U] \\ -\eta U \dfrac{\partial}{\partial t}\log \sigma(1+\mu p_0) \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{M}(u^2)' = (1+\mu p_0)\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t} U^2(1+\eta) + U\dfrac{\partial}{\partial x} U^2\alpha \\ +(1+\eta-\alpha)U^2 \dfrac{\partial}{\partial t}\log\sigma(1+\mu p_0), \end{array} \right\}$$

et on en déduit enfin :

$$\frac{1}{U}\mathfrak{M}(u^2)' - \mathfrak{M}u' = (1+\mu p_0)\left\{ \begin{array}{l} (1+2\eta-\alpha)U\dfrac{\partial}{\partial t}\log\sigma(1+\mu p_0) \\ +(1+2\eta)\dfrac{\partial U}{\partial t} + (2\alpha-\eta-1)\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{U^2}{2} \\ + U^2\dfrac{\partial(\alpha-\eta)}{\partial x} + U\dfrac{\partial \eta}{\partial t}. \end{array} \right\} \qquad (22)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cela posé, il est aisé de reconnaître que l'équation fondamentale :

$$I = 2b\frac{U^2}{R} + \frac{1}{g}\left[\frac{1}{U}\mathfrak{M}(u^2)' - \mathfrak{M}u'\right], \qquad (23)$$

où I désigne la pente motrice :

$$I = \sin i - \frac{1}{\rho_0 g}\frac{\partial p_0}{\partial x},$$

est applicable actuellement. Il suffit de s'assurer que l'équation qui sert de point de départ à l'établissement de cette relation (Vol. I, p. 271) est encore valable, quoique le fluide soit compressible.

Des équations générales du mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho u',$$

$$\rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho v',$$

$$\rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho w',$$

les deux dernières donnent :

$$\frac{\partial}{\partial y}\log(1+\mu p) = \rho_0\mu(Y - v'),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\log(1+\mu p) = \rho_0\mu(Z - w');$$

les quantités v' et w' étant du second ordre de petitesse, on aura, en se déplaçant dans une section normale :

$$\log\frac{1+\mu p}{1+\mu p_0} = \rho_0\mu(Yy + Zz).$$

Si l'on développe le premier membre en série et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'on néglige les termes du second ordre en μ dans l'équation obtenue, il vient :

$$p - p_0 + \mu(p^2 - p_0^2) = \rho_0(Yy + Zz).$$

Le terme en μ du premier membre sera même négligeable devant les termes conservés.

Considérons alors la première équation. En négligeant le terme en $\mu u'$, après remplacement de ρ par $\rho_0(1 + \mu p)$, et en désignant par i l'inclinaison du tube sur l'horizon (en sorte que $X = g \sin i$), cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon}{\rho_0 g}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon}{\rho_0 g}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + I = \frac{u'}{g}.$$

La quantité I a pour valeur :

$$I = (1 + \mu p)\sin i - \frac{1}{\rho_0 g}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

i est petit, et l'on peut, au degré d'approximation observé, substituer p_0 à p; d'où :

$$I = \sin i - \frac{1}{\rho_0 g}\frac{\partial p_0}{\partial x}.$$

Cette quantité ne dépend que de x et de t. Nous aboutissons donc à la même équation (2) [Vol. I, p. 271], qui a servi à établir la relation (23) du présent paragraphe.

Nous avons ainsi obtenu entre σ, U et p_0 les deux relations (19) et (23) [dans cette dernière équation, la parenthèse du second membre est fournie par l'équation (22), et l'on peut prendre pour α et η les valeurs relatives au régime uniforme, d'après les raisons données à la page 303 du premier Volume]. Nous emprunterons encore à la théorie de l'élasticité des solides la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

même relation entre p_0 et σ, les variations de la pression sur l'axe étant regardées comme proportionnelles aux variations de l'aire σ :

$$p_0 = a + k\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}.$$

a est la pression sur l'axe quand la section a, sur toute la longueur du tuyau, la valeur σ_0 relative à un régime uniforme de vitesse moyenne U_0, pour lequel la pente motrice est $\frac{2bU_0^2}{R_0}$. Actuellement, on a :

$$I = \frac{2bU_0^2}{R_0} - \frac{k}{\rho_0 g \sigma_0}\frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Appliquons ces généralités à l'étude de la propagation des intumescences *le long d'un courant* de vitesse U_0 à l'état de régime uniforme.

Désignons par $\sigma_0 + \Sigma$ et $U_0 + U'$ les valeurs que prennent, dans une tranche à un instant donné, lors du passage de l'intumescence, l'aire de la section et la vitesse moyenne. Σ et U' sont de petites fonctions de x et de t.

Les équations (19) et (23) deviennent :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + (U_0 + U')\frac{\partial \Sigma}{\partial x} + (\sigma_0 + \Sigma)\frac{\partial U'}{\partial x} + \mu k \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \mu k (U_0 + U')\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = 0,$$

$$2b\left[\frac{U_0^2}{R_0} - \frac{(U_0 + U')^2}{R}\right] - \frac{k}{\rho_0 g \sigma_0}\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = (1 + \mu p_0)\left\{\begin{array}{l}(1 + 2\eta - \alpha)(U_0 + U')\left[\frac{1}{\sigma_0 + \Sigma} + \frac{\mu k}{1 + \mu p_0}\frac{1}{\sigma_0}\right]\frac{\partial \Sigma}{\partial t} \\ + (1 + 2\eta)\frac{\partial U'}{\partial t} + (2\alpha - \eta - 1)(U_0 + U')\frac{\partial U'}{\partial x}.\end{array}\right.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si nous ne conservons que les termes *principaux* dans chacune de ces équations, il vient :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \Sigma}{\partial x} + \frac{\sigma_0}{1 + \mu k} \frac{\partial U'}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{k}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} + (1 + 2\eta)\sigma_0 \frac{\partial U'}{\partial t} + (2\alpha - \eta - 1) U_0 \sigma_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + (1 + 2\eta - \alpha) U_0 (1 + k\mu) \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0.$$

L'élimination de U′ entre ces équations est aisée : nous dériverons la première par rapport à x et à t, la seconde par rapport à x, et nous éliminerons entre les équations obtenues $\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 U'}{\partial x \partial t}$. Nous obtiendrons ainsi :

$$\frac{k}{\rho_0} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} - (1 + 2\eta)(1 + \mu k) \left[\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2} + U_0 \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x \partial t} \right] - (2\alpha - \eta - 1) U_0 \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t \partial x} + U_0 \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} \right) (1 + \mu k) + (1 + 2\eta - \alpha) U_0 (1 + \mu k) \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x \partial t} = 0,$$

ou encore, en ordonnant :

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2} + \frac{3\alpha - \eta - 1}{1 + 2\eta} U_0 \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x \partial t} + \left\{ (2\alpha - 1 - \eta) - \frac{1}{\frac{\rho_0}{k} + \rho_0 \mu} \right\} \frac{1}{1 + 2\eta} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} = 0.$$

Cette équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, à coefficients constants, intégrable par le procédé de Dalembert, coïncide avec l'équation obtenue

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à la page 309 du premier Volume, à cela près que Σ remplace h et qu'au lieu de gH on a la quantité Ω^2 définie par la relation :

$$\frac{1}{\Omega^2} = \rho_0 \mu + \frac{\rho_0}{k} = \frac{\rho_0}{E_1} + \frac{\rho_0}{k}.$$

Les lois de la propagation des perturbations qui nous occupent coïncident donc avec des lois déjà connues.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE V

COUPS DE BÉLIER DANS LES CONDUITES D'EAU

1. **Lois qui régissent le coup et le contrecoup de bélier dans une conduite donnée.** — Quand une grande masse d'eau est en mouvement dans une conduite et qu'on vient à fermer brusquement le robinet d'écoulement, le fluide arrêté se comprime, puis se détend et transforme son énergie cinétique en une *surpression* exercée sur les parois et appelée *coup de bélier*. Cettte augmentation de pression, ayant lieu dans un temps très bref, prend le caractère d'un *choc* qui peut aller jusqu'à la rupture des tuyaux, comme cela s'est vu bien des fois.

Le nom de coup de bélier a été donné à ce phénomène par analogie avec le choc qui se produit dans le moteur dit bélier hydraulique.

Par extension, on appelle *coup de bélier négatif* la diminution de pression corrélative d'un accroissement du débit.

L'alimentation des turbines installées dans les pays de montagne se fait habituellement par des conduites de grande longueur ; l'ouverture ou la fermeture du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

vannage, en vue du réglage, donne lieu à des coups de bélier qui, eu égard à l'énorme masse en mouvement, peuvent être dangereux et gênent singulièrement le réglage automatique. Il convient donc de restreindre l'ampleur de ces variations de pression et, à cet effet, d'être à même de les calculer.

J. Michaud en Suisse, M. Stodola en Italie, M. Rateau[1] en France, ont abordé cette étude; mais leurs essais ingénieux ont fait place aux vues de M. Alliévi[2], qui a appliqué à notre problème la théorie, exposée au précédent Chapitre, de la propagation des perturbations à travers une colonne fluide compressible enclose dans un tuyau à paroi élastique. Les résultats de M. Alliévi ont reçu des perfectionnements notables de la part de M. de Sparre[3], qui les a mis sous une forme pratiquement utilisable.

Supposons, pour fixer les idées, qu'une conduite horizontale, de longueur L et de section σ constante, soit alimentée par un réservoir d'extrémité à charge y_0 constante, que nous admettons ne pouvoir aucunement être dérangée par les perturbations qui peuvent survenir au régime de la conduite. (Les résultats s'étendront sans peine au cas d'un tuyau incliné[4].) — Nous prendrons pour axe ox l'axe de la conduite, l'origine étant

[1] A. Rateau, p. 245.

[2] L. Alliévi. Ce travail, publié d'abord dans les *Annali delle Societa degli Ingegneri ed architetti*, a été vulgarisé par l'auteur dans des conférences à la *Société d'encouragement pour l'industrie nationale à Paris*, à la *Société pour le développement des sciences* près l'Université de *Grenoble*; un résumé très net en a été donné dans la revue *la Houille blanche* (1904).

[3] M. de Sparre, p. 41-63. Voir aussi *la Houille blanche* (1905).

[4] L. Alliévi, p. 32.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

placée dans une section tout à fait voisine du distributeur ; la direction ox, allant vers le réservoir, est de sens opposé à celui de la vitesse d'écoulement, qui sera aussi celui des vitesses positives : abscisses des tranches et vitesses du fluide seront comptées positivement dans des sens différents.

Appelons U_0 la vitesse d'écoulement à l'état de régime, avant la mise en mouvement du distributeur vers la section origine, lorsque tout le long de l'axe la charge est y_0. Convenons d'ailleurs de traduire toutes les pressions en hauteurs de charge y, ce qui revient à poser

$$y = \frac{p}{\rho g}.$$

Imaginons qu'on apporte au régime en question une perturbation. A un instant t et dans une section x quelconque, les valeurs de la charge y et de la vitesse U seront données [*suprà*, Ch. IV] par les formules :

$$\left.\begin{aligned} y - y_0 &= F\left(t - \frac{x}{\Omega}\right) - F_1\left(t + \frac{x}{\Omega}\right), \\ U_0 - U &= \frac{g}{\Omega}\left\{F\left(t - \frac{x}{\Omega}\right) + F_1\left(t + \frac{x}{\Omega}\right)\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ω ayant la signification connue. Il suffit que l'on sache, d'après les conditions limites, à chaque instant, les valeurs de F et de F_1 dans une section donnée, pour avoir la loi de variation de y et de U dans une section quelconque du tuyau.

Supposons que l'écoulement ait lieu à l'air libre, en sorte que y s'annule à l'orifice du distributeur. Soit $\mathcal{O}(t)$ la vitesse d'écoulement à travers cet ori-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fice. En allant de la section origine à l'orifice, on a :

$$U^2(o, t) + 2gy(o, t) = \mathcal{V}^2(t),$$

et, à l'état de régime, cette relation donne :

$$U_0^2 + 2gy_0 = \mathcal{V}_0^2.$$

La vitesse dans la conduite est faible vis-à-vis de la vitesse au distributeur $\left(\text{de l'ordre de } \frac{1}{10} \text{ environ}\right)$, en sorte que les premiers termes des seconds membres sont négligeables, et l'on obtient simplement :

$$\frac{\mathcal{V}(t)}{\mathcal{V}_0} = \sqrt{\frac{y(o, t)}{y_0}}.$$

Soit, d'autre part, $\lambda(t)$ le rapport de l'ouverture du distributeur à un instant quelconque à son ouverture s à l'état de régime.

L'équation de continuité donne successivement :

$$U_0\sigma = \mathcal{V}_0 s, \qquad U(o, t)\sigma = \mathcal{V}(t)\lambda s,$$

et l'on déduit de là :

$$U(o,t) = U_0 \cdot \frac{\mathcal{V}(t)}{\mathcal{V}_0}\lambda = U_0\lambda\sqrt{\frac{y(o, t)}{y_0}}. \qquad (2)$$

Si la réduction d'ouverture est produite par une vanne d'étranglement, la question est un peu plus compliquée : elle sera examinée ultérieurement, au § 5.

Enfin nous appellerons en général *valeur du coup de bélier* à un instant donné dans une tranche d'abscisse x la surpression $y - y_0$ correspondante ; mais le plus souvent nous n'emploierons ce terme que pour la section initiale, le désignant par ξ ou $2y_0\zeta$ et posant :

$$\xi = 2y_0\zeta = y(o, t) - y_0 = F(t) - F_1(t). \qquad (3)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ces préliminaires admis, la conduite étant à l'état de régime, rétrécissons, à partir d'un instant donné pris pour origine des temps, l'orifice du distributeur. L'effet de ce rétrécissement est une surpression plus ou moins brusque et une diminution de vitesse en amont de la section $x = 0$, lesquelles se propagent le long du tuyau avec la vitesse Ω.

C'est là le *coup de bélier simple ou direct*. Comme d'après les données mêmes, la surpression ne peut se propager que dans le sens des x positifs, au moins au début, les équations (1) ne peuvent contenir que la fonction F, et deviennent :

$$y - y_0 = F\left(t - \frac{x}{\Omega}\right), \quad U_0 - U = \frac{g}{\Omega} F\left(t - \frac{x}{\Omega}\right). \quad (4)$$

Il résulte de là que l'on a : $y - y_0 = \frac{\Omega}{g}(U_0 - U)$; le rapport de la surcharge et de la perte de vitesse est constant dans toute section et à tout instant.

Au bout du temps $\frac{L}{\Omega}$, la perturbation aura atteint le réservoir et y donnera lieu à une *réaction* dont nous ne dirons rien pour le moment, mais qui emploiera le temps $\frac{L}{\Omega}$ pour parcourir le tuyau en sens inverse et rejoindre la section $x = 0$, et le temps $\frac{L - x}{\Omega}$ pour rejoindre la section d'abscisse x.

Ainsi, pendant le temps $\frac{2L}{\Omega} = \tau$ pour la section $x = 0$ et $\frac{2L - x}{\Omega} = \tau - \frac{x}{\Omega}$ pour une section quel-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

conque, le phénomène est régi par les formules (4). C'est ce qu'on appelle la *phase du coup de bélier simple*.

Le maximum de la surcharge a lieu pour $U = o$ et vaut $H = y_0 + \frac{\Omega U_0}{g}$; il ne peut être atteint que si la fermeture complète dure moins que τ, et τ est très court, car Ω est, pour les tuyaux métalliques, d'environ 1000 mètres par seconde.

La loi de variation de λ est connue, mais non celle de $F(t)$, et la question est précisément de déterminer cette dernière fonction. Il suffit, à cet effet, d'éliminer, entre les équations :

$$Y = y(o, t) = y_0 + F(t),$$

$$U' = U(o, t) = U_0 - \frac{g}{\Omega} F(t),$$

$$U' = U_0 \lambda \frac{\sqrt{Y}}{y_0},$$

les quantités Y et U'. Il vient de suite :

$$U_0 - \frac{g}{\Omega} F(t) = U_0 \lambda \sqrt{1 + \frac{F(t)}{y_0}},$$

et $F(t)$ est donné par la résolution d'une équation du second degré. Nous reviendrons sur cette résolution au paragraphe suivant.

La fonction $\xi_1 = F(t)$ définit le coup de bélier simple; dès qu'on la connaît, en remplaçant l'argument t par $t - \frac{x}{\Omega}$, on a la solution du problème.

Au bout du temps $t > \tau - \frac{x}{\Omega}$, il y a lieu de mettre en compte, dans la section d'abscisse x, la réaction due au réservoir. Le phénomène produit entre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les instants $\tau - \frac{x}{\Omega}$ et $2\tau - \frac{x}{\Omega}$ forme le *contrecoup du bélier*. La réaction étant une perturbation qui se propage vers l'orifice d'écoulement, les variations de pression et de vitesse seront représentées par les équations (1) complètes :

$$y - y_0 = F\left(t - \frac{x}{\Omega}\right) - F_1\left(t + \frac{x}{\Omega}\right),$$

$$U_0 - U = \frac{g}{\Omega}\left\{F\left(t - \frac{x}{\Omega}\right) + F_1\left(t + \frac{x}{\Omega}\right)\right\}.$$

La fonction nouvelle F_1 sera déterminée par la condition que, dans la section $x = L$, à l'entrée du réservoir, y soit égal à y_0. [La charge dans le réservoir est en effet supposée assez grande pour que les perturbations hydrauliques de la conduite ne puissent la modifier que de quantités négligeables par rapport à elle-même.] Il vient ainsi, pour déterminer F_1, la relation :

$$F_1\left(t + \frac{L}{\Omega}\right) = F\left(t - \frac{L}{\Omega}\right).$$

Posons $t + \frac{L}{\Omega} = t' + \frac{x}{\Omega}$; la substitution de la variable t' à t donne :

$$F_1\left(t' + \frac{x}{\Omega}\right) = F\left(t' + \frac{x}{\Omega} - \frac{2L}{\Omega}\right) = F\left(t' - \tau + \frac{x}{\Omega}\right).$$

Ainsi, on a (en supprimant l'accent du paramètre t'), durant la période τ que dure la phase du contrecoup :

$$y = y_0 + F\left(t - \frac{x}{\Omega}\right) - F\left(t - \tau + \frac{x}{\Omega}\right),$$

$$U = U_0 - \frac{g}{\Omega}\left\{F\left(t - \frac{x}{\Omega}\right) + F_1\left(t - \tau + \frac{x}{\Omega}\right)\right\}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour déterminer la fonction $F(t)$ quand t est compris entre τ et 2τ, nous avons, comme plus haut, les équations : $Y = y_0 + F(t) - F(t-\tau)$,

$$U' = U_0 - \frac{g}{\Omega}\left\{F(t) + F(t-\tau)\right\},$$

$$U' = U_0\lambda\sqrt{\frac{Y}{y_0}},$$

desquelles on déduit :

$$U_0 - \frac{g}{\Omega}\left\{F(t) + F(t-\tau)\right\} = U_0\lambda\sqrt{1 + \frac{F(t) - F(t-\tau)}{y_0}}.$$

Le coup de bélier de la seconde période est :

$$\xi_1 = F(t) - F(t-\tau),$$

$F(t)$ étant défini par la résolution de cette équation du second degré, et $F(t-\tau)$, fonction relative à une valeur de l'argument intérieure à la durée de la première phase, étant donné par l'équation du second degré rencontrée plus haut.

Le même procédé de calcul s'appliquerait au calcul du coup de bélier de la période suivante, allant de l'instant 2τ à l'instant 3τ, et ainsi de suite, jusqu'à la $n^{ième}$ période, allant de l'instant $(n-1)\tau$ à l'instant $n\tau$.

2. **Calcul approché des coups de bélier successifs.** — Nous allons emprunter à M. le comte Magnus de Sparre[1] une méthode approchée très simple pour calculer les coups de bélier successifs.

[1] M. de Sparre, p. 41-63.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Soit $\xi_n = 2y_0\zeta_n$ la valeur du coup de bélier durant la $n^{\text{ième}}$ période. Les équations d'Alliévi s'écrivent, pour la première période :

$$\xi_1 = 2y_0\zeta_1 = F(t), \qquad (5)$$

$$U' = U_0 - \frac{2gy_0}{\Omega}\zeta_1 = U_0\lambda_1\sqrt{1+2\zeta_1}, \qquad (6)$$

et pour l'une quelconque des périodes suivantes :

$$\xi_n = 2y_0\zeta_n = F(t) - F(t-\tau), \qquad (7)$$

$$U' = U_0 - \frac{g}{\Omega}[F(t) + F(t-\tau)] = U_0\lambda_n\sqrt{1+2\zeta_n}. \qquad (8)$$

L'écart $1+\zeta_n - \sqrt{1+2\zeta_n}$ est égal à 0,042 ; 0,025 ; 0,085 quand ζ_n vaut $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$. Le plus souvent, le rapport de ξ_n à y_0 est très inférieur, en module, à $\frac{1}{2}$, et, au degré d'approximation qu'il s'agit d'obtenir, on pourra substituer $1+\zeta_n$ au radical. L'équation (8) s'écrira alors :

$$F(t) + F(t-\tau) = \frac{\Omega U_0}{g}[1 - \lambda_n(1+\zeta_n)]. \qquad (9)$$

Appliquons successivement l'équation (7) à toutes les périodes antérieures à la $n^{\text{ième}}$:

$$2y_0\zeta_n = F(t) - F(t-\tau),$$
$$2y_0\zeta_{n-1} = F(t-\tau) - F(t-2\tau),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2y_0\zeta_2 = F[t-(n-2)\tau] - F[t-(n-1)\tau],$$
$$2y_0\zeta_1 = F[t-(n-1)\tau].$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Par suite, en additionnant, nous voyons que si t est compris entre $(n-1)\tau$ et $n\tau$, on a :

$$F(t) = 2y_0(\zeta_n + \zeta_{n-1} + \ldots + \zeta_2 + \zeta_1). \quad (10)$$

Pour la période précédente, on aurait :

$$F(t-\tau) = 2y_0(\zeta_{n-1} + \ldots + \zeta_2 + \zeta_1). \quad (11)$$

En éliminant $F(t)$ et $F(t-\tau)$ entre les équations (9), (10), (11) et en posant $a = \frac{\Omega u_0}{2gy_0}$, il viendra :

$$\zeta_n + 2(\zeta_{n-1} + \ldots + \zeta_2 + \zeta_1) = a\left[1 - \lambda_n(1 + \zeta_n)\right].$$

On aurait pareillement :

$$\zeta_{n-1} + 2(\zeta_{n-2} + \ldots + \zeta_2 + \zeta_1) = a\left[1 - \lambda_{n-1}(1 + \zeta_{n-1})\right].$$

Par différence, on obtient une relation de récurrence entre ζ_n et ζ_{n-1}, qui, résolue par rapport à ζ_n, donne :

$$\zeta_n = \frac{a(\lambda_{n-1} - \lambda_n)}{1 + a\lambda_n} - \frac{1 - a\lambda_{n-1}}{1 + a\lambda_n}\zeta_{n-1}, \quad (12)$$

tandis que, d'autre part, l'équation (6) fait connaître ζ_1 :

$$\zeta_1 = \frac{a(1 - \lambda_1)}{1 + a\lambda_1}. \quad (13)$$

Dans ces formules, ζ_n est (au facteur $2y_0$ près) le coup de bélier à un instant t quelconque de la $n^{ième}$ période $\left[(n-1)\tau \leqq t \leqq n\tau\right]$; ζ_{n-1}, ζ_{n-2}, ..., ζ_1 sont les valeurs du coup de bélier à l'instant correspondant de l'une des périodes précédentes, soit pour $t-\tau$, $t-2\tau$, ..., $t-(n-1)\tau$. De même, λ_n représente le rapport de l'ouverture du distributeur à un instant de la $n^{ième}$ période à son ouverture à l'état de régime initial, et λ_{n-1}, λ_{n-2}, ..., λ_1 ce même rapport à l'instant correspondant de l'une des périodes précédentes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ζ_n est fourni par la résolution du système (12) et (13), et $F(t)$ s'en déduit par la formule (10).

La fonction $F(t)$ étant connue, la charge et la vitesse dans une section située à la distance x du distributeur sont données par les formules de M. Alliévi :

$$y = y_0 + F\left(t - \frac{x}{\Omega}\right) - F\left(t - \tau + \frac{x}{\Omega}\right), \quad (14)$$

$$U = U_0 - \frac{g}{\Omega}\left\{F\left(t - \frac{x}{\Omega}\right) + F\left(t - \tau + \frac{x}{\Omega}\right)\right\}. \quad (15)$$

3. **Fermeture brusque du distributeur.** — Appliquons ces généralités au cas d'une *fermeture brusque* : l'orifice d'écoulement est fermé subitement d'une certaine fraction, et cette fermeture partielle est ensuite maintenue. Alors λ_1 est une constante, et $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ lui sont égales. De plus, la vitesse de régime U_1 qui tend à s'établir après la fermeture est égale à $\lambda_1 U_0$. — La relation (12) se réduit à :

$$\zeta_n = -\frac{1 - a\lambda_1}{1 + a\lambda_1}\zeta_{n-1}.$$

Les coups de bélier successifs forment donc une progression géométrique décroissante, dont le premier terme est $a\frac{1-\lambda_1}{1+a\lambda_1}$ et dont la raison est $-\frac{1-a\lambda_1}{1+a\lambda_1}$. Cette progression sera généralement à termes alternés, et les coups de bélier seront, par suite, alternativement positifs et négatifs. Il n'y aurait d'exception que si l'on avait $a\lambda_1 > 1$ ou $U_1 > \frac{2gy_0}{\Omega}$, en supposant d'ailleurs que ζ_1 n'excède pas la limite de validité de la simplification employée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il y a lieu de corriger ces résultats de l'influence de la perte de charge due aux frottements et qui peut avoir une influence notable s'il s'agit de hautes chutes.

Pour apprécier la dite influence, voyons préalablement ce qui se passe dans une section d'abscisse x. Dans cette section, la charge et la vitesse sont définies par les équations (14) et (15) ; de plus, $F(t)$, nul pour t négatif, est égal à $2y_0(\zeta_n + \ldots + \zeta_1)$ pour

$$(n-1)\tau < t < n\tau.$$

Par suite on a :

pour t compris entre			$y - y_0 =$	$U - U_0 =$
0	et	$\frac{x}{\Omega}$,	0	0
$\frac{x}{\Omega}$	»	$\tau - \frac{x}{\Omega}$,	$2y_0\zeta_1$,	$-\frac{U_0}{a}\zeta_1$,
$\tau - \frac{x}{\Omega}$	»	$\tau + \frac{x}{\Omega}$,	0	$-\frac{U_0}{a}2\zeta_1$,
$\tau + \frac{x}{\Omega}$	»	$2\tau - \frac{x}{\Omega}$,	$2y_0\zeta_2$,	$-\frac{U_0}{a}(2\zeta_1 + \zeta_2)$,
$2\tau - \frac{x}{\Omega}$	»	$2\tau + \frac{x}{\Omega}$,	0	$-\frac{U_0}{a}(2\zeta_1 + 2\zeta_2)$,
$2\tau + \frac{x}{\Omega}$	»	$3\tau - \frac{x}{\Omega}$,	$2y_0\zeta_3$.	$-\frac{U_0}{a}(2\zeta_1 + 2\zeta_2 + \zeta_3)$,

. . . . . .

D'après cela, on reconnaît que, dans cette section, le coup de bélier se produit avec la même intensité qu'à proximité du distributeur, mais durant un temps beaucoup moindre. Si l'on prend la valeur moyenne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du coup de bélier pendant chacune des périodes de durée τ, on voit que, pendant la période de o à τ, valeur moyenne est $\frac{1}{\tau}\xi_1\left(\tau-\frac{2x}{\Omega}\right)$, ou $\xi_1\left(1-\frac{x}{L}\right)$; pendant la période de τ à 2τ, elle est de même $\xi_2\left(1-\frac{x}{L}\right)$, et ainsi de suite. Si donc la valeur maxima du coup de bélier est la même en tous les points du tuyau, sa valeur moyenne, pendant chacune des périodes τ successives, est proportionnelle à la distance de la tranche considérée au réservoir.

Soit à apprécier maintenant l'influence, parfois importante, de la perte de charge par frottement sur le calcul des coups de bélier. H étant la charge à l'état statique, η la perte de charge correspondant à la vitesse U_0, on a initialement $y_0 = H - \eta$. A la fin de chacune des périodes, pour $t = \tau, \quad 2\tau, \ldots,$ la vitesse est la même en tous les points du tuyau et vaut successivement :

$$U = U_0\left[1 - 2\frac{\zeta_1}{a}\right], \quad U_0\left[1 - \frac{2(\zeta_1+\zeta_2)}{a}\right],$$

$$U_0\left[1 - \frac{2(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)}{a}\right], \ldots$$

On calculera les pertes de charge $\eta_1, \eta_2, \ldots$, correspondant à la valeur absolue de chacune de ces vitesses. A l'instant τ, la charge de régime serait $H \mp \eta_1$, $\mp$ selon que la vitesse est positive ou négative, et le coup de bélier correspondant aurait pour mesure $\xi_1 + \eta \mp \eta_1$. On aurait un résultat analogue pour chacune des périodes suivantes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4. **Fermeture progressive du distributeur.** — Supposons que la fermeture du distributeur soit progressive et même se fasse uniformément, exigeant un temps T pour se faire complètement. On a alors :

$$\lambda_{n-1} - \lambda_n = \frac{\tau}{T}.$$

Reprenons l'équation de récurrence (12) ou :

$$\zeta_n + \zeta_{n-1} = a\left\{\lambda_{n-1}(1+\zeta_{n-1}) - \lambda_n(1+\zeta_n)\right\},$$

et faisons, pour la ramener au type homogène, le changement d'inconnues :

$$\zeta_n = Z_n + l, \qquad \zeta_{n-1} = Z_{n-1} + l,$$

l étant déterminé par la condition :

$$2l = a(1+l)(\lambda_{n-1} - \lambda_n) = \frac{a\tau(1+l)}{T}.$$

La nouvelle relation s'écrit :

$$Z_n = -\frac{1 - a\lambda_{n-1}}{1 + a\lambda_n} Z_{n-1},$$

et fournit de suite Z_n en fonction de Z_1. Or on a :

$$Z_1 = \zeta_1 - l = \frac{a(1-\lambda_1)}{1+a\lambda_1} - \frac{a\tau}{2T - a\tau},$$

ou :
$$Z_1 = l\frac{2T(1-\lambda_1) - (1+a\tau)}{(1+a\lambda_1)\tau}.$$

Par conséquent nous aurons :

$$\zeta_n = l\left\{1 + (-1)^{n-1}\left[\frac{2T}{\tau}(1-\lambda_1) - \frac{1}{\tau} - a\right]\Pi_n\right\},$$

en posant :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\Pi_n = \frac{(1 - a\lambda_1) \dots (1 - a\lambda_{n-1})}{(1 + a\lambda_1) \dots (1 + a\lambda_{n-1})(1 + a\lambda_n)}.$$

Pour suivre les variations de ζ_n, il y a lieu de distinguer deux cas :

1° $a < 1$. Alors λ_1 décroît de 1 à $\frac{\tau}{T}$ quand t croît de 0 à τ; d'ailleurs, on a $\lambda_n = \lambda_{n-1} - \frac{\tau}{T}$, et par suite on obtient (en module) :

$$|Z_n| < |Z_{n-1}|.$$

Il s'ensuit que la valeur maxima du coup de bélier a lieu pour $n = 1$, $t = \tau$, et cette valeur est la valeur associée de ξ_1 pour $\lambda_1 = 1 - \frac{\tau}{T}$. Comme on a $\xi_1 = 2\gamma_0\zeta_1$, il vient :

$$\xi_M = \frac{2LU_0}{gT} \cdot \frac{1}{1 + \frac{U_0}{g\gamma_0}\left[\frac{\Omega}{2} - \frac{L}{T}\right]}. \qquad (16)$$

Si $\frac{\Omega U_0}{2g\gamma_0} = a$ est assez faible, on aura sensiblement :

$$\zeta_M = \frac{2LU_0}{gT} \cdot \left\{1 - \frac{U_0}{g\gamma_0}\left[\frac{\Omega}{2} - \frac{L}{T}\right]\right\}.$$

2° $a > 1$. Alors Z_2 sera de même signe que Z_1, au moins tandis que t varie de τ à 2τ, et même pendant tout le temps, si $a\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) > 1$. Le numérateur de Π_n se compose de facteurs dont le premier ou les premiers sont négatifs et les autres positifs. Il y en aura parmi eux un certain nombre qui seront

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

très petits, la différence d'un facteur au suivant $a(\lambda_{p-1} - \lambda_p)$ valant $\frac{LU_0}{gTy_0}$, quantité qui est généralement très faible Le produit Π_n sera donc très petit, et ζ_n tendra vers la valeur constante l. On aura ainsi :

$$\xi_M = 2y_0 \cdot \frac{a\tau}{2T - a\tau} = \frac{LU_0}{gT} \cdot \frac{1}{1 - \frac{U_0 L}{2gTy_0}}. \quad (17)$$

Pour $a = 1$, les formules (16) et (17) donnent la même valeur de ξ_M.

Les formules précédentes ne sont valables que *jusqu'à l'arrêt de la vanne*. A partir de ce moment, on usera de la formule :

$$\zeta_n = \frac{a(\lambda_{n-1} - \lambda_n)}{1 + a\lambda_n} - \frac{1 - a\lambda_{n-1}}{1 + a\lambda_n} \zeta_{n-1},$$

où λ_n a la valeur fixe qui correspond au point où l'on a arrêté la vanne, et où λ_{n-1} varie de la valeur qu'il avait au moment de l'arrêt de la vanne jusqu'à λ_n. Au bout d'un temps τ consécutif à l'arrêt, on a : $\lambda_{n-1} = \lambda_n$,

et : $$\zeta_n = -\frac{1 - a\lambda_n}{1 + a\lambda_n} \zeta_{n-1},$$

et l'on retrouve les formules qui correspondent à une fermeture brusque du distributeur.

5. **Fermeture par vanne d'étranglement.** — Imaginons que la fermeture progressive, au lieu d'être obtenue par le distributeur lui-même, le soit par une vanne d'étranglement.

La conduite, de section σ, est raccordée avec un autre tuyau de section plus petite σ_1, de manière à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

éviter les pertes de charge; dans ce second tuyau est disposée une vanne d'étranglement réduisant la section à $\lambda\sigma_1$; puis la section redevient σ_1 entre la vanne et l'extrémité du tuyau qui se finit en ajutage de section s, formant distributeur.

Supposons que le régime permanent soit établi : cette hypothèse n'est pas exactement admissible durant la production des coups de bélier; mais, eu égard aux faibles dimensions de la région envisagée par rapport à la longueur totale de la conduite, nous pourrons l'accepter en première approximation.

Jusqu'à la vanne, la charge est y; au delà, elle est $y - \eta$, la perte de charge η étant donnée par la règle de Borda.

Soient U', U_1, U'_1 et $\mathcal{V}$ les vitesses à travers la section σ, à travers la section σ_1 avant et sous la vanne, à travers la section s. L'équation de continuité donne :

$$U'\sigma = U_1\sigma_1 = U'_1\lambda\sigma_1 = \mathcal{V}s,$$

et l'on a :

$$\eta = \frac{(U'_1 - U_1)^2}{2g} = \frac{U'^2}{2g}\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)^2.$$

D'ailleurs, à la sortie du distributeur, la vitesse $\mathcal{V}$ est définie par la relation :

$$\mathcal{V}^2 = \mu^2 \cdot 2g(y - \eta),$$

μ^2 étant un coefficient très voisin de l'unité (0,98 dans les expériences citées plus bas). Remplaçons η par la valeur précédente et $\mathcal{V}$ par $U'\frac{\sigma}{s}$. Il vient :

$$U'^2\left[1 + \mu^2\frac{s^2}{\sigma_1^2}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)^2\right] = \frac{2gs^2\mu^2}{\sigma^2}y.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Soit U_0 la vitesse de régime dans le tuyau, lorsque la vanne est complètement ouverte ($\lambda = 1$). Il vient, la charge étant y_0 :

$$U_0^2 = \frac{2gs^2\mu^2}{\sigma^2} y_0.$$

L'élimination de $\frac{2gs^2\mu^2}{\sigma^2}$ donne :

$$U' = \lambda' U_0 \sqrt{\frac{y}{y_0}}, \qquad (18)$$

λ' étant défini par la relation :

$$\frac{1}{\lambda'^2} = 1 + \mu^2 \frac{s^2}{\sigma_1^2} \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)^2. \qquad (19)$$

La formule (18) coïncide avec celle dont nous sommes partis, à cela près que le coefficient λ est remplacé par λ'.

Pour les fermetures brusques, les résultats subsistent, car les formules ne dépendent que du rapport $\frac{U_0}{U_1} = \lambda_1$ des vitesses de régime avant et après la fermeture partielle.

Pour les fermetures progressives, il faudrait remplacer les coefficients λ_p par les coefficients λ'_p qui s'en déduisent par la formule (19).

Pratiquement, pour les hautes chutes, on peut considérer les fermetures comme se produisant toujours brusquement, la plus grande partie de la variation de λ de 1 à 0 n'influençant qu'insensiblement λ'.

Prenons par exemple, avec M. de Sparre, une chute de 200 mètres alimentant une turbine à libre déviation ; la vitesse à la sortie du distributeur serait supérieure à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

60 mètres, et pour que la perte de charge ne soit pas trop forte, la vitesse dans la partie rétrécie ne devrait pas dépasser 5 à 6 mètres, et cette valeur est même rarement admise. $\frac{s}{\sigma_1}$ est donc au plus égal à $\frac{1}{10}$. Pour $\frac{s}{\sigma_1}=\frac{1}{10}$ et $\mu=1$, à $\lambda=\frac{1}{4}$, correspond $\lambda'=0{,}958$; à $\lambda=\frac{1}{10}$, correspond $\lambda'=0{,}745$.

Ainsi, quand la vanne sera fermée des neuf dixièmes, le coefficient fictif λ' ne sera réduit que d'un quart.

Si la vanne est fermée de manière à étrangler l'orifice uniformément en 12 secondes, au bout de $10^s{,}8$, le débit serait réduit d'un quart; l'arrêt du débit aura donc lieu presque complètement pendant les deux dernières secondes, et notamment durant la dernière.

Si la vanne était établie sur la conduite et non sur une partie rétrécie, le rapport $\frac{s}{\sigma}$ $\left(\text{remplaçant } \frac{s}{\sigma_1}\right)$ serait bien plus petit, car la vitesse ne peut guère dépasser, dans la partie principale de la conduite, 1 ou 2 mètres. Pour une vitesse de 1 mètre, on aurait $\frac{s}{\sigma}=\frac{1}{60}$. A $\lambda=\frac{1}{10}$, correspond $\lambda'=0{,}989$; à $\lambda=\frac{1}{60}$, correspond $\lambda'=0{,}953$. Pour une fermeture uniforme d'une durée de 10 secondes, durant $9^s{,}5$, le débit n'est réduit que de $\frac{5}{100}$, et la réduction de $\frac{95}{100}$ se fera durant la dernière demi-seconde, soit durant un temps moindre jusqu'à la période τ.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ainsi la fermeture par vanne d'étranglement (et la fermeture par robinet est comparable à celle-là) équivaut à une fermeture brusque.

Des expériences faites à l'usine Saint-Henri, à Allevard, sous la direction de M. Pinat, ont confirmé, dans l'hypothèse des fermetures brusques, les résultats de la théorie précédente.

Pour remédier aux effets des coups de bélier, on établit souvent, le long des conduites et notamment dans le voisinage des turbines, des cheminées en communication avec l'atmosphère. Dans ces tubes piézométriques ou cheminées d'aération, l'eau peut facilement osciller et amortir son énergie cinétique lors des variations d'ouverture du distributeur.

M. de Sparre[1] a étudié, dans le même ordre d'idées, l'influence de ces tubes piézométriques dans le cas d'une fermeture brusque. Il a montré que si les cheminées ont un diamètre à peu près égal à celui de la conduite (telles que celles installées par la Société de Fure et Morge à son usine de Champ), elles suppriment presque complètement les coups de bélier, tandis que les tubes piézométriques de petit diamètre ne les atténuent presque pas.

[1] M. DE SPARRE, p. 29-39.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

ALIBRANDI (P.). *Alcuni problemi sull' efflusso dei vasi* (Annali della Soc. degli Ingegneri e degli Architetti italiani; 1906, n° 6; p. 135-208).

ALLIÉVI (L.). *Théorie générale du mouvement varié de l'eau dans les tuyaux de conduite* (Revue de Mécanique, janvier et mars 1904).

BAZIN (H.). 1. *Expériences sur la contraction des veines liquides et sur la distribution des vitesses dans leur intérieur* (Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie des sciences, t. XXXII, n° 4; 1896).

— 2. *Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir exécutées à Dijon de 1886 à 1895* [Annales des Ponts et chaussées : 1er art., 1888, 2e sem., p. 393-448; — 2e art., 1890, 1re sem., p. 9-82; — 3e art., 1891, 2e sem., p. 445-520; — 4e art., 1894, 1re sem., p. 249-357; — 5e art., 1896, 2e sem., p. 645-501; — 6e art., 1898, 2e sem., p. 151-264. Ces articles ont été résumés dans une brochure]. Paris, 1898, Dunod, in-8°.

— 3. *Recherches hydrauliques sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts et sur la propagation des ondes* (Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie des sciences, t. XIX; 1865).

BÉLANGER (J.-B.). 1. *Essai sur la solution numérique de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes.* Paris, 1828.

— 2. *Résumé lithographié des Leçons d'Hydraulique professées à l'Ecole centrale des Arts et manufactures.* Paris, 1840-1841.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Bélanger (J.-B.). 3. *Notes sur l'hydraulique. Cours de l'Ecole des Ponts et chaussées.* Paris, 1841-1842, in-4°.

Borda (Chev. de). *Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases* (Hist. de l'Acad. royale des sciences, année 1766, avec les mémoires de mathématiques et de physique pour la même année, p. 579-607). Paris, 1769.

Boudin (G.). *De l'axe hydraulique des cours d'eau contenus dans un lit prismatique et des dispositifs réalisant en pratique ses formes diverses* (Annales des Travaux publics de Belgique, t. XX, 1863; Gand et Paris).

Boulanger (A.). 1. *Théorie de l'onde solitaire qui se propage le long d'un tube élastique horizontal* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. CXLI, p. 1001, 11 décembre 1905).

— 2. *Extinction de l'onde solitaire propagée le long d'un tube élastique horizontal* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. CXLII, p. 388, 12 février 1906).

— 3. *Mécanique appliquée* (*Mécanique des solides naturels; Elasticité et résistance des matériaux; Hydraulique*). Lille, 1906, Schaller, in-4°.

Boussinesq (J.). 1. *Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. LXX, p. 33, 3 janvier 1870; p. 177, 31 janvier 1870; p. 1279, 13 juin 1870).

— 2. *Essai sur la théorie des eaux courantes* (Mémoires présentés par divers Savants à l'Acad. des sciences, t. XXIII, n° 1, p. 1-680; 1877).

Additions et éclaircissements (*Ibid.*, t. XXIV, n° 2, p. 1-64; 1878).

— 3. *Sur la théorie de l'écoulement des liquides par les orifices en mince paroi, circulaires ou rectangulaires allongés; calcul approché du débit et de sa répartition entre les divers éléments superficiels de l'orifice* (Journal de Physique, 3e série, t. I, 1892, p. 265-285; — reproduction de trois notes insérées aux C. R. de l'Acad. des sciences, t. CXIV, p. 704, 28 mars 1892; p. 807, 4 avril 1892; p. 868, 11 avril 1892).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

BOUSSINESQ (J.). 4. *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques.* Mémoire suivi de notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse. (Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 4e série, t. XIII, p. 1-722; 1885).

— 5. *Théorie approchée de l'écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale* (Mémoire de l'Acad. des sciences, t. L, p. 1-118; 1907).

Addition au précédent Mémoire sur la théorie de l'écoulement en déversoir (*Ibid.*, p. 121-134).

— 6. 1° *Sur la théorie de l'écoulement par un déversoir en mince paroi quand il n'y a pas de contraction latérale et que la nappe déversante est libre en dessous* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. CV, p. 17; 4 juillet 1887).

2° *Sur la théorie des déversoirs en mince paroi et à nappe soit déprimée, soit soulevée* (*Ibid.*, p. 585, 10 octobre 1887).

3° *Sur la théorie des déversoirs épais, ayant leur seuil horizontal et évasé ou non à son entrée* (*Ibid.*, p. 632, 17 octobre 1887).

4° *Sur une forme de déversoir en mince paroi (analogue à l'ajutage rentrant de Borda) pour laquelle le relèvement de la face inférieure de la nappe liquide (à la sortie du déversoir) peut être déterminée théoriquement* (*Ibid.*, p. 697, 24 octobre 1887).

5° *Complément à la théorie des déversoirs en mince paroi qui s'étendent à toute la largeur du lit d'un cours d'eau : influence, sur le débit, des vitesses d'arrivée des filets fluides* (*Ibid.*, t. CVII, p. 513, 17 septembre 1888).

6° *Id. : applications* (*Ibid.*, p. 538, 24 septembre 1888).

7° *Id. : mise en compte des variations de la contraction qu'éprouve la nappe déversante, du côté de sa face inférieure* (*Ibid.*, t. CIX, p. 515, 30 septembre 1889).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Boussinesq (J.) 8° *Id. : calcul approché, pour les nappes déprimées ou noyées en dessous, de la non-pression exercée à leur face inférieure, d'après l'élévation imposée au niveau d'aval dans le canal de fuite* (*Ibid.*, p. 541, 7 octobre 1889).

9° *Id. : mise en compte des variations qu'éprouve, suivant le niveau d'aval, la contraction inférieure de la nappe déversante* (*Ibid.*, t. CXVI, p. 1327, 12 juin 1893).

10° *Id. : vérifications dans le cas d'une nappe libre en dessous* (*Ibid.*, p. 1415, 19 juin 1893).

11° *Id. : calcul théorique de la contraction inférieure, dans les déversoirs en mince paroi à nappe libre en dessous, quand cette contraction atteint ses plus grandes valeurs, — et vérifications expérimentales* (*Ibid.*, p. 1487, 26 juin 1893).

12° *Théorie de l'écoulement sur un déversoir sans contraction latérale quand la nappe déversante se trouve ou déprimée, ou noyée en dessous, ou adhérente au barrage* (*Ibid.*, t. CXIX, p. 589, 8 octobre 1894).

13° *Détermination, en partie expérimentale et en partie théorique, de la contraction inférieure d'une nappe de déversement déprimée ou noyée en dessous, ou même adhérente sur un barrage ayant sa face d'amont verticale* (*Ibid.*, p. 618, 15 octobre 1894).

14° *Vérifications expérimentales de la théorie des déversoirs à nappes noyées en dessous ou adhérentes : vérifications relatives au débit et à la contraction inférieure* (*Ibid.*, p. 663, 22 octobre 1894).

15° *Id. : vérifications relatives aux pressions* (*Ibid.*, p. 707, 29 octobre 1894).

16° *Id. : cas où une armature horizontale rend la contraction inférieure maximum* (*Ibid.*, p. 771, 5 novembre 1894).

— 7. 1° *Théorie approchée de l'écoulement sur un déversoir vertical en mince paroi sans contraction latérale et à nappe libre* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. CXLIV, p. 668, 25 mars 1907).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

BOUSSINESQ (J.). 2° *Calcul de la contraction inférieure de la nappe sur un déversoir en mince paroi et de hauteur modérée, à nappe libre, armé, à sa partie supérieure, d'une plaque horizontale rejetant vers l'amont les filets fluides inférieurs* (*Ibid.*, p. 705, 2 avril 1907).

3° *Théorie approchée de l'écoulement sur un déversoir vertical en mince paroi, sans contraction latérale et à nappe noyée en dessous* (*Ibid.*, t. CXLV, p. 10, 1er juillet 1907).

4° *Théorie approchée de l'écoulement sur un déversoir avec armature et à nappe noyée en dessous* (*Ibid.*, p. 101, 8 juillet 1907).

— **8.** 1° *Sur l'extinction graduelle de la houle de mer aux grandes distances de son lieu de production : formation des équations du problème* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. CXX, p. 1381, 24 juin 1895).

2° *Lois de l'extinction d'une houle simple en haute mer* (*Ibid.*, t. CXXI, p. 15, 1er juillet 1895).

3° *Sur la manière dont se régularise au loin, en s'y réduisant à une houle simple, toute agitation confuse, mais périodique des flots* (*Ibid.*, p. 85, 8 juillet 1895).

— **9.** *Complément à une étude intitulée : « Essai sur la théorie des eaux courantes », et à un mémoire « Sur l'influence des frottements sur les mouvements réguliers des fluides »*. (Journal de mathématiques pures et appliquées; 1878; 3e série, t. IV, p. 335-376; — § 2. Influence du frottement extérieur sur le coefficient d'extinction des ondes périodiques ou non périodiques, quand les mouvements sont bien continus, p. 346-366; — § 3. Des pertes de charge qui se produisent dans l'écoulement d'un liquide quand la section vive du fluide éprouve un accroissement brusque, p. 366-370).

— **10.** *Sur les déformations et l'extinction des ondes aériennes propagées dans un tuyau de conduite sans eau* (Journal de Physique, 2e série, t. X, p. 301-332,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Boussinesq (J.). juillet 1891; — voir aussi les C. R. de l'Acad. des sciences, t. CXII, p. 1340, 15 juin 1891; t. CXVII, p. 12, 3 juillet 1893).

— 11. *Équations des petits mouvements d'un liquide pesant, quand ils sont principalement horizontaux, que les frottements s'y trouvent peu sensibles, et que le liquide est contenu soit dans un bassin à fond presque horizontal, soit dans un tuyau ou un canal de peu de pente longitudinale, la surface supérieure, soumise à des pressions constantes ou légèrement variables, n'ayant aussi que de faibles pentes. — Sur la pression moyenne en chaque point de l'espace qu'occupe un liquide agité.* (Journal de mathématiques pures et appliquées; 3e série, t. IX, 1883; p. 273-300, p. 425-431.) Une note (p. 429-431) est consacrée à la résistance des coudes.

— 12. 1° *Propagation des ondes le long d'une colonne liquide compressible, se composant de filets à vitesses inégales et remplissant un tuyau élastique horizontal, sans tension longitudinale* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. CXLI, p. 8, 3 juillet 1905).

2° *Calcul, pour les diverses contextures et épaisseurs de paroi possibles, de la résistance élastique qu'un tuyau plein sans tension longitudinale oppose au gonflement de la colonne liquide le remplissant* (*Ibid.*, p. 81, 10 juillet 1905).

3° *Sur un cas simple, où se calculent aisément l'action mutuelle des anneaux juxtaposés constituant un tuyau et l'influence de cette action mutuelle sur la propagation des ondes liquides dans le tuyau* (*Ibid.*, p. 234, 24 juillet 1905).

— 13. *Propagation des ondes le long d'une colonne liquide compressible, se composant de filets à vitesses inégales et contenue dans un tuyau élastique horizontal, sans tension longitudinale* (Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, 3e série, t. XXI, p. 349-368; 1905).

— 14. *Sur la résistance qu'oppose un liquide*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

BOUSSINESQ (J.). *indéfini en repos, sans pesanteur, au mouvement varié d'une sphère solide qu'il mouille sur toute sa surface, quand les vitesses restent bien continues et assez faibles pour que leurs carrés et produits soient négligeables* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. C, p. 935, 6 avril 1885).

— 15. *Résistance qu'éprouve un cylindre circulaire indéfini, plongé dans un fluide, à se mouvoir dans une direction perpendiculaire à son axe* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. C, p. 974, 13 avril 1885).

— 16. *Théorie analytique de la chaleur.* Tome II, note 1 : *Sur la résistance opposée aux petits mouvements d'un fluide indéfini par un solide immergé dans ce fluide* (p. 199-264). Paris, 1903; Gauthier-Villars, in-8°.

— 17. 1° *Sur la manière dont les frottements entrent en jeu dans un fluide qui sort de l'état de repos, et sur leur effet pour empêcher l'existence d'une fonction des vitesses* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. XC, p. 736; 29 mars 1880).
2° *Quelques considérations sur l'impossibilité d'admettre, en général, une fonction des vitesses dans une question d'hydraulique où les frottements jouent un rôle notable* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. XC, p. 967, 26 avril 1880).

— 18. *Notice sur les travaux scientifiques de M. Boussinesq, et suppléments à cette notice.* Lille, 1880, 1883, 1885. Danel, in-4°.

BRILLOUIN (M.). *Questions d'hydrodynamique*, ch. IV : Ecoulement des liquides. Jets. (Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, t. I, 1887; p. 41-72.)

BUAT (L. G. DU). *Principes d'hydraulique et de pyrodynamique.* Paris, 1816; Firmin-Didot, 3 vol. in-8°.

CALIGNY (Mis A. DE). *Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau et les machines hydrauliques à colonnes liquides oscillantes.* Versailles, 1880-1883. 2 vol. in-8°.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CORIOLIS (G.-G.). *Du calcul des effets des machines.* Paris, 1829. Carilian-Gœury, 1 vol. in-4°.

DAUSSE. *Études relatives aux inondations et à l'endiguement des rivières* (Mémoires présentés par divers Savants étrangers à l'Académie des sciences, t. XX, 1872, p. 287-507; réd. de 1856 à 1864).

FARGUE. 1. *Étude sur la corrélation entre la configuration du lit et la profondeur d'eau des rivières à fond mobile* (Annales des Ponts et chaussées; 4e série, t. XV; janvier-février 1868; n° 174; réd. en 1866).

— 2. *Étude sur la largeur moyenne du lit de la Garonne* (*Ibid.*; octobre 1882; p. 301).

FLAMANT (A.). *Sur la propagation des ondes liquides dans un tuyau élastique* (Revue de Mécanique, t. XVIII, n° 2, p. 101; 28 février 1906).

ÉNACHE DE LA OLT (N.). *Contribution à la théorie de l'écoulement sur les déversoirs en mince paroi et à nappe noyée en dessous* (Thèse de doctorat d'Université. Faculté des sciences de Paris, 28 février 1908. Paris, 1908. Gauthier-Villars, in-4°).

GRAEFF (M.). *Sur le mouvement des eaux dans les réservoirs à alimentation variable* (Mémoires présentés par divers Savants étrangers à l'Acad. des sciences, t. XXI, 1873).

HELMHOLTZ (H. VON). *Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen* (Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 23 april 1863, p. 215-228; — Wissenschaftlichten Abhandlungen, Band I, p. 146-157).

KIRCHHOFF (G.). *Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik.* Leipsig, 1876. Teubner, in-8°.

KORTEWEG (D. J.). 1. *Over voortplantings-snelheid van golven in elastische buizen* (Thèse de doctorat. Université d'Amsterdam, 12 juillet 1878). Leyde, 1878. Van Doesburgh, in-8°.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

KORTEWEG (D. J.). 2. *Ueber die Fortplanzungsgeschwindigkeit des Schalles in elastischen Röhren* (Ann. der Physik und Chemie, von Wiedmann, Neue Folge, t. V, p. 525; 1878).

MATHIEU (E.). *Cours de physique mathématique*. Paris, 1873. Gauthier-Villars, in 4°.

NAU (F.). *Formation et extinction du clapotis* (Thèse pour le doctorat ès sciences mathématiques. Faculté des sciences de Paris, 20 mars 1897). Paris, 1897. Gauthier-Villars, in-4°.

POISSON (S.-D.). *Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant* (Mémoire de l'Acad. des sciences, t. XI, 1832, p. 521-581).

RATEAU (A.). *Traité des turbo-machines*. Paris, 1900. Dunod, in-4°. (Voir aussi Revue de Mécanique, t. VI, 1900, 1re sem., p. 539-561 : *Théorie des coups de bélier et régularisation des turbines précédées d'une longue conduite.*)

RÉSAL (H.). *Sur les petits mouvements d'un fluide incompressible dans un tuyau élastique* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. LXXXII, p. 698; 27 mars 1876).

SAINT-VENANT (Barré DE). 1. *Mémoire sur l'influence retardatrice de la courbure dans les courants d'eau* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. LIV, p. 38, 6 janvier 1862).

— 2. *Mémoire sur la perte de force vive d'un fluide aux endroits où sa section d'écoulement augmente brusquement ou rapidement* (Mémoire de l'Acad. des sciences; 2e série, t. XLIV, 1888, p. 193-243. Ce travail date de juillet 1846).

— 3. *Mémoire sur la prise en considération de la force centrifuge dans le calcul du mouvement des eaux courantes et sur la distinction des torrents et des rivières* (*Ibid.*, p. 245-269. Ce travail date de décembre 1850-janvier 1851).

— 4. *Formules et tables nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes* (Annales des Mines, 4e série, t. XX, p. 320, 1851; C. R. de l'Acad. des sciences, t. LXXI, p. 194, 18 juillet 1870).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

SAINT-VENANT (Barré DE)
5. *Sur l'hydrodynamique des cours d'eau* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. LXXIV, pp. 426, 570, 649, 693, 770, 1083; 1872).
—
6. *Des mouvemens que prennent les diverses parties d'un liquide dans l'intérieur d'un vase ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. LXXXXIV, p. 904, 3 avril; p. 1004, 10 avril; p. 1139, 24 avril 1882).
—
7. et FLAMANT (A.). *Des vitesses que prennent, dans l'intérieur d'un vase, les divers éléments d'un liquide pendant son écoulement par un orifice inférieur* (C. R. de l'Acad. des sciences, t. LXXXXVII, p. 1027 et 1105; 12 et 19 novembre 1883).

SAUTRÉAUX (C.). *Sur une question d'hydrodynamique* (Thèse pour le doctorat ès sciences mathématiques. Faculté des sciences de Paris, 15 novembre 1893). Paris, 1893. Gauthier-Villars, in-4°. Ou : Ann. de l'École normale supérieure, 3e série, t. IX, Supplément.

SPARRE (Cte Magnus DE). *Étude théorique sur les coups de bélier dans les conduites forcées* (Réunion de quatre articles insérés dans *la Houille blanche*, 1905). Grenoble, 1905. Impr. de la Houille blanche, in-8°.

STOKES (G.-G.). *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums* (1850). [Cambridge Philos. Soc. Transactions, IX, Part. II, p. 8-106; 1856; ce mémoire a été traduit par M. Wolf, dans les Mémoires publiés par la Société française de Physique, t. V.]

VAUTIER (Th.). *Recherches expérimentales sur la vitesse d'écoulement des liquides par un orifice en mince paroi* (Thèse pour le doctorat ès sciences physiques. Faculté des sciences de Paris, 12 juillet 1888). Paris, Gauthier-Villars, in-8°. — Très utile pour l'historique expérimental.

YOUNG (Th.). *Hydraulic Investigations, subservient to an intended Croonian Lecture on the Motion of the Blood* (Phil. Transactions of the royal Society of London; 1808, Part. II, p. 164-186).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES MATIÈRES

Affouillements, 188.
Agitation confuse des flots (réduction de l'), 89.
Ajutage cylindrique extérieur, 147.
Alibrandi (P.), 31.
Alliévi (L.), 217, 233, 262, 271.
Appel vers un orifice (loi d'), 1.

Baumgarten, 150.
Bazin (H.), 15, 18, 24, 29, 31, 40, 41, 57, 59, 65, 69, 150, 154, 213.
Bélanger (J.-B.), 33, 34, 134, 140, 153.
Bélier (coup de), 217, 261, 265.
Bidone, 150.
Borda (principe de), 140, 146.
— (extension du principe de), 155.
Boudin, 184.
Boulanger (A.), 227, 238.
Boussinesq (J.) 9, 13, 24, 25, 31, 35, 39, 41, 42, 43, 51, 55, 59, 60, 67, 71, 75, 81, 88, 89, 92, 96, 104, 108, 113, 114, 115, 120, 127, 134, 139, 140, 152, 156, 157, 162, 165, 171, 172, 176, 182, 185, 188, 189, 191, 193, 194, 195, 200, 209, 210, 212, 214, 224, 226, 231, 233, 252.
Breton, 214.
Brillouin (M.), 30.
Buat (du), 123, 125, 129, 163, 164.

Caligny (A. de), 168.
Charge (perte de), 133.
Cheminées d'aération (effet des), 280.
Clapotis cylindrique (extinction du), 92.
Classification des cours d'eau, 184, 207.
Clebsch, 227, 230.
Coefficient de contraction d'une veine, 11, 14.
Coefficient de débit, 49.
Coefficient d'extinction de la houle, 88.
Coefficient d'extinction du clapotis, 94.
Contraction (coefficient de), 11, 14.
Contraction inférieure d'une nappe, 43.
Contraction latérale (déversoir sans), 32.
Contraction supérieure d'une nappe, 43.
Convergence (angle de), 44.
Coriolis, 134.
Coudes (pertes de charge dues aux), 161.
Coup de bélier, 217, 261, 265.
Couple, 190.
Coups de bélier successifs, 268.
Courbes (écoulement dans les), 165.
Courbure des filets (influence de la), 195.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Courbure de la surface libre (influence de la courbure du fond sur la), 213.
Cours d'eau torrentueux, 152, 177.
Cours d'eau tranquilles, 152, 177.
Crête épaisse, 32.
Cylindre en mouvement (résistance subie par un), 125.

Darcy (H.), 150, 154.
Dausse (loi de), 189.
Débit d'un orifice circulaire, 17.
Débit d'un orifice rectangulaire large, 25.
Débit maximum (principe du), 34.
Décroissement de hauteur des vagues, 88.
Dépense d'un tuyau ou d'un canal, 132.
Déversoir à nappe libre, 37, 50, 55.
Déversoir à nappe noyée en dessous, 37, 50, 60.
Déversoir à seuil épais, 32.
Déversoir en mince paroi, 40.
Dvorak, 207.

Écoulement par les orifices, 1.
Écoulement par les déversoirs, 32.
Écoulement par ajutage cylindrique extérieur, 147.
Effet d'un endiguement, 190.
Élargissement brusque d'un tuyau, 146.
Élargissement rapide de la section d'un courant, 155.
Énache de la Olt, 64, 66, 69.
Énergie à proximité d'une paroi (perte d'), 105.
Énergie d'une vague, 85.
Entraînement, 190.

État hydraulique d'un canal, 172.
Euler (L.), 217.
Extinction de la houle (coefficient d'), 88.
Extinction graduelle de la houle, 73.
Extinction graduelle de l'onde solitaire, 108.
Extinction graduelle des ondes de translation, 96, 107.

Fargue, 193-194.
Fermeture brusque d'un distributeur, 271.
Fermeture progressive d'un distributeur, 274.
Fermeture par vanne d'étranglement, 277.
Fluide mort, 141.
Fondamentale (houle), 91.
Forme d'une veine, 9.
Formule du ressaut, 140, 149.
Fourrier, 90.

Gerstner (lois de), 74, 83.
Graeff, 13, 214.
Grassi, 253.

Hauteur de charge, 10.
Helmholtz, 30, 216.
Houle (extinction de la), 73.
— cylindrique simple, 81.

Kirchhoff, 30.
Kleitz, 214.
Korteweg (D.-J.), 217.
— (formule de), 222, 223.
Kundt, 217.

Lagrange (formule de), 78.
Lahmeyer, 164.
Lehmann, 217.
Loi d'appel vers un orifice, 1.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Loi de décroissance de hauteur des vagues, 88, 93.
Loi de variation de la vitesse près d'une paroi, 96, 102.

Marey (J.-B.), 221.
Mathieu (E.), 101.
Michaud (J.), 262.
Mobilité du lit d'un cours d'eau, 188.
Module d'un tuyau, 230.
Mouvement graduellement varié dans un tuyau élastique, 252.
Mouvement permanent graduellement varié, 131, 165.
Mouvement quasi-permanent des cours d'eau, 213.
Nappe libre, 37, 50, 55.
— noyée en dessous, 37, 50, 60.
— ondulée, 69.
Nau (F.), 92, 107.
Newton (I.), 218.

Ondes de translation dans un tuyau élastique, 239.
Orifice en mince paroi (écoulement par), 1.
Orifice circulaire (débit d'un), 17.
Orifice rectangulaire large (débit d'un), 25.

Paroi mince (déversoir en), 32.
Passe de Mondiet (approfondissement de la), 194.
Pente du lit d'un canal, 173.
Pente du fond, 173.
Perte de charge, 133, 147.
Perte de charge due aux frottements, 138.
Perte de charge due à un accroissement brusque de la section vive, 140, 169.
Perte de charge due à un changement brusque de direction, 156, 166, 169.
Perte de charge due à un coude ou à un tournant arrondis, 161.
Perte d'énergie à proximité d'une paroi, 103.
Phases d'un coup de bélier, 266.
Pinat, 280.
Poiseuille, 88.
Poisson (S.-D.), 123.
Pression relative sous une nappe, 43.
Principe de Borda, 140, 146.
Principe du débit maximum, 34, 37, 45.
Profil longitudinal du ressaut, 201.
Propagation des ondes de translation dans un tuyau élastique, 239.
Propagation des petits mouvements dans un tuyau élastique, 233.

Rateau, 262.
Remous, 188, 210.
Remous d'abaissement, 184.
Remous d'exhaussement, 179, 184.
Régime torrentueux, 177.
— tranquille, 177.
Résal (H.), 221, 231.
Résistance élastique d'un tuyau, 226.
Résistance des fluides au mouvement des solides immergés, 113.
Ressaut (formule du), 140.
Ressaut superficiel, 139, 149, 178, 207.
Ressauts (forme des longs), 210.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Rivières, 188, 210.

Saint-Venant (B. de), 31, 164, 184, 187.
Sautréaux, 30.
Section contractée, 11, 157.
— morte, 151.
— vive, 141.
Seuil épais, 32.
Sparre (Magnus de), 262, 268, 279, 280.
Sphère en mouvement (résistance subie par une), 113.
Stodola, 262.
Stokes (G.-G.), 125, 129.

Torrents, 188, 210.
— de pente modérée, 188, 210.
Tubes piézométriques (effet des), 280.
Tuyau élastique (mouvement d'un fluide dans un), 216.

Vanne d'étranglement (fermeture par), 277.
Veine liquide (forme d'une), 9.
Venturi, 168.
Vitesse à proximité d'une paroi (loi de variation de la), 96, 102.
Vitesse au fond, 97.
Vitesse perdue, 146.

Weber (E.-H.), 216, 220, 239.
Weber (W.), 221, 239, 246.

Young (Th.) (formule de), 216, 217.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TABLE SYSTÉMATIQUE DES MATIÈRES

Avant-propos. XI

PREMIÈRE SECTION

PHÉNOMÈNES OU L'INFLUENCE DES FROTTEMENTS EST NÉGLIGEABLE

CHAPITRE I

ÉCOULEMENT PAR LES ORIFICES

1. Loi d'appel d'un fluide vers les diverses parties d'un orifice. 1
2. Équations dont dépend la forme d'une veine; conséquences. 9
3. Propriétés de la vitesse longitudinale à travers un orifice. 14
4. Calcul approché du débit et de sa répartition entre les divers éléments superficiels d'un orifice circulaire. . 17
5. Calcul approché du débit et de sa répartition entre les divers éléments superficiels d'un orifice rectangulaire très large. 25
6. Indications sur le problème complet de l'écoulement par un orifice. 30

CHAPITRE II

ÉCOULEMENT PAR LES DÉVERSOIRS

1. Écoulement d'une nappe liquide par un déversoir à seuil épais 32
2. Vérifications expérimentales. 40
3. Écoulement d'une nappe liquide par un déversoir en mince paroi. Hypothèses fondamentales. 40

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4. Formules générales relatives au calcul de l'expression du débit 46
5. Cas du déversoir à nappe libre 55
6. Vérifications expérimentales. 59
7. Cas du déversoir à nappe noyée en dessous 60
8. Vérifications expérimentales. 65
9. Indications sur quelques questions complémentaires . . 70

DEUXIÈME SECTION

PHÉNOMÈNES DE MOUVEMENTS BIEN CONTINUS OU L'INFLUENCE DES FROTTEMENTS EST SENSIBLE

CHAPITRE I

EXTINCTION GRADUELLE DE LA HOULE

1. Perturbations apportées par les frottements à la propagation des ondes 73
2. Calcul de la perte incessante d'énergie qu'éprouvent les ondes par le fait des frottements 75
3. Application à la houle cylindrique simple 81
4. Réduction à une houle simple de toute agitation confuse, mais périodique, des flots 89
5. Application au clapotis cylindrique. 92

CHAPITRE II

EXTINCTION GRADUELLE DES ONDES DE TRANSLATION

1. Loi de variation de la vitesse à proximité d'une paroi . 96
2. Perte d'énergie à proximité d'une paroi 103
3. Extinction des ondes de translation 107

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE III

RÉSISTANCE OPPOSÉE PAR UN FLUIDE AU MOUVEMENT D'UN SOLIDE IMMERGÉ DANS CE FLUIDE

1. Résistance subie par une sphère en mouvement dans un fluide 113
2. Cas particuliers; confrontation avec l'observation . . . 123
3. Résistance subie par un cylindre circulaire indéfini en mouvement dans un fluide. 125

TROISIÈME SECTION

PHÉNOMÈNES DE MOUVEMENTS TURBULENTS

CHAPITRE I

MOUVEMENT PERMANENT DANS LES TUYAUX LARGES ET LES CANAUX PRÉSENTANT DES SINGULARITÉS

1. Équation fondamentale du mouvement permanent graduellement varié 131
2. Utilisation de l'équation fondamentale 134
3. Perte de charge due à un accroissement brusque de la section vive; formule de M. Boussinesq 140
4. Élargissement brusque d'un tuyau : formule de Borda . 146
5. Écoulement par un ajutage cylindrique 147
6. Ressaut superficiel dans un canal découvert; formule du ressaut 149
7. Confrontation avec l'expérience 153
8. Extension du principe de Borda au cas des canaux découverts 155
9. Perte de charge due à un changement brusque de direction. 156

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

10. Perte de charge due à un coude ou à un tournant arrondi. 161
11. Confrontation avec l'expérience 163
12. Équation du mouvement graduellement varié dans un tuyau ou un canal à axe courbe 165
13. Retour à la perte de charge due à un changement brusque de direction 166
14. Perte de charge due à un changement brusque de direction et à un accroissement brusque simultané de section vive. 169

CHAPITRE II

ÉTABLISSEMENT DU RÉGIME DES COURS D'EAU NATURELS

1. État hydraulique d'un canal où un régime sensiblement uniforme serait possible 172
2. Cas d'un canal de faible pente. 177
3. Cas d'un canal de forte pente 182
4. Cas d'un canal à pente tantôt faible, tantôt forte. . . . 184
5. Classification des cours d'eau 185
6. Influence de la mobilité du lit 188

CHAPITRE III

MOUVEMENT PERMANENT VARIÉ DANS UN CANAL A SECTION RECTANGULAIRE, EU ÉGARD A LA COURBURE DES FILETS FLUIDES

1. Établissement de l'équation générale. 195
2. Cas du mouvement permanent. 200
3. Intégration de l'équation du mouvement permanent dans l'hypothèse d'un fond plan, lorsque le régime uniforme se détruit ou s'établit 201
4. Nouvelle classification des cours d'eau 207
5. Forme des longs ressauts dans les torrents de pente modérée; confrontation expérimentale 210
6. Indications relatives à l'influence de la courbure du fond sur la forme de la surface libre 213

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE IV

PROPAGATION DES ONDES DANS LES TUYAUX ÉLASTIQUES

1. Formule de Thomas Young 216
2. Formule de D. J. Korteweg. 222
3. Résistance élastique opposée par un tuyau au gonflement de la colonne liquide qui le remplit 226
4. Propagation des petits mouvements à travers une colonne liquide remplissant un tuyau élastique horizontal. 233
5. Propagation des ondes de translation à l'intérieur d'un tuyau élastique horizontal; extinction de l'onde solitaire 239
6. Cas d'un tuyau oblique à l'horizon. 251
7. Mouvement graduellement varié de l'eau dans un tuyau élastique 252

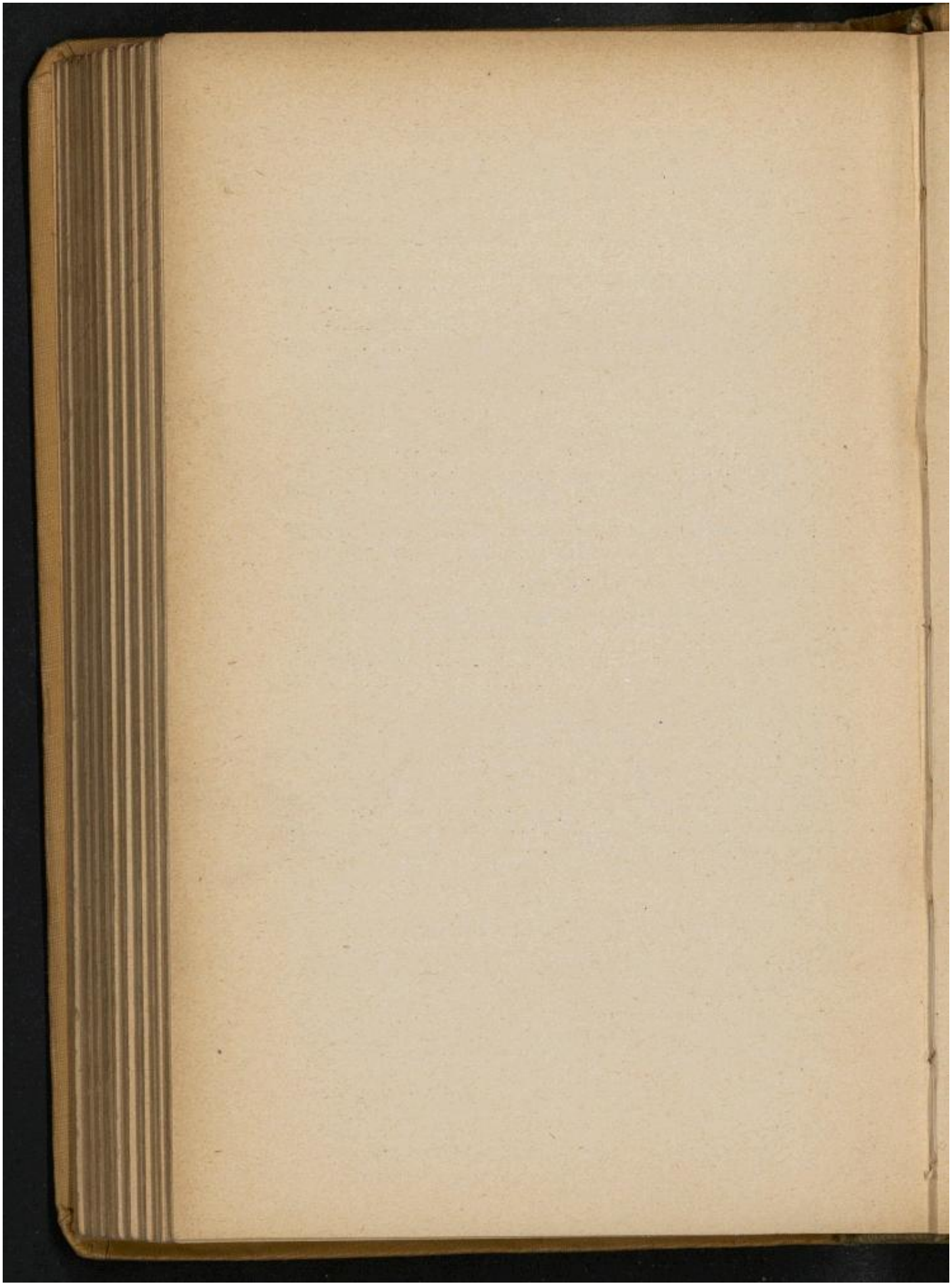
CHAPITRE V

COUPS DE BÉLIER DANS LES CONDUITES D'EAU

1. Lois qui régissent le coup et le contre-coup de bélier dans une conduite. 261
2. Calcul approché des coups de béliers successifs 268
3. Fermeture brusque du distributeur. 271
4. Fermeture progressive du distributeur. 274
5. Fermeture par vanne d'étranglement. 277

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE. 281
TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES MATIÈRES 281
TABLE SYSTÉMATIQUE DES MATIÈRES 294

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

OCTAVE DOIN ET FILS, ÉDITEURS, 8, PLACE DE L'ODÉON, PARIS

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

Publiée sous la direction du Dr TOULOUSE

Nous avons entrepris la publication, sous la direction générale de son fondateur, le Dr Toulouse, Directeur à l'École des Hautes-Études, d'une ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE de langue française dont on mesurera l'importance à ce fait qu'elle est divisée en 40 sections ou Bibliothèques et qu'elle comprendra environ 1000 volumes. Elle se propose de rivaliser avec les plus grandes encyclopédies étrangères et même de les dépasser, tout à la fois par le caractère nettement scientifique et la clarté de ses exposés, par l'ordre logique de ses divisions et par son unité, enfin par ses vastes dimensions et sa forme pratique.

I

PLAN GÉNÉRAL DE L'ENCYCLOPÉDIE

Mode de publication. — L'*Encyclopédie* se composera de monographies scientifiques, classées méthodiquement et formant dans leur enchaînement un exposé de toute la science. Organisée sur un plan systématique, cette Encyclopédie, tout en évitant les inconvénients des Traités, — massifs, d'un prix global élevé, difficiles à consulter, — et les inconvénients des Dictionnaires, — où les articles scindés irrationnellement, simples chapitres alphabétiques, sont toujours nécessairement incomplets, — réunira les avantages des uns et des autres.

Du Traité, l'*Encyclopédie* gardera la supériorité que possède

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

un ensemble complet, bien divisé et fournissant sur chaque science tous les enseignements et tous les renseignements qu'on en réclame. Du Dictionnaire, l'*Encyclopédie* gardera les facilités de recherches par le moyen d'une table générale, l'*Index de l'Encyclopédie*, qui paraîtra dès la publication d'un certain nombre de volumes et sera réimprimé périodiquement. L'*Index* renverra le lecteur aux différents volumes et aux pages où se trouvent traités les divers points d'une question.

Les éditions successives de chaque volume permettront de suivre toujours de près les progrès de la science. Et c'est par là que s'affirme la supériorité de ce mode de publication sur tout autre. Alors que, sous sa masse compacte, un traité, un dictionnaire ne peut être réédité et renouvelé que dans sa totalité et qu'à d'assez longs intervalles, inconvénients graves qu'atténuent mal des suppléments et des appendices, l'*Encyclopédie scientifique*, au contraire, pourra toujours rajeunir les parties qui ne seraient plus au courant des derniers travaux importants. Il est évident, par exemple, que si des livres d'algèbre ou d'acoustique physique peuvent garder leur valeur pendant de nombreuses années, les ouvrages exposant les sciences en formation, comme la chimie physique, la psychologie ou les technologies industrielles, doivent nécessairement être remaniés à des intervalles plus courts.

Le lecteur appréciera la souplesse de publication de cette *Encyclopédie*, toujours vivante, qui s'élargira au fur et à mesure des besoins dans le large cadre tracé dès le début, mais qui constituera toujours, dans son ensemble, un traité complet de la Science, dans chacune de ses sections un traité complet d'une science, et dans chacun de ses livres une monographie complète. Il pourra ainsi n'acheter que telle ou telle section de l'*Encyclopédie*, sûr de n'avoir pas des parties dépareillées d'un tout.

L'*Encyclopédie* demandera plusieurs années pour être achevée ; car pour avoir des expositions bien faites, elle a pris ses collaborateurs plutôt parmi les savants que parmi les professionnels de la rédaction scientifique que l'on retrouve généralement dans les œuvres similaires. Or les savants écrivent peu et lentement : et il est préférable de laisser temporairement sans attribution certains ouvrages plutôt que de les confier à des auteurs insuffisants. Mais cette lenteur et ces vides ne présenteront pas d'in-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

convénients, puisque chaque livre est une œuvre indépendante et que tous les volumes publiés sont à tout moment réunis par l'*Index de l'Encyclopédie*. On peut donc encore considérer l'*Encyclopédie* comme une librairie, où les livres soigneusement choisis, au lieu de représenter le hasard d'une production individuelle, obéiraient à un plan arrêté d'avance, de manière qu'il n'y ait ni lacune dans les parties ingrates, ni double emploi dans les parties très cultivées.

Caractère scientifique des ouvrages. — Actuellement, les livres de science se divisent en deux classes bien distinctes : les livres destinés aux savants spécialisés, le plus souvent incompréhensibles pour tous les autres, faute de rappeler au début des chapitres les connaissances nécessaires, et surtout faute de définir les nombreux termes techniques incessamment forgés, ces derniers rendant un mémoire d'une science particulière inintelligible à un savant qui en a abandonné l'étude durant quelques années ; et ensuite les livres écrits pour le grand public, qui sont sans profit pour des savants et même pour des personnes d'une certaine culture intellectuelle.

L'*Encyclopédie scientifique* a l'ambition de s'adresser au public le plus large. Le savant spécialisé est assuré de rencontrer dans les volumes de sa partie une mise au point très exacte de l'état actuel des questions ; car chaque Bibliothèque, par ses techniques et ses monographies, est d'abord faite avec le plus grand soin pour servir d'instrument d'études et de recherches à ceux qui cultivent la science particulière qu'elle représente, et sa devise pourrait être : *Par les savants, pour les savants*. Quelques-uns de ces livres seront même, par leur caractère didactique, destinés à devenir des ouvrages classiques et à servir aux études de l'enseignement secondaire ou supérieur. Mais, d'autre part, le lecteur non spécialisé est certain de trouver, toutes les fois que cela sera nécessaire, au seuil de la section, — dans un ou plusieurs volumes de généralités, — et au seuil du volume, — dans un chapitre particulier, — des données qui formeront une véritable introduction le mettant à même de poursuivre avec profit sa lecture. Un vocabulaire technique, placé, quand il y aura lieu, à la fin du volume, lui permettra de connaître toujours le sens des mots spéciaux.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

II

ORGANISATION SCIENTIFIQUE

Par son organisation scientifique, l'*Encyclopédie* paraît devoir offrir aux lecteurs les meilleures garanties de compétence. Elle est divisée en Sections ou Bibliothèques, à la tête desquelles sont placés des savants professionnels spécialisés dans chaque ordre de sciences et en pleine force de production, qui, d'accord avec le Directeur général, établissent les divisions des matières, choisissent les collaborateurs et acceptent les manuscrits. Le même esprit se manifestera partout : éclectisme et respect de toutes les opinions logiques, subordination des théories aux données de l'expérience, soumission à une discipline rationnelle stricte ainsi qu'aux règles d'une exposition méthodique et claire. De la sorte, le lecteur, qui aura été intéressé par les ouvrages d'une section dont il sera l'abonné régulier, sera amené à consulter avec confiance les livres des autres sections dont il aura besoin, puisqu'il sera assuré de trouver partout la même pensée et les mêmes garanties. Actuellement, en effet, il est, hors de sa spécialité, sans moyen pratique de juger de la compétence réelle des auteurs.

Pour mieux apprécier les tendances variées du travail scientifique adapté à des fins spéciales, l'*Encyclopédie* a sollicité, pour la direction de chaque Bibliothèque, le concours d'un savant placé dans le centre même des études du ressort. Elle a pu ainsi réunir des représentants des principaux Corps savants, Établissements d'enseignement et de recherches de langue française :

Institut.
Académie de Médecine.

Collège de France.
Muséum d'Histoire naturelle.
École des Hautes-Études.
Sorbonne et École normale.
Facultés des Sciences.
Facultés des Lettres.
Facultés de Médecine.
Instituts Pasteur.
École des Ponts et Chaussées.
École des Mines.
École Polytechnique.

Conservatoire des Arts et Métiers.
École d'Anthropologie.
Institut National agronomique.
École vétérinaire d'Alfort.
École supérieure d'Électricité.
École de Chimie industrielle de Lyon.
École des Beaux-Arts.
École des Sciences politiques.

Observatoire de Paris.
Hôpitaux de Paris.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

III

BUT DE L'ENCYCLOPÉDIE

Au XVIIIe siècle, « l'Encyclopédie » a marqué un magnifique mouvement de la pensée vers la critique rationnelle. A cette époque, une telle manifestation devait avoir un caractère philosophique. Aujourd'hui, l'heure est venue de renouveler ce grand effort de critique, mais dans une direction strictement scientifique ; c'est là le but de la nouvelle *Encyclopédie*.

Ainsi la science pourra lutter avec la littérature pour la direction des esprits cultivés, qui, au sortir des écoles, ne demandent guère de conseils qu'aux œuvres d'imagination et à des encyclopédies où la science a une place restreinte, tout à fait hors de proportion avec son importance. Le moment est favorable à cette tentative ; car les nouvelles générations sont plus instruites dans l'ordre scientifique que les précédentes. D'autre part, la science est devenue, par sa complexité et par les corrélations de ses parties, une matière qu'il n'est plus possible d'exposer sans la collaboration de tous les spécialistes, unis là comme le sont les producteurs dans tous les départements de l'activité économique contemporaine.

A un autre point de vue, l'*Encyclopédie*, embrassant toutes les manifestations scientifiques, servira comme tout inventaire à mettre au jour les lacunes, les champs encore en friche ou abandonnés, — ce qui expliquera la lenteur avec laquelle certaines sections se développeront, — et suscitera peut-être les travaux nécessaires. Si ce résultat est atteint, elle sera fière d'y avoir contribué.

Elle apporte en outre une classification des sciences et, par ses divisions, une tentative de mesure, une limitation de chaque domaine. Dans son ensemble, elle cherchera à refléter exactement le prodigieux effort scientifique du commencement de ce siècle et un moment de sa pensée, en sorte que dans l'avenir elle reste le document principal où l'on puisse retrouver et consulter le témoignage de cette époque intellectuelle.

On peut voir aisément que l'*Encyclopédie* ainsi conçue, ainsi réalisée, aura sa place dans toutes les bibliothèques publiques, universitaires et scolaires, dans les laboratoires, entre les mains

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des savants, des industriels et de tous les hommes instruits qui veulent se tenir au courant des progrès, dans la partie qu'ils cultivent eux-mêmes ou dans tout le domaine scientifique. Elle fera jurisprudence, ce qui lui dicte le devoir d'impartialité qu'elle aura à remplir.

Il n'est plus possible de vivre dans la société moderne en ignorant les diverses formes de cette activité intellectuelle qui révolutionne les conditions de la vie ; et l'interdépendance de la science ne permet plus aux savants de rester cantonnés, spécialisés dans un étroit domaine. Il leur faut, — et cela leur est souvent difficile, — se mettre au courant des recherches voisines. A tous, l'*Encyclopédie* offre un instrument unique dont la portée scientifique et sociale ne peut échapper à personne.

IV

CLASSIFICATION DES MATIÈRES SCIENTIFIQUES

La division de l'*Encyclopédie* en Bibliothèques a rendu nécessaire l'adoption d'une classification des sciences, où se manifeste nécessairement un certain arbitraire, étant donné que les sciences se distinguent beaucoup moins par les différences de leurs objets que par les divergences des aperçus et des habitudes de notre esprit. Il se produit en pratique des interpénétrations réciproques entre leurs domaines, en sorte que, si l'on donnait à chacun l'étendue à laquelle il peut se croire en droit de prétendre, il envahirait tous les territoires voisins ; une limitation assez stricte est nécessitée par le fait même de la juxtaposition de plusieurs sciences.

Le plan choisi, sans viser à constituer une synthèse philosophique des sciences, qui ne pourrait être que subjective, a tendu pourtant à échapper dans la mesure du possible aux habitudes traditionnelles d'esprit, particulièrement à la routine didactique, et à s'inspirer de principes rationnels.

Il y a deux grandes divisions dans le plan général de l'*Encyclopédie :* d'un côté les sciences pures, et, de l'autre, toutes les technologies qui correspondent à ces sciences dans la sphère des applications. A part et au début, une Bibliothèque d'introduc-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tion générale est consacrée à la philosophie des sciences (histoire des idées directrices, logique et méthodologie).

Les sciences pures et appliquées présentent en outre une division générale en sciences du monde inorganique et en sciences biologiques. Dans ces deux grandes catégories, l'ordre est celui de particularité croissante, qui marche parallèlement à une rigueur décroissante. Dans les sciences biologiques pures enfin, un groupe de sciences s'est trouvé mis à part, en tant qu'elles s'occupent moins de dégager des lois générales et abstraites que de fournir des monographies d'êtres concrets, depuis la paléontologie jusqu'à l'anthropologie et l'ethnographie.

Étant donnés les principes rationnels qui ont dirigé cette classification, il n'y a pas lieu de s'étonner de voir apparaître des groupements relativement nouveaux, une biologie générale, — une physiologie et une pathologie végétales, distinctes aussi bien de la botanique que de l'agriculture, — une chimie physique, etc.

En revanche, des groupements hétérogènes se disloquent pour que leurs parties puissent prendre place dans les disciplines auxquelles elles doivent revenir. La géographie, par exemple, retourne à la géologie, et il y a des géographies botanique, zoologique, anthropologique, économique, qui sont étudiées dans la botanique, la zoologie, l'anthropologie, les sciences économiques.

Les sciences médicales, immense juxtaposition de tendances très diverses, unies par une tradition utilitaire, se désagrègent en des sciences ou des techniques précises ; la pathologie, science de lois, se distingue de la thérapeutique ou de l'hygiène, qui ne sont que les applications des données générales fournies par les sciences pures, et à ce titre mises à leur place rationnelle.

Enfin, il a paru bon de renoncer à l'anthropocentrisme qui exigeait une physiologie humaine, une anatomie humaine, une embryologie humaine, une psychologie humaine. L'homme est intégré dans la série animale dont il est un aboutissant. Et ainsi, son organisation, ses fonctions, son développement, s'éclairent de toute l'évolution antérieure et préparent l'étude des formes plus complexes des groupements organiques qui sont offerts par l'étude des sociétés.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On peut voir que, malgré la prédominance de la préoccupation pratique dans ce classement des Bibliothèques de l'*Encyclopédie scientifique*, le souci de situer rationnellement les sciences dans leurs rapports réciproques n'a pas été négligé. Enfin il est à peine besoin d'ajouter que cet ordre n'implique nullement une hiérarchie, ni dans l'importance ni dans les difficultés des diverses sciences. Certaines, qui sont placées dans la technologie, sont d'une complexité extrême, et leurs recherches peuvent figurer parmi les plus ardues.

Prix de la publication. — Les volumes, illustrés pour la plupart, seront publiés dans le format in-18 jésus et cartonnés. De dimensions commodes, ils auront 400 pages environ, ce qui représente une matière suffisante pour une monographie ayant un objet défini et important, établie du reste selon l'économie du projet qui saura éviter l'émiettement des sujets d'exposition. Le prix étant fixé uniformément à 5 francs, c'est un réel progrès dans les conditions de publication des ouvrages scientifiques, qui, dans certaines spécialités, coûtent encore si cher.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TABLE DES BIBLIOTHÈQUES

DIRECTEUR : Dr TOULOUSE, Directeur de Laboratoire à l'École des Hautes Études.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL : H. PIÉRON, agrégé de l'Université.

DIRECTEURS DES BIBLIOTHÈQUES :

1. *Philosophie des Sciences.* — P. PAINLEVÉ, de l'Institut, professeur à la Sorbonne.

I. SCIENCES PURES

A. Sciences mathématiques :

2. *Mathématiques* . . . — J. DRACH, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.
3. *Mécanique* . . . . . — J. DRACH, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.

B. Sciences inorganiques :

4. *Physique.* . . . . . — A. LEDUC, professeur adjoint de physique à la Sorbonne.
5. *Chimie physique.* . . — J. PERRIN, chargé de cours à la Sorbonne.
6. *Chimie* . . . . . — A. PICTET, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève.
7. *Astronomie et Physique céleste.* . . . . . — J. MASCART, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris.
8. *Météorologie* . . . . — B. BRUNHES, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Clermont-Ferrand, directeur de l'Observatoire du Puy-de-Dôme.
9. *Minéralogie et Pétrographie* . . . . . — A. LACROIX, de l'Institut, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
10. *Géologie* . . . . . — M. BOULE, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

11. *Océanographie physique.*		J. RICHARD, directeur du Musée Océanographique de Monaco.

C. Sciences biologiques normatives :

12. *Biologie.*	A. *Biologie générale.*	M. CAULLERY, professeur adjoint à la Sorbonne.
	B. *Océanographie biologique.*	J. RICHARD, directeur du Musée Océanographique de Monaco.
13. *Physique biologique.* .		A. IMBERT, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université de Montpellier.
14. *Chimie biologique* . .		G. BERTRAND, professeur de chimie biologique à la Sorbonne.
15. *Physiologie et Pathologie végétales* . . .		L. MANGIN, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
16. *Physiologie.*		J.-P. LANGLOIS, professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Paris.
17. *Psychologie.*		E. TOULOUSE, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes Études, médecin en chef de l'asile de Villejuif.
18. *Sociologie*		G. RICHARD, professeur à la Faculté des Lettres de l'Université de Bordeaux.

---

19. *Microbiologie et Parasitologie*		A. CALMETTE, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université, directeur de l'Institut Pasteur de Lille; et F. BEZANÇON, professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Paris, médecin des Hôpitaux.
20. *Pathologie.*	A. *Pathologie médicale.*	M. KLIPPEL, médecin des Hôpitaux de Paris.
	B. *Neurologie.*	E. TOULOUSE, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes Études, médecin en chef de l'asile de Villejuif.
	C. *Path. chirurgicale.*	L. PICQUÉ, chirurgien des Hôpitaux de Paris.

D. Sciences biologiques descriptives :

21. *Paléontologie*	M. BOULE, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

22. *Botanique.*
- A. *Généralités phanérogames.* — H. Lecomte, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
- B. *Cryptogames.* . . — L. Mangin, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.

23. *Zoologie* . . . . . — G. Loisel, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes Études.

24. *Anatomie et Embryologie* . . . . . — G. Loisel, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes Études.

25. *Anthropologie et Ethnographie* . . . . . — G. Papillault, directeur adjoint du Laboratoire d'Anthropologie à l'École des Hautes-Études, professeur à l'École d'Anthropologie.

26. *Économie politique* . . — D. Bellet, professeur à l'École des Sciences politiques.

II. Sciences appliquées

A. Sciences mathématiques :

27. *Mathématiques appliquées* . . . . . — M. d'Ocagne, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique.

28. *Mécanique appliquée et génie* . . . . . — M. d'Ocagne, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique.

B. Sciences inorganiques :

29. *Industries physiques* . — H. Chaumat, sous-directeur de l'École supérieure d'Électricité de Paris.

30. *Photographie* . . . . — A. Seyewetz, sous-directeur de l'École de Chimie industrielle de Lyon.

31. *Industries chimiques.* . — J. Derôme, professeur agrégé de physique au collège Chaptal, inspecteur des Établissements classés.

32. *Géologie et minéralogie appliquées* . . . . — L. Cayeux, professeur à l'Institut national agronomique, professeur de géologie à l'École des Mines.

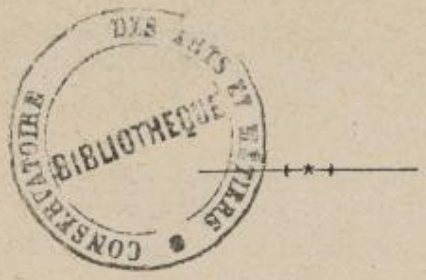
33. *Construction* . . . . — J. Pillet, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École des Beaux-Arts.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

C. Sciences biologiques :

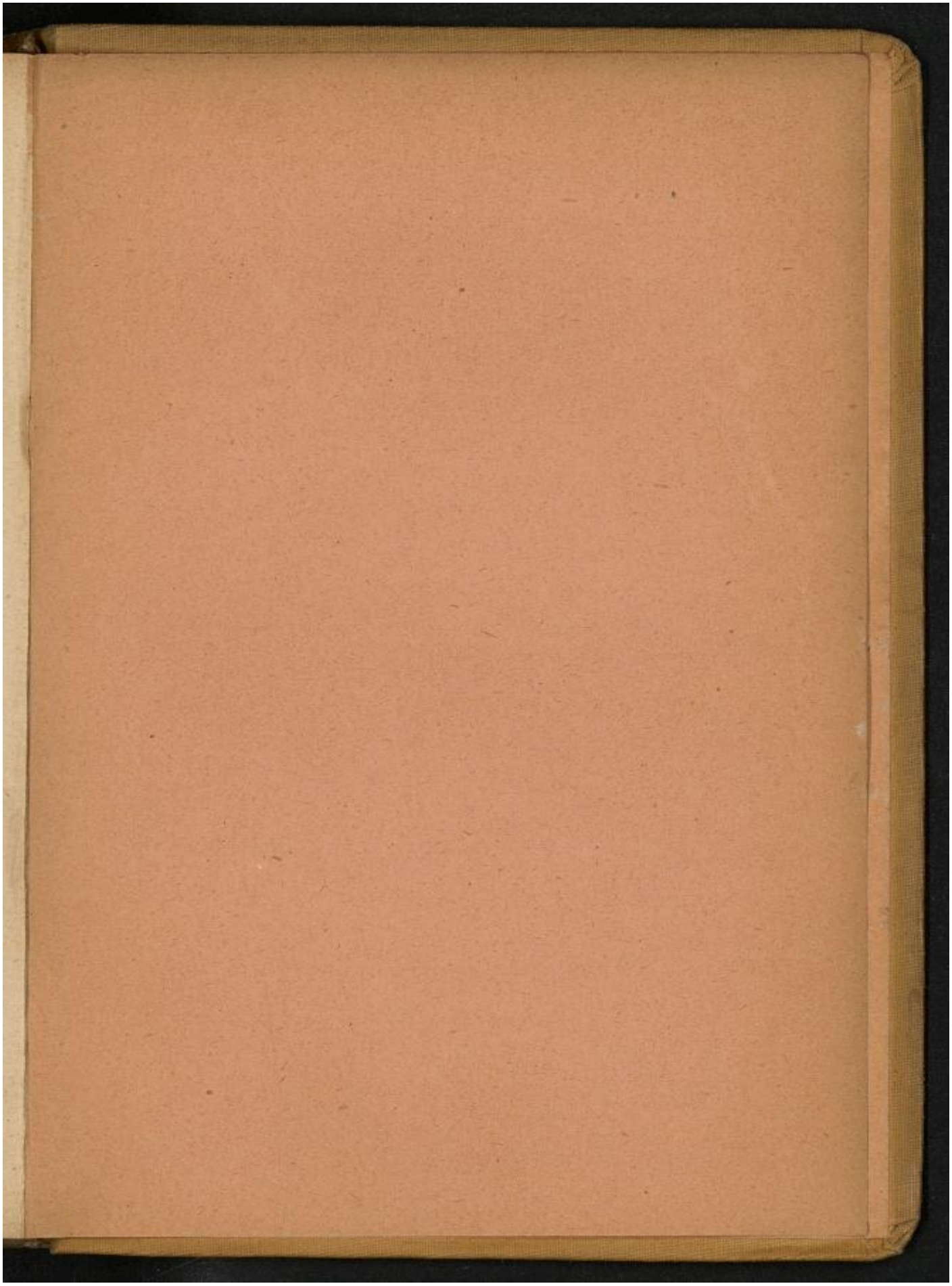
34. *Industries biologiques.*	G. BERTRAND, professeur de chimie biologique à la Sorbonne.
35. *Botanique appliquée et agriculture*	H. LECOMTE, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
36. *Zoologie appliquée* . .	J. PELLEGRIN, assistant au Muséum d'Histoire naturelle.
37. *Thérapeutique générale et pharmacologie.* .	G. POUCHET, membre de l'Académie de médecine, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université de Paris.
38. *Hygiène et médecine publiques*	A. CALMETTE, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université, directeur de l'Institut Pasteur de Lille.
39. *Psychologie appliquée.*	E. TOULOUSE, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes Études, médecin en chef de l'asile de Villejuif.
40. *Sociologie appliquée.* .	TH. RUYSSEN, professeur à la Faculté des Lettres de l'Université de Bordeaux.

M. ALBERT MAIRE, bibliothécaire à la Sorbonne, est chargé de l'*Index* de l'Encyclopédie scientifique.

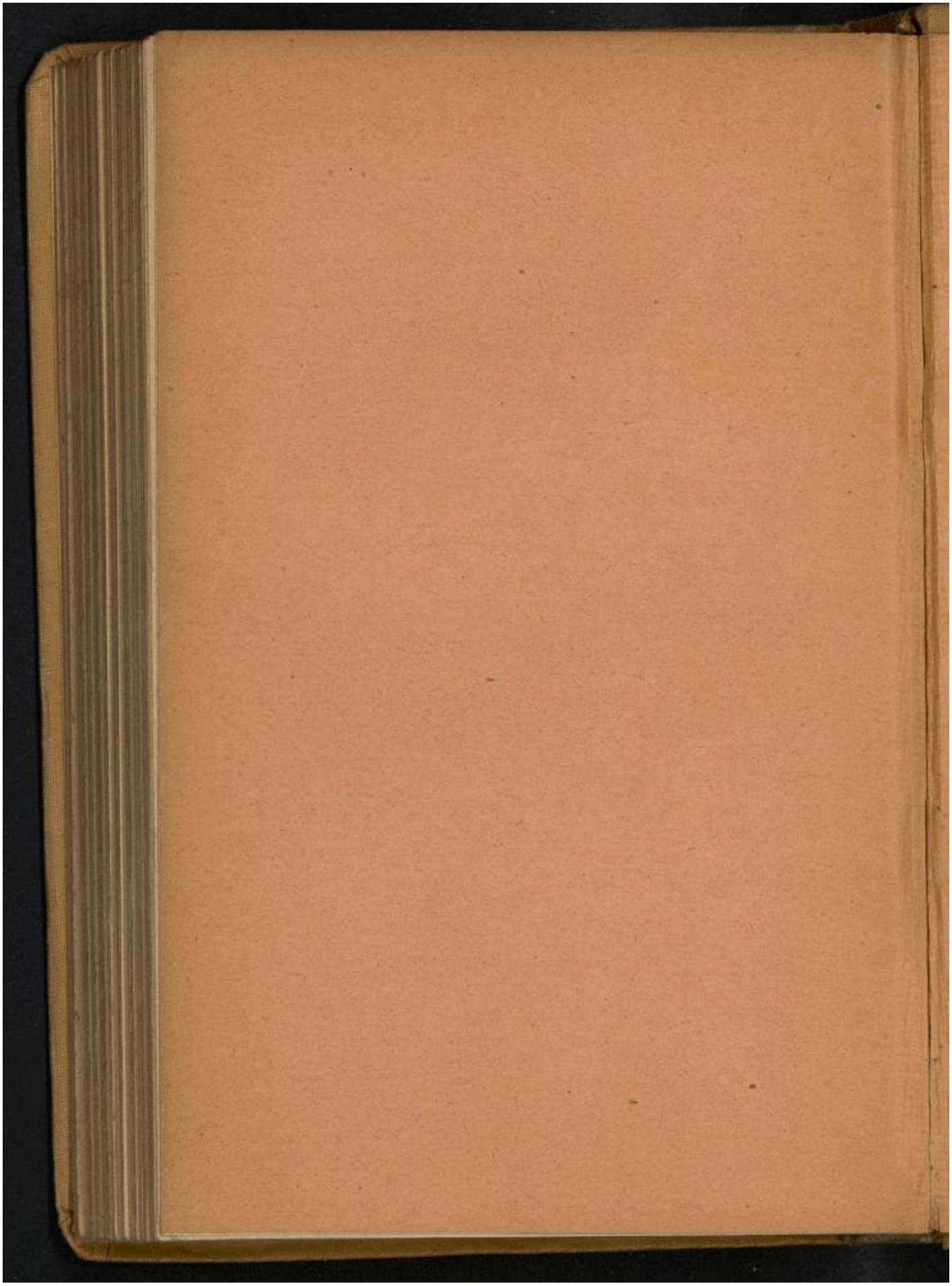


33 551. — Tours, impr. Mame.

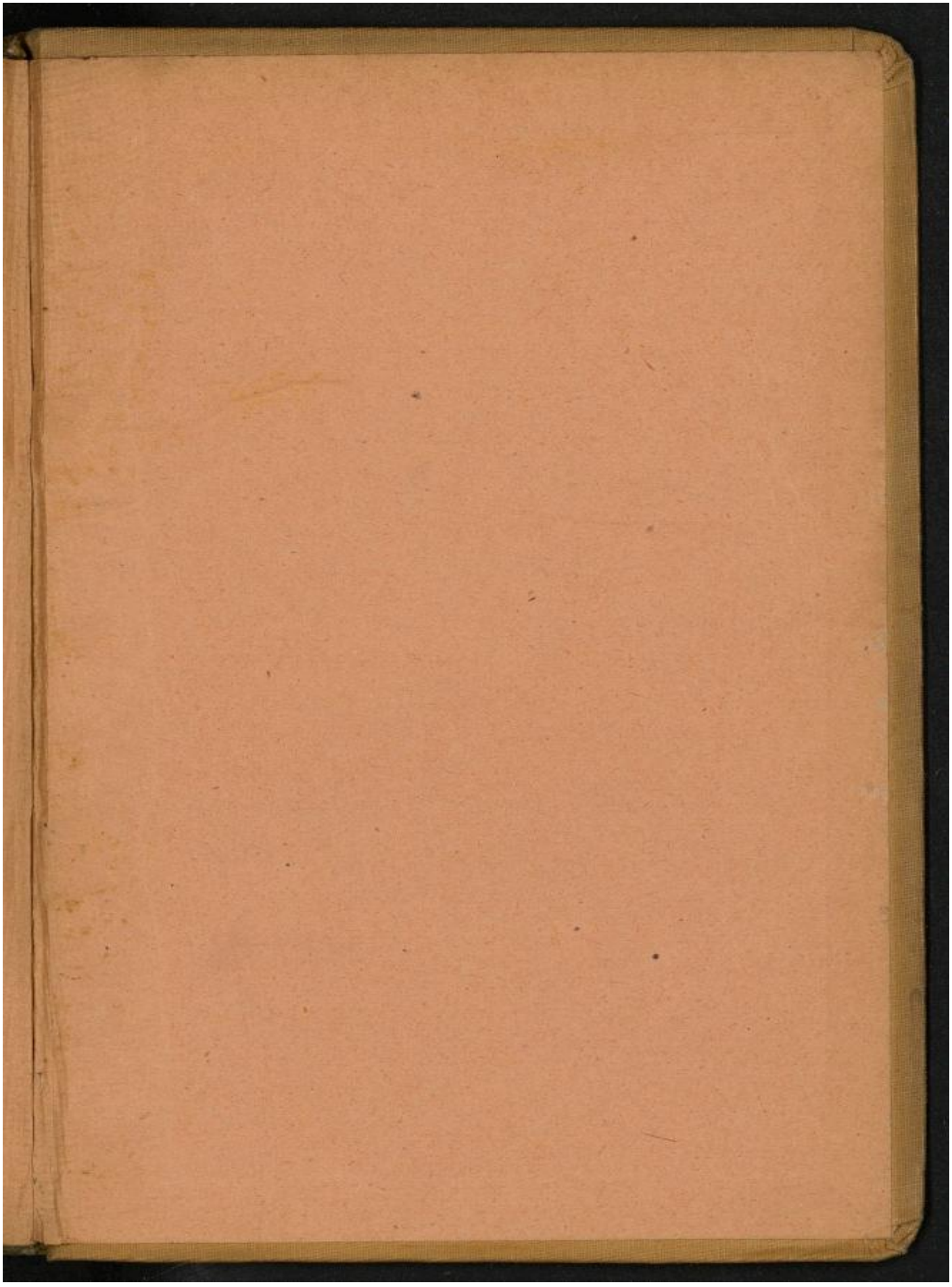
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



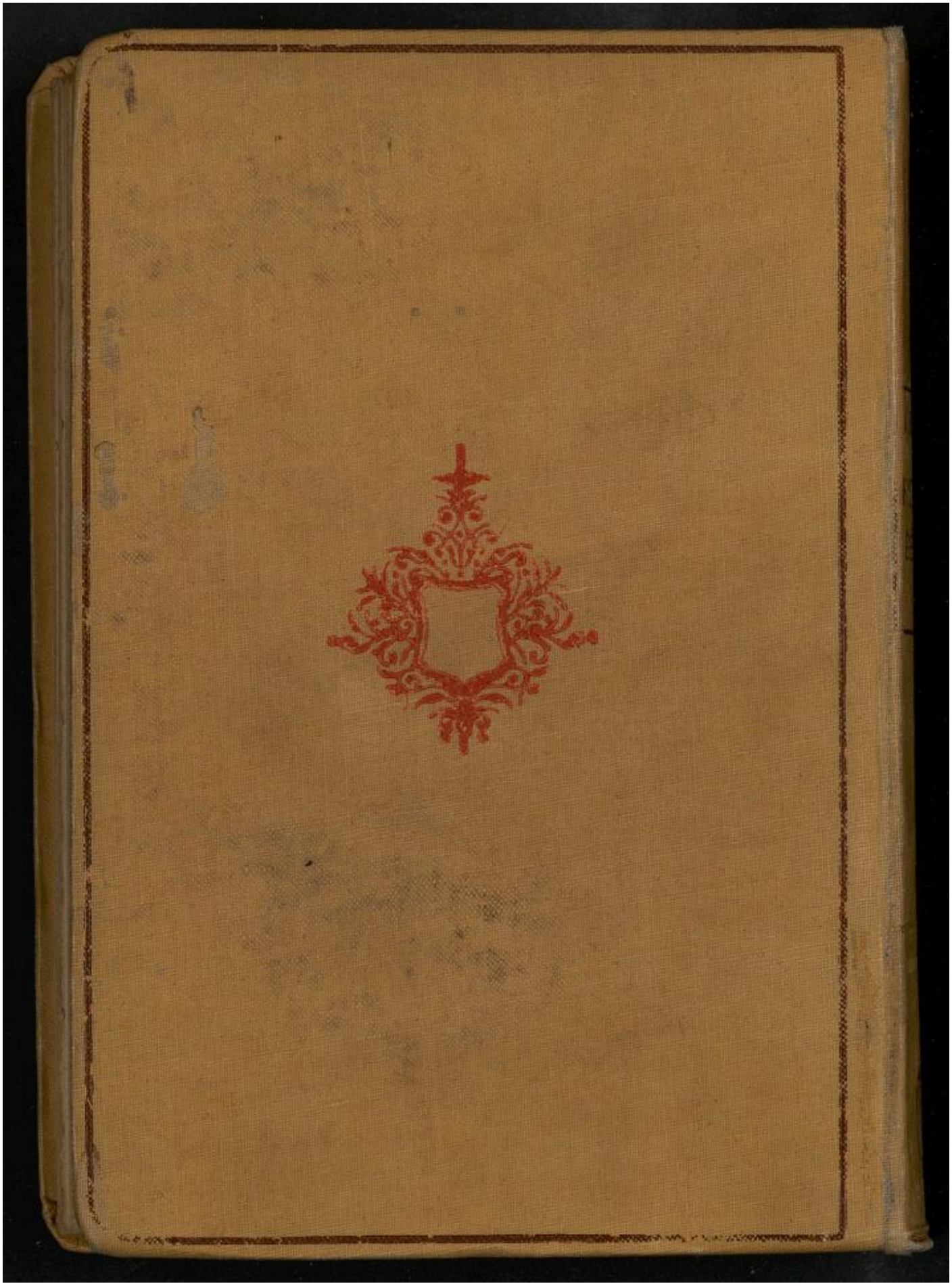
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires