Auteur ou collectivité : Mannheim, Amédée
Auteur : Mannheim, Amédée (1831-1906)
Titre : Notice sur les travaux mathématiques de M. A. Mannheim

Adresse : Paris : Gauthier-Villars, 1885
Collation : 1 vol. (64 p.) ; 30 cm
Cote : CNAM-BIB 4 B 65 (104)
Sujet(s) : Mannheim, Amédée (1831-1906) ; Mathématiques -- Bibliographie
Note : Fait partie d'un recueil factice dont les pièces sont cotées 4 B 65 (102) à (115). 4 B 65 (104)
Langue : Français

Date de mise en ligne : 03/10/2014
Date de génération du PDF : 11/7/2017

Permalien : http://cnum.cnam.fr/redir?4B65.104

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX MATHÉMATIQUES

DE

M. A. MANNHEIM,

LIEUTENANT-COLONEL D'ARTILLERIE,
PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
LAURÉAT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (PRIX PONCELET),
L'UN DES DOUZE MEMBRES ÉTRANGERS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE LONDRES,
ETC., ETC., ETC.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1885

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX MATHÉMATIQUES

DE

M. A. MANNHEIM.

AVANT-PROPOS.

> En un mot, j'ai cherché, avant tout, la méthode de démontrer et de découvrir en simple Géométrie.
>
> PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures*.

Mes travaux se rapportent à la Géométrie pure, à cette science éminemment française que Poncelet et Chasles ont portée si haut et qui a pour objet la découverte et la démonstration des propriétés géométriques au moyen des *méthodes géométriques*.

Voici les principaux sujets dont je me suis occupé :

a. Les méthodes de transformations géométriques, particulièrement les transformations par rayons vecteurs réciproques et par polaires réciproques. J'ai poursuivi les belles recherches du général Poncelet sur la théorie des polaires réciproques, en traitant à plusieurs reprises de la transformation des propriétés métriques des figures.

b. La surface de l'onde. Mes recherches sur la surface de l'onde se distinguent non seulement par les résultats obtenus, mais par les méthodes employées. J'ai découvert de nouvelles propriétés géométriques de cette surface et j'ai été assez heureux pour en trouver un certain nombre susceptibles d'interprétation optique. On ne connaissait que peu de propriétés de ce genre, malgré les beaux travaux de Fresnel, Hamilton, Mac-Cullagh et Plücker.

c. La représentation plane de certaines figures de l'espace.

d. L'étude des pinceaux et de leurs transformées, en cherchant la correspondance qui existe entre leurs représentations planes, idée qui était neuve et qui prendra de grands développements.

e. Enfin, je me suis occupé pendant de longues années des propriétés relatives au déplacement des figures dans l'espace et des applications de ces propriétés. Cela m'a permis de constituer un ensemble que je désigne sous le nom de *Géométrie cinématique* (1).

J'ai développé les éléments de cette branche nouvelle de la Science dans mon *Cours de Géométrie descriptive* (2), et, ainsi que je le disais dans la préface, « en employant d'une manière systématique des propriétés qui concernent les déplacements des figures comme procédé très simple de démonstration, je suis arrivé à constituer une *nouvelle méthode géométrique* au moyen de laquelle j'ai pu résoudre des problèmes jusqu'ici réservés à l'Analyse infinitésimale. Ces propriétés, d'ailleurs intéressantes en elles-mêmes et qui sont d'une application immédiate en *Mécanique*, m'ont également permis de faire une *Leçon d'Optique géométrique*.

» Les applications de la Géométrie cinématique à la Géométrie descriptive concernent le raccordement des surfaces, etc.

. . . .

» Toutes ces applications, ainsi que celles dont il est question plus loin,

(1) Feu le professeur Aronhold avait créé, à Berlin, un cours de *Géométrie cinématique*, dans lequel il exposait mes travaux. Ce cours est continué par M. le Dr Buka.

(2) En parlant de cet Ouvrage, M. Resal termine ainsi une Note qu'il a présentée à l'Académie des Sciences (29 décembre 1879) sous le titre *Note sur les différentes branches de la Cinématique* :

« M. Mannheim, par de nombreuses et intéressantes applications, a montré que l'emploi des » propositions élémentaires de la Géométrie cinématique constitue une méthode nouvelle d'une » véritable originalité.

» La *Géométrie cinématique* de M. Mannheim n'est pas simplement la partie géométrique de la » Cinématique, telle qu'on l'étudiait jusqu'ici. Elle considère en outre les figures mobiles de forme » variable, comprend aussi la recherche des propriétés relatives aux figures de forme invariable » pour lesquelles le déplacement n'est pas absolument défini, et dont, avant M. Mannheim, on ne » s'était jamais occupé.

» Comme dans cette courte Note je n'ai eu pour objet que de fixer quelques définitions, je » n'insiste pas sur la valeur du Livre de M. Mannheim. Qu'il me soit pourtant permis de dire que, » à mon point de vue, ce beau travail établit un point de repère important dans l'histoire de la » science. »

Mon Ouvrage, quoique portant le titre du Cours que je professe à l'École Polytechnique, peut donc être considéré comme renfermant une partie absolument originale. J'espère qu'il contribuera à répandre le goût de la Géométrie pure.

Il a été adopté dans des Universités étrangères. La première édition, parue en 1880, étant presque épuisée, la deuxième est en préparation.

sont le fruit de mes recherches personnelles. Elles sont présentées dans mon Ouvrage sous une forme appropriée à l'enseignement.

» J'ai ajouté à plusieurs Leçons des Suppléments qui renferment quelques développements relatifs à la théorie des surfaces et montrent l'utilité des surfaces que j'ai appelées *normalies*. Dans d'autres Suppléments, j'ai donné diverses applications de Géométrie cinématique, afin de faire mieux connaître et de propager une méthode féconde qui me semble digne de l'attention des géomètres. »

Cette méthode, on pourrait la rattacher aux procédés géométriques en usage parmi les géomètres du XVII^e siècle : Descartes, Roberval, Maclaurin, etc., procédés dont l'invention du Calcul infinitésimal amena, pour un temps, l'abandon presque complet.

Ce me serait un grand honneur d'avoir, en fournissant des preuves nombreuses de leur puissance, contribué, pour ma part, à faire renaître ces précieux moyens d'investigation et de démonstration au commun avantage de la Géométrie et de l'Analyse, naturellement solidaires dans leurs progrès.

APERÇU SOMMAIRE DES TRAVAUX ANALYSÉS DANS CETTE NOTICE.

Cet aperçu renferme surtout l'énumération des questions nouvelles que j'ai traitées et l'indication des éléments nouveaux que j'ai introduits dans la Science.

Mes recherches sur la théorie des polaires réciproques ont eu pour objet de développer cette théorie due à l'illustre Poncelet (*voir*, dans cette Notice, les n^os 1, 2, 16) [1].

Parmi diverses applications de la transformation par rayons vecteurs réciproques, je citerai l'étude de la *cyclide* (de Dupin) (9). La marche suivie dans ce travail a été adoptée par M. Bertrand dans son *Traité de Calcul différentiel*.

[1] « ... Par là, en effet, l'auteur (Mannheim) est arrivé à divers résultats remarquables, les uns déjà connus, les autres tout à fait inconnus. » (Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, t. II, p. 431.)

Dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, j'ai pris pour pôle de transformation un point particulier, au moyen duquel on peut transformer une courbe en elle-même, et que j'ai appelé *pôle principal*. J'ai fait connaître quelques propriétés générales des *pôles principaux* (10). Ces recherches sur la cyclide et sur les pôles principaux ont donné lieu au travail de M. Moutard sur les anallagmatiques du quatrième ordre.

La construction géométrique du centre de courbure d'un assez grand nombre de courbes a été, à plusieurs reprises, le sujet de mes recherches (3, 4, 5, 6, 7, 15) [1].

On connaissait peu de théorèmes sur les arcs de courbes : j'en ai trouvé un certain nombre (13, 14). L'idée de considérer les arcs de courbes planes ou sphériques comme enveloppes de cercles était *nouvelle* au moment où mon Mémoire a paru.

Dans l'*Étude du déplacement* d'un corps solide, j'ai, *le premier*, supposé le corps mobile soumis à des conditions géométriques *très variées et diverses* [2]. Dans toutes les circonstances où j'ai placé la figure mobile, j'ai cherché à élucider tout ce qui concerne son déplacement : par exemple, j'ai donné d'une façon générale le moyen de construire l'axe instantané de rotation et de glissement, et le pas des hélices infiniment petites décrites : Poncelet et Chasles s'étaient occupés d'un seul cas particulier de ce problème. Ce Mémoire renferme une nouvelle méthode des normales qui se prête à de nombreux développements (17, 18, 20, 36, 44, 56, 71, etc.).

Cette étude a été en partie introduite dans l'enseignement, en France et à l'Étranger.

Mon *Étude sur le déplacement* a été l'objet d'un Rapport approuvé par l'Académie dans la séance du 23 mars 1868, et dont voici les conclusions :

L'étude des déplacements que peut prendre un corps soumis à moins de cinq

---

(1) *Voir* plus loin, p. 17, une Note très bienveillante du général Poncelet.

(2) To M. Mannheim belongs the credit of having been the first to study geometrically the Kinematics of a constrained body from a perfectly general point of view (BALL, *Theory of screws*; Dublin, 1878).

On a réimprimé, en septembre 1880, dans le *Journal de Borchardt*, un très beau travail du professeur Schönemann, présenté à l'Académie de Berlin en 1855, et qui contient les énoncés d'un certain nombre de résultats relatifs au déplacement des figures; mais M. Schönemann n'avait considéré que le cas particulier où la figure mobile est assujettie à avoir des points sur des surfaces données.

conditions n'avait pas encore fixé l'attention des géomètres, et, à cet égard, elle constitue un progrès dans la marche naturelle de la science. Les applications que l'habile professeur a faites de ses résultats à de nombreuses questions concernant la théorie des lignes et des surfaces courbes, dont on ne possédait point encore de solutions, donnent une importance très marquée à son travail, que nous sommes heureux de signaler avec confiance à l'attention particulière des géomètres, et dont nous avons l'honneur de proposer à l'Académie l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers*. (Commissaires, MM. Bertrand, Bonnet; Chasles, rapporteur.)

J'ai considéré une figure dont le déplacement n'est pas complètement défini, c'est-à-dire qui est assujettie à moins de cinq conditions. La question qui se présentait d'abord était l'étude d'une figure de forme invariable dont le déplacement est soumis à quatre conditions. Ce travail, qui a pris depuis lors un grand développement, débute par un théorème fondamental, généralisation de cette proposition bien connue de Géométrie plane : les normales aux trajectoires des points d'un plan qui glisse sur lui-même passent par un point fixe, centre instantané de rotation.

Ce théorème fondamental peut s'énoncer ainsi : *Les normales aux surfaces trajectoires des points d'un corps rencontrent toutes, deux certaines droites, axes simultanés de rotation* (1). Aux lignes trajectoires de la proposition de Géométrie plane correspondent ici des surfaces trajectoires, et au centre instantané, deux axes simultanés de rotation; ces deux axes jouent un rôle très important dans toute cette étude (2), comme on le voit dans mon Mémoire *sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions* (18, 20, 26, 37, 38, 89) (3). Ce Mémoire a été l'objet d'un Rapport approuvé par l'Académie, dont voici les conclusions (6 octobre 1873) :

Les géomètres comprendront, sans que nous ayons besoin d'insister, toute l'importance d'un travail qui réunit dans une théorie absolument nouvelle, en les déduisant d'un mode uniforme de démonstration, des résultats aussi précis et aussi considérables.

Nous ne saurions le recommander trop vivement aux encouragements de l'Académie, et la Commission déclare, à l'unanimité, que ce Mémoire lui paraît très

(1) *Voir* n° 18.

(2) Depuis la publication de mes travaux, MM. Ribaucour et Halphen se sont aussi occupés du déplacement d'un corps assujetti à moins de cinq conditions.

(3) La publication de mes recherches sur les figures dont les déplacements sont assujettis à moins de cinq conditions a provoqué d'intéressants travaux, dus à MM. Somoff, Ribaucour, Halphen, etc.

digne d'être inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*. (Commissaires : MM. Bertrand, Bonnet; Chasles rapporteur.)

Parmi diverses applications que j'ai faites de la proposition importante relative aux normales aux surfaces trajectoires, je citerai la détermination de la direction des lignes de courbure de la surface de l'onde et la construction des centres de courbure principaux de cette surface (19), *problèmes qui n'avaient pas encore été résolus*.

La surface de l'onde, dont je viens de parler, m'a occupé d'une façon particulière. J'ai découvert de nouvelles propriétés géométriques de cette surface, et j'ai été assez heureux, comme je l'ai dit dans mon avant-propos, *pour en trouver un certain nombre susceptibles d'interprétation optique* [1] (19, 40, 43, 48, 49, 62, 63, 64, 69, 73, 76, 78, 79, 80 et 81).

La correspondance remarquable que j'établis entre le centre instantané de rotation et un système de deux axes de rotation m'a conduit plus tard à signaler dans l'espace deux certaines droites, que j'ai appelées *droites de courbure*, comme jouant un rôle analogue à celui du centre de courbure d'une ligne plane.

De là, comme je l'ai montré, la possibilité d'établir une *théorie géométrique du contact des surfaces* (31). Depuis les travaux de Cauchy et de Dupin, cette théorie n'avait guère fait de progrès.

Dans mon *Étude sur le déplacement*, j'ai appelé l'attention sur la surface, lieu d'une série de normales à une surface donnée, que j'ai nommée *normalie*. L'utilité des normalies ressort de mes Communications (19, 20, 21, 24, 28, 29, 31, 33, 34, 35, 39, 41, 42, 46, etc.). Plusieurs géomètres en ont fait usage et le terme est adopté aussi bien à l'étranger qu'en France.

Les propriétés des normalies et quelques théorèmes sur le déplacement des figures, employés concurremment, m'ont permis de résoudre certains problèmes dont la solution paraissait réservée à la méthode analytique. Je veux parler des questions qui nécessitent l'emploi d'infiniment petits du troisième ordre, comme : déterminer le rayon de courbure de la développée

[1] Mes premiers travaux sur la surface de l'onde ont été réunis et commentés dans une intéressante étude de M. le professeur C. Niven (*Quarterly Journal*, 1878).

d'une section plane faite dans une surface; déterminer le plan osculateur en un point de la courbe de contact d'une surface et d'un cône qui lui est circonscrit, etc., etc. (45, 46, 47, 84). *Ces questions difficiles n'avaient encore été abordées, ni géométriquement, ni analytiquement.*

Après le problème des normales est venu se placer naturellement le problème plus compliqué de la recherche des éléments de courbure des lignes décrites pendant le déplacement d'un corps. A ce sujet, j'ai montré qu'il existe une droite au moyen de laquelle on peut déterminer les plans osculateurs et les rayons de courbure des trajectoires des points d'une droite mobile. Les axes de courbure des développables enveloppes des plans d'un faisceau mobile se construisent aussi au moyen d'une certaine droite (22, 23). Ces résultats, que j'ai seulement énoncés, sont des applications de formules, encore *inédites*, relatives à la déformation des figures polyédrales de *forme variable*. Indépendamment de ces constructions, *j'ai fait connaître de nombreuses propriétés générales relatives à la courbure des lignes ou surfaces trajectoires* (36, 37, 38).

L'emploi des droites que j'ai appelées *axes de courbure* m'a permis de trouver plusieurs généralisations du théorème de Meusnier (28); l'une d'elles conduit à la construction de la sphère osculatrice en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces (45, 52). *On n'avait encore déterminé que le plan osculateur en un point de cette courbe.*

Pendant que les points d'un corps décrivent autour de leurs positions initiales des éléments de leurs surfaces trajectoires, les droites entraînées engendrent des pinceaux. Hamilton et Kummer ont étudié analytiquement les pinceaux; j'en ai fait une étude purement géométrique. Pour cela, *j'ai imaginé* de représenter chacune des *surfaces élémentaires* d'un pinceau par une droite que j'ai appelée *droite auxiliaire*. L'étude du pinceau des normales à une surface m'a conduit à une *nouvelle théorie géométrique de la courbure des surfaces* (33).

En faisant usage d'une simple propriété relative au déplacement d'un dièdre droit, j'ai pu trouver *géométriquement* la liaison qui existe entre les droites de courbure des nappes de la développée d'une surface (29) [1].

---

[1] Depuis, M. Ribaucour, par ses procédés analytiques, a montré aussi que cette liaison s'exprime au moyen d'un paraboloïde hyperbolique.

J'ai donné depuis, *géométriquement aussi*, deux relations analytiques entre les éléments qui fixent la position de ces droites (47). Ces relations nouvelles ont été ensuite démontrées analytiquement par M. Halphen.

J'ai utilisé la *droite auxiliaire*, dont j'ai parlé précédemment, non seulement dans l'étude des pinceaux (33, 34), mais aussi pour trouver de nombreuses propriétés de deux courbes, qui ont les mêmes normales principales, et de la surface formée par ces normales (35).

L'enveloppe des *droites auxiliaires* correspondant aux génératrices d'une surface réglée est une courbe *représentative* de cette surface. Au moyen de courbes représentatives, l'étude de certaines surfaces réglées a été ramenée à l'étude de courbes planes (58, 59, 60, 68), *procédé nouveau qui a simplifié l'étude de ces surfaces réglées.*

Partant de la représentation des surfaces élémentaires d'un pinceau, j'ai été conduit à représenter un pinceau par une circonférence et l'un de ses points. L'étude des transformations des pinceaux est alors ramenée à l'étude de propriétés relatives à des circonférences de cercles, tracées sur un même plan (74, 75, 76, 80). *On n'avait rien fait d'analogue.*

J'ai simplifié la représentation d'un élément de surface réglée, en n'employant qu'un *point représentatif.* J'ai fait usage de ce point dans un Mémoire d'*Optique géométrique*, où j'applique le point représentatif à de nouvelles démonstrations relatives à la courbure des surfaces, et où je traite et *résous d'une façon complète, et dans le cas le plus général*, un problème d'Optique qui avait été traité seulement dans un cas particulier, et sans qu'on fût arrivé aux constructions demandées par la question (88). Mon Mémoire, qui paraîtra dans les *Atti della R. Accademia dei Lincei*, a été l'objet d'un rapport de MM. Cremona et Beltrami (*voir*, p. 62, les conclusions de ce Rapport).

Je termine ici ce très sommaire exposé, par lequel je ne puis espérer avoir fait ressortir tout l'intérêt que présentent, tant en elles-mêmes qu'au point de vue de leur application à la théorie des surfaces, mes recherches relatives aux déplacements des figures [1].

---

[1] C'est en faisant usage de quelques propositions de *Géométrie cinématique* que je suis arrivé à des résultats très intéressants concernant les surfaces homofocales du second ordre (81, 82, 83, 85).

ANALYSE DES TRAVAUX.

1. *Note sur la théorie des polaires réciproques.*

Feuilles autographiées. Metz, 1851.

Cette Note se termine par une première tentative de transformation des propriétés métriques des figures.

2. *Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques.*

Brochure in-8°. Paris, 1857.

Dans son beau Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques, le général Poncelet avait montré comment on pouvait transformer les relations métriques projectives, et, dans une Note qui a paru dans le Tome VII de la *Correspondance mathématique de Quetelet*, M. Poncelet avait fait voir comment on pouvait rendre projectives certaines relations métriques.

Dans ma brochure j'ai résolu les deux questions suivantes :

1° *Transformer, à l'aide de la théorie des polaires réciproques, une relation métrique sans lui faire subir aucune préparation.*

2° *Déterminer immédiatement les différentes formes sous lesquelles se serait présentée la relation transformée, si l'on avait opéré sur différentes formes de la relation donnée.*

M. Chasles s'était occupé de la première question dans un travail intitulé : *Mémoire sur la transformation parabolique des relations métriques des figures.*

Pour répondre à cette première question, je donne l'expression de la transformation d'un segment de droite, par rapport à une circonférence de cercle.

Pour répondre à la seconde question, je donne à cette expression un grand nombre de formes, afin d'obtenir, pour une relation métrique et par de simples substitutions, différentes formes de la relation transformée.

Voici quelques-unes des applications renfermées dans ma brochure :

1° Transformation de la distance d'un point à une droite.

2° Transformation du carré de l'hypoténuse.

3° Transformation de l'identité $ab + bc = ac$, a, b, c étant trois points en ligne droite.

4° Transformation du rapport $\frac{ab}{bc}$, a, b, c étant en ligne droite.

Je suis conduit, dans cette application, à des formes nouvelles du rapport anharmonique de quatre points ; l'une de ces formes permet d'obtenir très simplement une certaine équation exprimant la division homographique de deux droites. De cette équation on en déduit deux autres qui avaient été données par M. Chasles dans son *Traité de Géométrie supérieure*.

5° Transformation du système de coordonnées de Descartes. Parmi les résultats obtenus, j'ai été conduit aux deux systèmes de coordonnées développés par M. Chasles dans le même Ouvrage.

6° Transformation de démonstrations.

Je montre comment on peut obtenir les démonstrations directes des propriétés provenant de la transformation par polaires réciproques. Les démonstrations qu'on peut obtenir ainsi sont ou analytiques ou géométriques, selon la nature de la démonstration que l'on possède de la propriété que l'on transforme. Je donne des exemples de transformation de ces deux genres de démonstrations.

Enfin, je termine cette brochure en faisant connaître des expressions de la transformation de l'aire d'un triangle, du volume d'un tétraèdre et des applications de ces expressions. Depuis la publication de cette brochure, j'ai donné de nouveaux exemples de transformation de relations métriques (*voir* 16).

5. *Construction de la tangente, du point de contact d'une droite avec son enveloppe pour certains lieux géométriques. Applications à la détermination du centre de courbure des coniques.*

Nouvelles Annales de Mathématiques. 1re série. t. XIV ; 1857.

Sur une droite mobile de longueur variable je construis des triangles semblables à un triangle donné, et je détermine la tangente à la courbe lieu des sommets de ces triangles. Comme cas particulier, je cherche la tangente à la courbe lieu des points qui partagent, dans un rapport constant, un segment de longueur variable d'une droite mobile. Inversement, je construis le point où une droite touche son enveloppe, lorsque cette droite se déplace de telle façon que trois courbes données la partagent en segments proportionnels à des segments donnés.

Ces constructions permettent d'obtenir de plusieurs manières le centre de courbure d'une conique. On trouve que le centre de courbure de la courbe enveloppe d'une droite qui détache d'une courbe donnée un segment d'aire constante s'obtient ainsi : des extrémités de la droite on élève des normales à la courbe donnée ; ces droites interceptent, sur la normale à la courbe enveloppe, un segment dont le milieu est le point cherché.

4. *Construction du centre de courbure de la courbe lieu des points dont les distances à deux courbes données sont dans un rapport constant.*

Annali di Matematica di Tortolini, t. I, p. 364 ; 1858.

Après avoir trouvé plusieurs constructions élégantes, je les applique aux coniques, à l'ovale de Descartes et aux caustiques par réfraction.

5. *Construction des centres de courbure des lignes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan.*

Journal de l'École Polytechnique, XXXVII[e] Cahier, 1858.

Une première solution est basée sur l'existence de deux circonférences, dont l'une est le lieu des points du plan mobile qui décrivent des courbes dont les centres de courbure sont à l'infini.

Dans la deuxième solution, je fais usage de la formule de Savary, et je retrouve une construction due à Bobillier. Ce travail est terminé par le théorème suivant :

Lorsqu'une conique roule sur une courbe, le lieu des centres de courbure des éléments décrits simultanément par tous les points de cette conique est une conique tangente à la première, au centre instantané de rotation.

6. *Note sur la Géométrie infinitésimale.*

Annali di Matematica, t. II, p. 208 ; 1859.

Cette Note renferme plusieurs théorèmes intéressants de Géométrie infinitésimale. On y trouve aussi la construction du centre de courbure de la courbe que l'on obtient en divisant, dans un rapport constant, les ordonnées d'une courbe donnée. Certains théorèmes de cette Note ont été reproduits par Bour dans son *Traité de Cinématique* (*voir* p. 46-60).

7. *Construction du centre de courbure de l'épicycloïde.*

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1re série, t. XVIII, p. 371; 1859.

Cette construction s'obtient en appliquant les résultats d'un travail précédent (3). Cette Note est terminée par cette proposition : *Lorsqu'une chaînette roule sur une droite, sa base passe par un point fixe.*

8. *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite.*

Journal de Mathématiques, 2e série, t. IV, p. 93; 1859.

Je fais voir géométriquement que ce lieu est une droite lorsque la courbe qui roule est une spirale logarithmique, une parabole lorsqu'on fait rouler une développante de cercle, une circonférence lorsqu'il s'agit d'une cycloïde, une ellipse dans le cas d'une épicycloïde ordinaire, et enfin une parabole lorsqu'on fait rouler une chaînette.

9. *Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude de la surface enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères données.*

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1re série, t. XIX; 1860.

M. Dupin a donné le nom de *cyclide* à cette surface et l'a étudiée dans ses *Applications de Géométrie*.

J'arrive très rapidement à des propriétés connues de cette surface et à d'autres nouvelles, après avoir montré qu'elle provient de la transformation d'un tore par rayons vecteurs réciproques. C'est ainsi qu'en transformant ce beau théorème de M. Yvon Villarceau : *Un plan doublement tangent à un tore coupe cette surface suivant deux circonférences,* j'obtiens le théorème suivant : *Toute sphère doublement tangente à une cyclide coupe cette surface suivant deux circonférences.*

Ce dernier théorème est applicable au tore.

10. *Sur les pôles principaux.*

Bulletin de la Société philomathique, 15 décembre 1860.

J'ai appelé *pôle principal*, dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, un point qui, pris comme pôle de transformation, permet de transformer une courbe en elle-même.

Parmi les théorèmes énoncés dans cette Note, je citerai le suivant :

Lorsqu'une courbe admet un pôle principal, il en est de même de sa transformée par rayons vecteurs réciproques, obtenue par rapport à un pôle quelconque pris dans son plan.

On a un théorème analogue lorsque l'on considère une surface ayant un pôle principal.

11. *Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude des anticaustiques.*

Bulletin de la Société philomathique, 22 décembre 1860.

Lorsque des rayons émanés d'un point sont réfléchis par une courbe, ils enveloppent, après cette réflexion, une caustique par réflexion. Jacques Bernoulli a désigné sous le nom d'*anticaustique* une certaine trajectoire orthogonale de ces rayons réfléchis. J'ai adopté cette expression d'*anticaustique* en l'étendant au cas de la réfraction. Les anticaustiques ne sont autres que les caustiques secondaires de Quetelet.

Parmi les théorèmes renfermés dans ce travail, je citerai le suivant :

L'anticaustique N *d'une courbe* M *pour un point lumineux* f *et un indice* I *a pour anticaustique, pour le même point lumineux et l'indice* $-$I, *une courbe semblable à* M. *Le point* f *est le centre de similitude, et le rapport de similitude est* $\frac{\mathrm{I}^2-1}{\mathrm{I}^2}$.

Comme conséquence, on retrouve cette propriété connue :

La caustique secondaire du cercle est une ovale de Descartes.

12. *Sur les polygones plans inscrits et circonscrits.*

Applications d'Analyse et de Géométrie : Poncelet, 1862.

Cette Note renferme l'alinéa suivant :

« On arrive très facilement à la construction de la normale à la courbe décrite par le sommet libre d'un polygone que l'on déforme d'un mouvement continu; on est ramené, pour résoudre ce problème, à chercher une droite, issue du sommet libre, telle que les segments comptés sur cette ligne à partir de ce point, et limités à deux droites connues, soient dans un rapport déterminé. Une construction inverse permet de déterminer le point où l'un des côtés du polygone touche son enveloppe. Enfin, si l'on remarque que la construction linéaire qui sert à déterminer la normale à la courbe décrite par un sommet libre nous donne cette normale comme le côté d'un certain polygone, qui lui-même se déforme pendant le mouvement continu de la figure donnée, on peut chercher, toujours par des constructions linéaires, le point où cette normale touche son enveloppe, c'est-à-dire le centre de courbure de la courbe décrite par le sommet libre du premier polygone. »

Il suffirait de développer ces quelques lignes pour trouver la construction du centre de courbure des lignes décrites pendant le déplacement d'une figure polygonale de forme variable [1].

Je citerai seulement ce théorème, où il y a une indétermination curieuse :

Lorsqu'un polygone d'un nombre pair de côtés est inscrit à une conique et que tous ses côtés moins un pivotent autour de points fixes, le côté demeuré libre touche son enveloppe au point autour duquel pivoterait ce dernier côté, si les sommets du polygone parcouraient des droites convergentes en un point quelconque.

15. *Des arcs des courbes planes ou sphériques considérés comme enveloppes de cercles.*

Journal de Mathématiques, 2e série, t. VII; 1862.

Je montre que la différence des deux arcs enveloppes d'une suite de circonférences est égale à $\int 2l\,d\omega$, l étant le rayon d'une de ces circonférences variables de grandeur, et $d\omega$ l'angle de contingence de la courbe enveloppe des cordes de contact de ces circonférences. On trouve immédiatement

---

[1] On peut retrouver ainsi la solution de la question suivante, que j'ai communiquée à la Société philomathique (5 mai 1860) :

Un polygone se déplace dans son plan en restant semblable à lui-même. On donne les centres de courbure de la courbe enveloppe d'un des côtés et des courbes décrites par les extrémités de ce côté. On demande le centre de courbure de la ligne décrite par un sommet quelconque du polygone, ainsi que celui de la courbe enveloppe d'un des côtés.

cette formule en considérant *le déplacement d'un segment de droite de longueur variable, qui coupe sous des angles égaux les lignes décrites par les extrémités de ce segment*. Au moyen de cette formule je démontre que :

La différence des arcs correspondants d'une anticaustique complète relative à un point lumineux est exprimable en arcs de la podaire de la ligne dirimante prise par rapport à ce point lumineux.

Comme l'anticaustique complète d'un cercle est une ovale de Descartes, et que les arcs de la podaire d'un point par rapport à un cercle sont exprimables en arcs d'ellipse, on retrouve ainsi géométriquement un théorème auquel M. Roberts était arrivé par le calcul.

Après avoir donné d'autres applications de cette même formule, je l'étends au cas des figures sphériques en introduisant un angle de contingence géodésique. Cette extension m'a permis d'énoncer le théorème suivant, qui est remarquable parce que chacun des arcs qui entre dans son énoncé serait exprimé analytiquement par une transcendante compliquée :

De tous les points d'une ellipse sphérique comme pôles on décrit des petits cercles dont les rayons sphériques ont des sinus proportionnels aux sinus des distances sphériques de leurs pôles à l'un des foyers de l'ellipse sphérique : la différence des arcs correspondants de la courbe enveloppe de ces cercles est exprimable en arc de cercle.

14. *Recherches géométriques sur les longueurs comparées d'arcs de courbes différentes.*

Journal de l'École Polytechnique, XL^e Cahier, p. 205; 1863.

Ce Mémoire renferme un grand nombre de généralisations de ce théorème de Steiner :

Lorsqu'un arc de courbe plane roule sur une droite, un point quelconque de son plan, entraîné dans le mouvement, décrit un arc égal en longueur à l'arc de podaire que l'on obtient en projetant le point décrivant sur les tangentes à l'arc mobile.

Parmi ces généralisations je citerai :

Si l'on fait rouler sur un plan la portion d'une surface développable comprise entre deux génératrices (A) *et* (A'), *un point* B *de l'espace, entraîné pendant ce mouvement, décrit un arc* (B) *égal en longueur à l'arc* (P), *lieu des pieds des* *perpendiculaires abaissées du point* B *sur les plans tangents qui touchent la développable entre* (A) *et* (A').

Je généralise le théorème de Steiner sur la sphère, et je trouve comme conséquence que :

La courbe décrite par le foyer d'une ellipse sphérique, pendant le roulement de cette courbe sur un grand cercle, a ses arcs exprimables en arcs de cercle.

15. *Addition au deuxième Cahier des Applications d'Analyse et de Géométrie du général Poncelet* (1).

T. II, mars 1863.

Dans cette Note, je donne l'expression du rapport des rayons de courbure en deux points quelconques B et C d'une courbe du troisième ordre en fonction des tangentes à la courbe issues des points B et C et limitées à leur point de rencontre, et de segments comptés sur la droite BC. Je donne aussi plusieurs expressions du rapport des rayons de courbure en un point double d'une courbe du troisième ordre, et je démontre ce théorème :

Lorsqu'une courbe du troisième ordre est à la fois inscrite et circonscrite à un triangle ABC, *le produit des rayons de courbure correspondant aux sommets* A, B, C *est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle* ABC.

16. *Transformation par polaires réciproques des propriétés relatives aux rayons de courbure.*

Journal de Mathématiques, 2e série, t. XI; 1866.

Ce Mémoire, complément du travail analysé au n° 2 de cette Notice, contient des formules de transformation du rayon de courbure d'une courbe quelconque et diverses applications.

---

(1) A la page 117 de ce Volume, le général Poncelet annonce ainsi cette Note :

« M. Mannheim, dont les recherches originales, relatives aux rayons de courbure en des points divers des lignes géométriques, sont aujourd'hui bien appréciées, et qui a eu l'obligeance de relire les manuscrits de ce Volume avant leur impression, m'a remis sur ce même sujet une Note qu'on trouvera à la fin du premier Cahier, et dont l'élégante simplicité m'a paru mériter assez l'attention des lecteurs de cet Ouvrage pour y trouver place, au risque de lui faire perdre beaucoup par les comparaisons si l'on venait à oublier les différences des dates et le développement récent des idées géométriques. »

En transformant le théorème, relatif à une courbe du troisième ordre, dont je viens de reproduire l'énoncé, on trouve que :

Lorsqu'une courbe de troisième classe est à la fois inscrite et circonscrite à un triangle, le produit des rayons de courbure correspondant aux trois sommets est égal à soixante-quatre fois le cube du rayon du cercle circonscrit au triangle.

En rapprochant ce théorème de celui dont il est le transformé, on reconnaît que :

Une courbe de troisième ordre et de la troisième classe ne peut pas être à la fois inscrite et circonscrite à un triangle.

Je donne dans le même Mémoire des formules pour la transformation du rayon de courbure d'une courbe gauche. J'applique ces résultats à la recherche des formules de transformation du rayon de courbure d'une section plane normale en un point d'une surface, et des rayons de courbure principaux de cette surface au même point.

Comme application de ces formules, je transforme la relation d'Euler. Le résultat est une relation entre les rayons de courbure pour un point d'une surface de toutes les sections faites dans cette surface par les plans passant par une droite quelconque issue du point considéré sur la surface.

Je suis encore conduit à une relation très simple qui donne le rayon de courbure du contour apparent d'une surface sur un plan en fonction des rayons de courbure principaux de cette surface. De cette relation je déduis le théorème suivant : *La somme des rayons de courbure des contours apparents d'une surface sur deux plans rectangulaires entre eux et perpendiculaires à un plan tangent fixe de cette surface est constante, quels que soient les plans rectangulaires sur lesquels on effectue les projections.*

17. *Sur le déplacement d'un corps solide.*

Comptes rendus, 25 juin 1866.

Dans ce travail, je cherche une liaison entre les normales aux trajectoires des points du corps et l'axe instantané de rotation et de glissement. Je montre que cet axe n'intervient que par sa direction et qu'il ne joue pas dans l'espace un rôle analogue au centre instantané de rotation sur le plan.

Ce travail a été réimprimé dans le *Journal de Liouville* (2e série, t. XI, 1866) avec la Note dont je vais parler.

18. *Sur le déplacement d'un corps solide.*

Bulletin de la Société philomathique, 14 juillet 1866.

J'énonce pour la première fois ce théorème important :

Lorsqu'un corps solide n'est assujetti qu'à quatre conditions, ses points se déplacent sur des surfaces; à un instant quelconque, les normales à toutes ces surfaces s'appuient sur deux mêmes droites.

On a réimprimé récemment, dans le *Journal de Borchardt*, une Communication, faite en 1855 par Steiner, à l'Académie de Berlin, de la part du professeur Schönemann, dans laquelle se trouve énoncée la construction qui résulte de ce théorème, et qui donne la normale à la surface sur laquelle se déplace un point d'un corps solide, mais seulement dans le cas particulier où celui-ci est assujetti à avoir quatre points sur quatre surfaces données.

19. *Construction géométrique, pour un point de la surface des ondes, des centres de courbure principaux et des directions des lignes de courbure.*

Comptes rendus, 28 janvier et 11 février 1867.

La surface des ondes dont il est question ici est celle de Fresnel. Elle a été l'objet des recherches de plusieurs géomètres. Mac Cullagh et Plücker sont arrivés à la construction de la normale en un point de cette surface. Après avoir retrouvé cette construction, je donne, ce qui offrait plus de difficultés, la direction des lignes de courbure et les centres de courbure principaux de cette surface. Dans une première solution, je fais usage de différentes propriétés du déplacement d'une figure dans l'espace. Les centres de courbure principaux sont obtenus comme points doubles de deux divisions homographiques.

Une deuxième solution résulte de l'emploi du théorème énoncé dans la Note précédente. Elle conduit au théorème suivant :

Pour des points correspondants m, m_1 *d'un ellipsoïde et de la surface de l'onde qui en dérive, les droites de courbure de ces surfaces jouissent de ces propriétés : l'une des droites qui les rencontrent passe par le centre* o, *commun à l'ellipsoïde et à la surface de l'onde; l'autre droite qui les rencontre est dans le plan mené du centre* o *perpendiculairement à la droite qui joint ce point au point de rencontre des normales en* m *et* m_1 *à l'ellipsoïde et à la surface de l'onde.*

Quand on sait les difficultés qu'ont eues Fresnel, Ampère, Cauchy pour établir l'équation de la surface de l'onde, il est digne de remarque que la Géométrie, avec ses seules ressources, m'ait permis de résoudre le problème qui fait l'objet de ce travail.

20. *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable.*

Recueil des Mémoires des Savants étrangers, t. XX, et Journal de l'École Polytechnique. 43e Cahier.

Ce Mémoire est divisé en deux Chapitres, eux-mêmes partagés en paragraphes.

Voici les titres des paragraphes du Chapitre I :

§ 1. *Introduction.*

§ 2. *Propriétés géométriques du déplacement infiniment petit d'un corps solide libre.*

§ 3. *Il faut cinq conditions pour déterminer le déplacement d'une figure de forme invariable.*

§ 4. *Réduction du problème au cas où l'on a cinq points assujettis à rester sur cinq surfaces données.*

§ 5. *Nouvelle méthode des normales.*

Je résous les problèmes généraux suivants :

PROBLÈME I. — *Cinq points d'une figure de forme invariable sont assujettis à se déplacer sur cinq surfaces données; construire à un instant quelconque :*

1° *Le plan normal à la trajectoire d'un point quelconque de la figure mobile ;*

2° *La normale en un point de la surface engendrée par une courbe quelconque ;*

3° *La ligne suivant laquelle une surface entraînée pendant le déplacement touche son enveloppe :*

4° *L'axe du déplacement de la figure mobile ;*

5° *Le pas réduit des hélices infiniment petites décrites.*

PROBLÈME II. — *Quatre points d'une figure de forme invariable sont assujettis à se déplacer sur quatre surfaces données; construire à un instant quelconque :*

1° *La normale à la surface trajectoire d'un point entraîné;*

2° *Le point où une surface entraînée touche la surface lieu de ses intersections successives.*

La solution de ce problème conduit au théorème déjà signalé (18), et que j'énonce ainsi :

Lorsqu'une figure de forme invariable se déplace en restant assujettie à quatre conditions, à un instant quelconque, les normales, issues de tous les points entraînés, aux surfaces trajectoires de ces points, rencontrent les deux mêmes droites.

Je termine ce paragraphe en considérant une figure simplement assujettie à trois conditions. Je démontre la propriété suivante :

Lorsqu'une figure de forme invariable est assujettie pendant son déplacement à trois conditions distinctes, à un instant quelconque, on peut diriger arbitrairement un point quelconque lié à la figure mobile, à l'exception de tous les points d'un certain hyperboloïde, qui admettent des surfaces trajectoires.

Le Chapitre II contient quelques applications des résultats obtenus dans le Chapitre I.

Le § I est intitulé *Sur le déplacement d'une droite.*

Il renferme des constructions relatives aux surfaces réglées. Je fais usage, dans ce paragraphe, des surfaces que j'appelle *normalies* [1].

Le § II a pour titre *Sur le déplacement d'un dièdre.*

Le § III est intitulé *Sur le déplacement de quelques trièdres particuliers.*

Le § IV a pour titre *Sur le déplacement d'une surface assujettie à des conditions multiples.*

Enfin le dernier paragraphe, *Sur l'héliçoïde réglé*, renferme les constructions du plan tangent en un point de cette surface et de la courbe d'ombre pour le cas de rayons parallèles entre eux.

Ce Mémoire, déjà entré en partie dans l'enseignement, a été l'objet d'un Rapport lu à l'Académie le 23 mars 1868.

Voici les conclusions de ce Rapport [2] :

« L'étude des déplacements que peut prendre un corps soumis à moins » de cinq conditions n'avait pas encore fixé l'attention des géomètres, et, » à cet égard, elle constitue un progrès dans la marche naturelle de la » science. Les applications que l'habile professeur a faites de ses résultats » à de nombreuses questions concernant la théorie des lignes et des sur- » faces courbes, dont on ne possédait point encore de solutions, donnent

---

(1) J'appelle *normalie* une surface qui est le lieu d'une série de normales à une surface donnée. Plusieurs géomètres ont depuis fait usage de cette expression.

(2) Commissaires : MM. Bertrand, Bonnet; Chasles rapporteur.

» une importance très marquée à son travail, que nous sommes heureux de » signaler avec confiance à l'attention particulière des géomètres, et dont » nous avons l'honneur de proposer à l'Académie l'insertion dans le *Recueil* » *des Savants étrangers.* »

21. *Quelques résultats obtenus par la considération du déplacement infiniment petit d'une surface algébrique.*

Comptes rendus, 9 mai 1870.

Je détermine, par exemple, le nombre des normales à une surface qui rencontrent deux droites; le nombre des normales qu'on peut abaisser d'un point sur une surface ; le degré de la normalie à une surface dont les génératrices s'appuient sur une courbe donnée, etc.

22. *Détermination du plan osculateur et du rayon de courbure de la trajectoire d'un point quelconque d'une droite que l'on déplace en l'assujettissant à certaines conditions.*

Comptes rendus, 6 juin 1870.

La droite que l'on déplace est assujettie à avoir, soit deux de ses points sur deux courbes données, soit un point sur une courbe et deux points sur deux surfaces données, soit quatre de ses points sur quatre surfaces données.

Je montre l'existence d'une droite qui permet de construire les plans osculateurs et les rayons de courbure des trajectoires des points de la droite mobile. L'existence de cette droite est très intéressante. Les problèmes que j'ai résolus dans cette Note et dans la Note suivante n'avaient été abordés par aucun géomètre.

Pour arriver aux résultats énoncés dans cette Note, j'ai employé des formules encore *inédites*, qui sont relatives au déplacement d'une figure polyédrale de *forme variable*.

23. *Construction de l'axe de courbure de la surface développable enveloppe d'un plan dont le déplacement est assujetti à certaines conditions.*

Comptes rendus, 13 juin 1870.

Je considère d'abord les plans, parallèles à une même droite, formant une figure de grandeur invariable, et je montre qu'il existe une droite au moyen de laquelle on peut déterminer les axes de courbure des surfaces développables enveloppes de ces plans; puis je donne la solution du problème suivant :

Quatre plans parallèles à une même droite G, *formant une figure de grandeur invariable, se déplacent en touchant respectivement quatre surfaces données; construire, à un instant quelconque, l'axe de courbure de la développable enveloppe d'un plan invariablement lié aux premiers et qui est aussi parallèle à* G.

24. *Démonstration géométrique d'un théorème dû à M. O. Bonnet.*

Bulletin de la Société philomathique, 25 novembre 1871.

Voici l'énoncé de ce théorème, que je démontre géométriquement d'une façon très simple :

Lorsque, à partir d'un point a, *on prend sur une surface* (A) *des courbes ayant entre elles un contact de l'ordre* n, *les normalies qui ont ces courbes pour directrices ont entre elles un contact de l'ordre* (n + 1) *aux centres de courbure principaux situés sur la normale* A *en* a *à la surface* (A).

25. *Démonstration géométrique d'une propriété de la transformation par rayons vecteurs réciproques.*

Journal de Mathématiques, 2e série, t. XVI, 1871.

Une lettre de M. William Thompson, insérée dans le Tome XII du *Journal de Mathématiques*, 1re série, a été, comme l'on sait, l'occasion d'un travail très intéressant de Liouville. Dans ce travail, Liouville a démontré les propriétés fondamentales de la méthode de transformation qu'il a nommée *transformation par rayons vecteurs réciproques*. Liouville fit connaître cette propriété importante que, par une transformation directe d'une figure, on peut obtenir le résultat de transformations successives. La démonstration qu'il en a publiée est analytique : j'en ai donné dans cette Note une démonstration purement géométrique, ce qui offrait une certaine difficulté.

26. *Propriétés relatives aux déplacements infiniment petits d'un corps lorsque ces déplacements ne sont définis que par quatre conditions.*

Comptes rendus, 6 novembre 1871.

Voici les propriétés démontrées dans cette Note :

Les points qui, pour tous les déplacements infiniment petits de la figure, à partir d'une même position initiale, décrivent toujours les mêmes éléments de lignes, sont ceux des droites D *et* Δ, *qui sont les deux axes simultanés de rotation au moyen desquels on peut obtenir ces déplacements.*

Les plans qui, à partir de leurs positions initiales, se déplacent infiniment peu sans cesser de contenir chacun une certaine droite du plan mobile sont les plans menés perpendiculairement à l'une ou à l'autre des droites D *ou* Δ.

Les droites qui, pour tous les déplacements infiniment petits de la figure mobile, à partir de leurs positions initiales, engendrent des éléments de surfaces tangentes entre elles, sont les lignes de striction des paraboloïdes qui contiennent D *et* Δ, *et dont un plan directeur est parallèle à la perpendiculaire commune à ces droites.*

Ces droites sont les axes des déplacements que l'on peut imprimer à la figure mobile, et j'ai trouvé que :

Lorsqu'une figure de forme invariable n'est assujettie qu'à quatre conditions, les axes de tous les déplacements qu'on peut lui imprimer, à partir d'une quelconque de ses positions, sont les génératrices d'un conoïde droit du troisième ordre.

Cette surface a été trouvée aussi par Plücker dans son *Etude des complexes linéaires*. Elle joue un rôle considérable dans *The theory of screws* du Prof. R.-S. Ball, où elle est appelée *cylindroïde*, du nom que lui a donné M. le Prof. A. Cayley.

27. *Détermination simple et rapide d'une équation des surfaces du second ordre contenant six points donnés.*

Bulletin des Sciences mathématiques, t. II, 1871.

Si l'on joint deux points d'une conique à quatre points quelconques de cette courbe, on obtient toujours deux faisceaux homographiques. Je me suis proposé de chercher une propriété analogue relative aux surfaces du second ordre. Prenons, sur une surface du second ordre, trois points o, o', o'' et quatre points a, b, c, m. Par la droite oo' et chacun de ces derniers points faisons passer des plans; de même pour la droite $o'o''$ et la droite oo''. Nous aurons ainsi trois faisceaux de plans. Si nous imaginons que les trois plans qui contiennent le point mobile m de la surface soient seuls variables, nous pourrons fixer la position de ces plans au moyen de rapports anharmoniques r, r', r'' comptés de la même manière.

On a entre r, r', r'' une relation de la forme

$$\mathrm{B}rr' + \mathrm{C}rr'' + \mathrm{D}r'r'' + \mathrm{E}r + \mathrm{F}r' + \mathrm{G}r'' = 0,$$

dans laquelle la somme des coefficients est nulle et qui doit être vérifiée pour les valeurs de r, r', r'' correspondant à l'un des points de la surface situé dans le plan $oo'o''$. Cette équation est alors l'équation des surfaces du second ordre qui contiennent les six points o, o', o'', a, b, c.

28. *Généralisations du théorème de Meusnier.*

Comptes rendus, 5 février 1872.

J'énonce d'abord ainsi le théorème de Meusnier :

Lorsque des courbes tracées sur une surface ont entre elles un contact du premier ordre en un point a, *les axes de courbure de ces courbes, qui correspondent à ce point, passent par un même point* α.

Je démontre ce théorème, et ensuite les théorèmes suivants :

Lorsque des courbes tracées sur une surface ont entre elles un contact du premier ordre en un point a, *les développables circonscrites le long de ces courbes ont pour axes de courbure correspondant à ce point des droites passant par un même point* β.

Lorsque des courbes tracées sur une surface ont entre elles un contact du second ordre, les axes de courbure de leurs surfaces polaires passent par un même point.

Lorsque par le cercle osculateur en a *d'une courbe tracée sur une surface* (S) *on fait passer des sphères, celles-ci coupent* (S) *suivant des courbes dont on obtient les centres de courbure de leurs développées sphériques en projetant un point fixe* β *sur ces sphères.*

Lorsque des courbes tracées sur une surface ont entre elles un contact du

$n^{ième}$ *ordre, leurs* $(n-1)^{ièmes}$ *polaires ont pour axes de courbure des droites passant par un même point.*

Il me sera permis de faire remarquer que, ni géométriquement ni analytiquement, on n'avait rien trouvé d'analogue au théorème de Meusnier, qui date de 1785.

29. *Détermination de la liaison géométrique qui existe entre les éléments de la courbure des deux nappes de la surface des centres de courbure principaux d'une surface donnée.*

Comptes rendus, 12 février 1872.

Cette liaison s'exprime géométriquement au moyen d'un paraboloïde hyperbolique. On peut alors résoudre un certain nombre de questions qui n'avaient pas encore été abordées. Par exemple :

On donne les axes de courbure des lignes de courbure qui passent en un point d'une surface et les plans des sections principales des nappes de la développée de cette surface : construire les centres de courbure principaux de ces nappes.

30. *Exposition sommaire d'une théorie géométrique de la courbure des surfaces.*

Comptes rendus, 26 février 1872.

a est un point d'une surface (S) et A la normale en ce point. Les nappes de la développée de (S) touchent cette normale aux centres de courbure principaux b et c. Les normales à ces nappes issues de ces points sont les droites B et C, que j'ai appelées depuis *droites de courbure* de (S). Après l'exposition de la théorie de la courbure de (S) autour de a, déduite d'un théorème sur le déplacement, je termine en faisant remarquer que les droites de courbure B et C peuvent être substituées à l'indicatrice de Dupin pour le point a.

31. *Recherches géométriques sur le contact du troisième ordre de deux surfaces.*

Comptes rendus, 18 et 25 mars 1872.

Depuis les travaux de Dupin, la théorie du contact des surfaces n'a guère fait de progrès. Les recherches géométriques et analytiques sur ce sujet ont été poursuivies dans la voie même adoptée par Dupin et qui avait permis à ce géomètre d'étudier d'une façon si lumineuse ce qui concerne le contact du second ordre. Cette marche est analogue au procédé qui consiste, pour une courbe plane, à substituer à cette courbe en un de ses points une courbe simple qui lui est osculatrice.

Pour les courbes planes on fait usage aussi des développées successives et de leurs centres de courbure. C'est l'extension de ce dernier procédé au cas de l'espace, que j'ai inaugurée dans ce travail. J'introduis pour cela d'une façon systématique les deux *droites de courbure* (30) dont l'ensemble constitue dans l'espace un élément analogue au centre de courbure des courbes planes.

La voie que je suis a sur celle qu'avait adoptée Dupin l'avantage que, tandis que cet illustre géomètre, dans l'étude du contact des surfaces, devait faire usage successivement de courbes dont le degré allait en croissant, je n'ai que de nouveaux couples de droites à introduire.

Parmi les théorèmes démontrés dans ce travail, je citerai seulement :

Les centres de courbure des développées de toutes les sections faites dans une surface par des plans passant par une même tangente à cette surface, et qui correspondent au point de contact de cette tangente, sont sur une ellipse.

Si, aux centres de courbure principaux communs à deux surfaces (S) et (S') qui passent par le même point a, les nappes des développées de ces surfaces sont osculatrices entre elles, les surfaces (S) et (S') ont, au point a, un contact du troisième ordre.

Lorsqu'en un point a deux surfaces (S) et (S') ont des lignes de courbure ayant entre elles un contact du troisième ordre, les surfaces (S) et (S') ont entre elles en ce point un contact de ce même ordre [1].

32. *Remarques sur une classe générale de surfaces, et en particulier sur la surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites fixes est constante.*

Bulletin des Sciences mathématiques, t. III, 1872.

Je montre comment on peut construire la direction des lignes de courbure et les centres de courbure principaux de ces surfaces.

(1) M. Ribaucour a donné une démonstration analytique de ce théorème.

53. *Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces.*

Journal de Mathématiques, 2e série, t. XVII, 1872.

Dans ce Mémoire, pour étudier un pinceau, je considère les éléments de surfaces gauches, formés respectivement par une droite du pinceau, et chacune des droites infiniment voisines. Ces surfaces, que j'appelle *élémentaires*, sont représentées par de simples lignes droites : *droites auxiliaires*. Dans le cas d'un pinceau de normales, ces surfaces élémentaires sont des éléments de normalies.

Dans le § I, intitulé *Notions préliminaires*, je construis la droite auxiliaire correspondant à un élément de surface gauche, et je montre son emploi pour les constructions relatives aux plans tangents de cette surface.

Le § II est intitulé *Pinceaux de droites*. Je démontre ce théorème nouveau, extrêmement utile pour trouver les nombreuses propriétés d'un pinceau :

Si, dans un plan passant par un rayon d'un pinceau, on porte sur des perpendiculaires à ce rayon élevées des points centraux des surfaces élémentaires, et à partir de ces points, des longueurs égales aux paramètres de distribution des plans tangents (1) *de ces surfaces, les extrémités des longueurs ainsi portées sont sur une circonférence passant par les foyers du pinceau.*

Au moyen de ce théorème, qui donne une représentation d'un pinceau, je démontre très facilement des propriétés des pinceaux dues à Hamilton, Kummer, et d'autres propriétés nouvelles.

Dans le § III, j'étudie les *normalies*. Ce paragraphe renferme une théorie géométrique de la courbure des surfaces et la démonstration de propriétés relatives à des lignes tracées sur une surface. Parmi les théorèmes je citerai celui-ci :

Lorsque la directrice d'une normalie est une ligne asymptotique d'une surface, le produit des rayons de courbure principaux de cette normalie en chaque point de sa directrice est égal au produit analogue pour la surface, au même point.

---

(1) Le paramètre de distribution des plans tangents à une surface réglée aux différents points d'une génératrice de cette surface est le rapport entre la plus courte distance de cette génératrice à la génératrice infiniment voisine et l'angle que font entre elles ces droites.

A la fin de ce paragraphe, je donne des propriétés relatives à des normalies considérées simultanément. Ainsi, par exemple :

Deux normalies quelconques sont toujours telles que le plan central de l'une touche l'autre au point où le plan central de celle-ci touche la première.

Pour deux normalies rectangulaires au point de rencontre de leurs directrices, le produit des rayons de courbure principaux de ces surfaces est le même en ce point.

34. *Démonstration géométrique d'une proposition due à M. Bertrand.*

Journal de Mathématiques, 2e série, t. XVII, 1872.

Dans une *Note sur la théorie des normales à une surface* (1), M. Bertrand a généralisé une proposition qui lui est due, en établissant une relation entre les positions de deux normales à une surface, menées aux extrémités de deux arcs infiniment petits égaux, tracés sur cette surface à partir d'un point.

Je montre comment on arrive à cette relation en faisant usage du mode de représentation des normalies que j'ai fait connaître dans mon *Mémoire sur les pinceaux de droites.*

35. *Sur la surface gauche lieu des normales principales de deux courbes.*

Journal de Mathématiques, 2e série, t. XVII, 1872.

M. Bertrand a donné (2) la relation qui doit exister entre les deux rayons de courbure d'une courbe pour que les normales principales de cette courbe soient en même temps les normales principales d'une autre courbe.

Dans ce travail, j'établis très simplement cette relation en faisant usage de la *droite auxiliaire.*

En outre, après avoir démontré une propriété de la surface gauche dont les génératrices sont les normales principales de deux courbes, j'étends à cette surface toutes les propriétés dont jouit un pinceau quelconque de droites.

---

(1) *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XII, p. 343.

(2) *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XV, p. 332.

Voici quelques-uns des théorèmes renfermés dans ce Mémoire :

Le produit des rayons de seconde courbure de deux courbes qui ont les mêmes normales principales pour les points situés sur une même normale est constant, quelle que soit cette normale.

Les points où deux courbes ayant les mêmes normales principales rencontrent une de leurs normales et les centres de courbure de ces courbes situés sur cette normale déterminent quatre points dont le rapport anharmonique est constant, quelle que soit la normale considérée.

Les points centraux pour les différentes génératrices de la surface formée par les normales principales communes aux deux courbes n'occupent qu'une région limitée de cette surface.

Il serait trop long d'énoncer encore sept théorèmes nouveaux et curieux auxquels je suis arrivé.

56. *Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace.*

Comptes rendus, 3 et 10 mars 1873, et Bulletin de la Société mathématique de France, t. I.

Voici quelques théorèmes intéressants extraits de ce travail :

A un instant quelconque du déplacement d'une droite, les plans osculateurs des trajectoires des points de cette droite enveloppent une surface développable du quatrième ordre et de la troisième classe dont le cône directeur est du second ordre.

La surface formée par les normales principales des trajectoires de tous les points d'une droite est une surface du quatrième ordre qui possède une droite triple.

Le lieu des centres de courbure des trajectoires de tous les points d'une droite est une courbe du cinquième ordre.

Lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur quatre plans fixes quelconques, un point arbitraire de cette droite décrit une ellipse, et la droite mobile engendre une surface du quatrième ordre dont le cône directeur est de révolution [1].

---

[1] *Si la droite mobile entraîne le plan qui la contient et qui reste constamment parallèle à l'axe de ce cône directeur, un point invariablement lié à ce plan décrit aussi une ellipse.*

Certains théorèmes sont énoncés en employant le langage de la Cinématique; on a ainsi :

Dans un corps solide en mouvement, les points pour lesquels la suraccélération binormale est nulle sont sur une surface du troisième ordre.

57. *Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions.*

Recueil des Savants étrangers, t. XXII.

Une Commission, composée de MM. Bertrand, Bonnet, Chasles rapporteur, a fait sur ce Mémoire, dans la séance du 6 octobre 1873, un Rapport dont voici quelques extraits :

« Dans un précédent travail, intitulé *Étude sur le déplacement d'une figure* » *de forme invariable*, inséré dans le *Recueil des Mémoires des Savants étran-* » *gers*, M. Mannheim a traité diverses questions concernant la construction » des normales aux trajectoires des points d'une figure qui éprouve dans » l'espace un déplacement complètement déterminé, c'est-à-dire dans » lequel chaque point de la figure ne peut prendre qu'une direction. Ce » Mémoire contient, en outre, des recherches relatives à une figure dont » le déplacement n'est pas complètement défini, sujet qui n'avait pas » encore été abordé et qui devait prendre, comme on va le voir, un grand » développement. Etc., etc.

. . . .

» Puis M. Mannheim cherche combien il y a de points sur une droite, qui » décrivent des trajectoires satisfaisant à diverses conditions relatives aux » *surfaces trajectoires* de ces points.

» Ainsi il détermine :

» 1° Combien il y a de points sur une droite dont les trajectoires soient » tangentes aux lignes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces » points;

» 2° Combien dont les trajectoires soient osculatrices aux lignes géodé- » siques des surfaces trajectoires, et dont les plans osculateurs dès lors » soient normaux aux surfaces trajectoires;

» 3° Combien dont les trajectoires ont leur rayon de courbure nul;

» 4° Combien dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure » principal nul;

» 5° Combien dont les trajectoires sont tangentes aux lignes de cour-
» bure des surfaces trajectoires;

» 6° Combien dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure
» principal infini;

» 7° Combien dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de cour-
» bure principaux égaux;

» 8° Enfin combien dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de
» courbure principaux égaux et de signes contraires.

» Considérant les trajectoires, non plus simplement des points d'une
» droite, mais de tous les points de la figure en mouvement, M. Mannheim
» parvient à divers théorèmes qui étendent ce vaste sujet de recherches.

» Il nous faut citer ses résultats principaux pour donner une idée de la
nouveauté et de l'importance qu'ils comportent.

» *Le lieu des points dont les trajectoires, dans un quelconque des déplacements*
» *que permettent quatre conditions données, sont tangentes à des lignes asym-*
» *ptotiques des surfaces trajectoires de ces points est une surface du troisième ordre*
» *qui contient les deux droites* D *et* Δ.

. . . .

» Les géomètres comprendront, sans que nous ayons besoin d'insister,
» toute l'importance d'un travail qui réunit dans une même théorie abso-
» lument nouvelle, en les déduisant d'un mode uniforme de démonstration,
» des résultats aussi précis et aussi considérables. Nous ne saurions le re-
» commander trop vivement aux encouragements de l'Académie, et la Com-
» mission déclare, à l'unanimité, que ce Mémoire lui paraît très digne d'être
» inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

» Les conclusions de ce Rapport sont adoptées. »

De ce Mémoire j'ai extrait les deux Communications suivantes, faites au
Congrès de Lyon en 1873 :

La première a pour titre : *Deux théorèmes d'une nature paradoxale*....

La deuxième est intitulée : *Les normales aux surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable rencontrent toutes deux mêmes droites. Démonstration nouvelle de ce théorème.*

58. *Quelques théorèmes montrant l'analogie qui existe entre les propriétés relatives aux surfaces décrites par les points d'une droite et les surfaces touchées par les plans d'un faisceau mobile.*

Congrès de Lyon, 1873.

Voici quelques-uns des théorèmes relatifs aux surfaces touchées par les plans d'un faisceau mobile, qui sont analogues aux théorèmes démontrés dans le Mémoire précédent, et qui concernaient les surfaces trajectoires des points d'une droite :

Les surfaces auxquelles restent tangents les plans d'un faisceau mobile ont pour normales des droites appartenant à un paraboloïde hyperbolique.

Les axes de courbure des développables enveloppes des plans d'un faisceau R *appartiennent à un hyperboloïde qui contient l'adjointe au plan perpendiculaire à l'arête* R *de ce faisceau.*

Les plans A, B, C, ... *d'un faisceau* R *touchent, à un instant quelconque, en* a, b, c, ... *les surfaces* (A), (B), (C), ..., *auxquelles ces plans restent tangents pendant les déplacements du faisceau. Pour un déplacement arbitraire du faisceau* R, *on prend les courbes de contour apparent des surfaces* (A), (B), (C), ... *projetées orthogonalement sur des plans menés par* a, b, c, ... *perpendiculairement aux caractéristiques des plans* A, B, C, ...; *les centres de courbure de ces courbes appartiennent à une cubique gauche.*

Les surfaces auxquelles les plans d'un faisceau restent tangents pendant les déplacements de ce faisceau ont leurs centres de courbure principaux sur une courbe gauche du sixième ordre.

59. *Démonstration géométrique de quelques théorèmes, au moyen de la considération d'une rotation infiniment petite.*

Comptes rendus, 2 mars 1874.

Je démontre de cette façon quelques théorèmes parmi lesquels celui-ci :

Si une conique d'une surface du deuxième ordre (S) *est telle que les normales à cette surface issues de trois de ses points se coupent en un même point, il y a de même une infinité d'autres groupes analogues de trois normales à* (S), *et les* *points de rencontre de ces normales sont sur une même droite* Δ (1). *La droite* Δ *est bitangente à la développée de la surface* (S) (2).

40. *Deux théorèmes nouveaux sur la surface de l'onde.*

Comptes rendus, 23 mars 1874.

Ces théorèmes sont relatifs à des points quelconques et à des plans tangents quelconques de la surface de l'onde. On en déduit l'existence des points singuliers et des plans tangents singuliers de la surface de l'onde.

41. *Construction directe du centre de courbure en un point de la section faite dans une surface par un plan quelconque.*

Comptes rendus, 6 avril 1874.

On donne, pour un point a d'une surface (S), *les plans des sections principales de cette surface, et les centres de courbure principaux b et c, situés sur la normale* A *en a à* (S). *On demande de construire le centre de courbure de la section* E *faite dans* (S) *par un plan quelconque* (P) *passant en a.*

Sans recourir à la relation d'Euler et au théorème de Meusnier, en faisant simplement usage d'une propriété des normalies, je réponds à cette question par cette construction élégante : Par le centre de courbure principal b on mène un plan perpendiculaire à (P) et parallèle à la tangente at à E. Ce plan coupe le plan tangent en b à la développée de (S), c'est-à-dire le plan d'une section principale de cette surface, suivant une droite B'. De même, pour le centre de courbure principal c, on obtient une droite C'. En joignant les traces de B' et de C' sur (P), on a une droite qui coupe la normale en a à E au centre de courbure cherché.

42. *Construction directe du rayon de courbure de la courbe de contour apparent d'une surface qu'on projette orthogonalement sur un plan.*

Comptes rendus, 27 avril 1874.

Sur un plan (Q) *on projette orthogonalement une surface* (S). *On demande*

(1) M. Desboves.
(2) M. Laguerre.

de construire au point a′ le rayon de courbure de la courbe de contour apparent ainsi obtenue, connaissant pour le point a de (S), dont a′ est la projection, les centres de courbure principaux b et c et les plans des sections principales de cette surface.

A ma connaissance, on ne s'était pas encore proposé ce problème. Voici la construction à laquelle j'arrive simplement. Aux points b et c on mène les axes de courbure des sections principales; on prend les traces de ces droites sur le plan (Q) : la droite qui joint ces traces contient le centre de courbure cherché.

Cette construction donne immédiatement la relation

$$r = R_1 \sin^2\omega - R_2 \cos^2\omega,$$

qui permet de calculer le rayon de courbure de la courbe de contour apparent, connaissant les rayons de courbure principaux R_1, R_2 et l'angle ω que fait une perpendiculaire à (Q) avec le grand axe de l'indicatrice de (S) en a.

On déduit de cette relation, ou de la construction même, diverses conséquences, parmi lesquelles je citerai seulement :

Lorsque le plan de projection (Q) est parallèle à la normale en a à (S) et à l'une des asymptotes de l'indicatrice de cette surface en ce point, le rayon de courbure de la courbe de contour apparent de (S) est égal à la différence des rayons de courbure principaux de cette surface pour le point a.

Lorsqu'on projette (S) au moyen d'un cône circonscrit, la construction précédente conduit encore à la solution, en vertu de cette remarque :

Un cône et un cylindre circonscrits à une surface, qui ont une génératrice commune, sont osculateurs entre eux au point où cette génératrice touche la surface.

45. *Sur la surface de l'onde.*

Congrès de Lille, 1874.

La surface de l'onde étant définie par ses plans tangents, je construis le point où l'un de ces plans touche la surface. Au moyen de cette construction, j'étudie les singularités de la surface de l'onde, et je démontre les deux théorèmes mentionnés au n° 40.

44. *Propriétés relatives à un faisceau de plans qui est mobile.*

Congrès de Lille. 1874.

Voici quelques-unes des propriétés démontrées dans ce travail :

Les caractéristiques des plans d'un faisceau mobile touchent leurs enveloppes en des points qui forment une cubique gauche.

A un instant quelconque du déplacement d'un faisceau de plans de forme invariable, les centres des sphères osculatrices des lignes de courbure des surfaces développables enveloppes des plans de ce faisceau sont sur une cubique gauche.

45. *Construction de la sphère osculatrice en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces données.*

Bulletin de la Société mathématique. 1874.

En faisant usage du théorème de Meusnier, on savait construire le plan osculateur en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces. L'une des généralisations de ce théorème auxquelles je suis parvenu (28) conduit très simplement à la solution du problème plus difficile qui consiste à construire la sphère osculatrice en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces. Ce problème n'avait jamais été résolu.

46. *Détermination des relations analytiques qui existent entre les éléments de courbure des deux nappes de la développée d'une surface.*

Comptes rendus, 7 décembre 1874.

R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux en un point a d'une surface (S);

r_1 et r_2 les rayons de courbure principaux de la nappe (B) de la développée de cette surface, correspondant au centre de courbure principal b de (S);

De même t_1 et t_2 pour la nappe (C);

R′ et R″ sont les rayons de courbure des courbes de contour apparent des nappes (C) et (B) projetées orthogonalement sur le plan tangent en a à (S);

β et γ sont les angles que les grands axes des indicatrices de (B) et de (C) aux points b et c font avec la normale A à (S) au point a.

On a les relations

$$\frac{R'}{R''} = \frac{-2(R_1 - R_2)}{\sin 2\beta(r_1 - r_2)},$$

$$\frac{R''}{R'} = \frac{2(R_1 - R_2)}{\sin 2\gamma(t_1 - t_2)}.$$

On déduit de là

$$4(R_1 - R_2)^2 + (r_1 - r_2)(t_1 - t_2)\sin 2\beta \sin 2\gamma = 0.$$

47. *Solutions géométriques de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces et qui dépendent des infiniment petits du troisième ordre.*

Société philomathique, séance du 27 juin 1874, et Comptes rendus, séances des 1er, 15 et 22 mars 1875.

En faisant usage de normalies, j'ai montré comment on pouvait construire : 1° le rayon de courbure d'une section plane d'une surface (41); 2° le rayon de courbure de la courbe de contour apparent d'une surface (42).

Dans le travail actuel, pour résoudre *des questions plus difficiles qu'on n'avait pas encore abordées*, j'emploie des normalies et quelques propositions de Géométrie cinématique. Je définis ce qui est relatif aux éléments du troisième ordre autour d'un point en me donnant les droites de courbure des nappes de la développée de cette surface, ces droites satisfaisant du reste à certaines conditions connues.

Je résous alors les problèmes suivants :

Construire les tangentes aux courbes de contact d'une normalie à une surface avec les nappes de la développée de cette surface.

Construire les asymptotes des indicatrices d'une normalie à une surface.

Construire le plan osculateur en un point de la courbe de contact d'une surface et d'un cylindre ou d'un cône qui lui est circonscrit.

Construire le rayon de courbure de la développée d'une section faite dans une surface.

Construire le centre de courbure de l'une des branches de la section faite dans une surface à courbures opposées par l'un de ses plans tangents, etc.

Enfin je démontre géométriquement ce beau théorème de M. Ribaucour :

Le rayon de courbure géodésique en un point d'une courbe à courbure normale constante est les deux tiers du rayon de courbure géodésique de la section plane surosculée par un cercle, qui lui est tangente.

48. *Recherches sur la surface de l'onde.*

Congrès de Nantes, 1875.

On joint le centre o d'un ellipsoïde à un point quelconque m de cette surface, et l'on élève en ce point la normale mn. On fait tourner sur lui-même le plan omn d'un angle droit autour du point o. Le point m vient en m_1 et la normale mn vient en $m_1 n_1$. Cette dernière droite est la normale à la surface de l'onde, lieu des points tels que m_1. Lorsque mn décrit une normalie à l'ellipsoïde, la droite $m_1 n_1$ décrit une normalie à la surface de l'onde.

J'ai traité le problème suivant :

Quelles sont les normalies de l'ellipsoïde auxquelles correspondent, comme je viens de l'expliquer, *les normalies à la surface de l'onde qui sont développables?*

Je suis arrivé à plusieurs résultats, parmi lesquels je citerai le suivant :

La transformée par polaires réciproques, par rapport à une sphère de centre o, *de la normalie à l'ellipsoïde d'où dérive, pour la surface de l'onde, une normalie développable, est une surface réglée dont la ligne de striction est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre* o *sur les génératrices de cette surface.*

Voici encore quelques théorèmes démontrés dans ce travail, *théorèmes absolument nouveaux :*

Dans le plan omn *les droites allant du point* o *aux centres de courbure de la surface de l'onde font respectivement, avec les droites allant du point* o *aux centres de courbure de l'ellipsoïde, des angles dont les tangentes sont proportionnelles.*

Dans le plan omn, *la droite qui va du point* o *à l'un des centres de courbure principaux de la surface de l'onde fait, avec la droite allant du point* o *à l'un des centres de courbure principaux de l'ellipsoïde, un angle qui est complémentaire de l'angle que font entre elles les droites allant du point* o *aux autres centres de courbure principaux de la surface de l'onde et de l'ellipsoïde.*

Dans le plan omn, *la circonférence qui passe par les centres de courbure principaux de l'ellipsoïde et par le point* o, *et la circonférence qui passe par les centres de courbure principaux de l'onde et par le point* o *sont tangentes entre elles en ce point* o.

49. *Propriétés des diamètres de la surface de l'onde et interprétation physique de ces propriétés.*

Congrès de Nantes, 1875.

Nouvelles propriétés géométriques de la surface de l'onde qui s'interprètent en Optique.

Comptes rendus, 7 février 1876.

Nouvelles propriétés optiques déduites de l'étude géométrique de la surface de l'onde.

Journal de Physique théorique et appliquée, t. V, 1876.

Les éléments de la surface de l'onde qui s'interprètent immédiatement en Optique sont les longueurs des diamètres de cette surface et les distances de son centre à ses plans tangents : la longueur d'un diamètre correspond à une vitesse suivant un rayon efficace et la distance du centre à un plan tangent correspond à la vitesse de propagation normale d'une onde plane. Il était naturel de chercher des relations géométriques entre ces éléments. C'est à quoi je suis arrivé en employant simultanément deux modes de génération de la surface de l'onde et en transformant les propriétés des diamètres d'un ellipsoïde. J'ai obtenu ainsi de nombreuses propriétés géométriques qui s'interprètent en Optique. Malgré les beaux travaux de Fresnel, Hamilton, Mac Cullagh et Plücker, le nombre des propriétés de ce genre était encore assez restreint. Voici quelques-uns de mes résultats :

La somme des carrés des inverses des vitesses de propagation normale d'une vibration quelconque et des deux ondes qui correspondent aux vibrations parallèles au plan de polarisation du rayon qui propage la première est constante.

La vitesse du rayon qui propage cette vibration varie en raison inverse du produit des vitesses des deux ondes.

La somme des carrés des vitesses des rayons efficaces qui correspondent à ces ondes est constante.

Les systèmes de deux ondes parallèles entre elles et à un axe de réfraction conique correspondent à des paires de rayons efficaces dont les vitesses ont une somme de carrés constante.

On considère trois couples d'ondes planes parallèles aux faces d'un trièdre trirectangle; on prend, pour chaque couple d'ondes parallèles à l'une des faces, le carré du produit de leurs vitesses normales : la somme des trois quantités ainsi obtenues est constante, quelle que soit la situation du trièdre.

50. *Démonstration géométrique d'une relation due à M. Laguerre.*

Comptes rendus, 6 mars 1876.

M. Laguerre a fait connaître, en 1870, dans le *Bulletin de la Société philomathique*, une importante relation concernant deux courbes tracées sur une surface et tangentes entre elles. Il en a fait usage, dans les *Comptes rendus* (séance du 29 mars 1875), pour démontrer un théorème de M. Ribaucour. Dans la séance précédente j'étais arrivé à démontrer géométriquement ce même théorème en partant d'une propriété énoncée par M. Bonnet, relative aux normalies à une surface dont les directrices sont tangentes entre elles. J'ai pensé que la relation de M. Laguerre n'était elle-même qu'une conséquence de cette propriété des normalies : c'est ce que j'ai montré géométriquement dans cette Note.

La relation due à M. Laguerre est la suivante :

$$\frac{1}{3}\frac{d\rho}{\rho}+\operatorname{tang}\varpi\left(d\varpi-\frac{2}{3}\frac{ds}{r}\right)=\frac{1}{3}\frac{ds'}{\rho'}+\operatorname{tang}\varpi'\left(d\varpi-\frac{2}{3}\frac{d\rho}{r'}\right).$$

ρ, r sont les rayons de première et de seconde courbure en un point a de l'une des courbes; ϖ est l'angle que la normale en ce point à la surface fait avec le plan osculateur de cette courbe : ρ', r', ϖ' sont les éléments analogues pour l'autre courbe.

51. *Nouvelles propriétés de quelques courbes.*

Bulletin de la Société mathématique, 1876.

Parmi ces courbes, les unes ont été étudiées par plusieurs géomètres, et particulièrement par M. Archer Hirst, dans son beau Mémoire *Sur la cour-*

bure d'une série de surfaces et de lignes; elles ont pour équation, en coordonnées polaires,

$$\rho = a \cos^3 \frac{\omega}{3}.$$

Nous les désignerons par la lettre E.

M. Bonnet s'est occupé des autres courbes; nous les désignerons par la lettre B.

Lorsqu'une courbe E *roule sur une droite* D, *son pôle décrit une courbe* B *dont les rayons de courbure sont partagés par* D *dans un rapport constant.*

Les arcs d'une courbe B *sont exprimables en arcs d'une courbe* E.

Le lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe E *qui roule sur une droite (centres de courbure qui correspondent à chaque instant aux points de contact de* E *et de* D) *est une courbe que l'on obtient en dilatant dans un rapport constant les ordonnées d'une courbe* B.

Le lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe B *qui roule sur une droite est une courbe que l'on obtient en dilatant dans un rapport constant les coordonnées d'une courbe* B.

Etc., etc.

J'arrive géométriquement à tous les théorèmes renfermés dans cette Note.

32. *Construction, pour un point de la courbe d'intersection de deux surfaces, du centre de la sphère osculatrice de cette courbe.*

Comptes rendus, 27 novembre 1876.

Je résous directement ce problème, dont j'avais déjà donné une solution (45).

(S) et (S') étant les deux surfaces données et a un point de leur courbe d'intersection (a), on a cette construction :

On détermine les centres de courbure γ *et* γ' *des développées des sections faites dans* (S) *et* (S') *par le plan osculateur de* (a) *en* a. *Perpendiculairement à ce plan, on mène les droites* γc, γ'c', *qui rencontrent respectivement en* c, c' *les plans menés par* at, *normalement à* (S) *et* (S'). *La droite* cc' *rencontre le plan normal en* a *à* (a) *au centre* o *cherché.*

La question traitée dans cette Note, et dont la solution dépend des éléments du troisième ordre, est une de celles qu'on ne pouvait complètement résoudre avant l'étude géométrique que j'ai faite, et dont j'ai parlé au n° 47.

33. *Sur le paraboloïde des huit droites.*

Comptes rendus. 2 avril 1877.

Ce paraboloïde, dont j'ai déjà parlé au n° 29, montre la liaison qui existe entre les éléments de courbure des nappes de la développée d'une surface. Dans cette Note, je le considère à un autre point de vue.

Il est le lieu des axes autour desquels il faut faire tourner les deux plans des sections principales d'une surface pour les amener dans l'une quelconque des positions infiniment voisines qu'ils peuvent occuper.

La trace du paraboloïde des huit droites, relatif à un point a *d'une surface* (S), *sur le plan tangent en ce point à cette surface, est le lieu des centres de courbure géodésique des courbes issues de* a *et qui coupent sous des angles constants les lignes de courbure de* (S).

Parmi les théorèmes que je démontre en faisant usage du paraboloïde des huit droites, je citerai le suivant :

Lorsqu'une surface (S) *a ses rayons de courbure principaux fonctions l'un de l'autre, les nappes de sa développée ont pour asymptotes de leurs indicatrices, aux deux points où elles sont touchées par une normale* A *à* (S), *des droites qui sont les projections de deux génératrices du paraboloïde des huit droites relatif au pied de* A.

34. *Sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre.*

Comptes rendus. 30 avril 1877.

Le premier, j'ai montré comment on peut arriver, par des procédés géométriques simples, à un certain nombre de propriétés de ces surfaces. Voici, entre autres, quelques-unes de ces propriétés :

Les normalies qui touchent les nappes de la développée d'une surface (S) *suivant des courbes conjuguées ont pour directrices :*

Des courbes dont les directions conjuguées sont perpendiculaires entre elles, lorsque la somme des rayons de courbure principaux de (S) *est constante ;*

Des courbes qui sont conjuguées lorsque le produit des rayons de courbure principaux de (S) est constant;

Des courbes se rencontrant à angle droit lorsque la somme des inverses des rayons de courbure principaux est constante.

Lorsque le produit des rayons de courbure d'une surface est constant, les normalies qui ont pour directrices des lignes asymptotiques touchent les nappes de la développée de cette surface suivant des lignes asymptotiques.

35. *Sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre.*

Bulletin de la Société mathématique, 1877.

Je démontre d'abord géométriquement le théorème suivant, dû à M. Halphen :

Lorsque les rayons de courbure principaux R_1, R_2 *d'une surface* (S) *sont fonctions l'un de l'autre, le produit des rayons de courbure principaux des nappes de la développée de* (S), *pour deux centres de courbure principaux de cette dernière surface situés sur une quelconque de ses normales, est égal à* $(R_1 - R_2)^2$.

Je donne ensuite différents théorèmes. Je citerai ici le dernier :

Lorsqu'une surface (S), *dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre, a ses indicatrices semblables entre elles, les normales à cette surface, qui touchent les nappes de sa développée suivant des lignes asymptotiques, ont pour directrices des courbes qui coupent sous le même angle les lignes de courbure d'un même système de* (S). *Les lignes de striction de ces normalies partagent dans un rapport constant les segments compris sur les normales de* (S) *entre deux centres de courbure principaux de cette surface.*

36. *Sur le déplacement infiniment petit d'un dièdre de grandeur invariable.*

Comptes rendus, 11 juin 1877.

Je commence par établir que : *Le déplacement infiniment petit d'un dièdre de grandeur invariable peut, en général, s'obtenir par une simple rotation. Lorsque l'arête du dièdre mobile engendre un élément de surface gauche et que l'une des faces du dièdre a pour caractéristique une droite perpendiculaire à cette* *arête, le déplacement infiniment petit du dièdre ne peut pas s'obtenir par une simple rotation.*

J'ajoute que : *Lorsque l'une des faces du dièdre a pour caractéristique une droite perpendiculaire à l'arête de ce dièdre, l'autre face a aussi une caractéristique perpendiculaire à cette arête.*

37. *Sur les courbes ayant les mêmes normales principales et sur la surface formée par ces normales.*

Comptes rendus, 23 juillet 1877.

Je fais usage de propositions de *Géométrie cinématique* pour démontrer quelques propriétés relatives à ces courbes et à la surface formée par leurs normales principales.

aa' étant une normale commune aux courbes (*a*) et (*a'*), et (S) étant la surface formée par les normales principales communes à ces courbes, on a le théorème suivant :

Les plans menés par les centres de courbure principaux de (S), *correspondant au point* a, *parallèlement au plan central de cette surface pour* aa', *déterminent, sur la normale à* (S) *en* a', *un segment de grandeur constante, quelle que soit la normale commune considérée.*

Etc.

38. *Nouveau mode de représentation plane de classes de surfaces réglées.*

Comptes rendus, 29 octobre 1877.

La courbe représentative dont je fais usage est l'enveloppe des droites auxiliaires correspondant aux génératrices de la surface réglée.

Je considère dans cette Note le cas le plus simple où la courbe représentative est un point, et j'arrive immédiatement à ce théorème de M. Bertrand :

Si entre les courbures d'une courbe on a une relation linéaire, les normales principales de cette courbe sont les normales principales d'une autre courbe.

Je termine cette Note par ce théorème nouveau :

Sur la surface formée par les normales principales communes à deux courbes, *il y a toujours au moins deux génératrices pour chacune desquelles la surface admet un plan tangent unique.*

59. *Applications d'un mode de représentation plane de classes de surfaces réglées.*

Comptes rendus, 5 novembre 1877.

Dans cette Note, qui est la suite de la précédente, j'examine le cas où la courbe représentative est une droite, et je trouve que :

Les surfaces, lieux des normales principales d'une courbe, qui sont représentées par une droite, sont des hélicoïdes gauches à plan directeur.

Lorsque la courbe représentative d'une surface (S) *formée par les normales principales communes à deux courbes est une parabole, cette surface* (S) *est le lieu des binormales d'une courbe gauche. Entre les rayons de courbure de cette courbe, on a la relation*

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\lambda\rho}.$$

Sur cette surface (S) *les trajectoires orthogonales des génératrices ont leurs rayons de courbure géodésiques et leurs rayons de torsion géodésique liés par la relation*

$$\frac{1}{\rho_g^2} + \frac{1}{r_g^2} = \frac{1}{\lambda\rho_g},$$

dans laquelle ρ_g *est un rayon de courbure géodésique,* r_g *un rayon de torsion géodésique et* λ *une constante.*

J'énoncerai encore les résultats suivants :

Lorsque le produit des deux rayons de courbure d'une courbe est constant, les milieux des rayons de courbure de cette courbe sont les points pour lesquels la surface formée par ses normales principales a ses rayons de courbure égaux et de signes contraires.

Lorsque la somme des carrés des courbures d'une courbe est constante, les points centraux des génératrices de la surface formée par ses normales principales sont les points pour lesquels les rayons de courbure principaux de cette surface sont égaux et de signes contraires.

Etc., etc.

60. *Nouvelles applications d'un mode de représentation plane de classes de surfaces réglées.*

Comptes rendus, 19 novembre 1877.

Je ne considère plus dans cette Note, comme dans les deux Notes précédentes, des surfaces lieux de normales principales, et j'arrive à des théorèmes nouveaux concernant les surfaces réglées. Je citerai, comme exemple :

Si une droite se déplace normalement à la trajectoire d'un de ses points o, *de façon que l'aire balayée par un segment de cette droite soit proportionnelle à l'arc parcouru par* o, *elle engendre une surface réglée sur laquelle il existe deux trajectoires orthogonales des génératrices, qui sont des cercles géodésiques tels, qu'aux deux points où ils rencontrent la droite mobile ces courbes sont toujours à angle droit.*

Si un segment de droite de longueur a, *qui vient successivement coïncider avec les génératrices d'une surface* (G), *est tel que les plans tangents à cette surface aux extrémités de ce segment conservent entre eux toujours le même angle* ω, *on a, pour l'une ou l'autre des courbes décrites par les extrémités de ce segment, la relation*

$$\frac{\frac{a}{\tang\omega}}{n} + \frac{a}{\sqrt{R_1 R_2}} = 1,$$

dans laquelle n *représente la distance comprise entre l'une des extrémités de ce segment et le point où le plan tangent à* (G) *à cette extrémité est normal à cette surface, et* R_1, R_2 *sont les rayons de courbure principaux de* (G) *à cette extrémité du segment.*

61. *Sur le paraboloïde des normales d'une surface réglée.*

Bulletin de la Société mathématique, 1877.

J'arrive géométriquement à quelques résultats concernant ce paraboloïde.

62. *Sur les plans tangents singuliers de la surface de l'onde.*

Congrès du Havre, 1877.

La surface de l'onde coupe chacun de ses plans principaux et le plan de l'infini suivant une conique et un cercle. Dans chacun de ces plans, ce cercle et cette conique donnent lieu à quatre points d'intersection qui sont des points coniques de la surface de l'onde. Je montre qu'il est facile de déduire de là que *la surface de l'onde touche certains plans le long de circonférences de cercles,* et qu'*elle est coupée par des plans parallèles à ceux-ci suivant des anallagmatiques du quatrième ordre.*

63. *Sur la surface de l'onde.*

Congrès du Havre, 1877.

La surface de l'onde (S) dérive d'un ellipsoïde (E) au moyen de la construction de Mac-Cullagh; inversement (E) dérive de la même manière de (S). Je démontre la propriété suivante :

Sur la surface de l'onde (S), *qui dérive de l'ellipsoïde* (E), *la transformée d'une ligne de courbure de cette dernière surface est telle que les normales à* (S), *issues des différents points de cette ligne, sont respectivement perpendiculaires à des diamètres de* (S) *égaux entre eux.*

64. *Sur les normales de la surface de l'onde.*

Congrès du Havre, 1877.

J'arrive dans cette Note à ce théorème nouveau et intéressant :

Les points de rencontre d'une normale à une surface de l'onde avec les plans principaux de cette surface, le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de cette surface sur cette normale, le point où cette normale est rencontrée par le diamètre perpendiculaire à celui qui passe par son pied, déterminent cinq points : les cinq points analogues qu'on a sur chacune des normales de la surface de l'onde forment, sur ces droites, des divisions homographiques.

65. *Nouvelle démonstration d'un théorème relatif au déplacement infiniment petit d'un dièdre, et nouvelle application de ce théorème.*

Bulletin de la Société mathématique, 1878.

Ce théorème est le dernier cité au n° 56. Après en avoir donné une nouvelle démonstration géométrique, j'en fais usage pour démontrer géométriquement cette propriété bien connue : *Lorsque les deux rayons de courbure d'une courbe gauche sont proportionnels, cette courbe est une hélice tracée sur une surface cylindrique.*

66. *Démonstrations géométriques d'un théorème relatif aux surfaces réglées.*

Bulletin de la Société mathématique, 1870.

Il s'agit de ce théorème bien connu :

Une ligne tracée sur une surface gauche, qui coupe sous un angle constant les génératrices rectilignes de la surface et qui est en même temps ligne géodésique, ne peut être que la ligne de striction.

J'en donne deux démonstrations basées sur des propositions de *Géométrie cinématique.*

67. *Sur les surfaces réglées.*

Journal de Mathématiques, 1878.

Je démontre géométriquement quelques résultats d'un travail de M. Franke *Sur la courbure des surfaces réciproques*, et j'ajoute quelques résultats nouveaux.

68. *De l'emploi de la courbe représentative de la surface des normales principales d'une courbe gauche pour la démonstration de propriétés relatives à cette courbe.*

Comptes rendus, 20 mai 1878.

J'emploie la courbe représentative dont j'ai parlé aux n^os^ 58, 59, 60.

Pour un point a d'une courbe (a) prenons la sphère osculatrice de cette courbe et appelons s la distance du centre de cette sphère à la normale principale de (a) issue de a. Désignons par l la distance du point a au point où la droite rectifiante issue de ce point touche l'arête de rebroussement de la surface rectifiante de (a). On a ces théorèmes nouveaux :

Lorsque la somme des carrés des rayons de courbure d'une courbe est constante, le produit $s \times l$ *est proportionnel au cube du rayon de seconde courbure de cette courbe.*

Lorsque la somme des carrés des courbures d'une courbe est constante, le produit $s \times l$ *est constant, quel que soit le point de la courbe.*

Etc., etc.

69. *Sur la surface de l'onde.*

Congrès de Paris, 1878.

Faisant usage d'un mode nouveau de représentation de la loi de variation des plans tangents à une surface réglée, je donne de nouvelles démonstrations des théorèmes que j'ai cités au n° 48.

70. *Transformation par polaires réciproques d'un pinceau de normales et extensions.*

Congrès de Paris, 1878.

La polaire réciproque d'un pinceau est un pinceau; les foyers et les plans focaux de ce dernier pinceau correspondent aux plans focaux et aux foyers du pinceau transformé.

Faisant usage de cette remarque, j'arrive à des théorèmes nouveaux, tels que celui-ci :

On donne deux surfaces (A), (B) *et un point* o *fixe. On mène de ce point une droite qui coupe ces surfaces en* a *et en* b *et l'on prend la droite* D *suivant laquelle se coupent les plans tangents en* a *et* b, *à* (A) *et* (B). *Lorsque la droite* oa *se déplace autour de sa première position,* D *engendre un pinceau dont les foyers* f_1 *et* f_2 *sont tels, que* af_1, af_2 *et* bf_1, bf_2 *sont des tangentes conjuguées de* (A) *et* (B).

71. *Construction de la normale à la surface trajectoire d'un point d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions.*

Congrès de Paris, 1878.

Les normales aux surfaces trajectoires décrites par les points d'une figure dont le déplacement est assujetti à quatre conditions rencontrent les deux mêmes droites D, Δ. De là un moyen de construire la normale à la surface trajectoire décrite par un point de la figure, lorsque l'on connaît quatre normales à des surfaces trajectoires. On construit les droites D, Δ qui rencontrent ces quatre normales : la normale demandée est la droite issue du point donné et qui s'appuie sur D et Δ.

Mais, si ces droites D et Δ sont imaginaires, comment doit-on opérer? C'est la réponse à cette question que je donne dans ce travail.

72. *Construction des centres de courbure principaux de la surface de vis à filet triangulaire, et de la surface de vis à filet carré.*

Congrès de Paris, 1878.

Ce problème n'avait pas encore été résolu.

L'emploi de quelques propositions de Géométrie cinématique m'a conduit à des constructions très simples.

73. *Détermination géométrique des ombilics de la surface de l'onde.*

Comptes rendus, 5 mai 1879.

On ne s'était pas encore occupé de rechercher les ombilics de la surface de l'onde. Je donne la construction qui permet de les obtenir, et j'en conclus que, *sur la surface de l'onde, il y a huit ombilics réels.*

74. *Sur un mode de transformation des surfaces réglées.*

Comptes rendus, 2 juin 1879.

Soient (G) une surface réglée donnée et o un point fixe. Par ce point et une génératrice G de (G) on fait passer un plan que l'on fait tourner sur lui-même d'un angle droit autour de o. La droite G vient prendre la position G_1. Les droites telles que G_1 forment une surface (G_1), transformée de (G). Afin d'étudier (G_1), je construis la droite auxiliaire relative à une génératrice de cette surface. Pour cela, je donne la liaison qui existe entre les droites auxiliaires qui représentent les éléments des surfaces (G) et (G_1) le long de génératrices correspondantes.

75. *Transformation d'un pinceau de normales.*

Comptes rendus, 9 juin 1879.

Le mode de transformation dont je viens de parler s'applique à un système quelconque de droites. J'étudie en particulier la transformation d'un pinceau de normales. Je démontre d'abord qu'un pinceau de normales peut être représenté de forme et de position au moyen d'une circonférence de cercle, dont le centre est sur le rayon du pinceau, et sur laquelle un point est marqué. Je trouve ensuite les constructions qui permettent de trouver la circonférence représentative du pinceau transformé du premier pinceau donné. Cette circonférence une fois obtenue, on a tous les éléments de ce nouveau pinceau.

76. *Sur la surface de l'onde et sur la transformation d'un pinceau.*

Comptes rendus, 16 juin 1879.

Le mode de transformation dont je viens de parler transforme un pinceau de normales à un ellipsoïde en un pinceau de normales à une surface de l'onde. Les circonférences représentatives de ces pinceaux permettent donc d'obtenir sur un même plan les liaisons qui existent entre les éléments de courbure d'un ellipsoïde et les éléments de courbure de la surface de l'onde qui dérive de cet ellipsoïde. Ces circonférences conduisent immédiatement aux théorèmes relatifs à la surface de l'onde que j'ai énoncés au n° 48 et au théorème suivant :

Si l'on projette orthogonalement un ellipsoïde et la surface de l'onde qui en dérive sur des plans menés respectivement par des normales correspondantes de ces surfaces, perpendiculairement au plan de ces normales, on obtient des courbes de contour apparent dont les centres de courbure se correspondent sur des diamètres de ces surfaces.

77. *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique, comprenant les éléments de la Géométrie cinématique.*

Un Volume in-8, Gauthier-Villars : 1880.

Cet Ouvrage est divisé en deux Parties.

La première Partie contient, pour la représentation des corps supposés éclairés par un point lumineux, l'étude des modes de représentation qui suivent : méthode des projections cotées; perspective conique; perspective axonométrique ou isométrique; perspective cavalière. La seconde Partie renferme l'étude des surfaces que l'on rencontre le plus fréquemment dans la pratique : ce sont les surfaces réglées, les surfaces de révolution, les surfaces hélicoïdales, les surfaces topographiques. Toutes ces surfaces sont étudiées, ainsi que leur ligne d'ombre propre ou d'ombre portée.

C'est aussi dans cette seconde Partie que se trouvent les éléments de la *Géométrie cinématique*, exposés didactiquement pour la première fois. Dans des Mémoires divers et de nombreuses Notes, présentés à l'Académie des Sciences, j'avais préparé depuis longtemps les matériaux de cette branche particulière de la Géométrie. La plupart de ces travaux sont coordonnés dans mon Ouvrage; ainsi réunis, on voit bien qu'ils forment un corps de doctrine.

Les applications de la *Géométrie cinématique* concernent le raccordement des surfaces réglées, la théorie de la courbure des surfaces, l'étude des surfaces de vis à filet triangulaire ou carré, des problèmes relatifs aux surfaces et de nombreuses questions traitées dans les Suppléments aux Leçons. Toutes ces applications sont le fruit de mes recherches personnelles; elles sont présentées sous une forme appropriée à l'enseignement. Les méthodes que j'ai introduites dans mon Livre sont, à ma connaissance, déjà adoptées à l'École Centrale des Arts et Manufactures, à l'Université d'Odessa et à l'Université de Coïmbre.

78. *La surface de l'onde considérée comme surface limite.*

Comptes rendus, 26 avril 1880.

Cinq conditions permettent le déplacement d'une figure de forme invariable; les points de la figure mobile décrivent alors des lignes trajectoires. Si la figure n'est assujettie qu'à quatre conditions, ses points décrivent leurs surfaces trajectoires. Enfin, si la figure est assujettie à moins de quatre conditions, ses points, en général, peuvent être déplacés d'une infinité de manières. Je dis *en général,* parce qu'il y a une surface qui limite la région de l'espace que les points de la figure peuvent occuper, et que les points appartenant à cette surface limite ne sont pas susceptibles d'être déplacés de toutes les manières possibles. Pour les droites et les plans mobiles, il y a aussi des surfaces limites.

Les cordes d'un ellipsoïde, qui sont vues à angle droit du centre de cette surface ont pour surface limite une surface de l'onde.

Les pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'un ellipsoïde sur les cordes vues de ce point à angle droit occupent dans l'espace une région qui est limitée par une surface de l'onde.

Si un angle droit abc *circonscrit à un ellipsoïde est tel que son plan est normal à cette surface aux points de contact* a, b *de ses côtés, son sommet appartient à une surface de l'onde. La normale à cette surface est la droite qui joint le sommet* a *de l'angle droit au milieu de la corde de contact* ab.

Etc., etc.

79. *Nouvelle génération de la surface de l'onde et constructions diverses.*

Comptes rendus, 7 juin 1880.

Voici cette nouvelle génération :

Si un angle droit abc, *dont les côtés sont respectivement tangents à deux ellipsoïdes homofocaux donnés, est tel que son plan est normal à ces deux surfaces en chacun des points de contact* a, b *de ses côtés, son sommet appartient à une surface de l'onde. La normale à cette surface est la droite qui joint le sommet* c *de l'angle droit au milieu de la droite* ab.

Les constructions que renferme encore cette Note sont des applications de quelques propositions de Géométrie cinématique.

80. *Constructions planes des éléments de courbure de la surface de l'onde.*

Milan, U. Hoepli.

J'ai rédigé ce petit Mémoire sur la demande qui m'a été faite de contribuer à l'Ouvrage que les géomètres italiens ont publié en l'honneur de Chelini. Il renferme, avec certains développements, la réunion des Notes que j'ai analysées aux nos 74, 75, 76. Il y a dans ce travail une idée qui sera féconde en résultats. Voici en quoi elle consiste. Deux figures de l'espace se correspondent au moyen d'un certain mode de transformation : leurs représentations planes se correspondent alors d'une certaine façon. Lorsque cette dernière correspondance est trouvée, on a ramené à une étude sur un plan l'étude de la transformation de la figure de l'espace. C'est ainsi qu'un pinceau de normales à une surface de l'onde représenté par une circonférence de cercle et un point a pu être immédiatement déterminé en transformant la circonférence qui représentait le pinceau de normales à l'ellipsoïde d'où dérive la surface de l'onde ; les éléments de ces deux pinceaux de normales sont les éléments de courbure de l'ellipsoïde et de la surface de l'onde.

81. *Sur la surface de l'onde, et théorèmes relatifs aux lignes de courbure des surfaces du second ordre.*

Proceedings of the Royal Society, 1881.

Le point de départ de ce travail est cette définition de la surface de l'onde que j'ai donnée à l'Académie des Sciences en avril 1880 :

A un ellipsoïde donné de centre o, *on circonscrit des cônes dont une section principale est un angle droit : les sommets de ces cônes sont sur une surface de l'onde* (c). Je montre géométriquement que *la surface de l'onde est coupée par un ellipsoïde* (E) *homofocal à l'ellipsoïde, qui entre dans la définition précédente, suivant une ligne de courbure de cet ellipsoïde* (E) *et que les hyperboloïdes homofocaux à l'ellipsoïde, qui entre dans la définition précédente, coupent chacun la surface de l'onde suivant une ligne sphérique et une de leurs lignes de courbure.*

Le théorème suivant termine ce travail :

Par une tangente à une ligne de courbure d'un ellipsoïde, on mène deux plans qui touchent respectivement un ellipsoïde homofocal à celui-ci : l'angle compris entre ces plans est de grandeur constante, quelle que soit cette tangente.

32. *Sur les surfaces homofocales du second ordre.*

Proceedings of the Royal Society, 1882.

Je me suis proposé de chercher les liaisons qui existent entre les rayons de courbure principaux de trois surfaces du second ordre en un point commun à ces surfaces, problème qui n'avait pas été abordé.

Mon point de départ est ce théorème du travail précédent :

Un angle de grandeur constante, circonscrit à un ellipsoïde donné et dont le plan est normal à cette surface en chacun des points de contact des côtés de cet angle, se déplace de façon que son sommet reste sur l'ellipsoïde (E) *homofocal à l'ellipsoïde donné : ce sommet décrit une ligne de courbure de* (E).

Après avoir déterminé les rayons de courbure principaux des surfaces homofocales, je retrouve ce théorème dû à Lamé :

Le produit de trois de ces rayons de courbure est égal au produit des trois autres.

Puis j'établis d'autres théorèmes, tels que ceux-ci :

Les rayons de courbure des sections faites dans un ellipsoïde par des plans normaux à l'une de ses lignes de courbure sont proportionnels aux segments compris sur ces rayons entre les points de cette ligne et les points où ces rayons rencontrent les plans principaux de l'ellipsoïde.

Les normales à un ellipsoïde, issues des points d'une ligne de courbure sont partagées par les plans polaires de ces points pris par rapport à des ellipsoïdes homofocaux à l'ellipsoïde donné, en segments proportionnels, etc., etc.

On donne un cône du second ordre de sommet c, *un point* l *sur l'un de ses axes, et par ce point on mène un plan arbitraire qui coupe le cône suivant une certaine courbe. Le long de cette courbe on inscrit dans le cône une surface du second ordre quelconque, et l'on construit la surface homofocale à celle-ci, qui passe en* c *et qui a pour normale en ce point la droite* cl. *Cette surface et toutes les surfaces analogues, que l'on obtient en faisant varier le plan sécant mené par* l *et les surfaces du second ordre inscrites, sont osculatrices entre elles au point* c.

85. *Sur les centres de courbure des surfaces homofocales du second ordre.*

Proceedings of the Royal Society, 1882.

Ce travail est la suite du précédent. Je démontre quelques théorèmes nouveaux relatifs aux centres de courbure principaux des surfaces homofocales du second ordre et j'établis une élégante propriété qui montre comment sont liés géométriquement les six centres de courbure principaux de trois surfaces homofocales qui passent par un même point.

Voici quelques théorèmes extraits de ce travail :

Les plans polaires d'un point m, *par rapport à des surfaces homofocales, déterminent des segments proportionnels sur les normales* N, N′, N″ *en* m *aux surfaces homofocales qui passent par ce point.*

Les plans polaires d'un point m, *par rapport à des surfaces homofocales, enveloppent une surface* (D) *du quatrième degré, qui est tangente aux plans principaux des surfaces homofocales ainsi qu'aux plans* (N, N′), (N, N″), (N′, N″). *La développable* (D) *touche les normales* N, N′, N″ *aux six centres de courbure principaux des surfaces homofocales qui passent par* m *et elle touche les plans* (N, N′), (N, N″), (N′, N″) *suivant les axes de courbure des courbes d'intersection de ces surfaces prises deux à deux.*

Ce travail est terminé par cette propriété qui établit une liaison très simple entre les six centres de courbure principaux de trois surfaces homofocales du second ordre.

Trois surfaces homofocales du second ordre se coupent en un point m. *Les normales à ces surfaces en ce point sont* N, N′, N″. *Ces normales rencontrent les plans principaux des surfaces homofocales, la première en* a, b, c, *la deuxième en* a′, b′, c′ *et la troisième en* a″, b″, c″. *On élève respectivement de ces points des plans perpendiculaires à ces normales. Les plans issus des points* a, a′, a″ *se coupent en un certain point* α. *On obtient de même un point* β *correspondant à* b, b′, b″ *et un point* γ *correspondant à* c, c′, c″ ; *les points* α, β, γ *appartiennent à une même droite* Δ.

Les projections de Δ, *sur les plans déterminés par les normales* N, N′, N″, *prises deux à deux, rencontrent ces normales aux centres de courbure principaux des trois surfaces homofocales.*

Ces centres de courbure sont alors aussi les projections sur les normales N, *N', N'' des points où Δ perce les plans déterminés par ces normales, prises deux à deux. La droite, qui joint les projections sur deux de ces normales du point où Δ perce le plan de ces droites, est l'axe de courbure de la ligne d'intersection des surfaces homofocales normales à ce plan.*

84. *Sur les surfaces parallèles.*

Proceedings of the London Mathematical Society, 1882.

Une droite se déplace en restant normale à une surface; elle engendre une normalie qui rencontre les surfaces parallèles à celle-ci suivant certaines courbes.

Dans une de ses positions, cette droite rencontre ces courbes en des points que j'appelle *correspondants* et les tangentes en ces points à ces courbes sont des *tangentes correspondantes*.

J'arrive géométriquement à un assez grand nombre de théorèmes dépendant des éléments du troisième ordre des surfaces parallèles. Je rappelle, à ce sujet, que je suis le premier ayant traité géométriquement des questions de ce genre. Voici quelques résultats :

Par des tangentes correspondantes at, a_1t_1, ... *on mène des plans qui coupent des surfaces parallèles suivant des sections qui sont respectivement surosculées par un cercle : les rayons de ces circonférences, issus des points correspondants* a, a_1, a_2, ..., *s'appuient sur une même droite;*

Ces rayons appartiennent à un paraboloïde hyperbolique;

Ces sections ont pour axes de courbure des droites qui appartiennent à un hyperboloïde;

Leurs centres de courbure sont sur une cubique gauche;

Leurs centres de courbure géodésique sont en ligne droite;

Aux points correspondants, elles ont des angles de contingence géodésique égaux entre eux.

On a des propriétés analogues, si, au lieu de courbes surosculées par un cercle, on prend des courbes à courbure normale constante ou des lignes qui coupent sous le même angle les lignes de courbure d'un même système sur les surfaces parallèles.

85. *Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux.*

Journal de Mathématiques pures et appliquées. 3e série. t. VIII. p. 167.

Je commence par construire les axes de l'indicatrice et je démontre ces théorèmes intéressants :

Les axes de l'indicatrice en un point m *d'une surface du second ordre sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère qui passe par* m *et par les points* x, y, z *où les axes de la surface du second ordre sont rencontrés par le plan tangent en* m *à cette surface.*

Les axes de l'indicatrice en m *sont tangents à la parabole inscrite dans le triangle* xyz *et dont la directrice est la droite qui joint le point* m *au pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur son plan tangent en* m.

Puis je montre que :

Les centres de courbure principaux situés sur la normale en m *à la surface du second ordre sont situés par rapport aux points où cette normale rencontre les plans principaux de cette surface comme le point* m *est situé sur chacun des axes de l'indicatrice en ce point par rapport aux points où ces axes rencontrent les mêmes plans principaux.*

De là résultent différentes manières de construire simplement les centres de courbure principaux.

86. *Premiers éléments de la Géométrie descriptive.*

Brochure in-8°.

Je propose d'introduire dans les éléments les procédés employés par les ingénieurs. Les plans de projection et, par suite, la ligne de terre n'interviennent que par leurs directions. Ce système a été immédiatement adopté dans plusieurs lycées de Paris, en Belgique, en Russie, en Portugal.

87. *Sur le déplacement d'un dièdre de grandeur constante.*

The Messenger of Mathematics, mars 1884.

Le dièdre se déplace de façon que son arête C reste tangente à une courbe

A, tandis qu'une de ses faces coïncide toujours avec le plan osculateur de cette courbe. Je montre qu'*on obtient la droite suivant laquelle l'autre face touche son enveloppe en projetant sur cette face la droite rectifiante de* A, *issue du point où* C *touche* A.

88. *Mémoire d'optique géométrique contenant la théorie du point représentatif d'un élément de surface réglée et son emploi, tant pour la démonstration nouvelle de théorèmes relatifs à la courbure des surfaces, que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques.*

Présenté à l'Académie R. des Lincei le 1er juin 1884.

Ce Mémoire renferme la solution complète, donnée pour la première fois et dans le cas le plus général, du problème difficile de la détermination des éléments des surfaces caustiques.

Pour les caustiques par réflexion ou par réfraction sur le plan, on possédait des *formules* et des *constructions*.

Mais il n'en était pas de même pour l'espace où le problème devient très compliqué. Sturm, dans son *Mémoire sur l'optique* et dans son *Mémoire sur la vision*, a étudié analytiquement le pinceau réfracté dans la seule circonstance où le pinceau incident est un pinceau de normales à une surface, et il est arrivé à des formules sans donner de constructions effectives. M. Bertrand, revenant sur le même sujet, a retrouvé les formules dues à Sturm et en a ajouté une nouvelle. Ainsi, pour le seul cas particulier qui eût été traité, on avait trouvé des formules, mais pas de *constructions effectives*.

La solution géométrique que renferme ce Mémoire aboutit à *plusieurs constructions planes* des éléments des surfaces caustiques dans le cas le plus général.

Les solutions de nombreuses questions ne sont vraiment achevées que lorsqu'on fait connaître les constructions qu'elles exigent; elles ne peuvent attendre cet achèvement que de la Géométrie. La question d'optique, que j'ai complètement résolue dans ce travail, en est un exemple.

Ce Mémoire est partagé en plusieurs paragraphes :

§ I. — *Du point représentatif d'un élément de surface réglée.*

Pour représenter un élément de surface réglée, j'avais employé une *droite auxiliaire*. Je fais d'abord remarquer comment, à cette droite, on peut substituer un point; puis je montre comment on arrive directement à ce *point représentatif*. Les solutions renfermées dans mon Mémoire montrent la grande utilité de cet élément nouveau.

§ 2. — *Emploi du point représentatif dans la théorie de la courbure des surfaces.*

Ce paragraphe, qui permet au lecteur de se familiariser avec l'emploi du point représentatif, renferme des constructions et des formules relatives à la courbure des surfaces qui sont utiles dans la suite de ce travail.

§ 3. — *Représentation plane d'un pinceau.*

Les surfaces élémentaires d'un pinceau étant représentées par leurs points représentatifs, le pinceau est représenté par une circonférence de cercle. Pour fixer la position du pinceau par rapport à un plan passant par le rayon, je marque un point sur cette circonférence. Cette représentation très simple résulte de propriétés que j'ai démontrées dans mon *Mémoire sur les pinceaux*.

§ 4. — *Première construction plane des éléments des surfaces caustiques.*

Les rayons lumineux incidents rencontrent la surface séparatrice des milieux en des points d'où partent des normales à cette surface et d'où partent les rayons réfractés.

A un pinceau incident correspond ainsi un pinceau de normales et un pinceau réfracté. Ces trois pinceaux sont représentés chacun par une circonférence de cercles. Connaissant les circonférences qui représentent les deux premiers pinceaux, je détermine celle qui représente le pinceau réfracté.

La connaissance de cette dernière circonférence et d'un certain point de cette courbe entraîne la connaissance des éléments du pinceau réfracté.

Je suis arrivé de cette façon à une première construction plane qui résout, dans le cas le plus général, le problème d'optique que j'avais en vue, et cela par une voie purement géométrique.

§ 5. — *Première modification de la construction précédente.*

Il s'agit de simplifications dans les tracés.

§ 6. — *Deuxième construction plane des éléments des surfaces caustiques.*

La première construction me conduit à des formules qui, interprétées géométriquement, me donnent une deuxième solution générale du problème d'optique. Ces interprétations géométriques permettent aussi d'énoncer quelques théorèmes intéressants.

§ 7. — *Modification de la première construction générale.*

Cette modification est basée sur des résultats du paragraphe précédent.

§ 8. — *Cas particulier où les rayons incidents sont normaux à une surface.*

En introduisant dans les formules générales trouvées dans le sixième paragraphe la condition que le pinceau incident est un pinceau de normales, je suis conduit aux formules dues à Sturm et à M. Bertrand. L'interprétation géométrique d'une de ces formules me donne un théorème nouveau dont un cas particulier avait été trouvé par Sturm.

§ 9. — *Calcul des éléments du pinceau réfracté lorsque ce pinceau est formé de normales à une surface.*

Ce calcul conduit à des expressions compliquées. On peut arriver à ces expressions par les méthodes analytiques; mais il nous semble qu'il aurait été difficile, pour ne pas dire plus, de revenir de ces expressions compliquées à mes constructions géométriques simples.

Ce Mémoire, que j'ai cru devoir analyser avec quelque développement, parce qu'il est inédit, doit paraître dans les *Atti della R. Accademia dei Lincei*. Il a été l'objet d'un Rapport entièrement approbatif de MM. Cremona et Beltrami, dont voici les conclusions :

« La memoria è assai interessante non solamente per l'importanza dei » resultati contenuti nella seconda parte, ma anche per l'eleganza di quei » metodi geometrici che il chiarissimo autore adopera anche questa volta » con mirabile felicità e che meritano di essere meglio conosciuti e colti- » vati in Italia.

» Per queste ragioni, siamo lieti di proporre la integrale pubblicazione » della Memoria del signor Mannheim nei nostri *Atti*; e di dare così un me- » ritato tributo di stima al valoroso geometra francese, che ha tanto contri- » buito a mantenere in onore la pura Geometria. »

89. *Représentation plane relative aux déplacements d'une figure de forme invariable assujettie à quatre conditions.*

Comptes rendus, 2 février 1885.

M. le professeur Robert S. Ball a présenté à l'Académie d'Irlande un intéressant travail sous le titre : *On a plane representation of certain dynamical problems in the theory of a rigid body*. Je fais voir que cette représentation est une conséquence de la représentation que j'ai donnée d'un pinceau de droites. Pour cela j'établis d'abord ce théorème nouveau :

Si, des points centraux des surfaces élémentaires d'un pinceau, on élève des normales à ces surfaces, ces droites sont les génératrices d'un cylindroïde ou conoïde de Plücker (26).

90. *Sur la polhodie.*

Comptes rendus, 6 avril 1885.

Je construis le plan osculateur en un point de cette courbe.

91. *Sur l'herpolhodie.*

Comptes rendus, 13 avril 1885.

Je construis le centre de courbure de cette courbe en faisant usage d'un théorème nouveau. Cette construction me permet de montrer géométriquement que, comme l'avait énoncé M. de Sparre, l'herpolhodie n'est pas ondulée.

Je passe sous silence de très nombreuses Notes qui ont paru dans des Journaux mathématiques français ou étrangers. Je ferai remarquer aussi que, si j'ai analysé quelques Communications relatives à la démonstration de théorèmes dus à différents géomètres, c'est qu'elles avaient pour but d'affirmer la puissance de la méthode dont je fais usage.

En 1851, j'ai modifié l'ancienne règle à calculs.

J'en ai inventé une nouvelle que l'on appelle *règle à échelles repliées*. Le principe de cette règle a été appliqué aussi sur une règle cylindrique dont le modèle est exposé dans les galeries du Conservatoire des Arts et Métiers. Ce modèle, de $0^{m},135$ de longueur, permet d'obtenir le produit de deux nombres avec la même approximation qu'une ancienne règle ordinaire de 2^{m} de longueur. Sur le rapport de feu M. Mathieu, membre de l'Institut, ces règles m'ont valu une mention honorable à l'Exposition universelle de 1855. La règle à calculs, telle que je l'ai modifiée, adoptée à l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie, est aujourd'hui répandue dans divers pays : l'instruction pour l'emploi de cette règle a été traduite en différentes langues. Une instruction spéciale a été publiée en allemand. Quintino Sella, dans sa « Théorie et pratique de la règle à calculs », consacre plusieurs pages à mes instruments.

J'ai donné, en 1857, au Conservatoire des Arts et Métiers, le modèle d'un vernier de vernier. Pour mesurer une longueur à $\frac{1}{100}$ près, le vernier ordinaire porte 100 divisions; dans le système que j'ai inventé, j'emploie deux verniers portant chacun 10 divisions seulement.

(*Comptes rendus*, t. LXXV, p. 1495; 1872. — *Journal de Physique*, 1874.)

Sur ma demande, j'ai fait partie en 1860 de la Commission dirigée par le colonel Laussedat et envoyée dans le sud de la province de Constantine pour l'observation de l'éclipse totale du 18 juillet.

J'avais eu d'avance l'idée assez originale que pour bien observer le phénomène très intéressant d'interférences, dont l'étude avait été recommandée par Arago, il fallait tourner le dos au soleil au moment de l'occultation totale.

C'est ce que j'ai fait, et j'ai été assez heureux pour voir les franges que j'attendais et en mesurer l'inclinaison. Voici ce que dit M. Faye à ce sujet dans les *Comptes rendus* (24 décembre 1860) : « Une des observations les plus curieuses et les plus complètes de la Commission algérienne, celle des franges si bien décrites par M. le capitaine Mannheim, jette, à mon avis, un grand jour sur la constitution du cône d'ombre des éclipses totales, etc., etc. »

10862 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.