

Titre : Notes sur la dynamique de l'aéroplane

Auteur : Vallier

Mots-clés : Aérodynamique ; Tourbillons (mécanique des fluides)

Description : 1 vol. (98 p.) ; 32 cm

Adresse : Paris : Vve Ch. Dunod, 1905

Cote de l'exemplaire : CNAM-BIB 4 Ca 108

URL permanente : <http://cnum.cnam.fr/redir?4CA108>

---

NOTES SUR LA

# DYNAMIQUE DE L'AÉROPLANE

---

---

MACON, PROTAT FRÈRES, IMPRIMEURS

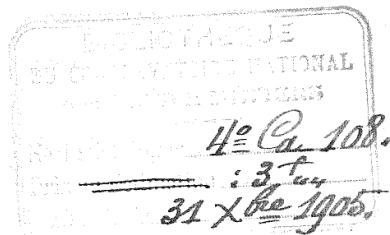
---

*H<sup>e</sup> Ca 108*

# NOTES SUR LA DYNAMIQUE DE L'AÉROPLANE

Par M. VALLIER

CORRESPONDANT DE L'INSTITUT



PARIS

V<sup>VE</sup> CH. DUNOD, ÉDITEUR

49, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 49

—  
1905





# DYNAMIQUE DE L'AÉROPLANE

## INTRODUCTION

Nous n'avons nullement l'intention de présenter ici un projet même rudimentaire d'aéroplane. Nous nous proposons seulement de réunir les enseignements que la mécanique rationnelle d'une part et les lois expérimentales de la physique d'autre part peuvent fournir sur cette question.

Sans doute, ces indications ne fourniront qu'une estimation bien vague du chiffre réel des efforts et des résistances à prévoir. Elles n'en seront pas moins utiles, croyons-nous, tant pour dissiper certaines illusions que pour réfuter des prévisions peut-être trop pessimistes, et surtout pour faire pressentir aux chercheurs les voies dans lesquelles il semble inutile de s'engager comme étant presque certainement vouées à l'insuccès.

## CHAPITRE I

### POSITION DE LA QUESTION

1. — Les aéroplanes sont des véhicules aériens où l'on assure la sustentation au moyen de surfaces planes légèrement inclinées sur l'horizon et animées dans leur ensemble d'un mouvement de propulsion horizontal.

Voici comment l'on expose actuellement la théorie élémentaire de ces appareils.

Considérons un plan mince de surface  $S$  animé d'une vitesse horizontale  $V$ , inférieure à 100 mètres.

Admettons que la résultante  $N$  des actions de l'air sur ce plan mince est normale à la surface, et que son point d'application est très voisin du centre de gravité. Si l'on désigne par  $\alpha$  l'angle d'attaque ou l'inclinaison du plan sur l'horizon, la valeur de  $N$  est une expression de la forme :

$$N = KSV^2 f(\alpha),$$

$K$  étant constant pour un même appareil.

Supposons ce plan mince relié à un corps qu'il s'agit de soutenir, une nacelle, par exemple, et soit  $P$  le poids du système. La sustentation sera réalisée, lorsque la composante verticale de  $N$  fera équilibre à  $P$  :

$$P = N \cos \alpha.$$

La résistance horizontale  $R$  est mesurée par la composante horizontale de  $N$  :  $R = N \sin \alpha$ .

Quand au travail à dépenser, il est évidemment :

$$T = R \cdot V,$$

d'où :

$$T^2 = \frac{N^2 \sin^2 \alpha}{KS f(\alpha)}$$

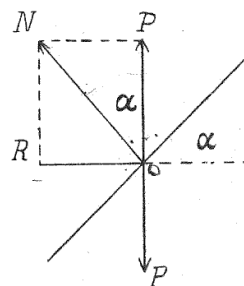


FIG. 1.

Les angles d'attaque sont toujours très faibles, on peut donc remplacer le sinus par l'arc  $\alpha$  et le cosinus par l'unité; alors  $N = P$  et l'on a :

$$T^2 = \frac{P^3 \alpha^2}{KS f(\alpha)}.$$

On sait que Navier et Dupré admettent d'après la théorie et l'expérience :  $f(\alpha) = \lambda \sin^2 \alpha$ , ou pour les petits angles :  $f(\alpha) = \lambda \alpha^2$ .

Il en résulte, pour le travail, la valeur :

$$T^2 = \frac{P^3}{KS \lambda} \text{ ou } \frac{P^3}{K'S},$$

d'après laquelle le travail serait le même quel que soit l'angle d'attaque et, par conséquent, le même que dans le parachute à abaissement vertical. On n'aurait dans ces conditions aucun avantage à employer les plans inclinés se déplaçant horizontalement. Mais d'autres calculateurs, et parmi eux Thibaut, ont trouvé que  $f(\alpha)$  ne varie pas comme le carré du sinus, mais simplement comme le sinus de l'angle, c'est-à-dire que pour les petits angles on doit poser :  $f(\alpha) = \lambda \alpha$ .

La formule du travail devient alors :

$$T^2 = \frac{P^3 \alpha}{K \lambda S} \text{ ou } \frac{P^3 \alpha}{K'S},$$

il est aisé de voir que, loin d'être constant, quel que soit l'angle d'attaque, ce travail tend vers zéro avec  $\alpha$ . Théoriquement, dans cette hypothèse, le travail nécessaire à la sustentation, lorsqu'on cherche à l'obtenir par le déplacement horizontal d'un plan incliné, pourrait donc être réduit autant qu'on le voudrait.

La sustentation n'est pas la seule résistance qu'il y ait à vaincre. Il y a une résistance qui provient du frottement de l'air, non seulement sur le plan mince, mais aussi sur tous les organes de l'appareil, cadre, nacelle, agrès. Pour simplifier les calculs, nous admettons que cette résistance  $R'$  est la même que si tout l'appareil était remplacé par un plan mince idéal de surface  $\delta$ , et, en désignant par  $\varphi$  un coefficient constant, nous aurons :  $R' = \varphi \delta V^2$ .

C'est cette résistance qui s'ajoutera à celle que développe le travail de la sustentation  $N\alpha$ ; l'on aura, en définitive, à vaincre une résistance totale :

$$R = N\alpha + \varphi \delta V^2,$$

et le travail nécessaire pour la vaincre sera :

$$T = N\alpha V + \varphi \delta V^3.$$

Mais lorsque la sustentation est réalisée,  $N = P$  et l'on a :  $P = K'SV^2\alpha$ .

On en tire :  $\alpha = \frac{P}{K'SV^2}$ ,

et par suite :  $T = \frac{P^2}{K'SV} + \varphi \delta V^3$ .

Cette dernière expression se compose de deux termes, qui représentent les deux résistances développées par la sustentation et le mouvement de translation. Le premier décroît jusqu'à zéro quand la vitesse s'accroît à l'infini, tandis que le second croît indéfiniment. Le

travail est infini pour les deux valeurs extrêmes de  $V = 0$  et  $\infty$ ; donc l'expression est susceptible d'un minimum correspondant aux valeurs des variables qui annulent la dérivée de l'équation qui précède. Cette condition est remplie lorsque l'on a :  $P\alpha = 3\varphi\delta V^2$ , c'est-à-dire lorsque la résistance de sustentation est égale à trois fois la résistance à l'avancement horizontal<sup>1</sup>.

On démontre également que la résistance totale  $R$  est minimum lorsque la résistance de sustentation est égale à la résistance à l'avancement horizontal<sup>2</sup>.

Enfin, on indique que tout en réduisant au minimum les résistances passives qui seules sont la cause du travail dépensé, on ne saurait dépasser une certaine limite, et que le poids du moteur ne devrait pas dépasser 10 kilogrammes par cheval.

Venons maintenant à l'examen méthodique du problème.

## CHAPITRE II

### ÉTUDE DE LA PRESSION DES FLUIDES SUR LES SOLIDES

2. — Toutes les conclusions précédentes reposent sur l'hypothèse que la résistance a une valeur de la forme  $KSV^2 \sin \alpha$  et que l'action de l'air est uniquement normale à la surface. Le fait est contestable ainsi que le montrent les raisonnements suivants. Le premier est dû à Rankine dont la haute autorité ne saurait être méconnue; le deuxième, plus élémentaire, conduit aux mêmes conclusions.

Voici en premier lieu la méthode de Rankine :

*Pression d'un jet contre une surface fixe.* — Un jet de fluide qui vient frapper une surface unie est dévié, et glisse le long de la surface suivant la trajectoire qui fait le plus petit angle avec la direction initiale de son mouvement, et finalement quitte l'arête, suivant une direction tangente à la surface. Pour simplifier la question, nous supposons que la surface soit courbée de façon à forcer le jet, lorsqu'il la quitte, à suivre une direction définie. Nous supposons de plus que le frottement entre le jet et la surface est insignifiant. Ceci étant admis, comme les molécules de fluide en contact avec la surface se meuvent le long de cette surface, et que la seule force sensible qui s'exerce entre elles et la surface est perpendiculaire à la direction de leur mouvement, cette force ne pourra ni accélérer ni retarder le mouvement des molécules, mais seulement le faire dévier. Soient alors  $v$  la vitesse des molécules du fluide,  $Q$  le débit par seconde,  $\rho$  la densité, et  $\alpha$  l'angle dont la direction du mouvement se trouve déviée,

$$\frac{Q\rho v}{g},$$

1. On a en effet pour le minimum :

$$\frac{dT}{dV} = -\frac{P^2}{KSV^2} + 3\varphi\delta V^2,$$

d'où :

$$3\varphi\delta V^2 = \frac{P^2}{KSV^2} = P\alpha \quad \text{C. Q. F. D.}$$

2. On a, par un calcul analogue au précédent :

$$R = \frac{P^2}{KSV^2} + \varphi\delta V^2,$$

d'où :

$$\frac{dR}{dV} = -\frac{2P^2}{KSV^3} + 2\varphi\delta V = 0,$$

d'où enfin :

$$\varphi\delta V^2 = \frac{P^2}{KSV^2} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

sera alors la quantité de mouvement de la quantité de liquide qui est déviée par seconde. Concevons aussi un triangle isocèle dont les côtés sont égaux tous deux à la vitesse  $v$ , et font entre eux l'angle  $\alpha$ ; la base de ce triangle, qui a pour valeur,

$$2v \sin \frac{\alpha}{2};$$

représente alors le changement de vitesse qu'éprouve chaque molécule du fluide, de telle sorte que la variation de la quantité de mouvement par seconde est :

$$F = \frac{2\rho Qv}{g} \sin \frac{\alpha}{2}; \quad (1)$$

c'est aussi la grandeur de la pression totale qui s'exerce entre le fluide et la surface, suivant une ligne qui est parallèle à la base du triangle isocèle mentionnée ci-dessus, c'est-à-dire qui fait des angles égaux dans des directions opposées avec la direction initiale du jet et sa nouvelle direction.

La force représentée par  $F$  peut être décomposée en deux composantes.  $F_x$  et  $F_y$ , respectivement parallèle et perpendiculaire à la direction initiale du jet. Il existe entre la résultante et ses composantes les relations :

$$\frac{F}{F_x} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \alpha}; \quad \frac{F}{F_y} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}; \quad (2)$$

d'où l'on tire pour les valeurs des composantes :

$$F_x = \frac{\rho Qv}{g} (1 - \cos \alpha); \quad F_y = \frac{\rho Qv}{g} \sin \alpha. \quad (3)$$

Si la surface que le jet vient frapper a une figure symétrique autour de la direction initiale du jet considérée comme axe, la quantité de fluide  $Q$  qui frappe la surface par seconde, s'étale et glisse suivant différentes directions distribuées symétriquement autour de l'axe et faisant avec lui des angles égaux  $\alpha$ , de telle sorte que les forces exercées perpendiculairement à l'axe par les différentes parties du jet qui s'étale se font équilibre, et qu'il ne reste que la somme des composantes parallèles à l'axe, dont la valeur est  $F_x$  et est donnée par la première des équations 3.

Si l'on remplace  $Q$  par  $Av$ ,  $A$  étant l'aire de la section du jet, les forces peuvent être exprimées en fonction de cette aire.

Comme cas particulier, supposons que la surface soit plane. Le jet, en frappant la surface, s'étale et la quitte suivant toutes les directions perpendiculaires à sa direction initiale, de telle sorte que :  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\cos \alpha = 0$ , et

$$F_x = \frac{\rho Qv}{g} = \frac{\rho Av^2}{g}. \quad (4)$$

Cette force représente le poids d'une colonne de fluide qui aurait pour base l'aire de la section du jet, et une hauteur *double* de la hauteur due à la vitesse. L'expérience confirme ce résultat.

Dans la même hypothèse  $\alpha = 90^\circ$  on trouve  $F_y = \frac{\rho Qv}{g}$ , ce qui semble absurde. Mais

il convient de rappeler que dans ce cas le jet se dédouble en deux jets symétriques, comme il a été dit plus haut, ce qui entraîne la conclusion  $F_y = 0$ .

On voit aisément que la normale  $N$  à la surface et la composante  $F_y$  sont symétriques par rapport à la résultante  $R$  et ont par suite même valeur. On a donc bien pour  $N$  une valeur théorique égale à  $\frac{\rho Q v}{g} \sin \alpha$  ou à  $\frac{\rho A v^2}{g} \sin \alpha$ , comme il était admis dans l'analyse exposée au début. Mais on voit aussi que l'on aurait dû dans cette analyse faire intervenir également la composante tangentielle  $T$  égale numériquement à  $F_x$ .

Les formules qui précèdent nous semblent pouvoir être établies un peu plus simplement en raisonnant comme il suit :

Considérons un élément gazeux arrivant au contact de la paroi : le mouvement de cette dernière n'éprouvera aucune modification si l'élément reçoit une impulsion telle qu'il glisse de lui-même le long de la paroi. Or, dans ce déplacement le mobile descendra d'une quantité  $v \sin \alpha dt$  : il avancera vers la droite d'une quantité  $v \cos \alpha dt$ , mais comme pendant le même temps la paroi aura marché de  $v dt$  vers la gauche, le déplacement final devra être  $v (1 - \cos \alpha) dt$  : les deux impulsions devront être en conséquence  $m v \sin \alpha dt$  et  $m v (1 - \cos \alpha) dt$ , et, en remplaçant  $m$  par la masse de toute la colonne gazeuse  $\frac{\rho Q}{g}$ , on retrouve les valeurs :

$$F_y = \frac{\rho Q v}{g} \sin \alpha \quad F_x = \frac{\rho Q v}{g} (1 - \cos \alpha),$$

indiquées par Rankine.

Dans les raisonnements qui précèdent, on a traité l'air comme un fluide incompressible et l'on a admis que le courant s'appliquait exactement contre la paroi guide. On sait qu'il n'en est rien. Cependant aux vitesses relativement faibles que l'on doit envisager dans les problèmes actuels, la première hypothèse s'écarte peu de la vérité et l'on peut appliquer la formule de Bernoulli, ce qui a été fait implicitement.

La deuxième objection semble plus sérieuse.

La présence d'une « proue » gazeuse en avant des corps en mouvement a été signalée depuis longtemps. Mais si l'on reprend le premier raisonnement, celui de Rankine, on voit qu'il ne suppose rien sur le détail du contour suivi par les filets gazeux. Il tient compte simplement de leur déviation finale. Peu importe que les filets se soient déviés le long de la paroi ou le long d'un autre contour, pourvu que la déviation résultante soit la même.

Si donc nous envisageons le jet gazeux pris à une distance suffisante, en avant de la « proue », ce jet contournera cette « proue » pour s'échapper à hauteur de la paroi solide suivant la direction de cette dernière, et par suite les formules établies seront bien applicables.

Mais la section  $A$  du jet, dans le cas qui nous occupe, n'est pas connue, ni aisée à déterminer théoriquement. Tout ce que l'on peut dire en première étude, c'est qu'elle doit être sensiblement proportionnelle à la surface de la paroi et varier avec l'incidence du jet de telle sorte que l'on peut écrire :

$$\frac{\rho}{g} A = K S f(\alpha),$$

$f(\alpha)$  étant égale à l'unité pour  $\alpha = 90^\circ$ .

Le coefficient  $K$  est connu ; il est sensiblement égal à 0,085. Cela revient à admettre

que le jet gazeux qui va se répandre autour de la « proue » pour contourner la paroi mobile a une section sensiblement égale aux deux tiers de la surface de ladite paroi.

C'est une hypothèse admissible en première approximation. On s'efforcera de serrer la vérité de plus près dans la suite de ce travail. Provisoirement on écrira donc simplement :

$$F_x = T = KS (1 - \cos \alpha) v^2 f(\alpha)$$

$$F_y = N = KS \sin \alpha v^2 f(\alpha)$$

$$R = 2KS \sin \frac{\alpha}{2} v^2 f(\alpha)$$

où :  $K = 0,085,$

les unités étant le mètre et le kilog.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé la paroi en marche dans un air immobile. Supposons maintenant que l'air ait une vitesse propre ; deux cas sont à considérer :

**3. — 1<sup>er</sup> CAS.** — *La surface a un mouvement de translation parallèle à la direction initiale du jet.* — Désignons par  $v$  la vitesse de ce mouvement, positive si elle est dans le sens du mouvement du jet, et négative en sens contraire, et par  $v_1$  la vitesse initiale du jet ;  $v_1 - v$  sera alors la vitesse du jet par rapport à la surface. La composante qui agit entre le fluide et la surface solide, dans la direction du mouvement de cette dernière, est donc :

$$F_x = \frac{\rho Q (v_1 - v)}{g} (1 - \cos \alpha); \quad (1)$$

elle représente également la force égale et opposée qu'il faut appliquer au solide pour que son mouvement soit uniforme ; et l'énergie transmise par seconde est :

$$F_x v = \frac{\rho Q v (v_1 - v)}{g} (1 - \cos \alpha), \quad (2)$$

qui, si  $v$  est positif, est transmise du fluide au solide, et, si  $v$  est négatif, du solide au fluide.

L'énergie ainsi transmise par seconde est égale à la différence des énergies actuelles du volume  $Q$  du fluide avant et après son action sur le solide. Soit  $v_2$  la vitesse du fluide après le choc ; cette vitesse étant la résultante de  $v$  et de  $v_1 - v$  dans la direction déviée, son carré est donné par l'équation :

$$v_2^2 = v^2 + (v_1 - v)^2 + 2v (v_1 - v) \cos \alpha = v_1^2 - 2v (v_1 - v) (1 - \cos \alpha). \quad (3)$$

**4. — 2<sup>e</sup> CAS.** — *La surface a un mouvement de translation dans une direction quelconque, avec la vitesse  $v$ .* — Dans la fig. 2,  $\overline{BD}$  représente cette direction et cette vitesse, et  $\overline{BC}$  la direction initiale et la vitesse  $v_1$  du jet.  $\overline{DC}$  représente alors la direction et la vitesse du mouvement initial du jet par rapport à la surface. Menons la ligne  $\overline{EF} = \overline{DC}$  tangente à la surface au point E, où le jet quitte cette surface ; cette longueur représente la vitesse relative et la direction suivant laquelle le jet quitte la surface. Menons  $\overline{FG}$  parallèle et égale à  $\overline{BD}$  et joignons  $\overline{EG}$  ; cette dernière ligne représente la direction et la vitesse absolue avec lesquelles le jet quitte la surface, puisqu'elle est la résultante de  $\overline{EF}$  et de  $\overline{FG}$ .

On pourrait déterminer la force totale qui s'exerce entre le fluide et la surface en

cherchant la variation de la quantité de mouvement du fluide  $Q$ , due soit au changement de direction et de vitesse absolue, à savoir, de  $BC$  à  $EG$ , soit au changement de direction et de vitesse par rapport à la surface, à savoir, de  $DC$  à  $EF$ . Mais la force qu'il est le plus important de déterminer est celle à laquelle est due l'énergie transmise, c'est-à-dire la force parallèle à  $BD$ , que nous représenterons par  $F_x$ . Cette force est égale à la variation dans une seconde de la quantité de mouvement composante du fluide dans la direction  $BD$ . Désignons par  $\delta = \angle DBC$  l'angle que fait la direction du jet avec celle du mouvement de translation du corps; la composante, dans la direction  $BD$  de la vitesse initiale du jet est alors :

$$v_1 \cos \delta.$$

Soit  $w = \overline{DC}$  la vitesse du jet par rapport à la surface; alors :

$$w^2 = v^2 + v_1^2 - 2vv_1 \cos \delta. \quad (6)$$

Représentons par  $\gamma$  le supplément de l'angle  $EFG$ , l'angle qu'une tangente à la surface à l'arête où le fluide la quitte fait avec la direction de la translation. La composante, dans la direction  $BD$ , de la nouvelle vitesse du jet, est alors :

$$v + w \cos \gamma;$$

et la variation de la quantité de mouvement dans cette direction pendant une seconde est :

$$F_x = \frac{\rho Q}{g} (v_1 \cos \delta - v - w \cos \gamma), \quad (7)$$

qui donne pour l'énergie transmise par seconde :

$$F_x v = \frac{\rho Q}{g} v (v_1 \cos \delta - v - w \cos \gamma). \quad (8)$$

$v^2$  étant la vitesse résultante du fluide après le choc, on a :

$$v^2 = v_1^2 + w^2 + 2vw \cos \gamma. \quad (9)$$

On peut retrouver et compléter les résultats précédents à l'aide du raisonnement élémentaire qui suit :

Imprimons à tout le système une vitesse  $-v$  égale et de signe contraire à celle de la paroi. Pour que cette dernière reste immobile malgré le courant gazeux, il faut que celui-ci soit dévié de manière à s'écouler librement le long de la paroi. Il faut à cet effet lui imprimer une vitesse tangentielle  $v_t$  et une vitesse  $v_n$  normale à la paroi telles que :

1° La vitesse tangentielle finale soit égale à la vitesse  $w$  relative du gaz par rapport à la paroi, ce qui donne la condition :

$$v_t - v \cos \gamma + v_1 \cos (\delta - \gamma) = w;$$

2° La vitesse normale soit nulle, ce qui exige que l'on ait :

$$v_n + v \sin \gamma + v_1 \sin (\delta - \gamma) = 0,$$

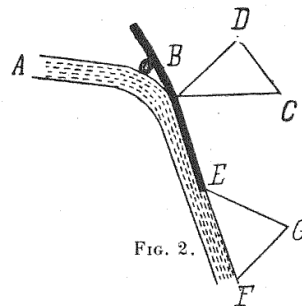


FIG. 2.



et les impulsions correspondantes ont pour valeur :

$$F_t = \frac{\rho Q}{g} v_t \quad F_n = \frac{\rho Q}{g} v_n.$$

On en déduit, suivant la direction du mouvement et sa perpendiculaire, les deux composantes :

$$F_v = F_t \cos \gamma + F_n \sin \gamma = \frac{Q}{g} (v_t \cos \delta - v - w \cos \gamma)$$

$$F_p = F_t \sin \gamma + F_n \cos \gamma = \frac{Q}{g} (w \sin \gamma - v_t \sin \delta),$$

et l'on a toujours :

$$w^2 = v_t^2 + v^2 - 2 v v_t \cos \delta.$$

Si l'on suppose la paroi rectiligne, on aura enfin  $\gamma = \alpha + \delta$ ,  $\alpha$  étant l'angle d'incidence du jet sur la paroi.

Enfin le débit gazeux  $Q$  est égal ici à la section  $A$  du jet, multiplié par la vitesse relative  $w$  du courant par rapport à la surface ; donc :

$$F_v = \frac{\rho}{g} A w (v_t \cos \delta - v - w \cos \gamma)$$

$$F_p = \frac{\rho}{g} A w (w \sin \gamma - v_t \sin \delta).$$

5. — Dans l'établissement des formules précédentes, on admet implicitement que le courant gazeux prend la forme indiquée dans la fig. 1, c'est-à-dire s'infléchit tout entier dans le même sens. Mais on peut remarquer immédiatement que si la crête de la paroi s'abaissait au-dessous de B, une partie du jet remonterait vers la gauche pour s'écouler par-dessus cette crête.

Le courant gazeux se partage donc généralement en deux fractions  $Q'$  et  $Q''$  : la première qui descend comme l'indique la figure ; la deuxième qui remonte, c'est-à-dire qui subit la déviation  $\pi + \alpha$  au lieu de la déviation  $\alpha$ .

Si l'on forme en conséquence les expressions des composantes  $F_x'$ ,  $F_y'$  correspondant à la déviation  $\pi + \alpha$ , à l'aide des expressions (3)<sup>1</sup>, et si l'on écrit :

$$Q' + Q'' = Q \quad Q' - Q'' = \Delta,$$

on obtient par addition les composantes définitives :

$$F_x = \frac{\rho}{g} (Q - \Delta \cos \alpha) v \quad F_y = \frac{\rho}{g} \Delta v \sin \alpha.$$

1. On a en effet :

$$F_x' = \frac{\rho Q' v}{g} (1 - \cos \alpha)$$

$$F_y' = \frac{\rho Q' v}{g} \sin \alpha$$

$$F_x'' = \frac{\rho Q'' v}{g} (1 + \cos \alpha)$$

$$F_y'' = \frac{\rho Q'' v}{g} \sin \alpha,$$

d'où :

$$F_x = F_x' + F_x'' = \frac{\rho v}{g} (Q' + Q'') - \frac{\rho v}{g} (Q' - Q'') \cos \alpha$$

$$F_y = F_y' + F_y'' = \frac{\rho v}{g} (Q' - Q'') \sin \alpha.$$

Lorsque le jet est normal à la surface, la composante  $F_y$  doit s'annuler comme nous l'avons déjà fait remarquer; de plus la différence entre les deux jets inférieur et supérieur doit évidemment croître lorsque la paroi s'incline de plus en plus, au détriment du jet supérieur; nous écrirons donc  $\Delta = \lambda Q \cos \alpha$ ,  $\lambda$  étant une fonction moindre que  $\sec \alpha$ , et on aura, en substituant :

$$F_x = \frac{\rho}{g} Qv (1 - \lambda \cos^2 \alpha) \quad F_y = \frac{\rho}{g} Qv \lambda \sin \alpha \cos \alpha.$$

La résultante  $R$  a pour valeur :

$$R = \frac{\rho}{g} Qv \sqrt{\sin^2 \alpha + (\lambda - 1)^2 \cos^2 \alpha},$$

et son inclinaison sur la direction du jet est donnée par la relation :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\lambda \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \lambda \cos^2 \alpha}.$$

Ce système de formules comprend comme cas particulier le système indiqué au début de ce mémoire. Si l'on fait effectivement  $\lambda = 1$ , on déduit :

$$R = \frac{\rho}{g} Qv \sin \alpha \quad F_x = \frac{\rho}{g} Qv \sin^2 \alpha \quad F_y = \frac{\rho}{g} Qv \sin \alpha \cos \alpha,$$

et comme nous savons que le débit  $Q$  a pour expression  $\Lambda v$  et que  $\frac{\rho}{g} \Lambda$  est de la forme  $KSf(\alpha)$ , nous retombons sur les formules habituelles.

6. — Nous ferons donc dans tout ce qui va suivre usage des formules ainsi dérivées de celles de Rankine, puisque ces formules, déduites de la théorie, comprennent, dans le cas particulier où  $\lambda = 1$ , les formules de Loessel habituellement employées. Ces formules générales sont :

$$F_x = KSv^3 (1 - \lambda \cos^2 \alpha) f(\alpha) \quad \text{et} \quad F_y = KSv^3 \lambda \sin \alpha \cos \alpha f(\alpha).$$

Nous avons indiqué plus haut que l'on prenait en général  $f(\alpha) = 1$  et  $K = 0,085$  ou  $0,125$ , les unités étant le mètre et le kilogramme. Nous ferons, selon le cas, usage dans les applications de l'une ou l'autre de ces valeurs, afin de faciliter les comparaisons avec les résultats trouvés par d'autres auteurs. Mais nous nous réservons également d'employer les formules générales, comme aussi d'essayer de tenir compte du frottement.

### CHAPITRE III

#### ÉTUDE D'UN AÉRONAT AVEC ACTION VERTICALE DU MOTEUR

7. — Avant d'entreprendre la théorie générale, il semble convenable de traiter au préalable le cas très simple d'un aéronef à plateau moteur agissant verticalement, en considérant ce plateau moteur indépendamment de la manière dont l'énergie produite sera transmise au système.

Les éléments de la question sont alors les suivants :

$P_o$ , poids de la nacelle, de l'équipage, des agrès, etc., y compris s'il y a lieu, une force ascensionnelle supplémentaire  $P'$  ;

$S$ , surface en mètres carrés du plateau sustentateur ;

$d$ , poids moyen de cette surface par mètre carré ou densité transversale, suivant une expression souvent employée.

Ce poids spécifique  $d$  peut d'abord être considéré comme fixe, dans l'étude d'un appareil déterminé. Pour une étude plus approfondie, on peut admettre qu'il est proportionnel à la racine carrée de l'effort supporté par élément du plateau, soit, en l'espèce, à sa vitesse  $V$ .

$P_s = Sd$ , poids du plateau sustentateur ;

$V$ , vitesse dudit plateau ;

$Y$ , composante verticale effective de l'effort total du moteur, évaluée en kilogrammètres ;

$F = YV$  puissance utile du moteur, en kilogrammètres ;

$\Pi$ , poids total du moteur ;

$\pi = \frac{\Pi}{F}$ , poids du moteur par kilogrammètre utile de puissance ;

$P_1 = P_o + \Pi$ , poids de l'aéronat, moins le plateau ;

$K$ , coefficient de la résistance de l'air. Ce coefficient est théoriquement pris égal à 0 kg. 125 ; dans le cas particulier des surfaces planes et normales à la direction du mouvement, on admet 0 kg. 085.

On emploiera selon les cas, dans les applications, l'une ou l'autre de ces valeurs.

L'effort produit par l'air sur le plateau a pour expression :

$$Y = KSV^2.$$

Il doit équilibrer les différentes actions verticales qui sont :

$$P_o, P_s \text{ et } \Pi,$$

de telle sorte que l'on a :

$$KSV^2 = P_o + P_s + \Pi$$

et que la relation générale entre les divers éléments s'écrira :

$$P_o + dS + \pi F = KSV^2 = Y. \quad (1)$$

D'autre part, on a :

$$F = KSV^3. \quad (2)$$

On peut combiner ces relations d'une foule de manières, selon que l'on éliminera entre elles l'un des éléments :  $F$ ,  $S$  ou  $V$ .

On a ainsi les deux relations qui suivent :

$$P_o + dS + KSV^2 (\pi V - 1) = 0 \quad (3)$$

$$Y = P_o + \pi F + dS = \overline{KS}^{1/3} F^{2/3}. \quad (4)$$

#### 1° Parachute.

8 — Lorsque  $P' = 0$ , les différentes forces se font équilibre, l'aéronat monte et descend avec une vitesse uniforme qui n'est autre que  $V$  si l'on néglige la résistance de l'air aux

éléments autres que le plateau sustentateur. Si l'on fait en même temps  $\pi = 0$ , on aura le cas du parachute :

$$P_o + dS - KSV^2 = 0. \quad (3 \text{ bis})$$

2° *Aéronat à puissance minimum du moteur.*

9. — En général, ce n'est pas la vitesse  $V$  du plateau (qu'il ne faut pas confondre avec celle de l'aéronat) qu'il est nécessaire de considérer : elle ne paraît dans les équations que comme figurant le mode de transformation de l'énergie du moteur. C'est donc l'équation (4) où figure ce dernier élément qu'il y a le plus souvent lieu d'envisager et dont la discussion est particulièrement intéressante.

On peut l'écrire en effet, en éliminant  $S$  :

$$Y^3 - \frac{K}{d} F^2 [Y - P_o - \pi F] = 0. \quad (4 \text{ bis})$$

Cette équation a toujours une racine négative. Elle ne peut en avoir de positive qu'à la condition d'avoir :

$$27 (P_o + \pi F)^2 \leq \frac{4K}{d} F^2,$$

ou :

$$P_o \leq \left\{ \sqrt{\frac{4K}{27d}} - \pi \right\} F. \quad (5)$$

Le second membre donne le maximum de poids utile que l'on peut enlever avec un moteur de puissance donnée, connaissant son poids  $\pi$  par kilogrammètre (ou par cheval-vapeur) et la densité  $d$  du plateau sustentateur au mètre carré.

Si l'on pose, pour abrégier l'écriture :

$$\frac{4K}{27d} = a^2,$$

on trouve pour le maximum de  $P_o$  l'expression :

$$P_o = (a - \pi) F,$$

auquel correspond la valeur tirée de l'équation (4 bis), dont  $Y$  est alors racine double,

$$Y = P_o + P_s + \pi F = \sqrt{\frac{K}{3d}} F = \frac{3}{2} aF,$$

ou enfin, toutes réductions faites :

$$P_s = \frac{1}{2} aF.$$

D'autre part, on a trouvé :

$$P_o + \pi F = aF.$$

Par conséquent, les conditions les plus avantageuses sont réalisées lorsque le poids du plateau est la moitié des poids réunis de la nacelle et du moteur.

La vitesse du plateau a pour expression  $\frac{F}{Y}$ , c'est-à-dire, dans ce cas :

$$V = \frac{2}{3a}.$$

Réciproquement, pour produire un effort vertical déterminé  $P_0$ , il faut faire usage d'un moteur ayant une puissance au moins égale à  $P_0 : (a - \pi)$ .

Mais bien que l'on travaille ainsi dans les conditions de rendement les plus avantageuses, il peut se faire que d'autres éléments du problème ne permettent pas d'adopter cette solution. Or, pourvu que la condition (5) soit satisfaite, l'équation (4) permet de déterminer  $Y$  et par suite de résoudre la question posée.

La solution graphique qui suit, outre qu'elle parle aux yeux, présente l'avantage d'être plus expéditive que des résolutions d'équations numériques.

Construisons à cet effet la courbe :

$$Y^3 - KF^2S = 0, \quad (6)$$

entre les éléments  $Y$  et  $S$  du problème, pour une valeur donnée de la puissance  $F$  du moteur.

Cette courbe jouit de la propriété que, si l'on mène la tangente en un point donné,  $S_1, y_1$ , l'ordonnée à l'origine de ladite tangente a pour valeur les  $2/3$  de l'ordonnée  $y_1$  du point considéré<sup>1</sup>.

D'autre part, les divers éléments sont reliés par la relation :

$$Y = P_0 + \Pi + dS = P_1 + dS. \quad (7)$$

Par suite, si l'on construit la courbe de l'équation (6) et que, par le point d'abscisse zéro et d'ordonnée  $P_1$  on mène une droite d'inclinaison  $d$ , les points où cette droite coupera la courbe donneront, par leurs coordonnées, la surface et l'effort vertical qui répondent à la question.

La droite (7) coupe la courbe en un ou trois points : l'un de ces points est toujours dans la région négative et ne convient point. Les deux autres, s'ils existent, conviennent et donnent les deux solutions. Pour qu'ils existent, il faut que la droite correspondante soit au-dessous de la tangente menée par le point  $P_1$  à la courbe, c'est ce qui correspond à la condition (5) indiquée par l'algèbre.

Ces deux solutions, l'une à faible et l'autre à forte surface pour le plateau, correspondent à des efforts par élément superficiel qui varient en sens inverse des surfaces et l'on devra s'assurer si la densité  $d$  est suffisante dans chaque cas particulier.

### 3° Aéronat à effort du plateau minimum.

10. — Il est donc intéressant d'examiner comment varie l'effort supporté par le plateau pour fournir une force verticale déterminée  $P_0$ .

Soit  $x$  le rapport  $\frac{P_0}{Y}$ ; l'équation (4) s'écrit :

$$dY^3 - KF^2(1-x)Y + K\pi F^3 = 0;$$

d'où :

$$x = \frac{KF^2Y - K\pi F^3 - dY^3}{KF^2Y}.$$

1. L'équation de la tangente au point  $S_1, y_1$  est en effet :

$$Y - y_1 = \frac{KF^2}{3y_1^2}(S - s_1),$$

et pour  $S = 0$ ,

$$Y = y_1 - \frac{KF^2}{3y_1^2} S_1 = \frac{2}{3} y_1. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce rapport, qui mesure le rendement de l'appareil relativement à la fatigue du plateau, s'écrit en remplaçant  $F$  par  $VY$  :

$$x = \frac{KV^2 - K\pi V^3 - d}{KV^2};$$

il passe par un maximum pour  $V^3 = 2d : K\pi$  et prend alors pour valeur :

$$1 - \frac{3d}{KV^2} = 1 - \frac{3P_s}{Y}.$$

On a donc dans ce cas :

$$P_o = Y - 3P_s,$$

ou, après réduction :

$$\Pi = 2P_s.$$

Ainsi, l'effort ascensionnel, c'est-à-dire la fatigue du plateau pour enlever un poids déterminé  $P_o$ , est minimum quand le poids du moteur est le double de celui du plateau, si la densité transversale de ce dernier est imposée à l'avance.

Mais si l'on admet que cette densité transversale soit proportionnelle à la vitesse  $V$ , ce que l'on traduit en écrivant  $d = d_o V$ , on se trouvera dans un cas qui se rapproche bien plus des conditions de la pratique, car pour résister à la flexion, l'épaisseur d'une plaque doit être proportionnelle à la racine carrée de l'effort, soit précisément ici à la vitesse du plateau;  $d_o$  représente alors le poids moyen du plateau pour résister à l'effort  $K$  correspondant à 1 mètre de vitesse, c'est-à-dire soit à 85 grammes, soit à 125 grammes au mètre carré, selon la valeur admise pour le coefficient  $K$ .

Dans ce cas, les équations fondamentales étant toujours :

$$Y = P_o + \pi F + d_o VS,$$

$$Y = KSV^2,$$

$$F = YV = KSV^3,$$

on en déduit, en substituant  $Y$  et  $S$  dans la première relation :

$$\frac{F}{V} = P_o + \pi F + \frac{d_o VF}{KV^3},$$

$$\text{ou : } (P_o + \pi F) V^2 - FV + \frac{d_o F}{K} = 0,$$

dont les racines sont réelles à la condition d'avoir :

$$KF - 4d_o (P_o + \pi F) \geq 0,$$

$$\text{ou : } P_o \leq \left( \frac{K}{4d_o} - \pi \right) F.$$

On pourra donc enlever un poids quelconque  $P_o$  à la condition d'employer un moteur suffisamment puissant et dont le poids par kilogrammètre utile soit moindre que  $\frac{K}{4d_o}$  : les divers éléments auront alors pour valeur :

$$P_o = \left( \frac{K}{4d_o} - \pi \right) F,$$

$$\Pi = \pi F,$$

$$P_s = \frac{K}{4d_o} F = P_o + \Pi,$$

$$V = \frac{F}{2P_s} = \frac{2d_o}{K},$$

$$Y = 2P_s.$$

4° *Aéronat à surface de plateau minimum.*

**11.** — La marche à suivre est toujours la même.

L'équation fondamentale (4) :

$$P_o + dS + \pi F = KSV^2,$$

s'écrit, en posant  $P_o = Sx$ , et divisant par  $S$  :

$$x + d + K\pi V^3 - KV^2 = 0,$$

ou :

$$\frac{1}{V^3} (d + x) - \frac{1}{V} K + K\pi = 0,$$

dont la condition de réalité pour les racines positives est :

$$\frac{-4K^3}{d+x} + 27K^3\pi^2 \leq 0,$$

ce qui donne :

$$x \leq \frac{4K}{27\pi^2} - d.$$

Il suffit que le second membre soit positif pour que le problème admette deux solutions : ces deux solutions se confondent pour donner le rendement maximum lorsque l'on prend :

$$x = \frac{4K}{27\pi^2} - d,$$

avec :

$$V^2 = \frac{3(d+x)}{K},$$

ce qui entraîne :

$$V = \frac{2}{3\pi}.$$

On en déduit successivement les valeurs des autres éléments en procédant comme il suit :

Remplaçant  $V$  par  $\frac{2}{3\pi}$  dans la valeur de  $Y$ , on a :

$$Y = \frac{4KS}{9\pi^2},$$

de même :

$$F = YV = \frac{8KS}{27\pi^3},$$

et enfin :

$$H = F\pi = \frac{8KS}{27\pi^3}.$$

**12.** — Nous sommes ainsi en possession de trois solutions du problème de la sustentation par plateau avec moteur à action verticale et densité transversale constante :

La première correspond au minimum de puissance du moteur.

La deuxième au minimum de fatigue des organes du plateau.

La troisième au minimum de superficie du plateau.

On peut dire que ces trois solutions enclavent toutes les solutions pratiques du problème. Nous réunissons dans le tableau ci-après les formules des différents éléments nécessaires à enlever un poids donné  $P_o$ .

VALEUR DES ÉLÉMENTS pour le minimum de :	F PUISSANCE DU MOTEUR	Y EFFORT DU PLATEAU	S SURFACE DU PLATEAU
Vitesse de régime V....	$\sqrt[3]{3d : K}$	$\sqrt[3]{2d : K\pi}$	$2 : 3\pi$
Puissance du moteur F..	$3dSV$	$2dS : \pi$	$8KS : 27\pi^3$
Effort total Y.....	$3dS$	$F : V$	$4KS : 9\pi^2$
Poids du plateau $P_s$ ....	$dS$	$dS$	$dS$
Poids du moteur $\Pi$ ....	$3dS\pi V$	$2dS$	$8KS : 27\pi^2$
Poids enlevé $P_o$ .....	$\left(\sqrt[3]{\frac{4K}{27d}} - \pi\right) F$	$Y \left(1 - \frac{3}{2}\pi V\right)$	$\frac{Y}{3} - P_s$

Nous avons fait une application numérique de ces formules au problème suivant :

Rechercher les conditions d'enlèvement d'un poids  $P_o$  de 100 kilog., le poids du plateau étant de 4 kilog. au mètre courant et celui du moteur de 3 kg. 230 par cheval utile, le coefficient de la résistance de l'air étant 0 kg. 125.

Ces résultats sont reportés dans le tableau qui suit :

*Données du problème :*

Poids à enlever.....  $P_o = 100$  kilog.  
Poids du plateau au mètre carré.....  $d = 4$  kilog.  
Poids du moteur par cheval utile.....  $75\pi = 3$  kg. 230.

POUR LE MINIMUM DE :	PUISSANCE	EFFORT AU PLATEAU	SURFACE DU PLATEAU
Vitesse de régime.....	9 m. 80	11 m. 44	15 m. 50
Puissance du moteur....	4,000 kgm. 53 chx 4	4,320 kgm. 58 chx	7,680 kgm. 102 chx
Effort au plateau.....	408 kilog.	377 kilog.	495 kilog.
Poids du plateau.....	136 kilog.	92 kg. 6	66 kilog.
Poids du moteur.....	172 kilog.	186 kilog.	332 kilog.
Poids à enlever.....	100 kilog.	100 kilog.	100 kilog.
Surface du plateau.....	34 m <sup>2</sup>	23 m <sup>2</sup> 2	16 m <sup>2</sup> 6

II. — Détermination de la densité transversale du plateau d'après la vitesse de régime.

13. — Ainsi que nous l'avons précédemment indiqué, la densité transversale du plateau ne saurait être logiquement fixée *a priori*. Elle doit être déterminée d'après les conditions de



fatigue imposées à cet organe. Sa surface doit être considérée comme travaillant à la flexion à la manière d'une plaque circulaire encastrée. On est donc conduit à lui attribuer une épaisseur proportionnelle à la racine carrée de l'effort, soit, en l'espèce, proportionnelle à la vitesse de régime. La quantité constante  $d$  employée précédemment doit donc être remplacée par une expression de la forme  $d = d_0 V$ ,  $d_0$  étant une nouvelle constante et  $V$  la vitesse de régime. L'équation fondamentale :

$$P_0 + P_s + \Pi = KSV^2 = Y, \quad (7)$$

s'écrit alors :

$$P_0 + d_0 VS + \pi KSV^3 = KSV^2, \quad (8)$$

et l'on peut à nouveau chercher les conditions de fonctionnement correspondant au minimum soit de puissance du moteur, soit de fatigue ou de surface du plateau.

#### 1° Puissance minimum du moteur.

Posant  $P_0 = KSV^2x$ , il convient,  $P_0$  étant donné, de rendre  $x$  maximum, en substituant dans l'équation (8) et écrivant par suite, toutes réductions faites :

$$\frac{d_0}{K} + (\pi + x) V^2 - V = 0.$$

Ce qui exige que l'on ait :

$$\pi + x \leq \frac{K}{4d_0},$$

soit, dans le cas du maximum, les deux valeurs :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{K}{4d_0} - \pi \\ V &= \frac{2d_0}{K} \end{aligned} \right\} x = \frac{1}{2V} - \pi. \quad (9)$$

Formons alors  $Y = KSV^2$ ,  $F = KSV^3$ ,  $P_s = d_0 SV$ ,  $\Pi = \pi KSV^3$ , on a successivement :

$$Y = \frac{4d_0^2 S}{K} \quad P_s = \frac{2d_0^3 S}{K} \quad \Pi = \frac{8\pi S d_0^3}{K^2} \quad F = \frac{8S d_0^3}{K^2},$$

et comme  $x = P_0 : F$ , il vient, toutes réductions faites dans (9) :

$$F = 2VP_0 : (1 - 2\pi V),$$

et par substitutions successives :

$$S = K^2 F : 8 d_0^3$$

$$\Pi = \pi F$$

$$P_s = \frac{2d_0^2}{K} S = \frac{F}{2V} = \frac{Y}{2} = P_0 + \Pi$$

$$Y = \frac{F}{V} = 2P_s.$$

On a ainsi tous les éléments en fonction des paramètres initiaux et du poids à enlever  $P_0$ .

2° Effort minimum du plateau.

14. — La même méthode, en posant  $P_o = xY$ , donnera l'équation :

$$\frac{d_o}{K} + \pi V^2 = (1 - x) V,$$

et la relation de condition :

$$1 - x = \sqrt{\frac{4d_o\pi}{K}},$$

qui dans le cas de la réalisation du maximum entraîne le système :

$$V = \sqrt{\frac{d_o}{K\pi}}$$

$$x = 1 - 2\pi V.$$

On formera de même progressivement :

$$Y = P_o : x; F = VY; \Pi = \pi F; P_s = Y - P_o - \Pi; S = P_s : d_o V,$$

ce qui donnera les expressions :

$$Y = P_o : 1 - 2\pi V$$

$$F = P_o V : 1 - 2\pi V$$

$$\Pi = P_o \pi V : 1 - 2\pi V$$

$$P_s = \Pi$$

$$S = P_o \pi : (1 - 2\pi V) d_o.$$

3° Surface minimum du plateau.

15. — Ici la marche du calcul est un peu plus délicate. Voici comme il convient de procéder :

Posant  $P_o = Sx$ , substituant et divisant partout par  $S$ , on aura :

$$x = KV^2 - K\pi V^3 - d_o V.$$

On voit que  $x$  est d'abord nul, puis négatif lorsque  $V$  croît pour devenir enfin égal à  $-\infty$ . Pour que l'on ait une solution, il faut donc que la dérivée de  $x$  s'annule. S'il en est ainsi,  $x$  prendra deux valeurs,  $x_1$  minimum et  $x_2$  maximum, correspondant aux vitesses  $v_1$  et  $v_2$ , et il faudra en outre que  $x_2$  soit positif : sinon l'aéronat descendra au lieu de monter.

On prend donc d'abord la dérivée, que l'on égale à zéro, soit :

$$2KV - 3\pi KV^2 - d_o = 0,$$

qui exige la condition de réalité :

$$K^2 - 3Kd_o\pi > 0.$$

Si cette condition est satisfaite, nous pourrions poser :

$$\sin^2 \delta = \frac{3\pi d_o}{K},$$

et l'on aura les racines :

$$v_1 = \frac{1 - \cos \delta}{3\pi}; \quad v_2 = \frac{1 + \cos \delta}{3\pi}.$$

La seconde racine  $v_2$ , la seule qui nous intéresse, nous donnera :

$$x_2 = K v_2^2 - K \pi v_2^3 - d_0 v_2,$$

qui, toutes réductions faites, a pour expression :

$$x_2 = \frac{K v_2}{3\pi} (1 + \cos \delta) (2 \cos \delta - 1).$$

Pour que  $x_2$  soit positif, il faut donc que l'on ait  $\cos \delta \geq \frac{1}{2}$  en même temps que  $\sin^2 \delta = \frac{3\pi d_0}{K}$ , ce qui donne finalement la condition :

$$d_0 < \frac{K}{4\pi}.$$

Si cette condition est satisfaite, on formera comme d'ordinaire la série de valeurs des éléments par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \sin^2 \delta &= 3\pi d_0 : K \\ V &= (1 + \cos \delta) : 3\pi \\ \Pi &= P_0 (1 + \cos \delta) : (2 \cos \delta - 1) \\ P_s &= 3P_0 (1 - \cos \delta) : (2 \cos \delta - 1) \\ S &= 9\pi P_s (1 + \cos \delta) d_0 \\ Y &= 3P_0 : (2 \cos \delta - 1) \\ F &= \frac{P_0}{\pi} \times \frac{1 + \cos \delta}{2 \cos \delta - 1}. \end{aligned}$$

**16.** — Toutes ces formules sont récapitulées dans le tableau suivant où les éléments sont placés dans l'ordre des calculs à faire : le résultat trouvé pour S doit en outre satisfaire à la vérification :  $S = P_s : d_0 V$ .

Si le poids  $P_0$  n'est pas connu *a priori*, on prendra  $P_0 = 1$  et par simple proportion on ramènera les résultats à concorder avec la donnée initiale (puissance, effort, surface, etc.).

VALEUR DES ÉLÉMENTS pour le minimum de :	F PUISSANCE DU MOTEUR	Y EFFORT DU PLATEAU	S SURFACE DU PLATEAU
Angle auxiliaire $\delta$ , . . . . .	»	»	$\sin^2 \delta = 3\pi d_0 : K$
Vitesse de régime V, . . .	$2 d_0 : K$	$\sqrt{d_0 : K\pi}$	$(1 + \cos \delta) : 3\pi$
Effort total vertical Y, . . .	$2 P_0 : 1 - 2\pi V$	$P_0 (1 - 2\pi V)$	$3 P_0 : (2 \cos \delta - 1)$
Puissance du moteur F, . . .	YV	YV	YV
Poids du moteur $\Pi$ , . . . .	$\pi F$	$\pi F$	$\pi F$
Poids du plateau $P_s$ , . . . .	$Y : 2$	$\Pi$	$3 P_0 \frac{1 - \cos \delta}{2 \cos \delta - 1}$
Surface du plateau S, . . . .	$\frac{K^2 F}{8 d_0^3}$	$\pi P_0 : (1 - 2\pi V) d_0$	$\frac{27 P_0 \pi^2}{K (1 + \cos \delta)^2 (2 \cos \delta - 1)}$
Poids mort enlevé, . . . . .	$P_0$	$P_0$	$P_0$

### Application.

On a repris à ce nouveau point de vue le problème, traité au n° [12], de l'enlèvement d'un poids mort de 100 kilog. dans les conditions les plus favorables, en prenant pour  $d_0$  la valeur  $1/3$  qui correspond bien à la valeur  $d = 4$  indiquée pour la vitesse de 12 mètres intermédiaire entre les vitesses de régime déterminées au n° [12].

#### Données du problème.

Poids à enlever.....  $P_0 = 100$  kilog.  
 Poids élémentaire du plateau.....  $d_0 = 1/3$   
 Poids du moteur par cheval utile.....  $75\pi = 3$  kg. 230.

POUR LE MINIMUM DE :	PUISSANCE	EFFORT AU PLATEAU	SURFACE DU PLATEAU
Vitesse de régime .....	5 m. 34	7 m. 90	14 m.
Puissance du moteur....	1.976 kgm. 26 chx 35	2.470 kgm. 33 chx	6.760 kgm. 90 chx
Effort au plateau .....	370 kilog.	312 kilog.	483 kilog.
Poids du plateau.....	185 kilog.	106 kilog.	92 kilog.
Poids du moteur.....	85 kilog.	106 kilog.	292 kilog.
Poids à enlever.....	100 kilog.	100 kilog.	100 kilog.
Surface du plateau.....	104 m <sup>2</sup>	40 m <sup>2</sup> 3	185 m <sup>2</sup>
Poids du plateau au m <sup>2</sup> ..	1,78	2,63	4,666

### III. Plateau dont la densité transversale croît avec la surface.

17. — Nous avons examiné successivement le cas des plateaux à densité transversale (poids par unité de surface) soit constante, soit proportionnelle à l'effort probable exercé.

Il reste à traiter un troisième cas, celui du plateau correspondant à la famille d'hélices recommandée par le colonel Renard, plateau dans lequel cette densité  $d$  est proportionnelle au diamètre générateur, c'est-à-dire à la racine carrée de la surface, ce qui se traduit par la relation :

$$d = d_0 S^{1/2}.$$

(Voir l'Annexe n° 1.)

On verra que ce type de plateau se comporte d'une façon absolument différente des précédents.

L'équation fondamentale est ici, comme toujours :

$$Y = P_0 + \pi f + d_0 S^{3/2} = K^{1/3} S^{1/3} f^{2/3}. \quad (4)$$

Si l'on pose  $f = \frac{1}{\varphi^3}$  on obtient l'équation du troisième degré en  $\varphi$  :

$$(P_0 + d_0 S^{3/2}) \varphi^3 - K^{1/3} S^{1/3} \varphi + \pi = 0,$$

dont la condition de réalité des racines positives est, toutes réductions faites :

$$P_o \leq \frac{4K}{27\pi^3} S - d_o S^{3/2}. \quad (5)$$

Le second membre varie avec les dimensions du plateau; il atteint son maximum lorsque l'on a :

$$S = \left[ \frac{8K}{81\pi^3 d_o} \right]^2$$

et a pour valeur :

$$P_M = \left( \frac{4}{27} \right)^4 \frac{K^3}{\pi^6 d_o^3}.$$

On remarquera que ce maximum  $P_M$  de la valeur  $P_o$  qui peut être enlevée par un plateau de ce type ne dépend pas de la puissance  $f$  du moteur, mais seulement de son poids spécifique  $\pi$ .

Donc, avec un plateau « type Renard », il y a un maximum de poids enlevable, quelque considérable que soit la puissance du moteur employé, ledit maximum variant en sens inverse de la sixième puissance du poids spécifique dudit moteur.

(Par poids spécifique, on entend le poids par cheval-vapeur utile.)

Ce résultat limitatif distingue d'une façon absolue le plateau « type Renard » des plateaux antérieurement étudiés.

Lorsque l'on donne à  $P_o$  une valeur inférieure à  $P_M$ , l'équation donne pour  $\varphi$ , et, par suite, pour la puissance  $f$  du moteur, deux valeurs, que l'on pourra obtenir soit algébriquement, soit par une construction graphique. De cette valeur  $f_1$  ou  $f_2$  ainsi choisie, on déduira la vitesse de régime  $v_1$  ou  $v_2$  par la relation :

$$v = f^{1/3} : K^{1/3} S^{1/3};$$

l'effort supporté

$$Y = f : v;$$

le poids du moteur

$$\Pi = \pi f;$$

et enfin le poids du plateau

$$P_s = Y - P_o - \Pi.$$

Comme vérification, ce poids  $P_s$  devra être trouvé égal au produit  $d_o S^{3/2}$ .

Tous ces éléments,  $f$ ,  $v$ ,  $Y$ ,  $\Pi$ ,  $P_s$  dépendent de la valeur attribuée arbitrairement au plateau  $S$ , valeur astreinte seulement à satisfaire à l'inégalité (5), ce qui exige simplement que  $P_o$  soit inférieur à  $P_M$ . On peut donc, dans ces limites, disposer de  $S$  de manière à satisfaire à quelque autre condition.

**18. — Poids maximum à enlever avec une surface donnée.** — Cherchons ainsi le poids maximum  $P_o$  pour une surface donnée  $S$ .

Dans ce cas, l'inégalité (5) se réduit à une équation entre  $P_o$  et  $S$ . Cette équation étant satisfaite, la valeur de  $\varphi$  est racine double de l'équation (4), ce qui donne, toutes réductions faites :

$$\varphi = \frac{3}{2} \pi : KS^{1/3} \quad \varphi^3 = \frac{27\pi^3}{8KS} \quad f = 8KS : 27\pi^3,$$

et comme  $f = KSV^3$ ,  $V$  étant la vitesse de régime :

$$V^3 = \frac{8}{27\pi^3} \quad V = \frac{2}{3\pi},$$

et, de là, successivement :

$$Y = f : V = \frac{8KS}{27\pi^3} : \frac{2}{3\pi} = \frac{4KS}{9\pi^2}$$

$$\Pi = \pi f = \frac{8KS}{27\pi^2} = \frac{2}{3} Y$$

$$P_s = Y - P_o - \Pi = \frac{4KS}{27\pi^2} - P_o;$$

enfin  $P_o$  et  $S$  sont reliés par la relation :

$$P_o = \frac{4KS}{27\pi^2} - dS^{3/2}.$$

Si l'on donne à  $P_o$  et à  $S$  les valeurs correspondant au maximum et indiquées page 24, les autres éléments prennent les valeurs suivantes :

$$f = \frac{8K^3}{3\pi^7} d_o^2 \quad V = \frac{2}{3\pi}$$

$$Y = 4 \frac{8K^3}{2} : \frac{3\pi^6}{d_o^2} \quad \Pi = \pi f$$

$$P_s = \frac{Y}{3} - P_M.$$

Si l'on met partout le terme  $P_M$  en évidence, le système devient :

$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{2}{3} : \pi \\ f_M = 6P_M : \pi \\ \Pi_M = 6P_M \\ Y_M = 9P_M \\ P_s = 2P_M \\ S_M = \frac{81\pi^2}{4} P_M \end{array} \right\} P_M = \left(\frac{4}{27}\right)^4 K^3 : \pi^6 d_o^2.$$

Ainsi, avec ce type de plateau, lors même que l'on disposerait d'une puissance  $F$  supérieure à  $f_M$ , on ne pourrait enlever un poids supérieur à  $P_M$ .

Cela nous conduit à examiner la question de l'association des plateaux, autrement dit à résoudre le problème suivant.

**19. — Association des plateaux.** — Étant donnée une puissance de moteur  $F$ , trouver le nombre  $n$  de plateaux le plus avantageux à faire actionner par ce moteur.

Si  $n$  est le nombre de plateaux, chaque plateau est soumis à une puissance  $f = \frac{F}{n}$ , et si  $\sigma$  est la surface de chaque plateau, chacun d'eux soulève un poids  $p_o$  donné par :

$$p_o = \frac{K}{\sigma^{1/3}} f^{2/3} - \pi f - d\sigma,$$

et par suite l'ensemble du système enlèvera le poids  $P_o$  donné par :

$$P_o = n \frac{K}{\sigma^{1/3}} f^{2/3} - \pi n f - dn\sigma,$$

ou, remplaçant  $\sigma$  par  $S : n$ ,  $f$  par  $F : n$  :

$$P_o = \overline{KS}^{1/3} F^{2/3} - \pi F - dS.$$

Si  $d$  est indépendant de  $S$ , comme dans les deux cas précédemment traités, on voit que  $P_o$  reste constant pour une surface donnée totale  $S$ , sous la seule condition de négliger la perte d'énergie due à la multiplicité des transmissions.

Mais si  $d$  varie avec  $\sigma$ , ce qui est le cas du plateau type Renard, la question prend une autre tournure. On a en effet :

$$P_o = K \frac{1/3-1/3}{n\sigma} F^{2/3} - \Pi - nd_o\sigma^{3/2} = Y - \Pi - P_s,$$

et pour tirer le meilleur parti de la puissance  $F$ , nous disposons de  $n$  et de  $\sigma$ .

Remplaçons pour un moment l'exposant  $\frac{3}{2}$  par  $\alpha$  pour laisser à la question toute sa généralité, et cherchons le maximum de  $P_o$ . On aura :

$$\frac{dP_o}{dn} = \frac{1}{3n} [K^{1/3-1/3} F^{2/3} - 3nd_o\sigma^\alpha] = 0 \quad \text{ou} \quad Y - 3P_s = 0 \quad (n)$$

$$\frac{dP_o}{d\sigma} = \frac{1}{3\sigma} [K^{1/3-1/3} F^{2/3} - 3\alpha nd_o\sigma^\alpha] = 0 \quad \text{ou} \quad Y - 3\alpha P_s = 0. \quad (\sigma)$$

Si  $\alpha$  est égal à l'unité, c'est-à-dire si  $d$  est indépendant de  $S$ , les deux équations sont compatibles et reviennent à la condition  $Y = 3dS$  précédemment formulée. Si  $\alpha$  diffère de l'unité, les deux équations sont incompatibles.

On peut, dans ce cas, se donner soit la surface totale  $S$ , soit le nombre  $n$  de plateaux, soit la surface  $\sigma$ , c'est-à-dire le type de plateau.

Examinons successivement ces trois cas, pour  $\alpha = \frac{3}{2}$  :

1° Si l'on se donne  $S = n\sigma$ , on aura de suite :

$$P_o = \overline{KS}^{1/3} F^{2/3} - \Pi - \frac{1}{\sqrt{n}} d_o S^{3/2}.$$

Le rendement sera d'autant plus élevé que le nombre de plateaux sera plus considérable, mais croîtra lentement.

2° Si l'on se donne le nombre  $n$  de plateaux, l'équation  $(\sigma)$  donnera :

$$P_s = np_s = Y : 3\alpha \quad \text{ou} \quad np_s = (P_o + \Pi + np_s) : \frac{9}{2};$$

d'où le poids de chaque plateau :

$$p_s = \frac{2}{7} \frac{P_o + \Pi}{n}.$$

3° Si on se donne au contraire la surface du plateau, l'équation  $(n)$  donnera :

$$P_s = \frac{Y}{3} = \frac{P_o + \Pi + P_s}{3}$$

ou :

$$np_s = \frac{1}{2} (P_o + \Pi)$$

$$n = \frac{1}{2} (P_o + \Pi) : p_s.$$

Quelle que soit la combinaison adoptée, il faut toujours que le plateau présente une résistance suffisante, ce qui est en somme la signification mécanique de l'équation (4), c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{P_o}{n} = p_o \leq \frac{4K}{27\pi^2} \sigma - d_o \sigma^{3/2}.$$

Le premier cas, à surface totale constante, ne présente pas d'intérêt : le nombre de plateaux n'a d'influence que sur le dernier terme qu'il fait décroître lentement, ce qui ne compense certes pas l'inconvénient de la multiplicité des transmissions.

Dans le deuxième cas, où l'on se donne le nombre  $n$  de plateaux, l'équation de condition ( $\sigma$ ), sous sa première forme, donne la valeur de  $\sigma$  :

$$\sigma = \left( \frac{2K^{1/3}}{9d_o} \right)^{6/7} \left( \frac{F}{n} \right)^{3/7}; \quad (\sigma')$$

d'où :

$$p_s = d_o \sigma^{3/2} = K^{3/7} d_o \left( \frac{2}{9d_o} \right)^{9/7} \left( \frac{F}{n} \right)^{6/7},$$

et enfin :

$$P_o + \Pi = \frac{7n}{2} p_s = \frac{7}{2} K^{3/7} d_o \left( \frac{2}{9d_o} \right)^{9/7} n^{1/7} F^{6/7}. \quad (\sigma'')$$

Ainsi, dans ce cas, le poids enlevé (moteur et poids mort) est proportionnel à la puissance  $\frac{1}{7}$  du nombre de plateaux, et ce, à la condition de déterminer la surface  $\sigma$  par l'équation ( $\sigma'$ ) afin d'avoir le rendement maximum.

Enfin, si l'on se donne la surface  $\sigma$ , on peut déterminer  $n$  par l'équation ( $n$ ) qui donne :

$$n = \left( \frac{K^{1/3}}{3d_o} \right)^{3/2} F \sigma^{-7/4}$$

et à cette condition, le poids  $P_1 = P_o + \Pi$  aura pour valeur :

$$P_1 = P_o + \Pi = 2K^{1/2} F : 3^{3/2} d_o^{1/2} \sigma^{1/4},$$

il sera d'autant plus élevé que l'on aura fait choix de plateaux plus petits

### Applications.

**20.** — Toutes ces considérations ont besoin d'être rendues tangibles par des exemples numériques. C'est ce que nous allons faire en donnant aux constantes des valeurs correspondant sensiblement aux chiffres attribués par le colonel Renard à ses hélices couplées, dont le plateau que l'on vient d'étudier n'est que la représentation schématique. On a dans ce cas  $d_o = 1$ , et, si  $F$  est exprimé en chevaux,  $K = 8,85$  : nous prendrons  $K = 9$  ou 729, ce qui a l'avantage de simplifier beaucoup les calculs.



Soit donc à traiter les questions suivantes :

1° Étudier les conditions de fonctionnement d'un moteur de 64 chevaux, pesant 3 kilog. par cheval utile. L'équation, dans le cas d'un plateau unique, sera :

$$(P_1 = P_0 + 64 \times 3) + \sigma^{3/2} = 9\sigma^{1/3} \times 16 = 144 \sigma^{1/3},$$

$$P_1 = 144 \sigma^{1/3} - \sigma^{3/2}.$$

On forme ainsi le tableau suivant :

$\sigma =$	1	4	9	16	19,5	25
$P_1 =$	143	221	272	300	302	296
$P_0 =$	-49	+29	80	108	110	104
					maximum	

2° Avec un moteur de 512 chevaux pesant 1.536 kilog., on eût trouvé de même :

$$(P_1 = P_0 + 1.536^K) + \sigma^{3/2} = 144 \sigma^{1/3} \times 8 = 1.152 \sigma^{1/3}$$

et formé le tableau :

$\sigma =$	64 m <sup>2</sup>	81	100	113	121 m <sup>2</sup>
$P_1 =$	4.097 kg.	4.236	4.346	4.371	4.369
$P_0 =$	2.561 kg.	2.700	2.810	2.835	2.833
				maximum	

3° Avec un moteur plus lourd, de 640 chevaux par exemple, pesant 1.920 kilog., on eût eu un moindre maximum, comme l'indiquent les formules et comme le vérifie le tableau suivant :

$\sigma$	49 m <sup>2</sup>	64	72,7	81	126	144
$P_1$	2.102 kg.	2.164	2.249	2.171	2.094	1.776
$P_0$	182	244	329	251	74	-144 impossible
			maximum			

En se reportant au premier tableau, on voit immédiatement que si l'on eût attelé le moteur de 640 chevaux sur 10 plateaux à 64 chevaux, le poids  $P_0$  se fût élevé à 1.100 kilog., et effectivement, si l'on se donne  $n=10$ , la formule ( $\sigma''$ ) de la page 27 redonne une valeur de  $P_1$  égale à 3.014 kilog., d'où 1.094 kilog. pour  $P_0$ , tandis que l'équation ( $\sigma'$ ) redonne  $\sigma = 19 \text{ m}^2$  5.

**21.** — Mais si, au contraire, on part des équations de condition dérivées de l'équation ( $n$ ), on obtient des résultats tout différents, et pour une même valeur de  $n$  ces résultats sont plus faibles. Le fait était à prévoir analytiquement par suite de l'incompatibilité des deux équations dérivées.

Reprenons en effet la question, en laissant en place l'exposant  $\alpha$ , pour plus de généralité.

En traitant d'abord la question par l'équation ( $n$ ), où l'on suppose fixe la surface  $\sigma$ , on trouve :

$$\sigma^{\alpha - \frac{1}{3}} = \frac{K^{1/3}}{3d_0} \left( \frac{F}{n} \right)^{2/3}$$

et comme  $Y = P_1 + P_s = 3P_s$  ou  $P_1 = 2P_s$

et que  $P_s = nd_0\sigma^\alpha$ ,

on trouve immédiatement, en substituant à  $\sigma$  sa valeur :

$$P_{1,n} = 2 d_0 \left( \frac{K^{1/3}}{3d_0} \right)^{\frac{2\alpha}{3\alpha-1}} n^{\frac{\alpha-1}{3\alpha-1}} F^{\frac{2\alpha}{3\alpha-1}}.$$

Si l'on partait au contraire de l'équation ( $\sigma$ ), on aurait d'abord :

$$\sigma^{\alpha-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\alpha} \frac{K^{1/3}}{3d_0} \left( \frac{F}{n} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

et comme l'on a dans ce cas  $Y = 3\alpha P_s$  ou  $P_1 = (3\alpha - 1) P_s$ , on trouvera de même par substitution :

$$P_{1,\sigma} = (3\alpha - 1) \frac{1-\frac{1}{3\alpha}}{\alpha} d_0 \left( \frac{K^{1/3}}{3d_0} \right)^{\frac{3\alpha}{3\alpha-1}} n^{\frac{\alpha-1}{3\alpha-1}} F^{\frac{2\alpha}{3\alpha-1}}.$$

et l'on a bien :

$$\frac{P_{1,\sigma}}{P_{1,n}} = \frac{3\alpha - 1}{2\alpha} \alpha^{\frac{1}{3\alpha}},$$

valeur supérieure à l'unité dès que l'on a  $\alpha > 1$ , comme il était annoncé.

Ainsi l'hypothèse de plateaux à densité transversale croissant avec la surface conduit à des singularités.

Il semble donc que la même hypothèse, appliquée à des organes dont lesdits plateaux sont la représentation schématique, ne puisse pas être admise d'une façon absolue. Sans doute les nécessités de la construction ont pu conduire à des renforcements locaux, à raison surtout des efforts centrifuges, mais on peut espérer que ces renforcements ne devront pas croître dans la même proportion, au delà de certaines limites.

Cette analyse montre également que la multiplication des plateaux, qui se traduit par un terme  $n^{\frac{\alpha-1}{3\alpha-1}}$ , n'a pas de valeur si  $\alpha = 1$  et par suite est alors à éviter comme étant une source de complications.

Elle montre enfin qu'à partir des limites où l'on pourra admettre  $\alpha = 1$ , les formules établies dans cette hypothèse étant applicables, les poids enlevés croîtront comme la puissance du moteur, sans limitation due au poids spécifique de ce dernier.

### Conclusion.

**22.** — Il résulte pour nous de cette discussion :

1° Que, pour de faibles surfaces de plateau, on peut faire usage des formules relatives au plateau à densité transversale croissante (type Renard), les seules, croyons-nous, dérivant d'essais méthodiques (Annexe n° 2);

2° Mais que, pour de fortes surfaces, on devra adopter les types de formules à densité constante ou même proportionnelle à la racine carrée de l'effort; lesdites formules permettent de compter sur des rendements plus avantageux que ceux signalés par la communication du colonel Renard (Annexe n° 1);

3° Que la multiplication des plateaux n'est qu'une source de déperditions et de complications, et que l'on ne doit y recourir que dans des cas exceptionnels.

# ANNEXE N° 1

*Note de M. le colonel Renard, sur la possibilité de soutenir un hélicoptère en employant les moteurs à explosion dans leur état actuel de légèreté.*

La sustentation permanente d'un appareil plus lourd que l'air au moyen des hélices et des moteurs thermiques, pratiquement impossible avec des moteurs pesant 10 kilog. par cheval, commence à être réalisable avec les moteurs actuels dont le poids est descendu à 5 kilog. par cheval et même à un chiffre inférieur. Elle deviendra très facile avec des moteurs pesant 2 kg. 500 par cheval, réalisables aujourd'hui.

Mais il faut pour cela employer des hélices d'un poids très réduit. Nous avons exécuté, à l'établissement de Chalais, au moyen d'une machine spéciale, de nombreuses expériences sur les hélices sustentatrices et nous avons trouvé un type d'hélice qui permettra, quand on le voudra, d'enlever un appareil de 5 chevaux avec un excédent de force ascensionnelle de 8 kilog. à 10 kilog.

Les propriétés de ces hélices sont résumées dans les formules suivantes :

Soient  $x$  le diamètre de l'hélice en mètres,  $n$  la vitesse angulaire en tours par seconde,  $A$  la poussée verticale en kilog.,  $T$  la puissance dépensée sur l'hélice en kilogrammètres.

On a :

$$A = 0,026 \quad n^2 x^4, \quad (1)$$

$$T = 0,01521 \quad n^3 x^5. \quad (2)$$

Le poids d'une hélice de 1 mètre de diamètre de ce type est de 0 kg. 500 et l'on est conduit pour des raisons d'ordre pratique (rigidité, etc.) à les faire toutes géométriquement semblables, de sorte que si  $p$  est le poids d'une hélice de diamètre  $x$  : on a

$$p = 0,5 \quad x^3 \text{ (en kilogrammes)}. \quad (3)$$

Enfin l'effort qu'elles peuvent exercer sans danger de rupture est de 10 kilog. pour l'hélice de 1 mètre et il varie comme le carré du diamètre, de sorte que cet effort limite est donné par la relation :

$$B = 10 \quad x^2. \quad (4)$$

Des formules (1) et (2), on déduit facilement, en éliminant  $n$ , l'équation suivante qui donne la poussée  $H$  d'un système à deux hélices en fonction du diamètre  $x$  de ces hélices et de la puissance dépensée en chevaux  $y$  :

$$H = 8,85 \quad x^{2/3} y^{2/3}, \quad (5)$$

(on a supposé dans cette formule que le rendement du mécanisme de transmission était égal à 0,9).

Pour que l'appareil s'élève, il faut que la poussée  $H$  soit plus grande que les poids réunis du moteur et des deux hélices.

Soient  $\pi_1$ , le poids spécifique du moteur (poids par cheval),  $\pi_2$  le poids spécifique des hélices (poids de l'hélice de 1 mètre de diamètre) et  $Z$  le poids utile que l'appareil pourra soutenir en l'air.

On a évidemment :

$$Z = 8,85 \quad x^{2/3} y^{2/3} - 2\pi_2 x^3 - \pi_1 y. \quad (6)$$

Il est facile de démontrer avec cette formule qu'on peut enlever actuellement un hélicoptère de 5 chevaux par exemple, avec un poids utile de 8 kg. 4, suffisant pour le bâti, les transmissions et l'approvisionnement de combustible pour une heure.

On peut donc, dès à présent, réaliser avec nos hélices et les moteurs ordinaires d'automobiles, l'intéressante expérience du soulèvement prolongé d'un hélicoptère. Cette expérience fondamentale aura une grande importance, mais on ne pourra l'étendre au delà des poids utiles de 8 kilog. à 10 kilog. qu'au prix d'un nouvel et important allègement des moteurs.

La fonction  $Z$  (poids utile) peut en effet s'écrire, dans le cas général où on laisse aux poids spécifiques  $\pi_1$  et  $\pi_2$  du moteur et de l'hélice leur généralité,

$$Z = ax^{2/3} y^{2/3} - 2\pi_2 x^3 - \pi_1 y. \quad (7)$$

Si  $a$ ,  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont considérés comme des données expérimentales,  $Z$  apparaît ici comme une fonction des deux variables  $x$  et  $y$  (diamètre des hélices et puissance du moteur). Une analyse facile démontre

que, pour les valeurs positives de  $x$  et de  $y$ , le poids utile  $Z$  a un maximum unique toujours positif donné par l'équation :

$$Z_m = \frac{4}{81^2} \frac{a^9}{\pi_1^6 \pi_2^3} = 0,00012043 \frac{a^9}{\pi_1^6 \pi_2^3}. \quad (8)$$

Le maximum du poids utile soulevé est donc proportionnel à la neuvième puissance du coefficient  $a$  qui ne dépend que de la perfection du type d'hélice et sur lequel on ne peut guère espérer d'amélioration ; il est inversement proportionnel au carré du poids spécifique des hélices et à la sixième puissance du poids spécifique du moteur.

On ne peut pas beaucoup gagner sur le poids des hélices, mais il n'est pas de limite qu'on puisse assigner à l'allègement des moteurs et de ce côté on peut espérer une rapide augmentation du poids utile maximum  $Z_m$  des hélicoptères.

L'équation (8) donne, pour le cas où nous nous sommes placé plus haut, c'est-à-dire pour  $a = 8,85$ ,  $\pi_1 = 5$ ,  $\pi_2 = 0,5$  :

$$Z_m = 10 \text{ kg. } 3.$$

Si l'on donne au poids spécifique (poids par cheval) du moteur des valeurs variant de 10 à 1, on obtient pour  $Z$  les coefficients suivants :

Valeur de poids par cheval.	10 kg.	9 kg.	8 kg.	7 kg.	6 kg.	5 kg.	4 kg.	3 kg.	2 kg.	1 kg.
Valeur de $Z_m$ (maximum du poids utile).....	0 kg. 160	0,302	0,616	1,36	3,44	10,3	39,2	220	2.506	160.000

Ce tableau fait bien ressortir l'énorme influence du poids spécifique du moteur. Avec des moteurs de 1 kilog. par cheval, on pourrait soulever 160.000 kilog. Ce poids utile tombera à 220 kilog. pour des moteurs de 3 kilog. par cheval, 10 kilog. pour les moteurs de 5 kilog. et enfin à 160 grammes pour des moteurs de 10 kilog. <sup>1</sup>.

L'importance de ces données numériques en ce qui concerne l'avenir de l'aviation nous paraît très grande et c'est pourquoi nous avons cru devoir les faire connaître immédiatement.

## ANNEXE N° 2

2<sup>e</sup> note de M. le Colonel Renard.

Sur la qualité des hélices sustentatrices.

Nous avons étudié plus haut l'influence du poids spécifique  $\pi_1$  du moteur, nous nous occuperons aujourd'hui de celle du coefficient  $K$  qui dépend de la perfection de l'hélice employée.

Cette perfection de l'hélice ou plutôt d'une famille d'hélices géométriquement semblables peut être mesurée par un chiffre unique auquel nous proposons de donner le nom de *qualité de l'hélice sustentatrice*.

La notion de cette *qualité* résulte des considérations suivantes que nous donnons sous forme de théorèmes :

**Théorème I.** — Dans un appareil sustentateur quelconque utilisant la résistance de l'air, le rapport  $\frac{A^3}{T^3}$  du cube de poids soutenu (poussée) au carré du travail dépensé par seconde est un nombre constant.

Cela résulte immédiatement de la proportionnalité des résistances au carré des vitesses. — Le rapport  $\frac{A^3}{T^2} = \omega$  est la *puissance* de sustentation.

**Théorème II.** — Dans un sustentateur orthogonal simple constitué par un plan mince de surface  $S'$  s'abaissant verticalement, la *puissance*  $\omega$  est égale au produit  $S'$  du coefficient de la résistance de l'air par la surface.

Ici les équations de la poussée  $A$  et du travail  $T$  sont :

$$A = KS^2V^2 \quad T = KS'V^3,$$

d'où en éliminant la vitesse verticale  $V$  :

$$\frac{A^3}{T^2} = \omega = KS' \quad \text{C. Q. F. D.}$$

1. NOTA. — Pour les poids  $\pi_1$  inférieurs à 4 kilog., l'auteur de la note ne tient pas compte de la condition (4).

**Théorème III.** — Un sustentateur quelconque est équivalent (au point de vue de la relation qui existe entre la poussée et le travail par seconde) à un sustentateur plan à mouvement orthogonal d'une certaine surface.

C'est une conséquence immédiate des théorèmes I et II. Si  $S'$  est cette surface du plan orthogonal équivalent, sa puissance sera  $KS'$  tandis que celle du sustentateur est  $\omega$ , on aura donc pour qu'il y ait équivalence :

$$KS' = \omega \quad \text{d'où} \quad S' = \frac{\omega}{K} \text{ donc :}$$

**Théorème IV.** — Un sustentateur quelconque est équivalent à un plan orthogonal d'une surface  $S'$  égale au quotient de sa puissance par le coefficient de la résistance de l'air.

La surface  $S'$  est la surface équivalente du sustentateur considéré.

**Théorème V.** — Dans une famille d'hélices semblables la puissance est proportionnelle au carré du diamètre.

Cela résulte de l'examen des formules  $A = \alpha_0 n^2 x^4$  et  $T = \gamma_0 n^3 x^5$  qui donnent la poussée et le travail par seconde ; les coefficients  $\alpha_0$  et  $\gamma_0$  étant les mêmes pour toutes les hélices semblables.

**Corollaire.** — Dans une famille d'hélices semblables, la puissance est proportionnelle à la surface du cercle décrit par l'extrémité des ailes ou surface d'appui  $S$  de l'hélice, donc :

**Théorème VI.** — Dans une famille d'hélices semblables, la surface équivalente  $S'$  est proportionnelle à la surface d'appui  $S$ .

En d'autres termes, le rapport  $\frac{S'}{S}$  de la surface équivalente à la surface d'appui est un nombre constant.

C'est ce nombre constant  $\frac{S'}{S} = Q$  que nous proposons d'appeler la qualité de l'hélice sustentatrice.

Sa signification est très claire : une hélice de qualité 2 par exemple est équivalente au plan mince orthogonal d'une surface double de sa surface d'appui  $\frac{\pi x^2}{4}$ . La qualité est indépendante de la grandeur de l'hélice, elle ne dépend que de sa forme. Elle est indépendante de la densité de l'air.

Au point de vue de la forme, le nombre d'ailes, la fraction de pas totale et le tracé du contour des ailes ont bien une certaine influence sur la qualité, mais celle-ci dépend plutôt du rapport  $j$  du pas  $G$  au diamètre  $x$  ( $j$  est le pas relatif).

En prenant  $K = 0,085$ , le tableau suivant donne les valeurs de  $Q$  mesurées à Chalais pour une série de 6 hélices de 1 mètre de diamètre ne différant entre elles que par le pas relatif.

N° des hélices.....	1	2	3	4	5	6
Pas des hélices.....	0 m. 25	0 m. 50	0 m. 75	1 m. 00	1 m. 25	1 m. 50
Qualité $Q$ .....	0,48	1,01	1,14	0,76	0,52	0,38

Le maximum de  $Q$  correspond à l'hélice n° 3 dont le pas est les  $3/4$  du diamètre,  $Q$  descend très rapidement de part et d'autre de ce sommet.

Nouvelle forme de l'équation en  $Zm$ . — L'équation (1) en  $Zm$  devient facilement en  $y$  introduisant  $Q$  (lequel est proportionnel à  $K^3$ ) :

$$Zm = \frac{27.100 Q^3}{\pi_1^6 \pi_2^2} \quad (2)$$

Le poids utile maximum augmente donc comme le cube de la qualité.

Il y a donc le plus grand intérêt à améliorer la qualité mais on ne peut le faire indéfiniment. On peut démontrer en effet que  $Q$  est proportionnel au carré du rendement  $\rho$  de l'hélice considérée comme un ventilateur et que le coefficient de proportionnalité est très voisin de 6.

On a donc  $Q = 6\rho^2$  et comme  $\rho$  ne peut pas être supérieur à l'unité,  $Q$  a une limite supérieure égale à 6. En passant de notre qualité optima 1,14 à cette limite supérieure de 6, on multiplierait le poids utile maximum par 200 environ et on passerait de 10 kilog. à 2 tonnes pour les moteurs de 5 kilog. par cheval. Sans aller si loin, on voit qu'il reste beaucoup à gagner sur la valeur de  $Q$ , nous croyons qu'on peut attendre beaucoup de l'emploi pour les ailes, de profils courbes analogues à ceux dont les avantages ont été mis en évidence par nombre d'aviateurs pour les aéroplanes et notamment par le regretté *Lilienthal*.

Nous serions heureux que cette note ait pour résultat de susciter de nouvelles expériences sur les hélices sustentatrices qui sont loin d'avoir dit leur dernier mot.

## CHAPITRE IV

### ÉTUDE DE L'HÉLICOPTÈRE

#### I. — Généralités.

**23.** — Après avoir examiné le cas théorique où la puissance de sustentation serait demandée au mouvement d'un plateau lancé dans l'atmosphère, il convient de se rapprocher davantage des conditions de la pratique, en demandant cette puissance au mouvement d'une série de palettes, en nombre pair et diamétralement opposées, tournant autour d'un axe vertical sous une inclinaison choisie convenablement d'après les indications de l'expérience.

Considérons d'abord une palette ABA'B' tournant autour d'un axe Oy et éprouvant en chaque point une résistance proportionnelle à sa surface élémentaire  $dxdy$  et au carré de sa vitesse  $v = \omega x$ . L'effort élémentaire  $dR$  aura pour expression, K étant le coefficient de résistance :

$$dR = K\omega^2 x^2 dxdy,$$

et l'effort total R sera donné par :

$$R = K\omega^2 \int_a^b x^2 dx \int_{-h}^{+h} dy.$$

Si  $2h$  est la hauteur de la palette, on voit facilement que R a pour valeur :

$$R = \frac{2}{3} K h \omega^2 (b^3 - a^3).$$

Si l'on veut avoir la position du point d'application D de la résultante, on aura évidemment  $Y = 0$ , et, en prenant les moments par rapport à Oy :

$$RX = K\omega^2 \int_{-h}^{+h} dy \int_a^b x^3 dx = \frac{1}{2} K h \omega^2 (b^4 - a^4)$$

d'où :

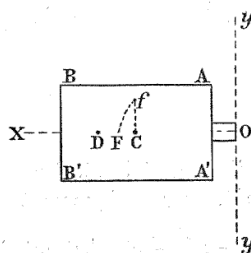
$$X = \frac{3}{4} \frac{b^4 - a^4}{b^3 - a^3} = \frac{3}{2} \frac{(b+a)(b^2 + a^2)}{b^2 + ab + a^2}.$$

D'après cette expression, le point D se trouve au delà du centre de figure C, en venant de l'axe, et à une distance DC ayant pour expression :

$$DC = \frac{(b+a)(b-a)^3}{4(b^3 - a^3)} = \frac{(b+a)(b-a)^2}{4(b^2 + ab + a^2)}.$$

Dans le cas particulier où le côté AA' coïncide avec l'axe de rotation Oy, on aura  $a = 0$ , ce qui entraîne :

$$X = \frac{3}{4} b \quad \text{et} \quad DC = \frac{b}{4} \quad R = \frac{2}{3} K h \omega^2 b^3.$$



Si à la palette AA'BB' est associée une palette symétrique, rien ne sera naturellement changé à la position du point d'application ni aux efforts exercés sur chaque surface.

Il peut y avoir intérêt à mettre en évidence la surface de la palette; on écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} R &= K + 2h(b-a)\omega^2 \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \\ &= K\omega^2 \frac{b^2 + ab + a^2}{3}, \end{aligned}$$

et l'on voit que tout se passe comme si la palette possédait un mouvement rectiligne animé de la vitesse d'un point F ayant pour abscisse FO = f :

$$FO = \sqrt{\frac{b^2 + ab + a^2}{3}},$$

et il est aisé de vérifier que le point F est compris entre le point D et le point C : on peut l'obtenir graphiquement en portant sur la verticale du point C une longueur Cf égale à  $(b-a)\frac{\sqrt{3}}{6}$  et rabattant Of en OF. Le point F sert ainsi à évaluer la loi de la résistance subie par la palette, résistance dont la résultante passe par le point D.

Pour les discussions expérimentales, il est préférable de mettre en évidence la position du centre C de la palette et les dimensions de cette dernière; on a déjà introduit la surface, il reste à introduire la longueur AB = 2l. On aura donc, en posant oc = 2c :

$$b + a = 2c \quad b - a = 2l \quad b = c + l \quad a = c - l.$$

La longueur DC devient :

$$2c \frac{l^2}{3c^2 + l^2} \quad \text{et} \quad FC = c \sqrt{1 + \frac{l^2}{3c^2}}.$$

On voit que pour pouvoir sans erreur notable prendre pour vitesse du système la vitesse du centre de figure C ainsi qu'on le fait d'habitude, il faut que  $\frac{l^2}{3c^2}$  soit très petit.

Supposant cette condition réalisée, il convient de remarquer encore que lors du mouvement d'une palette dans l'atmosphère, le phénomène est loin de présenter la simplicité supposée exister dans l'analyse précédente. Il y a lieu de tenir compte de l'inertie des molécules gazeuses, ce qui correspond à un certain frottement. Il y a lieu de remarquer également que, si, d'une part, la force centrifuge tend à rejeter le courant vers la gauche de la figure, il y a par contre une diminution de pression vers la droite, puisque la vitesse de circulation va en décroissant dans ce sens. Il est bien difficile d'introduire ces deux causes modificatrices dans l'analyse; il semble seulement possible d'admettre qu'elles sont numériquement comprises dans l'inertie du système, en procédant comme il suit :

Soit I le moment total d'inertie de l'appareil autour de l'axe Oy, ρ la distance DC du point d'application à l'axe : l'effort qui produit la rotation des palettes en dépit des résistances ambiantes et des résistances passives peut être supposé appliqué de même au point D, puisqu'il ne s'agit que de rotation autour de l'axe, l'expression de son moment sera Eρ. Les résistances seront en premier lieu la résistance R du milieu au mouvement des palettes dont le moment sera Rρ, et la résistance de ce même milieu au mouvement

des autres organes, résistance dans laquelle nous devons supposer comprises les actions perturbatrices signalées plus haut et que nous ne saurions évaluer directement : cette résistance peut, de même que la force motrice, être transportée au point D et mise sous une forme  $KH\rho^3\omega^2$ , de telle sorte que l'équation du mouvement sera :

$$I \frac{d\omega}{dt} + R\rho + KH\rho^3\omega^2 - E\rho = 0.$$

A vrai dire, le moment d'inertie I devrait être augmenté d'une certaine quantité  $\Delta I$  correspondant à l'inertie des molécules gazeuses, mais comme dans le régime permanent  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ , on peut éviter cette rectification et écrire simplement :

$$R\rho + KH\rho^3\omega^2 - E\rho = 0.$$

D'autre part, nous avons admis :

$$R = KS\omega^2f^2,$$

de telle sorte que l'équation finale sera :

$$K(S\omega^2f^2 + H\rho^2\omega^2) - E = 0.$$

Dans la discussion relative au mouvement rectiligne, on a signalé que l'on devait envisager non la surface S de la palette, mais la section A du courant gazeux. De même ici la quantité d'air brassée par la palette est au moins  $\pi b^2h$ ; ce n'est donc que sous réserves que le facteur K déduit de la relation qui précède pourra être appliqué dans les études de mouvement rectiligne.

Le facteur H n'est pas encore connu non plus, et rien ne permet d'affirmer en toute sécurité qu'il soit indépendant de la vitesse  $\omega$ .

Toutes ces difficultés montrent que l'emploi de palettes tournantes pour l'estimation de la résistance de l'air au mouvement rectiligne peut malaisément conduire à des résultats exacts, ce qui explique le désaccord des chiffres trouvés par les expérimentateurs et les difficultés d'interprétation; il convient toutefois de noter que les chiffres se groupent en deux séries autour de 0,085 et de 0,125; c'est pour ce motif que les applications numériques semblent devoir être faites avec l'une comme avec l'autre de ces valeurs. Nous nous en tiendrons pour le moment à cette indication et à ces réserves.

Lorsque les palettes tournantes, au lieu d'être dans un plan vertical, ont reçu une certaine inclinaison  $\alpha$ , le phénomène, abstraction faite des effets centrifuges, est analogue aux faits étudiés au début de ce travail, et on peut appliquer aux masses gazeuses actionnées par ces palettes nos raisonnements antérieurs; dans chaque tranche cylindrique autour de l'axe de rotation se produisent les courants Q' et Q'', compensés dans cette tranche comme il a été indiqué. Comme l'inclinaison  $\alpha$  est la même en tous les points du plan, les observations faites sur la position du point d'application par rapport à l'axe subsistent intégralement; d'autre part, la comparaison des valeurs de Q et Q'' montre qu'il doit se trouver au-dessus du plan moyen. Mais en ce qui concerne l'étude immédiate en cours, il y a lieu de remarquer que la position du point d'application n'intéresse que la résistance des éléments constitutifs de la palette, et que, pour le



travail produit et utilisé, on peut supposer l'effort transporté au centre de poussée, de même que les efforts résistants, tant ceux réels que ceux représentatifs des actions centrifuges.

Nous prendrons donc comme formule pour l'estimation des composantes verticales et circulaires celles que nous avons déduites des théories de Rankine. En y faisant  $\lambda = 1$ , nous retompons sur les formules énoncées par Lössel à la suite des essais déjà rappelés, c'est-à-dire pour la composante verticale :

$$KSv^3f(\alpha) \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{ou} \quad K\omega^3\rho^3f(\alpha) \sin \alpha \cos \alpha,$$

et pour la composante tangentielle :

$$KSv^3f(\alpha) \sin^2 \alpha \quad \text{ou} \quad K\omega^3\rho^3f(\alpha) \sin^2 \alpha.$$

Si l'on fait en première approximation  $f(\alpha) = 1$ , on obtient les expressions simples traitées par Jarolimek et que nous allons étudier directement.

## II. — Régime de planement d'un hélicoptère à deux palettes.

**24.** — D'après les raisonnements et les conventions qui précèdent, relativement au transport de toutes les forces au centre de poussée de chaque palette, l'équation du mouvement de rotation du système moteur, sous sa forme la plus générale, devra s'écrire :

$$I \frac{d\omega}{dt} = E\rho - K\omega^3\rho^3f(\alpha) (1 - \lambda \cos^2 \alpha) - KH\rho^3\omega^3 \sin \alpha$$

où  $E\rho$  représente le moment de l'action effective du moteur et où  $H$ , terme représentatif des résistances passives et centrifuges, est une fonction inconnue de  $\alpha$ .

L'équation du mouvement vertical dans le sens de la chute sera de même :

$$Y = \frac{P}{g} \frac{d^2y}{dt^2} = K\omega^3\rho^3f(\alpha) \lambda \sin \alpha \cos \alpha - HK\omega^3\rho^3 \cos \alpha,$$

et lorsque le régime sera établi, la valeur de  $\frac{d\omega}{dt}$  sera nulle.

Enfin la puissance effective du moteur, transportée à l'arbre, aura pour expression :

$$F = E\rho\omega.$$

Les trois équations du système de planement, une fois le régime établi, seront donc :

$$F = E\rho\omega$$

$$E = K\rho^3\omega^3 [Sf(\alpha) (1 - \lambda \cos^2 \alpha) + H \sin \alpha]$$

$$Y = K\rho^3\omega^3 [Sf(\alpha) \lambda \sin \alpha - H] \cos \alpha.$$

Si nous admettons la simplification  $\lambda = 1$ , ce qui représente la loi généralement admise, et si l'on pose pour abréger l'écriture :

$$H = Sf(\alpha) \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \beta,$$

on aura les trois expressions :

$$\begin{aligned} E &= K\rho^2\omega^2 S f(\alpha) \sin^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \\ Y &= K\rho^2\omega^2 S f(\alpha) \sin \alpha \cos \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \beta) \\ Y &= F : \rho\omega \operatorname{tg} \alpha \sec 2\beta, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit entre F, Y et les éléments de l'appareil :

$$F^2 = \frac{Y^2}{KS} \sec^3 \alpha \cos^2 \beta \times \sin \alpha : f(\alpha) \cos^3 2\beta.$$

On voit que cette relation ne diffère de la relation fondamentale établie dans l'étude des aéronefs à plateau que parce que le coefficient K de la résistance de l'air s'y trouve multiplié par le facteur :

$$\frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} f(\alpha) \sec^2 \beta \cos^3 2\beta.$$

On pourra donc écrire cette équation sous la forme :

$$Y^2 - SF^2 K(\alpha, \beta) = 0,$$

à la condition de poser :

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= K_0 \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} f(\alpha)^2, \\ K(\alpha, \beta) &= K(\alpha) \sec^2 \beta \cos^3 2\beta \end{aligned}$$

On a toujours, comme dans l'étude précitée :

$$Y = P_0 + dS + \pi F.$$

Enfin la relation :

$$Y = F : \rho\omega \operatorname{tg} \alpha \sec 2\beta$$

revient également à la formule :

$$Y = F : V,$$

à la condition de poser :

$$V = \rho\omega \operatorname{tg} \alpha \sec 2\beta.$$

Par conséquent, le mécanisme à palettes inclinées se comportera comme un plateau, animé de la vitesse verticale V, se mouvant dans un milieu dont la densité sera multipliée par le rapport  $K(\alpha, \beta) : K_0$ .

Toutes les formules du n° [11] sont donc applicables, sous la condition de ces deux substitutions, à V et à  $K_0$ , de  $\omega \operatorname{tg} \alpha \sec 2\beta$  et de  $K(\alpha, \beta)$ .

Et si l'on admet en première approximation, comme le font la plupart des auteurs, que les formules des palettes peuvent servir pour les hélices d'inclinaison moyenne  $\alpha$ , on voit que les formules du n° [11] ainsi transformées s'appliqueront à l'hélicoptère.

Mais avant d'aller plus loin, il convient d'étudier la fonction expérimentale  $K(\alpha, \beta)$ .

1. Nous écrirons dorénavant  $K_0$  au lieu de K, pour supprimer toute ambiguïté.

**25.** — *Discussion de  $K(\alpha, \beta)$ .* — Ce paramètre dépend : 1° de l'inclinaison  $\alpha$  de la palette, ce qui résulte surtout de la présence des termes trigonométriques ; 2° de la forme de la palette, qui figure dans le terme  $f(\alpha)$  et 3° des agencements des organes, des « chicanes » et des frottements modifiant l'action de l'air, ce qui est traduit dans la formule par la présence du facteur  $\sec^2 \beta \cos^2 2\beta$ .

1° Il n'y a rien à remarquer sur les facteurs trigonométriques, si ce n'est que d'ordinaire l'angle  $\alpha$  étant assez petit, on pourra remplacer le rapport  $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$  par  $\cot \alpha$ .

2° En ce qui concerne le terme  $f(\alpha)$ , les expériences de Langley ont permis d'en faire une évaluation.

On sait que ces expériences ont porté principalement sur trois plans d'égale superficie, l'un étant un carré de 305 millimètres de côté, le second un rectangle allongé transversalement de 762 millimètres sur 122 millimètres, le troisième un rectangle de 610 millimètres sur 152 millimètres. Le centre était à 9 m. 150 de l'axe de rotation, ce grand rayon ayant pour but d'atténuer les actions dues à la force centrifuge.

Langley a trouvé, pour le premier cas, une valeur :

$$f(\alpha) = \frac{2}{1 + \sin^2 \alpha},$$

déjà donnée par Duchemin pour la palette carrée.

Pour les deux autres cas, il n'a pas été établi de formule ; mais M. Rodolphe Soreau a pu traduire les tableaux numériques en une formule unique.

Posant à cet effet :  $\frac{l-h}{l+h} = m$ , il écrit, avec nos notations<sup>1</sup> :

$$f(\alpha) = 1 + \frac{1}{(1+m)^2} + \frac{1 - m \operatorname{tg} \alpha}{1 + m \operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

3° Enfin le terme en  $\beta$  représente l'influence des agencements des organes, des frottements sur les palettes, de la courbure de ces dernières si elles sont cintrées, etc., en admettant que la résultante de tous ces efforts soit disposée normalement à la surface, si elle est plane, ou à son plan tangent d'inclinaison  $\alpha$  en son point d'application. Cette valeur de  $\beta$  ne peut être déterminée *a priori* avec quelque approximation : il faudra la demander à l'expérience pour chaque appareil ou plutôt pour chaque type d'appareil. Dans ce qui va suivre nous admettons d'abord  $\beta = 0$ , ce qui revient à envisager le cas des palettes planes comme celles étudiées par Langley, et pour lesquelles l'influence du paramètre  $\beta$  s'est trouvée traduite par les valeurs trouvées pour  $f(\alpha)$ .

#### FORMULES PRATIQUES AVEC $\beta = 0$ .

##### 1° Relations fondamentales.

**26.** — On voit par ce qui précède que les formules des plateaux sont applicables, à la condition d'y remplacer  $K$  par  $K(\alpha)$  et  $V$  par  $\rho \omega \operatorname{tg} \alpha$ . Nous les reproduisons donc dans le tableau qui suit. L'emploi de ces formules et relations ne présente aucune difficulté si l'on se donne *a priori* l'angle  $\alpha$  ; le mieux dans la pratique sera d'opérer ainsi : L'emploi d'un paramètre auxiliaire  $a$  simplifie les formules et les calculs.

$$\begin{array}{lll} K(\alpha) = K_0 \cot \alpha f(\alpha) & V = \rho \omega \operatorname{tg} \alpha & \\ Y = P_0 + dS + \pi F & Y = K(\alpha) SV^2 & F = YV = K(\alpha) SV^3 \\ P_s = dS & a^2 = 4K(\alpha) : 27d & \Pi = \pi F \end{array}$$

<sup>1</sup>. Voir les figures p. 37.

27. — 2° Valeurs des éléments nécessaires pour enlever un poids mort  $P_0$  sous l'inclinaison  $\alpha$ .

AVEC LE MINIMUM DE	F PUISSANCE DU MOTEUR	Y sec $\alpha$ EFFORT DES PALETTES	S SURFACE DES PALETTES
V vitesse auxiliaire de régime .....	$\frac{2}{3a}$	$\frac{2}{3 \sqrt{a^2 \pi}}$	$\frac{2}{3\pi}$
F puissance du moteur.	F	YV	$2a^2 dS : \pi^3$
Y effort vertical.....	$\frac{3}{2} aF$	Y	$3a^2 dS : \pi^2$
$P_s$ poids des palettes...	$\frac{4}{2} aF$	$\frac{1}{2} \pi F$	dS
$\Pi$ poids du moteur....	$\pi F$	$\pi F$	$2a^2 dS : \pi^2$
$P_0$ poids mort.....	$(a - \pi) F$	$Y \left[ 1 - \left( \frac{\pi}{a} \right)^{2/3} \right]$	$\left( \frac{a^2}{\pi^2} - 1 \right) dS$

On connaît *a priori* l'angle  $\alpha$  et la forme des palettes : on peut donc former  $K(\alpha)$  et calculer  $a$ . Cela fait, on se donne ou on calcule, suivant le cas, F, Y ou S et l'on applique les expressions du tableau. L'effort normal total supporté par les palettes, et qui fixe leur épaisseur est Y sec  $\alpha$ .

En examinant la dernière ligne du tableau qui précède, on voit que l'on pourra toujours déterminer les éléments nécessaires à l'enlèvement d'un poids  $P_0$  à la seule condition d'avoir  $a - \pi > 0$ , ou en remplaçant  $a$  par sa valeur et résolvant l'inégalité.

$$\operatorname{tg} \alpha < \frac{4K_0}{27 d \pi^2} f(\alpha) \cos^2 \alpha.$$

Cette expression se résoudra par approximation, et donnant à  $\alpha$ , dans  $f(\alpha) \cos^2 \alpha$  une valeur provisoire  $\alpha_0$ . Il est bien entendu que  $\alpha$  reste toujours petit, conformément aux indications de l'expérience.

3° Valeur des éléments nécessaires pour enlever un poids mort  $P_0$   
avec une vitesse de circulation donnée [ $U = \rho \omega$ ].

28. — Au lieu de se donner *a priori* l'angle d'inclinaison  $\alpha$  des palettes, on peut se donner un autre élément, par exemple la vitesse de régime  $\omega$ . Il y aura, dans ce cas, lieu de reprendre les discussions analytiques faites précédemment, en y considérant cette fois  $\alpha$  comme une variable à déterminer : mais il conviendra, sous peine de se heurter à des difficultés inextricables, de traiter la question de la même manière que l'inégalité précédente, c'est-à-dire de donner à  $\alpha$  une valeur  $\alpha_0$  dans le terme  $f(\alpha) \cos^2 \alpha$ . Si la valeur  $\alpha_1$  trouvée pour  $\alpha$  diffère trop de  $\alpha_0$ , on substituera  $\alpha_1$  à  $\alpha_0$  dans les constantes, et l'on resserrera ainsi l'approximation.

Nous ne donnerons pas ici le détail des calculs algébriques, mais seulement le tableau des formules analogues aux précédentes : ces formules revêtent le caractère maximum de simplicité par l'emploi d'un paramètre  $b$ , analogue à  $a$  et dont l'expression est :

$$b^3 = K_0 U f(\alpha) \cos^2 \alpha : 4\pi d \quad \text{où} \quad U = \rho \omega.$$

On voit par ces formules que le problème ne sera possible, c'est-à-dire  $P_0$  positif, que si l'on a  $b > 1$ , ce qui correspond à :

$$U > \frac{4\pi d \sec^2 \alpha}{K_0 f(\alpha)}.$$

AVEC LE MINIMUM DE	F PUISSANCE DU MOTEUR	Y EFFORT ASCENSIONNEL	S SURFACE DES PALETTES
tg $\alpha$ ( $\alpha$ , inclinaison des palettes). . . . .	1 : $2b^2\pi U$	1 : $2b\pi U$	1 : $2\pi U$
F puissance du moteur. . . . .	F	Y : $2b\pi$	$b^2dS : \pi$
Y effort ascensionnel . . . . .	$2b^2\pi F$	Y	$2b^2dS$
P <sub>s</sub> poids des palettes . . . . .	$b^2\pi F$	Y : $2b$	$dS$
II poids du moteur. . . . .	$\pi F$	Y : $2b$	$b^2dS$
P <sub>o</sub> poids mort . . . . .	$(b^2 - 1) \pi F$	$\left(1 - \frac{1}{b}\right) Y$	$(b^2 - 1) dS$

Des exemples numériques vont permettre de se rendre compte de l'emploi et des conséquences des formules données dans les deux tableaux précédents.

### Applications.

#### Incidence de 1°.

29. — Nous reproduisons d'abord les résultats trouvés par Jarolimck sous une incidence limite de 1°. Si l'on admet qu'il s'agisse de palettes planes carrées, pour lesquelles  $f(\alpha)$  a pour valeur  $\frac{2}{1 + \sin^2 \alpha}$ , il conviendra de prendre  $K_0 = 0,0625$  pour retrouver la constante de résistance  $\frac{1}{8}$  admise par cet ingénieur. Nous conserverons cette valeur de  $K_0$  dans toutes les applications qui vont suivre.

Tableau des éléments nécessaires à l'enlèvement de 100 kilog. avec une paire de palettes carrées sous l'incidence de 1°.

AVEC LE MINIMUM DE	PUISSANCE DU MOTEUR	EFFORT ASCENSIONNEL	SURFACE TOTALE des palettes
Vitesse de circulation du centre de poussée . .	64 m. 2	77 m. 9	114 m. 6
Puissance du moteur . . .	5 chevaux	5 chx 63	11 chx 6
Effort ascensionnel . . . .	340 kilog.	313 kilog.	
Surface totale des palettes . . . . .	37 m <sup>2</sup> 8	23 m <sup>2</sup> 5	438 kilog.
Poids total des palettes . .	113 kg. 5	71 kg. 2	15 m <sup>2</sup> 2
Poids du moteur . . . . .	126 kilog.	142 kilog.	45 kg. 8
			292 kilog.

Ici, nous admettons avec Jarolimck  $d = 3$  kilog. par mètre carré de surface et  $\pi = 25$  kilog. par cheval.

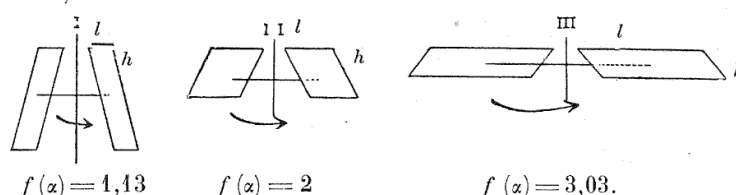
#### Incidences pratiques.

30. — Mais cette étude de la question sous l'angle de 1° ne peut être considérée que comme théorique : en premier lieu, il n'est pas certain que les lois observées soient applicables sous des angles aussi minimes ; en second lieu, une telle inclinaison ne saurait être admise

sans danger dans un appareil, puisqu'il suffirait d'un courant atmosphérique descendant sous l'inclinaison de  $2^\circ$  par exemple, pour que la vitesse relative change de signe et qu'il en résulte la chute de tout le système.

Pour ces raisons, il semble que l'angle  $\alpha$  ne puisse être utilement inférieur à  $5^\circ$  : nous allons reprendre la question pour la valeur simple  $\text{tg } \alpha = 0,1$ , qui correspond à  $\alpha = 5^\circ 43'$ . En outre, pour nous rapprocher des conditions industrielles dans lesquelles se peuvent aujourd'hui établir les moteurs, nous admettrons un poids de 6 kilog. par cheval utile travaillant sur l'arbre : ce chiffre est certainement encore supérieur au chiffre réel.

Enfin nous considérons trois types de palettes planes : en premier lieu le type dressé en longueur, dans lequel cette longueur est égale à cinq fois la largeur, d'où pour  $f(\alpha)$  la valeur 1,13 ; en deuxième lieu le type carré déjà étudié ; en troisième lieu, le type allongé horizontalement, dans lequel la longueur est cinq fois la hauteur, ce qui entraîne pour  $f(\alpha)$  la valeur 3,03. Nous avons ainsi les trois modèles :



Si l'on recherche les conditions de fonctionnement de ces trois appareils, pour l'enlèvement d'un poids de 100 kilog. avec le minimum de puissance du moteur, on obtient les résultats suivants :

VALEUR DES ÉLÉMENTS pour $\alpha = 5^\circ 43'$ et $11^\circ 20'$	I. PALETTES ÉTROITES et allongées	II. PALETTES CARRÉES	III. PALETTES LARGES et courtes
Vitesse de circulation du centre de figure ....	35,8 ~ [25,4]	26,9 [19]	21,8 [13,35]
Puissance du moteur....	12 chx 6 [26]	7 chx 92 [14]	5 chx. 88 [9,70]
Effort ascensionnel.....	263 kilog. [384]	221 kg. [276]	203 kilog. [237]
Surface totale des palettes	29 m <sup>2</sup> 3 [42,66]	24 m <sup>2</sup> 6 [30,66]	22 m <sup>2</sup> 5 [26,3]
Poids total $\alpha_0$ .....	87 kg. 8 [128]	73 kg. 8 [92]	67 kg. 4 [79]
Poids du moteur.....	75 kg. 6 [156,4]	47 kg. 6 [84]	35 kg. 3 [58,2]

Nous avons fait les mêmes calculs pour une inclinaison de  $11^\circ 20'$  correspondant à  $\text{tg } \alpha = 0,2$  : les résultats sont portés en seconde ligne et entre crochets, pour éviter toute confusion, dans le tableau précédent.

Ces résultats ont été obtenus avec une valeur de  $2K_0$  égale à 0,125, soit le chiffre le plus favorable. Si on avait pris la limite inférieure 0,081, on eût obtenu des résultats moins avantageux. Il semble inutile de recalculer tout un tableau comme le précédent.

Comme le rapport  $\frac{81}{125}$  est sensiblement équivalent à  $\frac{2}{3,03}$ , rapport de  $f(\alpha)$  pour les palettes carrées et les palettes larges et que ces dernières sont les plus intéressantes, on se conten-

tera de remarquer que, dans cette hypothèse plutôt défavorable, les chiffres convenant aux palettes larges deviennent précisément ceux de la colonne II dans les limites d'approximation que l'on peut espérer.

Enfin, pour pousser l'étude encore plus loin dans le sens de l'allégement de l'appareil, nous avons refait les calculs précédents dans l'hypothèse de  $d=1$  soit 1 kilog. au mètre carré pour les palettes.

On trouve ainsi, toujours pour  $P_0=100$  kilog. et pour les angles  $\alpha=5^\circ 43'$  et  $11^\circ 20'$ , les chiffres suivants :

*Données générales.*

$P_0 = 100$  kilog.       $\pi = 6$  kilog. par cheval ou 0 kg. 080 par kilogrammètre.       $d = 1$ .

VALEUR DES ÉLÉMENTS pour $\alpha = 5^\circ 43'$ [ $\alpha = 11^\circ 20'$ ]	I. PALETTES ÉTROITES et allongées	II. PALETTES CARRÉES	III. PALETTES LARGES et courtes
Vitesse de circulation du centre de poussée . .	20 m. 7 [14,7]	15 m. 55 [11,15]	12 m. 55 [8,9]
Puissance du moteur . . .	5 chx 50 [9,06]	3 chx 83 [5,98]	2 chx 97 [4,53]
Effort ascensionnel . . . .	200 kilog. [232]	184 kilog. [204]	177 kilog. [191]
Surface totale des palettes	66 m <sup>2</sup> 6 [77,2]	61 m <sup>2</sup> [68]	59 m <sup>2</sup> [64]
Poids total des palettes.	66 kg. 6 [77,2]	61 kilog. [68]	59 kilog. [64]
Poids du moteur . . . . .	33 kg. 3 [54,4]	23 kilog. [35,9]	17 kg. 8 [27,2]

Tels sont les résultats qu'il semble que l'on puisse obtenir avec des palettes planes type Langley, en air calme et en planant. On peut les considérer comme une indication suffisante pour apprécier en première étude les effets d'hélices analogues.

Comme exemple d'emploi de la deuxième série de formules donnée n° [28], et à titre de comparaison, nous avons réuni ci-dessous les diverses solutions du même problème que plus haut, enlèvement d'un poids de 100 kilog. avec un moteur de 6 kilog. par cheval utile, en se fixant cette fois la vitesse de circulation du centre de poussée, précédemment trouvée de 11 m. 15, sous l'angle de  $11^\circ 20'$ .

*Tableau des éléments nécessaires à l'enlèvement de 100 kilog.*

[Palettes carrées, 6 kilog. par cheval.       $\omega p = 11$  m. 15.       $d = 1$ .]

$\alpha$	$7^\circ 36'$ F MINIMUM	$11^\circ 20'$ ANGLE ARBITRAIRE	$15^\circ 18'$ Y MINIMUM	$29^\circ 16'$ S MINIMUM
F (puissance) . . . . .	5 chx 2	5,98	7,92	21,8
Y (poussée) . . . . .	262 kilog.	204	195	262
$P_s$ (palettes) . . . . .	131 kilog.	68	48	31
$\rho$ . . . . .	5 m. 05	3,91	3,45	2,97
$\omega$ . . . . .	2 m. 21	2,85	3,23	3,75
N (de tours par minute) . . . . .	20,6	27,2	30,8	35,8

On admet que la distance du bord de la palette à l'axe de rotation est de 1 mètre.

Les résultats pour  $S$  minimum sont un peu trop avantageux, par suite des termes en  $\alpha$  négligés. Du reste, ils ne sont donnés que pour mémoire, car un angle de  $29^\circ$  ne serait jamais employé.

### III. — De la troisième dimension (épaisseur) des palettes de l'hélicoptère.

**31.** — Si, dans l'étude des plateaux, il était loisible de supposer l'épaisseur uniforme, puisque tous les éléments étaient animés de la même vitesse et supportaient par suite le même effort (sauf ceux de la périphérie, comme l'ont montré les expériences de Marey), il n'en est plus de même dans le cas d'une palette tournante, puisque les vitesses sont proportionnelles à la distance de l'élément au centre de rotation et que, par suite, les efforts, qui varient comme le carré des vitesses, croissent comme les carrés de ces distances. Mais, d'autre part, les épaisseurs croissent sensiblement comme la racine carrée des efforts ; elles seront donc proportionnelles aux distances elles-mêmes, et par suite :

Pour deux palettes de surfaces semblables, les épaisseurs seront proportionnelles, dans les points homologues, à l'épaisseur nécessaire déterminée pour le centre de figure de chacune d'elles.

Ainsi l'on aura une relation de la forme :

$$\frac{d_x}{d_{x'}} = \frac{d_c}{d_{c'}} ,$$

en admettant bien entendu que les deux palettes ont la même inclinaison  $\alpha$ .

Par suite, les poids  $P_s$  des deux palettes seront proportionnels à leurs surfaces et aux épaisseurs respectivement nécessaires aux centres de figure, épaisseurs qui seront elles-mêmes proportionnelles aux racines carrées des efforts normaux en ces deux points.

Or les efforts normaux sont proportionnels en chaque point, très sensiblement, à la résultante normale totale divisée par la surface, c'est-à-dire au produit  $Y \sec \alpha : S$  ou, avec les simplifications admises, à  $K(\alpha) \rho^3 \omega^2 \tan^2 \alpha \sec \alpha = K_0 \rho^3 \omega^2 \sin \alpha f(\alpha)$ .

On aura donc,  $A$  étant une constante dépendant de la matière employée pour l'exécution de la palette, et si, conformément aux notations admises, nous écrivons :

$$\rho \omega = V \cot \alpha ,$$

la relation :

$$P_s = ASV \sqrt{f(\alpha) \sin \alpha \cot^2 \alpha} , \quad (A)$$

et nous pourrions appliquer l'analyse déjà faite pour la recherche de l'épaisseur des plateaux et les formules énoncées par suite n° [14], à la condition d'y remplacer  $K$  par  $K(\alpha)$  et  $d_0$  par  $A \sqrt{f(\alpha) \sin \alpha \cot^2 \alpha}$ .

On voit immédiatement, par la formule qui donne  $P_s$ , que si l'on se fixe *a priori* la vitesse angulaire  $\omega$ , on sera conduit à des poids  $P_s$  proportionnels au cube de la dimension linéaire, en envisageant des palettes semblables ; c'est le cas des hélices Renard ; ces derniers propulseurs correspondent donc plus spécialement au cas d'une marche à vitesse angulaire  $\omega$  indépendante des dimensions.

Si au contraire c'est la vitesse  $V$  que l'on détermine, ainsi que nous l'indiquent les formules du n° [11], les poids  $P_s$  ne varieront plus que suivant le carré de la dimension linéaire, et l'on obtiendra ainsi des moteurs à rendement plus avantageux, comme il était prévu au n° [22].

Reprenant donc les formules du n° [11] en y mettant en évidence les nouveaux éléments et nous bornant au cas où l'on s'attache au rendement maximum du moteur,



nous dresserons le tableau suivant où  $\rho$  représente la distance du centre de poussée à l'axe de rotation.

$$\begin{array}{ll} \text{Vitesse : } \rho\omega = \frac{2A}{K_0} : \sqrt{\sin \alpha \cos^2 \alpha f'(\alpha)} & \text{ou} \quad \rho\omega = \frac{\sin^2 \gamma \cot \alpha}{2\pi} \\ Y = 2P_0 : 1 - 2\pi\rho\omega \tan \alpha & Y = 2P_0 \sec^2 \gamma = 2\Pi \operatorname{cosec}^2 \gamma \\ F = Y\rho\omega \tan \alpha & F = \frac{P_0}{\pi} \tan^2 \gamma \\ \Pi = \pi F & \Pi = \tan^2 \gamma \\ P_s = P_0 : 1 - 2\pi\rho\omega \tan \alpha & \text{ou} \quad \frac{Y}{2} \quad P_s = P_0 \sec^2 \gamma = \Pi \operatorname{cosec}^2 \gamma \\ S = \frac{K_0}{4A^2} Y \cos \alpha & S = \frac{K_0 P_0 \sec^2 \gamma}{2A^2 \cos \alpha} \end{array}$$

Si l'on se rappelle l'équation de condition donnée n° [14] et qui permet de poser  $\frac{4\pi d_0}{K} = \sin^2 \gamma$ , on obtient par substitution les formules portées à la droite des lignes du tableau précédent, l'angle  $\gamma$  étant défini par la relation :

$$\sin^2 \gamma = \frac{4 A \pi}{K_0 \cos^2 \alpha} \sqrt{\frac{\sin \alpha}{f'(\alpha)}}.$$

*Évaluation de A.* — D'après l'équation (A) de la page précédente, le paramètre A est le poids de l'unité de surface de la palette marchant normalement, c'est-à-dire pour  $\alpha = 90^\circ$  à une vitesse de circulation du centre de poussée égale à 1 mètre.

Or les palettes servent surtout ici à figurer des ailes d'hélice, et, si l'on considère des hélices de *surfaces* semblables, ces hélices seront caractérisées par une même valeur de  $\alpha$ , ainsi que de  $f(\alpha)$ . La constante A se déduira donc des essais de résistance faits avec une hélice de la même famille et construite avec les mêmes matériaux.

#### IV. — Solution générale.

**32.** — Toutes les formules pratiques qui précèdent ont été établies en faisant  $\beta = 0$ , c'est-à-dire en négligeant les frottements, les pertes dues à la compressibilité de l'air, à l'énergie propre qui lui est communiquée, etc., ou plutôt en admettant que les valeurs de  $K_0$  et de  $f(\alpha)$  déduites des essais de Langley et des autres physiciens en tiennent suffisamment compte.

Malheureusement, il n'en est pas ainsi avec les grandes dimensions nécessaires dans la pratique; il est donc indispensable de rétablir dans les formules cet angle  $\beta$ . Il n'est d'ailleurs pas obligatoire de faire de nouveaux calculs; il suffit, dans les formules des n°s [27], [28] et [31], de remplacer  $K_0$  par  $K_0 : \cos^2 \beta \sec^3 2\beta$ , et  $\omega$  par  $\omega \sec 2\beta$ . C'est-à-dire que l'appareil travaille comme le ferait une palette théorique de même angle  $\alpha$ , qui marcherait, à une vitesse  $\omega \sec 2\beta$ , dans un milieu gazeux dont le coefficient de résistance, au lieu d'être  $K_0$ , c'est-à-dire 0,085 ou 0,125, serait  $K_0 \cos^2 \beta \sec^3 2\beta$ . On fera donc toujours usage des formulaires des pages précitées, car la même analyse s'appliquerait aux formules générales qui sont données au n° [24]. La seule condition est donc de substituer au tableau de notations, fait pour  $\beta = 0$ , le tableau suivant :

$$\begin{array}{lll} K(\alpha, \beta) = K(\alpha) \sec^2 \beta \cos^3 2\beta & K(\alpha) = K_0 \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} f'(\alpha) & V = \rho\omega \tan \alpha \sec 2\beta \\ Y = P_0 + dS + \pi F & Y = K(\alpha, \beta) S V^2 & F = Y V \\ P_s = dS & \Pi = \pi F & a^2 = 4K(\alpha, \beta) : 27d \quad b^2 = \frac{K_0 \rho \omega \sec^2 \beta \cos^2 2\beta}{4\pi d} \end{array}$$

L'angle  $\alpha$  peut s'estimer d'après le tracé de la palette avec une approximation suffisante. L'angle  $\beta$  ne peut s'apprécier qu'à l'aide d'expériences faites soit avec la palette elle-même, soit avec une palette réduite, dans des conditions de similitude mécanique aussi bonnes que possible. On l'évaluera en mesurant la puissance  $F$  disponible sur le moyeu et l'effort ascensionnel  $Y$ , et substituant dans la formule :

$$\cos 2\beta = Y\rho\omega \operatorname{tg} \alpha : F,$$

$\cos 2\beta$  est le rendement de l'appareil employé; s'il n'y avait ni frottements, ni recul, etc.,  $F$  serait trouvé précisément égal à  $Y\rho\omega \operatorname{tg} \alpha$ .

Les termes en  $\beta$  ne sont certainement pas indépendants de la vitesse, par suite de la mobilité et de la compressibilité du fluide dans lequel travaille le système. Il en est donc de même du facteur  $K(\alpha, \beta)$  qui mesure l'efficacité de la surface de la palette ou de l'aile employée, c'est-à-dire qu'un tracé convenable et reconnu tel pour marcher à de faibles vitesses ne doit être accepté que sous réserves avec des vitesses supérieures. Ce coefficient dynamique, que l'on évalue souvent par la relation  $K(\alpha, \beta) = Y^3 : F^2S$ , n'a qu'une valeur relative et spéciale dans les environs de la vitesse expérimentée.

## V. — Régime de l'hélicoptère en marche.

**33.** — Nous n'avons examiné jusqu'ici que les conditions de planement. Il convient de jeter un coup d'œil sur ce qui se passerait si l'hélicoptère, au lieu de planer en cédant d'autre part à l'entraînement de la couche gazeuse dans laquelle il reste suspendu, était animé d'un mouvement propre par rapport à cette couche. Ce mouvement propre donnera lieu à des efforts de deux espèces. Il y aura d'une part l'action de la résistance de l'air au déplacement du système, action dépendant essentiellement de la forme de la nacelle et de ses organes accessoires. Cette action est analogue à celle du vent sur un navire à voiles; son étude est du ressort de la théorie de la navigation aérienne, en ce qui concerne la translation de l'appareil et sa stabilité. Mais il y aura d'autre part à envisager les nouvelles conditions dans lesquelles se trouvera fonctionner le système d'ailettes ou d'hélices propulsives. Nous écartons actuellement le cas où l'appareil serait muni d'ailes sustentatrices, comme dans le type de l'aéroplane sur lequel nous reviendrons ultérieurement. Voyons donc comment se modifie la marche du propulseur lorsque l'appareil est en mouvement par rapport à l'atmosphère ambiante, que ce mouvement provienne d'un déplacement propre de cet appareil ou de l'action d'un courant aérien indépendant. Le cas général serait d'une complication extrême, mais on peut aisément traiter les cas de translation uniquement verticale ou uniquement horizontale.

### 1° Régime d'ascension de l'hélicoptère.

**34.** — Supposons que l'appareil soit animé d'une vitesse ascensionnelle  $w$ . Les palettes, dans leur rotation autour de l'axe avec une vitesse  $\omega$ , se rencontrent avec un air dont la vitesse relative —  $w$  doit se composer avec la vitesse  $\rho\omega$ . En appliquant les formules du n° [4], on voit aisément que la vitesse tangentielle du courant gazeux aura pour expression :

$$v_t = W [1 - \cos(\alpha - \varepsilon)],$$

en posant pour simplifier :

$$W^2 = w^2 + \rho^2\omega^2$$

et

$$\frac{w}{\rho\omega} = \operatorname{tg} \varepsilon.$$

On trouvera de même pour la vitesse normale :

$$v_n = W \sin(\alpha - \varepsilon).$$

La même discussion que celle du n° [5], relativement à la combinaison des deux courants gazeux au contact de la paroi, conduira à énoncer pour l'effort normal résultant R :

$$R = \frac{\delta}{g} AV^2 \sin(\alpha - \varepsilon) = KSV^2 \sin(\alpha - \varepsilon).$$

Cet effort donnera les deux composantes déjà traitées  $R \cos(\alpha - \varepsilon)$  et  $R \sin(\alpha - \varepsilon)$ . Tout se passera donc comme dans le régime de planement d'un jeu de palettes d'inclinaison  $(\alpha - \varepsilon)$  à la condition de prendre, dans les formules définitives, pour V, au lieu de  $\omega \rho \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\omega \rho \operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon)$  et pour K,  $K \sec^2 \varepsilon$ .

Resterait à tenir compte des frottements et efforts latéraux, qui sont représentés dans nos formules par un angle  $\beta$ . Comme la stabilité de l'appareil exigera que  $w$  soit faible par rapport à  $\omega \rho$ , on conservera provisoirement pour  $\beta$  la valeur trouvée dans le cas du planement, et la valeur définitive de V sera par conséquent :

$$V = \omega \rho \operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) \sec 2\beta.$$

Du reste la valeur de  $\beta$  doit toujours être vérifiée expérimentalement.

L'examen des relations qui précèdent donne lieu aux observations suivantes.

La vitesse verticale  $w$  peut être due, soit à un mouvement ascensionnel voulu et dont on peut prévoir l'intensité, soit au contraire à l'action d'un coup de vent descendant. Il sera prudent, lors de l'étude d'un hélicoptère, de se fixer *a priori* une valeur pour  $w$ , assez élevée pour n'être jamais dépassée quelles que soient les circonstances atmosphériques.

D'autre part, il y a avantage à avoir un angle  $\varepsilon$  assez petit pour que le rapport  $\frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\sin \alpha}$  s'écarte peu de l'unité. Cela entraîne pour  $\omega \rho$  une valeur considérable et pour  $\alpha$  une valeur également assez élevée, ce qui justifie l'angle minimum de  $5^\circ 43'$  que nous avons indiqué précédemment.

Enfin le paramètre  $\beta$  semble devoir actuellement, même avec les hélices les plus perfectionnées, être pris égal à  $30^\circ$ . C'est sensiblement le chiffre qui correspond aux derniers essais des propulseurs Hervé destinés au *Méditerranéen* (voir Annexe n° 3).

## 2° Régime de marche horizontale de l'hélicoptère.

**35.** — Comme nous l'avons énoncé, nous examinons ici non la conduite horizontale du système sous l'action du propulseur, mais simplement la manière dont se comportera ce dernier s'il est animé d'un mouvement relatif de translation horizontale par rapport à l'atmosphère, ce mouvement étant dû à des causes extérieures et nullement à son énergie propre : tel serait par exemple le cas d'un hélicoptère se soutenant dans l'air par l'effet de son moteur, mais remorqué comme l'est actuellement un ballon captif militaire. Quelles sont les conditions de fonctionnement des palettes ou hélices ainsi déplacées ?

Désignons comme précédemment par  $w$  la vitesse relative du système par rapport à l'air ambiant, supposée dirigée suivant l'azimut zéro : la palette, à un moment quelconque, se trouve disposée suivant l'azimut  $\theta$ , et les vitesses relatives de l'air par rapport à ladite palette ont respectivement pour valeur :

$$\begin{aligned} v_t &= w \cos \theta, \\ v_n &= \omega \rho + w \sin \theta. \end{aligned}$$

L'effort tangentiel horizontal sera donc  $KSv_n^2 \sin^2 \alpha$  et le travail élémentaire correspondant  $KSv_n^2 \rho \sin^2 \alpha d\theta$ , lequel travail évalué par quadrature pour un tour entier de l'appareil, c'est-à-dire en faisant varier  $\theta$  de 0 à  $2\pi$ , donnera :

$$2\pi\rho KS \left( \frac{w^2}{2} + \omega^2 \rho^2 \right) \sin^2 \alpha,$$

ce qui correspond à un effort moyen  $KS \left( \omega^2 \rho^2 + \frac{w^2}{2} \right) \sin^2 \alpha$ , comme si la palette était animée en D de la vitesse de circulation  $\sqrt{\omega^2 \rho^2 + \frac{w^2}{2}}$ , ou, si l'on préfère, de la vitesse angulaire  $\omega' = \omega \sqrt{1 + \frac{w^2}{2\omega^2 \rho^2}}$ .

Cet effort additionnel à fournir pour assurer la rotation des palettes n'est pas le seul qui résulte du mouvement de translation de l'hélicoptère. L'effort sur les deux palettes, dirigées dans un azimut  $\theta$ , donne en effet, au centre de figure, c'est-à-dire au pivot, une force égale à  $2KS\omega\rho w \sin \theta \sin^2 \alpha$ , S étant la surface totale des deux palettes : cette force est en effet la différence entre les deux actions  $KSv_n^2 \sin^2 \alpha$  et  $KSv_n'^2 \sin^2 \alpha$ , où l'on a comme il est indiqué plus haut  $v_n = \omega\rho + w \sin \theta$ ,  $v_n' = \omega\rho - w \sin \theta$ .

Cet effort correspond à deux composantes, l'une parallèle à la direction  $w$ , et qui s'écrit :

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = 2KS\omega\rho w \sin^2 \theta \sin^2 \alpha$$

et l'autre normale à cette direction, et qui s'écrit :

$$M \frac{d^2y}{dt^2} = 2KS\omega\rho w \sin^2 \alpha \sin \theta \cos \theta,$$

M étant la masse de l'hélicoptère.

La première relation se met sous la forme :

$$M \frac{dx'}{dt} = 2KS\rho w \sin^2 \alpha \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt},$$

laquelle, intégrée pour la durée d'un tour complet, c'est-à-dire pour un accroissement de  $\theta$  égal à  $2\pi$ , donne :

$$M (x' - x_0') = 2\pi KS\rho w \sin^2 \alpha.$$

Or l'accroissement de la quantité de mouvement qui figure au premier membre est le produit d'un effort moyen X pendant le temps considéré  $\frac{2\pi}{\omega}$ ; on a donc finalement, toutes réductions faites :

$$X = KS\omega\rho w \sin^2 \alpha = KS\omega^2 \rho^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \varepsilon$$

et l'on vérifiera aisément que le calcul donne une valeur nulle pour l'autre composante Y.

Ainsi la vitesse relative  $w$  correspond à un accroissement  $\omega' - \omega$  de la vitesse angulaire, c'est-à-dire qu'il faudra fournir aux palettes l'effort d'une vitesse  $\omega'$  pour qu'elles puissent conserver la vitesse  $\omega$ , et en outre, du fait de la marche de ces palettes sustentatrices, il devra être fourni par l'appareil propulseur une puissance supplémentaire  $Xw$ .

Nous en resterons là pour le moment, nous réservant d'utiliser ces remarques et ces formules lors de la discussion du problème de l'aéroplane.

# ANNEXE N° 3

Extrait d'une note de MM. Hervé et de la Vault sur une nouvelle hélice aérienne.

C. R. Séance du 29 juin 1904.

Le travail disponible sur l'arbre était limité par des motifs de poids et de durée de fonctionnement du moteur. Le diamètre maximum de l'hélice était donné par les proportions nécessaires de la suspension et par l'obligation de manœuvrer le propulseur en tous sens sous des angles considérables. L'emploi du métal pour les surfaces des ailes fut adopté dans le but de réduire les résistances directes et de frottement. Or, le diamètre pouvant atteindre 7 m. 30, et cette dimension devant être acceptée afin d'utiliser avantageusement l'inertie du fluide en agissant sur une colonne d'air de grande section et en réduisant la vitesse de rotation, il devenait indispensable de choisir un mode de construction capable d'assurer la permanence de la forme du propulseur dans les conditions de légèreté requises, ce qui fut obtenu par le couplage de quatre ailes, réunies en deux paires au moyen d'entretoises.

Afin d'étudier isolément le rôle de chacun des éléments principaux de ce type d'hélices, nous fîmes construire en 1902 une machine d'essais permettant de mesurer simultanément, sur des hélices réduites à  $\frac{1}{6}$ , le travail et la poussée, non seulement au point fixe, mais en avancement.

« Les résultats suivants sont relatifs à une série d'expériences effectuées sur le grand propulseur au point fixe, en lieu clos, et en sustentation. Cette dernière disposition était facile à réaliser grâce au mode de calage variable des ailes sur le moyeu. On remarquera toutefois que l'hélice n'a pas été spécialement construite en vue de cette application et qu'elle était expérimentée dans des conditions défavorables. »

Nombre d'ailes.....	4 couplées
Nature des surfaces actives.....	aluminium poli, bords tranchants
Diamètre.....	7 m. 30
Surface propulsive développée.....	3 m <sup>2</sup> 84
Longueur d'aile (partie active).....	2 m. 40
Largeur variable.....	0 m. 35 à 0 m. 45
Rapport du pas au diamètre.....	0,36
Surface couverte.....	44 mètres carrés
Rapport de la surface couverte à la surface alaire projetée.....	23
Flèches des surfaces actives.....	$\left\{ \begin{array}{l} \text{à la base } 1/15 \\ \text{au sommet } 1/25 \end{array} \right.$
Espacement des ailes couplées.....	$\left\{ \begin{array}{l} \text{à la base } 0,81 \\ \text{au sommet } 0,91 \end{array} \right.$
Incidence constante suivant Drzewiecki.....	6°
Pas.....	2 m. 63
Fraction de pas totale.....	0 m. 184 ou 0,07 du pas
Vitesse angulaire.....	132 tours par minute
Vitesse tangentielle du centre d'action.....	36 mètres par seconde
Puissance F absorbée par le propulseur.....	18 chevaux
Effort axial Y.....	180 kilog.
Poussée par mètre carré d'ailes.....	47 kilog. ✕
Efficacité ou poussée par kilogrammètre.....	0 kg. 133
Rapport $\frac{Y^3}{F^2}$ du cube de l'effort au carré du travail.....	3,2
Poids moyen (avec une partie de l'arbre, sans roue, ni frein).....	90 kilog.

« On voit que les caractéristiques de ce type d'hélices s'écartent notablement des données habituelles. Les expériences préalables sur la machine dynamométrique avaient permis de constater : que la forme des ailes et surtout leur profil courbe sont avantageux à divers points de vue ; que le recouvrement nul ou incomplet est très défavorable ; qu'un espacement un peu inférieur à la largeur des ailes assure leur indépendance, etc. Il demeure enfin démontré que cette construction se prête à l'établissement d'hélices aériennes métalliques légères et indéformables de grand diamètre. »

### Observations sur les résultats ci-dessus.

Nous allons déduire du tableau précédent les diverses caractéristiques de l'hélice en question, dans les conditions de marche indiquée.

$$\text{Vitesse angulaire } \omega = 2,2 \times 2\pi = 13,8$$

$$\text{Vitesse fictive } V = F : Y = 7 \text{ m. } 50,$$

$$\text{Vitesse virtuelle d'ascension } \omega \rho \operatorname{tg} \alpha = 36 \operatorname{tg} \alpha = 3,78$$

$$\sec 2\beta = V : \omega \rho \operatorname{tg} \alpha = 1,984,$$

$$2\beta = 59^{\circ}44' \text{ soit } 60^{\circ} \text{ en nombres ronds,}$$

$$K(\alpha, \beta) = Y : SV^2 = 0,835,$$

$$K(\alpha) = K(\alpha, \beta) \cos^2 \beta \sec^3 2\beta = 5,01,$$

$$K_0 f(\alpha) = K(\alpha) \operatorname{tg} \alpha = 0,527.$$

Ainsi, dans les conditions de l'expérience, l'hélice Hervé a fonctionné comme un plateau éprouvant de la part de l'air une résistance spécifique égale à 0 kg. 527 au lieu de 0 kg. 125 ou 0 kg. 085, chiffres ordinairement admis, et animé d'une vitesse de 7 m. 50.

Si l'on admet pour  $K_0$  la valeur 0 kg. 125, on en déduit pour  $f(\alpha)$  la valeur 4,21.

Mais ce mode d'appréciation de l'hélice ne vise que ses qualités de surface, d'aménagement superficiel. Un autre élément est l'effort utile de 90 kilog. qu'elle fournit au système, déduction faite de son poids propre, lequel est ici de 90 kilog. également. En appelant  $K_0 \varphi(\alpha)$  cet effort, on obtient :

$$\varphi(\alpha) = 2,105.$$

C'est là la véritable caractéristique de l'hélice Hervé.

Ce paramètre  $\varphi(\alpha)$  est effectivement ce qui permet d'apprécier le parti que l'on peut tirer d'un organe ascensionnel comme ceux que nous étudions. Il ne servirait de rien d'établir un propulseur dont la surface savamment ménagée donnerait un rendement considérable, soit une valeur de  $f(\alpha)$  très élevée, si par contre les nécessités de la construction de ladite surface imposaient à l'outil un poids absorbant presque toute la force ascensionnelle.

Nous croyons que pour le moment les valeurs de  $\beta$  et de  $\varphi(\alpha)$  que nous venons de déduire ci-dessus sont les plus avantageuses qui aient été réalisées, et nous admettrons, dans les applications ultérieures :

$$2\beta = 60^{\circ} \quad f(\alpha) = 4,21 \quad \varphi(\alpha) = 2,10$$

pour le rendement des hélices sustentatrices et provisoirement pour celui des hélices propulsives.

Les formules du n° [32], prennent alors la forme très simple :

$$K(\alpha, \beta) = \frac{1}{6} K(\alpha) \quad V = 2\omega \rho \operatorname{tg} \alpha.$$

## DEUXIÈME PARTIE

### Étude de l'aéroplane.

#### *Considérations générales.*

**36.** — Nous avons défini l'aéroplane, au début de ce travail, comme un véhicule aérien dont on assure la sustentation au moyen de surfaces planes ou presque planes, légèrement inclinées sur l'horizon et animées dans leur ensemble d'un mouvement de translation horizontal.

Pour l'étude schématique qui va suivre, nous considérerons donc l'appareil comme composé :

1° D'une nacelle, renfermant le personnel, les divers mécanismes ou organes de manœuvre, les provisions de toutes sortes, la machine motrice, dont l'effet est d'imprimer au système, par l'intermédiaire d'engins convenables tels qu'hélices, une vitesse horizontale  $V$ . Le poids de ladite nacelle et de son chargement, moins la machine, sera comme précédemment désigné par  $P_0$  ; le poids de la machine motrice et de ses organes sera  $\Pi$  : et si l'on désigne par  $F$  sa puissance en kilogrammètres et par  $\pi$  son poids par kilogrammètre utile, on aura évidemment  $\Pi = \pi F$ .

2° De deux ailes absolument identiques, planes, placées de part et d'autre de la nacelle : tout l'appareil étant complètement symétrique par rapport au plan vertical méridien de cette dernière : les deux ailes sont montées sur un axe horizontal, perpendiculaire au plan méridien, et relié invariablement au bâti de la nacelle. La surface totale des deux ailes étant  $S$ , et leur densité transversale  $d$ , leur poids  $P_s$  aura pour expression  $P_s = dS$ .

Lorsque le système se déplacera horizontalement en air calme, il sera soumis :

1° A l'action de la pesanteur, appliquée au centre de gravité commun et ayant pour intensité :

$$P = P_0 + \Pi + P_s ;$$

2° A la résistance de l'air au mouvement de la nacelle, résistance ayant une expression de la forme :

$$R = K\sigma V^2 f(\alpha)$$

où  $K$  est le coefficient de résistance déjà employé dans les chapitres précédents,  $\sigma$  une surface plane équivalente au contour de ladite nacelle, au point de vue de l'estimation relative de la résistance, et  $V$  la vitesse de translation du système ;

3° A l'action de l'air sur les deux ailes. Cette action comporte principalement un effort normal  $N$ , que nous avons étudié précédemment et ayant pour expression :

$$N = KSV^2 \sin \alpha f(\alpha) ;$$

$\alpha$  étant (fig. 1) l'angle d'inclinaison des ailes sur l'horizontale. Mais à cette pression  $N$ , qui serait effectivement la seule à considérer utilement dans le cas de surfaces de faibles

dimensions et réellement planes et polies, il convient, pour les applications, d'adjoindre un effort tangentiel de frottement  $T$ , car les surfaces des ailes seront en réalité quelque peu infléchies. Cet effort tangentiel  $T$  aura pour expression :

$$T = \varphi S V^2,$$

$\varphi$  étant le coefficient de frottement de l'air sur la paroi considérée.

Nous ne reproduirons naturellement pas ici les raisonnements déjà énoncés sur la division du courant d'air en branche ascendante et descendante : ces raisonnements, comme l'on sait, ont abouti à justifier la forme donnée à l'expression  $N$ , et nous supposons que le paramètre  $\varphi$  les traduit numériquement.

Ces efforts appliqués aux ailes donneront une résultante située dans le plan vertical de symétrie, et dont le rôle sera par suite, d'abord de fournir une composante horizontale  $X$ , ayant pour expression :

$$X = N \sin \alpha + T \cos \alpha.$$

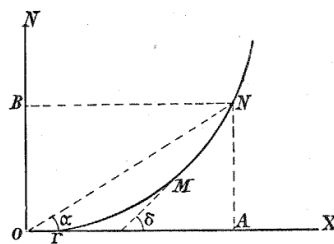


FIG. 1.

puis une composante verticale  $Y$ , qui transportée de même au centre de gravité, devra satisfaire à la condition :

$$Y = P$$

et aura pour valeur :

$$Y = N \cos \alpha - T \sin \alpha;$$

mais dont le rôle sera aussi de fournir un couple de basculement autour du centre de gravité, à raison de la distance du point d'application de ladite résultante au centre de gravité en question.

*Distance du point d'application au centre de l'aile.* — D'après des expériences faites par l'ingénieur de la marine Jøssel à Indret, avec des plaques rectangulaires immergées dans l'eau, le point en question est toujours dans la région amont, et à une distance du centre de figure donnée par la relation :

$$d = 0,6 a (1 - \sin \alpha);$$

$a$  étant le demi-côté du rectangle dirigé dans le sens du courant et  $\alpha$  l'angle d'incidence de celui-ci sur la plaque.



M. l'ingénieur Soreau, à la suite d'essais faits à Argenteuil, donne, également pour l'eau, la relation :

$$d = 0,5 a : (1 + 2 \operatorname{tg} \alpha).$$

Il a rapproché cette relation des résultats obtenus par Langley dans les expériences que nous avons déjà relatées, et trouvé des chiffres assez concordants, comme le montre le tableau ci-dessous.

INCIDENCE $\alpha$	VALEUR de $\frac{d}{a}$ donnée par			
	$0,6 (1 - \sin \alpha)$	$0,5 : (1 + 2 \operatorname{tg} \alpha)$	$0,325 \cos^2 \alpha$	Langley
90°	0	0	0	0
78°	< 0,001	0,048	ne convient pas	0,042
67° 3	0,047	0,087		0,084
55° 8	0,104	0,127		0,126
45°	0,176	0,166		0,166
35° 8	0,249	0,205	0,209	0,208
28°	0,318	0,243	0,253	0,250
20° 5	0,390	0,287	0,286	0,292

De notre côté, nous bornant à l'examen des résultats de Langley sous des incidences inférieures à 45°, chiffre bien au-dessus des inclinaisons à considérer dans la question actuelle, nous avons été conduit à écrire :

$$d = 0,325 a \cos^2 \alpha.$$

Cette relation, inexacte au-dessus de 45°, mais suffisamment précise en dessous, et d'un maniement facile, sera provisoirement adoptée dans les discussions ultérieures.

Le tableau ci-dessus donne les résultats numériques des diverses formules, et justifie l'emploi que nous ferons de la relation du cosinus carré dans le présent chapitre.

Désignons maintenant par D la distance du centre de figure de l'aile à l'axe horizontal sur lequel elle est emmanchée. Le moment de la poussée aérienne par rapport à cet axe aura pour valeur :

$$(D + d)N = KSV^2 \sin \alpha f(\alpha) (D + 0,325 a \cos^2 \alpha).$$

La fatigue de cet axe, toutes choses égales d'ailleurs, doit évidemment être réduite autant que possible : ce qui conduit à admettre pour D une valeur négative, c'est-à-dire que l'axe d'emmanchement des ailes doit être placé au-dessus du centre de figure ; comme l'angle  $\alpha$  est toujours très petit et par suite  $\cos \alpha$  très voisin de l'unité, on voit qu'il y aura d'ordinaire avantage à prendre pour D une valeur absolue égale en nombres ronds à  $0,3 a$  ou à  $\frac{1}{3} a$ .

La facilité de la manœuvre, surtout en ce qui concerne les changements à faire subir à l'angle d'inclinaison ou d'attaque  $\alpha$ , conduit à place le centre de gravité de l'aile précisément sur l'axe d'emmanchement.

Enfin si le centre de gravité des deux ailes, qui se trouve par suite à l'intersection de l'axe et du plan vertical de symétrie, est en même temps sur la verticale du centre de gravité de la nacelle, il en sera de même du centre de gravité général, et l'on se trouvera ainsi dans les meilleures conditions de stabilité, les moments perturbateurs étant réduits au minimum.

On voit donc que, d'une manière générale :

- 1° Le centre de gravité de la nacelle complète devra être placé aussi bas que possible ;
- 2° L'axe d'emmanchement des ailes devra être aménagé au tiers environ de la longueur au-dessus du centre de figure ;

3° Il devra soutenir le centre de gravité des deux ailes, et les trois centres ainsi définis se trouver dans un plan perpendiculaire au plan de symétrie de l'appareil.

Ces principes supposés observés, nous allons maintenant étudier le fonctionnement en régime normal de l'aéroplane ainsi défini.

#### 1° Établissement des équations générales.

**37.** — Considérons l'aéroplane en marche en air calme, animé d'une vitesse de régime  $V$ . L'action de l'air sur les ailes donne naissance à une composante  $Y$  qui doit équilibrer le poids de l'appareil, de telle sorte que l'on a les deux relations connues :

$$\begin{aligned} Y &= N \cos \alpha - T \sin \alpha, \\ Y &= P_0 + dS + \pi F. \end{aligned}$$

En outre, il se produit une composante horizontale  $X$  donnée par

$$X = N \sin \alpha + T \cos \alpha,$$

à laquelle s'ajoute la résistance  $R = K' \sigma V^2$  opposée au mouvement de la nacelle, et comme tout l'appareil se déplace avec la vitesse  $V$ , il faudra que le moteur fournisse une puissance  $F$  donnée par la relation :

$$F = (X + R) V.$$

Nous avons indiqué d'autre part que dans le cas d'ailes planes, on avait :

$$N = KSV^2 \sin \alpha f(\alpha) \quad T = \varphi SV^2,$$

et, par suite, en écrivant  $Kf(\alpha) = K'$ ,  $\frac{\varphi}{K} = \varphi'$ ,  $\frac{\sigma}{S} = \sigma'$  :

$$\begin{aligned} Y &= K'SV^2 (\sin \alpha \cos \alpha - \varphi' \sin \alpha), \\ X + R &= K'SV^2 (\sin^2 \alpha + \varphi' \cos \alpha + \sigma'), \\ F &= (X + R) V. \end{aligned}$$

Si nous joignons à ces relations la formule bien connue :

$$Y = P_0 + dS + \pi F, \quad (4)$$

on se retrouve en présence d'un système analogue à celui du problème des plateaux traité au chapitre III et comportant les mêmes solutions analytiques, sous réserve de quelques précautions.

Mais avant d'entreprendre ainsi la discussion du cas général, nous allons, de même qu'il a été fait pour l'hélicoptère, traiter d'abord des cas plus simples, dont la discussion éclairera sur l'importance relative des divers paramètres.

## CHAPITRE I

### *Cas d'ailes plates, type Langley, avec moteur directement appliqué.*

**38.** — Supposons pour commencer que les ailes plates puissent être assimilées aux plateaux de Langley, ce qui revient à admettre le coefficient de frottement  $\varphi$  comme négligeable. Supposons en outre que la surface fictive de la nacelle,  $\sigma$ , ne soit pas négligeable devant la surface  $S$  des ailes et que l'action du moteur s'applique directement à l'aéroplane.

**39.** — M. l'ingénieur en chef de la marine Henry a donné dans ce cas une solution géométrique très élégante que nous allons reproduire.

L'équation fondamentale (1) peut s'écrire :

$$P_0 + \pi RV = N (\cos \alpha - \pi V \sin \alpha) - dS; \quad (1 \text{ bis})$$

le premier membre est indépendant de l'organisation des ailes de l'appareil; reste à discuter le second.

Sans faire d'hypothèse sur la forme de la fonction  $N$ , remarquant seulement qu'elle dépend de l'agencement des ailes et de leur angle d'attaque  $\alpha$ , on voit de suite, au simple examen de l'équation, que, toutes choses égales d'ailleurs, il y a une valeur de  $\alpha$  qui rend maximum le second membre; ainsi, si l'on prend plusieurs aéroplanes ayant même configuration, même surface  $S$ , même poids  $dS$ , des axes d'emmanchement différents, mais parallèles, et s'ils sont construits chacun de façon que son centre de gravité soit sur cet axe, il y aura l'un de ces aéroplanes auquel correspondront une position de son axe et une valeur de  $\alpha$  pour lequel le poids utile transporté sera maximum.

Considérons la courbe joignant les extrémités des forces  $N$  en position, données par les différents aéroplanes dont nous venons de parler, le maximum cherché du second membre, soit, sur la figure p. 47, de  $OA - OB \times \pi V$ , s'obtiendra géométriquement en menant à la courbe une tangente faisant avec l'horizontale un angle  $\delta$  ayant pour cotangente  $\pi V$ , et si  $M$  est le point de contact ainsi obtenu, l'angle  $MOA$  est la valeur de  $\alpha$  la plus avantageuse pour la grandeur du poids  $P_0$  dans les conditions indiquées plus haut. Le maximum ainsi obtenu géométriquement est  $OT$ ; il sera d'autant plus grand que le tracé des ailes relèvera davantage la courbe des  $N$ .

Si l'on admet, comme il est d'ordinaire, que  $N$  est de la forme  $nSV^2$ , la courbe des  $n$  ne dépendra plus que de la configuration et de la direction de l'axe d'emmanchement.

Nous allons appliquer cette méthode aux cas de palettes carrées type Langley, avec axe d'emmanchement parallèle à son côté.

Dans ce cas particulier, soit, pour  $n$ , la valeur (v. n° 25) :

$$n = 0,12 \frac{\sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = K_0 \sin \alpha : (1 + \sin^2 \alpha).$$

La courbe polaire dont on vient de donner l'équation est une ellipse ayant pour longueur d'axe 0 kg. 06 et  $0,06\sqrt{2}$ ; ces axes sont horizontal et vertical; l'origine est un sommet du petit axe.

En ce qui concerne la détermination de l'angle  $\alpha$ , le plus favorable par la construction géométrique exposée plus haut, on trouve par le calcul que l'angle  $\delta$ , avec l'horizontale de la tangente en un point quelconque de la courbe est lié à l'angle  $\alpha$  que fait le rayon polaire de ce point avec la même direction horizontale par la relation :

$$\operatorname{tg} \delta = 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - 3 \sin^2 \alpha}.$$

Cette formule montre que quand  $\alpha$  est petit, l'angle  $\delta$  et sa tangente sont sensiblement le double de l'angle  $\alpha$  et de sa tangente, ce qui revient à confondre la portion de courbe avec le cercle osculateur au sommet. Voici les chiffres correspondants :

$\alpha = 4^\circ$	$\delta = 8^\circ$
$\alpha = 8^\circ$	$\delta = 16^\circ 20'$
$\alpha = 12^\circ$	$\delta = 25^\circ$

(Si l'on avait  $n = 0,12 \sin \alpha$ , les angles  $\delta$  seraient exactement le double des angles  $\alpha$ .)

Donc, sous la réserve de se tenir à de petites valeurs de  $\alpha$ , on calculera cet angle par la relation :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2\pi V}.$$

En supposant l'angle  $\alpha$  ainsi déterminé et assez petit pour que l'on puisse négliger  $\sin^2 \alpha$  devant l'unité, prendre  $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha$  et  $\cos \alpha = 1$ , l'équation fondamentale (1 bis) devient :

$$P_o + P_s = 1/2 K_o S V^2 \sin \alpha \cos \alpha - K_o \sigma \pi V^3,$$

et, comme l'on prend  $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2\pi V}$ , il vient :

$$P_o + P_s = \frac{KSV}{4\pi} - K_o \sigma \pi V^3.$$

On voit que  $\pi$  étant donné, le second membre passe par un maximum pour une valeur de  $V$  donnée par :

$$V^2 = \frac{S}{12\sigma\pi^2},$$

et que, par conséquent, la valeur de  $d$  ne peut surpasser :

$$\frac{K_o V}{6\pi} - \frac{P_o}{S}$$

ou :

$$d \leq \frac{K_o}{12\pi^2} \sqrt{\frac{S}{3\sigma}} - \frac{P_o}{S}, \quad (2)$$

valeur qui augmente avec  $S$ , toutes choses égales d'ailleurs, de telle sorte que cette relation donne aussi le minimum de  $S$  lorsque  $d$ ,  $\pi$ ,  $\sigma$  et  $P_o$  sont fixés.

L'angle  $\alpha$ , correspondant à ce maximum de  $d$  ou au minimum de  $S$ , prend alors pour valeur :

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{3\sigma}{S}}.$$

En résumé, si on se donne les poids élémentaires  $d$  et  $\pi$ , on voit que pour pouvoir sustenter, en plus du poids des ailes et du moteur, un poids utile  $P_o$ , il faut une surface minimum  $S$  donnée par la relation (2), dans le cas d'ailes carrées, montées sur axe parallèle au côté. La vitesse de régime  $V$  et l'angle  $\alpha$  sont définis par :

$$V^2 = \frac{S}{12\sigma\pi^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2\pi V} = \sqrt{\frac{3\sigma}{S}}.$$

On remarquera que la valeur de  $\operatorname{tg} \alpha$  en fonction des éléments  $\pi$  et  $V$  est la même que celle que nous avons trouvée par une voie toute différente, en cherchant l'inclinaison  $\alpha$  des ailes de l'hélicoptère de surface minimum pour une vitesse donnée (voir n° 27). C'est qu'en effet, le problème est le même, et la concordance des résultats vérifie le bien fondé des deux méthodes d'analyse.

Toutes les formules précédentes se calculent aisément, à l'exception de la relation 2, mais il est facile de résoudre celle-ci graphiquement.

#### Application.

40. — M. Henry a fait des applications de sa méthode à la recherche des conditions de sustentation d'une nacelle chargée à 500 kilog., moteur non compris, pour différentes valeurs de  $d$  et de  $\pi$ . Cette nacelle était supposée avoir une section maîtresse de 4 mètres carrés et des formes telles que sa résistance axiale ne fût que le  $\frac{1}{40}$  de la résistance plane, c'est-à-dire que  $\sigma = \frac{4}{40} = 0,1$ . Ce sont à peu près les conditions de la nacelle admise pour certains sous-marins. Pour  $K_o$ , l'auteur admet 0,12, de telle sorte que la résistance de la nacelle en kilogrammes est 0 kg. 012  $V^2$  et celle d'un élément d'aile carrée, à l'inclinaison  $\alpha$ ,  $0,06 \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} SV^2$ , ou, en négligeant  $\sin^2 \alpha$ ,  $0,12 \sin \alpha SV^2$ .

On voit de suite que si  $\sin \alpha = 0,1$ , ce qui correspond à une inclinaison de  $5^\circ 44'$ , la résistance de la nacelle est égale à celle des ailes ; or la résistance de la nacelle n'a pas, comme celle des ailes, la compensation de contre-balancer l'effort de la pesanteur ; le travail qu'elle réclame du moteur est dépensé sans aucun profit, et comme ce travail est proportionnel au cube de la vitesse de régime, les grandes vitesses préconisées pour l'aéroplane par certains auteurs sont, comme les tableaux numériques le mettent en évidence, beaucoup plus à redouter qu'il ne semble devoir l'être au premier abord. Aussi étudierons-nous une autre solution que celle qui vient d'être exposée.

Dans ce chiffre considérable de chevaux nécessaire à la marche de l'appareil, l'influence de la nacelle est loin d'être négligeable, comme le montre le tableau ci-dessous :

Puissance totale :	378	310	258	233	220	208	201	189
— exigée par la nacelle :	93	68	60	58	55	53	51	48
— utilisée pour la sustentation :	285	232	198	175	165	155	150	141

Or, la puissance nécessaire à la nacelle varie comme le cube de la vitesse de marche ; il y a donc le plus grand intérêt à réduire cette dernière, et à côté de l'étude de surface minimum qui vient d'être faite, nous allons rechercher, comme pour l'hélicoptère, les conditions de marche avec le minimum de puissance.

Tableau donnant pour un aéroplane carré emmanché parallèlement au côté et avec les constantes de Langley pour diverses valeurs des poids  $d$  et  $\pi$  :

- 1° Le minimum de la surface  $S$  en mètres carrés nécessaire pour sustenter une nacelle pesant 500 kilog., en plus des poids des ailes et du moteur, la nacelle étant du type indiqué plus haut;  
 2° La vitesse de régime  $V$  correspondante;  
 3° L'angle  $\alpha$  correspondant à ladite vitesse;  
 4° La puissance  $F$  correspondante en chevaux.

VALEUR de $d$		VALEUR DE $\pi$ PAR CHEVAL					VALEUR de $d$		VALEUR DE $\pi$ PAR CHEVAL					OBSERVATION
		14 <sup>k</sup>	12	10	8	6 <sup>k</sup>			14 <sup>k</sup>	12	10	8	6 <sup>k</sup>	
12 <sup>k</sup>	S				108	54,2	5 <sup>k</sup>	S		141	97	64,5	37,6	On n'a inscrit que les valeurs de $S$ comprises entre 34m <sup>2</sup> et 150m <sup>2</sup> ; on n'a inscrit aucun chiffre lorsque $S$ sort de ces limites.
	V				89	84		V		67,8	67,5	68,4	70	
	$\alpha$				3°	4° 16'		$\alpha$		2° 38'	3° 12'	3° 54'	5° 8'	
	F					378		F					220	
10 <sup>k</sup>	S				92,4	47,5	4 <sup>k</sup>	S		125,5	18,5	60	36,5	
	V				82	78,6		V		63,8	64,3	66,3	69	
	$\alpha$				3° 16'	4° 33'		$\alpha$		2° 48'	3° 20'	4° 3'	5° 10'	
	F					310		F					208	
8 <sup>k</sup>	S			132,5	80	42,6	3 <sup>k</sup>	S	146	110,5	81	55,5	35,5	
	V			79	76° 6'	74,4		V	59,3	60	61,7	63,7	68	
	$\alpha$			2° 44'	3° 30'	4° 49'		$\alpha$	2° 35'	2° 58'	3° 30'	4° 13'	5° 16'	
	F					258		F					201	
6 <sup>k</sup>	S			107	70	39,3	2 <sup>k</sup>	S	127,5	97,4	73,5	51,5	34,2	
	V			71	71,5	71,5		V	55,3	56,1	58,6	61,2	66,7	
	$\alpha$			3° 2'	3° 46'	5°		$\alpha$	2° 47'	3° 43'	3° 40'	5° 21'	5° 21'	
	F					233		F					189	

#### Recherche du moteur minimum.

41. — Si dans l'équation fondamentale :

$$Y = P_0 + dS + \pi F, \quad (1)$$

on remplace  $Y$  et  $F$  par leurs valeurs, et si on pose  $P_0 = Fx$ , on obtient l'équation du 3° degré en  $V$  :

$$(\pi + x) K' (\sigma + S \sin^2 \alpha) V^3 - K' S V^2 \sin \alpha \cos \alpha + dS = 0 \quad (2)$$

dont la discussion va donner successivement les indications cherchées.

La condition de réalité des racines exige d'abord :

$$(\pi + x)^2 \leq \frac{4K' \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha}{27d} \left( \frac{S}{\sigma + S \sin^2 \alpha} \right)^2,$$

et le maximum de  $x$ , c'est-à-dire le minimum de moteur pour un poids  $P_0$ , s'obtient lorsque les deux membres de l'inégalité sont égaux. En même temps,  $V$  doit être la racine double de l'équation (2), ce qui donne la valeur :

$$V^2 = 3d : K' \sin \alpha \cos \alpha.$$

Nous avons, dans l'étude de l'hélicoptère, introduit utilement les deux paramètres  $K(\alpha) = K_0 \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha}$  et  $a^2 = 4K(\alpha) : 27d = a'^2 \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha}$ , ce qui conduit aux relations :

$$\begin{cases} V = \frac{2}{3a} \cot \alpha \\ Y = 3P_s \end{cases} \text{ déjà obtenus dans le cas de l'hélicoptère}$$

et

$$\pi + x = a \sin^2 \alpha \frac{S}{\sigma + S \sin^2 \alpha}.$$

Si la nacelle était à résistance nulle, on retrouverait la troisième relation  $x = (a - \pi)$  formulée précédemment puisqu'il faudrait poser  $\sigma = 0$ .

Puisqu'il n'en est pas ainsi, on peut chercher à disposer de  $\alpha$ , sur la valeur duquel il n'a été faite aucune hypothèse pour rendre  $\pi + x$  maximum.

A cet effet, supposons que  $\alpha$  reste toujours assez petit pour que l'on puisse négliger les puissances de  $\sin \alpha$  ou de  $\tan \alpha$  supérieures à l'unité, et que, dans les limites considérées, les variations de  $f(\alpha)$  soient également négligeables, c'est-à-dire que  $K'$  reste constant; on a alors la valeur simplifiée :

$$(\pi + x)^2 = \frac{4K'}{27d} \sin^3 \alpha \left( \frac{S}{\sigma + S \sin^2 \alpha} \right)^2,$$

qui passe par un maximum lorsque l'on a :

$$S \sin^2 \alpha = 3\sigma,$$

d'où la valeur, toutes substitutions faites :

$$\pi + x = \frac{3}{4} a,$$

ce qui veut dire que :

Avec un aéroplane aux surfaces données  $S$  et  $\sigma$ , l'angle d'attaque le plus avantageux est donné par :

$$\tan^2 \alpha \text{ ou } \sin^2 \alpha = 3\sigma : S,$$

et la vitesse de régime correspondante par :

$$V = \frac{2}{3a} \cot \alpha \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3a'} \sqrt[4]{\frac{S}{3\sigma}}.$$

La relation qui donne  $\pi + x$  se transforme en :

$$P_0 = \left( \frac{3}{4} a - \pi \right) F,$$

et l'on vérifie aisément que l'on a :

$$P_0 + \Pi = 2P_s.$$

L'ensemble de ces formules permet de résoudre le problème de l'établissement de l'aéroplane à moteur minimum; pour en rendre le calcul aisé, on fera usage d'un angle

auxiliaire  $\delta$ , défini par la relation  $\operatorname{tg}^2 \delta = \operatorname{tg}^2 \alpha$ , et tous les éléments sont alors reliés entre eux par ce paramètre, à l'aide du système de relations :

$$\begin{aligned} S &= 3\sigma \cot^4 \delta \\ \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg}^2 \delta \\ V &= \frac{2}{3a'} \cot \delta \\ F &= \frac{8}{3a'} P_s \operatorname{tg} \delta \\ P_o &= 2P_s - \Pi. \end{aligned}$$

Dans ce système, on connaît *a priori* la surface fictive  $\sigma$  de la nacelle et son poids complet  $P_o$ ; on ne peut, il est vrai, résoudre le problème directement en fonction de ces deux données, mais on y parvient en se donnant deux ou trois valeurs arbitraires de  $\alpha$  ou de  $\delta$  et en traçant graphiquement la courbe des valeurs correspondantes de  $P_o$  et d'un autre élément, tel que  $S$ ,  $\alpha$  ou  $V$ . Cette courbe donnera, pour la valeur cherchée de  $P_o$ , la valeur correspondante de l'autre élément, ce qui donnera par un calcul facile l'angle  $\delta$  et, par suite, les autres éléments cherchés.

Les deux formules :

$$P_o = \frac{3}{4} (a' \cot \delta - \pi) F$$

et

$$F = \frac{8d\sigma}{a'} \cot^3 \delta$$

serviront de vérification aux valeurs ainsi déterminées.

**42.** — Nous avons fait diverses applications de cette méthode au cas de  $d = 5$  et  $\pi = 6$  kilog. par cheval, avec  $\sigma = 0,1$  traité précédemment par la méthode Henry pour la recherche du minimum de surface. Le tableau qui suit résume les résultats obtenus.

Tableau des éléments d'un aéroplane à palettes carrées.

Poids de la nacelle complète : variable. — Surface fictive : 0 m. 1.

$K' = 0,12$        $d = 5$        $\pi = 0$  kg. 080 par kilogrammètre utile.

$\alpha$	1° 28'	2° 17'	2° 52'	3°	3° 9'	3° 18'	3° 20'	3° 22'	4°	4° 26'	5° 8'	5° 43'
V	70 <sup>m</sup>	56	49,9	48,9	47,7	46,6	463	46,4	42	40,4	37,4	35,3
F	220 HP	113	80	74	70	65	63,5	62,7	48,6	41,3	33,5	28,3
$\Pi$	1.320 <sup>k</sup>	678	480	444	420	390	381	376	292	248	201	170
S	464 <sup>m²</sup>	189	120	109	99	90,6	88,4	86,5	61,4	49,8	37,5	30
$P_s$	2.305 <sup>k</sup>	946	600	545	495	453	440,5	432	307	249	187	150
$P_o$	3.290 <sup>k</sup>	1.214	720	646	576	517	500	489	322	250	174	130

Avant d'entamer la discussion des résultats ci-dessus, rappelons hautement que ces chiffres ne sauraient être considérés comme donnant des bases définitives à un projet d'aéroplane, mais seulement comme des renseignements sur la valeur relative des divers éléments.

La première colonne, où  $\alpha = 1° 28'$ , est donnée à titre de curiosité, pour être rapprochée de la solution Henry. On voit que, avec un moteur de 220 chevaux, à 6 kilog. par cheval utile, on peut :



Ou, marchant à 70 mètres de vitesse, sous l'incidence de  $5^{\circ} 8'$ , avec une surface d'ailes de 37 m. 6, soutenir une nacelle de 500 kilog. ;

Ou, marchant également à 70 mètres, mais sous l'incidence de  $1^{\circ} 28'$ , avec une surface d'ailes de 461 mètres, soutenir une nacelle (de même résistance à l'air) chargée à 3.290 kilog. ;

Et, par conséquent, obtenir, par des variations entre les limites, les solutions intermédiaires.

L'angle de  $5^{\circ} 8'$ , signalé comme convenant à la marche à 70 mètres, avec surfaces de 37 m. 6, pour la nacelle de 500 kilog., peut aussi, avec une surface équivalente, mais en marchant à 37 m. 4 seulement, convenir pour une nacelle de 174 kilog., en se contentant d'un moteur de 33 chevaux.

La nacelle type de 500 kilog., soutenue à  $5^{\circ} 8'$ , comme il est dit plus haut, avec 220 chevaux au moteur, peut l'être également sous l'angle de  $3^{\circ} 20'$  avec un moteur de 63 chevaux seulement, avec 86 mètres de surface d'ailes.

La même nacelle, chargée à 250 kilog., soit moitié du poids primitif, exigera un moteur de 41 chevaux, avec 50 mètres de surface, et une incidence de  $4^{\circ} 26'$ , c'est-à-dire au moteur des  $\frac{2}{3}$  du moteur précédent.

Toutes ces indications ne valent que par les présomptions qu'elles conduisent à formuler : il est bien certain que l'on ne fera pas usage de palettes ou d'ailes carrées, etc. ; essayons donc maintenant de nous rapprocher d'un peu plus près des conditions de la pratique.

Négligeant la question de la surface minimum, sur laquelle la discussion précédente a fourni des indications suffisantes pour pouvoir être reprise en cas de besoin dans chaque cas spécial, nous nous attacherons spécialement, comme dans la discussion de l'hélicoptère, à la réduction au minimum du poids du moteur.

Supposons d'abord qu'au lieu d'ailes carrées pour lesquelles  $f(\alpha) = 2$ , nous fassions usage, comme dans l'exemple du n° 30, d'ailes larges et courtes pour lesquelles  $f(\alpha) = 3$ . Il conviendra dans ce cas, si nous admettons qu'il soit fait usage de la même nacelle, d'attribuer à celle-ci une section fictive  $\sigma$  égale non plus à 0,1 mais à  $0,1 : \frac{3}{2}$ , rapport de la nouvelle valeur de  $f(\alpha)$  à l'ancienne ; la valeur de  $K'$ , au contraire, est à multiplier par ce rapport.

Sous l'angle de  $5^{\circ} 43'$ , déjà employé pour l'hélicoptère et pour les ailes carrées, nous obtiendrons successivement :

$$S = 20 \text{ m}^2 \quad V = 28 \text{ m} \quad F = 15 \text{ chx } 4 \quad \text{et} \quad P_0 = 108 \text{ kilog.}$$

Si, au contraire, nous gardons la même surface 30 mètres carrés pour les ailes, en faisant varier les autres éléments, les formules nous donneront :

$$\alpha = 4^{\circ} 40' \quad V = 32 \text{ m.} \quad F = 21 \text{ chx} \quad P_0 = 175 \text{ kilog.,}$$

c'est-à-dire que nous obtenons le même résultat que sous l'angle de  $5^{\circ} 8'$  (avant-dernière colonne du tableau) mais avec un moteur de 21 chevaux au lieu de 33,5.

Enfin admettons, à titre de curiosité, que nous puissions constituer les ailes à l'instar de celles de l'hélice Hervé dont nous avons déterminé les caractéristiques dans l'annexe n° 3 (p. 45), lesdites caractéristiques étant  $K' = 0,527$ , d'où  $f(\alpha) = 4,39$ , si  $K_0 = 0,12$  et  $d = 90 : 3,84$  ou  $23,4$  ; mais prenons seulement  $d = 20$  pour faciliter les calculs ; ce chiffre serait d'ailleurs encore trop élevé dans la pratique, car une aile se déplaçant en

ligne droite fatigue moins qu'en tournant et demande par suite une moindre épaisseur.

Dans ces conditions, en conservant aux ailes la surface totale de 30 mètres carrés, remarquant que  $\sigma$  prend la valeur 0,1 : 4,39 et substituant en conséquence, on trouve :

$$\alpha = 2^{\circ} 45' \quad V = 49 \text{ m.} \quad F = 76 \text{ chx} \quad \text{et} \quad P_o = 746 \text{ kilog.},$$

et enfin, si l'on admettait que le poids  $d$  pût être maintenu à 5 kilog. comme dans les exemples précédents, on obtiendrait :

$$\alpha = 2^{\circ} 45' \quad V = 24 \text{ m.} \quad F = 9 \text{ chx} \quad \text{et} \quad P_o = 244 \text{ kilog.}$$

Nous arrêterons là ces applications numériques dont il convient de retenir surtout l'avantage qu'il y a, contrairement à une idée souvent émise, à marcher à des vitesses relativement faibles. Cette nécessité sera rendue encore plus palpable si nous examinons, comme il a été fait pour l'hélicoptère, la détermination de l'épaisseur de l'aile d'après la vitesse de régime. C'est ce qui va faire l'objet des développements qui vont suivre.

#### *Détermination de l'épaisseur de l'aile d'après la vitesse de régime.*

**43.** — Ainsi que nous l'avons fait remarquer dans l'étude des plateaux et dans celle de l'hélicoptère, l'épaisseur de l'aile semble devoir être prise proportionnelle à la racine carrée de l'effort normal qu'elle supporte, et s'écrire par conséquent :

$$d = d_o \sqrt{N : S},$$

et comme nous avons admis pour  $N$  la valeur :

$$N = K' S V^2 \sin \alpha,$$

on aura successivement :

$$\begin{aligned} d &= d_o V \sqrt{K' \sin \alpha}, \\ P_s &= d_o S V \sqrt{K' \sin \alpha}, \end{aligned}$$

et pour l'équation fondamentale, en posant  $\Sigma = \sigma + S \sin^2 \alpha$  :

$$P_o + d_o S V \sqrt{K' \sin \alpha} + K' \pi \Sigma V^3 = K' S V^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1)$$

Cherchons, comme précédemment, le rendement maximum du moteur et soit à cet effet  $P_o = \Pi x$ . L'équation (1) divisée par  $V$  deviendra :

$$K' \pi \Sigma (1 + x) V^2 - K' S V \sin \alpha \cos \alpha + d_o S \sqrt{K' \sin \alpha} = 0, \quad (2)$$

ce qui donne pour condition de réalité des racines :

$$1 + x \leq S \sin \alpha \cos^2 \alpha \sqrt{K' \sin \alpha} : 4 \pi d_o \Sigma.$$

Le maximum de  $x$  s'obtient en transformant cette inégalité en égalité, et le maximum maximorum en disposant de  $\alpha$  de manière à rendre le second membre maximum. Le même calcul que précédemment donne l'équation de condition :

$$S \sin^2 \alpha = 3\sigma = \frac{3}{4} \Sigma,$$

en admettant toujours que  $\alpha$  soit suffisamment petit pour que l'on ait sans erreur sensible :  $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$  et que  $f(\alpha)$  reste constant, afin qu'il en soit de même pour  $K'$ , et l'on obtiendra par substitutions successives :

$$\begin{aligned} 1 + x &= 3 \sqrt{K' \sin \alpha \cos^2 \alpha} : 16 \pi d_o \sin \alpha \\ V &= 2d_o : \sqrt{K' \sin \alpha \cos^2 \alpha} \quad (\text{racine double de l'équation 2}) \\ Y &= 4d_o^2 S \sec \alpha \\ F &= \frac{4}{3} YV \operatorname{tg} \alpha \\ \Pi &= \pi F \\ P_o &= \pi F x \\ P_s &= d_o V S \sqrt{K' \sin \alpha} = 2d_o^2 S \sec \alpha = \frac{Y}{2}. \end{aligned}$$

Ces relations deviennent beaucoup plus maniables si l'on remarque, ainsi que l'on a fait dans le cas de l'hélicoptère, que  $x$  étant forcément positif, on doit pouvoir poser :

$$\frac{16 \pi d_o \sin \alpha}{3 \sqrt{K' \sin \alpha \cos^2 \alpha}} = \sin^2 \gamma,$$

d'où :

$$\sin \alpha = \frac{9K' \sin^4 \gamma}{256 \pi^2 d_o^2},$$

ce qui donne le tableau des formules, analogue à celui du n° 31 :

$$\begin{aligned} P_o &= 6d_o^2 \sigma \cos^2 \gamma : \sin^2 \alpha \quad \text{ou} \quad \sin \alpha = d_o \sqrt{\frac{6\sigma}{P_o} \cos^2 \gamma} \\ V &= \frac{3 \sin^2 \gamma \cot \alpha}{4 \cdot 2\pi}, \\ Y &= 2P_o \sec^2 \gamma = 2\Pi \operatorname{cosec}^2 \gamma, \\ F &= P_o \operatorname{tg}^2 \gamma : \pi \\ \Pi &= P_o \operatorname{tg}^2 \gamma \\ P_s &= P_o \sec^2 \gamma = 2d_o^2 S. \end{aligned}$$

La différence entre les valeurs de  $V$  pour le cas de l'hélicoptère et pour celui de l'aéroplane tient à la présence de la surface  $\sigma$  dans ce dernier cas.

Avant de passer aux applications numériques rappelons les théorèmes fondamentaux qui semblent résulter de cette analyse et pouvoir être énoncés comme règles essentielles à suivre.

1° La « surface portante »  $S \sin^2 \alpha$  doit toujours être le triple de la surface fictive de la nacelle.

2° Lorsque la densité transversale des ailes est fixée d'avance, le maximum de rendement du moteur, directement appliqué, est obtenu lorsque le poids des ailes est la moitié des poids réunis de la nacelle et du moteur, c'est-à-dire le tiers de l'effort ascensionnel total.

3° Lorsque l'on peut disposer de ladite densité des ailes, le maximum de rendement du moteur directement appliqué est obtenu lorsque le poids des ailes est égal aux poids réunis de la nacelle et du moteur, c'est-à-dire à la moitié de l'effort ascensionnel total.

Dans ces théorèmes, nous entendons par moteur directement appliqué un moteur supposé produire tout son effort sous forme immédiate de poussée horizontale. Nous verrons en effet plus loin que dans les cas réels de la pratique, où le moteur n'agit pas ainsi, ces règles ne sont plus admissibles.

### Applications numériques.

**44.** — Conservons toujours notre nacelle à surface fictive 0,4 dans le cas de palettes carrées où  $K' = 0,12$ , autrement dit à résistance  $R = 0 \text{ kg. } 012 \text{ V}^2$ . Nous avons trouvé pour enlever ladite nacelle, lestée à 500 kilog., avec  $d = 5$ , une vitesse  $V = 46 \text{ m. } 3$  et un angle  $\alpha = 3^\circ 20'$ . Ces conditions, supposées admissibles, entraînent pour  $d_o$  la valeur :

$$d_o = \frac{5}{46,3} : \sqrt{0,12 \sin 3^\circ 20'} = 1,296.$$

Cela posé, on commence par déterminer l'angle  $\gamma$  par la formule :

$$\frac{\sin^4 \gamma}{\cos \gamma} = \frac{256 \pi^2 d_o^3}{9 K'} \sqrt{\frac{6\sigma}{P_o}}$$

(on dresserait à cet effet, en cas de besoin, une table donnant en fonction de  $\gamma$  la valeur du premier membre).

Connaissant ainsi  $\gamma$  en fonction des données du problème, c'est-à-dire des constantes  $\pi$ ,  $d_o$  et  $K'$ , et des éléments  $\sigma$  et  $P_o$  relatifs à la nacelle, on obtiendra aisément toutes les inconnues par les relations du n° 43. A cet effet, ayant obtenu directement  $P_s$ ,  $\Pi$  et  $F$ , en vérifiant que l'on a bien en même temps  $P_s = P_o + \Pi$ , on calculera  $S$ ,  $\alpha$  et  $V$  par les formules plus simples :

$$\begin{aligned} S &= P_s : 2d_o^2, \\ \sin \alpha &= \sqrt{3\sigma : S}, \\ V &= \frac{3}{8\pi} \sin^2 \gamma : \sin \alpha, \end{aligned}$$

les expressions compliquées du n° 43 pourront donner des vérifications.

Conservons toujours notre nacelle à surface fictive  $\sigma = 0,4$  dans le cas de palettes carrées où  $K' = 0,12$ , autrement dit à résistance  $R = 0,012 \text{ V}^2$ . Nous avons trouvé pour enlever ladite nacelle, chargée à 500 kilog., avec  $d = 5$  une vitesse  $V = 46 \text{ m. } 3$  et un angle  $\alpha = 3^\circ 20'$ , ce qui suppose pour les matériaux de l'aile une valeur  $d_o = \frac{5}{46,3} : \sqrt{0,12 \sin 3^\circ 20'} = 1,296$ . Nous avons trouvé d'autre part, pour des ailes supposées constituées comme l'hélice Hervé,  $d = 20$ , aux vitesses  $V = 49$  et un exemple  $\alpha = 2^\circ 45'$ , ce qui donne  $d_o = 2,59$ . Dans ces deux cas, la densité transversale la plus favorable  $d = 2d_o^2$  prend la valeur 3,36 et 13,4. Nous avons calculé à titre d'exemple les nouvelles conditions d'enlèvement de la nacelle précitée.

Le tableau qui suit reproduit les différentes solutions obtenues, toujours simplement à titre d'indications car, d'une part, les formules théoriques ne peuvent jamais être adoptées sans contrôle expérimental, et, d'autre part, le poids de 6 kilog. par cheval-vapeur utile est certainement trop faible, ainsi que nous l'établirons au cours d'applications plus proches de la pratique.

Tableau d'enlèvement de la nacelle de 500 kilog.  
Moteur à 6 kilog. par cheval. — Ailes diverses.

AILES	PLANES ET CARRÉES			CINTRÉES TYPE HERVÉ		OBSERVATIONS
	à S min. $d = 5$	à F min. $d = 5$	à F min. et $d = 2d_0^2 = 3,36$	à F min. $d = 20$	à F min et $d = 2d_0^2 = 13,4$	
$\alpha$	5° 8'	3° 20'	2° 8'	3° 20'	2° 5'	La densité $d = 2d_0^2$ est celle signalée par les formules ci-dessus comme la plus avantageuse. Elle a été déterminée pour la colonne (3) d'après les chiffres de la colonne (2) et pour la colonne (5) d'après ceux de la colonne (3).
V	70 <sup>m</sup>	46,3	39	45	38	
F	220 HP	63,5	37	58	34,5	
II	1.320 <sup>k</sup>	381	223	350	207	
S	37 <sup>m2</sup> 6	88	215	21,25	52,8	
P <sub>s</sub>	188 <sup>k</sup>	440	723	425	707	
P <sub>0</sub> : F	2,3	7,9	13,5	8,5	14,5	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	

Il ne faut pas s'étonner de voir les ailes Hervé donner des résultats aussi voisins de ceux des ailes carrées. Il faut remarquer que nous leur avons laissé la densité transversale de 20 kilog. (d'où 13,4) qui correspond à une marche circulaire de l'organe, alors qu'en réalité cette densité eût dû être beaucoup moindre à raison de la marche rectiligne. Rappelons seulement qu'avec  $d = 5$  pour ce type d'ailes nous avons trouvé n° 42 une enlevée de 244 kilog. pour 9 HP4, c'est-à-dire un rendement  $\frac{P_0}{F}$  égal à un peu plus de 25.

Pour terminer l'étude de l'aéroplane à ailes planes ou se comportant comme telles, sans frottement, il reste à examiner la dépendance de ces éléments et de ceux du moteur supposé hélicoïdal. De même que nous sommes passés du plateau à l'hélicoptère, de même il nous faut venir du moteur à effort directement appliqué au moteur à effort transformé par un organe spécialement interposé.

On ne sera pas surpris d'arriver à des solutions différentes, parce que dans le premier cas le moteur se gouvernait indépendamment de la vitesse de marche de l'aéronat, n'étant astreint qu'à fournir la puissance nécessaire, tandis que dans le cas dont nous allons nous occuper ladite vitesse de marche est solidaire du régime du propulseur, qui, lui, est actionné directement par le moteur. La présence de cet intermédiaire modifie naturellement les conditions de fonctionnement.

## CHAPITRE II

### De la dépendance mutuelle des organes de l'aéroplane et du propulseur.

45. — Dans ce qui va suivre, nous appelons plus particulièrement aéroplane l'ensemble de la nacelle, avec son chargement défini comme précédemment, et des deux ailes inclinées ; nous conservons les notations précédentes, en y affectant seulement d'un accent les lettres déjà employées dans la théorie de l'hélicoptère. Nous désignerons donc par :

- P<sub>0</sub>' le poids de la nacelle chargée ;
- $d'$  ou  $d_0'$  la densité des ailes ;
- $\alpha'$  l'angle d'attaque des ailes ;
- S' la surface des ailes ;
- V' la vitesse de régime horizontale.

Le poids total de l'aéroplane ainsi défini a pour valeur :

$$Q = P_0' + d'S'.$$

Le propulseur, genre hélice, est assimilé aux palettes inclinées comme dans le cas de l'hélicoptère, dont les équations lui sont applicables. Son poids sera  $dS$ , et l'on a vu qu'à sa vitesse de rotation  $\omega$  on substituait utilement une vitesse  $V = \omega r \operatorname{tg} \alpha \sec 2\beta$ .

Enfin le moteur, de puissance  $F$  et de poids élémentaire  $\pi$ , a pour poids  $\Pi = \pi F$ .

Lorsque le système est en marche de régime, il est soutenu par la composante verticale  $P$  de la résistance de l'air à la marche des ailes de l'aéroplane, et cette composante a pour valeur l'une ou l'autre des expressions :

$$\begin{aligned} P &= Q + dS + \pi F, \\ P &= K'S' \sin \alpha' \cos \alpha' V^{1/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Il éprouve, d'autre part, une résistance à la translation ayant pour valeur  $X + R$ , déjà définis au chapitre précédent et ayant pour expression :

$$\begin{aligned} X &= K'S' \sin^2 \alpha' V^{1/2} \\ R &= K'\sigma V^{1/2}, \end{aligned}$$

et cette résistance est équilibrée par la composante, suivant l'axe horizontal du propulseur, de l'action de l'air sur ce dernier. Cette composante a pour expression (voir n° 32) :

$$Y = K(\alpha, \beta) SV^2.$$

On a donc l'équation de condition :

$$Y = (X + R) \quad \text{d'où} \quad Y = K'(\sigma + S' \sin^2 \alpha') V^{1/2},$$

et en remplaçant  $V^{1/2}$  par sa valeur en fonction de  $P$  :

$$Y = \frac{\sigma + S' \sin^2 \alpha'}{S' \sin \alpha' \cos \alpha'} P = \frac{1}{\lambda^2} P,$$

en posant :

$$\lambda^2 = S' \sin \alpha' : (\sigma + S' \sin^2 \alpha') \sec \alpha'.$$

Le facteur  $\lambda^2$  est la mesure du rendement de l'aéroplane puisqu'il donne le rapport de l'effort de sustentation  $P$  à l'effort horizontal  $Y$  fourni à cet organe.

Si maintenant nous portons la valeur de  $P$ , soit  $\lambda^2 Y$  dans l'équation (1), il vient :

$$\lambda^2 Y = Q + dS + \pi F,$$

et, en remplaçant  $Y$  et  $F$  par leurs valeurs :

$$Q + dS = \lambda^2 Y \left(1 - \frac{\pi V}{\lambda^2}\right) = \lambda^2 K(\alpha, \beta) SV^2 \left(1 - \frac{\pi V}{\lambda^2}\right).$$

En posant  $\frac{\pi}{\lambda^2} = \pi'$ ,  $\lambda^2 K(\alpha, \beta) = K$ , on obtient la formule bien connue :

$$Q + dS = KSV^2 (1 - \pi' V),$$

que nous avons déjà employée dans l'étude des plateaux puis dans celle de l'hélicoptère, et toutes les expressions déjà obtenues pour ces deux types d'appareils pourront être adoptées pour l'aéroplane, en y écrivant d'abord  $K$  et  $\pi'$  en place de  $K(\alpha, \beta)$  et de  $\pi$ , puis, cette substitution faite, en y remplaçant  $K$  par  $\lambda^2 K(\alpha, \beta)$  et  $\pi'$  par  $\frac{\pi}{\lambda^2}$ . On obtient ainsi le système de formule du tableau suivant, pour les trois cas de puissance du moteur, de surface ou de poussée du propulseur minimum. Les premières lignes du tableau sont établies comme il vient d'être dit : les dernières, relatives aux éléments particuliers de l'aéroplane, seront discutées plus loin.

*Notations fondamentales.*

$$\begin{aligned}
 46. \quad K &= \lambda^2 K_0 \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} f(\alpha) \sec^2 \beta \cos^3 2\beta & \lambda^2 &= S' \sin \alpha' : (\sigma + S \sin^2 \alpha') \\
 K &= \lambda^2 K(\alpha, \beta) & a^2 &= 4K(\alpha, \beta) : 27d \\
 V &= \omega \rho \operatorname{tg} \alpha \sec 2\beta & a^2 &= 4K : 27d \lambda^2
 \end{aligned}$$

*Simplifications.*

Admettons provisoirement que l'on puisse fixer à 30° la valeur du paramètre  $\beta$  qui caractérise l'appareil propulseur employé, et que l'on puisse négliger les puissances, supérieures à l'unité, de  $\operatorname{tg} \alpha$ . La valeur de  $K$  prendra la forme plus simple  $\frac{\lambda^2}{6} K_0 f(\alpha) \cot \alpha$ . Pour des palettes carrées  $K_0 = 0,12$ ,  $f(\alpha) = 1$ . Pour des palettes Hervé,  $K_0 f(\alpha) = 0,527$ .

D'autre part, le facteur  $\lambda^2$  qui mesure le rendement de l'aéroplane, prend son maximum lorsque  $S' \sin^2 \alpha'$  est égal à  $\sigma$ , et ce maximum a pour valeur  $1 : 2 \sin \alpha'$ .

On aura donc les expressions simplifiées :

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{6} \lambda^2 K_0 \cot \alpha f(\alpha) & \lambda^2 &= S \sin \alpha' : (\sigma + S' \sin^2 \alpha') \\
 V &= 2\omega \rho \operatorname{tg} \alpha & a^2 &= 2 K_0 \cot \alpha f(\alpha) : 81d
 \end{aligned}$$

que l'on emploiera concurremment avec le formulaire suivant :

**47.** — *Formules des éléments nécessaires pour enlever un aéroplane de poids Q sous l'inclinaison  $\alpha'$ .*

AVEC LE MINIMUM DE	F PUISSANCE DU MOTEUR	S SURFACE DU PROPULSEUR	Y EFFORT AXIAL
V vitesse auxiliaire de régime.	$\frac{2}{2 a \lambda}$	$\frac{2 \lambda^2}{3 \pi}$	$\frac{2}{3 a} \left( \frac{a}{\pi} \right)^{2/3}$
F puissance du moteur.....	F	$\frac{2 a^2 P_s}{\pi^3} \lambda^6$	$\frac{2 Y}{3 a} \left( \frac{a}{\pi} \right)^{2/3}$
Y effort axial.....	$\frac{3}{2} a \lambda F$	$\frac{3 a^2 P_s}{\pi^2} \lambda^4$	Y
P <sub>s</sub> poids du propulseur.....	$\frac{1}{2} a \lambda^3 F$	dS	$\frac{1}{3} Y \left( \frac{\pi}{a} \right)^{2/3}$
Π poids du moteur.....	π F	$2 \frac{a^2}{\pi^2} P_s \lambda^6$	$\frac{2}{3} Y \left( \frac{\pi}{a} \right)^{2/3}$
L effort ascensionnel.....	$\frac{3}{2} a \lambda^3 F$	$\frac{3 a^2 P_s}{\pi^2} \lambda^6$	λ <sup>2</sup> Y
Q poids de l'aéroplane.....	(aλ <sup>3</sup> — π) F	$\left( \frac{a^2}{\pi^2} \lambda^6 - 1 \right) P_s$	$\left[ \lambda^2 - \left( \frac{\pi}{a} \right)^{2/3} \right] Y$
V' vitesse horizontale.....	$\sqrt{\frac{3}{2} a \lambda^3 F : K' S' \sin \alpha'}$	$\sqrt{3 \frac{a^2}{\pi^2} P_s \lambda^6 : K' S' \sin \alpha'}$	$\sqrt{\lambda^2 Y : K' S' \sin \alpha'}$
L <sub>o</sub> ' charge de la nacelle.....	Q — d'S'	Q — d'S'	Q — d'S'

*Application. — Erreur à redouter.*

**48.** — Les formules ci-dessus ne peuvent être employées que sous certaines réserves, et une application numérique rendra la discussion plus aisée.

Nous avons déjà traité le cas d'une nacelle chargée à 500 kilog., mue par un moteur à action directe, dans chacun des deux cas de surface des ailes sustentatrices ou de puissance du moteur minimum. Reprenons le même problème dans le cas actuel de moteur actionnant un propulseur hélicoïdal type Hervé.

*Détermination des éléments de l'aéroplane.* — Nous avons trouvé que le rendement ascensionnel le plus avantageux correspond aux relations  $S' \sin^2 \alpha' = \sigma$  d'où  $\lambda^2 = 1 : 2 \sin \alpha'$ .

Si nous prenons  $\alpha' = 3^\circ 20'$ , et il ne semble pas que l'on puisse descendre au-dessous, et  $\sigma = 0,1$ , comme il a été admis, on obtient les valeurs  $S' = 30$  mètres carrés et  $\lambda^2 = 8,50$ .

Adoptant cette surface de sustentation, et la densité 5 kilog. pour les ailes, nous en déduisons, pour le poids de l'aéroplane, la valeur  $Q = 500 + 150 = 650$  kilog.

Venons maintenant à l'organisation du propulseur. Si l'on prend les constantes de l'hélice Hervé, on en déduit pour  $a$  la valeur 0,0807, pour  $\alpha = 6^\circ$ , et si le moteur avec sa transmission pèse 6 kilog. par cheval, on aura pour  $\frac{a}{\pi}$  une valeur 1,009 ou en nombres ronds 1, ce qui simplifiera beaucoup les calculs.

Examinons d'abord le cas intermédiaire de  $Y$  ou effort axial minimum. On aura successivement, puisque  $\frac{\pi}{a} = 1$ ,  $Y = Q : \lambda^2 - 1$  ou  $\frac{650}{7,50} = 87$  kilog. D'où  $P_s = \frac{Y}{3} = 29$  kilog.  $\Pi = 58$  kilog. et comme conséquence  $F = 9$  HP 666, soit 10 chevaux,  $S = P_s : 20 = 1,45$ , et enfin  $V = \frac{2}{3a} = 8$  m. 26, d'où  $\omega p = 41$  m. 3. De même, si l'on voulait faire usage du propulseur de surface minimum, le corps d'aéroplane étant constitué comme précédemment au poids de 650 kilog., on calculerait d'abord  $P_s = Q : (\lambda^2 - 1)$ , ce qui donnerait 1 kg. 06 seulement; puis  $\Pi = 2\lambda^6 P_s = 1.228$  kilog., ce qui correspond à 205 chevaux, et enfin  $V = \frac{2\lambda^2}{3\pi} = 71$  mètres, ce qui entraîne une vitesse de circulation  $\omega p = 355$  mètres.

Ces résultats semblent extraordinaires, et ils sont en effet illusoires. Les calculs numériques qui les ont donnés sont exacts, mais l'application des formules n'était pas licite, et si nous avons commis sciemment cette faute, c'était pour attirer sur ce point l'attention du lecteur et combattre une erreur qui est peut-être la cause de bien des illusions dans l'esprit des chercheurs d'aéroplane.

Dans l'application erronée qui vient d'être faite, on a en effet supposé tacitement que le propulseur fonctionnait comme s'il était immobile, au lieu de participer à la marche de l'aéronat : et le sens des résultats obtenus est le suivant :

*1<sup>er</sup> cas.* — Une nacelle chargée au poids total de 587 kilog., montée sur deux ailes de 30 mètres carrés de surface totale, pesant 150 kilog., peut être soutenue en marche par un moteur de dix chevaux, actionnant un propulseur *immobile*, au point fixe, de 1 m. 45 de surface, à une vitesse de circulation de 41 mètres au centre de poussée : l'effort dudit propulseur étant transmis à l'axe du système sans perte ni surcharge du fait de cette transmission.

Le deuxième cas donnerait lieu à une interprétation analogue.

Et si l'on veut revenir à la réalité, il faut ajouter à l'exposé numérique du premier cas la réserve suivante :



Si l'on calcule la vitesse horizontale  $V'$  résultant pour l'appareil de l'action du propulseur, on trouve qu'elle atteint 40 m. 7; or le propulseur ne peut fournir qu'un effort résultant de la composition de sa vitesse propre de circulation avec ladite vitesse  $V'$  : la solution est donc illusoire.

**49.** — En réalité, l'analyse précédente doit être reprise et complétée comme il suit :

Désignons par  $\theta$  l'inclinaison réelle des palettes ou hélices, que nous appelions  $\alpha$  dans la théorie de l'hélicoptère. Nous avons indiqué [n° 34] que si cet appareil était animé d'une vitesse verticale de translation suivant son axe, les formules de marche lui restaient applicables à la condition de prendre pour valeur de l'angle d'attaque  $\alpha$  non plus la valeur  $\theta$  provenant du tracé, mais la valeur  $\theta - \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant un angle de réduction défini par la relation  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{V'}{\omega \rho}$ . Par contre, la vitesse auxiliaire  $V$ , qui figure dans le tableau de formules, conserve son expression :

$$V = \omega \rho \operatorname{tg} \alpha \sec 2\beta,$$

mais l'on doit y prendre :

$$\alpha = \theta - \varepsilon.$$

Sous ces réserves des nouvelles valeurs de  $\alpha$  et de  $V$ , les formules du n° [47] redevennent applicables.

Mais on voit de suite que pour que  $\alpha$  soit positif, il faut que  $\varepsilon$  soit moindre que  $\theta$ .

Peut-être l'énoncé des formules ainsi transformées a-t-il besoin d'être justifié : c'est ce que nous allons faire brièvement, en reprenant les expressions du n° [24] et en effectuant leur transformation.

Ces formules doivent s'écrire en effet :

$$F = E \rho \omega$$

$$E = K_0 (V'^2 + \rho^2 \omega^2) S f(\alpha) \sin^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)$$

$$Y = K_0 (V'^2 + \rho^2 \omega^2) S f(\alpha) \sin \alpha \cos \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \beta),$$

l'angle  $\beta$  restant l'angle expérimental défini comme précédemment et l'angle  $\alpha$  devenant égal à  $\theta - \varepsilon$ .

Pour ramener ce système de formules au système habituel :

$$F = YV$$

$$Y = KSV^2,$$

nous remplacerons d'abord  $V'$  par  $\rho \omega \operatorname{tg} \varepsilon$ , ce qui nous donnera :

$$F = K_0 \rho^3 \omega^3 S f(\alpha) \sin^2 \alpha \sec^2 \varepsilon (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)$$

$$Y = K_0 \rho^3 \omega^2 S f(\alpha) \sin \alpha \cos \alpha \sec^2 \varepsilon (1 - \operatorname{tg}^2 \beta),$$

d'où en divisant membre à membre :

$$\frac{F}{Y} = V = \rho \omega \operatorname{tg} \alpha \sec 2\beta,$$

soit la même valeur que précédemment, mais où  $\alpha$ , au lieu de représenter l'angle  $\theta$  de l'hélice, ne représente plus que  $\theta - \varepsilon$ .

Égalant alors les deux valeurs de  $Y$  et réduisant, il vient :

$$K = K(\alpha, \beta) \sec^3 \varepsilon,$$

et par suite, pour le paramètre auxiliaire  $a$  employé dans les formules, la nouvelle valeur  $a \sec \varepsilon$ .

On voit que le tableau de formules du n° [47] doit être employé à la condition de donner à  $\alpha$  la valeur  $\theta - \varepsilon$  et à  $a$  la valeur  $a \sec \varepsilon$ ,  $a$  restant le paramètre défini précédemment en fonction des angles  $\alpha$  (nouveau) et  $\beta$ .

*Association des éléments du corps d'aéroplane et du moteur-propulseur.*

**50.** — Ainsi nous avons ramené au type ordinaire de calculs et de formules le problème d'enlèvement d'un aéroplane *déjà établi*, par l'emploi le plus avantageux d'un moteur et d'un propulseur hélicoïdal dûment combinés. Il ne reste plus qu'à faire encore un pas en avant, en faisant entrer dans cette détermination les éléments eux-mêmes du corps d'aéroplane, soit la surface  $S'$  et son angle d'attaque  $\alpha'$ .

Pour cela, reprenons la relation bien connue :

$$P = P_o' + dS + d'S' + \pi F \quad (1)$$

et posons :

$$\Delta S = dS + d'S'; \quad (3)$$

nous retomberons alors sur la forme habituelle :

$$P = P_o' + \Delta S + \pi F,$$

et nous pourrons appliquer le tableau des formules du n° [47], à la condition d'écrire  $P_o'$  à la place de  $Q$  dans la septième ligne de ce tableau et de modifier convenablement le paramètre  $a$ .

Ce paramètre, qui avait au début pour expression :

$$a^2 = 4K(\alpha, \beta) : 27d,$$

a d'abord pris la forme :

$$a_1 = a \sec \varepsilon$$

pour tenir compte de l'influence de la vitesse  $V'$  sur la marche de l'hélice; mais il faut également y introduire en dénominateur  $\Delta$  au lieu de  $d$ , de telle sorte que l'on écrira finalement :

$$c^2 = a^2 \sec^2 \varepsilon \frac{d}{\Delta}$$

en introduisant la lettre  $c$  au lieu de  $a$  pour éviter toute confusion.

Reste à déterminer  $\Delta$ . A cet effet, on tirera  $S'$  de la formule :

$$K'S'V^2 \sin \alpha' = \lambda^2 KSV^2 \sec^2 \varepsilon$$

et on substituera cette valeur de  $S'$  dans la relation (3), ce qui donnera, toutes réductions faites :

$$\Delta = d + d' \frac{\lambda^2 f(\alpha) \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \beta)}{f(\alpha') \sin \alpha' \sin^2 \varepsilon}.$$

**51.** — Nous arrivons ainsi au tableau définitif des formes de l'aéroplane lorsque les épaisseurs  $d$  et  $d'$  des ailes sustentatrices et propulsives sont fixées *a priori*. Rappelons, d'abord les notations et relations de définition.

*1° Éléments du corps d'aéroplane.*

- $\sigma$ , surface fictive de la nacelle;  $S^o$ , surface réelle au maître couple;
- $P_o'$ , poids de cette dernière (équipage, provisions, etc.);
- $S'$ , surface des ailes sustentatrices;
- $d'$ , leur poids au mètre courant;
- $\alpha'$ , leur inclinaison ou angle d'attaque;
- $K' = K_o f(\alpha')$ , leur coefficient de résistance sous ladite inclinaison et à leur vitesse de régime  $V'$ ;
- $V'$ , vitesse de régime horizontale en air calme.

2° Éléments du moteur-propulseur.

F, force en chevaux;  
 $\Pi = \pi F$ , poids du moteur;  
 S, surface de l'hélice;  
 d, son poids moyen au mètre courant;  
 $\theta$ , son inclinaison moyenne;  
 $\beta$ , son angle de rendement défini précédemment;  
 $\rho$ , distance du centre de poussée à l'axe de rotation;  
 $\omega$ , vitesse angulaire de régime;  
 $K_0$ , le coefficient de résistance de l'air, soit 0,12.

3° Paramètres.

$\lambda^2 = \frac{S' \sin \alpha'}{\sigma + S' \sin^2 \alpha'}$ , facteur algébrique de transformation;

$\mu = \sigma : S' \sin^2 \alpha'$ , — — — — —  $\lambda^2 = \frac{1}{(1 + \mu) \sin \alpha'}$ ;

$\varepsilon$ , angle de réduction  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{V'}{\omega \rho}$ ;

$\alpha$ , angle réel d'attaque de l'hélice  $\alpha = \theta - \varepsilon$ ;

$\Delta$ , densité auxiliaire  $\Delta = d + d' \frac{\lambda^2 f(\alpha) \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \beta)}{f(\alpha') \sin \alpha' \sin^2 \varepsilon}$ ;

$\Delta'$ , — — — — —  $\Delta' = \Delta f(\alpha') \sin \alpha' \sin^2 \varepsilon : \lambda^2 f(\alpha) \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \beta)$ ;

V, vitesse auxiliaire de régime  $V = \omega \rho \operatorname{tg} \alpha \sec 2\beta$ ;

c, paramètre auxiliaire  $c^2 = 4K_0 \frac{\cos^3 \alpha f(\alpha)}{\sin \alpha} \sec^3 \beta \cos^3 2\beta \sec^2 \varepsilon : 27 \Delta$ .

Tableau des formules définitives.

POUR UN MINIMUM DE	F DU MOTEUR	S DU PROPULSEUR ET S' DES AILES	Y EFFORT AXIAL
V vitesse auxiliaire de régime.....	$2 : 3 c \lambda$	$2 \lambda^2 : 3 \pi$	$\frac{2}{3 \pi} \left( \frac{\pi}{c} \right)^{2/3}$
F puissance du moteur.	F	$2 \frac{c^2 \lambda^6}{\pi^3} \Delta S$	$\frac{2 Y}{3 \pi} \left( \frac{\pi}{c} \right)^{2/3}$
Y effort axial.....	$\frac{3}{2} c \lambda F$ ou $\frac{3}{2} \frac{c}{\pi} \Pi$	$\frac{3 c^2 \lambda^4}{\pi^2} \Delta S$	Y
$\Pi$ poids du moteur...	$\pi F$	$2 \frac{c^2}{\pi^3} \lambda^6 \Delta S$	$\frac{2}{3} Y \left( \frac{\pi}{c} \right)^{2/3}$
$\Delta S$ poids de l'hélice et des ailes.....	$\frac{1}{2} \frac{c \lambda^3}{\pi} \Pi$ ou $\frac{1}{3} \lambda^2 Y$	$\Delta S$	$\frac{1}{3} Y \left( \frac{\pi}{c} \right)^{2/3}$
d/S' poids des ailes.....	$(\Delta - d) S$	$(\Delta - d) S$	$(\Delta - d) S$
Po' poids de la nacelle montée et chargée	$\left[ \frac{c}{\pi^2} \lambda^3 - 1 \right] \Pi$	$\left( \frac{c^2}{\pi^2} \lambda^6 - 1 \right) \Delta S$	$\left[ \lambda^2 - \left( \frac{\pi}{c} \right)^{2/3} \right] Y$

On remarquera que les formules de la seconde série, qui correspondent au minimum de S, peuvent également s'appliquer à la recherche du minimum de S', à la condition d'y remplacer  $\Delta$  par  $\Delta'$ ,  $\Delta'$  ayant pour expression :

$$\Delta' = d' + d \frac{f(\alpha') \sin \alpha' \sin^2 \varepsilon}{\lambda^2 f(\alpha) \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \beta)}$$

et de changer les accents de S, S', d et d' dans le tableau.

**52.** — Toutes ces relations ont été établies par la seule discussion de la réalité des racines de l'équation du troisième degré. On peut donc dire que la sustentation d'une nacelle de poids  $P_o'$  est toujours possible pourvu que les facteurs de F, de S ou de Y dans la dernière ligne du tableau soient positifs, c'est-à-dire pourvu que l'on ait  $\pi < c\lambda^3$ . Si, ces facteurs une fois déterminés, on donne à  $P_o'$  la valeur correspondante, il n'y a qu'une solution à la question; si on lui donne une valeur inférieure, il y a dans ce cas deux valeurs convenables pour V; on prendra sans doute la plus faible. Ces deux valeurs s'obtiendront par la résolution graphique ou numérique de l'équation du troisième degré, dont il a déjà été donné des exemples.

Il faudrait donc, pour continuer l'étude méthodique de notre système, passer à la discussion analytique des facteurs variables de la dernière ligne, lesquels facteurs comprennent encore plusieurs éléments.

Mais l'on se heurterait à de grandes complications algébriques si l'on voulait traiter la question dans toute sa généralité, et comme il ne s'agit en somme que d'une étude de mécanique appliquée, il convient de profiter des indications déjà fournies par l'expérience pour simplifier le problème.

Dans ce but, on peut d'abord mettre les expressions du tableau [31] sous une forme plus maniable, à l'aide d'un angle auxiliaire  $\gamma$ , qui se prête non seulement aux calculs proprement dits, mais à la discussion des formules.

Si l'on pose en effet :

$$\cos \gamma = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\pi}{c} \right)^{1/3}$$

et que l'on effectue dans les expressions les substitutions correspondantes, on remplace le tableau en question par le suivant, où tout est rapporté au poids  $\Pi = \pi F$  du moteur.

POUR UN MINIMUM DE	F	S ET S'	Y
V	$\frac{2}{3\pi} \lambda^3 \cos^3 \gamma$	$\frac{2}{3\pi} \lambda^3$	$\frac{2}{3\pi} \lambda^3 \cos^2 \gamma$
$\Delta S = \Delta' S'$	$\frac{\Pi}{2} \sec^3 \gamma$	$\frac{\Pi}{2} \cos^6 \gamma$	$\frac{\Pi}{2}$
$P_o'$	$\Pi (\sec^3 \gamma - 1)$	$\frac{\Pi}{2} (1 - \cos^6 \gamma)$	$\frac{3}{2} \Pi \operatorname{tg}^2 \gamma$

Les autres éléments sont reliés entre eux par les formules de définition déjà rappelées.

L'angle semble bien être une fonction du paramètre  $\lambda$ , mais, dans les applications, on doit remarquer que l'on peut se donner séparément ces deux paramètres et déterminer ensuite pour chaque cas particulier les valeurs à attribuer aux angles  $\alpha$ ,  $\alpha'$ , aux densités d, d', aux proportions des surfaces  $\sigma$  et S, etc., de manière à bien obtenir pour  $\lambda$  et  $\gamma$  les nombres reconnus nécessaires.

On peut également limiter comme il suit la discussion des valeurs à donner aux divers éléments.

*Données expérimentales.*

**53.** — 1° *Éléments du corps d'aéroplane.* — On a trouvé, pour le facteur  $\lambda^2$ , qui correspond au rendement de cette partie de l'appareil, la valeur maximum  $\frac{1}{4 \sin \alpha'}$  dans le cas d'un moteur à action directe et  $\frac{1}{2 \sin \alpha'}$  dans le cas de l'interposition d'un propulseur. Lorsque le facteur  $K'$ , qui caractérise le rendement des ailes, devient considérable, le terme  $\sigma$  devient de plus en plus négligeable, et à la limite, il vient pour  $\lambda^2$  la valeur  $\frac{1}{\sin \alpha'}$ . Ce sont ces trois valeurs qu'il convient d'employer de préférence dans les applications.

L'angle  $\alpha'$  a déjà été employé avec les valeurs  $3^\circ 20'$  et  $5^\circ 43'$  dans le cas du moteur à action directe; on peut joindre à ces deux valeurs celle de  $11^\circ 20'$  ou  $12^\circ$  qui semble être une limite supérieure.

2° *Éléments du moteur-propulseur.* — L'angle d'attaque réel  $\alpha$  devrait, d'après Drzewiecki, être pris égal à  $1^\circ 50'$ . Ce chiffre est peut-être trop faible à raison des variations des effets du vent. Il semble admissible de le fixer à  $5^\circ 43'$  (angle dont la tangente est 0,1), ce qui est d'accord avec les essais Hervé au point fixe.

La discussion des mêmes essais nous a donné pour l'angle  $\beta$  la valeur de  $30^\circ$ .

Enfin l'angle de réduction  $\varepsilon$  pourra, pour la facilité des calculs, recevoir la même valeur  $5^\circ 43'$ , ce qui correspond à la relation  $V' = \frac{w\rho}{10}$ ; on le changera du reste au cours des applications si cela semble opportun.

Puisque l'on conserve pour  $\beta$  la valeur  $30^\circ$ , il convient de supposer que les surfaces d'hélices seront semblables à celle employée dans les essais qui ont donné cette valeur. Comme l'on avait dans ce cas  $\rho = 2$  m. 60 et  $S = 3,834$ , on déduira la relation  $S = 0,566 \rho^2$  ou, en arrondissant,  $S = 0,6 \rho^2$ .

Enfin nous adopterons pour les ailes de l'aéroplane le même coefficient  $f(\alpha')$  que pour celles de l'hélice, soit 4,21 avec  $K = 0,12$ , c'est-à-dire  $K' = 0,527$ .

Les valeurs ainsi déterminées pour les divers éléments et paramètres semblent assez plausibles pour se prêter à l'établissement de prévisions acceptables.

Pour le poids du moteur, nous admettons  $\pi = 0$  kg. 05, ce qui correspond à 3 kg. 750 par cheval; il ne semble pas que l'on puisse descendre au-dessous d'ici longtemps, le cheval étant mesuré sur le moyeu de l'hélice.

**Applications.**

**54.** — *Discussion d'un aéroplane aux ailes inclinées de  $\alpha' = 5^\circ 43'$ .*

L'angle  $\alpha'$  étant donné, le paramètre  $\lambda^2$  variera avec le rapport  $\mu$ , depuis  $\frac{1}{\sin \alpha'}$  ou 10 pour  $\mu = 0$ , jusqu'à des valeurs de plus en plus faibles à mesure que l'on fera croître  $\mu$ , c'est-à-dire le rapport de la surface résistante  $\sigma$  à la surface utile  $S'$ .

\* Si l'on donne ainsi à  $\lambda^2$  les valeurs 2, 2,5, 5, 9 et 10 qui correspondent à  $\mu = 4, 3, 1, \frac{1}{9}$  et zéro, on en déduira d'abord les valeurs de  $c$ , puis les valeurs de  $\gamma$  que l'on utilisera à

l'aide du tableau [52], et l'on passera de là à la détermination de tous les éléments. Nous donnons ci-dessous le détail de la marche des opérations pour  $\lambda^3 = 2$ , et ensuite un tableau d'ensemble des résultats pour les différentes valeurs traitées.

Les données communes sont, comme il a été indiqué :  $\alpha = 5^\circ 43'$ ,  $\alpha' = 5^\circ 43'$ ,  $\varepsilon = 5^\circ 43'$ ,  $\theta = 14^\circ 26'$ , puis  $d = 20$  et  $d' = 1$ . On admet pour  $f(\alpha)$  et  $f(\alpha')$  les valeurs expérimentales 4,21 trouvées pour l'hélice Hervé et étendues aux ailes sustentatrices.

Tous les résultats sont proportionnels à la puissance F : nous prendrons, pour ne pas avoir de trop faibles chiffres,  $F = 100$  chevaux, ce qui entraîne  $\Pi = 375$  kilog. Il s'agit donc d'apprécier l'effet d'un moteur de 100 chevaux, commandant une hélice Hervé, avec ailes sustentatrices de différentes dimensions inclinées à  $5^\circ 43'$ .

$$\text{On calcule d'abord : } \Delta = 20 + \frac{200\lambda^3}{3} = \frac{460}{3}$$

$$\text{puis : } \frac{c^2}{\pi^2} = \left[ \frac{1 \times 0,527}{0,6} \sin^2 5^\circ 43' : \frac{1}{400} = 52,565 \right] : \Delta$$

$$\text{et de là : } \cos^6 \gamma = \frac{\pi^2}{c^2} : \lambda^6 \quad \text{d'où : } \gamma = 32^\circ 18'$$

$$\text{Ensuite : } P_o' = 375 (\sec^3 \gamma - 1) = 246 \text{ kilog.}$$

$$\Delta S = \Delta' S' = \frac{1}{2} (P_o' + \Pi) = \frac{375 + 246}{2} = 310,5 \quad \text{d'où : } S = 2 \text{ m}^2 024$$

$$\Delta' = \frac{3\Delta}{200\lambda^3} \quad \text{et par suite : } S' = 270 \text{ m}^2$$

$$\text{Enfin : } \sigma = \rho S' \sin^2 \alpha' = 0,04 S' = 10 \text{ m}^2 8.$$

Il ne faut pas oublier que  $\sigma$  est la surface fictive de la nacelle ; si cette dernière est du type déjà employé dans nos applications, la surface réelle devrait être égale à 4 mètres carrés pour  $\sigma = 0,1 : 4,21$  et par suite la surface réelle de ladite nacelle serait  $40 \times 4,21 \sigma$ , soit en l'espèce 1.820 mètres carrés.

Ce chiffre paraît fantastique, mais il faut s'attendre à beaucoup de résultats de ce genre dans l'étude qui nous occupe.

La vitesse auxiliaire de régime  $V = \frac{2}{3\pi} \lambda^2 \cos^2 \gamma = 16 \text{ m. } 10$  et par suite la vitesse horizontale de marche aura pour valeur  $8 \text{ m. } 05$ . La vitesse de circulation  $\omega \rho$  du centre de poussée de l'hélice sera  $16 \text{ m. } 10 : 0,2 = 80 \text{ m. } 5$ .

Si l'on prend  $\rho^2 = 1,8 S$ , il vient  $\rho = 1 \text{ m. } 91$   $\omega = \frac{80,5}{1,91} = 42,15$  et par suite le nombre N de tours par minute devra être  $60 \omega : 2\pi = 403$ .

Si au lieu de rechercher le rendement maximum du moteur on eût demandé les surfaces minima, on eût trouvé un poids  $P_o'$  égal à 119 kilog. et une vitesse  $V = 26 \text{ m. } 74$ .

Par contre  $\Delta S = \Delta' S' = 68 \text{ kg. } 500$ .  $S' = 59 \text{ m}^2 6$ ,  $\sigma = 2,38$  et la surface réelle de la nacelle 400 mètres carrés.

La surface de l'hélice tombe à 0,446 et  $\rho$  à 0 m. 90, d'où pour  $\omega = 148$  et  $N = 1.360$  tours par minute, avec une marche horizontale de 13 m. 365.

Enfin la solution intermédiaire que donne la troisième colonne du tableau de formules donnerait pour  $P_o'$  225 kilog. et une vitesse  $V$  de 19 m. 05, résultats assez voisins de ceux correspondant au minimum de  $F$ .

Le tableau ci-dessous résume les résultats des calculs faits d'après les diverses valeurs attribuées à  $\mu$  et par suite à  $\lambda$  et à  $\gamma$ , les autres données restant constantes.

$\mu$	4			3			1			1/9			zéro		
$\lambda^2$	2			2,5			5			9			10		
	F	S	Y	F	S	Y	F	S	Y	F	S	Y	F	S	Y
$P_o'$	246 <sup>k</sup>	119	225	412	124,2	359	1.242	177,4	929	2.573	184	1.628	2.920	185	1.825
$S'$	270	59,6	163	351	»	»	763	»	»	1.425	»	»	1.647	»	»
$\sigma$	10,8	2,38	6,52	10,53	»	»	7,63	»	»	1,50	»	»	zéro	»	»
$S_o$	1.820	400	1.095	1.775	»	»	1.355	»	»	258	»	»	—	»	»
$S$	2 <sup>m</sup> 202	0,446	1,23	2,11	»	»	2,29	»	»	2,38	»	»	2,47	»	»
$V$	16 <sup>m</sup> 4	26,66	19,05	15,9	33,33	20,34	15,5	66,67	25,18	15,3	120	30,12	15,2	133	31,40
$\rho$	1,91	0,90	1,49	1,95	»	»	2,03	»	»	2,07	»	»	2,11	»	»
$\omega$	422	148	67	408	»	»	38,3	»	»	37,10	»	»	36,1	»	»
$N$	403	1.360	636	390	»	»	365	»	»	252	»	»	343	»	»
$V'$	8,05	13,365	9,92	7,95	16,66	10,17	7,75	33,33	12,59	7,65	60	15,06	7,60	66,6	15,70

L'examen de ce tableau donne lieu aux remarques suivantes :

La série de gauche, correspondant à  $\mu = 4$ , ne figure que pour mémoire et permettra de tracer plus nettement, si on le désire, les courbes représentatives des diverses fonctions.

La série suivante ( $\mu = 3$ ) correspond à la solution théorique indiquée dans le résumé fait au début du présent travail, où il était énoncé que le travail était minimum lorsque la résistance de sustentation est égale à trois fois la résistance à l'avancement. On voit que cette assertion n'est pas fondée dans le cas actuel : elle ne l'est que dans le cas traité au chapitre I, lorsque l'effort moteur horizontal est obtenu sans prendre point d'appui sur l'air ambiant.

Les trois dernières colonnes sont plus intéressantes : la dernière correspond à un cas limite  $\mu = 0$ , celui où la nacelle n'éprouverait aucune résistance. Elle définit donc un cas de maximum impossible à atteindre.

*Autre remarque.* — A l'exception des éléments correspondant explicitement à la vitesse, tous les autres, soit  $F$ ,  $H$ ,  $P_o'$ ,  $S$  et  $S'$  sont proportionnels entre eux. Par exemple, si pour  $F = 100$  chevaux on a  $P_o' = 2.573$ , pour  $F = 30$  chevaux on aura  $P_o' = 772$  kilog.,  $S' = 427,5$ ,  $S_o = 77,4$  et ainsi de suite. De même, si  $S$  au lieu d'être pris égal à 2 m<sup>2</sup> 38 était pris égal à 1 m<sup>2</sup> 17 seulement, il ne faudrait monter qu'un moteur de 50 chevaux et des ailes sustentatrices de 712 mètres carrés pour soutenir 1.286 kilog. dans une nacelle de 129 mètres carrés, en continuant à marcher à raison de 7 m. 65 et ainsi de suite. Mais le rayon  $\rho$  ne serait pas 2,07 : 2 ou 1,035, il serait 2,07 :  $\sqrt{2}$  ou 1 m. 46 ;  $\omega$  aurait pour valeur 52,4 et  $N$  attendrait le chiffre de 447.

Enfin les vitesses considérables de rotation dans le cas de  $S$  minimum ne pourraient être réalisées sans un renforcement de l'hélice, ce qui diminuerait encore le rendement spécifique  $P_o' : F$ .

**55.** — 2° *Recherche d'une vitesse de marche déterminée.* — Dans tout ce qui précède, nous avons considéré l'angle  $\gamma$  comme défini par la connaissance de tous les éléments et fait varier seulement le paramètre  $\lambda$ , mais, comme nous l'indiquons au n° [52], on peut également se donner une valeur de  $\gamma$  et s'en servir pour déterminer un autre élément.

On peut, par exemple, se donner la vitesse de marche  $V'$  concurremment avec le facteur  $\lambda$  du tracé de l'aéroplane. Prenons ainsi  $\lambda^2$  de façon à permettre un rapprochement avec des résultats déjà trouvés, mais proposons-nous de réaliser une vitesse de marche de 15 m. 30, soit le double de la vitesse obtenue. Cette vitesse  $V'$  de 15 m. 30 correspond à une vitesse  $V$  de 30 m. 60 d'après les formules admises, et, par suite à un angle  $\gamma'$  donné par l'équation :

$$\cos^3 \gamma' = \frac{3\pi}{2\lambda^2} \times 30,60 ;$$

soit pour  $\gamma'$  la valeur  $39^\circ 22'$  à porter dans les formules qui donnent  $P_o'$ ,  $S$ , etc.

Mais pour que  $\gamma'$  puisse prendre cette valeur, il faut que  $c$  soit de son côté égal à  $\pi : \lambda^3 \cos^3 \gamma'$  ou à  $\frac{2}{3V\lambda}$ , c'est-à-dire à  $\frac{2}{\pi \times 30,6 : 9}$ , et comme nous savons que  $c^2$  a pour expression :

$$c^2 = 4 K_o f(\alpha) \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} \sec^2 \beta \cos^2 2\beta \sec^2 \varepsilon : 27 \Delta.$$

Nous en déduisons, en conservant l'hélice type Hervé :

$$\Delta = 3,548 : 27 c^2,$$

c'est-à-dire :

$$d + \frac{2\lambda^2 d'}{0,3 \sin \alpha'} = 24 c^2,$$

en admettant que pour les ailes  $f(\alpha')$  ne change pas.

Si l'on conserve à  $d$  et  $d'$  leurs valeurs, cela donne pour  $\alpha' = 1^\circ 24'$  et pour  $P_o' = 1095$  kilog., mais avec une valeur de  $\mu = 3,54$  beaucoup trop forte.

Admettons maintenant une autre règle initiale et posons à titre d'essai  $\mu = \sin \alpha'$ , de telle sorte que  $\lambda^2$  prend la forme  $1 : (1 + \sin \alpha') \sin \alpha'$ . Il en résulte d'abord pour  $\Delta$  et  $\Delta'$  les expressions :

$$\Delta = d + d' \frac{f(\alpha)}{f(\alpha')} (1 - \operatorname{tg}^2 \beta) \operatorname{tg} \alpha : (1 + \sin \alpha') \sin^2 \alpha' \sin^2 \varepsilon$$

et 
$$\Delta' = d' + d \frac{f(\alpha')}{f(\alpha)} (1 + \sin \alpha') \sin^2 \alpha' \sin^2 \varepsilon : (1 - \operatorname{tg}^2 \beta) \operatorname{tg} \alpha.$$

Les angles  $\alpha$ ,  $\alpha'$  et  $\varepsilon$  étant toujours très petits, on pourra souvent, dans le calcul numérique de  $c$ , négliger le terme  $d$  de  $\Delta$  devant le second terme, et la substitution donnera la nouvelle relation :

$$c^2 = \frac{4K'}{27d'} \operatorname{tg}^2 \varepsilon \sin^2 \alpha' (1 + \sin \alpha') : \operatorname{tg}^2 \alpha \sec^2 2\beta.$$



Le rapport  $\frac{4K'}{27d'}$  caractérise le corps d'aéroplane ; nous l'avons désigné au n° [41] par  $a'^2$ .

D'autre part la relation qui donne V dans le cas de rendement maximum du moteur s'exprime à l'aide de  $c$  et de  $\lambda$  et donne, toutes réductions faites :

$$\omega\rho = \frac{2}{3a'} \cot \delta \cot \varepsilon$$

ou :

$$V' = \frac{2}{3a'} \cot \delta.$$

C'est la même relation que nous avons trouvée dans le cas du moteur à action directe, mais avec cette différence essentielle que l'on a ici  $\mu = \sin \alpha'$  au lieu que l'on avait  $\mu = 3$ .

Par conséquent, pour obtenir, avec le moteur à propulsion hélicoïdale, la même vitesse et en général les mêmes conditions de marche qu'avec le moteur direct, il faut que la résistance fictive de la nacelle soit réduite dans le rapport de  $\sin \alpha'$  à 3.

Pour qu'il puisse en être ainsi, comme, somme toute, la forme de la nacelle est à peu près imposée par les nécessités déjà reconnues expérimentalement, il est indispensable que le facteur  $K'$  des ailes soit considérablement augmenté. C'est cette amélioration indispensable du facteur  $K'$  qui a fait l'objet des études de Lilienthal et de ses disciples, que nous examinerons plus loin.

Nous limitant pour l'instant aux valeurs de  $K'$  employées, nous allons revenir à l'application déjà essayée d'une vitesse de marche horizontale de 15 m. 3.

Comme l'on a :

$$a'^2 = \frac{4K'}{27d'} = \frac{4 \times 0,527}{27d'} = \frac{2,108}{27} \quad \text{ou} \quad a' = 0,279,$$

on en tire pour  $\delta$  la valeur :

$$\operatorname{tg} \delta = 0,155,$$

qui donne pour  $\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg}^2 \delta$  la valeur 0,0244 :

$$\alpha' = 1^{\circ} 23',$$

angle évidemment inadmissible au point de vue de la stabilité sous l'action de vents obliques.

Cependant cette vitesse  $V'$  de 15 mètres n'était pas bien exagérée si l'on veut tenir compte qu'il faut, dans la pratique, être à même de marcher, non en air calme, mais dans un courant atmosphérique d'une vitesse voisine de 10 mètres, si l'on veut rester maître de ses mouvements.

Si l'on remonte pour V à la valeur de 20 mètres, on obtiendra pour  $\alpha'$  un nouvel angle de  $52'$  encore plus insuffisant comme tenue dans l'air.

Ainsi, dans les conditions actuelles, il n'est pas possible d'obtenir une vitesse pratique sans compromettre la stabilité en recourant à des inclinaisons d'ailes trop minimes. Voyons cependant ce que l'on obtiendrait en améliorant l'hélice.

**56. — 3° Emploi de l'angle d'attaque optimum.** — L'angle d'attaque optimum, d'après Drzewiecki, serait dans l'air, comme nous l'avons rappelé, égal à  $1^{\circ} 50'$ . Voyons donc ce que l'on obtiendrait en donnant à  $\alpha$  la valeur  $1^{\circ} 50'$  ou en arrondissant  $\alpha = 2^{\circ}$ .

Cette valeur de  $\alpha$  peut s'obtenir :  $1^{\circ}$  soit en laissant à  $\theta$  sa valeur déjà adoptée  $11^{\circ} 20'$  et en donnant à  $\varepsilon$  une valeur de  $9^{\circ} 20'$  ;  $2^{\circ}$  soit en conservant à  $\varepsilon$  sa valeur de  $5^{\circ} 43'$ , ce qui conduit à donner à l'hélice l'inclinaison absolue  $\theta = 7^{\circ} 43'$ . Dans le premier cas, la

vitesse horizontale  $V'$  est environ le  $\frac{1}{6}$  de la vitesse de circulation du centre de poussée de l'hélice.

Nous conserverons à  $\alpha'$  la valeur de  $5^\circ 43'$  déjà employée et justifiée par des considérations de stabilité ; nous laisserons également à  $d$  et  $d'$  leurs valeurs égales respectivement à 20 et à 1.

Il y a lieu d'employer le procédé de calcul adopté pour la première application en donnant à  $\lambda^2$  les valeurs extrêmes 9 et 10 pour se placer dans les conditions les plus avantageuses, et à  $\varepsilon$  d'abord  $9^\circ 20'$  puis  $5^\circ 43'$ .

On formera ainsi  $\Delta$ , puis  $c^2$ , qui auront pour valeurs :

$\Delta =$	101	100	231	254
$c^2 =$	0,0684	0,035	0,0140	0,0147

En se bornant au cas de rendement maximum du moteur, on aura immédiatement pour  $V$  les deux valeurs :

$V =$	3,60	3,55	5,64	5,49,
-------	------	------	------	-------

ce qui donne pour  $\omega\rho$ , en admettant que  $\beta$  conserve la même valeur  $30^\circ$  malgré le changement de l'angle  $\alpha$  :

	$\omega\rho = V : 2 \operatorname{tg} \alpha =$	51,3	50,5	80,4	76,4
avec :	$V' = \omega\rho \operatorname{tg} 9^\circ 20' =$	8,44	8,31		
ou :	$\omega\rho \operatorname{tg} 5^\circ 43' =$			8,04	7,64

On remarquera que ces valeurs de  $V'$  sont fort peu différentes, bien que les conditions de marche de l'hélice soient notablement modifiées. En tout cas, ces vitesses seraient insuffisantes pour permettre de se diriger dans l'atmosphère, et la solution ci-dessus serait impraticable.

Ce n'est donc qu'à titre de renseignement que nous indiquons les valeurs correspondantes des autres éléments.

Pour  $\varepsilon = 9^\circ 20'$ , avec le moteur de 100 chevaux dans les conditions de rendement maximum, on trouve une surface d'hélice de 62 mètres carrés et une surface d'ailes portantes de 5.000 mètres ; il est vrai que le poids soutenu s'élèverait à 12 tonnes. En revenant à des dimensions plus raisonnables, on obtient, pour un moteur de 4 chevaux,  $2 \text{ m}^2 47$  de surface d'hélice, 200 mètres carrés de surfaces d'ailes, et un poids soutenu de 485 kilog., chiffre très voisin du chiffre 500 kilog. que nous avons pris comme type normal.

Ces résultats s'appliquent à  $\mu = \sin \alpha'$ , ce qui donne une section maîtresse de 33 mètres pour la nacelle. En admettant l'amélioration de cette dernière jusqu'à  $\mu = 0$ , les chiffres des autres éléments ne seraient guère améliorés. La conclusion de cette remarque est qu'il est inutile, dans l'étude actuelle, de se préoccuper des dimensions théoriques à donner à ladite nacelle.

Si, au lieu de rechercher le moteur minimum, on eût recherché la surface minimum, les surfaces fussent devenues très faibles, il est vrai, mais, d'une part, le poids soutenu n'eût pu dépasser  $\frac{\Pi}{2}$ , ce qui, pour les 500 kilog., eût nécessité un moteur d'un poids supérieur à 1.000 kilog., soit plus de 270 chevaux, et, d'autre part, la vitesse  $V$  se fût élevée à 100 mètres, et, par suite, le nombre de tours à des chiffres absolument fantastiques.

**57.** — Entre ces deux solutions aussi inadmissibles l'une que l'autre, on peut encore étudier un type intermédiaire en se donnant d'une part une vitesse  $V'$  voisine de 20 mètres et, d'autre part, la solution de moindre effort dans le sens de la marche, c'est-à-dire en employant les formules de  $Y$  minimum.

On trouve ainsi que pour soutenir un poids de 525 kilog., il suffirait d'un moteur

de 10 chevaux, avec 150 mètres carrés d'ailes, soit deux ailes carrées d'environ 9 mètres de côté; chiffres moins extraordinaires, et en marchant à une vitesse horizontale de près de 27 mètres, tous chiffres très satisfaisants. Mais de tels résultats ne sont réalisés qu'avec une hélice de faibles dimensions, et, par suite, animée d'une vitesse très considérable, dans ce cas, le chiffre 20 adopté pour sa densité  $d$  se trouverait beaucoup trop réduit et la solution reste encore illusoire.

Le problème de l'aéroplane simple, avec les ressources dont nous disposons actuellement, c'est-à-dire avec les moteurs et hélices réalisés à ce jour ou même probables dans un avenir prochain, ne semble donc pas susceptible d'être pratiquement résolu.

### CHAPITRE III

#### De l'Aéroplane mixte.

*(Association de l'Hélicoptère avec l'Aéroplane).*

**58.** — Les discussions et applications numériques des chapitres précédents semblent mettre en évidence que la solution du problème qui nous occupe ne peut être demandée à un propulseur prenant appui sur l'air, et imprimant au système une vitesse suffisante pour que la composante verticale de la réaction atmosphérique assure la sustentation. L'emploi d'un tel dispositif constitue en effet une sorte de cercle vicieux, puisque d'une part il est nécessaire d'employer une vitesse horizontale considérable et que d'autre part, plus cette vitesse croît, plus le rendement du propulseur s'affaiblit, ce qui ne conduit qu'à des solutions chimériques.

L'emploi d'un moteur à pression horizontale transmise directement, étudié au chapitre I, serait sans doute plus avantageux : on peut même dire qu'il a reçu dans une certaine mesure la sanction de l'expérience car il n'est autre que le dispositif des anciennes fusées de guerre, où la réaction des gaz de la poudre s'échappant par l'arrière venait combattre l'action de la pesanteur. Peut-être cette solution sera-t-elle réalisée un jour, mais actuellement l'on se heurterait à des difficultés de deux sortes : si l'on cherchait à assurer un écoulement régulier de la part d'une masse de gaz comprimée ou liquéfiée, on y parviendrait sans doute assez aisément : mais on ne pourrait emmagasiner pratiquement à bord du navire aérien une quantité notable d'énergie sous cette forme particulièrement utilisable. Si, au contraire, on veut recourir à des explosifs, pour disposer d'une grande énergie sous un faible volume, on s'expose, entre autres difficultés, à des risques de combustions irrégulières amenant des percussions dangereuses et des à-coups inadmissibles.

L'étude de l'hélicoptère a permis au contraire d'espérer obtenir des sustentations suffisantes dans des conditions relativement favorables : il est donc intéressant de rechercher si l'on ne pourrait pas, en associant les deux dispositifs, établir les bases d'un appareil susceptible d'une réalisation pratique.

Conservant toutes les notations précédemment employées pour le corps d'aéroplane et son propulseur, ainsi que celles de l'hélicoptère que nous affecterons seulement d'un double accent "", nous remarquerons que l'effort de sustentation verticale aura pour valeur :

$$P = P_0 + dS + d'S' + d''S'' + \pi F' + \pi F''$$

et devra être fourni par les deux composantes :

$$Y' = K'S'V'^2 \sin \alpha' \quad \text{et} \quad Y'' = K''S''V''^2.$$

L'effort horizontal Y, demandé à l'appareil, sera toujours :

$$Y = KSV^3 = K' (\sigma + S' \sin^2 \alpha') V'^3 = \frac{1}{\lambda^3} Y'.$$

la vitesse  $V'$  est la vitesse réelle de marche horizontale : les vitesses  $V$  et  $V''$  sont des vitesses fictives ayant pour expression :

$$V = \omega \rho \operatorname{tg} \alpha \sec 2 \beta \quad V'' = \omega'' \rho'' \operatorname{tg} \alpha'' \sec 2 \beta''.$$

Nous négligerons, provisoirement, dans le fonctionnement de l'hélicoptère, l'effort horizontal supplémentaire provenant de la vitesse d'entraînement  $V'$  et que nous avons étudié au n° [35].

Dans ces conditions, toutes substitutions faites, l'équation générale aura pour expression :

$$Y' + Y'' = P,$$

c'est-à-dire :

$$P_0 + dS + d'S' + d''S'' + \pi F - \lambda^2 K(\alpha, \beta) SV^3 \sec^2 \varepsilon - K(\alpha'', \beta'') S'' V''^3 = 0 \quad (1)$$

où :  $F = F' + F''$ . Enfin nous pouvons admettre que les deux hélices sont de surfaces semblables, de telle sorte que l'on aura  $K(\alpha, \beta) = K''(\alpha'', \beta'')$ . Ces prémisses et simplifications établies, étudions la question suivante.

Disposant d'un moteur de puissance totale  $F$ , distribuer au mieux cette puissance entre l'hélicoptère et le propulseur de l'aéroplane.

Écrivons à cet effet :

$$\begin{aligned} K(\alpha, \beta) SV^3 &= F \cos^2 \varphi & \text{d'où :} & & S'' &= F \sin^2 \varphi : KV^3 \\ K(\alpha'', \beta'') S'' V''^3 &= F \sin^2 \varphi & & & S'' &= F \sin^2 \varphi : K'' V''^3 \end{aligned}$$

et comme précédemment :  $\Delta S = dS + d'S'$   
et récrivons l'équation (1) en y remplaçant les  $S$  par leurs valeurs, on obtiendra, en ordonnant, par rapport à  $\frac{1}{V''}$ , la relation suivante :

$$\frac{d'' \sin^2 \varphi}{K''} \frac{1}{V''^3} - \sin^2 \varphi \frac{1}{V''} + \frac{\Pi + P_0}{F} + \frac{\Delta}{K} \cos^2 \varphi \frac{1}{V^3} - \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{V} = 0.$$

Les conditions de réalité des racines de l'équation en  $V''$  donnent les deux expressions ci-dessous, après réduction,

$$V''^2 = \frac{3d''}{K''},$$

$$\frac{\Pi + P_0}{F} + \frac{\Delta}{KV^3} \cos^2 \varphi - \frac{\lambda^2}{V} \cos^2 \varphi = \frac{2}{3} \frac{\sin^2 \varphi}{V''}.$$

On simplifie ces expressions en revenant aux notations déjà employées :

$$a''^2 = \frac{4K''}{27 d''} \quad c^2 = \frac{4K}{27 \Delta}$$

qui donnent le système :

$$V'' = \frac{2}{3a''}$$

$$\text{et :} \quad 4 \frac{\cos^2 \varphi}{27 c^2} \frac{1}{V^3} - \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{\Pi} \frac{1}{V} + \frac{P_0 + \Pi - a'' F \sin^2 \varphi}{F} = 0. \quad (2)$$

On remarquera que ce système eût pu s'écrire directement en partant des formules établies dans la théorie de l'hélicoptère.

Si nous appliquons en effet les formules [27], donnant le rendement maximum d'un moteur de force  $F'' = F \sin^2 \varphi$  avec une hélice à paramètre  $a''$ , on trouve qu'il est produit un enlèvement de  $a'' F \sin^2 \varphi$ , en sus du poids de l'hélice, en marchant à une vitesse  $V'' = \frac{1}{3a''}$  comme nous venons de l'établir directement.

Et l'équation (2) actuelle n'est autre que l'équation (1) de l'aéroplane dans laquelle la force ascensionnelle  $P_o$  est précisément réduite de  $a'' F \sin^2 \varphi$ .

On peut maintenant discuter les diverses solutions que l'on peut donner à l'équation (2).

**59. — 1° Moteur minimum.** — En appliquant aux données de l'équation (2) les formules [51] ou encore en la discutant directement par la méthode habituelle, on trouve les deux relations :

$$V = \frac{2}{3c\lambda}$$

$$\text{et :} \quad P_o + \Pi = (c\lambda^3 \cos^2 \varphi + a'' \sin^2 \varphi) F.$$

Il ressort de cette dernière, mise sous la forme :

$$P_o + \Pi = c\lambda^3 F + (a'' - c\lambda^3) F \sin^2 \varphi$$

que, étant donnée une puissance  $F$ , il y a avantage à l'utiliser partiellement sur un hélicoptère pourvu que l'on ait :  $a'' - c\lambda^3 > 0$  ;

Et si cette condition est satisfaisante, le rendement sera d'autant plus avantageux que  $\sin \varphi$  sera plus considérable.

On devra donc donner à l'hélicoptère toute la puissance disponible, une fois la vitesse horizontale  $V'$  assurée, cette vitesse horizontale étant en effet l'un des éléments essentiels de l'établissement de l'aéronat.

**60. — Surface minimum.** — Au lieu de chercher à faire marcher l'aéroplane avec le minimum de moteur, on pourrait le faire fonctionner avec le minimum de surface des ailes, puisque c'est l'énorme dimension de ces organes qui s'oppose principalement à la réalisation pratique du problème. En appliquant alors les formules [51] pour ce cas particulier, on écrira :

$$P_o' = \frac{\Pi}{2} (1 - \cos^6 \gamma) \cos^2 \varphi + \left( \frac{a''}{\pi} - 1 \right) \Pi \sin^2 \varphi,$$

en faisant  $\varphi = 0$ , on obtient pour  $P_o$  le rendement de l'aéroplane simple. Si l'on forme la dérivée, on écrira :

$$\frac{dP_o'}{d\varphi} = \left( \frac{a''}{\pi} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{\cos^6 \gamma}{2} \right) \sin 2\varphi,$$

d'où il ressort que  $P_o'$  croît avec  $\varphi$  lorsque le facteur entre parenthèses est positif. En y remplaçant  $\cos^6 \gamma$  par sa valeur en fonction des éléments constitutifs, on obtient pour ce facteur l'expression :

$$\frac{1}{\pi} \left[ a'' - \frac{3}{2} \left( \pi - \frac{\pi^3}{3c^2\lambda^6} \right) \right]$$

et le maximum du terme soustractif a lieu pour  $\frac{\pi^2}{c^2\lambda^6} = 1$ , de telle sorte que le facteur en question, toutes réductions faites, est toujours supérieur à  $a'' - \pi$ .

D'autre part, l'on doit toujours avoir  $c\lambda^3 > \pi$ , sans quoi l'aéroplane simple ne marcherait pas : on retombe donc sur la condition nécessaire et suffisante  $a'' - c\lambda^3 > 0$ .

Dès que cette condition est satisfaite, que l'on se place au point de vue du moteur minimum ou de la réduction des surfaces, il y a avantage à munir l'aéronef d'un hélicoptère élévatoire, et à donner à ce dernier toute la puissance disponible une fois la vitesse horizontale  $V''$  assurée comme il a été dit précédemment.

**61.** — *Signification de la condition  $a'' - c\lambda^3 > 0$ .* — Quelle est la signification mécanique de cette relation, qui caractérise la possibilité de l'emploi de l'hélicoptère ?

Si on remplace  $a''$  et  $c\lambda$  par leurs valeurs, on écrira l'inégalité sous la forme :

$$\frac{1}{V''} - \frac{\lambda^2}{V} > 0.$$

Les vitesses  $V''$  et  $V'$  caractérisent le régime des deux hélices : le rapport  $\lambda^2$  caractérise le rapport des deux composantes verticale et horizontale de l'action de l'air sur le corps d'aéroplane en marche, car l'on a :

$$\lambda^2 = \frac{S' \sin \alpha'}{\sigma + S' \sin^2 \alpha'} = \frac{Y'}{X + R}.$$

L'inégalité s'écrit donc :

$$\frac{V}{V''} > \frac{Y'}{X + R} \quad \text{ou :} \quad \frac{V''}{V} < \frac{X + R}{Y'}.$$

Par conséquent, la condition d'introduction de l'hélicoptère revient à dire que la vitesse de régime de l'hélice élévatoire puisse être moindre, relativement à celle de l'hélice propulsive, que le rapport des résistances horizontale et verticale du corps d'aéroplane.

Si l'on admet que les deux hélices aient les mêmes caractéristiques angulaires, c'est-à-dire  $\alpha'' = \alpha = \theta - \varepsilon$  et  $\beta'' = \beta$ , les vitesses fictives  $V''$  et  $V$  seront à remplacer par les vitesses réelles de circulation  $\omega''\rho''$  et  $\omega\rho$  des centres de poussée.

Mais l'élément de la question n'est pas tant la vitesse  $\omega\rho$  que la vitesse réelle  $V'$  que l'on veut imprimer à l'appareil : remplaçant donc  $V$  par sa valeur en fonction de  $V'$ , laquelle est donnée par :

$$V = \omega\rho \operatorname{tg} \alpha \sec 2\beta = V' \cot \varepsilon \operatorname{tg} \alpha \sec 2\beta;$$

L'équation de condition deviendra :

$$\frac{\omega''\rho'' \operatorname{tg} \varepsilon}{V'} < \frac{X + R}{Y'} \quad \text{ou :} \quad < \sin \alpha' : \left( \sin^2 \alpha' + \frac{\sigma}{S'} \right).$$

Par suite, pour de très faibles vitesses  $V'$ , il ne sera pas nécessaire de recourir à l'hélicoptère, ce qui est d'accord avec les résultats des essais de vol plané effectués dans ces derniers temps.

D'autre part, l'équation de condition peut encore se mettre sous la forme :

$$V' > \omega''\rho'' \operatorname{tg} \varepsilon \left( \sin^2 \alpha' + \frac{\sigma}{S'} \right) : \sin \alpha'.$$

Lorsque  $S'$  croît, le second membre décroît, il en est de même par conséquent de la limite inférieure de  $V'$ .

Il sera donc d'autant plus tôt nécessaire de recourir à l'hélicoptère que la surface des ailes, pour une même nacelle, sera plus considérable.

Par contre, l'emploi de l'hélicoptère, permettant de réduire cette surface des ailes, contribuera à la stabilité du système.

*Établissement d'un aéroplane mixte.* — Supposant satisfaite la condition  $a'' - c\lambda^3 > 0$ , nous aurons avantage, dans tous les cas, comme nous venons de le démontrer, à établir un aéroplane mixte, c'est-à-dire soutenu partiellement par un hélicoptère.

Quelles seraient alors les valeurs des différents éléments, déterminées pour les trois cas limites habituels ? Nous nous donnerons comme élément fondamental la vitesse de marche horizontale  $V'$ .

**62.** — 1<sup>er</sup> CAS. — *L'hélicoptère ne soutient qu'une fraction  $P_o''$  de la charge totale  $P_o'$  de la nacelle.* — La puissance motrice nécessaire à l'hélicoptère est alors exprimée par la relation :

$$\Pi'' = P_o'' : \left( \frac{a''}{\pi} - 1 \right)$$

et celle du corps d'aéroplane :

$$\Pi' = (P_o' - P_o'') : (\sec^3 \gamma - 1).$$

D'autre part, la vitesse  $V'$  est reliée à la vitesse de régime  $V$  et par suite aux éléments  $c_1\lambda$  et  $\gamma$  par la formule :

$$V' = V \operatorname{tg} \varepsilon \cot \alpha \cos 2\beta = \frac{2}{3c\lambda} \operatorname{tg} \varepsilon \cot \alpha \cos 2\beta = V\psi. \quad (4)$$

Dans cette expression nous admettons que nous connaissons  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ , ce qui détermine  $c\lambda$  : en se donnant diverses valeurs de  $\lambda$ , on obtiendra des valeurs correspondantes pour  $c$  et l'on pourra dresser un tableau analogue à celui du n° [54].

Si au lieu du minimum de moteur appliqué au corps d'aéroplane, on eût cherché le minimum de surface ou d'effort axial, il suffirait de remplacer  $V$  dans la relation (4) par l'une des valeurs [51] :

$$V = \frac{2\lambda^2}{3\pi} \quad \text{ou} \quad V = \frac{2}{3\pi} \left( \frac{\pi}{c} \right)^{2/3}$$

qui donne de suite, selon le cas,  $\lambda$  ou  $c$ , et l'on poursuivra le calcul en faisant usage des formules [52].

Nous donnerons d'ailleurs plus loin des applications numériques de ce cas, comme de ceux qui vont suivre.

**63.** — 2<sup>e</sup> CAS. — *L'hélicoptère supporte toute la charge de la nacelle, la marche de l'aéroplane n'assurant que la sustentation de ses propres organes.*

L'hélicoptère étant toujours censé marcher à moteur minimum, on aura d'abord :

$$P_o' = \Pi'' \left( \frac{a''}{\pi} - 1 \right),$$

puis l'équation de définition du régime d'aéroplane :

$$dS + d'S' + \Pi' = K'S'V'^2 \sin \alpha' = \lambda^2 KSV^2,$$

avec :

$$\Pi' = \pi KSV^3.$$

Cette équation ne diffère de la relation fondamentale que parce que  $P_o'$  n'y figure pas. L'analyse faite précédemment reste donc applicable à la condition d'introduire dans les tableaux [51] et [52] qui en résultent la condition  $P_o' = 0$ , ce qui se traduit par l'une ou l'autre des formes équivalentes :

$$\sec \gamma = 1, \quad \pi - c\lambda^3 = 0.$$

Si  $\pi < c\lambda^3$ , il y aura quand même un effort ascensionnel dû à la marche de l'aéroplane, et si  $\pi > c\lambda^3$ , le système descendra, étant supposé bien entendu que les autres éléments sont calculés par les formules [51] ou [52].

Soit donc  $\pi = c\lambda^3$  ou  $\sec \gamma = 1$ . Le système des trois colonnes [51] ou [52] se réduit à un seul, qui est le suivant :

$$V = \frac{2\lambda^2}{3\pi}$$

$$\Delta S = \Delta' S' = \frac{\Pi'}{2} = \frac{1}{3} \lambda^2 K S V^2.$$

Le système est déterminé du moment que l'on se donne  $V$  ou plutôt la vitesse vraie  $V'$  de marche horizontale de l'appareil, et tous les éléments se calculeront par les relations :

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= 3\pi V' : 2\psi & S' &= \lambda^2 \sigma : (1 - \lambda^2 \sin \alpha') \sin \alpha' \\ P_s &= \Delta' S' & \Pi' &= 2P_s \\ S &= K' \psi^2 \sigma : (1 - \lambda^2 \sin \alpha') K(\alpha, \beta) = P_s : \Delta, \end{aligned}$$

ces deux dernières expressions de  $S$  donnant une vérification numérique.

De même que précédemment, on pourra résoudre le problème sans prendre les solutions limites données par les expressions ci-dessus. L'équation fondamentale donnera deux valeurs de  $V$  en fonction des autres éléments, et ainsi de suite. Mais on devra toujours vérifier qu'il est satisfait à la relation de condition  $a'' - c\lambda^3 > 0$ .

Il est bien entendu que dans le cas où la relation  $c\lambda^3 = \pi$  ne serait pas satisfaite, il suffirait, pour rétablir l'équilibre, de réduire ou d'augmenter la puissance transmise à l'hélicoptère.

**64. — 3° CAS. —** *L'hélicoptère soutient tous les organes, à l'exception des palettes obliques de l'aéroplane.*

Ce cas présente de l'intérêt parce qu'il simplifie la conduite de l'aéronat : les variations que l'on sera forcé de faire subir aux inclinaisons  $\alpha'$  des palettes, par suite des courants atmosphériques ou de toute autre cause extérieure, étant corrigées par le seul réglage de l'hélice propulsive.

La solution se déduit de la solution précédente en y faisant  $d = 0$ , comme si l'hélice était sans poids, et en calculant ensuite  $\Pi''$  par la relation :

$$\left( \frac{a''}{\pi} - 1 \right) \Pi'' = P_o' + dS.$$

**65. — 4° CAS. —** *L'hélicoptère soutient tout le système ; la marche de l'hélice propulsive n'est réglée que pour vaincre la résistance de l'air au mouvement horizontal.*

Ce cas ne peut pas se produire absolument dans la pratique parce que, du moment qu'il existe des palettes inclinées  $S'$ , ces palettes transmettront une composante verticale au système, et ce sera là du reste la raison d'être de ces palettes, parce que cette composante verticale tendra à régulariser les mouvements de tangage de l'aéronat.

La conduite de l'aéronat ainsi défini sera du même genre que celle du ballon dirigeable actuel, puisque l'hélicoptère soutiendra tout l'appareil, comme le fait actuellement le ballon à hydrogène ou à gaz. Les différences tiendront à la moindre valeur du couple dû à la résistance opposée au mouvement de translation horizontal de l'hélicoptère par rapport à celle opposée au déplacement du ballon. Mais nous nous abstenons d'étudier ici ces questions de conduite qui ne sont pas de notre compétence, et nous nous bornons à étudier les puissances à fournir aux divers organes.

Nous supposons donc, dans ce quatrième cas, que l'aéroplane a été préalablement établi avec ses palettes  $S'$  et qu'il s'agit, sans toucher à ces dernières, d'assurer les mouvements des deux hélices.



Celle de l'hélicoptère devra satisfaire à la relation :

$$\left(\frac{a''}{\pi} - 1\right) \Pi'' = P_o' + dS + d'S',$$

où  $P_o'$  et  $d'S'$  sont immédiatement connus, et où  $S$  est à déterminer d'après les conditions du régime horizontal.

Il suffit à cet effet d'écrire la relation d'équilibre entre la propulsion axiale de l'hélice et la résistance atmosphérique, ce qui donne :

$$K(\alpha, \beta) SV^3 = K'(\sigma + S' \sin^2 \alpha') V^{1/2} \cos^2 \varepsilon,$$

où  $S$  est la seule inconnue, puisque l'on a  $V' = V\psi$ ,  $\psi$  désignant comme plus haut, pour abréger l'écriture, le produit  $\tan \varepsilon \cot \alpha \cos 2\beta$ .

$S$  ainsi connu, on aura pour la puissance à fournir à l'hélice de l'aéroplane :

$$\Pi' = \pi K S \psi^{-3} V^{1/3},$$

et pour celle de l'hélice élévatoire :

$$\Pi'' = (P_o' + dS + d'S') : \left(\frac{a''}{\pi} - 1\right).$$

Cette dernière valeur est un maximum, puisque les palettes de l'aéroplane fourniront un effort ascensionnel supplémentaire; il correspond au cas limite où  $\alpha' = 0$ .

Dans tout ce qui précède, nous avons déterminé les conditions de l'hélice élévatoire sans tenir compte du mouvement d'entraînement horizontal auquel elle participait. Or nous avons montré [33] que, dans ce cas, la puissance à fournir devait être augmentée dans le rapport de  $1 + \frac{V^{1/2}}{2\omega^{1/2}\rho^{1/2}}$  à l'unité  $= 1 + \frac{\omega^{1/2}\rho^{1/2}\tan^2 \varepsilon}{2\omega^{1/2}\rho^{1/2}}$ .

Il y aurait une réserve du même genre à faire au sujet du rendement de l'hélice propulsive lorsque l'aéronat se déplace verticalement : il faudrait multiplier  $\Pi'$  par le facteur  $1 + \frac{\omega^{1/2}\rho^{1/2}\tan^2 \alpha''}{2\omega^{1/2}\rho^{1/2}}$ .

Les applications qui vont suivre permettront de se rendre compte du fonctionnement des aéroplanes mixtes ainsi organisés.

**66. — Applications.** — Reprenons dans cette hypothèse de l'adjonction d'un hélicoptère à l'organisme d'aéroplane l'examen des cas traités au n° [54].

L'hélice élévatoire étant du type Hervé, de même que l'hélice propulsive, sa caractéristique  $a''$  a pour valeur 0,0806. Le rapport  $\frac{a''}{\pi}$  sera donc 1,612, et, par suite, elle sera susceptible d'enlever un poids  $0,612 \Pi'' \sin^2 \varphi$ , ce qui viendra en déduction du travail à demander à l'effort horizontal.

On a trouvé d'autre part [54]  $\frac{c^2}{\pi^2} = 52,565 : \Delta$ , ce qui permettra de former  $c\lambda^3$ . Mais il est plus simple de prendre l'équation de condition sous la forme  $\lambda^2 V'' < V$ , puisque nous avons déjà les valeurs de  $V$  et que  $V''$  est connu une fois pour toutes comme ayant pour valeur  $\frac{2}{3a''} = 8,25$ . On a donc le tableau suivant :

$\lambda^2 =$	2	2,5	5	9	10
$\lambda^2 V'' =$	16,5	20,6	41,25	74,3	82,5
$V =$	16,1	15,9	15,5	15,3	15,2

d'où il suit que dans les conditions de vitesse  $V$  admises, il n'y aurait pas d'avantage à introduire l'hélicoptère; mais ces vitesses  $V$  correspondent à des valeurs  $V'$  trop faibles au point de vue de la dirigeabilité de l'aéronat. Dans le cas traité au n° [55], où  $V' = 15 \text{ m. } 30$ ,

et, par suite,  $V = 30$  m. 60, il y aura lieu d'introduire l'hélicoptère dès que  $\lambda^2$  sera inférieur à 30,6 : 8,25, soit à 3,80.

Si dans la série [54], on eût admis des valeurs moindres pour  $\lambda^2$ , soit par exemple  $\lambda^2 = 1,5$ , l'équation de condition eût été satisfaite, et bien que ce cas ne soit pas pratiquement réalisable, car il correspond à une vitesse  $V'$  encore trop faible, nous le traiterons cependant à titre d'indication.

Supposons donc comme précédemment un moteur de 100 chevaux appliqué à un aéroplane simple ayant pour caractéristique  $\lambda^2 = 1,5$ , et examinons le fonctionnement à moteur minimum. La marche habituelle nous donnera :

$$P_o' = 81 \text{ kilog.} \quad S = 1 \text{ m}^2 90 \quad S' = 190 \text{ m}^2 \quad V = 17 \text{ m. 6} \quad V' = 8 \text{ m. 8.}$$

Cherchons maintenant à munir le système d'un hélicoptère donnant un effort ascensionnel  $P_o'$  de moitié, soit 40 kg. 500. Nous pouvons immédiatement diviser par 2 toutes les constantes de l'aéroplane simple, lequel, continuant à marcher à la vitesse  $V'$  de 8 m. 80, ne nécessitera plus qu'une hélice de 0 m. 95 et des ailes sustentatrices de 95 mètres carrés (la surface  $S^o$  de la nacelle serait également réduite de moitié). Reste à déterminer l'hélicoptère. Les formules [27] donnent immédiatement, l'hélice étant supposée toujours du type Hervé :

$$V'' = 8 \text{ m. 25} \quad H'' = 66 \text{ kilog.} \quad F'' = 17 \text{ HP 6} \quad S'' = 2 \text{ m}^2 66$$

Ces chiffres sont établis sans tenir compte de la vitesse d'entraînement  $V'$ . Si on introduit le terme de correction correspondant, on trouve qu'il entraîne une augmentation d'environ 1 p. 100, de telle sorte que nous aurons pour  $F''$  très sensiblement 18 chevaux. Ainsi nous arriverons à marcher à la même vitesse  $V'$ , avec un même poids mort  $P_o'$  de 81 kilog., mais avec une force motrice de 50 + 18 ou 68 chevaux au lieu de 100 chevaux, et réduction de moitié des forces sustentatrices.

Dans le cas, traité au n° [55], où  $V' = 15$  m. 30, l'équation de condition est satisfaite dès que l'on a  $\lambda^2 < 2V' : V''$ , soit ici  $\lambda^2 < \frac{30,6}{8,25}$  ou 3,70, et ainsi de suite.

2° Cas. — Supposons maintenant que nous demandions à l'hélicoptère de soutenir tout le poids mort de 81 kilog. Ses éléments devront être doublés, ainsi que sa puissance; il faudra donc près de 36 chevaux au moteur, avec une surface d'hélice de 5 m<sup>2</sup> 32, la vitesse  $V$  restant la même; le rayon  $\rho''$  se trouvera multiplié par 1,41 et la vitesse angulaire  $\omega''$ , ainsi que le nombre de tours, divisé au contraire par 1,41. Quant au corps d'aéroplane, sa vitesse de régime  $V$ , donnée par  $V = \frac{2\lambda^2}{3\pi}$ , s'élèvera à 20 mètres, et  $V'$  atteindra 10 mètres.

N'ayant plus à tenir compte du poids mort à soutenir, puisque cette charge est supportée par l'hélicoptère, il est loisible de se donner un autre élément, la surface  $S^o$  de la nacelle au maître couple, par exemple. Supposons que cette nacelle soit la même que celle étudiée au début, où  $S^o = 4$  mètres carrés, et où  $\sigma$  prendra pour valeur soit 0,1, si les palettes sustentatrices sont du type Langley, soit 0,1 : 4,4 ou 0,023 si elles sont du type analogue à l'hélice Hervé. Conservant l'angle  $\alpha'$  égal à 5° 43', les équations [63] nous donneront successivement :

$$S' = 1 \text{ m}^2 76 \quad H' = 4 \text{ kg. 230} \quad F' = 1 \text{ HP 13} \quad S = 0 \text{ m}^2 106$$

ou les mêmes éléments divisés par 4,4 suivant le cas.

Si, pour revenir complètement au cas étudié, nous portons  $P_o'$  à 500 kilog., nous voyons qu'il faudra, conservant les mêmes éléments pour l'aéroplane, multiplier les valeurs des divers éléments de l'hélice par  $\frac{500}{81}$  ou 6,18, ce qui donnerait une surface

hélicoïdale de 33 mètres carrés, et une puissance de 224 chevaux, y compris celle appliquée à l'hélice motrice horizontale.

3<sup>e</sup> Cas. — Nous venons de trouver dans l'application précédente une valeur  $dS$  égale 0,106, ce qui entraîne un poids égal à 2 kg. 120, chiffre très faible, par rapport au poids 81 kilog. de la nacelle chargée. On peut donc penser que pratiquement il n'y aura pas lieu de tenir compte de ce poids  $dS$  dans les calculs d'établissement d'un aéroplane mixte.

4<sup>e</sup> Cas. — Dans le quatrième cas, la surface  $S'$  est imposée par la nécessité de satisfaire aux conditions de stabilité du système, et sa détermination n'entre pas dans le cadre de la présente étude. Supposons, pour fixer les idées, que  $S'$  soit fixé à 10 mètres carrés,  $\sigma$  conservant la valeur 0,1 déjà indiquée. On aurait alors pour  $\lambda^2 = S' \sin \alpha' : (\sigma + S' \sin^2 \alpha')$  la formule, avec la seule variable  $\alpha'$ ,  $\lambda^2 = \sin \alpha' : (0,01 + \sin^2 \alpha')$ . Pendant la marche, il est à prévoir que l'on sera conduit à faire varier l'angle  $\alpha'$ , puisque les ailes  $S'$  servent à maintenir l'équilibre. Il y aura donc à chaque instant variation dans les résistances à vaincre dans le mouvement horizontal, et on devra calculer  $S$  pour la valeur maximum de  $\alpha'$  : si nous maintenons cette valeur au chiffre de 5° 43, on voit que  $\lambda^2$  deviendra égal à 0,1 : 0,02 ou à 5 et que peut être dans ce cas de maximum, la relation de condition  $a'' - c\lambda^3 > 0$  ne serait plus satisfaite. Mais il ne s'agit pas seulement de marcher au moteur minimum : il s'agit de soutenir l'appareil dans toutes les conditions, c'est-à-dire lors même que  $\alpha'$  se rapproche de zéro. Il n'y a donc pas lieu de s'arrêter à cette objection, mais de déterminer  $S$  pour la valeur extrême de  $\alpha'$  : nous écrirons donc ici :

$$\lambda^2 K(\alpha, \beta) S V^2 = K' S' V'^2 \sin 5^\circ 43' \cos^2 \varepsilon,$$

ce qui, avec nos constantes déjà employées, s'écrira :

$$S = \frac{3}{100 \lambda^2} S' = 0,003 S' = 0 \text{ m}^2 03.$$

Pour l'autre limite  $\alpha' = 0$  on eût trouvé :

$$S = \sigma \operatorname{tg} \varepsilon : (1 - \operatorname{tg}^2 \beta) = \frac{3}{2} \sigma \operatorname{tg} \varepsilon = 0 \text{ m}^2 015.$$

Ces deux chiffres sont minimes, comme il était d'ailleurs à prévoir, à raison de la minime surface présentée à la résistance de l'air. A noter que si la puissance à prévoir pour le moteur horizontal doit comprendre non seulement celle nécessaire à la manœuvre des divers appareils, le poids de cette dernière est compris dans le poids  $P_0'$ . Nous sommes donc ramenés encore pratiquement au deuxième cas.

Cependant, bien que ce deuxième cas semble le plus avantageux, et le soit effectivement au point de vue purement théorique de la puissance du moteur, il se peut qu'il en résulte pour l'hélicoptère des surfaces trop considérables, et qu'il ait avantage à demander une partie de la sustentation à des ailes latérales, c'est-à-dire à rentrer dans le premier cas. En un mot, la solution théorique consiste en un hélicoptère soutenant tout le système, mais peut-être devra-t-on la corriger pratiquement pour éviter des dimensions exagérées. En tout cas, les formules [62] permettent de se rendre compte des conditions d'établissement de l'aéroplane dans les différentes hypothèses où l'on devra se placer.

67. — *Ailes articulées.* — Dans tout ce qui précède, nous avons considéré des ailes de surface  $S'$  constante : il en résulte que les variations de vitesse de l'appareil, qu'elles soient nécessitées par les actions atmosphériques extérieures ou par des raisons de marche régulière telles que ralentissement en vue d'accostage, doivent être obtenues par des changements dans le régime du moteur-propulseur. Peut-être sera-t-il préférable de demander ces variations à des modifications dans l'inclinaison  $\alpha'$  et dans la surface travaillante  $S'$  des ailes sustentatrices. M. l'ingénieur Henry expose le principe d'ailes ainsi conçues que nous croyons intéressant de résumer.

Pour permettre à l'aéroplane : 1° de pouvoir entre certaines limites être disposé de telle façon qu'il reçoive d'un vent relatif déterminé une action dont on puisse être maître en direction comme en grandeur et 2° de conserver le centre de gravité sur l'axe d'emmanchement, lequel contient également le point d'impact du vent relatif qui lui reste perpendiculaire, on peut constituer les ailes comme il suit :

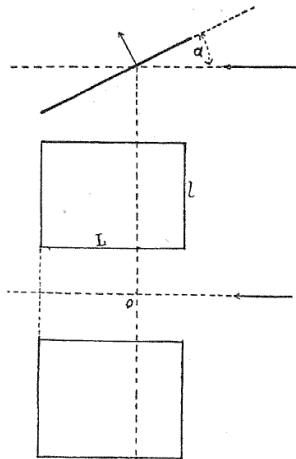


FIG. 1.

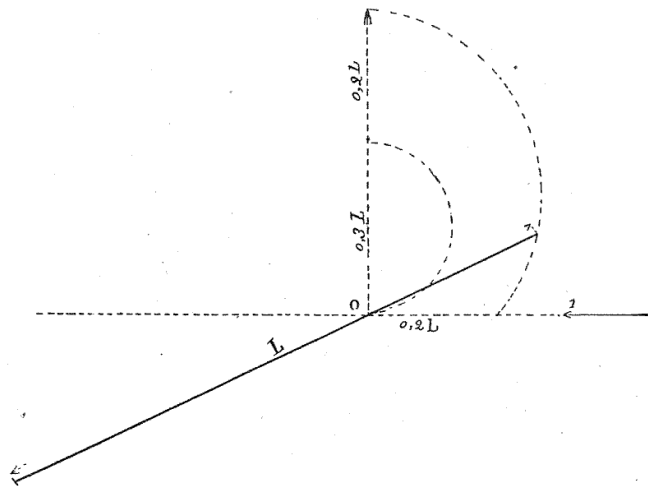


FIG. 2.

Ailes rectangulaires, dont un des côtés, de longueur variable  $l$  (fig. 1), ce qui fera varier la surface travaillante  $S'$ , est toujours parallèle à l'axe d'emmanchement tandis que l'autre, de longueur constante  $L$ , reste perpendiculaire à ce dernier.

Le point d'impact d'un vent relatif perpendiculaire à l'axe est à une distance de l'arête

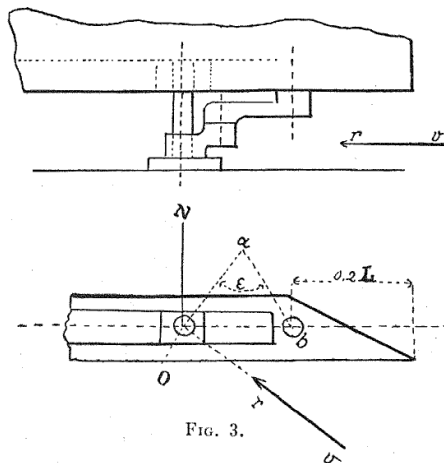


FIG. 3.

d'amont variable avec l'angle  $\alpha'$  du vent avec l'aile, et si l'on admet pour cette distance la valeur donnée par la formule de Jössel citée plus haut [36], c'est-à-dire  $L (0,2 + 0,3 \sin \alpha')$ , il en résulte que (fig. 2) par rapport à la ligne  $or$  (direction du vent) et au point d'impact supposé fixe en O l'extrémité d'amont décrit une courbe obtenue en prolongeant d'une longueur égale à  $0,2 L$  le rayon vecteur d'une circonférence ayant comme diamètre  $0,3 L$  et tangente en O à la direction  $or$ .

Il en résulte la connexion suivante de l'aile et de l'axe d'emmanchement :

Sur celui-ci est montée, non clavetée, une bielle  $Oa$  (fig. 3) de longueur égale à  $0,15 L$  ; cette bielle en commande une autre  $ab$  de même longueur et faisant avec elle un angle  $\epsilon$  variable à volonté ; en  $b$  la bielle est articulée à un point fixe de l'aile situé au cinquième de sa longueur à partir de l'arête d'amont : d'autre part, la direction de l'aile est astreinte à passer

à partir de l'arête d'amont : d'autre part, la direction de l'aile est astreinte à passer

toujours par le point O, l'axe O s'engageant par son extrémité ronde dans un coulisseau pouvant glisser dans une rainure longitudinale de l'aile. Dans ces conditions, si l'on incline la seconde bielle sur la première de l'angle  $2\varepsilon$ , le vent faisant avec l'aile l'angle  $\varepsilon$  frappera cette aile en O.

Ainsi sera régularisée la position du point d'impact indépendamment de l'incidence du courant gazeux.

D'autre part, les variations de la vitesse  $V'$  dues à l'atmosphère seront compensées en déployant plus ou moins la partie mobile des ailes, sans qu'il soit nécessaire de modifier le régime de marche du moteur-propulseur.

Enfin, pour que le poids de l'aile résiste toujours sur l'axe O, il sera nécessaire de le composer d'une partie fixe  $m$  qui sera toujours appliquée en D au cinquième de L et d'une partie  $m_1$  se déplaçant automatiquement si possible, à mesure que l'angle  $\varepsilon$  varie, et à partir du point D correspondant à  $\varepsilon = 0$  d'une quantité proportionnelle au déplacement corrélatif à partir de ce même point D, du point d'impact, comme il est facile de le démontrer.

Dans ces conditions, l'aéroplane rectangulaire pourrait avoir, quel que soit son déploiement, son centre de gravité en D, pour le poids  $m$ . Le poids  $m_1$  est, dit l'auteur, une sorte de poids mort, ajouté, et qui constitue par suite un inconvénient, peut-être capital, de cette sorte d'ailes qui présente, par ailleurs, les avantages d'une grande simplicité de construction et d'une grande facilité de manœuvre.

*Remarque importante.* — La réserve ci-dessus faite par M. Henry au sujet du poids mort  $m_1$ , absolument justifiée dans le cas de l'aéroplane simple, perd de son importance dans le cas de l'aéroplane mixte que nous considérons comme le seul pratiquement réalisable dans les conditions actuelles. Le poids  $m_1$  est à ajouter au poids  $P_0'$ , et, s'il en résulte la nécessité de renforcer l'hélicoptère, il ne constitue pas du moins un alourdissement rédhibitoire de l'appareil.

**68.** — *Adjonction d'une queue à l'aéronat.* — M. Henry signale également la nécessité d'une queue, d'un empennage, comme l'a écrit dernièrement le colonel Renard, pour assurer la stabilité du système. Il ajoute que théoriquement une queue à surface invariable pourrait suffire, mais qu'il est toutefois possible que l'on reconnaisse plus commode pour la manœuvre d'avoir une queue à étendue variable, déployable en éventail, comme celle des oiseaux. Quelle que soit la disposition adoptée pour cet organe indispensable, il semble qu'il doive être considéré comme supporté dans tous les cas par l'hélicoptère, et son poids par suite ajouté au poids  $P_0'$  : les efforts verticaux essentiellement variables qu'il devra supporter et transmettre au système semblent devoir être alternatifs d'une part, et d'autre part, n'avoir qu'une intensité relativement faible (il est, bien entendu, question ici de leur intensité propre et non de leur moment par rapport au centre de gravité général).

Nous ne nous étendons pas davantage sur ces questions d'organes de manœuvre, qui sortent du cadre de notre étude, nous contentant d'avoir indiqué comment il semblait devoir être pourvu à leur sustentation et renvoyant le lecteur à l'ouvrage de M. Henry (*Étude du mouvement d'un aviateur-aéroplane*, Dunod, 1902).

Mais dans toutes les discussions précédentes, nous avons fait usage des formules type Langley pour l'évaluation des efforts supportés et transmis par les ailes sustentatrices, nous contentant d'introduire dans certaines applications un coefficient  $f(x) = 4,4$  pour tenir compte de l'amélioration que l'on pourrait apporter au tracé de ces ailes, en les assimilant ainsi un peu arbitrairement aux surfaces hélicoïdales de l'appareil Hervé. On sait que Lilienthal a déduit de ses expériences des courbes et fonctions empiriques qui sembleraient conduire à un autre genre de solution du problème. C'est ce qui nous reste à examiner.

## CHAPITRE IV

### Expériences et formules de Lilienthal.

#### I. — Résumé de Lilienthal.

69. — D'une série d'expériences exécutées plutôt dans le but d'étudier l'aviation, c'est-à-dire le vol d'un homme dans l'air, que la dynamique aérienne proprement dite, Lilienthal a déduit des principes et formules que nous allons indiquer, d'après l'exposé que l'auteur lui-même a rédigé pour l'aide-mémoire de Mødebek : nous reviendrons ensuite sur ces expériences et sur l'interprétation des résultats énoncés dans ce travail.

Les appareils employés pour la sustentation aérienne doivent avoir l'aspect d'une aile d'oiseau déployée : leur action, tant motrice qu'élévatrice, repose sur l'utilisation des actions atmosphériques, grâce à une disposition convenable des surfaces portantes ainsi établies.

Dans de telles conditions, en effet, sous une inclinaison voisine de l'horizontale et en marche horizontale également, une aile de profil faiblement incurvé éprouve de la part de l'atmosphère une action tendant fortement à l'élever, tout en n'opposant à sa marche qu'une très minime résistance. En vol avant, suivant une trajectoire faiblement infléchie, cette résistance antagoniste devient complètement négligeable, tandis que l'effort de sustentation reste encore considérable. De même, un courant aérien s'élevant sous un angle très faible pourra produire une action sustentatrice sans refouler pour cela l'appareil volant de sorte qu'une station momentanée dans l'air et même une marche contre le vent se trouveront possibles sans que l'on perde en hauteur.

Les actions des ailes sont le plus avantageuses lorsque ces ailes présentent vers le haut une convexité atteignant de  $\frac{1}{18}$  à  $\frac{1}{12}$  de leur largeur.

Soit une aile de ce profil frappée sous un angle  $\alpha$  par l'air animé d'une vitesse  $v$ .

Il en résultera une action atmosphérique  $R$  qui en général n'est pas normale à la corde de l'aile, mais qui se compose d'une force normale  $N$  et d'une force  $T$  dirigée le long de ladite corde : ces deux forces auront pour valeur :

$$N = 0,13 S v^2 \eta$$

$$T = 0,13 S v^2 \theta,$$

$S$  étant la surface de l'aile, et  $\eta$  et  $\theta$  deux fonctions empiriques dont les valeurs sont données par la table numérique ci-dessous. On remarquera que ces surfaces courbes possèdent encore des propriétés de sustentation pour certaines valeurs négatives de  $\alpha$ , c'est-à-dire alors même qu'elles sont frappées par un courant aérien descendant, mais sous une faible incidence.

Les composantes de l'action atmosphérique dirigées suivant la corde, qui font d'abord obstacle au mouvement, se transforment, pour des angles d'incidence supérieurs à  $3^\circ$ , en efforts propulsifs qui, sous l'angle de  $15^\circ$ , atteignent jusqu'à  $\frac{1}{12}$  de la sustentation, et ne disparaissent que vers  $30^\circ$ . Un courant aérien s'élevant de  $3^\circ$  au-dessus de l'horizontale, produit sur une aile convexe horizontalement déployée une action sustentatrice, sans refouler la surface vers l'arrière. C'est là le principe fondamental du planement des oiseaux.

70. — Table numérique des fonctions de Lilienthal.

$\alpha$	$\eta$	$\theta$	$\alpha$	$\eta$	$\theta$
— 9°	+ 0,000	+ 0,070	16°	0,909	— 0,075
— 8°	0,040	+ 0,067	17°	0,915	— 0,073
— 7°	0,080	+ 0,064	18°	0,919	— 0,070
— 6°	0,120	+ 0,060	19°	0,921	— 0,065
— 5°	0,160	+ 0,055	20°	0,922	— 0,059
— 4°	0,200	+ 0,049	21°	0,923	— 0,053
— 3°	0,242	+ 0,043	22°	0,924	— 0,047
— 2°	0,286	+ 0,037	23°	0,924	— 0,041
— 1°	0,332	+ 0,031	24°	0,923	— 0,036
— 0°	0,381	+ 0,024	25°	0,922	— 0,031
+ 1°	0,434	+ 0,016	26°	0,920	— 0,026
+ 2°	0,489	+ 0,008	27°	0,918	— 0,021
+ 3°	0,546	+ 0,000	28°	0,915	— 0,016
+ 4°	0,600	— 0,007	29°	0,912	— 0,012
+ 5°	0,650	— 0,014	30°	0,910	— 0,008
+ 6°	0,696	— 0,021	32°	0,906	0,000
+ 7°	0,737	— 0,028	35°	0,896	+ 0,010
+ 8°	0,771	— 0,035	40°	0,890	+ 0,016
+ 9°	0,800	— 0,042	45°	0,888	+ 0,020
+ 10°	0,825	— 0,050	50°	0,888	+ 0,023
+ 11°	0,846	— 0,058	55°	0,890	+ 0,026
+ 12°	0,864	— 0,064	60°	0,900	+ 0,028
+ 13°	0,879	— 0,070	70°	0,930	+ 0,030
+ 14°	0,891	— 0,074	80°	0,960	+ 0,015
+ 15°	0,901	— 0,076	90°	1,000	0,000

Sous les incidences de 5°, 32° et 90°, la résistance atmosphérique est normale à la corde du profil de la surface.

La table numérique qui suit donne les valeurs des fonctions empiriques  $\eta$  et  $\theta$ , telles que Lilienthal les a déduites de ses expériences.

La table numérique qui précède est la seule à notre connaissance qui ait été calculée, et c'est à cette table que l'on emprunte les coefficients nécessaires aux calculs correspondants aux hypothèses de Lilienthal, non sans faire certaines réserves que nous rappellerons en temps opportun.

71. — Il convient toutefois de signaler encore la représentation empirique que Jarolimek a donnée des résultats indiqués par Lilienthal dans le cas des surfaces planes.

La résistance de l'air entre les limites de 1° à 15° étant représentée par  $RSv^2$  où :

$$R = 0,007 + 0,00225 \alpha,$$

l'effort vertical correspondant a pour formule :

$$Y = RSv^2 \cos \lambda,$$

et le travail  $F = YV$  où  $V = v \sin \lambda$ .

L'angle  $\lambda$  est un angle auxiliaire dont la valeur empirique, entre les limites de 1° à 8° pour  $\alpha$ , est donnée par la relation :

$$\lambda = \frac{684}{8\alpha + 9} + 14,$$

ce qui correspond au tableau ci-dessous :

$\alpha$	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
$\lambda$	90°	54°	44°	35°	31°	28°	26°	25°	23°

mais en faisant des applications numériques à l'aide de ces relations qui traduisent simplement en nombres les tracés de Lilienthal, Jarolimek montre que l'on arrive à des résultats inadmissibles.

Considérons par exemple une surface plate de 10 mètres de côté, soit  $S = 100$ , animée d'une vitesse horizontale de 10 mètres par seconde et inclinée de 2° ou de 8°, on aura dans le premier cas  $R = 0,0115$   $\lambda = 44°$ , et dans le second  $R = 0,025$  et  $\lambda = 23°$ , ce qui donnera respectivement :

$$\begin{aligned} Y &= 87 \text{ kilog.} & \text{et} & & F &= 754 \text{ kgm. ou } 10 \text{ IP} \\ Y &= 230 \text{ kilog.} & \text{et} & & F &= 977 \text{ kgm. ou } 13 \text{ IP,} \end{aligned}$$

tandis que les formules habituelles indiquent :

$$\begin{aligned} Y &= 42 \text{ kilog.} & \text{avec} & & F &= 147 \text{ kgm. ou } 2 \text{ IP} \\ Y &= 167 \text{ kilog.} & \text{avec} & & F &= 232 \text{ kgm. ou } 3 \text{ IP,} \end{aligned}$$

pour  $R_0 = 0,085$  et ces nombres augmentés de moitié pour la valeur  $K_0 = 0,127$ , limite supérieure du coefficient de la résistance de l'air.

On voit que les expressions de Lilienthal conduisent à des rendements élévatoires bien inférieurs à ceux que les formules généralement admises permettent d'espérer.

**72.** — Appliquons maintenant les fonctions  $\gamma$  et  $\theta$  au cas de la même surface, supposée cintrée. Nous aurons deux composantes, normale et tangentielle, ayant respectivement pour valeur :

$$\begin{aligned} N &= 636 \text{ kilog.} & \text{et} & & 1.000 \text{ kilog.} \\ T &= + 10 \text{ kg. } \frac{1}{4} & & & - 45 \text{ kilog.} \end{aligned}$$

Dans le premier cas, la composante  $T$  s'oppose à la marche horizontale et la composante  $N$ , inclinée de 2° vers l'arrière, oppose également à cette marche une résistance de  $636 \times \sin 2°$  ou 22 kilog. Il y a donc une sustentation de 635 kilog. environ et résistance horizontale de 32 kilog.

Dans le deuxième cas, nous aurons une composante  $T$ , accélératrice de 45 kilog.  $\cos 8°$  et un ralentissement de  $1.000 \sin 8°$ , soit sensiblement 139 kilog. — 45 kilog. ou 94 kilog., avec sustentation voisine de 1.000 kilog.

L'inclinaison relative de 8° eût encore pu être réalisée avec une surface inclinée de 2° comme dans le premier cas, mais soumise à l'action d'un courant aérien ascendant de 6°. Les valeurs de  $N$  et de  $T$  eussent été les mêmes, mais la composante de ralentissement n'eût plus été que  $1.000 \sin 2°$  ou 35 kilog., de telle sorte qu'il y eût au contraire accélération du mouvement.

Si l'inclinaison de la surface eût été de 3°, ce qui eût donné 9° d'incidence relative, cas traité comme exemple par Lilienthal, il y eût eu équilibre dans le sens horizontal, et la charge, de 1.040 kilog. eût été supportée purement et simplement par le courant aérien.

**73.** — Les propositions de Lilienthal ont donné lieu à diverses observations relatées dans l'ouvrage de Mœdebeck.

Les expériences d'Hargrave et de Wright en Amérique confirmèrent bien l'existence de la composante tangentielle  $T$ , mais avec une intensité bien inférieure à celle annoncée par Lilienthal. Voici d'ailleurs comment s'exprime Wright sur ces questions.

La force ascensionnelle d'un grand appareil, tenu debout dans le vent à une faible distance du sol, fut trouvée bien moindre qu'on ne pouvait l'espérer d'après les tables de Lilienthal et nos propres essais de laboratoire : la différence est moindre lorsque l'appareil se meut en glissant dans le vent.



Le rapport de la traction au soulèvement pour des ailes bien étudiées est moindre sous l'incidence de  $5^\circ$  à  $12^\circ$  que sous celle de  $3^\circ$ .

Le point d'application de la résultante des actions atmosphériques, ou centre de pression, pour des ailes courbes, se trouve pour  $\alpha = 90^\circ$  vers le milieu de la surface, mais se porte lentement vers l'avant dès que l'incidence diminue jusqu'à une certaine valeur critique de  $\alpha$  : cet angle critique dépend de la forme et du contour de l'aile. Si l'incidence descend encore au-dessous de cet angle, le centre de pression rétrograde rapidement, jusqu'à ce que l'on arrive à un angle limite au-dessous duquel il n'y a pas de composante verticale.

Enfin deux surfaces de sustentation, placées l'une derrière l'autre, produisent un rendement moindre que chacune d'elles prise séparément.

On remarquera à ce sujet que les expériences de Langley ne sont d'accord avec cette dernière assertion que pour des distances relativement faibles entre les surfaces en question. Il serait intéressant de connaître entre quelles limites d'écartement d'une part et de vitesse de l'autre, et pour quels tracés d'ailes ces résultats ont été constatés, et de connaître également comment le rendement varie en même temps que ces divers éléments.

Bien que toutes ces expériences aient eu surtout pour objet l'étude de l'aéroplane pour « homme volant », elles n'en sont pas moins intéressantes à retenir pour l'étude dynamique qui nous occupe, tant parce qu'elles infirment les chiffres trop avantageux du tableau 70 que parce qu'elles font prévoir de grandes difficultés pour l'aménagement convenable des ailes sous des incidences variables.

Enfin Chanute, toujours dans l'ouvrage cité de Mœdebeck, conteste également l'exactitude numérique des fonctions  $\eta$  et  $\theta$ . Les frères Wright, dit-il, constatent dans leurs essais de laboratoire que les coefficients  $\eta$ , sous les petits angles, sont trop élevés d'environ 50 p. 100 à  $0^\circ$  et 14 p. 100 à  $3^\circ$  : ils semblent exacts vers  $5^\circ$ . De même les coefficients  $\theta$  étaient trop avantageux au-dessous de  $10^\circ$ , car les actions tangentielles se manifestaient comme antagonistes dès que l'angle d'attaque était inférieur à  $7^\circ$  et non à  $3^\circ$  comme l'indiquent les tables.

D'autre part, les valeurs numériques ne sont vérifiées que pour des formes d'ailes identiques à celles employées par Lilienthal. Des ailes affectant la forme d'un quadrilatère ou d'un rectangle allongé dans le rapport de 6 à 1, avec courbure de  $\frac{1}{12}$ , comportent de tout autres coefficients. L'erreur de Lilienthal doit tenir à des fautes de méthode, principalement à ce que le point d'attache des surfaces à soutenir ne coïncidait pas avec le point d'application de la résultante. La marche de ce dernier point est essentielle à étudier. Pour des ailes plates et carrées, il se trouve tout à l'avant lorsque l'incidence est voisine de  $0^\circ$  : lorsque cet angle augmente, le point recule lentement pour se trouver au centre sous l'incidence de  $90^\circ$ . [Ces indications concordent avec celles du n° 36.] Pour des surfaces courbes, il en est tout autrement. Ainsi Spratt, d'après des expériences encore inédites, énonce que : pour un arc circulaire de courbure  $\frac{1}{12}$ , le centre de pression se trouve vers l'arrière sous l'incidence de  $0^\circ$  : il se rapproche du milieu qu'il atteint pour une incidence de  $17^\circ$  environ, puis il se déplace vers l'avant, et se trouve, pour un angle de  $50^\circ$ , à environ 41 1/2 p. 100 du bord antérieur. Il recule alors pour se retrouver au milieu lors de l'incidence normale.

Si au lieu d'une courbure de  $\frac{1}{12}$ , l'aile en présente une de  $\frac{1}{24}$ , le centre de pression se trouve à  $0^\circ$  dans la zone arrière : il passe au milieu de l'aile lorsque l'angle atteint  $10^\circ$ , marche vers l'avant jusqu'à l'incidence de  $30^\circ$  où il se trouve à 37 p. 100 du bord, puis recule vers le milieu, comme dans le cas précédent.

Il résulte de tout ce qui précède que, dans la fixation des valeurs à donner aux paramètres, doit intervenir non seulement, la courbure mais encore l'examen du contour et des dimensions relatives de l'aile, comme du reste il a déjà été constaté pour les ailes plates (formule Soreau) : ces éléments influent non seulement sur l'intensité mais aussi sur la position du point d'application de la résistance et il est à souhaiter que les données numériques ainsi recueillies par MM. Wright soient prochainement publiées. Comme nous l'avons dit plus haut, cette question de position est plutôt intéressante au point de vue de la stabilité de route que de la puissance mécanique proprement dite, mais il doit néanmoins en être tenu compte dans l'estimation de l'excédent de puissance à tenir en réserve pour la manœuvre des appareils destinés à maintenir l'équilibre. De plus, ces variations dans l'action du courant aérien semblent confirmer la nécessité de ne concevoir l'aéroplane que sous la forme mixte établie au chapitre précédent par l'adjonction d'un mécanisme d'hélicoptère.

## II. — Applications des fonctions de Lilienthal au cas des aéroplanes simples.

**74.** — Bien que le cas des aéroplanes glissants sorte du cadre de la présente étude, nous donnons cependant ci-dessous de quelle manière il lui est fait application des expressions dues à Lilienthal parce que l'on pourra se rendre compte aussi des expériences qui peuvent être actuellement effectuées et déduire de ces essais des valeurs plus exactes des fonctions  $\eta$  et  $\theta$ .

Soient ainsi  $i$  l'angle de la corde de l'aile avec l'horizon,  $\alpha$  l'angle de la même corde avec la direction du vent relatif et  $\alpha'$  celui des deux directions de la marche et du vent relatif, les autres notations ayant leur signification habituelle.

L'effort vertical  $Y$  aura pour expression :

$$Y = KSV^2 \eta \cos i,$$

en y négligeant la minime composante due à l'action tangentielle  $T$ .

Cette dernière action a une intensité et un signe déterminé également par la valeur de  $\alpha$ , et évaluée suivant la corde à  $KSV^2 \theta (\alpha)$  ; son action dans la direction du mouvement sera donc :

$$KSV^2 \cos (\alpha + \alpha') \theta (\alpha),$$

tandis que dans la même direction la résistance de l'air agissant normalement à la corde avec l'intensité  $KSV^2 \eta (\alpha)$  donnera la composante :

$$KSV^2 \sin (\alpha + \alpha') \eta (\alpha).$$

Enfin, l'ensemble des autres résistances passives à la marche de la nacelle et des accessoires aura pour valeur également dans le sens de la marche  $\lambda = K\sigma V^2$ , et éventuellement une composante normale.

Par suite, la somme des résistances dans le sens de la translation s'écrira :

$$X = K\sigma V^2 + KSV^2 \eta \sin (\alpha + \alpha') \pm KSV^2 \theta \sin (\alpha + \alpha').$$

C'est cette expression que, d'ordinaire, on égale à l'action du moteur.

Ici, dans le cas particulier des glissades, la force motrice est uniquement le poids du système dont la composante suivant la ligne de descente a pour valeur :

$$P \sin (\alpha + \alpha' + i).$$

Les angles étant pris avec le signe convenable et dans le mouvement uniforme qui est celui que l'on s'efforce de réaliser, on écrira :

$$X - P \sin (\alpha + \alpha' + i) = 0.$$

*Exemple numérique.* — M. Chanute applique les formules ci-dessus au problème suivant :

Déterminer les conditions de glissement en air calme d'un aéroplane pesant en tout 81 kilog., soutenu par un double jeu d'ailes (Doppeldecker) de 12 m<sup>2</sup> 45 de surface rectangulaire (5 m. sur 1 m. 25), avec une courbure de  $\frac{1}{15}$ , la surface de nacelle  $\sigma$  étant de 0 m. 84 et la vitesse de descente de 10 mètres, le coefficient K de la résistance de l'air étant pris égal à 0,096.

En égalant le poids 81 kilog. à l'effort ascensionnel Y, et faisant  $\cos i = 1$ , on obtient d'abord  $\eta = 0,678$ , ce qui conduit à la valeur  $\alpha = 6^\circ$  d'après la table [70], à laquelle valeur de  $\alpha$  correspond  $Y = 83$  kilog. L'angle  $\alpha'$  est nul, puisque l'atmosphère est supposée calme ; par suite, la composante tangentielle T aura pour valeur :

$$T = KSV^2 \cos \alpha \theta (\alpha) = - 2 \text{ m. } 50.$$

La résistance correspondant à la nacelle  $R = K\sigma V^2 = 8 \text{ kg. } 06$ , et l'effet de la résistance normale,  $N \sin \alpha$  aura pour valeur 8 kg. 69. La résultante dans le sens de la marche sera donc, les signes étant mis en évidence :

$$X = R + N \sin \alpha - T \cos \alpha = 14 \text{ kg. } 25,$$

et doit équilibrer la composante du poids suivant la même direction, soit :

$$81 \sin (\alpha + i) = 81 \sin (6^\circ + i),$$

d'où résulte pour  $i$  la valeur  $4^\circ 8$ , soit, en nombres ronds,  $4^\circ$ .

Ces chiffres semblent bien correspondre à des essais faits par MM. Chanute et Herring en 1896-97 et justifier l'affirmation que les paramètres de Lilienthal étaient admissibles pour  $\alpha = 6^\circ$ , il faut dire plutôt le rapport de ces paramètres, puisque dans le calcul ci-dessus on a pris  $K = 0,096$  au lieu de 0,13 donné par Lilienthal.

D'une manière générale, on peut dire que les propositions énoncées par ce dernier ne sauraient être acceptées numériquement ; ce sont des indications sur la nature des efforts produits, et non des estimations suffisantes de l'intensité desdits efforts ; le seul résultat nettement affirmé et établi est la constatation d'efforts de frottement notables et susceptibles d'effets sérieux sur le fonctionnement des ailes.

### III. — Formules définitives de l'aéroplane.

**75.** — Voyons donc comment il est possible de traiter définitivement la question de l'emploi des ailes sustentatrices en tenant compte de la présence des forces tangentielles de frottement. Pour cela, reprenons les équations générales que nous avons écrites au début de la deuxième partie, au n° [37], en y accentuant seulement certaines lettres pour rester d'accord avec les notations des chapitres II et III. Ces équations sont alors :

$$\begin{aligned} Y' &= N \cos \alpha' - T \sin \alpha' \\ X' &= N \sin \alpha' + T \cos \alpha'. \end{aligned}$$

Si l'on pose  $\frac{T}{N} = \operatorname{tg} \varphi$ , et que l'on remplace N par sa valeur avec les notations de Lilienthal, soit  $K_0 S \eta_{\alpha'} V^{1/2}$ , nous écrirons :

$$\begin{aligned} Y' &= K_0 S \cos (\varphi + \alpha') V^{1/2} \eta_{\alpha'} \sec \varphi \\ X' &= K_0 S \sin (\varphi + \alpha') \eta_{\alpha'} \sec \varphi V^{1/2}. \end{aligned}$$

Comparons maintenant ces expressions à celles que nous avons traitées en faisant  $T = 0$ , en y mettant, pour éviter toute confusion, un angle  $\delta'$  au lieu de  $\alpha'$ ; nous écrirons :

$$\begin{aligned} Y' &= K_0 S \sin \delta' \cos \delta' V^{1/2} f(\delta') \\ X' &= K_0 S \sin^2 \delta' f(\delta') V^{1/2}, \end{aligned}$$

et l'on voit immédiatement que le premier système se ramène au second en posant :

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha'} \cos(\varphi + \alpha') \sec \varphi &= \sin \delta' \cos \delta' f(\delta') \\ \eta_{\alpha'} \sin(\varphi + \alpha') \sec \varphi &= \sin^2 \delta' f(\delta'); \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en divisant membre à membre :

$$\operatorname{tg} \delta' = \operatorname{tg}(\varphi + \alpha') \qquad \delta' = \varphi + \alpha',$$

et, par suite, en substituant :

$$f(\delta') = \eta_{\alpha'} : \cos \varphi \sin(\alpha' + \varphi).$$

Par conséquent, toutes les formules que nous avons établies au cours de cette deuxième partie sont encore applicables dans le cas général, à la condition d'écrire partout, pour éviter toute confusion,  $\delta'$  au lieu de  $\alpha'$ , et d'évaluer  $\delta'$  et  $f(\delta')$  par les relations qui précèdent. Cette conclusion est indépendante des valeurs numériques des paramètres  $\eta$  et  $\theta$ ; elle s'appliquera dans le cas des nouvelles données que fourniront les expériences en cours pour être substituées à celles de Lilienthal reconnues erronées, comme il a été exposé plus haut.

Pour bien faire saisir la nature de cette substitution, et bien que les valeurs inscrites au tableau 70 soient certainement inexactes, nous avons cependant établi la table de corrélation entre les fonctions dudit tableau et les nouveaux paramètres  $\delta'$  et  $f(\delta')$ , calculées ainsi qu'il a été dit plus haut. Cette table permettra la comparaison entre les résultats théoriquement admis jusqu'à ce jour, d'après Lilienthal, et ceux que fourniront les expériences, car il sera plus aisé d'obtenir numériquement les nouveaux paramètres que les fonctions  $\eta$  et  $\theta$ . Pour simplifier les calculs numériques, nous avons remarqué que l'angle  $\varphi$  restait toujours assez petit dans les limites de la pratique pour que l'on puisse prendre  $\cos \varphi = 1$ . Nous n'avons d'ailleurs dressé le nouveau tableau que pour des valeurs de  $\alpha'$  comprises entre les bornes où l'on devrait les maintenir au cours des applications.

Ainsi que nous l'avons indiqué plus haut, ce tableau, même avec sa dernière colonne rectifiée, ne doit être considéré que comme constituant un modèle pour l'inscription des résultats d'expériences futures, pour chaque type d'ailes cintrées essayées avec des précautions et minuties expérimentales trop négligées par Lilienthal.

Lorsque l'on aura pu, d'après ces indications, dresser une table plus approchée que celle ci-dessus, on pourra faire des applications numériques avec les formules énoncées, qui, par l'introduction de l'angle auxiliaire  $\delta'$ , ramènent les problèmes relatifs aux ailes cintrées à ceux résolus pour les ailes plates du type Langley.

Il ne faudra pas perdre de vue dans ces études qu'aux améliorations réalisées sur les ailes sustentatrices correspondent forcément des perfectionnements des hélices qui seront du même ordre, de telle sorte que les discussions et conclusions du chapitre précédent semblent devoir être conservées.

76. — Table des fonctions de Lilienthal transformées.

Inclinaison $\alpha'$ de la corde	Angle de frottement $\varphi$	Angle fictif $\delta'$	Valeurs de $f(\delta')$ d'après		Observations
			Lilienthal	Chanute	
— 3°	10° 5'	7° 5'	2,44	1,84	On rappelle que : $\delta' = \varphi + \alpha'$ $\text{tg } \varphi = 0 : \eta$ $f(\delta') = \eta : \cos \varphi \sin \delta'$
— 2°	7° 20'	5° 20'	3,10	2,38	
— 1°	5° 20'	4° 20'	4,42	3,32	
0°	3° 20'	3° 20'	6,50	4,87	
+ 1°	2° 5'	3° 5'	8,00	6,01	
2°	55'	2° 55'	9,60	7,20	Pour passer des valeurs de Lilienthal à celles de Chanute, on a multiplié par 0,096 : 0,13, soit en nombres ronds 0,75, comme il résulte des calculs faits au n° 74 et relatés d'après cet ingénieur.
3°	0°	3°	10,48	7,88	
4°	— 40'	3° 20'	10,30	7,72	
5°	1° 15'	3° 45'	10,15	7,52	
6°	1° 45'	4° 15'	9,26	6,96	
7°	2° 10'	4° 50'	8,76	6,58	
8°	2° 35'	5° 25'	7,58	5,94	
9°	3°	6°	7,62	5,74	
10°	3° 30'	6° 30'	7,30	5,46	
11°	3° 55'	7° 5'	7,76	5,14	
12°	4° 15'	7° 45'	6,35	4,80	
13°	4° 30'	8° 30'	5,94	4,46	
14°	4° 45'	9° 45'	5,50	4,13	
15°	4° 50'	10° 40'	5,10	3,82	

### Résumé.

Ainsi que nous l'indiquions au début de ce travail, nous n'avons nullement songé à établir un projet même rudimentaire d'aéroplane. Nous nous sommes seulement proposé d'évaluer avec quelque approximation la puissance dont il faudrait disposer pour soutenir un tel navire aérien et de déduire des estimations ainsi établies quelques indications sur la voie où se rencontrerait probablement la solution pratique du problème.

A cet effet, après avoir exposé sur quelles lois physiques reposerait notre discussion, nous avons traité avec quelques détails le cas d'un aéronef à plateau moteur agissant verticalement, sans examiner la manière dont l'énergie ainsi produite serait transmise au système. Nous avons obtenu ainsi, pour ce cas théorique, et avec le minimum de calculs algébriques, puisque toute la discussion a reposé sur l'examen d'une équation du troisième degré, des formules qui ont pu être appliquées par la suite à tous les problèmes successivement traités, à l'aide de changements très simples dans les variables et les paramètres considérés. Enfin nous avons montré que la multiplication des plateaux, qui figurent ici les appareils de sustentation, ne semblait devoir être qu'une source de déperditions et de complications, à laquelle il ne faudrait recourir que dans des cas exceptionnels.

Dans le chapitre suivant, nous avons déduit des formules précédentes la théorie de l'hélicoptère, où la nacelle chargée est soutenue par le jeu d'une-hélice tournant autour d'un axe vertical. On remarquera que bien qu'il ne soit là question que d'une seule hélice, il est probable qu'il en faudra employer deux, tournant en sens inverse, pour assurer la symétrie des efforts transmis au bâti : mais cela ne change rien à la discussion.

Nous avons appliqué ces formules aux résultats donnés par l'hélice du *Méditerranéen* (C. R. séance du 29 juin 1904), ce qui nous a fourni des constantes pour les applications ultérieures.

Dans la deuxième partie, nous avons abordé l'examen de l'aéroplane, navire aérien uniquement soutenu par l'action des moteurs qu'il transporte à son bord.

Le premier chapitre a été consacré à l'examen de la marche d'un tel appareil et de l'énergie propulsive qui lui était nécessaire pour se soutenir, sans rechercher comment cette énergie, fournie par le moteur transporté, était transformée en puissance propulsive. Nous avons retrouvé et complété des résultats déjà publiés par M. l'ingénieur de la marine Henry dans son *Étude d'un aviateur-aéroplane*. (Dunod 1902).

Le deuxième chapitre a traité des relations qui doivent exister entre les organes de l'aéroplane proprement dit (ailes sustentatrices) et ceux de l'hélice propulsive. On y a mis en évidence l'erreur que l'on commettrait, et qui peut-être a déjà été commise par certains inventeurs, en oubliant que la vitesse effective de l'hélice propulsive doit être appréciée en tenant compte de la vitesse d'entraînement de l'aéronat. Cette considération montre que les grandes vitesses de translation qui sembleraient devoir aisément résoudre le problème sont au contraire à redouter comme exigeant des énergies exagérées.

Après avoir signalé ce point important de la théorie, on a établi les équations définitives du régime de l'appareil, entraîné par une hélice (couplée en général) tournant autour d'un axe horizontal, et soutenu par des ailes inclinées. Bien que le problème ainsi traité soit loin de représenter les conditions du régime réel et donne des solutions beaucoup trop favorables, on n'en arrive pas moins à constater que dans l'état actuel de l'industrie, et à moins de découvertes absolument improbables, un tel aéronat ne saurait être pratiquement réalisé.

Aussi a-t-on recherché dans le troisième chapitre à quoi l'on arriverait en recourant à un aéroplane mixte, c'est-à-dire en associant au mécanisme précédemment étudié un dispositif d'hélicoptère pour assurer tout ou partie de la sustentation.

La discussion a montré que là semblait être la vérité, et que le navire aérien devait sans doute être conçu comme soutenu uniquement par l'action d'un hélicoptère, les ailes ou queue ne servant que de gouvernail ou d'empennage, comme l'indique déjà M. le colonel Renard pour le ballon dirigeable actuel.

Enfin le quatrième chapitre a été consacré à l'examen des propositions et des formules de Lilienthal, qui peuvent se résumer en ce fait qu'une aile cintrée en marche dans l'air éprouve non seulement une pression normale à la corde qui la sous-tend, mais encore une action dirigée le long de ladite corde et d'une intensité très appréciable, laquelle peut, dans certains cas, produire elle aussi un effort de sustentation. Malheureusement, les valeurs attribuées par Lilienthal à ces actions atmosphériques ont été reconnues trop élevées. Mais quoi qu'il en soit, nous avons remis en équation le problème en tenant compte de l'existence de cette composante tangentielle, et, par un changement de variable, ramené la solution aux formules préalablement établies, de telle sorte que les discussions précédentes conservent leur valeur.

### Conclusion.

Le navire aérien autonome, c'est-à-dire se soutenant et se déplaçant à l'aide des seules énergies qu'il transporte, ne semble pas pouvoir être réalisé sous forme d'aéroplane simple. Mais il est permis de penser que l'on parviendra à le constituer sous forme d'aéroplane mixte, la sustentation étant assurée par un mécanisme d'hélicoptère et la stabilité par un empennage convenable. Ce sera en tout cas le type qui sera le plus aisé à établir, constituant un aérostat dirigeable, comme ceux actuellement existants, et où la sustentation sera réalisée non par un ballon gonflé, mais par le fonctionnement d'un jeu d'hélices couplées à axe vertical. Si ce n'est pas là le type définitif, ce sera certainement le modèle de transition.

# TABLE ANALYTIQUE DÉTAILLÉE DES MATIÈRES TRAITÉES DANS LA DYNAMIQUE DE L'AÉROPLANE

## INTRODUCTION

### CHAPITRE I

Nos	Position de la question.....	Pages
1	Position de la question.....	1

### CHAPITRE II

#### Étude théorique de la pression des fluides sur les solides.

2	Pression d'un jet contre une surface fixe d'après Rankine.....	3
3	Cas où la surface se déplace parallèlement au jet.....	6
4	Cas où la surface se déplace obliquement au jet.....	6
5	Solution générale.....	8
6	Formules habituellement employées.....	9

Soit  $S$  la surface frappée,  $v$  la vitesse et  $\alpha$  l'incidence relative du courant gazeux  $f(\alpha)$  une fonction expérimentale, on écrira d'ordinaire :

$$F_x = K S v^2 \sin^2 \alpha f(\alpha) \quad F_y = K S v^2 \sin \alpha \cos \alpha f(\alpha)$$

$K$  étant une constante prise d'ordinaire égale à 0,085 ou 0,125 ;

$F_x$  et  $F_y$  les composantes parallèle et normale à la direction de la marche.

Unités : mètre et kilogramme.

### CHAPITRE III

#### Étude d'un aéronef avec action verticale du moteur.

7	Notations et formules fondamentales.....	9
	$P_o$ poids de la nacelle, des agrès, de l'équipage ;	
	$d$ Poids par mètre carré du plateau sustentateur ;	
	$S$ Surface —	
	$V$ Vitesse de régime —	
	$F$ Puissance du moteur en kilogrammètres ;	
	$\pi$ Son poids par kilogrammètre utile ;	
	$P_s = dS \quad \Pi = \pi F$ ;	
	$Y$ effort vertical dû au mouvement du plateau ;	
	On a évidemment, lorsque le régime est établi :	
	$Y = P_o + P_s + \Pi = K S V^2$ ;	
	$F = YV = K S V^3$ ;	
	d'où l'on déduit l'équation fondamentale (1).	

$$\pi K S V^3 - K S V^2 - P_o - dS = 0.$$

#### I. — Plateaux à densité constante.

8	Parachute. L'équation d'équilibre se réduit à :	
	$P_o + dS - K S V^2 = 0.$	10
9	Aéronef à puissance minimum du moteur.....	11
10	Aéronef à effort vertical minimum.....	12
11	Aéronef à surface minimum du plateau.....	14

Nos		Pages
	En traitant ces trois cas à l'aide de l'équation (1), on obtient le formulaire 12 et les théorèmes suivants.	
	Dans le cas du moteur minimum, le poids du sustentateur est le tiers du poids total de l'aéronat.	
	Dans le cas de l'effort vertical minimum, il est la moitié du poids du moteur.	
	Dans le cas de surface minimum, la somme des poids du sustentateur et de la nacelle complète est la moitié du poids du moteur.	
12	Formulaire et application numérique.....	14

## II. — Détermination de la densité transversale du plateau d'après la vitesse de régime.

	L'épaisseur du plateau dépendant évidemment de l'effort qu'il doit supporter, on est conduit à écrire dans l'équation (1): $d = d_0 V$ , $d_0$ étant la densité correspondant à la vitesse d'un mètre et à reprendre les discussions précédentes avec l'équation ainsi transformée.	
13	Puissance minimum du moteur.....	15
14	Effort minimum du plateau.....	17
	Dans le premier cas, le poids du plateau est la moitié de l'effort total; dans le deuxième, il est égal au poids du moteur.	
15	Surface minimum du plateau.....	17
16	Formulaire et application numérique.....	18

## III. — Plateau dont la densité croît avec la surface.

17	Il faut alors écrire dans l'équation (1) $d = d_0 S^{1/2}$ et reprendre la discussion sous cette nouvelle forme. On trouve qu'avec de tels plateaux (correspondant aux hélices type Renard) il existe un maximum de poids enlevable pour chaque poids spécifique $\pi$ du moteur; poids que l'on ne saurait dépasser même en accroissant démesurément la puissance motrice...	19
18	Poids maximum à enlever avec une surface donnée.....	20
19	Association des plateaux.....	21
20	Applications.....	23
21	Discordance des formules donnant les éléments du maximum.....	24
22	Conclusions. — Les hélices Renard semblent devoir être remplacées par d'autres plus avantageuses. La multiplication des plateaux (ou hélices) est à éviter.....	25
	Annexe n° 1. — Note du colonel Renard sur la sustentation des hélicoptères avec les hélices du type ci-dessus.....	26
	Annexe n° 2. — Note du colonel Renard sur la qualité des hélices sustentatrices.....	27

# CHAPITRE IV

## Étude de l'hélicoptère.

### I. — Généralités.

23	L'action de l'air sur une palette inclinée se traduit par une composante normale que l'on traite comme précédemment et une composante radiale à évaluer expérimentalement....	29
----	---	----

### II. — Régime de planement d'un hélicoptère assimilé à une palette.

24	On peut appliquer au cas de l'hélicoptère les équations des plateaux traitées précédemment: il suffit d'y poser $V = \omega \rho \tan \alpha \sec 2\beta$ et $K = K_0 \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} f(\alpha) \frac{\cos^3 2\beta}{\cos^2 \beta} = K(\alpha, \beta)$ , $\omega$ étant la vitesse angulaire, $\rho$ la distance à l'axe du point d'application de la résistance atmosphérique, $\alpha$ l'inclinaison de la palette ou de l'hélice, $f(\alpha)$ et $\beta$ deux constantes expérimentales. Toutes les formules du n° [11] sont ainsi applicables.	
25	Discussion expérimentale de $K(\alpha, \beta)$ .....	32



N <sup>os</sup>		Pages
	III. — <i>Formules pratiques avec <math>\beta = 0</math> (palettes plates).</i>	34
26	Relations fondamentales.....	34
27	Éléments nécessaires pour enlever un poids $P_0$ avec l'inclinaison $\alpha$ .....	35
28	— l'hélice ayant une vitesse de circulation donnée.....	35
29	Application numérique sous l'incidence de $1^\circ$ .....	36
30	— sous diverses incidences et avec diverses palettes.....	36
31	De la troisième dimension (épaisseur) de la palette ou aile de l'hélice. Application à cette question des formules du n <sup>o</sup> 4.....	39
	IV. — <i>Solution générale.</i>	
32	Les formules [27] et [28] s'appliquent à la condition de compléter les relations [26] par les termes en $\beta$ .....	40
	V. — <i>Régime de l'hélicoptère en marche.</i>	
33	Il y a lieu de considérer non la vitesse absolue, mais la vitesse relative du système.....	41
34	Régime d'ascension de l'hélicoptère.....	41
35	Régime de marche horizontale de l'hélicoptère.....	42
	Annexe n <sup>o</sup> 3. — Extrait d'une note de MM. Hervé et de La Vaulx sur une nouvelle hélice aérienne et observations sur les résultats consignés dans ladite note : dans l'appréciation d'une hélice sustentatrice doit intervenir en outre de la « qualité » des ailes, leur poids élémentaire.....	44

## DEUXIÈME PARTIE

### Étude de l'aéroplane.

#### *Considérations générales.*

36	L'aéroplane peut être étudié comme composé : 1 <sup>o</sup> d'une nacelle de surface fictive $\sigma$ , telle que $R = K\sigma V^2$ représente la résistance de l'air à la marche de ladite nacelle à la vitesse $V$ , et d'un poids total $P_0 + \Pi$ , $\Pi$ étant le poids du moteur ; 2 <sup>o</sup> de deux ailes sustentatrices symétriquement placées, d'une surface totale $S$ et d'un poids total $P_s$ , inclinées d'un angle moyen $\alpha$ sur la direction de la marche. En marche de régime horizontale, il y a équilibre entre : 1 <sup>o</sup> le poids total du système ; 2 <sup>o</sup> la résistance à la nacelle, et 3 <sup>o</sup> les actions atmosphériques sur les ailes, soit une pression normale $N$ et un frottement tangentiel $T$ très appréciable dans le cas des ailes cintrées.....	46
37	Équations générales. — D'après ce qui précède, les équations générales seront : $Y = N \cos \alpha - T \sin \alpha = P_0 + \Pi + P_s$ $F = (N \sin \alpha + T \cos \alpha + R) V.$	49

## CHAPITRE I

### *Cas d'ailes plates, type Langley avec moteur directement appliqué.*

38	Dans ce cas particulier, on peut faire $T = 0$ dans les équations générales.....	50
39	Méthode géométrique de M. l'ingénieur Henry, pour le cas de la surface d'ailes minimum, donnant l'angle d'attaque $\alpha$ le plus avantageux. Dans le cas d'ailes carrées on trouve : $\cot \alpha = 2\pi V \text{ et } V = \frac{1}{2\pi} \sqrt{S : 3\sigma}.$	50
40	Applications numériques.....	52
41	Recherche du moteur minimum. L'angle $\alpha$ le plus avantageux est le même que dans le cas précédent. Le poids des ailes est la moyenne de ceux de la nacelle et du moteur. Formules spéciales donnant tous les éléments.....	53
42	Applications numériques montrant qu'il est avantageux de marcher à de faibles vitesses.....	55

Nos		Pages
43	Détermination de l'épaisseur de l'aile d'après la vitesse de régime, donnant des formules analogues à celle de l'hélicoptère [31].....	57
44	Applications numériques.....	59

## CHAPITRE II

### *De la dépendance mutuelle des organes de l'aéroplane et du propulseur.* 60

45	L'aéroplane n'étant pas mû par une force directement appliquée, mais par l'effet d'un propulseur généralement hélicoïdal, il y a lieu d'étudier les rapports entre ce propulseur et les éléments du corps d'aéroplane (mêmes notations que précédemment, mais accentuées). En introduisant le rapport $\lambda^2 = S' \sin \alpha' : (\tau + S' \sin^2 \alpha')$ , on ramène les équations de ce problème à celles de l'hélicoptère et l'on utilise l'analyse précédente.....	60
46	Tableau des nouveaux paramètres.....	62
47	Tableau des formules ainsi modifiées.....	62
48	Application numérique : à remarquer que dans ces conditions le propulseur est censé immobile, ce qui peut entraîner des interprétations erronées.....	63
49	Rectification de la théorie pour tenir compte de l'entraînement du propulseur. $V'$ étant cette vitesse d'entraînement, $\varepsilon$ un angle de réduction défini par $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{V'}{\omega \rho}$ , toutes les formules [47] sont applicables à la condition d'y faire $\alpha = \theta - \varepsilon$ , $\theta$ étant l'inclinaison réelle de l'hélice, et d'y multiplier $K(\alpha, \beta)$ par $\sec^2 \varepsilon$ .....	64
	<i>Association des éléments du corps d'aéroplane et de ceux du moteur propulseur.</i>	
50	On associe ces éléments en introduisant dans les formules [47] à la place du poids $dS$ du propulseur, le poids total des ailes soumises à l'action atmosphérique, soit $dS + d'S'$ ou $\Delta S$ , c'est-à-dire en mettant partout $\Delta$ à la place de $d$ et remplaçant $a$ par $c$ , $c$ étant donné par $c^2 = \frac{4}{3} K(\alpha, \beta) \sec^2 \varepsilon : 27 \Delta$ .....	65
51	Notations et formulaire général ainsi établis. Dans les applications, on se donne <i>a priori</i> les angles $\theta$ , $\alpha'$ et $\varepsilon$ , et on calcule les autres éléments.....	65
52	La sustentation d'une nacelle donnée est toujours possible pourvu que l'on puisse avoir $\pi < c\lambda^3$ , ce qui s'écrit $\pi = c\lambda^3 \cos^3 \gamma$ . Formulaire simplifié avec cette nouvelle notation....	67
53	Remarques expérimentales sur les valeurs pratiques des paramètres.....	68
54	Discussion d'un aéroplane aux ailes inclinées de $5^\circ 43'$ .....	68
55	Recherche d'une vitesse de marche déterminée.....	71
56	Emploi de l'angle d'attaque optimum, $4,50'$ , d'après Drzewiecki.....	72
57	Impossibilité pratique de réaliser un aéroplane des types ci-dessus étudiés, dans les conditions actuelles de l'industrie.....	73

## CHAPITRE III

### *De l'aéroplane mixte.*

#### *(Association de l'hélicoptère avec l'aéroplane).*

58	On est donc conduit à rechercher si l'on ne pourrait demander tout ou partie de la sustentation à un hélicoptère, dont les éléments seront étudiés à l'aide des formules du chapitre III, première partie, les notations étant distinguées par un double accent". Formules des sustentations ainsi réalisées.....	74
59	Applications au cas du moteur minimum.....	76
60	Applications au cas des ailes sustentatrices minimum.....	76
61	Il y a toujours avantage à recourir à un hélicoptère dès que l'on a $a'' > c\lambda^3$ , c'est-à-dire dès que le régime de l'hélice sustentatrice relativement à celui de l'hélice propulsive, peut être rendu moindre que le rapport des résistances horizontale et verticale du corps d'aéroplane, condition qui semble toujours pouvoir être satisfaite.....	77
62	Établissement d'un aéroplane mixte marchant à la vitesse $V'$ , si l'hélicoptère soutient une partie du poids de la nacelle.....	78
63	Cas où l'hélicoptère soutient tout le poids de la nacelle.....	79

N <sup>os</sup>		Pages
64	Cas où l'hélicoptère soutient la nacelle et l'hélice propulsive.....	79
65	Cas où l'hélicoptère soutient tout le système.....	79
66	Applications numériques.....	80
67	Ailes à surfaces variables proposées par l'ingénieur Henry.....	81
68	Queue formant balancier proposée par le même ingénieur.....	84

#### CHAPITRE IV

##### Expériences et formules de Lilienthal.

69	Lilienthal a déduit de ses expériences qu'une aile cintrée, légèrement inclinée, éprouvait de la part du vent une action de frottement fortement élvatrice sous certaines incidences...	85
70	Table des fonctions empiriques, $\eta(\alpha)$ et $\theta(\alpha)$ de Lilienthal.....	86
71	Application de ces principes au cas d'ailes plates.....	86
72	Applications numériques des tables de Lilienthal.....	87
73	Observations sur les résultats énoncés par Lilienthal. Les faits sont exacts en principe, mais les valeurs numériques données par Lilienthal sont beaucoup trop fortes.....	87
74	Application des formules de Lilienthal aux aéroplanes glissants. Expériences et calculs de M. Chanute.....	89
75	Formules définitives de l'aéroplane. En reprenant les expressions du n° [37], où N et T seraient exprimés par les fonctions de Lilienthal, et posant $T = N \tan \varphi$ , on peut appliquer les formules des chapitres précédents au cas général. A cet effet, écrivant dans ces formules $\delta' = \alpha'$ pour éviter la confusion, il suffit de poser $\delta' = \alpha' + \varphi$ , $f(\delta') = \eta(\alpha') : \cos \varphi$ sin $(\alpha' + \varphi)$ les notations conservant la même signification. Toutes les discussions précédentes sont donc maintenues.....	90
76	Table des fonctions de Lilienthal ramenées aux variables $\varphi$ et $\delta'$ .....	92

#### RÉSUMÉ

92

#### CONCLUSION.

L'aéroplane simple ne semble pas réalisable. L'aéroplane mixte, au contraire, semble susceptible d'une exécution sinon immédiate, du moins vraisemblable dans quelques années, lorsque les moteurs se seront encore allégés.....	93
--	----