

Conditions d'utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- [Le Conservatoire numérique](#) communément appelé [le Cnum](#) constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d'œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n° 78-753 du 17 juillet 1978 :

- la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue ([Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - http://cnum.cnam.fr](#))
- la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- les reproductions de documents protégés par le droit d'auteur, uniquement consultables dans l'enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

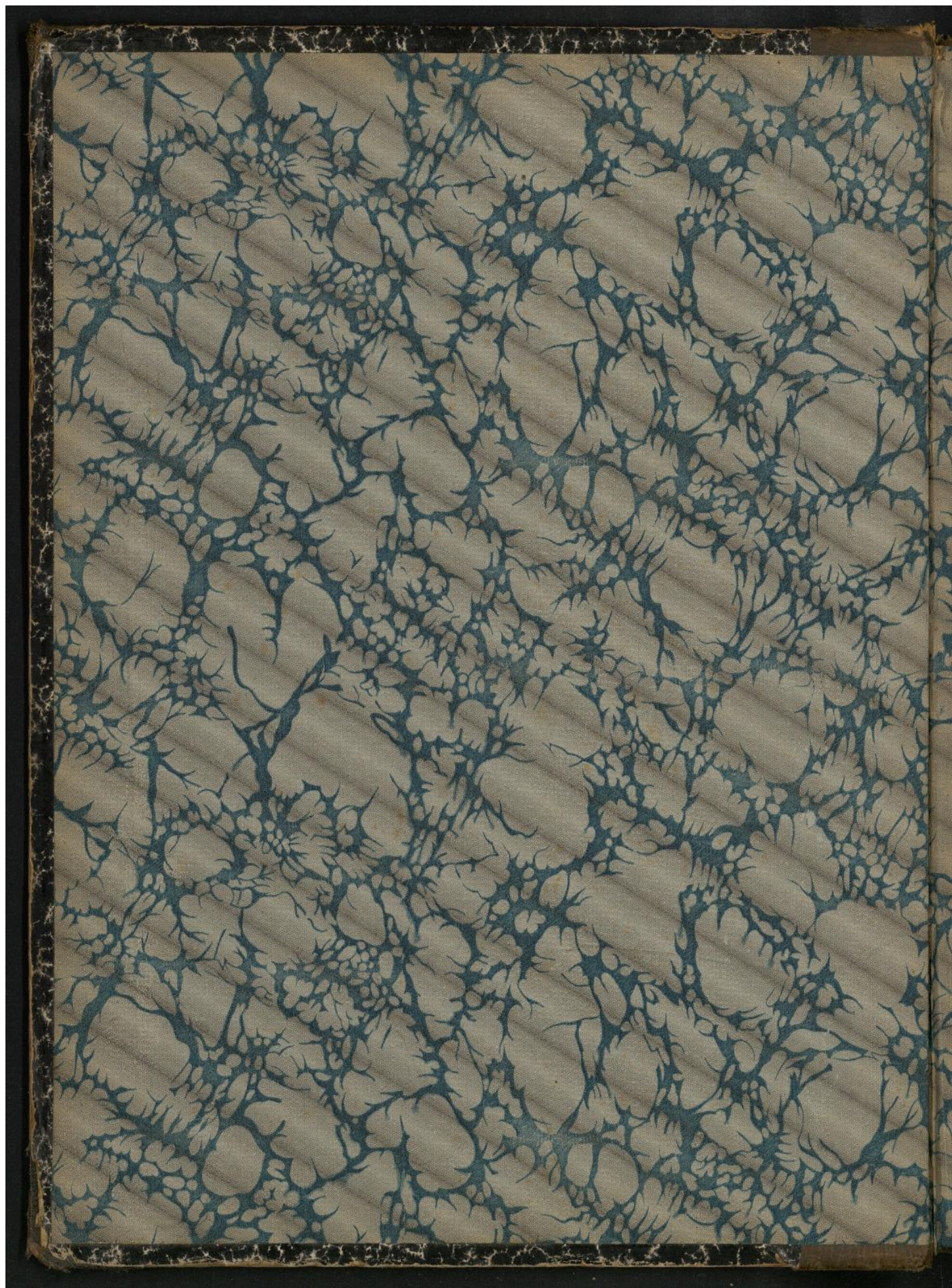
4- Pour obtenir la reproduction numérique d'un document du Cnum en haute définition, contacter [cnum\(at\)cnam.fr](mailto:cnum(at)cnam.fr)

5- L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d'utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

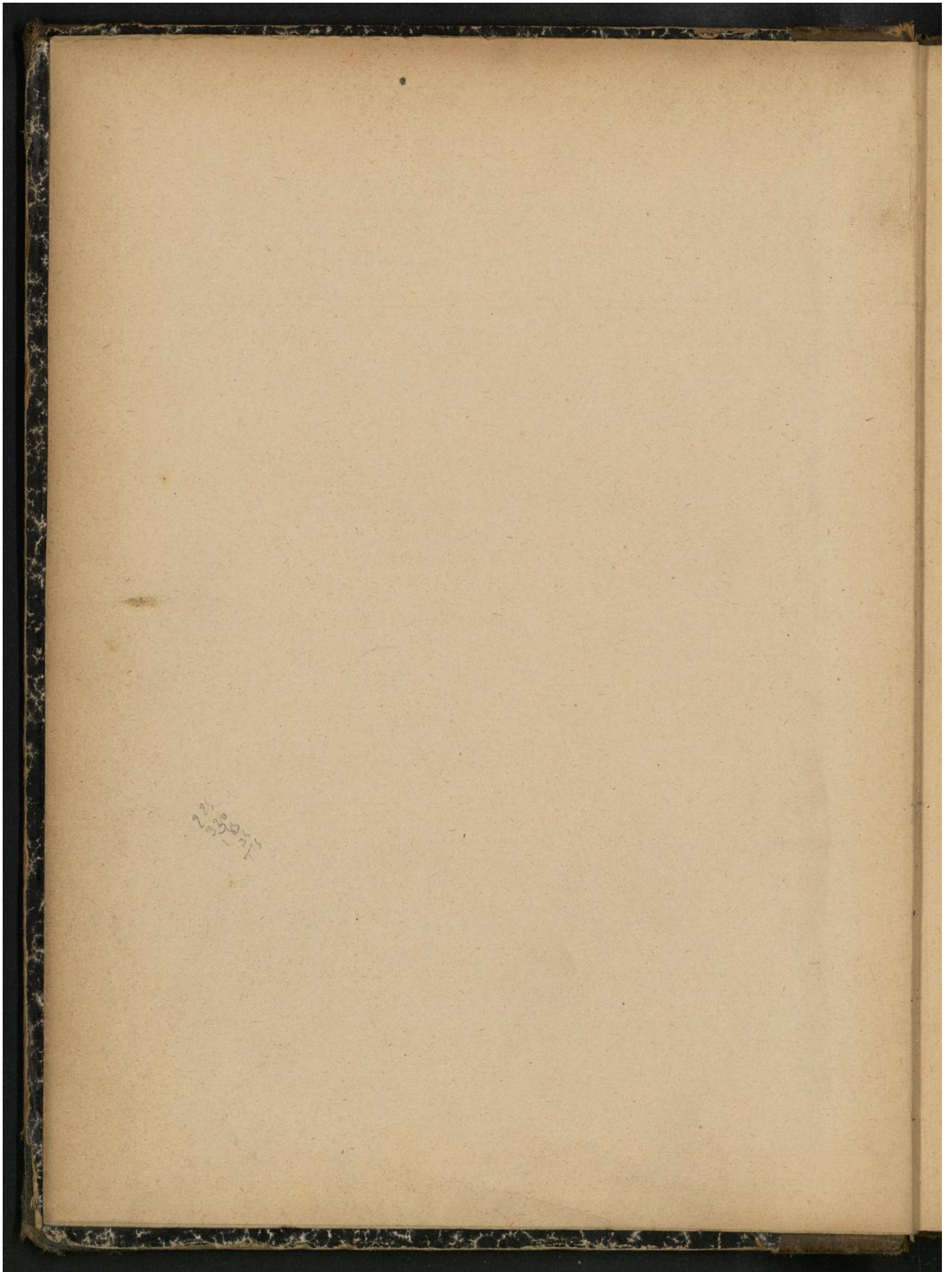
Auteur(s)	Boulangier, Auguste (1866-1923)
Titre	Mécanique appliquée. 1ère partie, Mécanique des solides naturels (eu égard aux frottements). 2e partie, Elasticité et résistance des matériaux. 3e partie, Hydraulique
Adresse	Lille : imprimerie J. Schaller, 1906
Collation	1 vol. (238 p.) : ill. ; 28 cm
Nombre d'images	248
Cote	CNAM-BIB 4 Da 14
Sujet(s)	Hydraulique Mécanique Mécanique appliquée -- Manuels d'enseignement supérieur Résistance des matériaux Élasticité
Thématique(s)	Machines & instrumentation scientifique Matériaux
Typologie	Ouvrage
Langue	Français
Date de mise en ligne	20/05/2021
Date de génération du PDF	20/05/2021
Permalien	http://cnum.cnam.fr/redir?4DA14

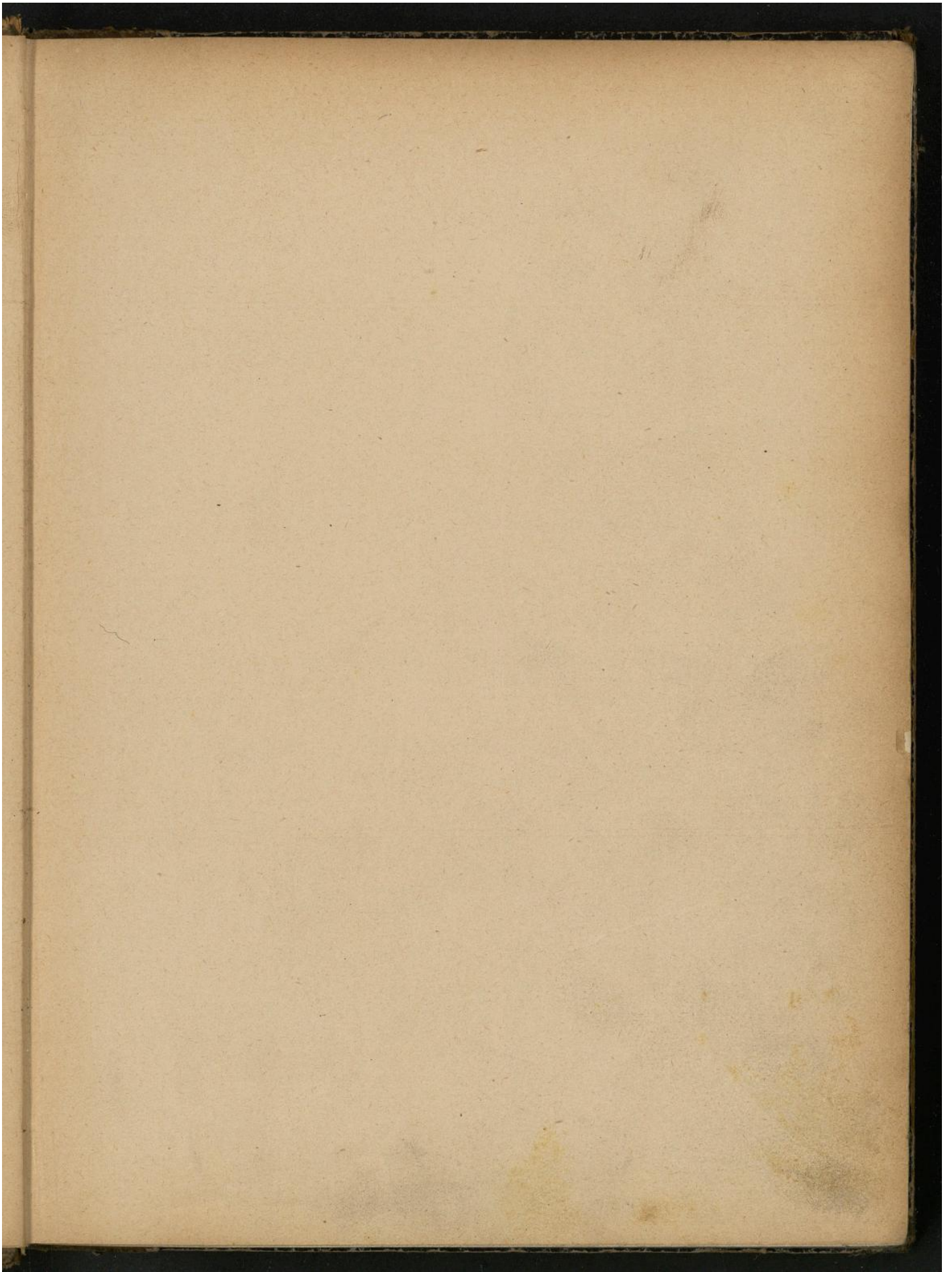


Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires

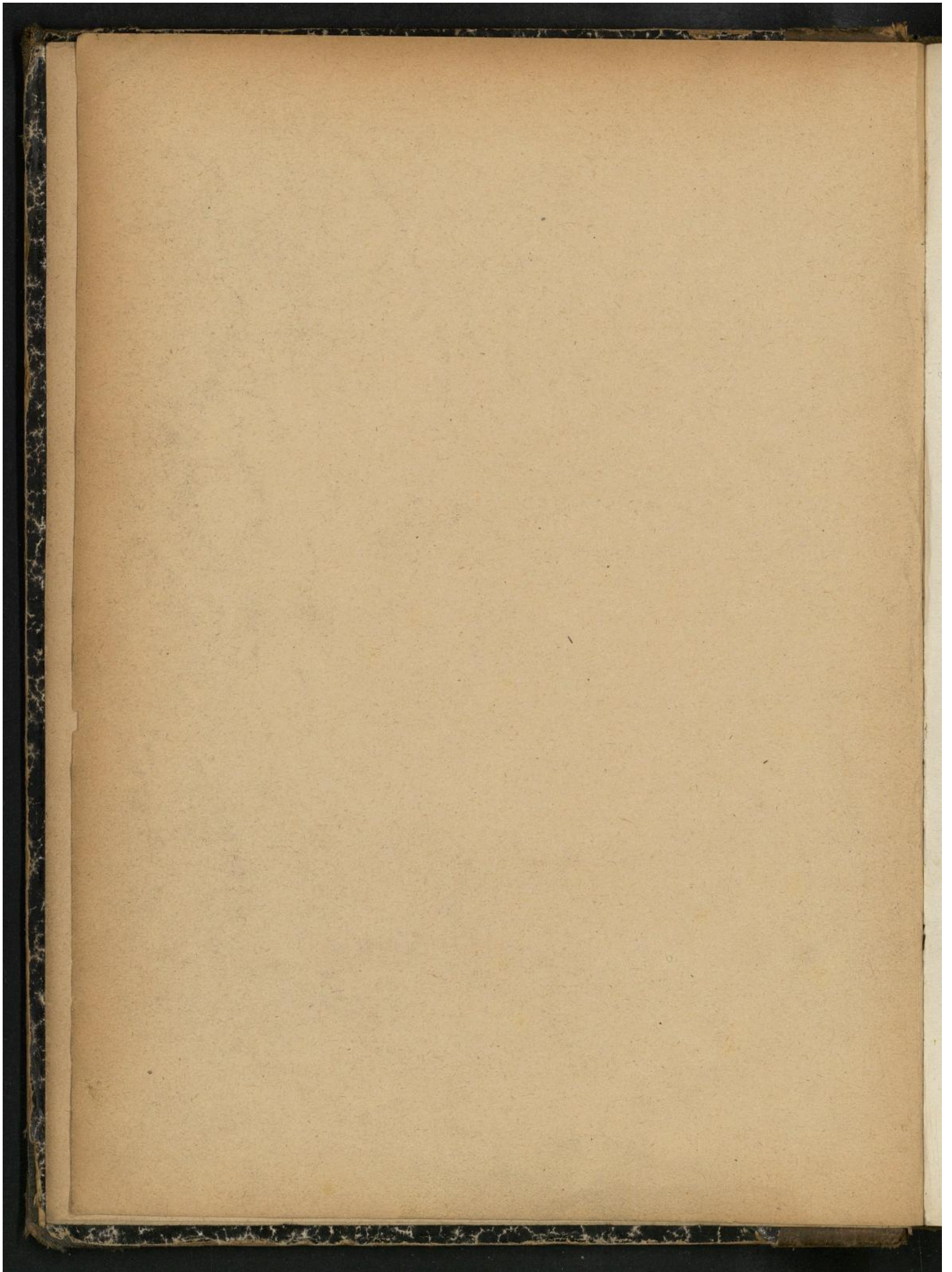


Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires





Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires

4^o Da 14

Mécanique Appliquée

1^{ère} Partie: Mécanique des solides naturels.
(en égard aux frottements)

2^e Partie: Elasticité et Résistance des matériaux.

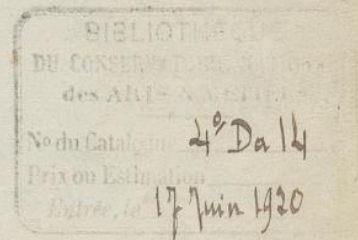
3^e Partie: Hydraulique.

— Professeur: M. Boulanger.

. 1906 .

Imprimerie J. Schaller

9 rue d'Inkermann. Lille.



Il a été longtemps de tradition, dans les Ecoles d'Ingénieurs, de limiter le domaine de la Mécanique Rationnelle à l'étude des systèmes matériels dont :

- 1° les solides constitutifs sont absolument indéformables ;
- 2° les réactions sont à travail nul (ou sont sans frottement).

On réservait alors le nom de Mécanique Appliquée à l'ensemble des études d'équilibre ou de mouvement où ces hypothèses de première approximation étaient tenues pour insuffisantes. Cette distinction qui tend aujourd'hui à disparaître, explique le groupement des questions qui constituent ce cours.

La double hypothèse de la Mécanique Rationnelle permet de traiter des problèmes plus généraux que ceux posés par la pratique, mais fournit des résultats trop éloignés de la réalité pour des questions relativement simples d'application courante : aussi, en dépit des complications introduites dans les solutions, faut-il l'abandonner pour obtenir une approximation plus satisfaisante, et y substituer des principes empiriques plus conformes à la nature des choses.

La détermination des réactions réelles au contact :

- 1° de deux solides ;
- 2° d'un solide et d'un fluide,

(ou, comme on dit, des résistances passives), et les modifications introduites par le travail (réel ou virtuel) de ces réactions dans la solution de questions usuelles, forment la 1^{ère} et 3^{ème} parties de ce cours [Mécanique des solides naturels et Hydraulique].

L'étude des déformations des solides formant les organes constitutifs des machines ou des constructions fixes, et des conditions de limitation des forces actives pour que ces déformations n'excèdent pas certaines limites, forme la 2^{ème} partie, la plus étendue [Elasticité et Résistance des matériaux].

La présente rédaction, toute provisoire d'ailleurs, renferme un certain nombre d'emprunts, dont quelques uns textuels, aux cours de l'Ecole Polytechnique et des Ecoles Spéciales.

Pour quelques développements un peu abstraits, notés d'un astérisque, les conclusions seules seront demandées à l'examen.



Première Partie.

Mécanique des Solides Naturels.

Chapitre I. - Généralités et lois expérimentales.

1. Réactions entre solides naturels. - Les corps naturels dits solides ne sont jamais absolument rigides. Ils se déforment, mais leurs déformations sont si petites qu'elles échappent à nos sens. En particulier, deux solides en contact par un point se déforment légèrement au voisinage du point géométrique de contact P, de sorte qu'en réalité ils sont en contact par une aire σ entourant ce point P. Les réactions qu'un des solides S' exerce sur l'autre S, ont donc comme points d'application les divers points de cette aire, et ces réactions peuvent être remplacées par une force unique (R) appliquée en P et un couple d'axe (PA), axe d'autant plus petit que les dimensions de l'aire σ seront plus petites. Soit N la composante de (R) normale aux deux surfaces en P; F la composante tangentielle. N est dite la pression exercée par S' sur S; F la force de frottement de glissement; le couple (PA) est dit le couple dû au frottement de roulement et de pivotement. Dans une première approximation, nous négligerons ce couple dont l'effet est très faible en général devant celui de F, et nous réduirons les réactions de S' sur S à la seule réaction R.

2. Lois expérimentales du frottement de glissement, ou lois de Coulomb. - Les expériences faites par Amontons (1663-1705) d'abord, par Coulomb ensuite (vers 1780), ont conduit aux lois suivantes confirmées par les travaux de Morin (1831-1834).

Frottement pendant le mouvement. - Soit (V) la vitesse du point P de S en contact avec S'; (V') la vitesse du point P' de S' en contact avec P. La vitesse de glissement de S sur S' est, par définition, la différence géométrique $(V) - (V') \equiv (W)$. Cette vitesse est située dans le plan tangent commun en P aux deux solides. Elle est indépendante des axes auxquels on rapporte le mouvement.

1: La force de frottement de glissement (F) est toujours directement opposée à la vitesse de glissement (W).

2: L'intensité de la force de frottement (F) est proportionnelle à la pression normale (N):

$$F = f N,$$

f étant un coefficient constant, dit coefficient de frottement de glissement, qui ne dépend que de la nature et de l'état de poli des surfaces des corps en

contact.

H.

L'angle φ de la réaction R avec la normale, défini par

$\text{tang. } \varphi = \frac{F}{N} = f$,
est constant; on l'appelle l'angle de frottement.

On a les relations :

$$N = R \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{1+f^2}} ; \quad F = R \sin \varphi = \frac{fR}{\sqrt{1+f^2}} .$$

Frottement au départ - Ce qui précède suppose $(W) \neq 0$. Si (W) est nulle à l'instant considéré, l'expérience montre que (W) reste nulle ou qu'il n'y a pas glissement pourvu que la réaction (R) qui empêche le glissement satisfasse à la condition

$$F \leq f_0 N ,$$

f_0 désignant un coefficient attaché aux substances superficielles des deux corps en contact, coefficient supérieur au coefficient précédent f , et qu'on appelle coefficient de frottement au repos ou au départ. La réaction (R) est alors intérieure au cône de révolution de sommet P , d'axe dirigé suivant la normale commune, et de demi-angle au sommet φ_0 défini par

$$\text{tang. } \varphi_0 = f_0 .$$

Il importe de remarquer que, dans ce cas, les lois du frottement ne déterminent pas la direction de (F) .

Quand l'inégalité précédente n'est pas vérifiée, les deux corps se mettent à glisser l'un sur l'autre, et les lois ordinaires du frottement de glissement s'appliquent.

Limites de validité des lois de Coulomb - Des expériences variées sur les phénomènes de frottement ont montré que les lois de Coulomb ne constituent qu'une approximation dont l'écart avec les faits peut être sensible. Deux cas distincts sont à considérer, d'après Hertz, suivant que le frottement a lieu à sec (frottement immédiat) ou qu'il a lieu entre deux corps lubrifiés (frottement médiat).

Le frottement immédiat se présente dans les applications de la traction des fardeaux; le frottement médiat se présente dans la plupart des applications industrielles (machines); ce dernier d'ailleurs est engendré par des phénomènes très complexes où interviennent la nature du lubrifiant, sa fluidité, l'épaisseur de la couche lubrifiante, etc.

Dans le cas du frottement à sec, l'ensemble des expériences de la traction et les recherches faites sur le mode de fonctionnement des freins continus indique que le rapport $\frac{F}{N} = f$ n'est pas une constante, mais croît lentement quand la vitesse de glissement (W) croît.

Dans le cas du frottement médiat, les variations de $\frac{F}{N} = f$ ont lieu exactement dans le sens inverse: d'après les expériences de Hertz, le rapport f décroît assez rapidement quand la pression croît, et croît assez rapidement avec la vitesse de glissement W .

5.
 Quoiqu'il en soit, à défaut de lois empiriques plus parfaites, on continue dans la pratique à admettre les lois de Coulomb, en tenant compte pour le choix du coefficient de frottement, des dispositions adoptées pour le graissage et aussi des valeurs moyennes de la vitesse et de la pression. On aura recours pour tous renseignements relatifs à ce choix aux Aide-Mémoire, dont le plus apprécié est celui de Claudel (Tome I).

Pour donner seulement une idée de l'importance du frottement, on indiquera les moyennes suivantes.

Nature des surfaces frottantes	f	φ	f_0	φ_0	
Bois sur bois	{ à sec { avec enduit gras	0,36	19° 18'	0,50	26° 34'
		0,07	4°	0,20	11° 19'
Bois sur métal	{ à sec { avec enduit gras	0,42	22° 47'	0,60	30° 58'
		0,08	4° 35'	0,12	6° 51'
Métal sur métal	{ à sec { avec enduit gras	0,19	10° 46'	0,19	10° 46'
		0,09	5° 9'	0,10	5° 43'
Cuir sur bois ou métal	{ à sec { avec enduit gras	0,30	16° 42'	0,47	25° 11'
		0,20	11° 19'	"	"
Corde de chanvre sur bois		0,33	18° 16'	0,87	41° 2'
Fer forgé sur pierre		0,45	24° 14'	"	"
Bois sur pierre		0,40	21° 48'	"	"
Pierre sur pierre		0,76	37° 14'	"	"

3. Lois du frottement de roulement dans le cas d'un disque en contact avec un plan. - Considérons un disque circulaire homogène mobile dans un plan vertical V et restant en contact avec un plan horizontal H. Le disque et le plan fixe H sont en contact, non par le point géométrique P, mais par un petit élément : les réactions du plan H sur le disque doivent être remplacées non seulement par une force R appliquée en P, mais encore par un couple de très petit bras de levier dit couple de frottement de roulement, et qui, par raison de symétrie, est évidemment situé dans le plan V.

D'après les expériences de Coulomb (1781) :

1° Le couple de frottement de roulement s'oppose toujours à la rotation du disque (c'est-à-dire au roulement);

2° L'axe ϕ de ce couple est sensiblement proportionnel à la pression N (composante normale de R), soit

$$\phi = N \cdot \delta$$

δ est un coefficient linéaire, puisque ϕ est le produit d'une force par une longueur; ce coefficient ne dépend, pour un rayon donné r du disque, que de la nature des deux substances en contact ..

On peut encore poser :

$$\phi = m \cdot N \cdot r;$$

m est alors un coefficient numérique très petit d'ailleurs par rapport à f .

Les expériences de Dupuit (1837) montrent que, pour deux substances données, δ croît avec r , et que m décroît quand r croît. La loi précise de ces variations est bien mal déterminée; toutefois Pósal estime qu'on rend compte des expériences de Coulomb, de Morin et de Dupuit en prenant

$$\delta = \mu \sqrt{\frac{R}{R+n}}$$

μ et n étant deux constantes à déterminer expérimentalement; on aurait

$\mu = 0,0007$;	$n = 1^m$	pour fer sur fer ;
$\mu = 0,0016$;	$n = 2^m,116$	pour bois sur bois .

Pour les roues de voiture de dimensions ordinaires roulant sur une chaussée empierrée, on admet que

$\delta = 0,015$	avec un parfait état d'entretien ;
$\delta = 0,041$	— — — moyen — — — ;
$\delta = 0,063$	avec empièchement neuf imparfaitement cylindré .

Les lois précédentes supposent que la rotation du disque n'est pas nulle. Si elle est nulle dans un certain intervalle de temps, l'expérience montre que: l'axe ϕ du couple de frottement de roulement, dont le sens peut d'ailleurs être quelconque, est inférieur ou égal à $N \delta_0$, δ_0 étant un coefficient linéaire déterminé supérieur à δ .

En résumé, soient F et N les composantes tangentielle et normale de R ;



ϕ la longueur de l'axe du couple de frottement de roulement, précédé du signe + si le couple a le sens x ou y , du signe - dans le cas contraire; W la vitesse de glissement, et ω la rotation instantanée du disque autour du point de contact,

à l'instant t ; si W et ω sont tous deux différents de zéro, F est directement opposée à W , et ϕ de signe contraire à ω ; on a de plus

$$(1) \quad F = f N, \quad |\phi| = \delta N ;$$

si W et ω sont nulles pendant un certain temps (disque immobile), le sens de F et le signe de ϕ peuvent être quelconques, mais on a :

$$(2) \quad F \leq f_0 N, \quad |\phi| \leq \delta_0 N \quad (f_0 > f; \delta_0 > \delta)$$

Si l'une seulement des quantités W ou ω est nulle, la grandeur correspondante F ou ϕ peut avoir un sens quelconque, et satisfait à l'inégalité (2) correspondante (et non à l'égalité (1)).

II. Lois générales du frottement de roulement et de pivotement.

Soit un corps solide S en contact avec un solide fixe S_1 .

Quand S reste en contact avec S_1 , son mouvement infinitésimal se décompose en un glissement (W) tangent à S_1 [vitesse du point P de S en contact à l'instant t avec S_1], et en un rotation instantanée ω autour de P .

Soit (ω_n) la composante de (ω) normale à S_1 , ou vitesse de pivotement; (ω_t) la composante tangente à S_1 , ou vitesse de roulement.

Soient R et ϕ la force appliquée à S et l'axe du couple par lesquels on peut remplacer les réactions de S_1 sur S ; N et F les composantes de R normale et tangente à S_1 ; ϕ_n et ϕ_t les composantes de l'axe ϕ normale et tangente à S_1 .

Le couple d'axe ϕ_n est dit couple de frottement de pivotement; celui d'axe ϕ_t , couple de frottement de roulement.

L'expérience montre que :

- 1° l'axe ϕ_n est toujours directement opposé au vecteur ω_n ;
- 2° l'axe ϕ_t est toujours directement opposé au vecteur ω_t .

En d'autres termes, le couple de frottement de pivotement et le couple de frottement de roulement s'opposent respectivement au pivotement et au roulement de S sur S_1 .

- 3° en valeur absolue, ϕ_t est proportionnel à N , soit :

$$\phi_t = \delta \cdot N$$

représentant un coefficient linéaire qui dépend de la substance des deux corps et de leur forme au point de contact.

- 4° La valeur de ϕ_n est une fonction plus compliquée de N ; si l'on pose

$$\phi_n = p \cdot N,$$

p n'est pas un coefficient linéaire constant, mais une fonction de N qui croît avec N et qui dépend de la nature et de la forme des deux surfaces en contact.

Les deux solides en contact se déforment et se touchent par une petite aire, qu'on démontre être sensiblement une ellipse, dont le périmètre (de longueur E) dépend de la nature et de la forme géométrique des surfaces en contact; d'après les travaux de Séanté, Hertz, Lecornu, on a :

$$\phi_n = \frac{3}{32} f E N,$$

f étant le coefficient de frottement de glissement. Comme, toutes choses égales d'ailleurs, E est d'autant plus grand que les deux surfaces sont plus écrasées l'une sur l'autre, c'est-à-dire que N est plus grand, on voit que, dès que N sera suffisamment grand, le coefficient $\frac{3}{32} f E$ sera notablement supérieure au coefficient δ du couple de frottement de roulement. Le frottement de pivotement jouera un rôle prédominant par rapport au frottement de roulement.

En particulier, si S ou S_1 est une sphère et l'autre une surface de révolution, la loi de variation du périmètre E est simple et conduit à cette conclusion : pour des substances identiques et des pressions égales, E est plus grand si la surface de révolution tourne sa concavité vers le centre de la sphère que si elle tourne sa convexité vers ce centre ou que si elle est à courbures opposées. ϕ_n est plus grand dans le premier cas que dans les deux autres.

Les lois précédentes supposent que ni ω_t , ni ω_n ne sont nulles.

Si $\omega_t = 0$ pendant un certain temps, ϕ_t peut avoir une direction quelconque, mais sa valeur absolue est moindre que $\delta \cdot N$, δ étant un coefficient déterminé supérieure à δ .

Si $\omega_n = 0$, ϕ_n peut avoir une direction quelconque, mais sa valeur absolue est moindre que $p \cdot N$, p étant une certaine fonction de N supérieure à p .

8

Supposons maintenant S et S_1 en contact animés de mouvements quelconques. Soit P le point de S en contact avec S_1 à l'instant t , (V) sa vitesse; P' le point de S_1 en contact avec S à l'instant t ; (V') sa vitesse; (ω) la rotation instantanée de S , (ω') celle de S_1 . Étudions le mouvement de S par rapport à S_1 . La nouvelle vitesse de P est $(V) - (V') \equiv (W)$, vitesse de glissement de S sur S_1 , tangente à S_1 . La nouvelle rotation instantanée de $(\omega) - (\omega') \equiv (R)$, rotation instantanée de S par rapport à S_1 . (R) comme (W) est indépendante des axes de référence. Soient ω_n et ω_t les composantes normale et tangente à S_1 de R ; ce sont la vitesse de pivotement et la vitesse de roulement de S sur S_1 . Les lois énoncées subsistent sans modifications à condition de remplacer partout (ω) par (R) .

5. Travail élémentaire des réactions. — Le travail élémentaire de toutes les réactions est toujours négatif.

Le travail élémentaire de (R) est $-F.W dt$.

Le travail élémentaire du couple ϕ_t est: $\phi_t \text{ proj. } \omega \times dt$, la projection de ω étant faite sur la demi-droite ϕ_t , projection égale à ω_t et directement opposée à ϕ_t ; ce travail est donc: $-\phi_t \omega_t dt$.

Le travail élémentaire du couple ϕ_n est de même: $-\phi_n \omega_n dt$.

Ainsi le travail des réactions est:

$$d\mathcal{E}_r = -(FW + \phi_t \omega_t + \phi_n \omega_n) dt.$$

Les trois termes en sont négatifs ou nuls. Donc si S n'est pas immobile, le travail des réactions ou forces de frottement est essentiellement négatif.

Le travail du frottement de roulement est très faible comparé au travail du frottement de glissement. Pour comparer ces deux travaux, faisons parcourir au centre d'un disque pesant un chemin élémentaire e d'abord en le faisant rouler sur ox sans glisser, puis en le faisant glisser sur ox d'un mouvement de translation, la pression normale étant dans les deux cas le poids π du disque;

$$\begin{aligned} W dt &= e & \omega_t dt &= \frac{e}{r} & \\ F &= f\pi & \phi_t &= \delta\pi & \end{aligned}$$

le rapport cherché est: $\frac{\phi_t \omega_t dt}{FW dt}$ ou $\frac{\delta}{fr}$; si par exemple $f=0,3$; $r=0,3$; $\delta=0,001$, ce rapport sera à peu près $\frac{1}{100}$.

6. Réactions de deux solides ayant une aire finie de contact. —

Deux tels solides S et S_1 restant en contact sous l'action de forces extérieures ne peuvent que glisser l'un par rapport à l'autre parallèlement au plan de contact, imaginons qu'à un instant donné le mouvement élémentaire de S par rapport à S_1 soit une translation de vitesse W .

Soit $d\sigma$ un élément de la surface de contact Σ ; faisons pour les réactions exercées par S_1 sur les points de S inclus dans $d\sigma$ la réduction indiquée au N°1; soient N et F les projections sur la normale et sur le plan tangent de la résultante construite au centre de l'élément. On admet que F et N satisfont aux lois de Coulomb, c'est-à-dire que F est dirigée en sens inverse de la vitesse de translation W et a pour valeur $f.N$.

Pour l'ensemble des éléments $d\sigma$ de Σ , les forces F d'une part et N d'autre part

sont deux systèmes de forces parallèles et de même sens ; soient F et N leurs résultantes respectives ; la relation $F = f N$ entraîne les conclusions suivantes : les deux systèmes ont même centre de forces, en sorte que F rencontre N ; F est dirigée en sens inverse de (W) ; enfin on a $F = f N$, f étant le coefficient de Coulomb.

Ces conséquences sont d'accord avec l'expérience.

7. Raideur des cordes. — Lorsqu'une corde passe sur une poulie mobile autour de son axe et qu'elle est sollicitée à ses extrémités par des forces P et Q , l'expérience prouve que lorsque le mouvement est sur le point de naître, ou lorsque, existant déjà, il est uniforme, — si la corde n'est pas très mince et flexible, la puissance P excède la résistance Q d'une quantité supérieure à

l'augmentation due au frottement de l'essieu sur ses appuis et à la résistance au roulement.

La différence R , dite effet de raideur de la corde comprend la force nécessaire pour la ployer, les frottements et les dilatations internes et une augmentation du bras de levier de la résistance Q .

Coulomb a trouvé expérimentalement que R est une fonction linéaire de la résistance Q et que l'on a

$$R = \frac{A + BQ}{D}$$

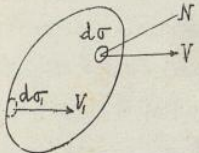
D étant le diamètre de la poulie, A et B des constantes qui ne dépendent que de la corde elle-même, de sa nature, de son état physique, de son épaisseur e ; A varie à peu près comme e^4 et B comme e^2 .

Le tableau suivant, calculé par Navier, donne les valeurs de A et de B , Q étant évalué en kilogrammes, pour des cordes formées de trois torons, dont chacun est formé par un certain nombre de fils de caret.

	Épaisseur e	A	B
Cordes blanches de 30 fils	0 ^m ,020	0,222	0,0097
" " " 15 "	0,014	0,064	0,0055
" " " 6 "	0,009	0,011	0,0024
Cordes goudronnées de 30 fils	0,024	0,350	0,0126
" " " 15 "	0,017	0,106	0,0061
" " " 6 "	0,010	0,121	0,0026

La vétusté diminue la raideur d'une corde.

8. Résistance des milieux. — Soit un solide mobile dans l'air ou dans l'eau ; $d\sigma$ un élément de la surface du solide ; V la vitesse relative (par rapport au fluide) de l'élément du solide en contact avec $d\sigma$.



L'élément $d\sigma$ éprouve de la part de l'air une résistance $R d\sigma$, qu'on peut décomposer en une force normale de l'élément $d\sigma$, soit $N d\sigma$, dite résistance normale, et une force tangente à $d\sigma$, soit $F d\sigma$, dite

force de frottement. La première est de beaucoup plus importante que la seconde¹⁰ (sur laquelle on reviendra en hydraulique); elle n'existe que pour les éléments $d\sigma$ qui frappent le fluide, c'est-à-dire tels que la vitesse V soit dirigée en dehors du solide (au voisinage de $d\sigma$); dans le cas de la figure elle n'existerait pas pour l'élément $d\sigma$.

On admet depuis Vesytton que la résistance normale R_n est dirigée en sens inverse de la composante normale V_n de la vitesse V et qu'elle est une fonction rapidement croissante de V_n . On adopte généralement pour les vitesses V assez grandes la formule

$$R_n = k V_n^2 d\sigma;$$

k indiquant un certain coefficient constant.

La force de frottement F est directement opposée à la composante tangentielle V_t de V et fonction croissante de V_t .

Le mouvement d'un solide dans un fluide donne lieu à un ébranlement du fluide très compliqué; les lois précédentes ne sont qu'une approximation.

Pour l'eau $K = 0,92$ (Du Buat)

Pour l'air $K = 0,07$ (Cailletet) (Unités: mètre, seconde, kilog)

Chapitre II. - Rendement des machines simples.

1. Équilibres limites. - Dans ce qui suit l'équilibre est étudié en ne tenant compte que du frottement de glissement. - Afin de préciser les problèmes et pour ne pas rencontrer de conditions exprimées par des inégalités, on cherchera les conditions limites de l'équilibre, c'est-à-dire que l'on supposera à chaque contact la force de frottement égale à $f_0 N$ et dirigée en sens inverse du glissement qui tend à se produire. Pour simplifier l'écriture, on supprimera l'indice 0.

2. Rendement d'une machine simple. - Une machine est un appareil servant à la transmission et à la transformation du travail. Une force donnée P appelée puissance développe sur son point d'application un travail positif appelée travail moteur. Ce travail est employé à déplacer le point d'application d'une autre force Q appelée la résistance, de telle façon que le travail de celle-ci soit négatif; la valeur absolue du travail de Q s'appelle le travail utile.

Généralement une machine peut être considérée comme un système à liaisons complètes et par conséquent il existe une relation déterminée entre les déplacements des points d'application de la puissance et de la résistance.

Considérons une machine à l'état d'équilibre limite. Donnons au système le seul déplacement virtuel compatible avec les liaisons; soient δp et δq les déplacements virtuels des points d'application de P et de Q (projetés sur P et Q); le rapport $\frac{\delta p}{\delta q}$ est défini par la nature des liaisons; soit \mathcal{E}_f le travail virtuel correspondant des forces de frottement de glissement, travail essentiellement négatif. Le théorème

$$P \delta p + Q \delta q + \mathcal{E}_f = 0 ;$$

d'où

$$-\frac{Q \delta q}{P \delta p} = 1 + \frac{\mathcal{E}_f}{P \delta p}$$

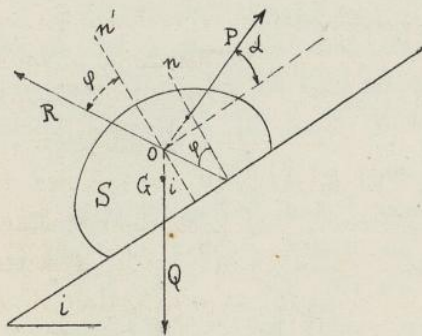
On appelle rendement élémentaire ρ de la machine la valeur absolue du rapport $\frac{Q \delta q}{P \delta p}$, c'est-à-dire la fraction du travail moteur $P \delta p$ qui est convertie en travail utile.

$$\rho = \left| \frac{Q \delta q}{P \delta p} \right| = 1 + \frac{\mathcal{E}_f}{P \delta p}$$

Comme \mathcal{E}_f est négatif et $P \delta p$ positif, ρ est inférieure à l'unité.

3. Systèmes symétriques. — Tous les systèmes que nous allons considérer présenteront un plan de symétrie géométrique par rapport auquel les forces actives et par suite les réactions seront symétriquement distribuées. Il nous sera loisible dès lors de supposer que l'on a préalablement réduit toutes les forces actives ou réactives, par groupes d'éléments symétriques, de manière à n'avoir plus que des ensembles de forces toutes réparties dans le plan de symétrie. C'est ce plan de symétrie contenant toutes les forces qui sera pris pour plan de la figure.

4. Plan incliné. — Soit un corps de poids Q , de centre de gravité G , reposant par une face plane sur un plan incliné de l'angle i sur l'horizon, présentant un plan de symétrie vertical et normal au plan incliné, soumis dans ce plan à une force P qui fait un angle α avec le plan incliné, du côté ascendant. Quelle doit être la grandeur de P pour que le corps soit sur le point de monter?



Les réactions du plan incliné sur le corps S et les forces P et Q forment un système en équilibre. Donc ces réactions admettent une résultante R passant par le point de concours O de P et de Q , et, d'après les lois de Coulomb, elle sera, au moment du démarrage, inclinée sur la normale à la face de contact d'un angle φ (on supprimera l'indice) dans un sens tel que sa composante tangentielle soit opposée à la vitesse virtuelle de glissement.

sement.

Les conditions d'équilibre de ces trois forces concourantes sont, en observant que

$$\widehat{Q,R} = \pi - (i + \varphi) ; \quad \widehat{R,P} = \frac{\pi}{2} - (\alpha - \varphi) ; \quad \widehat{P,Q} = \frac{\pi}{2} + (\alpha + i) ;$$

$$\frac{Q}{\sin(i + \varphi)} = \frac{P}{\cos(\alpha - \varphi)} = \frac{R}{\cos(\alpha + i)}$$

Ainsi

$$P = Q \frac{\sin(i + \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)}$$

D'autre part, soit de un glissement élémentaire virtuel ascendant du corps. On a

$$\delta p = de \cos \alpha ; \quad \delta q = - de \sin i.$$

Le rendement est donc :

$$\rho = \frac{\sin i \cdot \cos(\alpha - \varphi)}{\cos \alpha \cdot \sin(i + \varphi)} = \frac{1 + f \operatorname{ctg} \alpha}{1 + f \operatorname{ctg} i}$$

Le travail élémentaire du frottement de glissement sera :

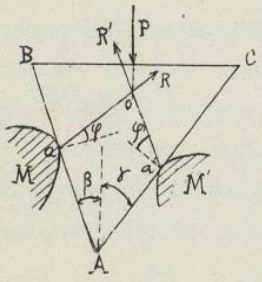
$$\mathcal{E}_f = -R \sin \varphi \delta e.$$

i, φ et Q étant donnés, P a sa plus petite valeur pour $\alpha = \varphi$; c'est-à-dire pour $\operatorname{ctg} \alpha = f$.

5. Coin et presse à coin. - Un coin est un prisme triangulaire à section droite ABC généralement isocèle, employé pour séparer en deux parties un corps par une pression P exercée seulement sur la tête BC, normalement à cette tête.

On suppose que le coin s'enfonce perpendiculairement à la tête.

Supposons le triangle ABC quelconque ; soient a et a' les points de contact avec la masse où pénètre le coin, dans le plan de symétrie. Au moment où le coin va s'enfoncer, il y a équilibre entre P et les réactions R et R' appliquées en a et a' ,



inclinaison sur les normales aux faces, des angles de frottement au départ φ et φ' (distincts si les substances en a et a' sont différentes), dirigées dans un sens tel que leurs composantes tangentielles s'opposent à l'enfoncement du coin. Ces trois forces concourent, et si β

et γ sont les inclinaisons des faces du coin sur P (compléments des angles B et C), en notant que :

$$\widehat{R, R'} = \pi - [\beta + \gamma + \varphi + \varphi']; \quad \widehat{R', P} = \frac{\pi}{2} + \gamma + \varphi'; \quad \widehat{P, R} = \frac{\pi}{2} + \beta + \varphi,$$

les conditions d'équilibre seront :

$$\frac{\sin[\beta + \gamma + \varphi + \varphi']}{P} = \frac{R}{\cos(\gamma + \varphi')} = \frac{R'}{\cos(\beta + \varphi)}.$$

Soit δp la translation élémentaire virtuelle du coin, normale à BC ; les déplacements correspondants des points de contact sur les faces du coin ont pour valeurs absolues respectives $\delta p \cos \beta$ et $\delta p \cos \gamma$. Le travail des forces de frottement est donc :

$$\mathcal{E}_f = (R \sin \varphi \cos \beta + R' \sin \varphi' \cos \gamma) \delta p,$$

L'expression du rendement élémentaire est donc, P étant la puissance :

$$\rho = \frac{1}{\sin[\beta + \gamma + \varphi + \varphi']} \left\{ \sin(\beta + \gamma + \varphi + \varphi') - \cos(\gamma + \varphi') \sin \varphi \cos \beta - \cos(\beta + \varphi) \sin \varphi' \cos \gamma \right\}.$$

ou après transformations :

$$\rho = \frac{\sin \beta \cos \varphi \cos(\gamma + \varphi') + \sin \gamma \cos \varphi' \cos(\beta + \varphi)}{\sin(\beta + \gamma + \varphi + \varphi')},$$

et en divisant haut et bas par $\sin(\beta + \gamma) \cdot \cos \varphi \cos \varphi'$:

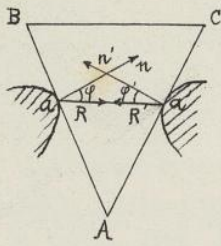
$$\rho = \frac{1 - (f + f') \cos B \cos C}{1 - f f' + (f + f') \operatorname{ctg} A}.$$

Pour un tranchant donné A , le rendement ρ est maximum quand $\cos B \cos C = 0$, c'est-à-dire quand un des angles B ou C est droit ; il est minimum quand $B = C$, car $2 \cos B \cos C = \cos A + \cos(B - C)$.

Dans le cas particulier du coin isocèle berti entre substances identiques ($\varphi = \varphi'$ avec $\beta = \gamma = \frac{A}{2}$), on a :

$$\rho = \frac{\sin \beta \cos \varphi}{\sin(\beta + \varphi)} = \frac{1}{1 + f \operatorname{ctg} \frac{A}{2}}.$$

Le coin étant pincé entre a et a' , imaginons qu'on cesse de faire agir P (le poids du coin étant négligeable). Quelle est la condition d'équilibre strict à la montée ?



Le coin n'est plus soumis qu'aux réactions R et R' qui maintenant sont inclinées respectivement de φ et de φ' sur les normales en a et en a' , en sens inverses des précédents; pour l'équilibre, il faut et il suffit que ces réactions aient pour ligne d'action commune $a-a'$ et aient même grandeur. Alors :

$$A = \varphi + \varphi'$$

Si $A < \varphi + \varphi'$, il faudrait faire effort pour retirer le coin ;

si $A > \varphi + \varphi'$, le coin remonterait de lui-même.

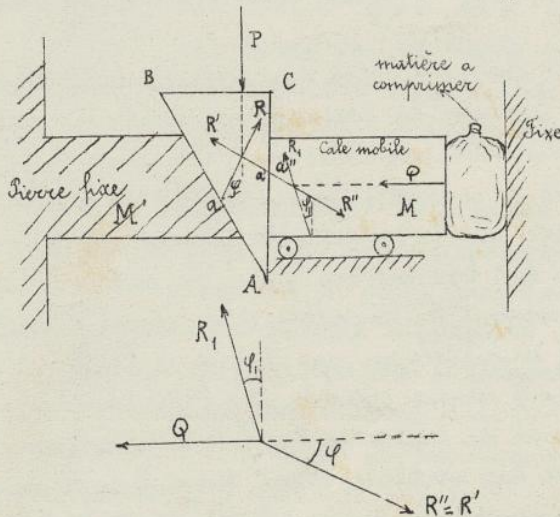
Pour un coin isocèle entre substances identiques, réalisant la condition ci-dessus ($A = \varphi + \varphi'$), le rendement est $\frac{1}{2}$.

La presse à coin est constituée par un coin rectangle ABC qui en descendant sous l'action d'une force P écarte l'une de l'autre les masses M et M' . La masse M' est maintenue immobile par des liaisons convenables. La masse M est guidée horizontalement par des galets et se déplace en surmontant la résistance horizontale Q provenant de matières à comprimer (pour en extraire un suc liquide par exemple).

Avec les notations précédentes et en supposant les masses M et M' de même substance, on a pour conditions d'équilibre limite du coin à la descente :

$$\frac{P}{\sin(A + 2\varphi)} = \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{R'}{\cos(A + \varphi)}$$

Exprimons maintenant que la masse M est à l'état d'équilibre limite sous l'action de la résistance Q , de la réaction R'' égale et directement opposée à R' , et de la



résultante R_1 des réactions des deux galets, inclinée de φ_1 , sur la verticale, en sens inverse de la tendance au glissement de M . (φ_1 angle de frottement au départ pour les substance formant M et les galets.) On a

$$\frac{Q}{\cos(\varphi + \varphi_1)} = \frac{R_1}{\sin\varphi} = \frac{R'}{\cos\varphi_1}$$

Par suite :

$$P = Q \cdot \frac{\cos\varphi_1}{\cos(\varphi + \varphi_1)} \times \frac{\sin(A + 2\varphi)}{\cos(A + \varphi)}$$

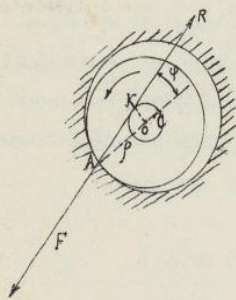
ou

$$P = \frac{Q}{1 - f_h} \cdot \frac{2f + \tan A(1 - f^2)}{1 - f \tan A}$$

À une descente virtuelle δp du coin correspond un déplacement horizontal $\delta q = -\delta p \tan A$ de la cale. Le rendement élémentaire de la presse à coin est donc

$$\rho = \frac{(1-f_1)(1-f_2 A)}{1-f_1^2 + 2f_1 \cotg A}$$

6. Touillon-Levier. - La considération du mouvement d'un touillon sur son coussinet se ramène à celle d'une section faite par un plan perpendiculaire aux génératrices. Soit C le centre d'un coussinet et O celui d'un touillon de rayon ρ dont

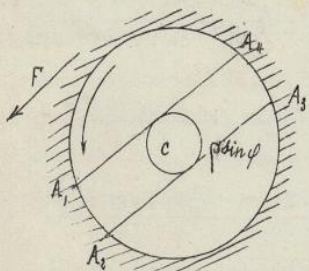


le mouvement de rotation tend à se produire dans le sens de la flèche. Il y a entre les deux pièces jumelles un léger jeu, très exagéré sur la figure, et dont le but est d'éviter l'excès de frottement : les surfaces en contact se touchent donc seulement suivant une génératrice. A l'état de repos, la pesanteur agissant seule, le touillon repose à la partie inférieure du coussinet. Dès que, sous l'action de la force motrice, l'arbre se met en mouvement, dans le sens indirect par exemple, le touillon roule à

gauche sur le coussinet jusqu'au moment où sa réaction tangentielle atteint son maximum, c'est-à-dire la valeur du frottement de glissement : soit A le point de contact et O le centre du touillon au moment où l'arbre commence à glisser en même temps qu'il tourne. A cet instant, la réaction R, inclinée de φ sur AO dans le sens indirect, est distante de O de $\rho \sin \varphi$. A quelle condition le centre du touillon demeurera-t-il immobile en O en même temps que le touillon tournera autour de ce centre ?

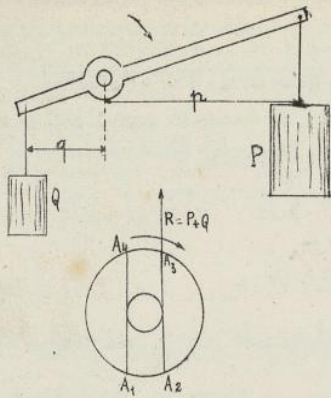
Il faut et il suffit (théorème du mouvement du centre de gravité) que la somme géométrique des forces sollicitant le touillon (forces extérieures et réaction) soit nulle. La réaction R ayant une ligne d'action fixe, la somme géométrique F des forces extérieures doit garder une direction invariable. Ainsi R est égale et parallèle à F, mais de sens opposé. De plus, si le mouvement est uniforme, le moment résultant ϕ des forces extérieures par rapport à O, négatif dans la figure, aura pour valeur absolue $F \rho \sin \varphi$.

Connaissant F, voyons à placer R. Comme R est à une distance du centre C du coussinet égale à $\rho \sin \varphi$, r étant le rayon du coussinet, on mènera au cercle de rayon $\rho \sin \varphi$ et de centre C des tangentes parallèles à F. Cela fournit sur la périphérie du coussinet quatre points de rencontre parmi lesquels est le point de contact A. Pour choisir on remarquera que la composante tangentielle de la



réaction doit toujours être placée en sens contraire du mouvement du touillon et qu'en outre la réaction R est dirigée en sens inverse de la force F.

Prenons comme exemple un levier de premier genre dont la puissance P et la résistance Q ont une direction fixe verticale, et ont pour bras de levier respectifs p et q . La somme géométrique P+Q est dirigée suivant la verticale descendante et par suite la réaction R sur le levier sera



dirigée suivant la verticale ascendante. De plus, le levier portant des tourillons faisant corps avec lui, et le système tendant à tourner dans le sens direct, le point de contact sera sur la figure le point A_3 . La condition d'équilibre limite ou de mouvement uniforme sera :

$$Pp - Qq - (P+Q)\rho \sin \varphi = 0$$

Le rendement sera :

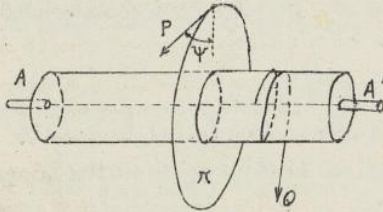
$$\frac{Qq}{Pp} \quad \text{ou} \quad \frac{1 - \frac{\rho}{q} \sin \varphi}{1 + \frac{\rho}{q} \sin \varphi}$$

ou, sensiblement, ρ étant petit vis à vis de p et q et $\sin \varphi$ étant aussi petit :

$$1 - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p}\right)\rho \sin \varphi.$$

Si le levier avait été soutenu par un arbre fixe passant dans un œil, toutes choses égales d'ailleurs, le point de contact eût été A_3 , et le calcul subsisterait.

f. Treuil. — Pour fixer les idées, nous supposons que l'axe du treuil est horizontal et que la résistance à vaincre Q est verticale. Soient P la puissance aussi comprise dans un plan perpendiculaire à l'axe, r le rayon de la roue à la circonférence de laquelle elle est appliquée ; q le rayon du treuil ; ψ l'angle de P avec la verticale ; a et a' les distances du plan π aux milieux A et A' des portions des axes des tourillons comprises dans les coussinets ; b et b' les distances aux



mêmes points du plan perpendiculaire à l'axe déterminé par la direction Q ; ρ le rayon des tourillons.

Le mode de répartition des réactions de chaque coussinet sur le tourillon qu'il reçoit est inconnu ; mais comme la largeur du coussinet est relativement faible, on peut, sans grande erreur, supposer que leur résultante passe par le milieu A ou A' de la portion du tourillon renfermée dans le coussinet. Nous cherchons à obtenir un mouvement uniforme. Il faut pour cela qu'il y ait équilibre entre les forces qui agissent sur le treuil.

La force Q se décompose en deux autres parallèles à sa direction : $\frac{Qb'}{b+b'}$, $\frac{Qb}{b+b'}$, comprises dans les plans (V) , (V') perpendiculaires à l'axe en A , A' . La force P se décompose de la même manière en deux forces parallèles $\frac{Pa'}{a+a'}$, $\frac{Pa}{a+a'}$, comprises dans ces mêmes plans. Mais la première d'entre elles, par exemple, peut être considérée comme la résultante des forces verticale et horizontale $\frac{Pa' \cos \psi}{a+a'}$, $\frac{Pa' \sin \psi}{a+a'}$. Il suit de là que la résultante des forces comprises dans le plan (V) qui passe nécessairement par le milieu de l'arête de contact du tourillon et du coussinet a pour expression (en remarquant que $b+b' = a+a'$) :

$$F = \frac{\sqrt{(Pa' \cos \psi + Qb')^2 + P^2 a'^2 \sin^2 \psi}}{a+a'}$$

et le moment correspondant de frottement sera $-F\rho \sin \varphi$.

On obtiendrait un résultat analogue pour le second tourillon. L'équation d'équilibre est alors

$$Pp - Qq = \frac{P \sin \varphi}{a + a'} \left\{ \sqrt{(Pa' \cos \psi + Qb')^2 + P^2 a'^2 \sin^2 \psi} + \sqrt{(Pa \cos \psi + Qb)^2 + P^2 a^2 \sin^2 \psi} \right\}$$

Supposons, pour fixer les idées, que, dans chaque radical, le premier carré soit supérieur au second; nous aurons sensiblement, d'après une formule de Poncelet (1):

$$Pp - Qq = P \sin \varphi [0,96 (P \cos \psi + Q) + 0,40 P \sin \psi].$$

Le rendement est par suite:

$$\frac{1 + (0,96 \cos \psi + 0,4 \sin \psi) \frac{P}{Q} \sin \varphi}{1 + 0,96 \frac{P}{Q} \sin \varphi}$$

L'erreur commise dans l'équation d'équilibre est au plus égale au $\frac{1}{25}$ du terme dû au frottement, qui est déjà relativement petit.

Si P et Q sont parallèles, c'est-à-dire si $\psi = 0$, l'équation coïncide avec celle obtenue pour le levier.

8. Poulie. - Palan. - Considérons une poulie de rayon p sur laquelle passe une corde tirée par une puissance P et retenue par une résistance Q. La résultante de P et de Q sera $F = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(P, Q)}$; p étant le rayon du tourillon, le moment de la force de frottement sera $-Fp \sin \varphi$. D'autre part, la hauteur de la corde donne lieu à un moment résistant supplémentaire $\frac{A+B}{2} Q$ (avec les notations du chapitre I). L'équation d'équilibre strict ou de mouvement uniforme sera:

$$Pp - Qp - \frac{A+B}{2} Q - \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(P, Q)} \cdot p \sin \varphi = 0.$$

Si P et Q sont parallèles, le radical se réduit à $P+Q$. Dans tous les cas, le radical est transformable par la formule de Poncelet. Cette relation peut donc se mettre aisément sous la forme:

$$P = \alpha + \beta Q,$$

α et β étant deux constantes indépendantes de P et Q.

Considérons maintenant un palan dont la chape fixe et la chape mobile por-

(1) Note sur la formule d'approximation de Poncelet. - Poncelet s'est proposé de remplacer $\sqrt{y^2 + x^2}$ par une fonction linéaire $\alpha y + \beta x$ avec une erreur acceptable en pratique, sachant seulement que $y > x$.

Posant $\frac{y}{x} = \cotg \theta$ ($0^\circ < \theta < 45^\circ$), $\alpha = \frac{\cos \varepsilon}{\cos^2 \frac{\varepsilon}{2}}$, $\beta = \frac{\sin \varepsilon}{\cos^2 \frac{\varepsilon}{2}}$, on reconnaît que l'erreur relative s'écrit:

$$e = 1 - \frac{\alpha y + \beta x}{\sqrt{y^2 + x^2}} = 1 - \frac{\cos(\theta - \varepsilon)}{\cos^2 \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Quand θ varie de 0 à ε , l'erreur d'abord égale à $\text{Ctg}^2 \frac{\varepsilon}{2}$, décroît jusqu'à $-\text{Ctg}^2 \frac{\varepsilon}{2}$. Elle repasse ensuite par les mêmes valeurs quand θ varie de ε à 2ε . On sera donc certain de commettre une erreur relative moindre en valeur absolue que $\text{Ctg}^2 \frac{\varepsilon}{2}$, si $0 \leq \theta \leq 2\varepsilon$, et en particulier si $45^\circ \leq 2\varepsilon$. Si l'on prend $\varepsilon = 22^\circ 30'$, on aura $\alpha = 0,96$, $\beta = 0,4$ et $\text{Ctg}^2 \frac{\varepsilon}{2} = 0,392$.

Ainsi, si $y > x$, on pourra remplacer $\sqrt{y^2 + x^2}$ par $0,96y + 0,40x$, avec une erreur moindre que 1 pour cent. C'est ce que l'on fera dans les applications.

tant un certain nombre de poulies toutes identiques, si T_k, T_{k+1} sont les tensions des deux brins aboutissant à la même poulie, on a, d'après ce que nous venons de voir :

$$T_{k+1} = \alpha + \beta T_k ;$$

la tension du dernier brin est égale à la puissance P tirant sur l'extrémité libre, et en supposant que le nombre des brins soit égal à $(n+1)$, on a les formules

$$(1) \quad \begin{cases} T_2 = \alpha + \beta T_1 \\ T_3 = \alpha + \beta T_2 \\ \dots \\ P = \alpha + \beta T_n. \end{cases}$$

T_1 est la tension inconnue du premier brin amarré à un point fixe.

Ces relations peuvent se mettre sous la forme

$$(2) \quad \begin{cases} T_2 + \frac{\alpha}{\beta-1} = \beta \left(T_1 + \frac{\alpha}{\beta-1} \right) \\ T_3 + \frac{\alpha}{\beta-1} = \beta \left(T_2 + \frac{\alpha}{\beta-1} \right) \\ \dots \\ P + \frac{\alpha}{\beta-1} = \beta \left(T_n + \frac{\alpha}{\beta-1} \right) \end{cases}$$

Multiplications membre à membre, il vient :

$$(3) \quad P + \frac{\alpha}{\beta-1} = \beta^n \left(T_1 + \frac{\alpha}{\beta-1} \right).$$

Soit d'autre part Q la force qui résiste au déplacement de la chape mobile. On a :

$$(4) \quad Q = T_1 + T_2 + \dots + T_n.$$

Ajoutons membre à membre les équations (1) en tenant compte de (4).

$$P + Q - T_1 = n\alpha + \beta Q ;$$

d'où T_1 et par suite (3) donne :

$$P = \frac{n\alpha \beta^n}{\beta^n - 1} - \frac{\alpha}{\beta-1} + \beta^n \frac{\beta-1}{\beta^n - 1} Q.$$

Cette relation entre la puissance et la résistance permet de se rendre compte qu'il n'y a pas avantage à augmenter au delà d'une certaine limite le nombre des cordons.

Pretons-nous au cas où la constante β surpasse très peu l'unité et posons $\beta = 1 + \epsilon$.

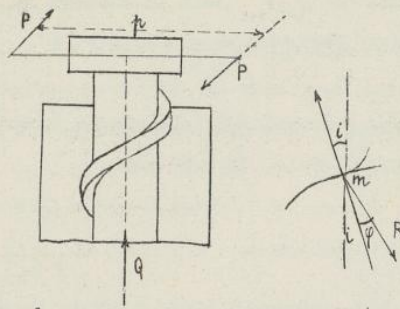
En traitant ϵ comme une quantité infiniment petite, on trouve

$$P = n\alpha + \frac{Q}{n}.$$

Le minimum de P a lieu dans ces conditions pour $n = \sqrt{\frac{Q}{\alpha}}$. Il faudra prendre le nombre entier le plus voisin de ce radical. Pour $n = \sqrt{\frac{Q}{\alpha}}$, il vient $P = 2\sqrt{\alpha Q} = 2\frac{Q}{n}$. S'il n'y avait pas de frottement, ni raideur des cordes, la valeur de P serait $\frac{Q}{n}$. On voit que dans le cas le plus favorable, la puissance nécessaire est réellement deux fois plus grande que la puissance calculée en négligeant les résistances passives.

Calculons le rendement. Le déplacement de l'extrémité libre étant n fois plus grand que celui de la chape mobile, le rapport du travail moteur au travail résistant est $\frac{nP}{Q}$; le rendement est donc $\frac{Q}{Q + n\alpha}$, d'autant plus faible que le nombre des brins est plus grand. Pour $n = \sqrt{\frac{Q}{\alpha}}$, sa valeur est seulement $\frac{1}{2}$.

9. Vis. - Presse à vis. - Soit une vis à filet carré et à axe vertical guidée par un écrou que nous supposons fixe. La vis est sollicitée par une force verticale Q dirigée suivant son axe, et nous admettrons, pour ne pas avoir à tenir compte de frottements latéraux, que cette force et le frottement sont maintenus en équilibre par un couple de moment Pp , perpendiculaire à l'axe. La saillie du filet étant rela-



18.
tivement très faible, on peut, sans erreur appréciable, supposer que les réactions de l'écran sur ce filet se réduisent à des forces réparties sur l'hélice moyenne d'inclinaison i sur un plan perpendiculaire à l'axe, et portées par un cylindre de rayon r .

Et quelle condition la vis soumise au couple Pp sera-t-elle sur le point de descendre mal-

gré la résistance verticale Q dirigée vers le haut ?

Pour un élément m de l'hélice moyenne, la réaction R reçue de l'écran, située dans le plan tangent au cylindre moyen, inclinée de φ sur la normale à l'hélice dans ce plan, dans le sens opposé au glissement de m , sera inclinée de l'angle $i + \varphi$ sur les génératrices du cylindre moyen. - Les équations d'équilibre seront :

$$Q = \sum R \cos(i + \varphi) = \cos(i + \varphi) \sum R$$

$$Pp = \sum R \sin(i + \varphi) r = r \sin(i + \varphi) \sum R.$$

$$Pp = Qr \operatorname{ctg}(i + \varphi).$$

D'où

Pour $i \geq 90^\circ - \varphi$, le serrage est impossible : on ne peut donc pas serrer une vis à pas trop grand.

Si on cherche à quelle condition la vis soumise aux mêmes forces sera sur le point de monter, on aura, le frottement étant renversé :

$$Pp = Qr \operatorname{ctg}(i - \varphi).$$

Pour $i < \varphi$, l'ascension sera impossible.

Ainsi i étant faible, on pourra développer un effort $\frac{Pp}{r \operatorname{ctg}(i + \varphi)}$, force qui se maintiendra intégralement après la suppression du couple moteur, la vis étant incapable de remonter par le seul effet de la force Q .

L'expression du rendement est, h désignant le pas de la vis : $\frac{Qh}{2\pi Pp}$, soit $\frac{h}{2\pi r \operatorname{ctg}(i + \varphi)}$ ou enfin $\frac{\operatorname{ctg} i}{x(1-fx)}$ (où $\operatorname{ctg} i = \alpha$). Cherchons les conditions de son maximum, soit du maximum de $\frac{\operatorname{ctg} i}{x(1-fx)}$ (où $\operatorname{ctg} i = \alpha$) ; on doit avoir : $1 - 2fx - x^2 = 0$, soit $\frac{1}{x} = \frac{2f \pm \sqrt{4f^2 - 1}}{2}$, ou enfin $\operatorname{ctg} i = \frac{1}{2f} \pm \frac{\sqrt{4f^2 - 1}}{2}$. Ainsi le maximum a lieu pour $i = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$, et sa valeur est $\frac{\operatorname{ctg}(45^\circ - \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{ctg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}$ ou $\frac{\operatorname{ctg}^2(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{1}$.

Dans le cas de la vis à filet triangulaire, un calcul beaucoup plus compliqué conduit à :

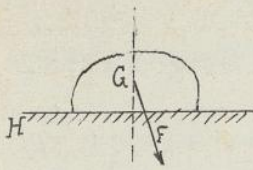
$$Pp = Qr \frac{(1-e) \operatorname{tang} i - \frac{f \cos i}{\sin \delta \cos \lambda}}{1 + f(1-e) \frac{\sin i}{\sin \delta \cos \lambda}},$$

e désignant le rapport de l'épaisseur du filet au diamètre moyen ; δ l'inclinaison du profil sur les génératrices, et λ étant défini par $\operatorname{ctg} \lambda = \operatorname{ctg} i \sin \delta$.

Chapitre III. - Utilisation des forces de frottement.

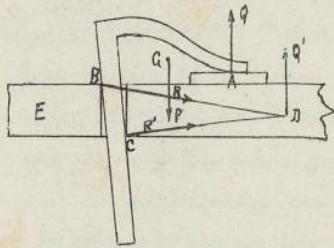
1. Arc-boutement. - On dit qu'il y a arc-boutement quand, par l'effet du frottement, les forces directement appliquées à un système ne peuvent rompre l'équilibre de ce sys-

tême quelques grandes que soient ces forces, dont on se donna simplement les points d'application et les directions.



Par exemple, si un corps en contact avec un plan horizontal H est sollicité par une force F appliquée au centre de gravité G , passant à l'intérieur du polygone de sustentation et faisant avec la normale au plan un angle inférieur à l'angle de frottement, le corps se trouve arc-bouté.

2. Valet de menuisier.



Cet appareil bien connu fournit un exemple intéressant d'arc-boutement.

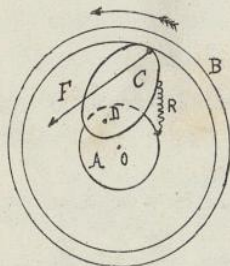
Les forces qui le sollicitent sont la réaction Q du corps pressé en A sur l'établi E , le poids P et les réactions R, R' développées en B et C , au contact de la tige avec les parois du trou pratiqué dans l'établi. Les forces P, Q , toutes deux verticales, se composent en une force verticale Q' . Les forces R

et R' se rencontrent en un point D de cette verticale. Le valet est construit de telle manière que si D est à droite de la verticale de A , l'une au moins des droites BD, DC fasse nécessairement avec la normale à la tige un angle inférieur à l'angle limite de frottement: dès lors, tout glissement est impossible.

Pour que D soit à droite de la verticale de A , il faut et il suffit que Q surpasse le poids P du valet: on réalise cette condition en donnant sur la tête du valet un coup de marteau qui détermine en A une pression initiale considérable, et cette pression se maintient ensuite d'elle-même, le valet ne pouvant remonter tant qu'on ne fait pas intervenir d'autres forces.

3. Encliquetage Dobo.

C'est encore une application de l'arc-boutement. Un disque A et un anneau B , mobiles d'un même axe O , sont reliés par une came C articulée en D au disque A et pressée contre l'intérieur de l'anneau par un ressort R . Si l'on fait tourner l'anneau dans le sens de la flèche, il ne peut glisser sur la came sans exercer sur elle une réaction F faisant avec la normale au point de contact un angle égal à l'angle de frottement. L'appareil est construit de façon que le moment de cette réaction par rapport à D soit de même signe que celui du ressort. L'équilibre est donc impossible dans ces conditions.



Il faut en conclure que la réaction F fait avec la normale un angle inférieur à l'angle de frottement et que par conséquent, le glissement n'a pas lieu: l'anneau entraîne la came et, avec elle, le disque A , comme s'il y avait un lien rigide. Quand l'anneau tourne dans le sens opposé, le glissement de C se produit sans difficulté.

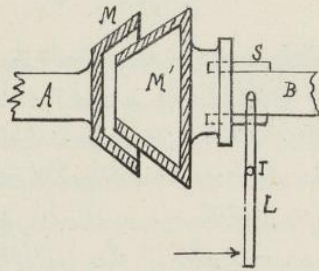
On réalise ainsi la transmission de mouvement de A à B dans un seul sens c'est-à-dire qu'en imprimant à l'anneau un mouvement oscillatoire, on com-

rique à A une série de rotations de sens constant, séparées par des intervalles de repos.²⁰
Inversement, on peut donner à A un mouvement oscillatoire, et c'est alors l'anneau B qui progresse dans un sens constant.

En réalité l'encliquetage Dobo présente, sur le contour du disque A, plusieurs cames symétriquement placées; la théorie demeure la même.

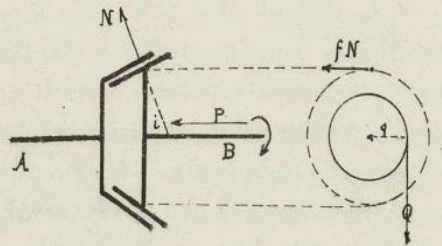
Ce genre d'encliquetage est fréquemment employé dans les bicyclettes à roue libre.

A. Embrayage par cônes de friction. — Soit un arbre tournant A terminé



par un plateau M conique creux, et soit un arbre semblable B placé en regard et dans le prolongement du premier. L'arbre B se termine par un manchon conique M', de même angle que le plateau M, qui peut glisser sur l'arbre B, mais que des saillies S existant sur cet arbre empêchent de tourner par rapport à lui. Pour établir la transmission, on fait, au moyen d'un levier L, mobile autour d'un point I, glisser le manchon de droite à gauche jusqu'à ce que

M' vienne en contact avec M; les réactions qui naissent au contact, moyennant une pression convenable sur le levier, entraîneront l'arbre A. Le débrayage s'obtient par un mouvement inverse.



L'effort nécessaire pour faire adhérer les deux cônes est d'autant moindre que l'angle des génératrices avec l'axe est plus petit.

Soit en effet P l'effort nécessaire pour déterminer l'adhérence des deux cônes, et par suite l'entraînement de l'arbre B, le mouvement ayant lieu dans le sens de la flèche. Au moment du démarrage, il y

a équilibre entre P, le couple résistant Qq de l'arbre A et les réactions de contact. Si donc pour un élément de surface de contact de $d\sigma$ distant de r de l'axe, N est la pression normale, rencontrant l'axe sous l'angle i , la force de frottement fN sera tangente au parallèle de l'élément, en sens inverse de la tendance au mouvement, et l'on aura les conditions :

$$P = \sum N \cos i = \cos i \sum N;$$

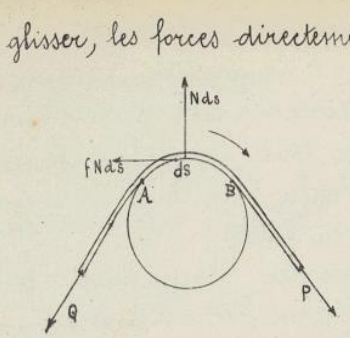
$$Qq = \sum fNr = f \sum Nr.$$

Soit r le rayon moyen du cône plein. On a sensiblement: $\sum Nr = r \sum N$, et par suite:

$$P = \frac{Qq}{f r} \cos i;$$

ainsi l'effort P d'embrayage est d'autant plus petit que l'angle i est plus voisin d'un droit.

5. Frottement d'une corde sur un arbre. — Lorsqu'une corde parfaitement flexible appliquée sur la section droite d'un cylindre est sur le point de



glisser, les forces directement appliquées à chaque élément sont la réaction normale qui, de l'ordre de l'élément ds , s'écrira : $N ds$, dirigée vers l'extérieur du cylindre et la force de frottement $f N ds$ dirigée en sens inverse du mouvement qui tend à se produire. Si l'on appelle p le rayon de courbure de la section droite, si l'on fait croître l'arc s dans le sens du mouvement de glissement et si T est la tension de l'élément considéré, les équations d'équilibre sont (voir cours

de Mécanique Rationnelle) :

$$\frac{dT}{ds} - fN = 0, \quad \frac{T}{p} - N = 0;$$

d'où, en appelant $d\theta$ l'angle de contingence $\frac{ds}{p}$:

$$\frac{dT}{T} = f \frac{ds}{p} = f d\theta.$$

En intégrant, et appelant C une constante arbitraire, on a :

$$T = C e^{f\theta}.$$

Supposons que la corde soit tirée par une puissance P et retenue par une résistance Q . En prenant comme origine des arcs, le point où commence l'enroulement, on doit avoir $T = Q$ pour $\theta = 0$. Donc $C = Q$. Soit de plus α la rotation de la tangente depuis le point A jusqu'au point B où finit l'enroulement. On a $T = P$ pour $\theta = \alpha$; d'où

$$P = Q e^{f\alpha}.$$

Cette formule montre que le rapport $\frac{P}{Q}$ croît très rapidement avec l'angle α . D'ailleurs rien ne limite cet angle, car la corde peut faire autant de tours que l'on veut sur le cylindre; si les spires sont jointives, on peut assimiler approximativement chaque spire à une courbe plane. La corde faisant n tours sur le cylindre, on aura $\alpha = 2n\pi$ et par suite :

$$P = Q e^{2n\pi f}.$$

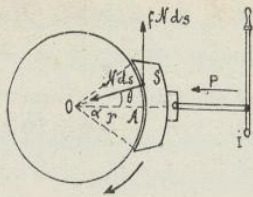
Exemple. - Pour une corde de chanvre sur bois poli, $f = 0,20$:
 $n = 1, \frac{P}{Q} = 3,513$; $n = 2, \frac{P}{Q} = 12,345$; $n = 3, \frac{P}{Q} = 43,376$.
 Sur bois rugueux, on aurait $f = 0,50$ et la croissance serait bien autrement rapide.

On utilise fréquemment cette propriété; par exemple pour l'amarrage des navires. Dans ce cas, la traction exercée par le navire qui tend à se déplacer représente la puissance P , et pourvu que la corde fasse deux ou trois tours sur le corps mort (cylindre vertical brut planté sur le quai), un très faible effort Q suffit pour empêcher le mouvement.

La puissance et la résistance ayant des points d'application à déplacements égaux, le rendement est : $\rho = \frac{Q}{P} = e^{-f\alpha}$.

6. Frein à sabot. - Un frein se compose essentiellement d'une pièce de bois ou de métal (sabot ou mâchoire) adaptée sur la jante d'une roue ou d'une poulie sur laquelle on la serre plus ou moins fortement; on développe ainsi des forces

de frottement qui ralentissent et même arrêtent le mouvement de la roue. 22.



Soit r le rayon de la roue; P la pression totale exercée sur le patin S . Nous considérerons cette pression comme uniformément répartie sur toute la surface de contact et désignons par N la valeur unitaire de la pression sur la circonférence de la jante.

Soit 2α l'angle au centre de l'arc occupé par le frein, OA sa bissectrice, θ l'angle formé avec OA par le rayon d'un élément ds de la jante. L'équilibre du patin donne:

$$P = \sum N ds \cos \theta = Nr \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta = 2rN \sin \alpha.$$

Le moment total des forces de frottement développées par le frein sera:

$$-\sum fN ds r = -2fNr^2 \alpha = -\frac{frPd}{\sin \alpha}.$$

D'autre part, estimons le moment de frottement développé par les tourillons de la roue. La pression sur l'axe est due à la pression P du sabot, à l'action tangentielle résultante, dirigée suivant la corde du sabot et au poids de l'appareil; nous négligerons les deux dernières forces vis-à-vis de la première, d'autant qu'avec notre disposition les deux dernières sont de sens contraire. Si r_1 est le rayon des tourillons et f_1 le coefficient de leur frottement sur les coussinets, le moment de ce frottement sera: $-\frac{P f_1 r_1}{\sqrt{1+f_1^2}}$.

Supposons enfin, comme cela a lieu d'habitude, que le frein ne commence à fonctionner que quand on fait cesser l'action des forces extérieures. L'équation qui définit la vitesse de rotation ω de la roue, sera, I étant le moment d'inertie par rapport à l'axe 0:

$$I \frac{d\omega}{dt} = -P \left[\frac{frd}{\sin \alpha} + \frac{f_1 r_1}{\sqrt{1+f_1^2}} \right].$$

La vitesse de la roue diminuera donc proportionnellement au temps.

Si ω_0 est la vitesse angulaire, au début du fonctionnement du frein, et τ le temps nécessaire pour l'arrêt, on a:

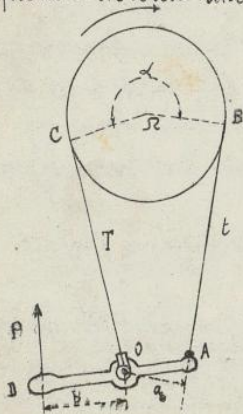
$$I \omega_0 = P \left[\frac{frd}{\sin \alpha} + \frac{f_1 r_1}{\sqrt{1+f_1^2}} \right] \tau.$$

En se donnant τ a priori, on aura à choisir les données de manière à satisfaire à cette relation.

7. Frein à ruban. — L'arbre tournant à arrêter a porté une poulie sur laquelle s'enroule une lame métallique très flexible qui d'un côté s'attache à l'articulation fixe O d'un levier AOD , de l'autre à l'extrémité A de ce levier. En exerçant un effort P à l'autre extrémité D , on serre la lame contre la poulie et l'on produit un frottement qui tend à ralentir le mouvement. Soit T la tension du brin fixé OC , t celle du brin tiré AB , α l'angle embrassé, f le coefficient de frottement. On a:

$$T = t e^{f\alpha}.$$

Soient a et b les bras de levier de t et de P par rapport à O : $Pb = ta$. Le moment des forces de frottement,



par rapport à r est :

$$-(T-t)r \text{ ou } -\frac{Pbr}{a}(e^{fr}-1).$$

23

Soient d'autre part ϕ le moment moteur, ϕ_1 le moment résistant, supposés tous deux constants. L'équation du mouvement de la poulie sera :

$$I \frac{d\omega}{dt} = \phi - \phi_1 - \frac{Pbr}{a}(e^{fr}-1).$$

Pour rendre la vitesse constante, il faut prendre :

$$P = \frac{a(\phi - \phi_1)}{br(e^{fr}-1)}.$$

Si veut arrêter l'arbre, on doit prendre une valeur de P supérieure à celle-là. ω décroît alors proportionnellement au temps. L'équation précédente, écrite

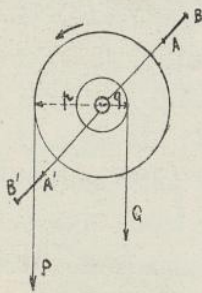
$$\frac{d\omega}{dt} = -k \quad (k > 0),$$

donne, ω_0 étant la vitesse avant le fonctionnement du frein, τ le temps d'arrêt, et θ la rotation durant la période d'arrêt :

$$\omega_0 = k\tau, \quad \theta = \omega_0\tau - \frac{1}{2}k\tau^2 = \frac{\omega_0^2}{2k};$$

les formules permettent de résoudre toutes les questions posées par l'emploi de ce frein.

8. Modérateur à ailettes. — Cet appareil a pour but de rendre sensiblement uniforme au bout d'un certain temps le mouvement d'un arbre sollicité par des forces qui ne sont pas en équilibre.



Soit un treuil soumis à un moment moteur $\phi = Pp$ et à un moment résistant $\phi_1 = Qq$ tous deux constants, mais inégaux.

On monte sur le treuil $2n$ bras diamétraux et opposés deux à deux; chaque bras portant une palette dont le plan passe par l'axe O ; le centre d'une quelconque des palettes est distant de l de l'axe O ; la vitesse du centre d'une palette, normale à cette palette est ωl , et si s est la surface de la palette, l'air opposé à la palette une résistance normale $ks\omega^2 l^2$, k étant un coefficient numérique indiqué antérieurement.

Le moment total des résistances rencontrées par les palettes est donc : $-2nksl^3\omega^2$.

L'équation du mouvement du treuil sera donc :

$$I \frac{d\omega}{dt} = \phi - \phi_1 - 2nksl^3\omega^2$$

ou en posant : $\phi - \phi_1 = Ia$, $+2nksl^3 = \frac{Ia}{m^2}$:

$$\frac{d\omega}{m^2 - \omega^2} = \frac{a dt}{m^2}$$

Ainsi $\frac{d\omega}{m+\omega} + \frac{d\omega}{m-\omega} = \frac{2a dt}{m}$
donnera par intégration

$$\frac{m+\omega}{m-\omega} = Ce^{\frac{2at}{m}};$$

d'où l'expression de ω , toujours croissante avec t , mais tendant vers m quand t croît indéfiniment.

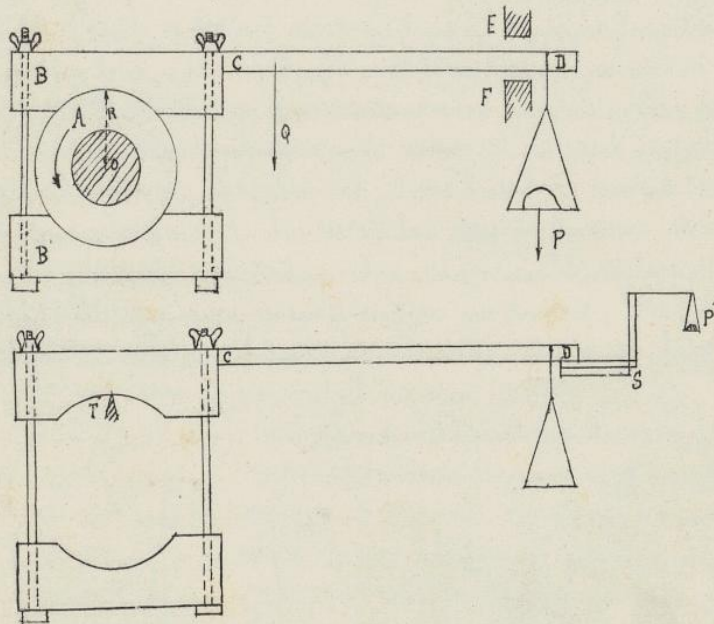
Ainsi la vitesse tendra à prendre la valeur fixe $m = \sqrt{\frac{\phi - \phi_1}{2nksl^3}}$, et cela d'au

tant plus rapidement que $\frac{2a}{m} = \frac{2l}{I} \sqrt{2(\phi - \phi_0) n k s l}$ est plus grand; en augmentant $n s l^2$, on diminue donc à la fois la vitesse du mouvement uniforme limite et le temps mis à la réaliser sensiblement.

9. Frein dynamométrique de Frony. - Les freins dynamométriques servent à mesurer le travail produit par un moteur et transmis à un arbre. Leur principe consiste à supprimer le travail résistant depuis l'outil jusqu'à l'arbre, à le remplacer par le travail de frottement d'un sabot qu'on monte sur l'arbre et à mesurer ce dernier travail à l'aide de l'appareil lui-même.

Dans le frein de Frony, une poulie A, calée sur l'arbre, est ensermée entre deux pièces de bois évidées B, B', dites mâchoires, formant collier, que l'on peut rapprocher ou écarter à l'aide de deux boulons munis d'écrous. Un levier horizontal CD, fixé à la mâchoire supérieure, passe entre deux taquets fixes E, F qui limitent ses oscillations.

Le frein, ensermant la poulie, est entraîné par l'arbre dans son mouvement, vient buter contre un des taquets et reste immobile: la poulie frotte alors sur le frein, et on peut régler le serrage des écrous de façon que l'arbre conserve une vitesse de rotation constante (égale à la vitesse de marche normale). Il s'agit de mesurer le moment (par rapport à l'axe O de l'arbre) des réactions du frein sur la poulie.



Supposons que la rotation de l'arbre ait le sens de la flèche; si on néglige le poids du levier, le levier sera buté contre le taquet supérieur. Mais si à l'extrémité du levier on attache un poids suffisant, le levier va venir buter contre le taquet inférieur. On détermine un poids P tel que, si on l'attache à

l'extrémité D du levier, le levier reste en équilibre entre les deux taquets. Soit Q le poids total du frein, p et q les distances de O à P et Q. Le moment par rapport à O des forces P et Q et des réactions de la poulie sur le collier est nul; autrement dit, le moment M par rapport à O des réactions du collier sur la poulie est égal au moment par rapport à O des forces P et Q; on a donc:

$$M = \sum \eta R^2 \text{ frotte } = Pp + Qq.$$

Le travail des forces de frottement pendant un tour de l'arbre, le régime ²⁵ étant uniforme est $2\pi M$; c'est aussi la mesure du travail disponible sur l'arbre par tour; ce dernier travail est donc : $2\pi (Pp + Qq)$.

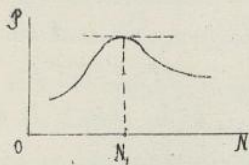
La quantité Pp se mesure immédiatement d'après l'expérience précédente même. Pour avoir Qq une fois pour toutes, c'est à dire pour tarer le frein, on procède de la manière suivante. On dégage le frein de l'arbre tournant et on le pose sur un couteau horizontal T situé sur la verticale du point O ; on appuie l'extrémité D du levier sur le tablier d'une bascule qu'on maintient en équilibre en mettant dans son plateau des poids marqués. Si P est le poids mesuré par cette bascule, on a, le frein étant en équilibre, d'après la condition d'équilibre du levier: $Qq = Pp$. Cette mesure peut d'ailleurs se faire par la méthode de la double pesée.

Il est difficile de déterminer un poids P tel que le levier reste en équilibre entre les deux arrêts. Par suite des aspérités de la poulie, le frein (pour un poids voisin du poids P cherché) viendra buter alternativement contre les deux arrêts. Mais il est facile de déterminer un poids minimum P_1 pour lequel le levier restera buté contre F et un poids maximum P_2 pour lequel le levier restera buté contre E . On prendra pour valeur de P la moyenne arithmétique $\frac{P_1 + P_2}{2}$.

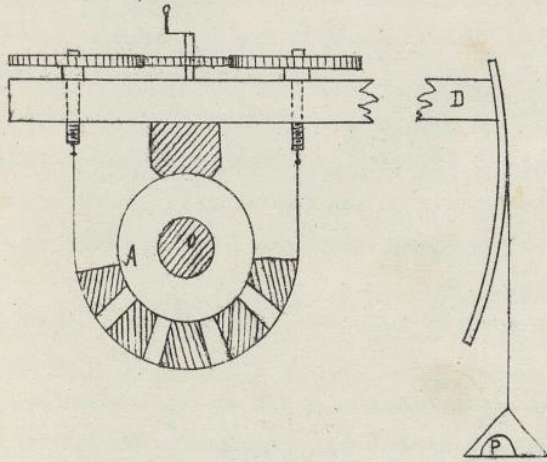
La puissance effective sur l'arbre a donc pour mesure en chevaux-vapeur par seconde (N nombre de tours à la minute):

$$P = \frac{2\pi p \left(\frac{P_1 + P_2}{2} + P' \right) N}{60 \times 75} = \frac{\pi p N}{4500} (P_1 + P_2 + 2P')$$

On peut construire un graphique donnant la puissance P en fonction de N , et déterminer la vitesse angulaire N_1 pour laquelle le régime de la machine motrice est optimum.



Perfectionnements. - 1° Pour rendre p constant dans les oscillations du frein, Krutz suspendait le plateau à



une courroie s'appliquant sur un arc de cercle centré exactement sur l'arbre.

2° De St-Léger produit le serrage graduel simultané des écrous en exerçant un effort de moment nul par rapport à l'axe, à l'aide d'une manivelle à axe passant par O et d'engrenages.

3° Pour mieux répartir la pression des mâchoires sur la poulie, on remplace ces mâchoires par des voussoirs

en bois maintenus par une bande flexible de fer.

4° L'échauffement du frein qui nuit à la régularité de son action est évité par un courant d'eau pure qui arrive par des trous percés dans le levier et le coussinet

supérieur, de façon à refroidir les surfaces.

5° Pour ralentir les oscillations du levier, il convient de donner une assez grande valeur au moment d'inertie de l'appareil, c'est-à-dire d'employer une poutre de grand diamètre et d'éloigner le plateau de l'axe le plus possible.

Ce frein simple n'est employé que pour des puissances n'excédant pas 80 à 90 chevaux. Au delà, on emploie des freins spéciaux pour lesquels le serrage se règle automatiquement (freins du Creusot).

10. Parachûte. - Le parachûte employé en acrostation utilise la résistance de l'air pour uniformiser le mouvement de descente. Soit V la vitesse de descente à l'instant t d'un parachûte de masse totale M . Si S est la surface de base du parachûte, la résistance totale que donnerait le coefficient de Caillatet $0,075V^2$ doit être multiplié par $1,94$ à cause de la concavité moyennement adoptée pour le parachûte. L'équation du mouvement de descente d'après le théorème du mouvement du centre de gravité sera :

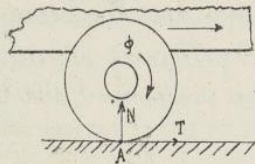
$$M \frac{dV}{dt} = Mg - 0,136 SV^2,$$

ou

$$\frac{g dt}{k^2} = \frac{dv}{k^2 - v^2}, \quad \text{avec } k^2 = \frac{Mg}{0,136 S}$$

On reconnaît une équation déjà rencontrée au 96°8. V tendra très rapidement vers la valeur constante $k = \sqrt{\frac{P}{0,136 S}}$, P étant le poids du parachûte et S sa surface d'ouverture.

11. Adhérence des roues de locomotive ou d'automobile. - Une locomotive ou une automobile est un véhicule portant un moteur qui, par le mouvement de rotation imprimé aux essieux et grâce aux réactions de frottement des rails ou du sol, produit le déplacement de la machine et engendre l'effort de traction.



Sous l'action du couple moteur ϕ , le point de la roue qui est au contact géométrique de la roue et du rail tend à glisser dans le sens du couple, soit ici vers la gauche; d'où la production d'une réaction tangentielle T due au frottement. Toutefois, N étant la réaction normale du rail sur la roue et f le coefficient de frottement des surfaces en présence, le glissement ne se produira pas tant que $T < fN$, et la propulsion du véhicule due à l'existence des forces extérieures T horizontales fera rouler sans glisser la roue sur le rail.

La force T fournie par chaque roue et inférieure à la limite fN est dite l'adhérence de la roue.

La force T appliquée à un point de la roue qui est centre instantané de rotation, a un travail élémentaire constamment nul pendant le mouvement.

Quand le roulement est accompagné de glissement, on dit qu'il y a patinage. Il est aisé de former la condition pour qu'il n'y ait pas patinage. Supposons en effet le régime sensiblement uniforme et négligeons la force T , dans le

calcul du moment de frottement de l'essieu de rayon r sur la roue. P étant la charge de la roue, transmise par l'essieu, p le poids de la roue, on a l'équation d'équilibre dynamique :

$$\phi = TR + N\delta + (P - p + N)r \sin \varphi.$$

L'inégalité $T < fN$ équivaut à :

$$\frac{\phi}{R} < fN + N\delta + (P - p + N)r \sin \varphi;$$

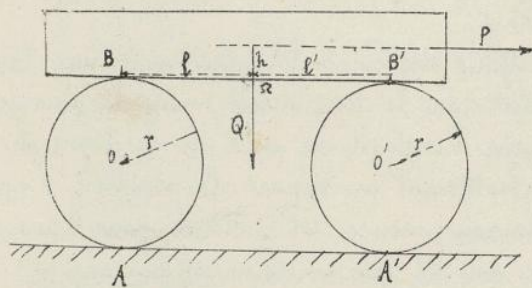
elle donne le maximum de l'effort moteur utilisable, sans glissement, à la jointe d'une roue, et marque la condition à remplir pour éviter le patinage.

Chaque roue motrice donne une inégalité $T < fN$; par suite :

$$\Sigma T \leq f \Sigma N,$$

en désignant par ΣN la charge totale des roues motrices, appelée poids adhérent ou poids moteur, pour bien marquer que c'est l'origine de la puissance de traction du locomoteur : $f \Sigma N$ sera une limite de l'effort de traction disponible. (Consulter, sur ce sujet et sur d'autres connexes, l'important ouvrage de M. A. Petot : Etude dynamique des voitures automobiles.)

12. Transport sur rouleaux. — Quand on doit transporter horizontalement un madrier très lourd ou une pierre de taille, il serait difficile de les



faire glisser, le coefficient de frottement sur un sol rugueux étant assez élevé. On substitue alors le roulement au glissement. Pour cela, le madrier étant placé sur deux rouleaux de même rayon r disposés parallèlement et reposant sur un sol horizontal, on exerce sur ce madrier une traction horizontale P perpendiculaire aux

axes des rouleaux.

Soient Q le poids du madrier, P la force de traction, p le poids de chaque rouleau. Au moment où va se produire le roulement, la réaction du sol et du madrier sur chaque rouleau se compose d'une composante normale, d'une composante tangentielle et d'un couple de roulement :

$$N, T, \phi = N\delta \text{ en } A, \quad N, T, \phi = N\delta \text{ en } B,$$

$$N', T', \phi' = N'\delta' \text{ en } A', \quad N', T', \phi' = N'\delta' \text{ en } B'.$$

Il y a roulement et non glissement si chaque T est inférieure au fN correspondant. Ces forces et couples étant placés conformément aux lois de Coulomb, les équations d'équilibre limite pour le madrier et pour chacun des rouleaux sont :

$$T_1 + T'_1 = P, \quad N = N_1 + p, \quad N' = N'_1 + p,$$

$$N_1 + N'_1 = Q, \quad T_1 \cdot 2r = N\delta + N_1\delta_1, \quad T'_1 \cdot 2r = N'\delta' + N'_1\delta'_1,$$

$$N_1\delta_1 + N'_1\delta'_1 = Ph + N_1l - N'_1l',$$

les moments étant pris respectivement par rapport au point de rencontre de Q avec le dessous du madrier et par rapport aux points A et A' ; l et l' sont les dis-

ou :

$$Pr = R \left\{ (r+p) \sin \varphi + r \sin (\theta + \varphi) \right\}$$

la considération de l'équilibre de la roue O' donnerait de même l'équation

$$P'r' + R' p' \sin \varphi - R' [-p \sin \varphi + r' \sin (\theta + \varphi)] = 0$$

ou :

$$P'r' = R' \left\{ -(r+p') \sin \varphi + r' \sin (\theta + \varphi) \right\}.$$

Il résulte de ces expressions que P qui serait égal à P' s'il n'y avait pas de frottement ($\varphi=0$) est en réalité plus grand ; la différence $P-P'$ est la force qui est nécessaire, si on l'applique tangentiellement à la roue menante pour vaincre les frottements. On a pour cette force :

$$P-P' = P' \sin \varphi \frac{\frac{r+p}{r} + \frac{r+p'}{r'}}{\sin (\theta + \varphi) - \frac{r+p}{r} \sin \varphi},$$

ou en introduisant le coefficient de frottement f :

$$P-P' = f P' \frac{\frac{r+p}{r} + \frac{r+p'}{r'}}{\sin \theta + f \cos \theta - f \frac{(r+p')}{r'}}$$

Le calcul qui vient d'être fait suppose que le contact des deux profils conjugués a lieu après la ligne des centres ; si on examine le cas où il a lieu avant, on reconnaît que l'on a :

$$P-P' = f P' \frac{\frac{r+p}{r} + \frac{r+p'}{r'}}{\sin \theta - f \cos \theta - \frac{f(r+p')}{r'}}$$

En particulier, on obtiendrait une expression infinie et par suite arc-boutement,

$$\text{dans le 1^{er} cas, pour } p = \frac{r' \sin (\theta + \varphi)}{\sin \varphi} - p';$$

$$\text{dans le 2^e cas, pour } p = \frac{r' \sin (\theta - \varphi)}{\sin \varphi} - p';$$

Dans la pratique, les dents sont prises assez courtes pour que p n'atteigne jamais ces valeurs,

dont la plus petite est évidemment la seconde.

Les résultats que nous venons d'établir subsistent pour l'état de mouvement, si le mouvement de rotation est sensiblement uniforme, de telle sorte qu'on puisse négliger les forces d'inertie dues aux variations de vitesse angulaire ; l'angle de frottement φ prend alors la valeur relative au mouvement ; cela suppose l'engrenage bien monté, le jeu inévitable entre les tourillons et leurs coussinets étant extrêmement faible, faute de quoi le point O ne serait pas fixe et le rapport des vitesses ne resterait pas constant.

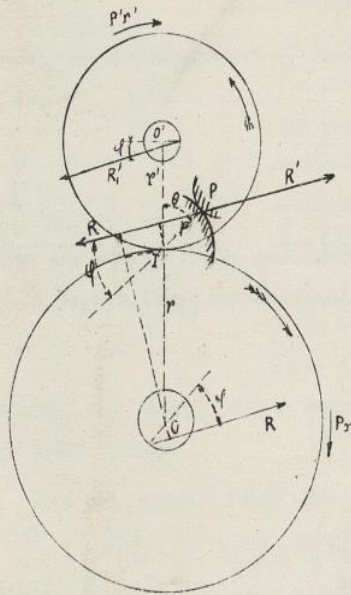
Calculons le travail absorbé par le frottement pour un déplacement élémentaire ds sur chacune des circonférences primitives. Ce travail est $(P-P') ds$, ou en supposant les tourillons d'égal rayon ($p=p'$).

$$P' f \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \cdot \frac{(r+p) ds}{\sin \theta + f \cos \theta - \frac{f(r+p)}{r'}}$$

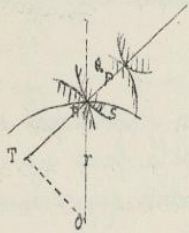
après la ligne des centres, et

$$P' f \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \cdot \frac{(r+p) ds}{\sin \theta - f \cos \theta - \frac{f(r+p)}{r'}}$$

avant la ligne des centres.



1. Engrenage à développante de cercle. — θ a une valeur constante θ_0 (environ 70°); $p = s \sin \theta_0$. Le travail après la ligne des centres, pour un pas a est :



$$P'f \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \int_0^a \frac{(s \sin \theta_0 + p) ds}{\sin \theta_0 + f \cos \theta_0 - \frac{f(s \sin \theta_0 + p)}{r}}$$

et pour le pas a avant la ligne des centres :

$$P'f \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \int_0^a \frac{(s \sin \theta_0 + p) ds}{\sin \theta_0 - f \cos \theta_0 - \frac{f(s \sin \theta_0 + p)}{r}}$$

En égard de la petitesse de f , on prendra pour le premier élément différentiel :

$$\left(\frac{p}{\sin \theta_0} + s \right) \left[1 - f \cot \theta_0 + \frac{f}{r} \left(s + \frac{p}{\sin \theta_0} \right) \right] ds ;$$

comme p et a sont du même ordre de grandeur, on peut prendre seulement pour valeur principale de l'intégrale :

$$(1 - f \cot \theta_0) \left(\frac{pa}{\sin \theta_0} + \frac{a^2}{2} \right) ;$$

et la seconde intégrale donnerait de même :

$$(1 + f \cot \theta_0) \left(\frac{pa}{\sin \theta_0} + \frac{a^2}{2} \right).$$

Le travail de frottement est donc plus grand avant la ligne des centres qu'après.

Le travail total des frottements pour une conduite d'un pas avant et après la ligne des centres est donc :

$$\mathcal{E}_f = P'f \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) a^2 \left(1 + \frac{2p}{a \sin \theta_0} \right).$$

Le travail utile dans le même déplacement est :

$$\mathcal{E}_u = 2 P' a.$$

D'autre part, si n et n' sont les nombres de dents, des deux roues, on a :

$$2 \pi r = n a, \quad 2 \pi r' = n' a ;$$

d'où

$$\mathcal{E}_f = \mathcal{E}_u \pi f \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) \left(1 + \frac{2p}{a \sin \theta_0} \right).$$

Le rendement est par suite :

$$\frac{1}{1 + \pi f \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) \left(1 + \frac{2p}{a \sin \theta_0} \right)}$$

2° Engrenage épicycloïdal. — Si D est le diamètre du cercle générateur, on trouve

$$p = D \sin \frac{s}{D}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{s}{D} ;$$

Le premier élément à intégrer est au même ordre d'approximation que plus haut :

$$\left(D \sin \frac{s}{D} + p \right) \left(\cos \frac{s}{D} - f \sin \frac{s}{D} \right) ds, \text{ ou } (p+s) \left(1 - \frac{fs}{D} \right) ds$$

et la partie principale de l'intégrale est $\frac{a^2}{2} + pa - \frac{fpa}{D}$; pour l'autre, on aurait $\frac{a^2}{2} + pa + \frac{fpa}{D}$. Donc le travail total des frottements pour une conduite d'un pas avant et après la ligne des centres est :

$$\mathcal{E}_f = P' a^2 f \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \left(1 + \frac{2p}{a} \right).$$

et le rendement a pour expression :

$$\frac{1}{1 + \pi f \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) \left(1 + \frac{2p}{a} \right)}$$

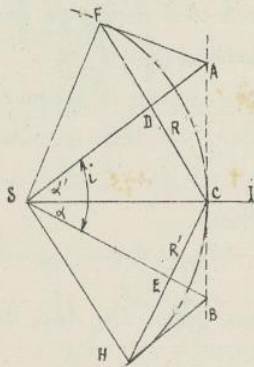
Celles sont les formules qu'on emploiera dans les applications pour apprécier le travail absorbé par le frottement. Elles s'appliquent également dans le cas d'un engrenage intérieur, en changeant de signe le plus grand des nombres n et n' .

31.

Le rendement est plus grand, toutes choses égales d'ailleurs, dans les engrenages intérieurs que dans les engrenages extérieurs. C'est là une conclusion souvent utilisée dans la pratique.

Les calculs précédents supposent qu'il y a seulement une paire de dents en prise; d'ordinaire il y a à la fois deux paires de dents en prise. On peut montrer que dans ce cas les expressions obtenues pour η_f et pour le rendement s'appliquent encore sensiblement.

2. Engrenages coniques. - Nous supposons les engrenages tracés par la méthode approximative de Wedgwood. Soient alors SA et SB les deux axes concourants, FS' et HS' les deux cônes primitifs; on mène par un point C quelconque de la génératrice de contact si la droite AB perpendiculaire à si, et on prend des profils conjugués dans deux circonférences de rayons BC et AC. Admettons dans un premier aperçu qu'on néglige l'influence du frottement des tourillons sur le frottement de la denture; on aura sensiblement:



$$\eta_f = \eta_n \cdot \frac{f_a}{2} \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} \right)$$

Si on appelle maintenant R et R' les rayons des deux roues CE et CD qui portent les engrenages, α et α' les angles au sommet des deux cônes primitifs, angles dont la somme est égale à l'angle i des axes, on a :

$$R = r \cos \alpha, \quad R' = r' \cos \alpha'$$

Mais :

$$\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} \right)^2 = \left(\frac{\cos \alpha}{R} + \frac{\cos \alpha'}{R'} \right)^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} - \left(\frac{\sin \alpha}{R} - \frac{\sin \alpha'}{R'} \right)^2 + \frac{2 \cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha'}{RR'}$$

Comme :

$$\frac{\sin \alpha}{R} = \frac{\sin \alpha'}{R'} \quad \text{et} \quad i = \alpha + \alpha'$$

si l'on désigne par n et n' les nombres de dents, on aura :

$$\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} \right) = \frac{2\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} + \frac{2 \cos i}{n n'}}$$

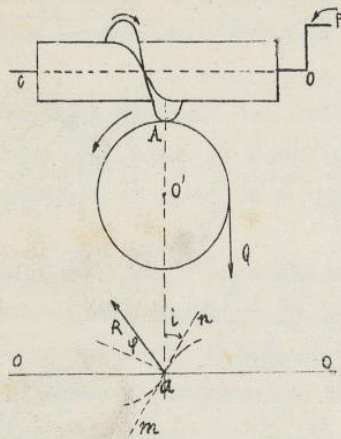
Par suite :

$$\eta_f = \eta_n \cdot f \pi \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} + \frac{2 \cos i}{n n'}}$$

Cette formule, due à Poncet, est grossièrement approchée.

3. Vis sans fin. - Soit P la puissance qui agit sur la manivelle de la vis, Q la résistance appliquée tangentiellement à la circonférence de la roue, p le rayon de la manivelle et q celui de la roue. On admet que le contact des dents de la roue a toujours lieu sur la même hélice moyenne du filet de la vis; soit r le rayon du cylindre correspondant à cette hélice. Nous admettrons de plus que le point de contact A est dans le plan vertical passant par l'axe de la vis et le centre O' de la roue.

Sur le plan horizontal passant par A, qui est tangent au cylindre de l'hélice moyenne, l'élément en contact est projeté en α suivant la direction mn de la tangente à l'hélice moyenne. La réaction de la dent sur le filet est donc une force R située dans ce plan tangent horizontal, inclinée de l'angle α



32.
sur la perpendiculaire à $m-n$, comme le marque la figure; elle est décomposable en une force perpendiculaire à la génératrice: $R \sin(i+\varphi)$ et en une autre suivant cette génératrice $R \cos(i+\varphi)$, i désignant l'inclinaison de l'hélice sur la base du cylindre. Réciproquement le filet exerce sur la dent une action dont les composantes sur les mêmes droites sont égales et de signes contraires aux précédentes. Prenons alors les moments successivement par rapport à l'axe de la vis et à l'axe de la roue. Nous aurons (en supposant $i < \frac{\pi}{2} - \varphi$):

$$P r = R \sin(i+\varphi) r,$$

$$Q = R \cos(i+\varphi).$$

Donc:

$$P = Q \frac{r}{r} \operatorname{tang}(i+\varphi).$$

Soit h le pas de la vis; on a: $\operatorname{tang} i = \frac{h}{2\pi r}$, $\operatorname{tang} \varphi = f$. Donc:

$$P = Q \cdot \frac{r}{r} \frac{h + 2\pi r f}{2\pi r - h f}.$$

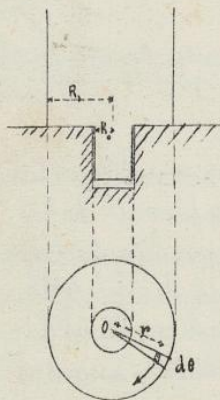
Pour un tour de la vis, la roue avance d'une dent; donc pour un tour de la vis on aura:

$$E_m = P 2\pi r \quad \text{et} \quad E_r = Q h.$$

Le rendement est donc:

$$\frac{Q}{P} \cdot \frac{h}{2\pi r} \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang}(i+\varphi)}.$$

11. Pivot sur crapaudine. - Supposons qu'un arbre vertical exerçant une pression normale P tourne dans une crapaudine sur laquelle il s'appuiera par une zone de rayons extrêmes R_0 et R_1 .



On admet que la pression est uniformément répartie sur les surfaces en contact: on a alors pour pression sur l'unité de surface: $\frac{P}{\pi(R_1^2 - R_0^2)}$.

Cherchons quel est pour un tour de l'arbre le travail résistant total des forces de frottement. Le travail de chaque force de frottement étant égal à son moment par rapport à l'axe multiplié par le déplacement angulaire de son point d'application, on doit calculer d'abord la somme des moments des forces de frottement par rapport à l'axe.

Considérons un élément de surface en coordonnées polaires $r, dr, d\theta$ à une distance r du centre. La pression qu'il supporte est $\frac{P r dr d\theta}{\pi(R_1^2 - R_0^2)}$ et le moment de la force de frottement par rapport à O sera $\frac{P f}{\pi(R_1^2 - R_0^2)} r^2 dr d\theta$. En intégrant de R_0 à R_1 et de 0 à 2π , on trouve:

$$\frac{2\pi P f}{\pi(R_1^2 - R_0^2)} \frac{R_1^3 - R_0^3}{3}$$

Le travail total du frottement pour un tour s'obtiendra en multipliant ce moment

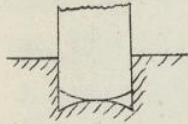
total par 2π . D'où :

$$\mathcal{E}_f = \frac{4}{3} \pi f P \frac{R_1^2 + R_1 R_0 + R_0^2}{R_1 + R_0}$$

ou en appelant R le rayon moyen, et l la largeur de la zone en contact :

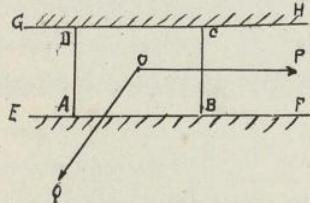
$$\mathcal{E}_f = 2\pi f P \left[R + \frac{l^2}{12R} \right]$$

Si on avait $R_0 = 0$, on aurait $\mathcal{E}_f = \frac{4}{3} \pi f P R_1$. Le travail est d'autant plus petit que R_1 est lui-même plus petit ; il y a donc intérêt à diminuer la surface de contact ; mais on est limité dans ce sens par ce fait qu'en diminuant cette surface, on augmente la pression en chaque point et qu'on peut ainsi avoir échauffement et même déformation des pièces frottantes.



Le cas des épaulements ne se distingue pas de celui des pivots, puisque le contact a encore lieu par une zone circulaire.

5. Coquille entre deux glissières. — Pour guider rectilignement l'assemblage d'une tête de bielle et d'une tige de piston, on emploie une pièce rectangulaire ABCD, appelée *coquille*, maintenue latéralement par deux glissières EF, GH.

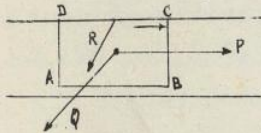


Pour fixer les idées, nous supposerons celles-ci horizontales. La tige de piston et la bielle exercent sur la coquille deux forces P, Q , dont la première est parallèle aux glissières, et qui sont toutes deux appliquées au centre O de la coquille. Comme il existe nécessairement un petit jeu, entre la co-

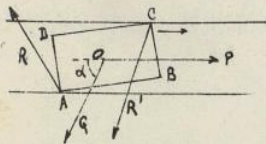
quille et ses guides, la hauteur BC du rectangle est un peu inférieure à l'écartement de ceux-ci.

Il y a, d'après cela, quatre hypothèses à envisager :

1^o Contact le long de DC , pas contact suivant AB . Cette hypothèse est inadmissible ; car en projection sur la verticale, la somme des forces appliquées à la coquille ne saurait être nulle.



2^o La coquille se place en biais et touche les glissières par les sommets A et C .



Si N, fN et N', fN' sont les composantes des réactions R et R' en A et C , si l'on pose $AB = 2a$ et $BC = 2b$, en projetant sur la verticale et en prenant les moments par

rapport à O , on a :

$$N - N' = Q \sin \alpha,$$

$$(N + N') a + f(N - N') b = 0;$$

$$(N + N') a + fQ \sin \alpha b = 0,$$

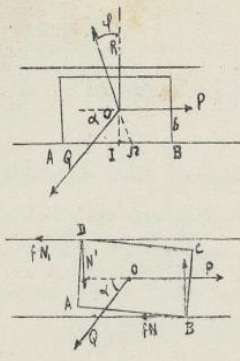
d'où :

équation impossible, tous les termes du premier membre étant positifs. Hypothèse à rejeter.

3^o La coquille touche uniquement la glissière inférieure. On a :

$$Q = \frac{P \cos \varphi}{\cos(\alpha - \varphi)}$$

De plus R passe en r à l'intérieur de AB :



$1 \alpha = b \tan \varphi < a$; d'où $\frac{a}{b} > f$.

4° La coquille touche les glissières par ses sommets B et D.
On procède comme au 2° :

$$N - N' = Q \sin \alpha,$$

$$(N + N') a - f (N - N') b = 0,$$

$$f (N + N') = P - Q \cos \alpha.$$

D'où :

$$Q = \frac{Pa}{a \cos \alpha + f^2 b \sin \alpha} ; N = Q \sin \alpha \left(\frac{bf}{a} + 1 \right) ; N' = Q \sin \alpha \left(\frac{bf}{a} - 1 \right).$$

Pour que l'équilibre s'établisse de cette manière, il faut que N' soit positif, c'est-à-dire que $\frac{a}{b} < f$. Donc suivant que le rapport $\frac{a}{b}$ des côtés de la coquille est supérieur ou inférieur au coefficient de frottement, la coquille touche une seule glissière ou s'appuie en diagonale sur les deux glissières. Dans le second cas, $\frac{Q}{P} = \frac{1}{\cos \alpha + f^2 \frac{b \sin \alpha}{a}} < \frac{1}{\cos \alpha + f \sin \alpha} < \frac{\cos \varphi}{\cos(\alpha - \varphi)}$. La puissance P capable de surmonter une résistance donnée Q doit donc être plus grande dans le second cas. Il y a donc avantage à prendre une longueur de coquille $2a$ supérieure à $2bf$, de manière que le contact ait lieu sur une seule glissière. D'ailleurs quand la coquille touche les glissières par ses angles vifs, l'usure des pièces est plus rapide.

6. Courroies ou flexibles sans fin. - Revenons sur le frottement d'une corde ou courroie sur un cylindre; tandis que pour tous les problèmes d'équilibre traités, les formules restent les mêmes pour le cas du mouvement uniforme qui va commencer, il n'en est plus de même ici si le mouvement uniforme est assez rapide.

Soit V la vitesse constante de glissement de la corde sur le cylindre, p le poids de l'unité de longueur de la corde; la force d'inertie d'un élément ds sera $\frac{p}{g} \frac{V^2}{r} ds$, portée sur la normale au profil; les équations du W^o 5, chapitre II, deviendront, f étant le coefficient de frottement de mouvement:

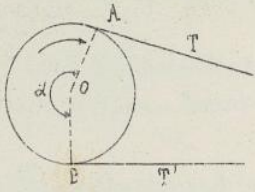
$$\frac{dT}{ds} - fN = 0, \quad \frac{T}{p} - \frac{p}{g} \frac{V^2}{r} - N = 0$$

Elles coïncident avec celles de ce W^o à condition d'y remplacer T par $T - \frac{p}{g} V^2$. Le même traitement conduira donc à :

$$\frac{P - \frac{p}{g} V^2}{Q - \frac{p}{g} V^2} = e^{f\alpha}.$$

Considérons maintenant un lien flexible s'enroulant sur la section droite d'un cylindre mobile autour de son axe et l'entraînant dans son mouvement (cas des courroies sans fin, des transmissions par cordes, des câbles télé-dynamiques). Le rapport des vitesses angulaires des poulies réunies ne saurait rester invariable que si le lien ne glisse pas sur la poulie. L'inégalité qui exprime cette absence de glissement est la condition d'adhérence.

Soit T la tension du brin moteur en son point d'enroulement A, T' la tension du brin conduit au point B où il se sépare de la poulie. Cherchons la condition pour que le glissement soit sur le point de se produire. En exprimant



l'équilibre relatif d'un élément ds animé de la vitesse v due à l'entraînement uniforme par la poulie, on sera évidemment conduit aux mêmes équations que ci-dessus, et l'on aura

$$\frac{T - \frac{1}{g} V^2}{T' - \frac{1}{g} V^2} = e^{f\alpha}$$

Le glissement ne saurait se produire si T a une valeur inférieure à celle fournie par cette équation, et la condition d'adhérence sera:

$$\frac{T - \frac{1}{g} V^2}{T' - \frac{1}{g} V^2} < e^{f\alpha}$$

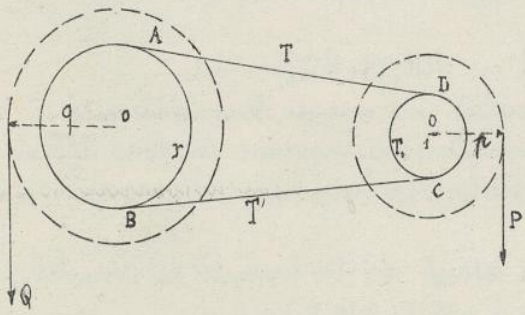
Dans les courroies sans fin et les transmissions par cordes, V reste toujours très faible et l'on pourra prendre comme condition d'adhérence,

$$\frac{T}{T'} < e^{f\alpha}$$

mais dans les transmissions par câbles métalliques où l'on emploie normalement des vitesses de 25, 30 et même 50 mètres par seconde, il faut prendre pour la condition d'adhérence l'inégalité précédente.

Considérons enfin une transmission de mouvement par courroie sans fin et cherchons la relation entre la puissance et la résistance dans le cas du mouvement uniforme, en tenant compte des frottements des tourillons et en négligeant la raideur de la corde.

Soit T la tension du brin moteur, T' la tension du brin conduit, P la puissance appliquée à une distance p de l'axe O, correspondant, Q la résistance appliquée q de l'axe O, r, et r', et p, et p' les rayons des poulies et de leurs tourillons. Les poulies sont supposées assez éloignées pour que les brins soient sensiblement parallèles et l'on admet que les forces P et Q sont perpendiculaires à la ligne des centres. Si ces conditions n'étaient pas satisfaites, il serait facile d'en tenir compte dans les calculs suivants. Les équations d'équilibre des deux poulies sont:



$$\left. \begin{aligned} Pp - (T - T')r - p \sin \varphi \sqrt{P^2 + (T + T')^2} &= 0 \\ (T - T')r - Qq - p \sin \varphi \sqrt{Q^2 + (T + T')^2} &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

φ et φ' étant les angles de frottement de la courroie pour les deux poulies, f et f' les coefficients de frottement correspondants.

Les conditions d'adhérence sont:

$$\frac{T}{T'} < e^{f\alpha}, \quad \frac{T'}{T} < e^{f'\alpha'}$$

On prend la plus petite des quantités $e^{f\alpha}$, $e^{f'\alpha'}$, et l'on pose:

$$T = K_m T', \quad (2)$$

k étant choisi d'autant plus faible que l'on redoute davantage les secousses et étant égal dans les cas ordinaires à $0,9$. 36.

Les trois équations qui viennent d'être écrites fournissent alors par l'élimination de T et T' la relation entre P et Q quand le mouvement uniforme est réalisé.

On doit se demander pour compléter la solution précédente quelle tension T_0 on devra donner à la courroie au moment où on la place sur les deux poulies au repos, pour être sûr que, pendant le mouvement uniforme, les tensions T et T' qui viennent d'être calculées, seront réalisées; on admet pour cela la condition

$$T_0 = \frac{T+T'}{2} \quad (3)$$

Cela revient à admettre que la courroie ne subit pas d'allongement total quand elle passe de la tension T_0 aux tensions T et T' qu'elle subit pendant le mouvement. Designons en effet par L_0 la longueur de courroie comprise entre deux points de contact sous la pression T_0 et par l la longueur de courroie comprise entre les deux mêmes points sous une tension nulle, on a, d'après Kietz:

$$L_0 = l (1 + k T_0),$$

k étant un coefficient constant dans les limites de tension qui ne correspondent pas à une déformation permanente, coefficient égal à $\frac{0,21}{A}$ (A section de la courroie) lorsque cette courroie est neuve, et à $\frac{0,16}{A}$ lorsqu'elle a déjà servi quelque temps.

On a alors pour les longueurs de courroies entre les points de contact sous les tensions T et T' :

$$L = l (1 + k T), \quad L' = l (1 + k T');$$

d'où:

$$L + L' = l [2 + k (T + T')] = 2l [1 + k T_0] = 2L_0.$$

Or les portions de courroie enroulées ont une de leurs extrémités à la tension T , l'autre à la tension T' ; leur tension moyenne est donc $\frac{T+T'}{2}$ ou T_0 ; elle ne change donc pas non plus et dès lors la longueur de la courroie n'a pas changé.

Les équations (1) s'écrivent en usant de la formule de Poncelet:

$$\begin{aligned} \frac{Pr}{R} - (T - T') - \frac{p}{r} \sin \varphi [0,96 P + 0,80 T_0] &= 0 \\ - \frac{Qq}{r} + (T - T') - \frac{p}{r} \sin \varphi [0,96 Q + 0,80 T_0] &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

D'où par addition:

$$\frac{Pr}{R} - \frac{Qq}{r} = \frac{p \sin \varphi}{r} (0,96 Q + 0,80 T_0) + \frac{p \sin \varphi}{r} (0,96 P + 0,80 T_0).$$

Celle est la relation cherchée entre P et Q .

Posons $T_0 = Qx$, comme on a, d'après (2) et (3)

$$\frac{T - T'}{1 - Km} = \frac{(T + T') \text{ ou } 2T}{1 + Km} = \frac{2Qx}{1 + Km},$$

l'équation (4) donne:

$$\left[\frac{2(1 - Km)r}{1 + Km} - 0,8 p \sin \varphi \right] x = q + 0,96 p \sin \varphi.$$

Cette équation fera connaître x . Dès lors, Q étant donné, on aura immédiatement ³⁷
 T_0 et P .

Le rendement a pour expression $\left| \frac{Q q r_1}{P \mu r} \right|$; et comme

$$\begin{aligned} \frac{P}{r_1} (1 - 0,96 \rho \sin \varphi) &= \left[\frac{2(1 - km)}{1 + km} + 0,80 \frac{\rho \sin \varphi}{r_1} \right] T_0, \\ + \frac{Q}{r} (q + 0,96 \rho \sin \varphi) &= \left[\frac{2(1 - km)}{1 + km} - 0,80 \frac{\rho \sin \varphi}{r} \right] T_0, \end{aligned}$$

sa valeur s'écrira :

$$\frac{1 + 0,96 \frac{\rho \sin \varphi}{r}}{1 - 0,96 \frac{\rho \sin \varphi}{q}} \cdot \frac{1 - 0,4 \frac{1 + km}{1 - km} \frac{\rho \sin \varphi}{r}}{1 + 0,4 \frac{1 + km}{1 - km} \frac{\rho \sin \varphi}{r}}$$

On trouve de nombreux renseignements pratiques sur tout ce qui concerne les transmissions dans le Constructeur, de F. Reuleaux. (Traduit de l'allemand par Debize et Mérijot).

Deuxième Partie.

Résistance des Matériaux.

Chapitre I. -- Principes généraux de Statique Graphique.^(*)

1. Preliminaires. La statique graphique a pour objet de résoudre par des constructions graphiques les différents problèmes qui peuvent se présenter dans l'étude de l'équilibre des solides.

Comme il s'agit d'ailleurs d'une science d'application, on se borne à l'examen des cas qui se rencontrent dans la pratique usuelle, c'est-à-dire à l'étude de l'équilibre des solides admettant un plan de symétrie et soumis à des forces situées dans ce plan, ou du moins pouvant y être ramenées. Nous n'aurons donc à considérer que des systèmes de forces constitués de cette manière.

Considérons un solide invariable dessiné à une échelle dite échelle des longueurs, et l'une des forces qui agissent sur lui. Sur la ligne d'action de la force portons dans le sens suivant lequel elle s'exerce et à partir du point d'application une longueur AF, contenant à une échelle convenue dite échelle des forces, autant d'unités de longueur que la force renferme d'unités de force; on obtient ainsi un segment AF qui est le vecteur représentatif de la force.

Soit alors un solide invariable soumis à un système plan de forces données chacune par son vecteur représentatif. La première question à traiter sera pour nous de faire la réduction de ces forces et d'en chercher les conditions graphiques d'équilibre.

Nous rappellerons les propriétés suivantes établies en Mécanique Rationnelle et relatives aux forces appliquées à un même solide:

1^o On peut déplacer le point d'application d'une force donnée sur la ligne d'action de cette force.

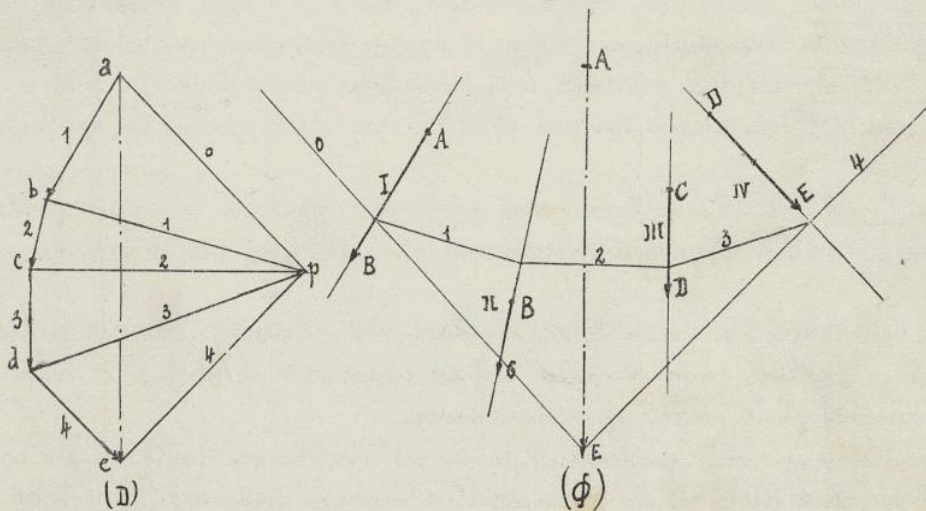
2^o Quand dans un système donné on remplace plusieurs forces concourantes par leur résultante, ou quand on décompose une force en plusieurs autres concourantes, le système obtenu est équivalent au proposé.

3^o Quand on adjoint ou qu'on supprime à un système de forces de nouvelles forces en équilibre, le nouveau système est équivalent au premier.

2. Dynamique et funiculaire d'un système plan de forces. -- Réduction; conditions graphiques d'équilibre. -- Soit un système plan de for-

^(*) La Statique graphique formant un enseignement détaché, nous nous limitons à en rappeler les notions générales dont nous aurons à tirer parti.

ces définies par leurs lignes d'action et leurs vecteurs représentatifs (pouvant être donnés, pour simplifier le dessin, à une équipollence près). Numérotons les dans un ordre arbitraire : AB, BC, CD, DE par exemple. A partir d'un point arbitraire a du plan, menons bout à bout des vecteurs consécutifs ab, bc, cd, de équipollents respectivement à AB, BC, CD, DE: le polygone obtenu, d'origine a , d'extrémité e est un dynamique Δ du système donné; il est ouvert ou fermé suivant que a et e sont distincts ou confondus.



Joignons les sommets du dynamique à un point quelconque p du plan, dit pôle, par des rayons polaires pa, pb, \dots, pe , dont le premier pa est l'initial et le dernier pe le final. Menons une droite o parallèle à pa , et limitons-la au point où elle coupe la ligne d'action de la force AB. Par ce point menons une parallèle 1 au rayon polaire pb et limitons-la au point où elle coupe la ligne d'action de la force BC, et ainsi de suite. Le polygone $o, 1, 2, 3, 4$ obtenu est un funiculaire ϕ du système de forces.

Considérons d'abord la force AB. Elle est équivalente aux forces dirigées suivant les côtés (0) et (1) du funiculaire et équipollentes respectivement aux vecteurs ap et pb . De même la force BC est équivalente aux forces dirigées suivant les côtés (1) et (2) du funiculaire et équipollentes respectivement aux vecteurs bp et pc , etc.... En résumé les forces du système peuvent être remplacées par des forces dirigées suivant les côtés du funiculaire, comme l'indique le tableau suivant:

Côtés du funiculaire :	0	1	2	3	4
Forces	{	ap	bp	cp	dp
		pb	pc	pd	pe

(1) La dénomination de polygones funiculaires se rattache à l'étude de l'équilibre des fils qui conduit à la considération de polygones tout à fait analogues.

Ces forces se réduisent évidemment aux forces équipollentes à \vec{ap} et \vec{pe} , dirigées respectivement suivant les côtés (0) et (4) du funiculaire. Le dynamique de ces deux forces a même origine et même extrémité que le dynamique des forces données.

1° Δ est ouvert. — Les directions \vec{pa} et \vec{pe} sont distinctes; les côtés (0) et (4) du funiculaire se réduisent à une force unique AE équipollente à \vec{ae} . Cette force est dite la résultante du système.

2° Δ est fermé. — Alors les points a et e coïncident. Les côtés extrêmes (0) et (4) de ϕ ont la direction commune de \vec{pa} et de \vec{pe} . Deux cas peuvent se présenter.

α ϕ est ouvert : les côtés extrêmes sont parallèles. Le système se réduit à un couple, dont les forces placées suivant (0) et (4) sont respectivement équipollentes à $\vec{a'p}$ et $\vec{p'a}$.

β ϕ est fermé : les côtés extrêmes sont confondus. Les deux forces auxquelles se réduit le système sont égales et directement opposées. Les forces se font donc équilibrer.

Les réciproques des propositions établies sont évidentes. En particulier : Pour qu'un système plan de forces soit en équilibre, il faut et il suffit que le dynamique et le funiculaire soient fermés.

On déduirait immédiatement de là les conditions graphiques d'équivalence de deux systèmes de forces, en construisant pour eux les polygones Δ et ϕ avec la même origine a pour les Δ , le même pôle p et le même premier côté (0) pour les ϕ ; il faut et il suffit que les extrémités des Δ d'une part et les derniers côtés des ϕ d'autre part soient confondus.

3. Usage du funiculaire pour la détermination du moment résultant d'un système plan de forces. — Le funiculaire fournit une détermination graphique, très simple du moment résultant d'un système plan de forces par rapport à un point C de ce plan.

Le moment résultant par rapport à C est la somme algébrique des moments des forces données par rapport à C. On sait que ce moment résultant est le même pour deux systèmes de forces équivalents. Il suffira donc de trouver le moment résultant des deux réduites placées suivant les côtés (0) et (4) de ϕ et équipollentes respectivement à $\vec{a'p}$ et $\vec{p'e}$.

Supposons d'abord le dynamique Δ ouvert. Le système équivaut alors à la résultante unique AE, équipollente à \vec{ae} et passant par le point I de rencontre de (0) et (4). Soit \overline{mn} le segment intercepté entre (0) et (4) par la parallèle menée par C à \vec{ae} ; D la distance de C à AE, ou la hauteur relative à \overline{mn} du triangle $I mn$; J la distance polaire du système, ou la distance du pôle p au côté qui ferme le dynamique. Les triangles semblables $I mn$, $pa e$ donnent :

$$\frac{D}{J} = \frac{mn}{ae \text{ ou } AE}$$

Donc :

Remarquons qu'une réaction (située dans le plan du système) assujettie^{H2} seulement à passer par un point peut être regardée comme la résultante de deux réactions ayant pour lignes d'action deux droites données du plan issues du point fixe; dès lors le problème de la détermination des réactions équivaut à celui-ci: Étant donné un système plan de n forces non en équilibre, on demande de leur faire équilibre à l'aide de m forces ayant des lignes d'action données dans le plan du système.

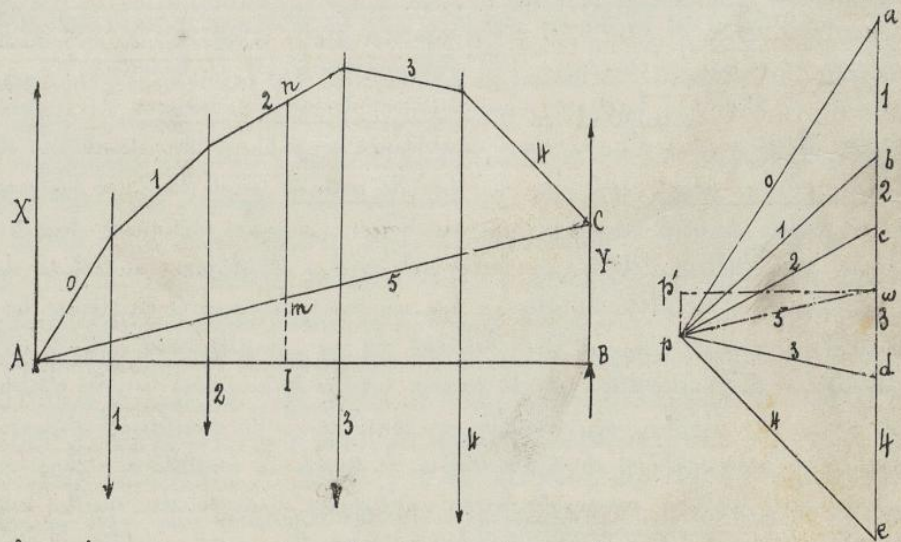
Au point de vue analytique, on cherche les mesures de réactions et les conditions d'équilibre se traduisent par trois équations. Donc si m est 1 ou 2, la solution du problème ne sera possible qu'en imposant deux ou une condition aux données, si m est 3, le problème admettra en général une solution déterminée; si m est supérieur à 3, il y aura au contraire indétermination.

Pour la solution graphique et la discussion du problème général, nous renverrons aux Éléments de Statique graphique de M^e E. Poüchê, pp. 52-63; nous nous bornerons à traiter deux cas particuliers usuels fort importants.

5. Problème de la poutre droite reposant librement sur deux appuis de niveau. - Considérons une poutre, c'est-à-dire un prisme droit de dimensions transversales très petites par rapport à sa longueur, reposant librement sur deux appuis A et B et soumis à des forces verticales données. Nous admettrons que la poutre a un plan de symétrie et que les forces sont situées dans ce plan. Les réactions normales des appuis seront verticales. Nous nous proposons de déterminer leurs grandeurs X et Y.

Ici $m=2$; mais les lignes d'action étant toutes parallèles, les conditions analytiques d'équilibre se réduisent à deux.

Construisons le funiculaire du système des forces données; correspondant à



un pôle quelconque p et dans lequel le côté initial passe par A. Soit C le point où le côté final rencontre la ligne d'action de la réaction de B.

Mémenons pw parallèle à AC, w étant sa rencontre avec la verticale qui porte

le dynamique. Je dis que $X = wa$, $Y = ew$. Pour le reconnaître, il suffit de remarquer que le dynamique ($w a b c d e w$) des six forces ($X, 1, 2, 3, 4, Y$) est fermé et que le funiculaire construit en prenant CA comme côté initial est aussi fermé; les six forces se font équilibre et notre affirmation est justifiée.

Le funiculaire que nous avons construit fait connaître en chaque point I de la poutre le moment fléchissant. Cette grandeur que nous introduisons ultérieurement est égale à la somme des moments pris par rapport à I des forces agissantes situées d'un même côté du point I. Il est aisé de reconnaître que ce moment est donné par la formule

$$M = \pm \overline{mn} \times S.$$

\overline{mn} étant le segment intercepté par le funiculaire fermé sur la verticale de I et S étant la distance polaire ou distance de p à la verticale qui porte le dynamique.

S est indépendant de I, en sorte que le moment fléchissant varie proportionnellement à \overline{mn} et la figure construite donne une représentation géométrique des variations de ce moment fléchissant.

On point de vue de cette représentation, il y aurait intérêt à ce que AC fut confondue avec AB.

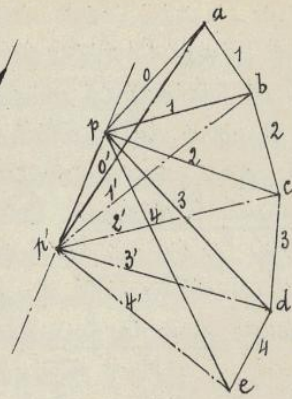
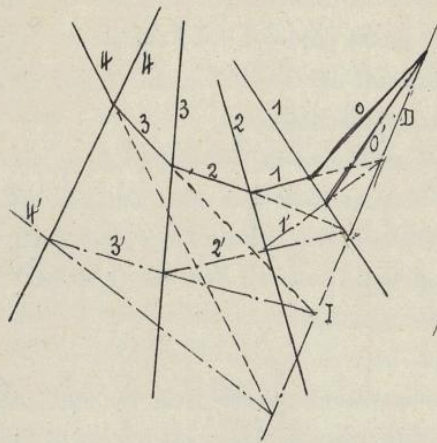
Si l'on construisait un nouveau funiculaire en partant encore de A, mais en prenant pour pôle le point situé sur la verticale de p (même distance polaire) et sur l'horizontale de w, on réaliserait la condition désirée: C serait confondu avec B [le funiculaire de X, 1, 2, 3, 4, Y devant être fermé].

Le nouveau funiculaire se déduit d'ailleurs aisément du premier en utilisant un théorème général qu'on va établir.

6. Influence du changement de pôle sur la déformation du funiculaire d'un système donné. - Supposons un système S de H forces et construisons les funiculaires correspondant aux pôles p et p'. Disposons en deux tableaux les composantes des forces suivant les côtés des funiculaires pour le système S et pour le système inverse (-S):

$$(S) \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a p & b p & c p & d p & \\ & p b & p c & p d & p e \end{cases} \quad (-S) \begin{cases} 0' & 1' & 2' & 3' & 4' \\ p'a & p'b & p'c & p'd & \\ & b p' & c p' & d p' & e p' \end{cases}$$

Désignons les points de rencontre des côtés correspondants des funiculaires par $(00'), (11'), (22'), (33'), (44')$. - Prenons par exemple les composantes de la force III et de la force inverse (égale et directement opposée). Les quatre composantes qui correspondent à ces deux forces se font évidemment équilibre. Or la résultante des deux premières $p'c$ et $c p$ est équipollente à $p'p$ et passe par $(22')$; la résultante des deux dernières $p'd$ et $d p'$ est équipollente à pp' et passe par $(33')$. Les deux résultantes sont bien égales et de sens contraires, mais elles ne peuvent se faire équilibre que si elles ont même ligne d'action; donc la droite qui joint $(22')$ et $(33')$ est parallèle à pp' . D'où ce théorème:



Si l'on construit ^{HH'} deux funiculaires pour un même système de forces, les points où les côtés du premier rencontrent respectivement les côtés correspondants du second sont situés sur une même droite, parallèle à la ligne des pôles, et dite axe

commun des deux funiculaires ou ligne des pivots.

7. Tracé de M. Collignon pour le problème de la poutre droite. -

On doit à M. Collignon un procédé très simple pour tracer un funiculaire dont les côtés extrêmes passent par les appuis A et B, sans même avoir besoin de tracer le dynamique et les rayons polaires.

Imaginons qu'on ait pris une distance polaire égale à la demi-longueur de la poutre: $D = \frac{AB}{2} = HA = HB$; et supposons pour un instant qu'après le tracé d'un funiculaire d'essai, on ait obtenu un funiculaire à côtés extrêmes passant par A et B; $A\alpha, B\beta B$.

Prolongeons les côtés du funiculaire jusqu'à leurs rencontres m_1, m_2, m_3 avec la verticale de A, n_2, n_1, n_0 avec la verticale de B.

Sortons d'autre part les forces données à partir de AB en F_1, F_2, \dots ; projetons les extrémités f_1, f_2, \dots des vecteurs représentatifs en f_1', f_2', \dots sur la verticale de A, en f_3'', \dots sur la verticale de B. Joignons les points projections au milieu H de la poutre, et soient g_1, g_2, \dots et h_3, \dots les rencontres des rayons de jonction avec les vecteurs représentatifs de même indice.

Des considérations de triangles semblables donnent d'une part:

$$\frac{Am_1}{f_1 f_1'} = \frac{AF_1}{D}, \quad \frac{m_1 m_2}{f_2 f_2'} = \frac{AF_2}{D}, \text{ etc ...}$$

(triangles hachurés), et d'autre part:

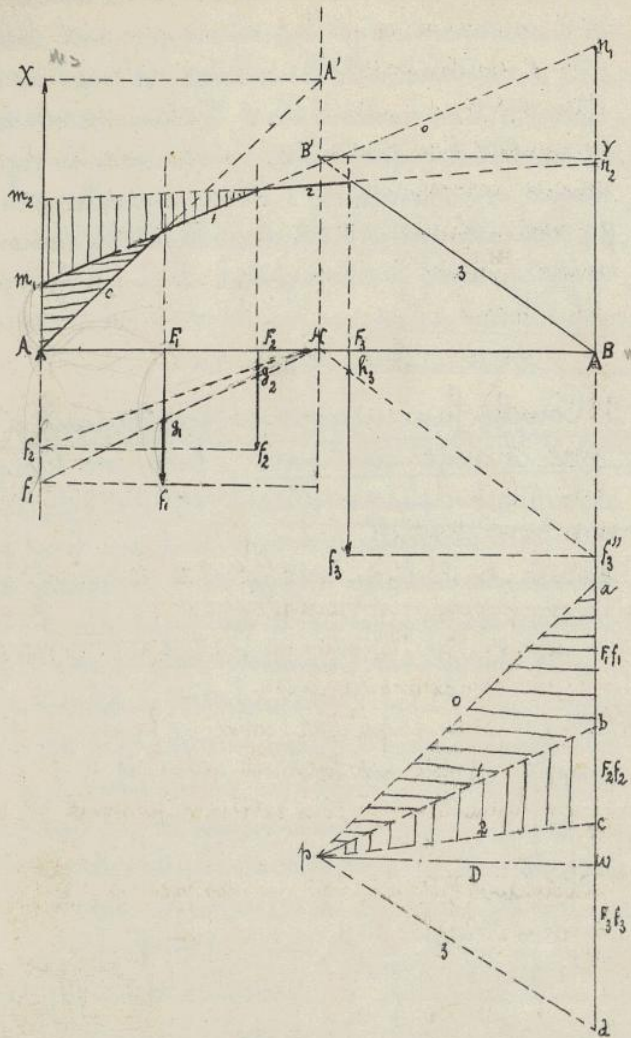
$$\frac{g_1 f_1}{F_1 f_1'} = \frac{AF_1}{AH}, \quad \frac{g_2 f_2}{F_2 f_2'} = \frac{AF_2}{AH}, \text{ etc ...}$$

D'où par comparaison:

$$Am_1 = g_1 f_1', m_1 m_2 = g_2 f_2', \dots, Bn_2 = h_2 f_2'$$

De là résulte la construction suivante du funiculaire cherché de distance polaire $\frac{AB}{2}$.

Les vecteurs représentatifs des charges ayant leurs origines sur AB, on projette les extrémités de ceux à gauche du milieu H de AB sur la verticale de A, et les extrémités de ceux à droite de H sur la verticale de B. On joint les points projec-



H5.

tions à H et les rayons de jonction déterminent respectivement au bas de chaque verticale des segments $f_1 g_1, f_2 g_2, \dots$. Les segments obtenus à gauche de H sont portés, dans l'ordre de rencontre de A à H, au dessus de A et bout à bout, en $A m_1, m_1 m_2, m_2 m_3, \dots$. Les segments obtenus à droite de H, sont portés, dans l'ordre de rencontre de B à H, au dessus de B et bout à bout (ici en $B n_1, n_1 n_2, n_2 n_3, \dots$). On joint les derniers points des ponctuelles formées, et l'on a le côté moyen du funiculaire qu'on limite aux deux forces avoisinant H. Chaque point limite est uni à l'avant-dernier point de la ponctuelle située du même côté de H, et l'on a les côtés du funiculaire limitrophes du côté moyen, côtés qu'on limite aux forces suivantes, et ainsi de suite.

La même épreuve fournit immédiatement les réactions X

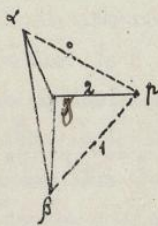
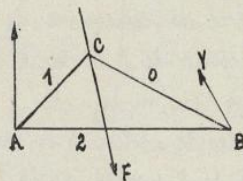
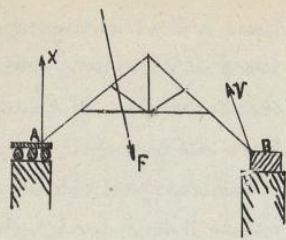
et Y des appuis A et B. Il suffit de prolonger le côté initial et le côté final du funiculaire obtenu jusqu'à leurs rencontres en A' et B' avec la verticale du milieu H. On a : $X = HA'$ et $Y = HB'$. Il suffit, pour s'en rendre compte, de se reporter au dynamique qui a servi seulement pour la démonstration (les triangles pwa, AHA' sont égaux).

On signalera en terminant le cas particulièrement simple où les forces sont toutes égales et uniformément distribuées le long de AB.

8. Exemple de détermination des réactions dans le cas général.

Soit une ferme de comble soumise à un certain nombre de forces verticales ou non (neige, vent, poids propre) dont on ait obtenu la résultante F par l'emploi d'un funiculaire; l'un de ses appuis A est à rotule glissante (réaction verticale), l'autre B est à sabot d'amarrage (réaction quelconque). Il s'agit de déterminer les réactions X et Y de ces appuis.

Joignons un point quelconque C de F à A et B et par les extrémités du



vecteurs α et β équivalent à F menons des parallèles à $\frac{HG}{CB}$, et AC se coupant en p . Considérons ce point comme pôle et construisons le funiculaire des forces en équilibre F, X, Y en partant de B . Ce funiculaire fermé ne saurait être que $BCAB$. Construisons le dynamique correspondant: X étant verticale, menons βY verticalement; AB étant horizontale, menons le rayon polaire $p Y$ horizontal. D'où γ et le dynamique fermé $\alpha \beta \gamma \alpha$.

$$\text{On a: } X = \beta \gamma \text{ et } Y = \gamma \alpha.$$

9. Courbe funiculaire correspondant à une charge continue. - Soit une horizontale AB ; sur chaque élément $MN = dx$ s'exerce une force verticale $p dx$, p étant une fonction donnée de l'abscisse $AM = x$ de M . La courbe de coordonnées (x, p) est dite la ligne des charges.

La charge sur l'élément MN est l'aire du

trapeze $MNv p$ limitée à la ligne des charges, ou encore $dS(x)$, en appelant $S(x)$ l'aire du trapeze $AM p \alpha$. Soit ξ l'abscisse du centre de gravité de ce trapeze; on a

$$S(x) \cdot \xi = \int_0^x x p dx.$$

Construisons un dynamique d'origine a et prenons un pôle P (distance polaire δ ; différence de hauteur entre P et a , h) Portons $am = S(x)$, et construisons un funiculaire de la force $S(x)$ appliquée en G . Le côté final de ce funiculaire rencontre en f la verticale de M . Le lieu du point f quand x varie, est une courbe funiculaire de la charge continue considérée.

L'équation de cette courbe s'obtient de suite (considérations de triangles semblables):

$$Y = \frac{h \xi}{\delta} + (h - S(x)) \cdot \frac{x - \xi}{\delta} = \frac{1}{\delta} \{ x [h - S(x)] + \int_0^x x p dx \}$$

Le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe en f est:

$$Y' = \frac{1}{\delta} \{ h - S(x) - x S'(x) + x p \} = \frac{h - S(x)}{\delta}.$$

La tangente en f est donc le côté final du funiculaire. La courbe funiculaire est donc l'enveloppe des côtés gf .

D'après cela, si l'on décompose par des verticales l'aire de charge en un nombre fini n de parties, et qu'on construise un polygone funiculaire des charges résultantes

relatives aux aires partielles, les côtés consécutifs de ce polygone enveloppent une courbe funiculaire, les points de contact étant situés sur les verticales de séparation des aires partielles. Cela résulte de ce qu'un côté quelconque du polygone rencontre le côté initial en un point situé sur la verticale du centre de gravité de l'aire totale, représentative des forces qui portent le funiculaire jusqu'au côté considéré.

Lorsque la charge p est constante, soit p_0 , on a: $S(x) = p_0 x$ et

$$Y = \frac{1}{J} \left\{ h x - \frac{p_0 x^2}{2} \right\};$$

la courbe funiculaire est une parabole à axe vertical.

Chapitre II. - Détermination des centres de gravité et des moments d'inertie des aires planes. -

1. Définition et principes généraux relatifs aux centres de gravité. -

Si, dans le plan d'une aire plane quelconque S , on prend arbitrairement deux axes rectangulaires ox, oy , et si nous supposons la surface divisée en éléments infiniment petits dw , le centre de gravité de l'aire est le point dont les coordonnées ont pour expressions

$$\xi = \frac{Sx \, dw}{S}, \quad \eta = \frac{Sy \, dw}{S};$$

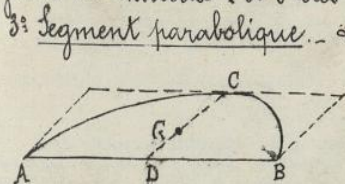
x, y sont les coordonnées d'un point quelconque de l'élément dw et les sommations sont étendues à tous les éléments de l'aire S .

Lorsque la surface S a un centre de figure, ce point est en même temps son centre de gravité; lorsqu'elle a un axe de symétrie, ou un diamètre, son centre de gravité se trouve sur cet axe ou sur ce diamètre.

Lorsque la surface S est décomposable en plusieurs aires dont on connaît les centres de gravité, son centre de gravité appartient à la ligne d'action de la résultante d'un système quelconque de forces parallèles et de même sens, proportionnelles aux aires partielles et appliquées aux centres de gravité de ces aires.

Exemples. - 1^o Triangle. Le centre de gravité est au point de concours des médianes, soit au tiers de la longueur de chacune d'elles à partir de la base.

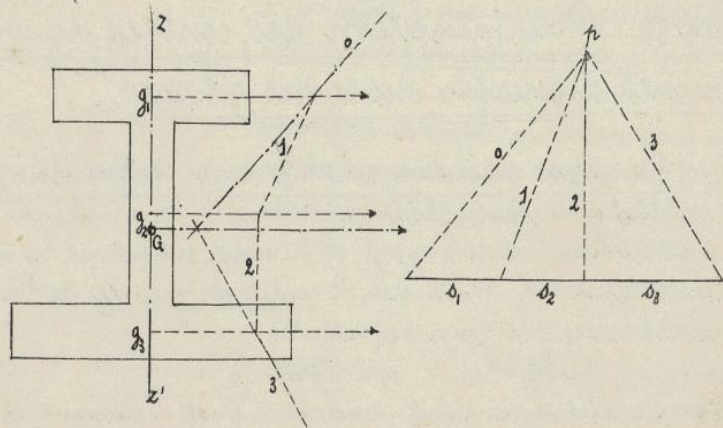
2^o Trapeze. - On prolonge la petite base CD d'une longueur DM égale à la grande base et celle-ci AB , dans le sens opposé, d'une longueur AN égale à la petite base. Le centre de gravité est à la rencontre de la droite MN et du diamètre IS qui joint les milieux I et J des bases.



3^o Segment parabolique. - L'aire du segment parabolique ACB est les deux tiers de l'aire du parallélogramme qui a ses côtés équi-pollents à la corde AB et à la flèche CD de ce segment. Le centre de gravité G est situé sur la flèche CD .

à une distance du milieu Π de la corde, égale aux deux cinquièmes de la flèche.⁴⁸
Détermination graphique. - Les tracés de la statique graphique se prêtent très aisément à la recherche des centres de gravité.

Soit par exemple un profil de double T non symétrique. Le centre de gravité sera sur l'axe de symétrie ZZ' et sur la résultante de trois forces parallèles, appliquées aux centres de gravité g_1, g_2, g_3 et proportionnelles aux surfaces S_1, S_2, S_3 des trois rectangles en lesquels on peut décomposer le profil. Supposons l'âme et les deux semelles d'égale épaisseur. Nous disposerons les forces horizontalement et leur donnerons pour mesures respectives la plus grande dimension du rectangle correspondant. Un funiculaire donne immédiatement la résultante et par suite le centre de gravité cherché G .



Si il n'y a pas d'axe de symétrie, en opérant successivement de la même manière avec deux orientations différentes des mêmes forces, on trouvera par le croisement des résultantes le centre de gravité. Exemples: profil de fer cornière à branches inégales; profil de fer en U à ailes inégales.

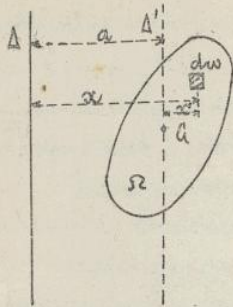
Si il s'agit d'une surface irrégulière qui ne peut être divisée en rectangles, on peut toujours la diviser, par des parallèles équidistantes, en trapèzes et triangles dont les surfaces sont proportionnelles aux ordonnées moyennes et dont on détermine les centres de gravité. Si les surfaces élémentaires sont petites, les centres de gravité des trapèzes peuvent être pris, très approximativement, au milieu de la droite qui joint les milieux des côtés parallèles. Le centre de gravité cherché s'obtiendra graphiquement par le tracé de deux funiculaires, ou même d'un seul si l'aire admet un diamètre ou un axe de symétrie. Exemple: profil de rail.

2. Définitions et principes généraux relatifs aux moments d'inertie. -

Le moment d'inertie d'une aire plane σ par rapport à un axe quelconque Δ est la somme des produits de chacun des éléments dw de σ par le carré de la distance x de cet élément à l'axe considéré :

$$I = \int x^2 dw.$$

1° Le moment d'inertie I d'une aire σ par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie I_0 de cette aire par rapport à l'axe Δ' mené parallèlement



an premier par le centre de gravité de l'aire, augmenté dit produit de l'aire S par le carré de la distance a de ces deux axes.

Si x' est la distance de dw à Δ' , on a $x = x' + a$ et par suite:

$$I = \int x'^2 dw + 2a \int x' dw + a^2 \int dw;$$

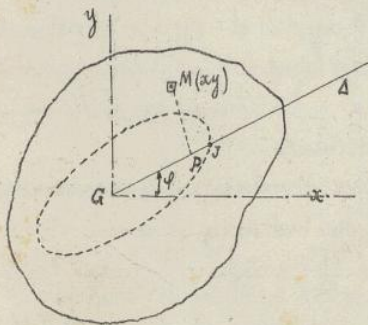
or le centre de gravité étant sur Δ' , on a $\int x' dw = 0$; d'ailleurs $\int dw = S$ et $\int x'^2 dw = I_0$; donc on a bien

$$I = I_0 + S a^2.$$

D'après ce principe, on peut se borner à chercher les moments d'inertie par rapport aux axes passant par le centre de gravité de l'aire.

Le moment d'inertie s'exprime souvent par le produit de l'aire S par le carré du rayon de giration qu'on désigne par la lettre ρ affectée de l'indice correspondant à l'axe choisi: $I = S \rho_A^2$.

2° Si, sur les diverses droites issues du centre de gravité G d'une aire plane S , on porte à partir de G des longueurs inversement proportionnelles aux rayons de giration relatifs à ces droites, le lieu des extrémités de ces segments est une ellipse, dite ellipse centrale d'inertie.



L'aire étant rapportée à deux axes rectangulaires Gx , Gy , la distance d'un point $M(x, y)$ à une droite Δ inclinée de l'angle φ sur Gx est: $MP = x \sin \varphi - y \cos \varphi$. Le moment d'inertie relativement à cette droite est donc:

$$I_0 = \int MP^2 dw = \sin^2 \varphi \int x^2 dw - 2 \sin \varphi \cos \varphi \int xy dw + \cos^2 \varphi \int y^2 dw.$$

Posons:

$$A = \int y^2 dw; \quad B = \int xy dw; \quad C = \int x^2 dw;$$

A et C sont les moments d'inertie relatifs aux axes

Gx , Gy ; B est ce qu'on appelle le produit d'inertie relatif à ces deux axes; nous supposons ces trois intégrales calculées. Nous aurons la relation:

$$S \rho_A^2 = A \cos^2 \varphi - 2B \sin \varphi \cos \varphi + C \sin^2 \varphi.$$

Portons sur $G\Delta$ une longueur $GJ = \frac{l^2}{\rho_A^2}$, l étant une longueur qu'on précisera tout à l'heure. Les coordonnées X, Y du point J sont:

$$X = \frac{l^2 \cos \varphi}{\rho_A}, \quad Y = \frac{l^2 \sin \varphi}{\rho_A},$$

et elles vérifient la relation:

$$AX^2 - 2BXY + CY^2 = S l^4.$$

C'est l'équation du lieu du point J . Ce lieu est une conique de centre G , et même une ellipse, car ρ_A ne saurait être nul ni par suite GJ infini.

Les axes de cette ellipse centrale d'inertie sont dits axes centraux d'inertie; l'inclinaison α de leur direction sur Gx est définie par l'équation:

$$\tan 2\alpha = \frac{2B}{C-A};$$

imaginons qu'on fasse tourner les axes de coordonnées de l'angle α de manière à les faire coïncider avec les axes centraux d'inertie; les coefficients de l'équation transfor-

mées seront :

$$\left. \begin{matrix} A_1 \\ C_1 \end{matrix} \right\} = \frac{A+C}{2} + \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2} ; \quad B_1 = 0 ;$$

l'équation de l'ellipse centrale d'inertie s'écrira

$$A_1 X_1^2 + C_1 Y_1^2 = \Omega l^4.$$

Soient ρ_{x_1} et ρ_{y_1} les rayons de gyration relatifs à Gx_1 et Gy_1 ; on a

$$A_1 = \Omega \rho_{x_1}^2, \quad C_1 = \Omega \rho_{y_1}^2,$$

et en prenant :

$$l^2 = \rho_{x_1}^2 + \rho_{y_1}^2 ;$$

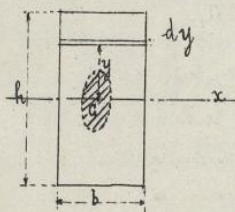
l'équation de l'ellipse centrale devient :

$$\frac{X_1^2}{\rho_{y_1}^2} + \frac{Y_1^2}{\rho_{x_1}^2} = 1.$$

Chacun des axes de l'ellipse est le rayon de gyration relatif à la direction de l'autre axe. Une ellipse dont le centre est connu est déterminée par trois points; il suffira donc de connaître ou de déterminer graphiquement les moments d'inertie d'une aire Ω par rapport à trois droites passant par le centre de gravité pour obtenir simplement le moment d'inertie par rapport à une droite quelconque du plan.

En particulier, si l'aire Ω admet un axe de symétrie, cet axe qui contient le centre de gravité, est axe central d'inertie. Car si on le prend pour axe Gx , à chaque élément dw de coordonnées x, y , on peut en associer un autre symétrique dw de coordonnées $x, -y$; les termes correspondants de $B xy dw$ et $-xy dw$ se détruisent; $B \equiv 0$. Ainsi, dès qu'il existe un axe de symétrie [et c'est le cas le plus fréquent dans la pratique: rectangle, fers en I, etc.], les axes centraux sont connus en position, et il suffit de déterminer les rayons de gyration correspondants.

Exemples. 1: Rectangle. Pour calculer le moment d'inertie relatif à la médiane Gx ,



on groupe les éléments dw qui ont même y et on a :

$$A = \int y^2 dw = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} by^2 dy = \frac{bh^3}{12} = \frac{\Omega h^2}{12}.$$

Les axes de l'ellipse d'inertie sont donc :

$$\frac{h}{2\sqrt{3}} \text{ pour } Gy, \quad \frac{b}{2\sqrt{3}} \text{ pour } Gx.$$

2: Cercle. - Par raison de symétrie, l'ellipse d'inertie sera un cercle; on aura :

$$A = C = \frac{A+C}{2} = \frac{1}{2} \int (x^2 + y^2) dw$$

On groupe les éléments dw qui ont même distance u au centre,

$$A = \frac{1}{2} \int_0^R u^2 \cdot 2\pi u du = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\Omega R^2}{4}.$$

Le cercle d'inertie a pour rayon $\frac{R}{2}$.

Détermination graphique. Considérons un profil quelconque dont on cherche le moment d'inertie par rapport à un axe de direction donnée, à mener par le centre de gravité.

Pour placer l'axe, nous décomposerons (d'après le 76:1) l'aire en trapèzes par des parallèles équidistantes, d'écartement h , et nous construirons un funiculaire d'un système de forces parallèles aux bandes formées, et proportionnelles aux surfaces de

ces bandes. Soit m, n, n', m' une bande, m, n , son ordonnée moyenne; g son centre de gravité, situé sensiblement sur m, n ; le segment correspondant du dynamique sera $\mu v = l \times m, n$, l étant un coefficient numérique choisi arbitrairement. Les côtés extrêmes d'un funiculaire de ce système de forces μv se coupent en J . La parallèle aux bandes passant par J est l'axe cherché.

Je dis maintenant que la mesure de l'aire limitée par le funiculaire fait connaître immédiatement le moment d'inertie I cherché.

Prolongeons en effet jusqu'à G, J deux côtés adjacents du funiculaire, par exemple ceux qui se croisent sur l'ordonnée moyenne m, n , en b ; soient c et d les points de rencontre, x la distance de g à G, J . Évaluons l'aire triangulaire bcd , en notant la similitude de ce triangle et du triangle associé du dynamique μ, ν :

$$\text{Aire } bcd = \frac{1}{2} cd \times x = \frac{1}{2} \mu v \times \frac{x}{\beta} \times x = \frac{l}{2\beta} \times m, n \times x^2 = \frac{l}{2\beta h} \times m, n \times h \times x^2;$$

ainsi l'aire bcd est, au facteur $\frac{l}{2\beta h}$ près, le moment d'inertie de la bande infiniment étroite considérée.

Par sommation nous aurons donc:

$$\text{Aire } \alpha \beta j = \frac{l}{2\beta h} \cdot I,$$

ou:

$$I = \frac{2\beta h}{l} \text{ aire } \alpha \beta j.$$

ou enfin, en observant que $\frac{h}{l}$ est l'échelle λ adoptée pour la représentation des aires sur le dynamique, et en désignant par Ω_1 l'aire du funiculaire:

$$I = 2\beta \lambda \Omega_1.$$

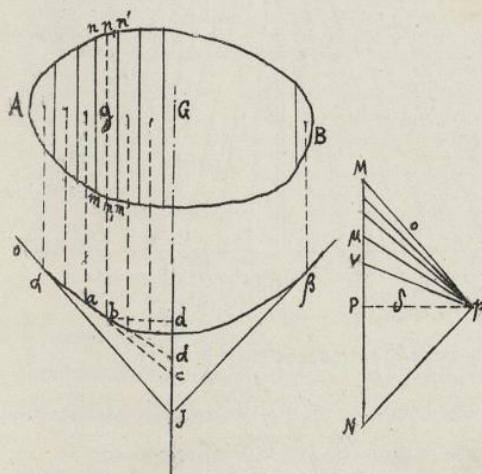
On peut d'ailleurs tracer au sentiment d'une manière suffisamment précise la courbe funiculaire qui, à la limite, avec un nombre de divisions infini, remplacerait le contour polygonal du funiculaire construit, en remarquant que cette courbe doit être tangente aux divers côtés du polygone funiculaire aux points de rencontre tels que a de ces côtés avec les prolongements des lignes de division de la surface. (Chap. I; n° 9)

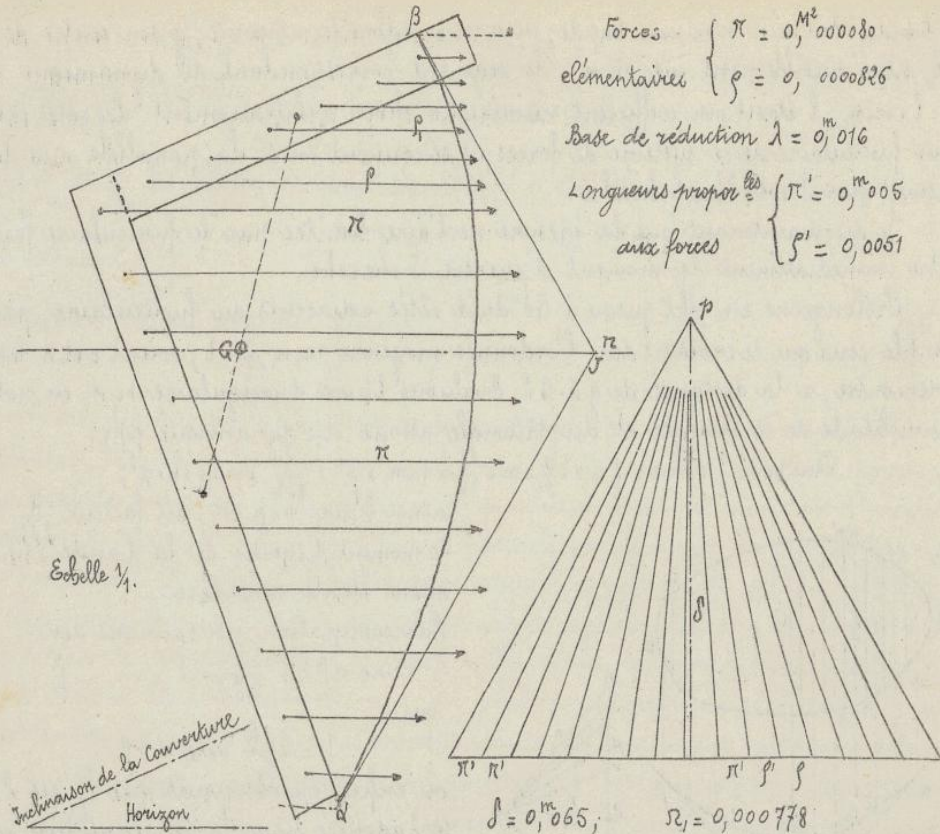
Nous donnons comme exemple la détermination du centre de gravité G et du moment d'inertie I par rapport à un axe horizontal Gn d'un profil de cornière de 100×70 mm, formant panne-chevron d'une couverture. Le croquis, intercalé page suivante, comporte toutes les indications utiles.

3. Usage du planimètre et de l'intégrateur d'Amshler.

L'évaluation de la superficie d'une aire plane s'effectue mécaniquement, par simple lecture, à l'aide du planimètre polaire d'Amshler (1856).

Cet instrument se compose essentiellement de deux tiges métalliques PA, AB pouvant tourner librement autour d'une articulation A . L'extrémité P de la branche AP porte une aiguille dont la pointe peut s'enfoncer d'une très petite profondeur



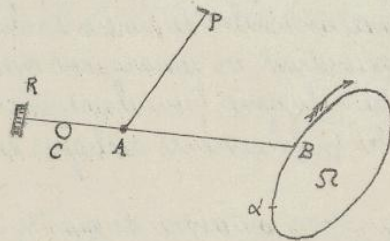


Forces élémentaires $\left\{ \begin{array}{l} \pi = 0,00080 \\ \rho = 0,000826 \end{array} \right.$
 Base de réduction $\lambda = 0,016$
 Longueurs propor^{tes} aux forces $\left\{ \begin{array}{l} \pi' = 0,005 \\ \rho' = 0,0051 \end{array} \right.$

$\delta = 0,065; \quad \sigma_1 = 0,000778$

$I = 2 \delta \lambda \sigma_1 = 2 \times 0,065 \times 0,016 \times 0,000778 = 0,0000161824$

dans la feuille de papier et y reste maintenue par une masse additionnelle. L'extrémité B porte un style à pointe d'acier émoussée auquel on fait parcourir le contour de l'aire à évaluer. On delà de l'articulation A, sur le prolongement de BA se trouve

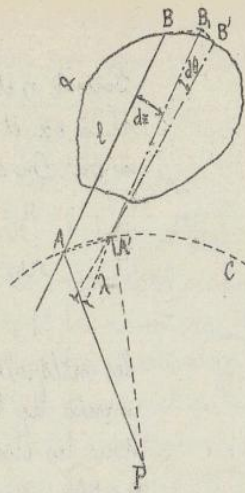
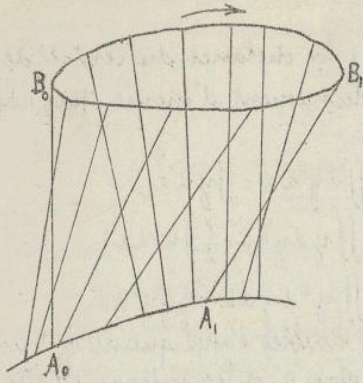


une roulette R dont l'axe, perpendiculaire à son plan, est parallèle à AB. La circonférence de cette roulette est divisée en 100 parties égales; un vernier permet d'évaluer les dixièmes de division. Enfin un compteur C divisé en 10 parties égales et engrenant avec l'axe de la roulette par une vis sans fin, indique les nombres entiers

de tours de roulette, dont les fractions se lisent sur la roulette et le vernier. La tige AB, grâce à une coulisse avec vis de pression, est de longueur variable, pour permettre le changement de l'unité d'aire.

Le pivot P étant placé hors de l'aire σ à évaluer, on fait décrire au tracelet B, dans le sens des aiguilles d'une montre, le contour exact de σ . Il y a proportionnalité entre l'aire σ et la rotation de la roulette.

Pendant que le tracelet B décrit le contour, A décrit un arc de cercle de centre P, de sorte que la surface balayée par la droite AB pendant ce mouvement est limitée:



53.
 1° par l'arc de cercle dont le centre est P; 2° par les positions extrêmes de la droite AB; 3° par le contour de la surface à évaluer. Mais si l'on convient d'affecter du signe + une aire balayée dans le sens direct et du signe - une aire balayée dans le sens inverse, on voit que quand le traçoir, parti par exemple du point α du contour, y sera revenu, la surface algébrique

totale sur laquelle aura passé la droite AB sera précisément la surface cherchée Ω , l'aire comprise entre la partie inférieure du contour et l'arc de cercle AC ayant été balayée deux fois en sens opposés.

Pour estimer la surface balayée, considérons deux positions infiniment voisines AB et A'B', et menons A'B, équivalente à AB; si dz est l'écartement de A'B, A'B' et $d\theta$ l'inclinaison de A'B' sur AB (pris positivement l'une à droite de la règle, l'autre dans le sens direct), on a :

$$\text{Aire } ABB'A' = \text{Aire } ABB'A + \text{Aire } B_1A'B' = l dz + \frac{l^2 d\theta}{2}$$

l étant la longueur AB. Si d'autre part λ est la distance de la roulette à A, le chemin $d\sigma$ enregistré par la roulette, provenant des composantes des déplacements normales à son axe est :

$$d\sigma = dz - \lambda d\theta$$

Par suite l'aire élémentaire balayée est :

$$l d\sigma + l \left(\frac{l}{2} + \lambda \right) d\theta$$

Donc :

$$\Omega = l \int d\sigma + l \left(\frac{l}{2} + \lambda \right) \int d\theta$$

Où $\int d\theta = 0$, car la position finale de la barre coïncide avec sa position initiale.

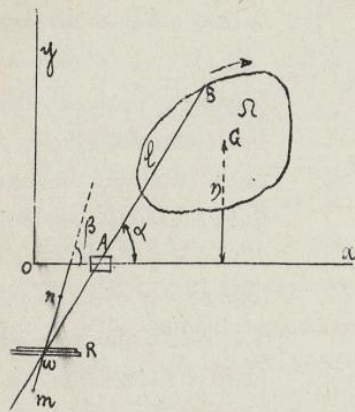
D'autre part, si L_0 et L_1 sont les lectures initiale et finale faites à la roulette, en unités du vernier, $\int d\sigma = (L_1 - L_0) \cdot \frac{2\pi r}{1000}$ (r rayon de la roulette). Donc enfin

$$\Omega = \frac{2\pi r l}{1000} (L_1 - L_0)$$

La détermination des moments d'inertie, réductible à l'évaluation d'une aire, doit pouvoir s'effectuer mécaniquement: de fait, l'intégrateur d'Amollet fait connaître par trois lectures l'aire, le centre de gravité et le moment d'inertie d'une surface plane.

Considérons un appareil schématique comprenant: 1° une règle ox le long de laquelle peut glisser librement un coulisseau A; 2° une tige rectiligne BA qui pivote librement autour d'un point A du coulisseau et dont l'extrémité B porte un style qui

soit le contour donné.



Soient η et l la distance du centre de gravité à ox et le moment d'inertie par rapport à ox . On a :

$$\Omega = \iint dy dx = \int y dx,$$

$$\Omega \eta = \iint y dy dx = \frac{1}{2} \int y^2 dx,$$

$$I = \iint y^2 dy dx = \frac{1}{3} \int y^3 dx,$$

les intégrales doubles s'appliquant à tous les éléments de l'aire Ω et les intégrales simples à tous les éléments de son contour. Soit $l = AB$,

$\alpha = BAx$; on a :

$$y = l \sin \alpha, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right), \quad \sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha.$$

Par suite, en notant que $\int dx = 0$ pour un contour fermé, il vient :

$$\Omega = l \int \sin \alpha dx;$$

$$\Omega \eta = -\frac{l^2}{4} \int \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right) dx;$$

$$I = \frac{l^2 \Omega}{4} - \frac{l^3}{12} \int \sin 3\alpha dx.$$

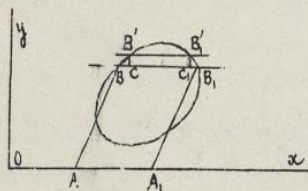
Supposons maintenant qu'une roulette R soit centrée sur un axe mn entraîné par la tige AB avec laquelle il est articulé au centre w de la roulette de façon à pouvoir pivoter librement autour de ce point, et imaginons que cet axe mn soit guidé dans ce pivotement de telle manière que l'angle β fait par sa direction avec ox réalise constamment une des trois conditions :

$$\beta = c'$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} + 2\alpha,$$

$$\beta = 3\alpha$$

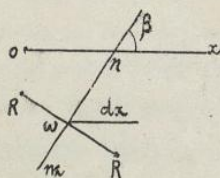
Il est aisé de démontrer que l'arc σ dont roulera la roulette pendant la description du contour est $\int \sin \beta dx$. Substituons en effet au déplacement élémentaire de la



tige provenant d'un chemin BB' parcouru par le style, les deux déplacements qui résulteraient des chemins dx et dy , composantes de BB' suivant les axes : la rotation de la roulette dans le déplacement réel est la somme algébrique des rotations qu'elle effectuerait dans les deux déplacements composants.

La somme algébrique des arcs enregistrés par le fait des déplacements parallèles à ox est nulle. Soient en effet B' et B , les points qui ont même ordonnée que B et B' ; les arcs enregistrés pour les déplacements CB' ou dy et $B'C$, ou $-dy$ sont égaux et de sens opposés, la tige porte style se trouvant, pour B et B' , ou C et C' , par rapport à ox dans des inclinaisons identiques, ce qui assure à la roulette la même orientation. D'autre part, le déplacement $dx = BC$ donne une translation de la barre et la projection du déplacement du centre de la roulette sur une direction perpendiculaire à son axe sera $\sin \beta dx$; c'est l'arc enregistré. Donc :

$$\sigma = \int \sin \beta dx.$$



Soient $L, L', L_2, L_2', L_3, L_3'$ les lectures obtenues initialement et finalement sur la roulette dans les trois modes de liaison; on aura (r étant le rayon de la roulette):

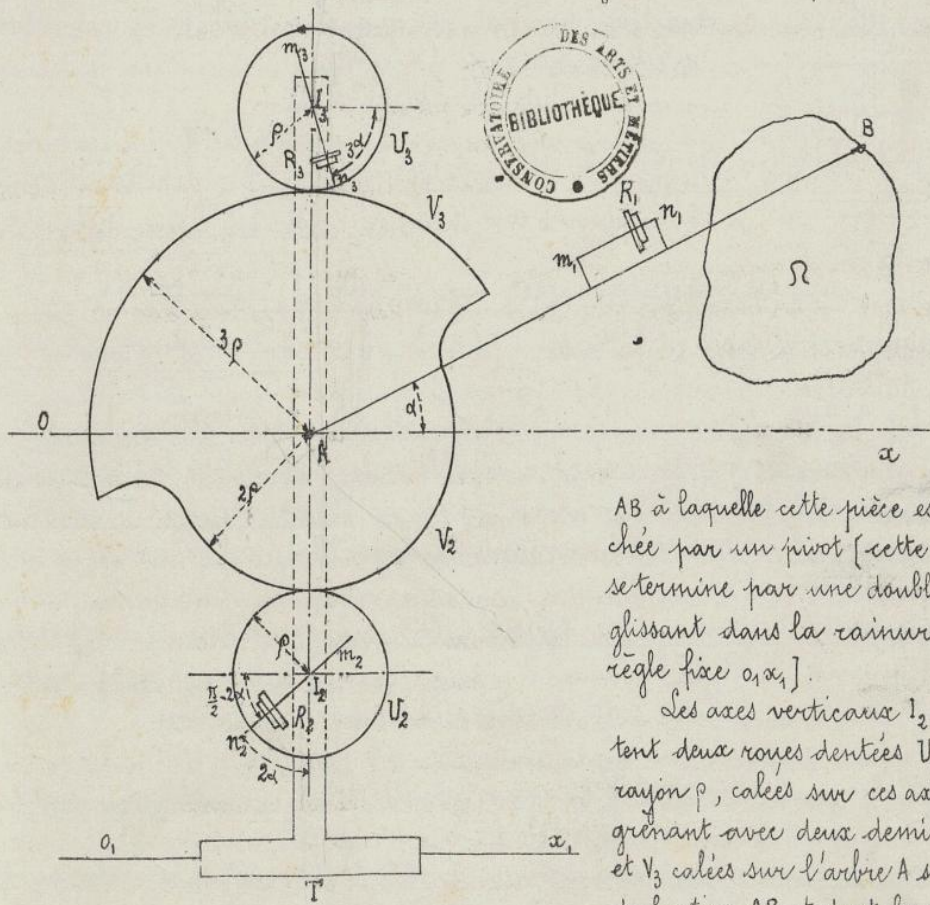
$$\Omega = \frac{\pi r l}{500} (L' - L)$$

$$\Omega \eta = \frac{\pi r l^2}{2000} (L_2 - L_2')$$

$$I = \frac{\pi r l^3}{2000} (L' - L) - \frac{\pi r l^3}{6000} (L_3' - L_3)$$

L'appareil d'Amster fournit les trois résultats simultanément. — A cet effet il est muni de trois roulettes R_1, R_2, R_3 dont la première, tournant autour d'un axe $m_1 n_1$ parallèle à AB et invariablement lié à cette tige, fournit Ω .

Les deux autres roulettes R_2 et R_3 tournent autour d'axes horizontaux $m_2 n_2, m_3 n_3$ mobiles eux-mêmes autour d'axes verticaux projetés en I_2, I_3 sur le plan de la figure et portés par une même traverse $I_3 I_2 I$ qui ne peut recevoir qu'un mouvement de translation parallèle à ox et égal à celui du point A de la tige



AB à laquelle cette pièce est rattachée par un pivot [cette traverse se termine par une double équerre glissant dans la rainure d'une règle fixe $o_1 x_1$].

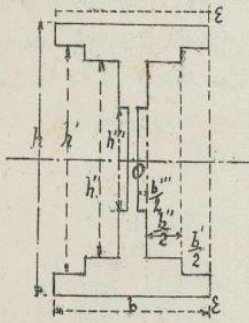
Les axes verticaux I_2 et I_3 portent deux roues dentées U_2 et U_3 de rayon ρ , calées sur ces axes et engrenant avec deux demi-roues V_2 et V_3 calées sur l'arbre A solidaire de la tige AB et dont les rayons

respectifs sont 2ρ et 3ρ . — L'appareil étant ainsi construit, on voit qu'une rotation $d\alpha$ de AB autour de A , aura pour conséquence deux rotations des roues U_2 et U_3 qui seront respectivement égales à $2d\alpha$ et à $3d\alpha$, et de sens contraire à $d\alpha$; si donc les directions initiales des axes $m_2 n_2$ et $m_3 n_3$ ont été convenablement choisies, les angles

que feront ces axes avec la direction ox seront constamment égale à $\frac{\pi}{2} + 2\alpha$ et 3α , α étant l'angle Bax . Les conditions pour que les roulettes R_2 et R_3 fournissent η et I se trouveront donc remplies.

4. Applications. - Nous avons besoin par la suite des moments d'inertie des profils irréguliers des fers du commerce; des tables spéciales, fournies par les Usines, les font connaître, et ces tables s'établissent sans peine par l'emploi de l'intégrateur d'Amblèr.

Les tôles composées nous conduiront à calculer le moment d'un double T symétrique par rapport à l'axe horizontal passant par son centre de figure 0. On arrive à un résultat très simple en considérant le profil comme la différence d'une



série de rectangles, à savoir, avec les notations de la figure, comme la différence entre le rectangle (b, h) et les rectangles (b'', h') , $(b'' h'')$, $(b'' h'')$; comme tous ces rectangles ont leurs centres sur l'axe par rapport auquel on cherche le moment d'inertie, on a de suite (voir n°2):

$$I = \frac{bh^3 - b''h'^3 - b''h''^3 - b''h''^3}{12}$$

Il nous sera encore utile de calculer l'accroissement de ce moment d'inertie par suite de l'addition des semelles de largeur b et d'épaisseur ϵ ; si σ est l'aire de la section

d'une semelle, on a

$$\Delta I = 2 \left[\frac{b\epsilon^3}{12} + b\epsilon \left(\frac{h}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 \right] = \frac{\sigma}{2} \left(h^2 + 2h\epsilon + \frac{4}{3}\epsilon^2 \right);$$

comme, dans la pratique, ϵ est faible vis à vis de h , on prend simplement:

$$\Delta I = \frac{\sigma h^2}{2}$$

Enfin les Aide-Mémoire fournissent un grand nombre de moments d'inertie calculés pour des profils usuels; on signalera en particulier le Constructeur de Bourdeaux, et le très précieux aide-mémoire de Résistance des Matériaux, de Duquesnay (Encyclopédie scientifique des Aide-Mémoire Léauté, éditée par Gauthier-Villars).

5. Noyau central d'une aire plane. - Soit une aire plane de surface σ , de centre de gravité G , d'axes centraux d'inertie Gx, Gy , de rayons de gyration correspondants b et a ; l'ellipse centrale d'inertie a pour équation:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La polaire d'un point (X, Y) par rapport à cette ellipse a pour équation:

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1$$

L'antipolaire du même point par rapport à l'ellipse est la symétrique de la polaire par rapport à G , c'est-à-dire la droite d'équation

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = -1.$$

Le noyau central de l'aire considérée est la région limitée autour de G par la famille des antipolaires des points du contour de l'aire.

1° Cas d'une aire circulaire de rayon R . Le cercle d'inertie a pour équation

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4} \quad (a^2 = b^2 = \frac{R^2}{4})$$

Un point du contour a pour coordonnées $X = R \cos \varphi$, $Y = R \sin \varphi$; son antipolaire a pour équation:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = -\frac{R}{H}$$

elle enveloppe donc un cercle de centre G et de rayon $\frac{R}{H}$.

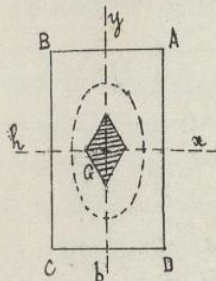
2. Cas d'une aire rectangulaire, de dimensions (b, h) . L'ellipse d'inertie a

pour équation:

$$\frac{x^2}{\frac{b^2}{12}} + \frac{y^2}{\frac{h^2}{12}} = 1$$

Les antipolaires des points du contour balayent tout le plan sauf le losange limité par les antipolaires des sommets; comme l'antipolaire du sommet $A(\frac{b}{2}, \frac{h}{2})$ est

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = -\frac{1}{6}$$



les sommets du losange seront placés aux tiers des axes du rectangle.

La considération du noyau central d'une aire sert dans l'étude de la transmission des pressions par contact de surfaces planes.

Chapitre III - Principes généraux de la théorie de l'élasticité des corps solides.

A. Généralités et étude des tensions intérieures.

1. Définitions et hypothèses. - On regarde un corps solide comme un assemblage de molécules ou de points matériels infiniment rapprochés les uns des autres.

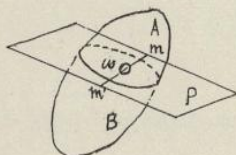
Quand un tel corps préalablement en équilibre est soumis à l'action de forces extérieures, ses molécules entrent en mouvement; il se déforme successivement jusqu'au moment où l'équilibre se rétablit entre les forces moléculaires, modifiées par la variation des distances des molécules, et les forces extérieures. Si les intensités de ces dernières forces ne dépassent pas une certaine limite, dès que leur action vient à cesser, le corps reprend sa forme primitive à la suite d'une série de vibrations exécutées par ses molécules.

Cette tendance des corps solides légèrement déformés à reprendre leur forme primitive s'appelle élasticité. - Tous les corps solides sont élastiques dans certaines limites variables avec leur nature; mais cette propriété ne subsiste que pour des déformations très petites par rapport aux dimensions des corps ou pour des écartements des molécules très faibles par rapport à leurs distances primitives.

Les forces moléculaires sont dirigées suivant la droite qui joint les points d'application, et obéissent à la loi de Newton: égales deux à deux et de sens contraires, elles ont une valeur commune fonction de la seule distance des points d'application. Comme ces forces s'opposent aussi bien à l'écartement de ces points qu'à leur rapprochement, on admet qu'elles sont répulsives quand la

distance est inférieure à une certaine limite, qu'elles sont nulles pour cette ⁵⁸ limite et qu'elles deviennent attractives pour une distance plus grande. Ces forces attractives décroissent d'ailleurs très vite avec la distance, de telle sorte qu'un point d'un corps n'agit que sur des points très voisins de lui. Si l'on décrit du point considéré une sphère avec un rayon égal à la limite d'action, on a une sphère très petite, de rayon inférieur aux longueurs dites microscopiques, qu'on appelle sphère d'activité.

Partageons un corps solide par un plan P en deux parties, A et B . Sur ce plan P prenons une surface ω extrêmement petite par rapport aux dimensions du corps, mais très grande par rapport au rayon a de la sphère d'activité. Soient m et m' deux points matériels du corps, l'un dans A , l'autre dans B , de distance inférieure à a , et choisis de telle sorte que la droite mm' traverse ω . m exerce



sur m une force dirigée suivant $m'm$. Toutes les forces moléculaires pareilles provenant de B , traversant ω , transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité G de cet élément, auront une résultante dite tension élémentaire sur la face de l'élément ω contiguë à B . [Ce transport en G des forces moléculaires est accompagné de l'introduction d'un couple dont l'ordre infiniésimal est supérieur de deux unités à celui de la résultante; on ne tient pas compte de ce couple].

En vertu de la loi d'égalité de l'action et de la réaction, la tension élémentaire sur une face d'un élément ω est toujours égale et de sens contraire à la tension élémentaire sur l'autre face.

Comme les diverses parties égales d'un élément plan se trouvent placées, sauf des exceptions négligeables, dans les mêmes conditions physiques, les tensions qu'elles supportent seront sensiblement parallèles et ne pourront différer les unes des autres qu'infinitement peu par rapport à elles-mêmes. Elles auront donc une résultante proportionnelle à l'étendue de l'élément plan. Le quotient de cette résultante par l'aire ω est une quantité généralement finie, parfois nulle, dite tension unitaire, et qui ne varie plus, à un instant donné, qu'avec l'orientation de l'élément et avec les coordonnées de son centre de gravité.

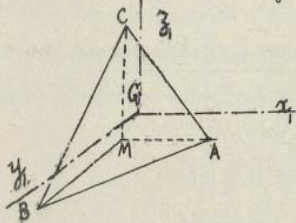
La tension élémentaire se décompose en deux composantes; l'une normale à ω , est une traction ou une pression suivant qu'elle est dirigée vers B ou vers A ; l'autre dans le plan ω est dite tension tangentielle.

2. Distribution des tensions autour d'un point. Soient x, y, z les coordonnées du centre de gravité M de l'élément ω à l'instant t ; α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à cet élément menée vers la partie du corps contiguë à la face pour laquelle on prend la tension; X, Y, Z les composantes de la tension unitaire. Ces composantes sont des fonctions de $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t$, qui, si elles étaient déterminées, donneraient à chaque instant la direction et l'intensité

sité de la tension unitaire sur un élément quelconque.

La détermination des trois fonctions X, Y, Z revient à celle de six nouvelles fonctions de x, y, z, t seulement.

Les composantes de la tension unitaire diffèrent très peu, à un instant donné quelconque, pour tous les éléments plans égaux, parallèles et très voisins, qui coupent normalement une même droite; car deux consécutifs de ces éléments comprenant entre eux une couche mince de matière dont le volume, la masse et la surface latérale sont numériquement négligeables vis à vis de l'aire de ses bases, les forces actives et l'inertie d'une telle couche ainsi que les actions exercées sur son contour, seront généralement insensibles vis à vis des deux tensions exercées sur les deux éléments plans considérés, tensions qui doivent par suite, à elles seules, se faire équilibre ou être égales et opposées.



Cela étant, menons à une très petite distance h de M un élément plan, base d'un tétraèdre trirectangle $MABC$ ayant trois arêtes MA, MB, MC parallèles aux axes ox, oy, oz de coordonnées. Les composantes de la tension unitaire exercée par le tétraèdre à travers l'élément plan $ABC = \omega$, différeront infiniment peu de X, Y, Z .

Marquons des indices 1, 2, 3 les valeurs que prennent les composantes de la tension unitaire lorsque la direction de la normale à l'élément plan sur laquelle elle s'exerce se confond successivement avec les directions positives des axes ox, oy, oz : X_1, Y_1, Z_1 pour ox ; X_2, Y_2, Z_2 pour oy ; X_3, Y_3, Z_3 pour oz .

Les tensions élémentaires sur les quatre faces du tétraèdre et les forces actives et d'inertie qui sollicitent sa masse se faisant équilibre, les sommes des projections de ces forces sur chaque axe doivent être nulles, ainsi que les sommes des moments de ces forces par rapport aux axes Gx, Gy, Gz , menés par le centre de gravité de la face ABC parallèlement à ox, oy, oz .

Les forces actives et d'inertie, de l'ordre de grandeur de la masse du tétraèdre, donnent pour les projections des termes infiniment petits du troisième ordre, et pour les moments des termes infiniment petits du quatrième ordre, les uns et les autres négligeables vis à vis de ceux provenant des tensions qui sont respectivement du deuxième et du troisième ordre.

En projetant sur l'axe des x , les faces d'aires $\omega, \omega\alpha, \omega\beta, \omega\gamma$ donnent respectivement les termes: $\omega X, -\omega\alpha X_1, -\omega\beta X_2, -\omega\gamma X_3$. On a donc la première des équations:

$$(1) \begin{cases} X = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3, \\ Y = \alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3, \\ Z = \alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Z_3, \end{cases}$$

Les deux dernières étant obtenues par projection sur oy et sur oz .

Les coordonnées des centres de gravité des faces sont: $-\frac{1}{3}\frac{h}{\alpha}, 0, 0$ pour MBC ; $0, -\frac{1}{3}\frac{h}{\beta}, 0$ pour MCA ; $0, 0, -\frac{1}{3}\frac{h}{\gamma}$ pour MAB ; $0, 0, 0$ pour ABC . Les moments des tensions qui y sont appliquées, par rapport à ox , sont par suite $0; +\frac{1}{3}\frac{h}{\beta}(-\omega, \beta Z_2)$ ou $-\frac{\omega_1 h}{3} Z_2$;

$\frac{1}{3} \frac{h}{y} (-\omega_1 y Y_3) \omega + \frac{\omega_1 h}{3} Y_3; 0$, et l'on a l'équation:
 $Z_2 = Y_3$.

On trouverait de même :

$$X_3 = Z_1 \quad \text{et} \quad Y_1 = X_2.$$

Désignons respectivement (avec Lamé) les composantes X_1, Y_2, Z_3 normales aux éléments plans qu'elles sollicitent par N_1, N_2, N_3 , et les autres composantes des tensions appliquées aux mêmes éléments, Z_2 ou Y_3, X_3 ou Z_1, Y_1 ou X_2 , qui sont tangentielles, c'est à dire parallèles aux surfaces à travers lesquelles elles s'exercent, par T_1, T_2, T_3 . Les formules (1) donneront les trois relations fondamentales:

$$(2) \quad \begin{cases} X = \alpha N_1 + \beta T_3 + \gamma T_2, \\ Y = \alpha T_3 + \beta N_2 + \gamma T_1, \\ Z = \alpha T_2 + \beta T_1 + \gamma N_3, \end{cases}$$

qui justifient notre assertion initiale.

3. Représentation géométrique de la distribution des tensions.

La projection de la tension correspondant à l'élément de normale $(\alpha \beta \gamma)$ sur une direction $(\alpha' \beta' \gamma')$ est: $X \alpha' + Y \beta' + Z \gamma'$, ou bien:

$$N_1 \alpha \alpha' + N_2 \beta \beta' + N_3 \gamma \gamma' + T_1 (\beta \gamma' + \gamma \beta') + T_2 (\gamma \alpha' + \alpha \gamma') + T_3 (\alpha \beta' + \beta \alpha').$$

Elle ne change pas quand on permute les deux systèmes de variables $(\alpha \beta \gamma), (\alpha' \beta' \gamma')$.

Si donc p et p' sont les tensions relatives à deux éléments ω et ω' passant par un même point et ayant pour normales N et N' , on a:

$$p \cos(p, N') = p' \cos(p, N),$$

(égalité des composantes normales réciproques).

En particulier, la composante de la tension sur la normale au plan de l'élément ω , soit $N = p \cos(p, N)$, s'obtiendra en remplaçant α', β', γ' par α, β, γ . D'où:

$$N = N_1 \alpha^2 + N_2 \beta^2 + N_3 \gamma^2 + 2 T_1 \beta \gamma + 2 T_2 \gamma \alpha + 2 T_3 \alpha \beta.$$

Portons, à partir de M , sur la normale N , une longueur MK , dont le carré représente la valeur absolue de $\frac{1}{N}$. Si M est pris pour origine, les coordonnées de K seront définies par:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\pm N}};$$

on aura par suite

$$N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2 + 2 T_1 y z + 2 T_2 z x + 2 T_3 x y = \pm 1.$$

Le lieu du point K est donc une quadrique dite quadrique directrice relative au point M . Si l'on suppose que l'on a pris pour axes coordonnés les axes principaux de la quadrique directrice, les termes rectangles doivent disparaître de son équation, de sorte qu'on doit avoir $T_1 = T_2 = T_3 = 0$, et les tensions sont normales pour les plans coordonnés. Donc en tous les points du corps il existe trois plans rectangulaires pour lesquelles les tensions sont normales; ces trois tensions, normales aux plans sur lesquels elles s'exercent, sont dites tensions principales.

Soit maintenant ME le vecteur représentatif de la tension sur l'élément de normale $(\alpha \beta \gamma)$. Le point E a pour coordonnées, en prenant pour axes les tensions principales:

$$\Xi = N_1 x, \quad H = N_2 y, \quad Z = N_3 z;$$

par suite :

$$\frac{\Xi^2}{N_1^2} + \frac{H^2}{N_2^2} + \frac{Z^2}{N_3^2} = 1.$$

Le lieu du point E est donc un ellipsoïde dit ellipsoïde des tensions, qui a pour axes les tensions principales.

H. Formules de transformation des tensions. - Supposons que l'on change la direction des axes rectangulaires coordonnés; l'équation de la quadrique directrice rapportée à des parallèles aux nouveaux axes menés par M, s'obtiendra en faisant :

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 \xi' + \alpha_2 \eta' + \alpha_3 \zeta' \\ \eta &= \beta_1 \xi' + \beta_2 \eta' + \beta_3 \zeta' \\ \zeta &= \gamma_1 \xi' + \gamma_2 \eta' + \gamma_3 \zeta'. \end{aligned}$$

Or les coefficients de cette nouvelle équation ne seront autres que les composantes des tensions exercées au même point M sur des éléments perpendiculaires aux nouveaux axes. Si donc on affecte d'un accent ces composantes, on aura :

$$\begin{aligned} N_1' &= N_1 \alpha_1^2 + N_2 \beta_1^2 + N_3 \gamma_1^2 + 2 T_1 \beta_1 \gamma_1 + 2 T_2 \gamma_1 \alpha_1 + 2 T_3 \alpha_1 \beta_1; \\ T_1' &= N_1 \alpha_2 \alpha_3 + N_2 \beta_2 \beta_3 + N_3 \gamma_2 \gamma_3 + T_1 (\beta_2 \gamma_3 + \gamma_2 \beta_3) + T_2 (\gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3) + T_3 (\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3); \end{aligned}$$

Cas particuliers. - A. Supposons d'abord que l'on passe d'un système à l'autre en permutant les axes ox et oy ; c'est-à-dire que ox' coïncide avec oy et oy' avec ox ; alors :

$$\xi = \eta', \quad \eta = \xi', \quad \zeta = \zeta',$$

et l'on a :

$$N_1' = N_2, \quad N_2' = N_1, \quad N_3' = N_3, \quad T_1' = T_2, \quad T_2' = T_1, \quad T_3' = T_3.$$

B. Si l'on passe d'un système à l'autre en remplaçant l'axe ox par son prolongement, on a :

$$\xi = -\xi', \quad \eta = \eta', \quad \zeta = \zeta',$$

et par suite :

$$N_1' = N_1, \quad N_2' = N_2, \quad N_3' = N_3, \quad T_1' = T_1, \quad T_2' = -T_2, \quad T_3' = -T_3.$$

C. Supposons enfin que les deux systèmes d'axes aient ox en commun et qu'on passe du système initial au nouveau par une rotation de l'angle φ autour de ox . On a :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos \varphi, & \alpha_2 &= -\sin \varphi, & \alpha_3 &= 0 \\ \beta_1 &= \sin \varphi, & \beta_2 &= \cos \varphi, & \beta_3 &= 0 \\ \gamma_1 &= 0, & \gamma_2 &= 0, & \gamma_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$N_1' = N_1 \cos^2 \varphi + N_2 \sin^2 \varphi + 2 T_3 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$N_2' = N_1 \sin^2 \varphi + N_2 \cos^2 \varphi - 2 T_3 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$N_3' = N_3$$

$$T_1' = T_1 \cos \varphi - T_2 \sin \varphi$$

$$T_2' = T_1 \sin \varphi + T_2 \cos \varphi$$

$$T_3' = (N_2 - N_1) \sin \varphi \cos \varphi + T_3 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

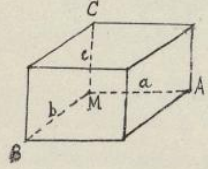
$\varphi = 180^\circ$	$N'_1 = N_1$	$N'_2 = N_2$	$N'_3 = N_3$	$T'_1 = -T_1$	$T'_2 = -T_2$	$T'_3 = T_3$
$\varphi = 90^\circ$	$N'_1 = N_2$	$N'_2 = N_1$	$N'_3 = N_3$	$T'_1 = -T_2$	$T'_2 = T_1$	$T'_3 = -T_3$
$\varphi = 45^\circ$	$N'_1 = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) + T_3$	$N'_2 = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) - T_3$	$N'_3 = N_3$	$T'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 - T_2)$	$T'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 + T_2)$	$T'_3 = \frac{1}{2}(N_2 - N_1)$
$\varphi = \varepsilon$ (infinitésimal)	$N'_1 = N_1 + 2\varepsilon T_3$	$N'_2 = N_2 - 2\varepsilon T_3$	$N'_3 = N_3$	$T'_1 = T_1 - \varepsilon T_2$	$T'_2 = T_2 + \varepsilon T_1$	$T'_3 = T_3 - \varepsilon(N_2 - N_1)$

Ces formules nous seront bientôt très utiles.

5. Relations entre les tensions et les forces extérieures.

Les résultats précédents sont indépendants des forces extérieures; pour trouver les liaisons entre ces forces extérieures et les tensions, il faudrait reprendre les conditions d'équilibre du tétraèdre, et évaluer à zéro les termes du troisième ordre dans les équations de projection. Ce calcul, encore que très abordable, conduit à des résultats qu'on établit plus aisément de la manière suivante.

Considérons un parallélépipède rectangle dont trois arêtes très petites $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$ sont construites à partir d'un point $M(x, y, z)$ du corps parallèlement aux axes coordonnés et de même sens, et écrivons que la somme des projections des forces qui agissent sur lui est nulle pour chacun des axes.



Soit $\omega = abc$ son volume; ρ sa densité; désignons par $\rho\omega X_0$, $\rho\omega Y_0$, $\rho\omega Z_0$ les composantes de la force totale extérieure qui sollicite la masse de l'élément ω , en y comprenant, si le système est en mouvement, les forces d'inertie.

La face MBC et son opposée se composent d'un grand nombre de petites parties égales chacune à chacune, parallèlement orientées, dont les centres de gravité ont pour abscisses x et $x+a$, leurs ordonnées et cotes étant les mêmes et différant extrêmement peu de y et z . Les composantes de la tension unitaire appliquée à la seconde de ces parties dépasse celle de la tension unitaire, changée de signe qui est exercée sur le parallélépipède, à travers la première partie, des dérivées de celles-ci par rapport à x , multipliées par a ; or, si les deux parties de surface dont il s'agit se déplacent de manière que la parallèle à MM' qui relie leurs centres de gravité vienne se confondre avec MM' , ces dérivées ne changeront qu'infinitement peu par rapport à elles-mêmes, à cause de la continuité, et elles deviendront respectivement $\frac{\partial N_1}{\partial x}$, $\frac{\partial T_3}{\partial x}$, $\frac{\partial T_2}{\partial x}$. L'aire de la face MBC valant bc , les sommes des composantes des tensions élémentaires exercées du dehors à travers les deux faces normales à ox seront: $\frac{\partial N_1}{\partial x} abc$, $\frac{\partial T_3}{\partial x} abc$, $\frac{\partial T_2}{\partial x} abc$. On trouverait de même pour les deux autres couples de faces $\frac{\partial T_3}{\partial y} \omega$, $\frac{\partial N_2}{\partial y} \omega$, $\frac{\partial T_1}{\partial y} \omega$, et $\frac{\partial T_2}{\partial z} \omega$, $\frac{\partial T_1}{\partial z} \omega$, $\frac{\partial N_3}{\partial z} \omega$. Les trois sommes:

$$\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}\right) \omega, \left(\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z}\right) \omega, \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z}\right) \omega$$

sont donc les composantes totales, suivant les axes, des actions exercées sur la matière que contient le parallélépipède, à l'époque considérée, par celle qui l'entoure.

Par suppression du facteur ω , on a dès lors les trois équations suivantes que nous voulons établir:

$$(3) \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \rho X_0 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + \rho Y_0 = 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + \rho Z_0 = 0 \end{cases}$$

B. Étude des petites déformations d'un solide. -

1. Dilatations et glissements Occupons-nous maintenant des déformations d'un corps solide. Concevons ce corps décomposé en parallélépipèdes rectangles infiniment petits, dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées; on connaîtra complètement la déformation du corps si l'on détermine celle de chaque parallélépipède, or il est évident que la recherche de la déformation de cet élément de volume se réduit à celle des dilatations de ses côtés et des variations de ses angles.

Cherchons d'abord la dilatation d'une très petite droite L qui joint le point $M(x, y, z)$ au point $M'(x+h, y+k, z+l)$ dans le système à l'état naturel, c'est-à-dire censé soustrait à l'action de toute force extérieure, M' étant dans la sphère d'activité de M , et h, k, l étant assez petites pour qu'on en puisse négliger les carrés et les produits. Soient u, v, w les projections du déplacement du point M qui viendra se placer au point de l'espace $M_1(x+u, y+v, z+w)$; u, v, w sont des fonctions de x, y, z . Le point M' viendra se placer en un point M'_1 de l'espace ayant pour coordonnées ce que deviennent les coordonnées de M , quand x, y, z s'accroissent respectivement de h, k, l , c'est-à-dire

$$x+h+u + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{\partial u}{\partial z} l,$$

Nous supposons que u, v, w et leurs dérivées partielles sont assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits deux à deux.

Le segment $MM'=L$ est devenu $M_1M'_1 = L + \delta L$, et comme :

$$L^2 = h^2 + k^2 + l^2,$$

on aura :

$$L \delta L = h \delta h + k \delta k + l \delta l,$$

$\delta h, \delta k, \delta l$ étant les variations des différences h, k, l des coordonnées des deux points M et M' par suite de la déformation, c'est-à-dire que

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} \delta h = \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{\partial u}{\partial z} l, \\ \delta k = \frac{\partial v}{\partial x} h + \frac{\partial v}{\partial y} k + \frac{\partial v}{\partial z} l, \\ \delta l = \frac{\partial w}{\partial x} h + \frac{\partial w}{\partial y} k + \frac{\partial w}{\partial z} l. \end{array} \right.$$

On a donc :

$$(5) \quad L \delta L = \frac{\partial u}{\partial x} h^2 + \frac{\partial v}{\partial y} k^2 + \frac{\partial w}{\partial z} l^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) h k + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) l h + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) h k.$$

Prenons maintenant pour ligne L successivement les côtés dx, dy, dz d'un parallélépipède élémentaire. - Pour le premier, par exemple, on a $h=L=dx$, $k=0, l=0$, et la dilatation unitaire $\frac{\delta dx}{dx}$ est égale à $\frac{\partial u}{\partial x}$. Ainsi les quantités :

$$\partial_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \partial_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \partial_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

sont les dilatations linéaires suivant les axes coordonnés, au point M .

Cherchons ensuite la déformation des angles du parallélépipède. Ces angles

qui étaient droits, prennent, après la déformation des angles que je désigne par $\frac{\pi}{2} - g_x, \frac{\pi}{2} - g_y, \frac{\pi}{2} - g_z$. En faisant $h=0, l=0$ dans les formules (4), on obtient pour les accroissements des coordonnées de l'extrémité de l'arête $dx: \frac{\partial u}{\partial x} dx, \frac{\partial v}{\partial x} dx, \frac{\partial w}{\partial x} dx$; ainsi les projections de l'arête dx sur les axes fixes deviennent: $(1 + \frac{\partial u}{\partial x}) dx, \frac{\partial v}{\partial x} dx, \frac{\partial w}{\partial x} dx$, et les cosinus directeurs de cette arête sont $1 + \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$. De même les cosinus directeurs de l'arête dy après son déplacement sont: $\frac{\partial u}{\partial y}, 1 + \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}$. On en conclut pour le cosinus du troisième angle de parallélépipède formé par les deux directions précédentes:

$$\cos(\frac{\pi}{2} - g_z) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

ou simplement, puisque g_z est très petit, la troisième des trois formules semblables:

$$(7) \quad g_x = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad g_y = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad g_z = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ces sont les décroissements des angles du parallélépipède, quantités dites glissements ou distorsions au point M par rapport aux axes coordonnés.

Déterminons enfin la dilatation cubique au point M, c'est-à-dire l'accroissement unitaire du volume du parallélépipède. Ce volume, valant initialement $dx dy dz$, sera après la déformation

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} dx dy dz, \text{ soit } (1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) dx dy dz,$$

en négligeant dans le développement des quantités très petites d'un ordre supérieur au premier. La dilatation cubique est donc:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \partial_x + \partial_y + \partial_z.$$

Ainsi, au point de vue de la déformation élémentaire, les quantités u, v, w et leurs neuf dérivées premières n'interviennent que dans six éléments. — Mais au point de vue du déplacement élémentaire (translation et rotation), elles interviendraient par six autres éléments. Nous ne faisons que signaler ce point qui ne nous sera pas d'utilité.

2. Loi des déformations autour d'un point. — La relation (5) peut s'écrire:

$$\frac{\delta L}{L} = \partial_x \left(\frac{h}{L}\right)^2 + \partial_y \left(\frac{h}{L}\right)^2 + \partial_z \left(\frac{h}{L}\right)^2 + g_x \frac{h}{L} \cdot \frac{l}{L} + g_y \frac{l}{L} \cdot \frac{h}{L} + g_z \frac{h}{L} \cdot \frac{l}{L},$$

et s'interprète ainsi géométriquement. — $\frac{h}{L}, \frac{h}{L}, \frac{l}{L}$ sont les cosinus directeurs de la droite MM' qui a subi la dilatation unitaire $\frac{\delta L}{L}$. Si donc nous portons sur la direction MM' un segment MD égal à la racine carrée de la valeur absolue de la dilatation correspondante $\frac{\delta L}{L}$, on a, en désignant par ξ, η, ζ les coordonnées du point D par rapport à M regardé comme origine:

$$(9) \quad \partial_x \xi^2 + \partial_y \eta^2 + \partial_z \zeta^2 + g_x \eta \zeta + g_y \xi \zeta + g_z \xi \eta = \pm 1,$$

de sorte que le lieu du point D est formé d'un quadrique, dite quadrique des dilatations.

Imaginons qu'on ait pris pour axes coordonnés les axes principaux de la qua-

trique des dilatations. Les termes rectangles doivent disparaître de son équation⁶⁵, et alors $g_x = g_y = g_z = 0$. Ainsi en tout point du système soumis à une déformation, il existe trois directions rectangulaires telles que les angles de ces directions, prises deux à deux, restent droits après la déformation. Les dilatations, dans ces directions, sont dites principales.

Examinons, avec ce choix d'axes, ce que devient, après la déformation, l'ensemble de points physiques qui initialement sont sur une petite sphère de rayon L entourant le point M . Les projections du segment M, M' , sont :

$$\Xi = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{\partial u}{\partial z} l$$

Par suite, au degré d'approximation admis, on a :

$$\frac{\Xi}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} = h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{\partial u}{\partial z} l$$

La somme des carrés est, en observant que, pour les axes choisis, $g_x = g_y = g_z = 0$:

$$\frac{\Xi^2}{(1 + \frac{\partial u}{\partial x})^2} + \frac{H^2}{(1 + \frac{\partial u}{\partial y})^2} + \frac{Z^2}{(1 + \frac{\partial u}{\partial z})^2} = h^2 + k^2 + l^2 = L^2.$$

Ainsi, les points initialement situés sur la sphère de centre M et de rayon L viennent sur un ellipsoïde de centre M' , ayant pour directions d'axes les directions des dilatations principales et pour grandeurs d'axes les produits du rayon de la sphère par les dilatations principales augmentées de l'unité. Cet ellipsoïde est dit ellipsoïde de déformation au point M .

3. Formules de transformation des déformations élémentaires. — Supposons que l'on change la direction des axes coordonnés; l'équation de la quadrique des dilatations rapportée à des parallèles aux nouveaux axes passant par M , s'obtiendra en faisant dans l'équation (9) :

$$\xi = \alpha_1 \xi' + \alpha_2 \eta' + \alpha_3 \zeta'$$

Or les coefficients de cette nouvelle équation ne seront autres que les dilatations $\partial_{x'}, \partial_{y'}, \partial_{z'}$, et les glissements $g_{x'}, g_{y'}, g_{z'}$, au même point M par rapport aux nouveaux axes. On aura donc

$$\partial_{x'} = \partial_x \alpha_1^2 + \partial_y \beta_1^2 + \partial_z \gamma_1^2 + \gamma_x \beta_1 \gamma_1 + \gamma_y \beta_1 \alpha_1 + \gamma_z \alpha_1 \beta_1$$

$$g_{z'} = 2 \partial_x \alpha_2 \alpha_3 + 2 \partial_y \beta_2 \beta_3 + 2 \partial_z \gamma_2 \gamma_3 + g_x (\beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2) + g_y (\gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3) + g_z (\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3)$$

Cas particuliers. Considérons les mêmes cas particuliers que plus haut... Les résultats, immédiatement obtenus sont les suivants :

A. $\partial_{x'} = \partial_x, \partial_{y'} = \partial_y, \partial_{z'} = \partial_z, g_{x'} = g_x, g_{y'} = g_y, g_{z'} = g_z$

B. $\partial_{x'} = \partial_x, \partial_{y'} = \partial_y, \partial_{z'} = \partial_z, g_{x'} = g_x, g_{y'} = -g_y, g_{z'} = -g_z$

C. $\varphi = 180^\circ \left| \begin{array}{l} \partial_{x'} = \partial_x \\ \partial_{y'} = \partial_y \\ \partial_{z'} = \partial_z \end{array} \right| \begin{array}{l} g_{x'} = -g_x \\ g_{y'} = -g_y \\ g_{z'} = g_z \end{array}$

$\varphi = 90^\circ \left| \begin{array}{l} \partial_{x'} = \partial_y \\ \partial_{y'} = \partial_x \\ \partial_{z'} = \partial_z \end{array} \right| \begin{array}{l} g_{x'} = -g_y \\ g_{y'} = g_x \\ g_{z'} = -g_z \end{array}$

$$\varphi = 45^\circ \quad \left| \begin{array}{l} \partial_{x'} = \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_y + g_z) \\ \partial_{y'} = \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_y - g_z) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \partial_{z'} = \partial_z \\ g_{z'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_x - g_y) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} g_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_x + g_y) \\ g_{y'} = g_y + \varepsilon g_z \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} g_{z'} = \partial_y - \partial_x \\ g_{z'} = g_z - 2\varepsilon(\partial_x - \partial_y) \end{array} \right. \quad 66.$$

Ces formules serviront conjointement avec les formules analogues relatives aux tensions. Notons en terminant qu'une rotation des axes d'un angle φ quelconque autour de OZ conduit à :

$$g_{z'} = (\partial_y - \partial_x) \sin 2\varphi + g_z \cos 2\varphi.$$

C. Relations entre les tensions et les déformations.

1. Forme générale des composantes des tensions. - Considérons un corps à l'état naturel (soustrait à l'action de toute force extérieure, en sorte que la résultante de toutes les forces qui agissent sur chaque point est nulle); il n'existe de tension en aucun point. Si, à partir de cet état, on déforme le système par l'application de forces extérieures, les tensions cessent d'être nulles par suite de la variation des forces intérieures. Comme les actions moléculaires cessent d'être appréciables à une distance très faible, la valeur que la tension, sur un plan quelconque, en un point quelconque M , acquiert après le déplacement de ce point, dépend uniquement de la déformation subie par la portion du corps comprise dans un volume très petit autour du point que l'on considère. Or nous avons vu que la déformation de cet élément est complètement déterminée par les valeurs que présentent au point M , par suite de son déplacement, les dilatations et les glissements. Donc les six fonctions (N, T) sont des fonctions des six déformations (∂, g) .

Supposons que ces fonctions (N, T) puissent être représentées par un développement de Mac-Laurin; comme nous négligeons les carrés et produits des déformations, et comme les tensions sont nulles à l'état naturel, nous sommes conduits à poser:

$$\left. \begin{array}{l} N_1 = a_1 \partial_x + b_1 \partial_y + c_1 \partial_z + d_1 g_x + e_1 g_y + f_1 g_z, \\ N_2 = a_2 \partial_x + b_2 \partial_y + c_2 \partial_z + d_2 g_x + e_2 g_y + f_2 g_z, \\ N_3 = a_3 \partial_x + b_3 \partial_y + c_3 \partial_z + d_3 g_x + e_3 g_y + f_3 g_z, \\ T_1 = a_4 \partial_x + b_4 \partial_y + c_4 \partial_z + d_4 g_x + e_4 g_y + f_4 g_z, \\ T_2 = a_5 \partial_x + b_5 \partial_y + c_5 \partial_z + d_5 g_x + e_5 g_y + f_5 g_z, \\ T_3 = a_6 \partial_x + b_6 \partial_y + c_6 \partial_z + d_6 g_x + e_6 g_y + f_6 g_z. \end{array} \right\} (U)$$

Les trente-six coefficients de ces fonctions dépendent de la constitution du système, autour du point M , avant la déformation. Ils peuvent être, si cette constitution est variable d'un point à un autre, des fonctions des coordonnées (x, y, z) de ce point. Ils se réduisent à des constantes si, comme nous le supposerons dans ce qui suit, le corps est homogène.

2. Réduction du nombre des coefficients qui entrent dans les composantes des tensions, dans le cas où il existe une direction d'isotropie. - Les corps que nous avons à considérer (bois ou métaux laminés) présentent toujours une direction

d'isotropie; à savoir le sens des fibres du bois ou la direction du laminage: ⁶⁷ autour d'une parallèle quelconque à cette direction, les molécules voisines de cette droite sont disposées symétriquement autour d'elle, et par suite le corps présente exactement les mêmes propriétés élastiques pour tous éléments plans passant par cette droite, en un point.

Supposons que l'axe oz ait été pris parallèle à cette direction d'isotropie. Nous allons montrer que le nombre des coefficients constants a, b, \dots, f_6 se réduit à 6.

Si l'on considère un système quelconque d'axes $ox'y'z'$ ayant en commun avec le premier système l'axe oz , les expressions des tensions relatives aux nouveaux axes (N', T') en fonction des dilatations et glissements relatifs à ces mêmes axes (d', g'), auront les mêmes coefficients constants que les expressions (N, T).

En premier lieu, supposons que ox' coïncide avec ox et oy' avec oy . Nous avons vu (A) que :

$$\begin{array}{cccccc} N'_1 = N_1 & N'_2 = N_2 & N'_3 = N_3 & T'_1 = T_1 & T'_2 = T_2 & T'_3 = T_3 \\ d_{x'} = d_x & d_{y'} = d_y & d_{z'} = d_z & g_{x'} = g_x & g_{y'} = g_y & g_{z'} = g_z \end{array}$$

Les formules (U) subsistant avec les lettres accentuées, les coefficients restent les mêmes, donc :

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_2 = b_1 & b_2 = a_1 & c_3 = c_1 & d_2 = e_1 & e_2 = d_1 & f_2 = f_1 \\ a_5 = b_4 & b_5 = a_4 & c_5 = c_4 & d_5 = e_4 & e_5 = d_4 & f_5 = f_4 \end{array} \right\} \text{(dans)}$$

En second lieu, supposons que le nouveau système s'obtienne en faisant tourner l'ancien de 180° . Comme on a ($C, 1^\circ$)

$$\begin{array}{cccccc} N'_1 = N_1 & N'_2 = N_2 & N'_3 = N_3 & T'_1 = -T_1 & T'_2 = -T_2 & T'_3 = -T_3 \\ d_{x'} = d_x & d_{y'} = d_y & d_{z'} = d_z & g_{x'} = -g_x & g_{y'} = -g_y & g_{z'} = g_z \end{array}$$

cela entraîne en outre :

$$\left. \begin{array}{cccccc} d_1 = 0 & e_1 = 0 & d_3 = 0 & e_3 = 0 & a_4 = 0 & b_4 = 0 \\ c_4 = 0 & d_6 = 0 & d_6 = 0 & e_6 = 0 & & \end{array} \right\} \text{(dia)}$$

En troisième lieu, supposons que le nouveau système s'obtienne en faisant tourner l'ancien de 90° . Comme on a ($C, 2^\circ$)

$$\begin{array}{cccccc} N'_1 = N_2 & N'_2 = N_1 & N'_3 = N_3 & T'_1 = -T_2 & T'_2 = T_1 & T'_3 = -T_3 \\ d_{x'} = d_y & d_{y'} = d_x & d_{z'} = d_z & g_{x'} = -g_y & g_{y'} = g_x & g_{z'} = -g_z \end{array}$$

il en résulte :

$$\left. \begin{array}{cccccc} f_1 = 0 & a_3 = b_3 & a_6 = 0 & b_6 = 0 & c_6 = 0 & \\ f_3 = 0 & e_4 = 0 & & & & \end{array} \right\} \text{(sept)}$$

Enfin, supposons que le nouveau système provienne de l'ancien par une rotation infiniment petite ϵ . En usant de même des valeurs ($C, 4^\circ$) des (N', T') et des (d', g'), on est conduit à une seule relation nouvelle :

$$a_1 - b_1 = 2 f_6 \quad \text{(une)}$$

Nous sommes ainsi conduit aux formules réduites :

$$\left. \begin{array}{l} N_1 = (b_1 + 2f_6) d_x + b_1 d_y + c_1 d_z \\ N_2 = b_1 d_x + (b_1 + 2f_6) d_y + c_1 d_z \\ N_3 = a_3 (d_x + d_y) + c_3 d_z \\ T_1 = d_4 g_x \\ T_2 = d_4 g_y \\ T_3 = f_6 g_z \end{array} \right\} \text{(V)}$$

qui ne contiennent plus que six coefficients : $b_1, c_1, a_3, c_3, d_3, f_6$. Il serait aisé⁶⁸ de reconnaître qu'un changement d'axes quelconque (ou conservé) ne fournit plus aucune relation nouvelle.

D'autres considérations ont conduit à pousser plus loin encore la réduction du nombre des constantes qui caractérisent par leur ensemble les propriétés élastiques de la substance considérée. D'une part, la considération du travail des tensions rapporté à l'unité de volume en un point, travail qui doit être la différentielle totale d'une fonction par rapport aux dilatations et aux glissements, a conduit le physicien anglais Green à la condition supplémentaire $a = c$. D'autre part, Barré de Saint Venant, à la suite d'une longue et délicate discussion de résultats d'expériences, a été amené à admettre deux nouvelles relations pour les corps amorphes à axe d'isotropie tels que sont les matériaux de construction ou de machines (voir la Théorie de l'Élasticité des corps solides de Clebsch, traduite par Barré de Saint Venant et Flamant, avec des notes étendues de M^o de Saint Venant; p. 63 à 110); les expressions pratiques de Barré de Saint Venant ne dépendent plus que de trois coefficients numériques E, G, G_1 . Nous n'insisterons pas sur ces réductions, car si deux de ces coefficients E, G peuvent être facilement et exactement mesurés par des expériences, il en va tout autrement de G_1 , en sorte qu'on n'a pu encore tirer de résultats vraiment pratiques des formules de M^o de Saint Venant.

3. Réduction du nombre des coefficients dans le cas d'un corps isotrope.

Il existe de nombreuses substances dites isotropes, qui présentent la même structure moléculaire dans tous les sens autour de chaque point, ou encore pour lesquelles toutes les directions sont directions d'isotropie. - Celles sont la fonte, le cuivre fondu, le verre. De plus, comme l'insuffisante précision des études expérimentales concernant les déformations des matériaux de construction, ne permet pas de faire état usuellement des résultats ci-dessus, on assimile le bois et les métaux laminés à des corps isotropes; cette assimilation n'est légitimée qu'au point de vue purement pratique dont se contentent les ingénieurs: elle n'a conduit à aucune déconvenue dans d'innombrables applications.

Les trois axes coordonnées étant alors directions d'isotropie, on doit avoir:

$$f_6 = d_4 = +G$$

$$b_1 = c_1 = a_3 = A, \quad c_3 = b_1 + 2f_6$$

A et G étant les deux coefficients subsistant. Ainsi, en désignant par θ la dilatation cubique, on a les formules:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= A\theta + 2G \partial_x, & T_1 &= +G g_x, \\ N_2 &= A\theta + 2G \partial_y, & T_2 &= +G g_y, \\ N_3 &= A\theta + 2G \partial_z, & T_3 &= +G g_z, \end{aligned} \right\} (W)$$

sur lesquelles il serait aisé de constater qu'un changement d'axes quelconque ne donne plus de relation nouvelle. - Les formules (W) sont dites formules de Lamé (1856).

D. Equations de l'équilibre intérieur d'élasticité.

1. Equations indéfinies. - Les six fonctions (N, T) doivent vérifier les trois équations⁶⁹ aux dérivées partielles établies au $\text{N}^{\circ} 5$ du § A. Si on les remplace par les expressions (W), il vient, en posant symboliquement $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$:

$$\left. \begin{aligned} (A+G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \Delta u + \rho X_0 &= 0 \\ (A+G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \Delta v + \rho Y_0 &= 0 \\ (A+G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \Delta w + \rho Z_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{E})$$

Ces équations aux dérivées partielles donneront par intégration u, v, w en fonction des coordonnées et du temps. Si X_0, Y_0, Z_0 sont des fonctions des coordonnées, on les estimera, vu la petitesse des déplacements, comme si le corps n'avait pas subi de déformation.

2. Conditions limites. - Parmi toutes les solutions de ce système, il faut choisir celles qui conviennent à chaque problème spécial en exprimant qu'à la surface qui limite le corps l'équilibre dynamique a lieu. Soient P, Q, R les composantes de la force extérieure appliquée en un point de la surface libre, force rapportée à l'unité de surface ; si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface en ce point, on devra avoir :

$$\left. \begin{aligned} P &= N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma \\ Q &= T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma \\ R &= T_2 \alpha + T_1 \beta + T_3 \gamma \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{L})$$

Dans ces équations, $P, Q, R, \alpha, \beta, \gamma$ sont des fonctions de x, y, z , à la surface S du corps.

3. Equilibre d'élasticité. - Unicité de la solution. - On dit qu'il y a équilibre d'élasticité lorsque le corps déformé, ne supportant aucune force appliquée à ses éléments de masse et soumis uniquement à des forces réparties sur la surface, est en équilibre. - Par définition, dans ce cas $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$, et on a :

$$\left(1 + \frac{A}{G}\right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \Delta u = 0,$$

On peut démontrer qu'il y a un système et un seul de fonctions u, v, w de x, y, z satisfaisant à ces équations et aux conditions limites. - Dès lors, lorsqu'on aura pu obtenir un tel système, peu importe comment, le problème de l'étude de la déformation sera achevé.

4. Examen d'un cas particulier. - Est-il possible que u, v, w soient les dérivées partielles d'une fonction ϕ des coordonnées ? On a alors :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \theta = \Delta \phi, \quad \Delta u = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \dots$$

D'où :

$$\left(2 + \frac{A}{G}\right) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \dots, \dots$$

Ainsi la dilatation cubique θ doit être constante. C'est une propriété essentielle pour l'étude des enveloppes épaisses cylindriques et sphériques.

5. Superposition des petites déformations. - Les équations d'équilibre (\mathcal{E}) et les conditions limites (\mathcal{L}) sont linéaires par rapport à u, v, w et à leurs dérivées. Par conséquent, on obtient la déformation infiniment petite produite à partir de l'état

naturel par plusieurs systèmes de forces extérieures agissant à la fois, en ajoutant^{70.} géométriquement les déformations que produirait chacun des systèmes séparément à partir du même état naturel.

Si (u_1, v_1, w_1) correspondent aux forces (X_1, Y_1, Z_1) et aux pressions extérieures (P_1, Q_1, R_1) , et si (u_2, v_2, w_2) correspondent aux forces (X_2, Y_2, Z_2) et aux pressions extérieures (P_2, Q_2, R_2) , $(u_1+u_2, v_1+v_2, w_1+w_2)$ correspondent aux forces $(X_1+X_2, Y_1+Y_2, Z_1+Z_2)$ et aux pressions extérieures $(P_1+P_2, Q_1+Q_2, R_1+R_2)$.

E. Travail de déformation - Potentiel d'élasticité.

Considérons l'instant où un corps solide homogène passe d'une déformation à une déformation infiniment voisine, en sorte que les déplacements u, v, w de chaque point (x, y, z) du corps subissent des variations $\delta u, \delta v, \delta w$. Multiplions les trois relations (3) du §A respectivement par $\delta u, \delta v, \delta w$, $d\omega$ étant un élément de volume du corps et intégrons dans toute l'étendue du corps. $\int (X_0 \delta u + Y_0 \delta v + Z_0 \delta w) d\omega$ est le travail des forces extérieures et des forces d'inertie.

$$\mathcal{E} = \int \left\{ \left[\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial T_3}{\partial z} \right] \delta u + \left[\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_3}{\partial z} \right] \delta v + \left[\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \right] \delta w \right\} d\omega.$$

égal au signe près au travail précédent, est un travail qui provient des forces élastiques. Nous allons transformer cette expression par l'application d'une formule connue de Lagrange⁽¹⁾. On a :

$$\int \frac{\partial N_1}{\partial x} \delta u d\omega = \int N_1 \alpha \cdot \delta u \cdot d\sigma - \int N_1 \frac{\partial \delta u}{\partial x} d\omega,$$

$d\sigma$ étant un élément de surface du corps, où la normale fait avec ox un angle de cosinus α , et $N_1 \delta u$ étant pris pour un point de cet élément.

Faisons la même réduction pour tous les termes de \mathcal{E} , en mettant en évidence le même élément superficiel. Les coefficients de $\delta u d\sigma, \delta v d\sigma, \delta w d\sigma$ ne seront autres que les composantes

(1) Note sur une formule d'intégration due à Lagrange. - Soit l'intégrale $I = \int \frac{\partial U}{\partial x} d\omega$ étendue à un volume déterminé, U étant une fonction continue de x, y, z . Considérons au point $(x=0, y, z)$ un élément superficiel $d\omega$, base d'un prisme élémentaire parallèle à ox . Soient, à partir du plan yz et en se dirigeant vers ox , a_1, a_2, \dots les intersections successives d'une arête du prisme élémentaire avec la surface du volume; α_i le cosinus de l'angle que forme avec ox la normale extérieure $a_i N_i$ à cette surface au point a_i ; $d\sigma_i$ l'élément superficiel correspondant; U_i la valeur de U au point a_i ; en prenant $d\omega = d\omega \cdot dx$ et en intégrant par rapport à x , on a :

$$I = \int [-U_1 + U_2 - U_3 + \dots] d\omega;$$

ou $d\omega = -d\sigma_1 \cdot \alpha_1 + d\sigma_2 \cdot \alpha_2 - d\sigma_3 \cdot \alpha_3 + \dots$, et par suite :

$$I = \int [U_1 \alpha_1 d\sigma_1 + U_2 \alpha_2 d\sigma_2 + \dots] = \int U \alpha d\sigma,$$

$d\sigma$ étant un élément quelconque de la surface et α le cosinus de l'angle de sa normale extérieure avec ox .

Soit maintenant, V désignant une fonction de x, y, z , l'intégrale $J = \int V \frac{\partial U}{\partial x} d\omega$. Comme $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial(UV)}{\partial x} - U \frac{\partial V}{\partial x}$, nous aurons par application de la formule précédente :

$$J = \int \frac{\partial(UV)}{\partial x} d\omega - \int V \frac{\partial U}{\partial x} d\omega = \int UV \alpha d\sigma - \int V \frac{\partial U}{\partial x} d\omega,$$

le produit UV se rapportant à la surface dans la première intégrale (Mécanique Analytique I, VII, 29 et 30).

suivant les axes de la pression exercée sur l'élément $d\sigma$, soient F_x, F_y, F_z .

D'autre part $\frac{\partial \delta u}{\partial x} = \delta \frac{\partial u}{\partial x} = \delta \cdot \partial_x$, δ marquant une variation due à la déformation infiniment petite considérée. On est ainsi conduit à l'expression:

$$T = \int (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) d\sigma - \int \{ N_1 \delta \partial_x + N_2 \delta \partial_y + N_3 \delta \partial_z + T_1 \delta g_x + T_2 \delta g_y + T_3 \delta g_z \} d\omega.$$

Le premier terme représente le travail des forces exercées à la surface, et le second le travail intérieur des forces élastiques.

Remplaçons dans ce dernier travail les (N, T) par les valeurs de Lamé (W) ; il vient:

$$- \int \{ A\theta (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) + 2G [\partial_x \partial_x + \partial_y \partial_y + \partial_z \partial_z] + G [g_x \delta g_x + g_y \delta g_y + g_z \delta g_z] \} d\omega.$$

En intégrant depuis des valeurs nulles des déformations jusqu'aux valeurs qu'elles obtiennent à l'instant considéré; on obtient pour le travail produit par l'entière déformation:

$$- G \int \left[\frac{A\theta^2}{2G} + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{2} g_x^2 + \frac{1}{2} g_y^2 + \frac{1}{2} g_z^2 \right] d\omega.$$

La fonction, homogène et du second degré, des dilatations et des glissements

$$\pi = \frac{1}{2} A\theta^2 + G \left\{ \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{2} g_x^2 + \frac{1}{2} g_y^2 + \frac{1}{2} g_z^2 \right\} \quad (\alpha)$$

ainsi mise en évidence est dite potentiel d'élasticité au point (x, y, z) . On a:

$$N = \frac{\partial \pi}{\partial \partial_x}, \quad T_1 = \frac{\partial \pi}{\partial g_x}, \dots,$$

et le travail intérieur de déformation sera $-\int \pi d\omega$, l'intégration étant étendue à tout le volume du corps.

La fonction π s'exprime aisément en fonction des tensions au point (x, y, z) ; car

$$\partial_x = \frac{N_1 - A\theta}{2G}, \quad g_x = \frac{T_1}{G}, \dots, \quad \theta = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3A + 2G};$$

et par suite:

$$\pi = \frac{A+G}{2G(3A+2G)} (N_1 + N_2 + N_3)^2 - \frac{1}{2G} (N_1 N_2 + N_2 N_3 + N_3 N_1 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2) \quad (\beta)$$

Remarque. - Les formules de la théorie de l'élasticité qu'on vient d'établir sont applicables à des déformations très petites tant que ces déformations resteront inférieures à une certaine limite; cette limite, qui varie, d'un corps à un autre est la limite d'élasticité. Si cette limite d'élasticité est supérieure aux quantités observables, on peut appliquer les formules obtenues à l'étude des déformations très petites, mais observables: le corps est dit élastique. Si au contraire elle est inférieure aux quantités observables, il est impossible d'appliquer au corps correspondant, pour des déformations observables, les formules en question: le corps n'est pas élastique. - La division des corps solides naturels en corps élastiques et en corps non élastiques dépend donc uniquement de la grandeur des quantités observables, c'est-à-dire de la perfection des méthodes d'observation. -

Chapitre IV. Extension; compression; cisaillement des 72. pièces prismatiques.

1. Définition des pièces prismatiques. - Dans le langage de la Résistance des matériaux, une pièce prismatique est un solide homogène élastique dont la surface limite est engendrée par un contour fermé dit profil de la pièce, animé d'un mouvement de translation tel que son centre de gravité G se déplace à tout instant normalement au plan du profil. La courbe décrite par G , trajectoire orthogonale des positions successives du plan du profil, est l'axe longitudinal de la pièce; un point quelconque du plan du profil décrit une courbe parallèle à l'axe longitudinal. Toute position du profil générateur est une section transversale.

Les conditions suivantes sont supposées réalisées : 1° Si le profil n'est pas de forme invariable, sa variation sera continue et peu rapide, la variation de ses dimensions restant petite par rapport à l'arc décrit sur l'axe longitudinal qui reste le lieu des centres de gravité de l'aire du profil. 2° L'axe est une courbe continue sans singularités, et il a en tous ses points un rayon de courbure très grand comparativement aux dimensions de la section transversale. - 3° Il n'y a pas pénétration ou soudure de deux sections transversales séparées l'une de l'autre par une distance finie mesurée sur l'axe.

Ors la portion de la pièce prismatique comprise entre deux sections transversales très voisines est assimilable à un prisme droit à bases égales et parallèles.

Un élément superficiel infiniment petit du profil limite dans son mouvement une fibre, si elle entoure l'axe longitudinal, la fibre est dite fibre moyenne. - Cette dénomination, toute géométrique, ne préjuge rien de la texture réelle du corps.

La pièce prismatique est dite droite si l'axe est rectiligne; on l'appelle alors souvent poutre. - Elle se nomme tige si les dimensions de la section transversale sont très petites par rapport à la longueur de la pièce.

2. Extension simple d'une pièce prismatique droite. - Il y a extension quand les forces extérieures qui sollicitent la pièce sont appliquées aux deux bases du prisme; qu'elles sont dirigées vers l'extérieur et parallèlement aux fibres.

L'équilibre des forces extérieures exige que les résultantes des forces qui agissent sur chacune des deux bases soient égales et directement opposées; la valeur commune de ces résultantes est l'effort d'extension.

L'extension est dite simple si l'effort d'extension est uniformément réparti sur chacune des bases.

Soit donc un corps prismatique dont la longueur est verticale. Mettons l'axe oz vertical et dirigé de haut en bas; plaçons l'origine des coordonnées au centre de gravité de la base supérieure. Cette base est encastrée et l'extrémité inférieure est tirée par un poids F .

Posons, en appelant a et c deux constantes:

$$u = -ax, \quad v = -ay, \quad w = cz.$$

La dilatation cubique a la valeur constante $\theta = c - 2a$. Si donc on néglige la pesanteur du prisme, les équations indéfinies d'équilibre d'élasticité sont identiquement vérifiées. De plus les tensions T sont identiquement nulles, tandis que les tensions normales sont:

$$N_1 = N_2 = (c - 2a)A - 2aG, \quad N_3 = (c - 2a)A + 2cG.$$

Si nous déterminons a et c de manière à avoir à la surface (et par suite partout) : $N_1 = N_2 = 0$ et $N_3 = \frac{F}{\Omega}$ (Ω étant l'aire de la base inférieure), les conditions limites seront aussi satisfaites et l'on aura obtenu l'unique solution de la question. On trouve ainsi:

$$c = \frac{A + G}{G(2G + 3A)} \cdot \frac{F}{\Omega}; \quad a = \frac{A}{2G(2G + 3A)} \cdot \frac{F}{\Omega}$$

∂_x et ∂_y étant négatifs et ∂_z positif, il se produit à la fois une contraction uniforme; parallèlement aux bases (contraction latérale) et un allongement parallèlement aux arêtes. On a ensuite, pour la dilatation cubique

$$\theta = c - 2a = \frac{1}{2G + 3A} \cdot \frac{F}{\Omega}.$$

L'expérience est irréalisable; car pour produire la traction sur les bases, on est obligé de saisir celles-ci dans des mâchoires ou étaux qui leur imposent des contractions différentes de leur valeur théorique. Néanmoins, si le prisme est très allongé, on peut admettre que les effets perturbateurs deviennent insensibles à une certaine distance de chaque base et que le prisme dans sa partie moyenne se comporte comme nous l'avons indiqué.

On appelle coefficient d'élasticité E le rapport de la charge unitaire $\frac{F}{\Omega}$ à l'allongement unitaire ou dilatation longitudinale c qu'elle produit dans la tige:

$$E = \frac{F}{\Omega} \cdot \frac{1}{c} = \frac{G(2G + 3A)}{A + G}.$$

Le rapport $\eta = \frac{a}{c}$, de la contraction latérale à la dilatation longitudinale, dit coefficient de Poisson, est:

$$\eta = \frac{A}{2(A + G)}$$

La connaissance de E et de η équivaudrait à celle de A et de G ; on a:

$$G = \frac{E}{2(1 + \eta)}; \quad A = \frac{E\eta}{(1 + \eta)(1 - 2\eta)}$$

et: $\partial_x = \partial_y = -\eta \partial_z = -a = -\frac{\eta}{E} \cdot \frac{F}{\Omega}$.

Des expériences soignées de Cagniard-Latour ont conduit à admettre pour les corps durs tels que le fer: $\eta = \frac{1}{4}$. Cette valeur de η s'accorde avec certaines vues théoriques de Cauchy, qui regardait ce résultat comme général: En fait, pour les matériaux de construction, on peut admettre $\eta = \frac{1}{4}$ et par suite:

$$G = \frac{2}{5} E, \quad A = \frac{2}{5} E, \quad \partial_x = \partial_y = -\frac{1}{4} \partial_z = -\frac{1}{4E} \cdot \frac{F}{\Omega}.$$

Les constantes qui caractérisent les propriétés élastiques d'une substance isotrope se réduiraient donc au seul coefficient d'élasticité E .

Comme dans cette déformation les glissements sont nuls, ainsi qu'on le reconnaît

de suite il est aisé de calculer le travail intérieur de déformation. On a: 74.

$$\pi = G [2a^2 + c^2] + \frac{A}{2} (2a+c)^2 = 18 (A+G) a^2 = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{E} \frac{F}{\Omega}$$

en sorte que le travail cherché est, désignant le volume du corps, L la longueur de la tige:

$$-\int \pi d\omega = -\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{E} \frac{F}{\Omega} \delta = -\frac{9}{10} \frac{FL}{E}$$

L'allongement total l subi par la barre sera:

$$l = cL = \frac{F}{\Omega} \cdot \frac{L}{E}$$

Cette formule s'écrit :

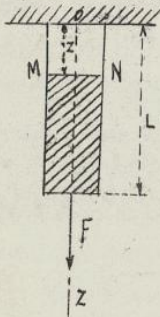
$$\frac{F}{\Omega} = E \cdot \frac{l}{L}$$

et s'appelle la formule de Hooke.

Dans toute la pièce on a $N_z = \frac{F}{\Omega} = E \frac{l}{L} = E \partial_z$.

3. Extension avec mise en compte du poids propre de la pièce.

Supposons qu'en même temps que s'exerce l'effort tracteur F , l'intérieur de la pièce soit soumis à des forces (pesanteur, inertie, etc) agissant parallèlement à l'axe oz et dont, aux points de la section Ω , ayant primitivement la cote z , l'intensité par unité de volume soit désignée par μ . Soit $\partial_z = \frac{dw}{dz}$ la dilatation suivant oz dans cette section de cote z , dilatation ici variable avec z . Il est naturel d'admettre que tous les points de chaque section transversale éprouvent des tensions égales, de sens oz .



Considérons le tronçon de la pièce limité par le plan de cote z et exprimons qu'il est en équilibre sous l'action de l'effort F , des forces $\mu \Omega dz$ dont la résultante est $\int \mu \Omega dz$, et de la résultante des tensions sur MN ou $N_z \Omega$. On obtient l'équation

$$N_z \Omega = F + \int \mu \Omega dz$$

D'autre part, si l'on considère une tranche d'épaisseur dz avoisinant MN, son poids ou son inertie est négligeable devant les actions totales uniformément réparties sur ses bases; elle est assimilable

à une pièce non pesante soumise à la tension unitaire $N_z = E \frac{\partial w}{\partial z}$, w étant le déplacement de la section MN; de plus la contraction transversale de cette tranche sera:

$$|\partial| = \frac{1}{4} \partial_z = \frac{E}{4} \frac{\partial w}{\partial z}$$

Dès lors:

$$E \Omega \frac{dw}{dz} = F + \int \mu \Omega dz$$

Si la tige est seulement pesante, on a $\mu = \rho g$, d'où:

$$E \frac{dw}{dz} = \frac{F}{\Omega} + \rho g (L-z);$$

$$Ew = \frac{Fz}{\Omega} + \rho g (Lz - \frac{z^2}{2}),$$

en observant que w est nul pour $z=0$.

L'extension totale de la pièce sera donc (en faisant $z=L$):

$$l = \frac{FL}{\Omega E} + \frac{\rho g L^2}{2E}$$

si P est le poids de la pièce ($P = \rho g L \Omega$), on écrira:

$$l = \frac{L}{\Omega E} (F + \frac{P}{2})$$

On voit que l'extension totale est la même que si, à la force F , était ajoutée une traction égale à la moitié du poids de la tige.

On observera que l'on peut écrire:

$$l-w = \frac{F(L-z)}{E\Omega} + \frac{\rho g(L-z)^2}{2E};$$

d'où une représentation parabolique des allongements en chaque point.

Enfin on notera que le maximum de la tension a lieu dans la tranche initiale $z=0$ et a pour valeur: $\frac{F+P}{\Omega}$.

On calculerait de même l'allongement d'une tige attachée à un arbre tournant de machine, dans une direction perpendiculaire à l'axe de cet arbre et participant à son mouvement de rotation uniforme, comme fait le rais d'une roue, ou le bras d'un volant. Soit ω la vitesse de rotation. La force centrifuge développée dans l'élément de tige de longueur dz , est: $\rho \cdot \Omega dz \cdot \omega^2 z$; ainsi $p = \rho \omega^2 z$. Par suite:

$$E\Omega \frac{dw}{dz} = F + \rho \omega^2 z \int z dz = F + \frac{\rho \omega^2 \Omega}{2} (L^2 - z^2),$$

$$w = \frac{Fz}{E\Omega} + \frac{\rho \omega^2}{2E} (L^2 z - \frac{z^3}{3}).$$

L'allongement total devient:

$$l = \frac{L}{E\Omega} \left(F + \frac{\rho \omega^2 L}{3g} \right);$$

il est le même que si le tiers du poids total de la tige était appliqué à l'extrémité de la tige et soumis à la même rotation ω .

On observera que:

$$l-w = \frac{F(L-z)}{E\Omega} + \frac{\rho \omega^2 (z-L)^2 (z+2L)}{6E},$$

et que le maximum de la tension a lieu dans la tranche $z=0$ et a pour valeur $F + \frac{\rho \omega^2 L}{3g}$.

Enfin, en ce qui concerne la contraction transversale pour la tranche de côté z , elle a pour expression:

$$|\sigma| = \frac{1}{HE} \left\{ \frac{F}{\Omega} + \rho g(L-z) \right\}$$

S'il s'agit par exemple d'une tige à section circulaire de diamètre D , le diamètre de la section de côté z deviendra:

$$D = D \left\{ 1 - \frac{1}{HE} \left[\frac{F}{\Omega} + \rho g(L-z) \right] \right\};$$

C'est une fonction linéaire de z , variant de $D \left\{ 1 - \frac{F}{HE\Omega} \right\}$ à $D \left\{ 1 - \frac{F+P}{HE\Omega} \right\}$: la pièce, d'abord cylindrique se transforme donc en tronc de cône.

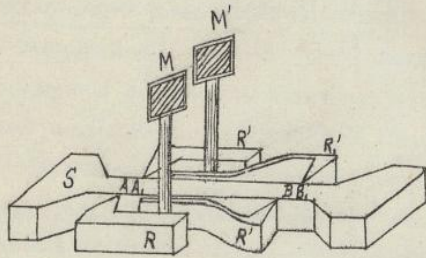
Nous verrons tout à l'heure comment l'expérience contrôle ces résultats.

4. Compression. - Une pièce prismatique est comprimée quand les forces extérieures qui la sollicitent sont appliquées aux bases, dirigées parallèlement aux fibres vers l'intérieur. La compression est simple quand l'effort extérieur est uniformément réparti sur chacune des bases.

La solution donnée pour un prisme étendu s'applique à ce nouveau cas, en changeant a et c de signes. Les mêmes formules donnent l'accourcissement longitudinal et la dilatation transversale.

L'expérience ne contrôle ces conclusions que pour des pièces dont la longueur n'excède pas quatre fois la plus petite dimension transversale.

5. Vérifications expérimentales et limites de validité des résultats précédents. — Soit une éprouvette, tige métallique d'environ 20 à 25 $\frac{m}{m}$ de diamètre et de 300 $\frac{m}{m}$ de longueur; on se propose de déterminer l'allongement qu'éprouve la portion médiane de la tige, comprise entre deux points de repère, distants d'environ 100 à 150 $\frac{m}{m}$, sous un effort de traction exercé par l'intermédiaire d'une presse hydraulique et estimé par un manomètre enregistreur à mercure. — Les diverses machines à essayer les métaux ne diffèrent que par l'agencement de ce double dispositif. Cet allongement très petit se mesure à l'aide de l'appareil à miroirs de Bauschinger (de Munich), donnant une exactitude d'un dix-millième de millimètre. L'éprouvette porte aux points de repère A, A, B, B, quatre traits qui forment des encoches assez fines pour ne pas affaiblir la pièce; dans les traits A, A, pénètrent des couteaux R et R', qui sont poussés contre la barre d'essai par une traverse non figurée qui les embrasse; dans les traits B, B, pénètrent d'autres couteaux R', R', qu'on maintient de même au contact de l'éprouvette. R' et R' sont munis de ressorts qui se prolongent sous les queues des couteaux R et R'.



Enfin entre ces derniers et les ressorts, on place des cylindres à surface légèrement rugueuse. Lorsque la barre subit un effort d'extension, l'espace compris entre les points de repère s'allonge et les ressorts, en s'appuyant sur les cylindres, les font tourner d'un certain angle proportionnel à l'allongement. L'axe des cylindres porte un miroir qui permet de mesurer cet angle à l'aide d'une règle divisée et d'une lunette, selon la méthode si souvent utilisée en physique. — Il est nécessaire d'employer deux cylindres; on voit en effet que ceux-ci tournent en sens inverse; par suite les erreurs d'observation, dues à des imperfections de calage de l'éprouvette dans le banc à tirer, à des déformations de certaines pièces de celui-ci, etc..., sont éliminées en prenant la moyenne des lectures faites aux deux lunettes.

On pourrait naturellement observer d'une façon semblable le raccourcissement d'une tige soumise à un effort de compression.

Une expérience de ce genre faite sur une éprouvette d'acier doux montre que les allongements sont proportionnels aux efforts d'extension et que la loi de Hooke est vérifiée, tant que les efforts ne dépassent pas une certaine grandeur; de plus ils disparaissent complètement lorsque l'effort cesse. — Si par contre l'effort d'extension dépasse une certaine limite, les allongements corrélatifs ne disparaissent plus complètement. Enfin la tige subit une striction, un amincissement à sa partie centrale, et pour une certaine valeur de l'effort de traction, elle se rompt.

Une éprouvette de bois ou d'un autre métal se comporterait d'une manière analogue.

Voici les résultats de ces déterminations expérimentales, où les efforts sont exprimés en kilogrammes par millimètre carré.

Nature des matériaux	Coefficient d'élasticité E	limite de $\frac{F}{L}$ pour validité de la loi de Hooke	Coefficient de Poisson	Charge de rupture	Charge de sécurité.
Fer	16000 ^K à 20000 ^K	12 à 20 ^K	0,252	30 à 35 ^K	4 à 9 ^K
Acier	20000 à 21000	16 à 32	0,268	35 à 60	8 à 12
Fonte (compression)	8000 à 10000	30 à 40	—	60 à 90	4 à 10
Chêne	900 à 1000	2 à 3	—	6 à 8	0,4 à 0,6
Sapin	1100 à 1200	2 à 3	—	8 à 10	0,6 à 0,8
Cuivre	11.600	10 à 12	0,32	23	3 à 4
Zinc	9000	1,5		2	0,75

5. Charge de sécurité - Influence de la répétition et de l'alternance des efforts. - La charge de sécurité ou l'effort longitudinal qu'une tige peut supporter sans danger et avec validité des résultats de la théorie de l'élasticité est toujours limitée à une valeur inférieure à celle de la limite d'élasticité.

On la prend généralement égale à $\frac{1}{5}$ ou au $\frac{1}{6}$ de la charge de rupture. On la représentera par R_0 . - On en a indiqué la valeur usuelle dans le précédent tableau.

On s'est beaucoup préoccupé en Allemagne (Woehler, Spangenberg, Bauschinger) des effets produits sur le fer et l'acier par des efforts répétés toujours dans le même sens (intermittences), et par des efforts alternés de traction et de compression (Alternances). Des machines spéciales imaginées par Woehler lui ont permis de faire subir à des éprouvettes métalliques un nombre considérable soit d'alternances, soit d'intermittences. Il a été reconnu que tel effort qui, agissant une seule fois ou même un petit nombre de fois, aurait laissé le métal indemne, amènerait sa rupture si on le répétait un nombre de fois très considérable. - On désigne sous le nom de Loi de Woehler la conclusion suivante: Le nombre d'intermittences ou d'alternances d'efforts amenant la rupture est d'autant plus petit que l'écart entre les efforts extrêmes est plus grand.

Cette loi concerne surtout la rupture. - Au point de vue de la limite d'élasticité, ou de la charge de sécurité, M. Sejourné tient compte des résultats de Woehler en adoptant la valeur:

$$R'_0 = \frac{R_0}{1 - 0,4\varphi}$$

où R_0 est la résistance de sécurité portée au tableau précédent, et φ le rapport (positif ou négatif) de l'effort minimum à l'effort maximum que la pièce a à supporter, en regardant comme positif un effort de compression et comme négatif un effort de traction.

6. Equation d'équarissage d'une pièce étendue ou comprimée - Tige à section variable et d'égale résistance. -

Soit une tige de longueur L et de section s , soumise à un effort F de traction ou de compression; tant que $\frac{F}{s}$ sera inférieur à R_0 , il n'y aura pas rupture et l'allongement ou accourcissement sera fourni par la formule de Hooke.

Dans les constructions, si on a à supporter un effort F , on prendra pour section⁷⁸ de la pièce : $\Omega = \frac{F}{R_0}$: on sera assuré de n'avoir pas rupture, et même de n'avoir pas de déformation excédant les limites de validité de la théorie de l'élasticité. L'équation $F = \Omega R_0$ est dite équation d'équarissage des pièces étirées ou des pièces courtes comprimées.

Revenons maintenant au 76^e §. Les raisonnements faits laissent supposer que l'équation obtenue peut être applicable à une section variable mais lentement variable. Cherchons à déterminer les variations de grandeur de cette section transversale pour que la tension, rapportée à l'unité de surface, soit partout la même. La tige est alors dite d'égale résistance.

Soit R_0 la tension maximum admissible (charge de sécurité); nous pouvons écrire $R_0 \Omega = F + \int_z^L p \Omega dz$, Ω étant variable. On en déduit par dérivation:

$$R_0 \frac{d\Omega}{dz} = -p \Omega$$

avec la condition limite, pour $z=L$; $R_0 \Omega = F$. Cette équation s'écrit:

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = -\frac{p}{R_0} dz,$$

et donne par intégration:

$$\log \Omega - \log \Omega_L = \frac{1}{R_0} \int_z^L p dz, \text{ ou } \Omega = \frac{F}{R_0} e^{\frac{1}{R_0} \int_z^L p dz}$$

Si l'on suppose la pièce de révolution, si r est le rayon de la section Ω , on a:

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi R_0}} e^{\frac{1}{2R_0} \int_z^L p dz}$$

Pour $p = \text{const.} = pg$, et pour $p = p\omega^2 z$, on a respectivement:

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi R_0}} e^{\frac{pg}{2R_0}(L-z)}, \text{ et } r = \sqrt{\frac{F}{\pi R_0}} e^{\frac{p\omega^2}{4R_0}(L^2-z^2)}$$

La croissance de r quand z varie de L à 0 est plus rapide dans le second cas que dans le premier.

7. Influence des changements de température. Les allongements ou raccourcissements des tiges prismatiques, produits par l'extension ou la compression simple, sont analogues à ceux produits par les changements de température. Soit α le coefficient de dilatation linéaire; une élévation de température de t degrés centigrades donnera à une barre de longueur L une longueur $L(1+\alpha t)$, soit un allongement $l = L\alpha t$. Un effort d'extension $\frac{F}{\Omega} = E\alpha t$ produirait le même allongement.

Inversement, si une telle barre a ses extrémités fixées d'une manière invariable de manière que sa longueur ne puisse varier, une élévation de t : qui l'allongerait de $L\alpha t$ si elle était libre, aura pour conséquence de provoquer de la part des appuis fixes des réactions de compression telles que cet allongement disparaîtra ou que la tige se raccourcira de $L\alpha t$. De là résulte sur les appuis un effort

$$F = E\Omega\alpha t.$$

Pour le fer, $\alpha = 0,000116$; $E = 20000$ par mmq; une variation de 30° , sur une tige d'un centimètre carré de section, produirait une poussée $F = 20000 \times 1000 \times 0,000116 \times 30 = 696$ kg.

On voit par là l'utilité, dans les constructions métalliques, d'assurer la libre déformation des pièces.

8. Résistance vive. - Influence de la mise en charge. - Poiselet a appelé résistance vive d'une barre le travail qu'elle exige pour prendre un allongement déterminé, inférieur à la limite d'élasticité. Cet élément intervient dans l'étude des pièces qui ont à résister à des chocs dont l'intensité se mesure par la demi-force vive du corps qui les heurte.

Ce travail a pour mesure : $\int \sigma d\omega$, ou π , si l'on néglige toutes les tensions devant N_3 , se réduit à $\frac{N_3^2}{2E}$. Pour un allongement total l , on a : $N_3 = E \frac{l}{L}$; la résistance vive vaudra donc : $\frac{1}{2E} \cdot \frac{E^2 l^2}{L^2} \cdot L\Omega$ ou $\frac{E\Omega l^2}{2L}$. C'est la moitié du travail de l'effort tracteur $F = N_3\Omega$ ou $\frac{E\Omega l}{L}$ par suite du déplacement l de sa base d'application. La limite adoptée pour $\frac{l}{L}$ est $\frac{R_0}{E}$; la limite de la résistance vive sera donc : $\frac{1}{2} \frac{R_0^2}{E} \Omega L$.

Cela posé, considérons un prisme vertical AB fixé par l'extrémité A et portant en B un bouchon; imaginons qu'un manchon embrasant librement la barre, soit élevé à une certaine hauteur au dessus du point B, puis abandonné à lui-même; en tombant, il viendra heurter le bouchon et produira sur le prisme ce qu'on appelle un choc longitudinal de traction.

Soit Q le poids du manchon, v_0 la vitesse qu'il possède au point B, et v celle qui l'anime quand, par suite du choc, l'extrémité de la pièce s'est abaissée de x . Si nous ne tenons pas compte de l'inertie du prisme (M. Boussinesq a traité élégamment le problème en ne négligeant pas l'inertie), le principe des forces vives, appliqué au système de la barre et du poids Q donnera l'égalité suivante:

$$Qx - \frac{E\Omega x^2}{2L} = \frac{Q}{2g} (v^2 - v_0^2).$$

Soit a l'allongement du prisme lorsqu'il aura repris, après une série d'oscillations, sous l'action de la force Q , un état d'équilibre, H la hauteur de chute du manchon:

$$\frac{Q}{\pi} = E \frac{a}{L}, \quad v_0^2 = 2gH.$$

Il vient:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a} \left\{ 2a(x+H) - x^2 \right\},$$

d'où par intégration, x et t s'annulant en même temps:

$$x = a \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{2H}{a}} \cos t \sqrt{\frac{g}{a}} \right\}$$

Le manchon exécuterait une série d'oscillations d'amplitude $\sqrt{a^2 + 2aH}$ autour de la position correspondant à $x = a$. Elles sont amorties en réalité par l'inertie négligée.

L'allongement maximum est $a \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{a}} \right\}$. Pour que cette forme de mise en charge n'exécède pas la limite de sécurité, il faut que

$$\frac{E\Omega}{L} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{a}} \right\} < R_0.$$

Pour $v_0 = 0$ ou $H = 0$, cet allongement se réduit à $\frac{2Ea}{L}$; il est le double de l'allongement final.

Cette condition caractérise la mise en charge du prisme; c'est-à-dire l'application d'un effort d'extension s'exerçant en une seule fois, mais sans vitesse initiale.

Toute section supportée à un moment de cette mise en charge, une tension par unité de surface, ayant deux fois la valeur qui convient à l'équilibre final. On exprime parfois le résultat précédent en disant que l'allongement dynamique est double de l'allongement statique.

9. Application numérique. - Soit, dans une ferme, un tirant subissant un effort de traction de 2400 K, si c'est un fer rond de diamètre d , on prendra :

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{F}{R_0} = \frac{2400}{6} = 400 \text{ m}^2;$$

d'où :

$$d = 23 \text{ m}$$

L'allongement après la mise en place (qui est graduelle, par serrage de boulons de réunion) aura pour valeur, si la longueur de la ferme est de 8 m :

$$l = \frac{R_0 l}{E} = \frac{6 \times 8,000}{20,000} = 2 \text{ m}$$

La contraction de la section sera :

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{L} \cdot d \text{ ou } \frac{R_0 d}{4E}, \text{ soit } \frac{1}{600} \text{ de m/m environ.}$$

10. Cisaillement ou glissement. - Considérons un tronçon d'une pièce prismatique droite compris entre deux sections transversales AB, A'B'. Si par l'effet de certaines forces extérieures, les sections transversales de cette partie du corps éprouvent des translations inégales dans une même direction normale à celle des fibres, on dit que ces sections glissent les unes par rapport aux autres, et que la pièce subit un cisaillement ou un glissement entre les plans AB et A'B'.

Pour accomplir les translations dont il vient d'être parlé, les points d'une même section transversale décrivent perpendiculairement aux fibres des chemins équipollents, en sorte que ces sections ne se déforment pas et ne sortent pas de leurs propres plans. Quant aux fibres, elles se déforment toutes exactement de la même manière : chacune d'elles proviendrait de la translation de la fibre moyenne déformée.

Soit M un point de la partie cisailée du prisme; M', sa position après la déformation. Pour chercher quelles sont, au point M, les pressions et les déformations, transportons le prisme déformé parallèlement à lui-même, de manière à porter M, en M. Prenons Mx parallèle aux fibres, Mz parallèle à la translation de cisaillement, My achevant le trièdre trirectangle. Supposons la déformation assez petite pour que la théorie de l'élasticité soit applicable. Le déplacement de tout point entre AB et A'B' a lieu suivant Mz. On a donc :

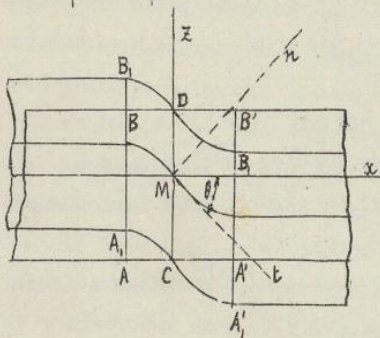
$$u = 0 \quad v = 0 \quad w = F(x),$$

et par suite :

$$\partial_x = \partial_y = \partial_z = 0 \quad g_x = g_z = 0 \quad g_y = F'(x).$$

Soit Mt la tangente à la fibre déformée de M, θ l'inclinaison de Mt sur Mx, angle d'ailleurs extrêmement petit. L'angle z Mx étant devenu $\frac{\pi}{2} + \theta$, on a au point M : $g_y = -\theta$.

Introduisons ces valeurs des déformations dans les expressions générales des tensions intérieures. Il vient :



$$N_1 = N_2 = N_3 = 0, \quad T_1 = T_3 = 0, \quad T_2 = G F'(x).$$

Ainsi, aux différents points d'une section transversale quelconque faite dans la partie cisailée du prisme, il ne se développe que des tensions tangentielles; ces tensions sont égales entre elles et ont la même direction; elles admettent une résultante passant par le centre de gravité de la section.

La quadrique des dilatations au point M est le cylindre hyperbolique:

$$F'(x) \frac{y^2}{a^2} = \pm 1.$$

Ses plans principaux sont les plans bissecteurs des axes Mx , Mz . Le maximum de dilatation autour du point M a donc lieu suivant les bissectrices des axes.

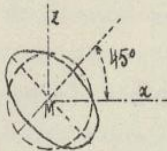
D'ailleurs la dilatation dans une direction de cosinus directeurs α, β, γ est:

$$s = g_{yy} \gamma^2 \alpha.$$

Si la direction est située dans le plan Mxz , inclinée de φ sur Mx , il vient:

$$s = g_{yy} \sin^2 \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} F'(x) \sin 2\varphi.$$

Ainsi autour des différents points d'une même section transversale, il se produit des dilatations identiques, dont le maximum a lieu dans la direction inclinée à 45° sur la direction des fibres. L'ellipsoïde transformé de la sphère autour de M admet Mxz comme plan principal, son axe suivant Oy étant le rayon de la sphère; sa trace sur xMz est disposée comme l'indique la figure.



Soit Δ la dilatation maxima: $\frac{1}{2} F'(x)$. Nous pouvons écrire:

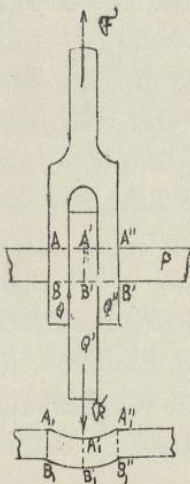
$$T_2 = 2G\Delta.$$

Est-il possible de réaliser par un choix convenable des forces extérieures la déformation qu'on vient d'étudier?

Coupons le prisme par le plan CD , et concevons qu'on enlève la partie à droite de ce plan. Pour ne pas troubler l'équilibre de la partie à gauche, il faudra appliquer à chaque élément de la section la tension qui lui correspond, soit seulement ici T_2 . Dès lors les forces extérieures appliquées à gauche de CD devront avoir une résultante égale et directement opposée à la résultante des forces T_2 qui est située dans

le plan de CD , appliquée au centre de gravité de cette section et vaut $N_2 x$. La résultante des forces extérieures à gauche de CD devra donc être située dans le plan de CD , et cela quel que soit le plan CD dans la région cisailée. Cette condition ne sera pas réalisable exactement, mais si la distance des plans AB et $A'B'$ est faible, on admet par approximation que le cisaillement se produit avec tous les caractères que nous lui avons attribués.

Exemple: Assemblage à fourchette. La pièce cisailée traverse les deux branches Q et Q' de la fourchette et l'organe d'attache Q' ; ceux-ci se touchent par leurs faces latérales, les parois des trous sont dressées de manière à assurer le contact le plus étendu avec la surface du boulon entre AB et $A''B''$; la fourchette et Q' sont soumises à une traction simple normale au boulon. On admet que



x c. a. d. qu'entre ces limites, les sections transversales glissent les unes par rapport aux autres et parallèlement à la force. Le système des deux forces appliquées à $A'B'A'B'$ produira la flexion de ce prisme $A'B'A'B'$ à fibres initialement parallèles. Or, si on pose formellement et par la distance des deux plans $AB'A'B'$ soit $2e$, on voit que le couple des forces F soit $F \cdot 2e$, et que les pressions normales dans la partie du bouton entre AB et la section médiane $A'B$ est cisailée, et qu'il en est de même entre $A'B'$ et $A''B''$.

Cela étant, il est aisé d'établir l'équation des fibres déformées dans la région cisailée, en regardant les efforts F comme uniformément répartis sur les parties correspondantes du bouton. La résultante des forces extérieures à gauche de la section CD d'abscisse x entre les branches de la fourchette est $\frac{F}{2} - \frac{F}{2e}(e-x)$ ou $\frac{Fx}{2e}$. On a donc entre ces branches:

Pour une section C, D , d'abscisse x , à l'intérieur de la fourchette, on a pour résultante $\frac{F(E-x)}{2(E-e)}$. D'où:

$$T_2 x + \frac{Fx}{2e} = 0 \text{ ou } \sigma G w = -\frac{Fx^2}{2e} + c_1$$

$$T_2 x + \frac{F(E-x)}{2(E-e)} = 0 \text{ ou } \sigma G w_1 = -\frac{F(E-x)^2}{4(E-e)} + c_2$$

Si l'on rapporte la déformation à la face supérieure, $w_1 = 0$ pour $x = E$; donc $c_2 = 0$; de plus pour $x = e$, la continuité des fibres exige $w = w_1$, d'où: $-\frac{F(E-e)}{4} = -\frac{F}{4} + c_1$. Ainsi les fibres moyennes déformées sont formées des deux arcs de paraboles suivants, se raccordant dans la face de contact:

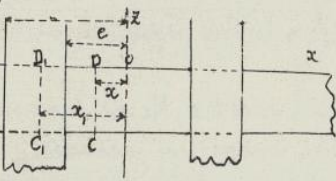
$$\sigma G w = -\frac{F}{4e} \{x^2 - e(2e-E)\}, \quad \sigma G w = -\frac{F(E-x)^2}{4(E-e)}$$

Le maximum d'abaissement a lieu dans la section médiane pour $x = 0$ et a pour mesure $\frac{F(2e-E)}{4G\sigma}$.

Le maximum de la résultante des forces appliquées à gauche d'une section est $\frac{F}{2}$ et a lieu dans la section de contact. Le glissement est par suite dans cette section de contact plus grand que partout ailleurs; pour cette raison on donne spécialement à la section de contact le nom de section cisailée. La résultante des forces extérieures pour cette section se nomme effort tranchant dans la section cisailée. Comme elle est équilibrée par les tensions dans la section, tensions situées dans la section, égales et parallèles entre elles, on dit que l'effort tranchant se répartit uniformément dans la section cisailée.

11. Equation d'équarissage des pièces cisailées. - On donne l'effort tranchant G cisailant un prisme dans les conditions précédemment indiquées; quelle section se fait-il donner à ce prisme pour être assuré de ne pas dépasser les limites de déformation à partir desquelles la théorie de l'élasticité cesse d'être valable?

On admet que la limite d'élasticité est dépassée quand l'écartement des molécules est devenu trop grand; il convient donc que la plus grande dilatation en chaque point n'excède pas une certaine limite; l'expérience montre qu'on est assuré de ne pas excéder cette limite en imposant à la plus grande dilatation d'être inférieure à $\frac{R_0}{E}$, limite adoptée pour les dilatations longitudinales recevables dans le cas de l'extension simple. Or la dilatation maxima dans la section cisailée a lieu dans les directions à 45° sur les fibres, et a pour mesure la moitié du glissement; comme $G = N_2 \sigma$, elle vaut $\frac{G}{2G\sigma}$. On restera donc dans les conditions de validité de la théorie si



ou si

$$\frac{\sigma}{2G\alpha} \leq \frac{R}{E},$$

$$\alpha \geq \frac{E}{2G} \frac{\sigma}{R}.$$

La quantité $R' = \frac{2G}{E} R$ est dite charge limite de sécurité au cisaillement. Comme pour les métaux durs, nous avons vu que $\frac{R'}{E}$ est égal à $\frac{2}{3}$, on a : $R' = 0,8 R$. L'observation des constructions existantes apprend qu'on peut également admettre sans danger cette valeur pour le bois. - Ainsi on doit prendre :

$$\alpha \geq \frac{\sigma}{0,8 R}$$

Pour prendre l'équarrissage minimum, on déterminera α par la relation

$$\sigma = 0,8 R \alpha,$$

dite équation d'équarrissage des pièces cisailées.

Exemple. - Dans l'assemblage à fourchette précédent, supposons que $F = 3000^k$; calculons le diamètre du boulon de réunion. - Comme $\sigma = \frac{F}{2} = 1500^k$; on aura, l'unité étant le millimètre :

$$1500 = 0,8 \times 6^k \times \frac{\pi d^2}{4}; \text{ d'où : } d = 20^m/m.$$

Remarque. On ne possède guère de données expérimentales sur la façon dont se comportent les prismes cisailés tant que leur élasticité n'est pas dépassée, et par suite de données pouvant servir de base ou de contrôle à la théorie. Cela tient à la petitesse des déformations à mesurer. On a surtout étudié les phénomènes accompagnant la rupture au cisaillement (Weyrauch, Duguet, Considère). - Les conclusions de ces recherches expérimentales sont encore bien douteuses. - La part d'hypothèse de la théorie précédente n'a de justification que dans le fait que les applications qui en ont été faites depuis cinquante ans n'ont conduit à aucun mécompte.

Chapitre V. - Flexion transversale des prismes droits.

1. Définitions relatives aux pièces et aux forces appliquées. - Nous ne considérerons que des pièces prismatiques droites présentant un plan de symétrie parallèle aux fibres. - Une telle pièce est soumise à l'action de forces extérieures parallèles au plan de symétrie et réparties uniformément entre toutes les sections faites dans le prisme parallèlement à ce plan. Si ces forces, qui doivent d'ailleurs se faire équilibre, ne sont ni toutes parallèles aux fibres, ni toutes situées dans une même section transversale, la pièce se courbe, et ce phénomène porte le nom de flexion. Le plan de symétrie est dit plan de flexion; il reste plan de symétrie pour la pièce déformée.

On appelle courbe la section faite dans la poutre, à l'état naturel, par un plan perpendiculaire au plan de flexion mené par une fibre quelconque.

Lorsque les forces extérieures sont toutes normales aux fibres de la pièce dans leur état initial, la flexion est dite transversale. - Nous nous proposons d'étudier la flexion transversale en supposant que les limites de l'élasticité ne soient pas dépassées.

Les forces extérieures ou fléchissantes sont supposées uniformément réparties ^{84.} entre les sections du prisme parallèles au plan de flexion; il suffit de se donner leurs résultantes dans le plan de flexion, en leur attribuant des points d'application situés sur la fibre moyenne de la pièce. - Parmi elles, nous comptons les réactions des appuis (appuis simples ou encastrement), introduites de manière à pouvoir regarder la pièce comme entièrement libre. Les forces fléchissantes se distinguent d'ailleurs en forces concentrées ou isolées, et en forces continues ou réparties.

Comme on suppose qu'on reste en deça des limites de l'élasticité, les déformations sont assez faibles pour qu'on puisse négliger les modifications qui peuvent en résulter dans la répartition des forces extérieures. On effectuera donc les calculs dans lesquels ces forces interviennent, comme si la pièce conservait exactement sa forme primitive; les erreurs ainsi commises sont absolument insignifiantes et tout à fait négligeables au point de vue des applications.

Soit donc un prisme droit soumis à une flexion transversale; pour fixer les idées, supposons-le horizontal, le plan de symétrie étant vertical; les forces extérieures sont verticales. Soit X un point quelconque de la fibre moyenne; faisons abstraction de la partie de la pièce à droite de X.

Faisons pour le point X la réduction des forces extérieures appliquées à gauche de la section transversale de X. La résultante E appliquée verticalement en X dans le plan de la section est dit effort tranchant en X; le couple résultant, d'axe M placé suivant la fibre moyenne, est dit couple fléchissant; son moment M est dit moment fléchissant dans la section du point X, ou encore au point X de la fibre moyenne.

L'effort tranchant en X a pour mesure la somme algébrique des forces extérieures appliquées à gauche de la section X; le moment fléchissant vaut la somme algébrique des moments par rapport à X des forces précédentes.

Il serait loisible de prendre dans ces définitions les forces appliquées à droite de la section; comme le système total des forces extérieures est en équilibre, il en résulterait seulement un changement de signe des deux éléments considérés.

Le trièdre de référence sera ainsi choisi: ox est la fibre moyenne à l'état naturel; oy est situé dans le plan de flexion, vers le bas; oz est normal au plan de flexion, en avant de la figure. Les moments sont estimés positivement comme en Mécanique rationnelle. Nous supposons le point o placé à l'extrémité gauche de la fibre moyenne.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ les abscisses des points d'application des forces isolées F_1, F_2, F_3, \dots et d'une façon générale φ l'abscisse du point d'application d'une force isolée quelconque F; $p(\xi)$ la charge élémentaire répartie sur l'élément $d\xi$ d'abscisse ξ . L'effort tranchant et le moment fléchissant pour la section X d'abscisse x auront respectivement pour expressions

$$E = \sum_0^x F + \int_0^x p d\xi$$

$$M = \sum_0^x (\varphi - x) \cdot F + \int_0^x (\xi - x) p d\xi,$$

\sum_0^a indiquant une sommation étendue à toutes les forces isolées à gauche de la section d'abscisse x . 85.

L'effort tranchant E est une fonction discontinue qui varie brusquement de F_i quand x traverse la valeur φ_i .

Le moment fléchissant au contraire varie avec continuité au passage d'une force isolée, l'introduction de F_i étant accompagnée du facteur $(\varphi_i - x)$ qui s'annule à la traversée.

Il est bien évident que si l'on sépare les forces de flexion en plusieurs groupes, le moment fléchissant et l'effort tranchant dans une section quelconque sont respectivement la somme des moments fléchissants et des efforts tranchants dus aux forces de chaque groupe.

L'effort tranchant est lié au moment fléchissant par une relation fondamentale: L'effort tranchant est, au signe près, égal à la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'abscisse x de la section transversale.

Quand x ne coïncide pas avec une des valeurs φ_i , le fait résulte de la règle de différentiation. Quand x tend vers φ_i , on a une dérivée à gauche et une dérivée à droite coïncidant respectivement au signe près, avec l'effort tranchant avant et après la section d'abscisse φ_i .

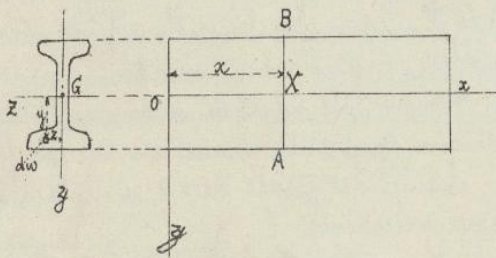
Ainsi, la distribution du moment fléchissant sur la fibre moyenne fait connaître par différentiation l'effort tranchant:

$$E = -\frac{dM}{dx}$$

Si on construit un diagramme des moments fléchissants (x, M) , l'effort tranchant sera, en chaque point de la poutre mesuré par le coefficient angulaire (changé de signe) de la tangente au point correspondant de la courbe limite du diagramme.

2. Tensions intérieures et déformations élastiques correspondantes dans le voisinage d'une section.

Coupons la pièce prismatique par un plan de section transversale AB rencontrant l'axe Ox en X , point d'abscisse x . Supprimons par la pensée la partie de la pièce à droite de AB; pour ne pas modifier l'état



d'équilibre de la partie de gauche, nous devons appliquer aux divers points de la section AB des tensions par unité de surface qui, avec notre chose d'axes, auront pour composantes N_1, T_2, T_3 . Les tensions et les forces extérieures

devant se faire équilibre sur le tronçon de droite, on a les six équations suivantes dites d'équilibre de flexion pour la section AB (équations de projections et équations de moments par rapport aux parallèles aux axes menées par X):

$$\int N_1 d\sigma = 0, \quad \int T_3 d\sigma + E = 0, \quad \int T_2 d\sigma = 0,$$

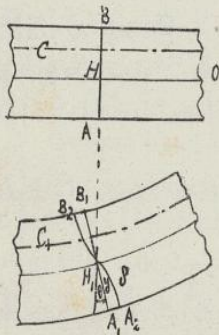
$$\int (yT_2 - zT_3) d\sigma = 0, \quad \int zN_1 d\sigma = 0, \quad \int yN_1 d\sigma + M = 0.$$

La symétrie du prisme et des forces extérieures entraîne une distribution des tensions intérieures symétrique par rapport à ce plan. 86

En deux points symétriques, T_2 et z ont des valeurs égales et de signes contraires, tandis que N, T_3, x, y ont des valeurs identiques. Associons dans les intégrales ci-dessus (qui doivent être prises entre des limites convenables pour comprendre toute l'étendue de la section AB), les éléments par couples correspondant à des points symétriques. On reconnaît que les équations précédentes se réduisent à trois :

$$\int N, d\alpha = 0, \quad E + \int T_3, d\alpha = 0, \quad \int y N, d\alpha = M. \quad (1)$$

Les expériences de Duleau et de Dupin, répétées soigneusement par Duquet ont conduit aux conclusions suivantes: quand on soumet à la flexion transversale un prisme droit, sans dépasser les limites de l'élasticité, les sections transversales semblent rester planes, sans changer de forme, ni de dimensions; mais elles se déplacent relativement les unes aux autres et les fibres rectilignes de la pièce se transforment en courbes continues. - Une section AB subit un déplacement se décomposant



en une translation verticale HH_1 (normale aux fibres et parallèle au plan de flexion) et en une rotation autour d'une normale H_1 au plan de flexion, située dans le plan de la section et dite axe neutre de la section.

L'expérience montre qu'après ce déplacement la section A_1B_1 semble rencontrer orthogonalement les fibres déformées. Ce mode de déformation transforme une couche quelconque C en une surface cylindre C_1 à génératrices normales au plan de flexion. L'ensemble des axes neutres forme d'ailleurs une couche dite couche neutre.

En calculant les dilatations et glissements qui résulteraient de l'analyse de cette déformation, ainsi que les tensions correspondantes, on se trouve conduit à des résultats en contradiction avec les équations (1). - L'analyse précédente n'est donc qu'une approximation insuffisante: la déformation réelle est plus complexe que ne l'avaient eu ces premiers observateurs, un peu prévenus par une hypothèse ancienne dite de Bernoulli, et bien gênés d'ailleurs par la difficulté de mesurer des variations de grandeur imperceptibles. - Actuellement on admet que la déformation est plus complexe. Une section transversale subit, en outre du déplacement précédent: une incurvation cylindrique, la transformant en une surface cylindrique normale au plan de flexion, chacun des points de A, B , se déplaçant sur les génératrices de la surface cylindrique précédente.

L'analyse géométrique de cette déformation est assez complexe et on manque d'observations accompagnées de mesures relatives à l'incurvation des tranches et à leur déformation transversale; aussi ne peut-on partir de ces données pour faire la théorie de la flexion.

Les hypothèses suivantes rendent un compte complet des phénomènes observés et ne donnent lieu à aucune contradiction logique: elles se justifient par leurs résultats.

1^{re} Hypothèse. - Dans toute l'étendue du prisme, les tensions normales sont nulles sur les plans parallèles au plan de flexion et sur les couches. Avec nos notations et notre choix d'axes:

$$N_2 = 0, \quad N_3 = 0.$$

2^e Hypothèse. - La partie principale du déplacement suivant l'axe de la pièce se réduit à ce que serait ce déplacement par le fait de la seule rotation de la trame.

Soit δ la distance de la couche neutre à ox ; y la cote verticale d'un point de la section pour laquelle la rotation est θ , comptée positivement comme en trigonométrie; le rayon de rotation du point est $(y-\delta)$; on admet que

$$u = (y-\delta)\theta$$

La première hypothèse entraîne:

$$N_1 = A(\partial_x + \partial_y + \partial_z) + 2Gd_x, \quad 0 = A(\partial_x + \partial_y + \partial_z) + 2Gd_y, \quad 0 = A(\partial_x + \partial_y + \partial_z) + 2Gd_z;$$

on en déduit:

$$\partial_y = \partial_z = -\nu \partial_x, \quad \text{et} \quad N_1 = E \partial_x,$$

ν étant le coefficient de Poisson et E le coefficient d'élasticité.

La seconde hypothèse entraîne:

$$N_1 = E(y-\delta) \frac{d\theta}{dx},$$

et la première des équations (I) donne alors:

$$E \frac{d\theta}{dx} \int (y-\delta) dx = 0, \quad \text{ou} \quad \int (y-\delta) dx = 0.$$

Or comme le centre de gravité de la section est sur ox , $\int y dx = 0$. On a donc: $\delta \int dx = 0$ ou $\delta = 0$. Ainsi la couche neutre passe par l'axe du prisme. Autrement dit, l'axe neutre de toute section transversale passe par le centre de gravité de cette section.

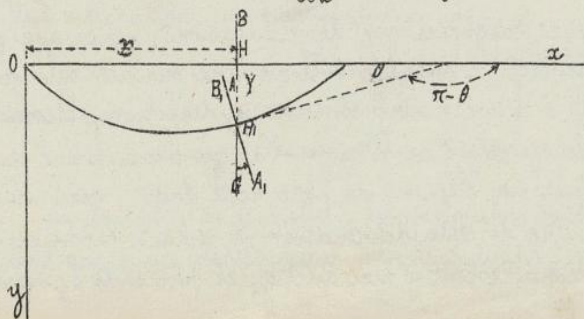
Pour cette raison, la fibre moyenne s'appelle souvent fibre neutre.

L'expression de N_1 se réduit à:

$$N_1 = E y \frac{d\theta}{dx}.$$

Elle peut être mise sous une forme plus intéressante en faisant intervenir la fibre moyenne déformée. Soit Y l'ordonnée du point H , abaissement de H , comme A, B est normale à la fibre moyenne déformée, on reconnaît de suite qu'on a:

$$\frac{dY}{dx} = -\tan \theta.$$



Soit ρ le rayon de courbure de la fibre moyenne déformée au point correspondant à la section considérée; si s est l'abscisse curviligne de cette courbe, on a: $\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$, et comme $dx = ds \cos \theta$, θ étant un très petit angle

aigu, on peut prendre $\frac{d\theta}{dx}$ pour $\frac{1}{\rho}$. D'ailleurs une dérivation donne :

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = -\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dx} = -\frac{1}{\cos\theta} \frac{d\theta}{ds} ;$$

pour la même raison, on pourra remplacer $\frac{1}{\cos\theta}$ par l'unité, et on aura :

$$N_1 = \frac{E\gamma}{\rho} = -E\gamma \frac{d^2Y}{dx^2} . \quad (II)$$

Preprenons alors la troisième des équations (I) et remplaçons $-\gamma N_1$ par $\frac{E\gamma}{\rho}$. Comme $\frac{E\gamma}{\rho}$ est le même pour tous les éléments de la section, on aura :

$$\frac{E}{\rho} \int y^2 d\omega = M .$$

$\int y^2 d\omega$ n'est autre que le moment d'inertie I de la section considérée par rapport à l'axe neutre ; on écrira la relation précédente :

$$\frac{EI}{\rho} = M , \quad (III)$$

et en éliminant ρ entre (II) et (III), on obtiendra :

$$N_1 = \frac{My}{I} \quad (IV)$$

et

$$D_x = \frac{My}{I} . \quad (V)$$

L'équation (III) peut s'écrire :

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} ; \quad (VI)$$

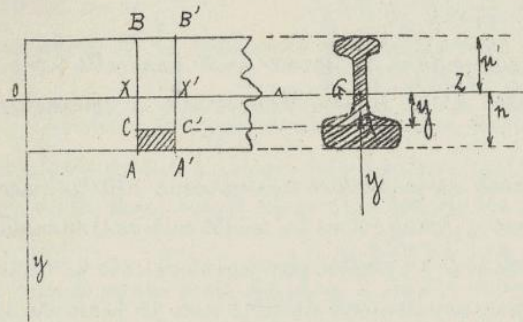
ceci est l'équation différentielle de la fibre moyenne déformée.

L'équation (VI) montre que le signe de M fixe le sens de la convexité ou de la concavité de la fibre moyenne par rapport à oy ; si $M > 0$, la convexité est dirigée vers oy ; si $M < 0$, la concavité est dirigée vers oy . L'équation (V) montre alors que les fibres situées entre le côté convexe extérieur de la pièce et la couche neutre subissent des allongements (dilatations positives) en leurs points de passage dans la section ; au contraire les fibres situées entre la couche neutre et le côté concave éprouvent des accourcissements (dilatations négatives) ; les allongements et accourcissements augmentent proportionnellement à la distance des points pour lesquels on les prend, à la couche neutre, leur maximum est atteint à la convexité et à la concavité extérieures de la pièce. Les fibres de la couche neutre ne subissent ni dilatation, ni contraction. Il ne faut pas entendre par là que la longueur d'un arc élémentaire de la fibre moyenne déformée soit égal à la longueur de la fibre moyenne primitive dont ce arc provient ; ce dernier est la projection orthogonale de l'autre, et c'est ce qui fait que D_x est nul tout le long de la couche neutre.

Nous ne nous sommes préoccupés jusqu'ici que des dilatations ; passons aux glissements. La déformation change une section transversale en une surface cylindrique de direction oz ; une parallèle à l'axe neutre conserve sa direction, et comme d'ailleurs une fibre reste parallèle au plan de flexion, l'angle droit formé en un point par une parallèle à oz et par un élément de fibre reste droit ; par suite $g_y = 0$ et $T_2 = 0$. De plus, d'après la nature de cette déformation, g_x sera le même en tous les points d'une parallèle à oz , ce qui revient à dire que g_x et par suite T_3 ne dépendent

dent pas de z .

Pour achever la détermination de T_3 , nous nous servirons de ce qu'elle coïncide avec la composante suivant ox de la tension sur un élément normale à oy (voir page 60). Nous écrivons l'équation de projection relative à ox satisfaite pour l'équilibre d'un élément de la pièce limité par



deux sections transversales voisines et un plan parallèle à la couche neutre non déformée. Si n est la distance, à la couche neutre, de la fibre qui en est le plus éloigné du côté des y positifs, et λ la largeur de la section transversale au niveau ci de côté y , la résultante suivant ox des tensions exercées sur AC est

$\int_{-n}^n N, \lambda dy$ soit $-\frac{M}{I} \int_{-n}^n \lambda y dy$; sur AC' elle sera $+\frac{1}{I} (M + \frac{dM}{dx} \Delta x) \int_{-n}^n \lambda y dy$, Δx étant l'écartement des tranches, la résultante des tensions exercées sur CC' sera, suivant ox , d'après la remarque ci-dessus et en notant que T_3 ne dépend pas de z : $-\lambda \int_{-n}^n T_3 dx$; enfin les forces extérieures ne donneront rien puisqu'elles sont normales à ox ; il vient donc, en observant que $\frac{dM}{dx}$ est, au signe près, l'effort tranchant E :

$$\frac{E}{I} \Delta x \int_{-n}^n \lambda y dy + \lambda \int_{-n}^n T_3 dx = 0;$$

ou encore, en tenant compte de la petitesse de Δx :

$$T_3 = \frac{E}{\lambda I} \int_{-n}^n \lambda y dy. \quad (VII)$$

Si n' est la distance à l'axe neutre du point de la section qui en est le plus éloigné du côté des y négatifs, comme le centre de gravité est sur l'axe neutre, on a:

$$\int_{-n}^n \lambda y dy + \int_{-n'}^n \lambda y dy = 0, \text{ ou } \int_{-n}^n \lambda y dy = \int_{-n'}^n \lambda y dy,$$

ce qui peut être utile éventuellement.

Il est aisé de contrôler que cette valeur de T_3 vérifie la première des équations

(I), ou que

$$E + \int_{-n}^n \left(\frac{E dx}{\lambda I} \int_{-n}^n \lambda y dy \right) = 0;$$

il suffit de vérifier, en prenant $dx = \lambda y$, que:

$$I = \int_{-n}^n dy \int_{-n'}^n \lambda y dy.$$

Une intégration par parties donne:

$$\int dy \left(\int_{-n'}^n \lambda y dy \right) = y \int_{-n'}^n \lambda y dy + \int \lambda y^2 dy;$$

donc:

$$\int_{-n}^n dy \left(\int_{-n'}^n \lambda y dy \right) = n \int_{-n'}^n \lambda y dy + n' \int_{-n}^n \lambda y dy + \int_{-n}^n \lambda y^2 dy = I. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

La tension tangentielle T_3 est quelquefois dite tension rasante, et λT_3 est l'effort rasant par unité de longueur compte suivant les fibres.

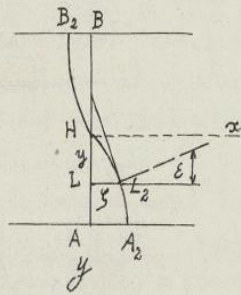
Enfin, si l'on néglige la déformation transversale des sections, seul cas que nous considérerons pour ce dernier point, g_x sera nul et par suite aussi T_1 .

3. Etude des déformations. - Nous avons vu que la fibre moyenne déformée vérifie l'équation différentielle du second ordre:

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = -\frac{M}{EI};$$

L'intégration de cette équation fera donc connaître la forme prise par cette fibre.

Étudions maintenant la déformation d'une section transversale, à commencer par son incurvation cylindrique.



Soit $A_2 B_2$ la trace de la surface cylindrique affectée par la section déformée. - Rapportons la courbe aux axes marqués sur la figure et soit ξ l'abscisse du point de cote y . L'angle droit formé par un élément de fibre avec le plan de section transversale varie de l'angle ϵ ou $\frac{d\xi}{dy}$ (l'angle est confondu avec sa tangente à cause de sa petitesse). On a donc:

$$\frac{d\xi}{dy} = -g_x \text{ ou } -\frac{T_3}{G}$$

Ainsi l'équation de la trace de la section déformée sur le plan de flexion sera définie par l'équation différentielle, en intervertissant les limites de l'intégrale qui figure dans l'expression de T_3 :

$$\frac{d\xi}{dy} = \frac{E}{G \lambda I} \int_y^u \lambda y dy$$

Par exemple si la section est rectangulaire, de hauteur h , de longueur b , $\lambda = b$, $n = \frac{h}{2}$ et par suite:

$$\frac{d\xi}{dy} = \frac{E}{2GI} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right);$$

en observant que la courbe doit passer par l'origine, on aura enfin:

$$\xi = \frac{E}{2GI} \left(\frac{h^2 y}{4} - \frac{y^3}{3} \right);$$

cette courbe présente une inflexion en H et rencontre orthogonalement les deux faces horizontales de la pièce.

Quant à la déformation transversale, son étude résultera des relations

$$v_y = v_z = -\eta \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\eta y}{\rho}$$

η étant le coefficient de Poisson. - On en déduit:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\eta y}{\rho} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\eta y}{\rho}$$

w étant nul dans le plan de flexion, on déduit de là par intégration:

$$v = -\frac{\eta}{\rho} \left(\frac{y^2}{2} + f(z) \right); \quad w = -\frac{\eta y z}{\rho},$$

$f(z)$ étant une fonction de z pour le moment arbitraire, et qu'on ne peut déterminer faute de données expérimentales suffisantes. Comme on aurait

$$g_x = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\eta}{\rho} [z + f'(z)],$$

T_1 serait nul comme s'il n'y avait pas de déformation transversale pour $f'(z) = -z$, ou $f(z) = -\frac{z^2}{2}$, alors

et il est aisé de former les transformées de droites remarquables du solide. Nous n'insisterons pas sur ce point qui n'est d'aucune utilité pratique.

H. Conditions d'équarissage des poutres fléchies transversalement.

Comme on a : $\partial_y = \partial_z = -\eta \partial_x$, $g_x = 0$, $g_y = 0$,
l'équation de la quadrique des dilatations s'écrira :

$$\partial_x [X^2 - \eta(Y^2 + Z^2)] + g_z XY = \pm 1.$$

Cherchons son grand axe. Un plan principal est $z=0$, et $X=0$ est plan de section circulaire, donc passant par l'axe moyen. Il suffira donc de chercher le grand axe de la trace sur le plan $z=0$, soit de la conique

$$\partial_x [X^2 - \eta Y^2] + g_z XY = \pm 1.$$

D'après ce qui a été dit Chap. II, No 2, l'inclinaison α de cet axe sur l'axe des X est donnée par

$$\text{tang. } 2\alpha = \frac{1}{1+\eta} \frac{g_z}{\partial_x}$$

et la mesure de la dilatation maxima par :

$$\Delta = \partial_x \left\{ \frac{1-\eta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(1+\eta)^2 + \left(\frac{g_z}{\partial_x}\right)^2} \right\}$$

Si on tient compte des valeurs connues de ∂_x et g_z , il vient :

$$\Delta = \frac{M_y}{EI} \left\{ \frac{1-\eta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(1+\eta)^2 + \left(\frac{E \partial_x \lambda_y dy}{GM \lambda_y}\right)^2} \right\}$$

Cette formule donnée par Barré de Saint Venant (1864) servirait être utilisée pour déterminer le maximum de Δ . Pour une valeur donnée de x , en annulant $\frac{\partial \Delta}{\partial y}$, on est conduit à une équation en y tellement compliquée que les praticiens refuseraient de s'en servir; dans le cas le plus simple d'un profil rectangulaire, cette équation est déjà du troisième degré.

La direction de la dilatation maxima ne coïncide avec celles des fibres que si $g_z = 0$, ou $E = 0$, et alors $\Delta = \frac{M_y}{EI}$. Ainsi, pour les sections où l'effort tranchant est nul, la dilatation maxima est $\Delta = \frac{M_y}{EI}$.

Ce résultat sera encore sensiblement valable pour les sections où l'effort tranchant, sans être nul, est tel que son produit par la hauteur de la poutre soit minime vis-à-vis du moment fléchissant.

La complexité de la conclusion obtenue nous réduit à suivre, au point de vue pratique, la marche que voici, pour calculer les dimensions à donner à la section d'une poutre soumise à des efforts de flexion donnés, en restant dans les limites de l'élasticité. On calcule successivement les dimensions de la section comme si la pièce était fléchie avec un effort tranchant nul partout, et comme si elle n'était soumise qu'au cisaillement que produirait l'effort tranchant agissant seul dans chaque section; on prend le plus fort des résultats de ce double calcul.

Dans les exemples usuels où l'on a pris la peine de faire le calcul par la méthode exacte et par la méthode pratique, les écarts obtenus sont inférieurs à ceux qui résultent de l'infériorité de la charge de sécurité admise R_0 à la charge limite de l'élasticité.

Entrons dans le détail de cette règle. - Dans une section où $\epsilon = 0$, on a $\Delta = \frac{M_y}{EI}$; avec nos précédentes notations, le maximum d'allongement dans cette tranche est $\frac{M_n}{EI}$ et le maximum d'accourcissement $\frac{M_n'}{EI}$. Comme pour le bois, le fer, l'acier (corps les plus employés à la flexion), la limite est la même pour deux maximums et est $\frac{R_0}{E}$, on n'excèdera pas les limites de l'élasticité si

$$\frac{M_n}{I} \leq R_0 \quad \text{et} \quad \frac{M_n'}{I} \leq R_0.$$

Soit N la plus grande des deux distances n et n' , c'est-à-dire la distance à la couche neutre de la fibre qui en est la plus éloignée; ces inégalités reviennent à une seule:

$$\frac{M.N}{I} \leq R_0 \quad \text{ou} \quad \frac{R_0.I}{N} \geq M.$$

Il y a évidente économie à prendre un profil tel qu'il y ait égalité, et l'équation obtenue

$$\frac{R_0.I}{N} = M \quad (E)$$

dite équation d'équarissage des pièces fléchies, sert à calculer pour une pièce de nature déterminée, l'une des dimensions de la section connaissant les autres dimensions ou le rapport de similitude sachant que la section doit être semblable à une figure donnée, le moment fléchissant ayant été préalablement déterminé pour la section.

La quantité $\frac{I}{N}$ qui ne dépend que de la forme de la section est dite module de résistance de la section; $\frac{R_0.I}{N}$ qui dépend de la forme de la section et de la nature de la pièce est le moment résistant de la section.

C'est la nécessité de pouvoir calculer pour un profil les quantités I et N et pour une section le moment fléchissant M qui nous a amené à faire au début les digressions constituant les chapitres I et II.

Considérons maintenant la même section comme soumise au seul cisaillement provenant de l'effort tranchant \mathcal{E} . On évalue le maximum de la tension tangentielle T_3 et on exprime qu'il est inférieur à $0,8 R_0$. D'où la condition

$$\frac{\mathcal{E}}{I} \cdot \max. \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_y^m \lambda y dy \right\} \leq 0,8 R_0$$

On appelle parfois cette inégalité la condition de stabilité au glissement.

Ayant calculé les dimensions de la section par l'équation d'équarissage, on vérifie si cette condition est satisfaite. Si non, on la transforme en égalité, on en use pour déterminer l'équarissage et on vérifie si $\frac{R_0.I}{N} \geq M$.

Posons

$$U = \max. \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_y^m \lambda y dy \right\},$$

et écrivons la condition sous la forme

$$\frac{0,8 R_0 I}{U} \geq \mathcal{E};$$

le premier membre est dit: résistance de la section à l'effort tranchant.

5. Examen des cas usuels où la section est un rectangle ou un double T.

Supposons que la section soit un rectangle de hauteur h (parallèle au plan de

flexion) et de base b . Le centre de gravité est le centre de figure; on a:

$$N = n \cdot \frac{h}{2}, \quad I = \frac{b h^3}{12}, \quad \lambda = b.$$

$$U = \text{Max.} \left\{ \int_y^n y dy \right\} = \text{Max.} \frac{n^2 - y^2}{2} = \frac{n^2}{2} = \frac{h^2}{8}.$$

L'équation d'équarrissage et la condition de stabilité au glissement s'écrivent:

$$\frac{R_0 b h^2}{6} = M \quad \frac{1,6 R_0 b h}{9} \geq E.$$

Si $h > b$, la pièce est posée de champ; si $h < b$, elle est posée à plat.

Pour une même aire de section, la résistance au glissement est la même, mais la résistance au moment fléchissant est plus grande si h est la plus grande dimension, c'est-à-dire si la pièce est posée de champ.

M étant donné, soit à calculer le diamètre D d'un arbre dans lequel on puisse débiter la poutre avec le plus d'économie. Les dimensions du rectangle étant liées par la relation $h^2 + b^2 = D^2$, cherchons à rendre maximum $b h^2$ ou $b^2 h$; la condition à réaliser est:

$$\frac{b^2}{1} = \frac{h^2}{2} = \frac{D^2}{3}$$

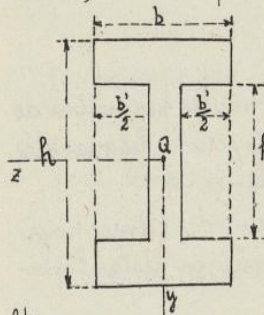
Les relations précédentes deviennent alors:

$$\frac{R_0 D^3}{6\sqrt{3}} = M, \quad \frac{1,6\sqrt{2} R_0}{9} D^2 \geq E.$$

Le bois en grume ainsi débité est dit d'équarrissage normal.

Le commerce fournit des poutres ayant des équarrissages consacrés par l'usage, et dont les noms et dimensions sont donnés dans les catalogues spéciaux. Par exemple, pour le sapin de France, les madriers ont $0^m,32$ sur $0^m,05H$; pour le sapin du Nord, les madriers ont $0^m,22$ sur $0^m,080$, et les bastings, $0^m,17$ sur $0^m,065$, le sapin admet $R_0 = 60000$ l'unité de longueur étant le mètre. Pour un madrier de $0^m,22 \times 0^m,08$, le moment résistant sera: 387 Kg. m.

La forme rectangulaire est le profil naturel des poutres en bois. Pour les poutres métalliques, on adopte généralement une forme mieux appropriée à la résistance à la flexion; on rend $\frac{I}{h}$ aussi grand que possible pour une aire donnée (ou pour un poids donné au mètre courant de poutre) en rejetant la matière loin de la fibre neutre, et on adopte la forme d'un double I comme profil.



Le double I comprend une âme verticale et deux semelles rectangulaires horizontales. Avec les notations indiquées sur la figure, on a:

$$I = \frac{b h^3 - b' h'^3}{12} \quad \text{et} \quad N = \frac{h}{2};$$

l'équation d'équarrissage s'écrira donc:

$$\frac{R_0 (b h^3 - b' h'^3)}{6 h} = M. \quad (E_1)$$

Posons $b - b' = e$ (épaisseur de l'âme); on a, pour une couche de

l'âme:

$$\frac{1}{\lambda} \int_y^n h y dy = \frac{1}{e} \left\{ \int_y^{\frac{h'}{2}} e y dy + \int_{\frac{h''}{2}}^{\frac{h}{2}} b y dy \right\} = \frac{1}{8e} [b h^2 - b' h'^2 - H e y^2],$$

et pour une couche d'une semelle

$$\frac{1}{\lambda} \int_y^{\lambda y} \lambda y dy = \frac{1}{8} (h^2 - 4y^2) .$$

94.

Le maximum de la première expression est $\frac{bh^2 - b'h'^2}{8e}$, celui de la seconde $\frac{h^2}{8}$, ou $\frac{h^2(b-b')}{8e}$, comme le premier maximum est supérieur au second, on a :

$$U = \frac{bh^2 - b'h'^2}{8(b-b')}$$

Dès lors la condition de stabilité au glissement s'écrit :

$$\frac{1,6 R_e}{3} \cdot \frac{(bh^3 - b'h'^3)(b-b')}{bh^2 - b'h'^2} > E .$$

L'industrie fournit des fers laminés ayant la forme de double T avec arrondis aux angles intérieurs. Les écarissages habituels correspondent sensiblement, pour les fers à ailes ordinaires, aux proportions suivantes :

$$b = 0,4h, \quad e = 0,05h, \quad h' = \frac{16}{15}h .$$

D'ailleurs les Albums des Forges donnent, avec les dimensions des divers profils de double T fabriqués, les valeurs du moment résistant à la flexion déterminés avec l'intégrateur d'Amsler. Ils donnent ces valeurs aussi pour d'autres types de profils symétriques.

Pour choisir un profil correspondant à un moment fléchissant et à un effort tranchant donnés, on cherche dans ces Albums le moment résistant à la flexion $\left(\frac{R_0 I}{N}\right)$ le plus voisin possible du moment M donné, mais non inférieur à celui-ci ; on adopte le profil correspondant, après avoir vérifié que pour ses dimensions la condition de stabilité au glissement est satisfaite.

Lorsque la valeur de M est trop grande, on ne trouve pas de fer du commerce répondant à la question. On établit alors une poutre composée en tôles et cornières, comprenant une âme verticale et deux tables horizontales formées d'une ou de plusieurs tôles ; les tables sont assemblées à rivets sur l'âme par quatre cornières. On peut, de vue pratique, le calcul d'une poutre composée se conduire ainsi, par tâtonnement.

On fait abstraction de la résistance de l'âme à la flexion, et on choisit les semelles de manière à satisfaire à l'équation (E désignant l'épaisseur des tables) :

$$R_0 b E h = M ;$$

cette équation résulte de (E_1) en négligeant la différence entre b et b' , en remplaçant h' par $(h - 2E)$, ce qui donne

$$\frac{R_0 b}{6h} [h^3 - (h - 2E)^3] = M ,$$

et en négligeant le carré et le cube de E vis à vis de h . Cette formule permettra de choisir approximativement, en égard aux conditions de la construction, les quantités E, b, h , de manière à rester un peu en dessous de la valeur donnée M .

On fait ensuite abstraction des semelles et on choisit l'épaisseur de l'âme pour satisfaire avec elle seule à la condition de stabilité au glissement, en restant plutôt un peu au dessous.

Avec ces indications, on établira un projet de tôle composée, pour lequel on vérifiera les conditions d'écarissage et de stabilité au glissement. En cas d'insuffisance, on calculera l'épaisseur d'une plate bande supplémentaire à superposer aux

semelles pour racheter la différence.

Ces essais sont même supprimés dans les bureaux des maisons de constructions métalliques : des barèmes spéciaux donnent les calculs tout faits pour un choix très étendu de profils. Les plus anciennes de ces tables ont été publiées dans les Annales de la Construction, d'Oppermann (tome IX), d'autres recueils ont été publiés par M. Forest, par M. Poiche, par M. J. Hauguerin [aide-mémoire de la société Allemande «Die Hütte» etc...]

6. Travail moléculaire élastique développé dans la flexion transversale. - Le potentiel d'élasticité en un point est :

$$\pi = \frac{1}{2E} (N_1 + N_2 + N_3)^2 - \frac{1}{2G} (N_1 N_2 + N_2 N_3 + N_3 N_1 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2).$$

Dans la déformation considérée, on a : $N_2 = 0, N_3 = 0, T_1 = 0, T_2 = 0$. Donc :

$$\pi = \frac{N_1^2}{2E} + \frac{T_3^2}{2G}.$$

Le travail cherché sera donc :

$$\frac{1}{2E} \int N_1^2 d\omega + \frac{1}{2G} \int T_3^2 d\omega,$$

les sommations étant étendues au volume voulu.

Calculons le premier terme pour une tranche d'épaisseur Δx ; on prendra $d\omega = \Delta x dx$, $N_1 = \frac{M_y}{I}$; il vient : $\frac{M^2 \Delta x}{2EI^2} \int y^2 dx$, ou encore $\frac{M^2 \Delta x}{2EI^2}$. Comme on a vu qu'en appelant Y l'ordonnée de la fibre moyenne déformée, $EI \frac{d^2 Y}{dx^2} = -M$, l'expression obtenue peut s'écrire $-\frac{1}{2} M \frac{d^2 Y}{dx^2} \Delta x$.

Estimons la première partie du travail pour le tronçon allant de l'origine à la section transversale d'abscisse x . Une intégration par parties donne :

$$\int_0^x M \frac{d^2 Y}{dx^2} \Delta x = M \frac{dY}{dx} - \int_0^x \frac{dM}{dx} \frac{dY}{dx} \Delta x;$$

Par suite le travail cherché aura pour expression; en se rappelant la propriété de l'effort tranchant :

$$\frac{1}{2} \left[M \frac{dY}{dx} \right]_x + \frac{1}{2} \int_0^x Q \frac{dY}{dx} dx.$$

Pour estimer la seconde partie du travail de déformation, nous nous bornerons au cas d'une section rectangulaire, alors :

$$T_3 = \frac{Q}{I} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right);$$

une tranche d'abscisse x et d'épaisseur Δx donnera le terme

$$\frac{Q^2 \Delta x}{2GI^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right)^2 dy,$$

(en prenant $d\omega = \Delta x \cdot b \cdot dy$), soit en effectuant le calcul, l'intégrale valant $\frac{h^5}{30}$;

$$\frac{6}{5GI^2} \Delta x;$$

pour le même tronçon de la poutre, la seconde partie du travail cherché vaudra :

$$\frac{6}{EI} \int_0^x Q^2 dx.$$

Ainsi, dans le cas d'une section rectangulaire :

$$\text{Travail moléculaire de déformation : } \frac{1}{2} \left[M \frac{dY}{dx} \right]_x + \frac{1}{2} \int_0^x Q \frac{dY}{dx} dx + \frac{6}{EI} \int_0^x Q^2 dx.$$

Chapitre VI. - Moments fléchissants et Efforts tranchants dans les poutres droites posées sur deux appuis simples ou à encastrement. -

96.

1. Éléments à déterminer. - Limitons-nous pour le moment au cas étudié des poutres à section transversale constante. L'équation d'équarissage et la condition de stabilité au glissement doivent être vérifiées pour toutes les sections, et il suffira à cet effet, qu'elles le soient pour les sections où le moment fléchissant est maximum et où l'effort tranchant est maximum. - En outre le calcul du travail de déformation ne peut s'effectuer que si l'on connaît l'équation $y = F(x)$ de la fibre moyenne déformée. Enfin des raisons de construction exigent que l'on connaisse la flèche prise par la pièce, c'est-à-dire l'ordonnée maximum de la fibre moyenne.

Ainsi, pour une poutre donnée et une distribution donnée des charges extérieures, on a besoin de connaître : 1^o le moment fléchissant maximum ; 2^o l'effort tranchant maximum ; 3^o la fibre moyenne déformée (ce qui nécessite la connaissance des variations du moment fléchissant) ; 4^o la flèche de la pièce. -

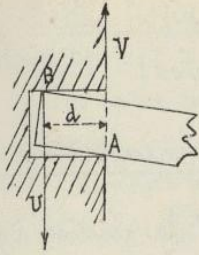
Pour un régime de forces actives données, ces éléments dépendent de la nature des réactions des appuis, et à cet égard, il y a lieu de distinguer l'appui simple et l'appui à encastrement.

Une poutre repose sur un appui simple en un point A quand elle est soutenue en cet endroit par un corps dont la réaction sur la pièce se réduit à une force normale à la direction de la poutre, et quand l'appui assujettit le point à rester immobile. Un appui simple se représente schématiquement par un couteau soutenant la ligne d'axe de la poutre.

Nous avons déjà indiqué en chapitre I comment, dans le cas d'une poutre droite reposant à ses extrémités sur deux appuis simples de niveau, la statique graphique permet de déterminer aisément la loi de variation du moment fléchissant et de l'effort tranchant pour un régime quelconque de charges continues ou discontinues.

Une pièce est encastree à l'une de ses extrémités quand sa liaison avec l'appui tend à empêcher ou à réduire à une valeur extrêmement faible la déviation en ce point de la fibre moyenne. Théoriquement nous supposons cette déviation nulle.

Tandis qu'un appui simple ne donne lieu qu'à une réaction, un encastrement développe à la fois une réaction et un couple. Pour s'en rendre compte, il suffit de considérer la cavité dans laquelle est engagée l'extrémité de la pièce. L'arc-boutement aux points A et B fait naître deux forces verticales U et V de sens opposés ; si l'on applique au point A deux forces verticales égales et contraires et ayant la même valeur que U, on voit que tout se réduit à une réaction verticale (V-U) et à un couple dont le moment Ud (d étant la longueur d'encastrement, la pente de la poutre étant inap-



préciable). reçoit le nom de moment d'encastrement.

Dans le cas d'une poutre à deux appuis dont l'un au moins est encastree, les réactions sont incomplètement déterminées statiquement (voir Ch. I, N° 14) car on a au moins trois inconnues et seulement deux conditions, et il faut pour les obtenir faire intervenir la déformation de la poutre.

Dans le cas d'une poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre, les réactions sont au contraire déterminées statiquement comme dans le cas de deux appuis simples, car on a deux inconnues seulement et deux conditions.

Même lorsque les réactions ne sont pas déterminées statiquement, les procédés graphiques sont de la plus grande ressource pour les cas complexes de distribution des charges. On ne traite qu'ici par le calcul que des cas simples usuels.

2. Poutre horizontale à appuis simples, uniformément chargée sur toute sa longueur. - Nous désignerons désormais par l la portée de la poutre; c'est-à-dire sa longueur à l'état naturel; par p la charge uniformément répartie, rapportée à l'unité de longueur. - Nous supposons que p , qui comprend le poids propre de la poutre, est donné.

La charge totale de la poutre est pl , et les réactions, égales par symétrie, valent $\frac{pl}{2}$ et sont dirigées vers le haut.

Avec nos définitions et conventions, il vient :

$$E = -\frac{pl}{2} + \int_0^x p \, d\xi = px - \frac{pl}{2}$$

$$M = -\frac{pl}{2}(-x) + p \int_0^x (\xi - x) \, d\xi = \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2} = \frac{px(l-x)}{2}$$

Le maximum de E est atteint aux extrémités de la poutre, sa valeur absolue est $\frac{pl}{2}$. - Le maximum de M est atteint pour $x = \frac{l}{2}$, au milieu de la poutre, sa valeur est $\frac{pl^2}{8}$.

L'équation de la fibre moyenne déformée est :

$$EI \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{px(x-l)}{2}$$

L'intégration est immédiate, elle donne :

$$EIY = \frac{px^3}{24} - \frac{plx^2}{12} + Cx + C_1$$

Cet C , étant deux constantes à déterminer par les conditions que la fibre moyenne passe par les deux appuis, c'est-à-dire que Y soit nul pour $x=0$ et pour $x=l$; on trouve $C_1 = 0$ et $C = \frac{pl^3}{24}$, par suite

$$Y = \frac{px(x^3 - 2lx^2 + l^3)}{24EI}$$

Comme on a :

$$24EI \frac{dY}{dx} = p(2x-l)(2x^2 - 2lx - l^2)$$

et que la dernière parenthèse reste négative tant que x reste entre 0 et l , Y croîtra quand x variera de 0 à $\frac{l}{2}$ et décroîtra ensuite quand x passera de $\frac{l}{2}$ à l . La flèche correspond donc à $x = \frac{l}{2}$, comme la raison de symétrie l'indiquait d'ailleurs;

sa valeur est

$$f = \frac{5pl^4}{384EI}$$

Enfin la déviation sur les appuis est la valeur de $\frac{dY}{dx}$ pour $x=0$:

$$\alpha_0 = \frac{pl^3}{24EI}$$

3. Poutre horizontale à appui simple à une extrémité, à encastrement à l'autre, uniformément chargée.

Supposons que l'encastrement soit à l'appui de droite. Soit Y_0 la réaction à gauche; Y_1 et M_1 la réaction et le moment d'encastrement. Nous aurons:

$$E = -Y_1 + \int_0^x p d\xi = px - Y_1$$

$$M = -Y_1(-x) + p \int_0^x (\xi - x) d\xi = Y_1 x - \frac{px^2}{2}$$

L'équation de la fibre moyenne déformée est

$$EI \frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{px^2}{2} - Y_1 x$$

On en déduit :

$$EIY = \frac{px^4}{24} - Y_1 \frac{x^3}{6} + Cx + C_1$$

Y est nul pour $x=0$ et $x=l$, et de plus, à cause de l'encastrement, $\frac{dY}{dx}$ est nul pour $x=l$. On a donc :

$$C_1 = 0 \quad \frac{pl^3}{24} - \frac{Y_1 l^2}{6} + C = 0, \quad \frac{pl^3}{6} - \frac{Y_1 l^2}{2} + C = 0$$

On en déduit :

$$Y_1 = \frac{3}{8} pl, \quad C = \frac{pl^3}{48}$$

Comme $Y_0 + Y_1 = pl$, on aura : $Y_0 = \frac{5}{8} pl$.

Dès lors :

$$E = px - \frac{3}{8} pl$$

$$M = \frac{3plx}{8} - \frac{px^2}{2}$$

Le maximum de E est atteint pour $x=l$, c'est-à-dire à l'encastrement; sa valeur est $\frac{5pl}{8}$. La dérivée de M s'annule pour $x = \frac{3}{8} l$; la valeur correspondante de M est : $\frac{9pl^2}{128}$. Quand x varie de 0 à $\frac{3}{8} l$, M va de zéro à cette valeur; au delà, il décroît, s'annule pour $x = \frac{1}{4} l$, et atteint à l'encastrement la valeur $-\frac{pl^2}{8}$, dont la valeur absolue est supérieure à $\frac{9pl^2}{128}$; la valeur à utiliser dans l'équation d'équarissage est donc $\frac{pl^2}{8}$; elle représente d'ailleurs le moment d'encastrement.

L'équation de la fibre moyenne est :

$$48EIY = px(2x^3 - 3lx^2 + l^3)$$

Pour avoir la flèche, annulons d'abord la dérivée de Y ; d'où :

$$8x^3 - 9lx^2 + l^3 = 0$$

Cette équation est vérifiée, nous le savons, pour $x=l$; débarrassée de cette racine elle devient $8x^2 - 9lx - l^2 = 0$ et donne

$$x = 0,422 l$$

La valeur correspondante de Y , ou la flèche, est :

$$f = 0,00542 \frac{pl^4}{EI}$$

La déviation sur l'appui libre est :

$$\alpha_0 = \frac{pl^3}{48EI}$$

4. Barre horizontale encastrée aux deux bouts, uniformément chargée 99.

Par raison de symétrie, les réactions sont égales et valent $\frac{pl}{2}$; les moments d'encastrements sont égaux et de signes contraires.

On a, M_0 étant le moment d'encastrement de gauche:

$$E = -\frac{pl}{2} + px$$

$$M = M_0 + \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2}$$

L'équation différentielle de la fibre moyenne est:

$$EI \frac{d^2Y}{dx^2} = -M_0 - \frac{plx}{2} + \frac{px^2}{2}$$

Par intégration, il vient:

$$EIY = -\frac{M_0 x^2}{2} - \frac{plx^3}{12} + \frac{px^4}{24} + Cx + C_1$$

Pour $x=0$, Y et $\frac{dY}{dx}$ sont nuls; d'où: $C=C_1=0$; il doit en être de même pour $x=l$; d'où deux conditions qui se réduisent à:

$$M_0 = -\frac{pl^2}{12}$$

Ainsi, on a:

$$M = -\frac{pl^2}{12} + \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2}$$

$$24EIY = px^2(l-x)^2$$

Le maximum de E a lieu aux appuis; sa valeur absolue est $\frac{pl}{2}$. La dérivée de M s'annule pour $x = \frac{l}{2}$; la valeur correspondante de M est $\frac{pl^2}{24}$; donc quand x varie de 0 à l , M part de $-\frac{pl^2}{12}$ et croît jusqu'à $\frac{pl^2}{24}$ pour $x = \frac{l}{2}$, et décroît ensuite par valeurs symétriques. La plus grande valeur de M est donc prise aux appuis, et sa valeur absolue est $\frac{pl^2}{12}$.

Le maximum de Y a lieu pour $x = \frac{l}{2}$; sa valeur est

$$f = \frac{pl^4}{384EI}$$

5. Application aux planchers à travée simple. - On admet dans la pratique que chaque solive d'un plancher ordinaire supporte une charge correspondant à une auge de plancher délimitée par un demi-intervalle de solives de part et d'autre de son axe, et que la charge du plancher est uniformément répartie. Soit q le poids moyen de plancher par mètre carré, e l'écartement des solives, nous aurons à faire $p = qe$.

Pour les solives en bois à section rectangulaire, on ne peut encastrer les extrémités (échauffement); le moment fléchissant maximum sera $\frac{qel}{8}$ et l'effort tranchant maximum $\frac{qe}{2}$. L'équation d'équarrissage et la condition de stabilité au glissement deviennent:

$$4R_0 b h^2 = 3qel^2, \quad 3,2 R_0 b h \geq 3qe$$

Généralement on prendra des madriers ou des bastings de commerce, à équarrissage déterminé, et on calculera par ces conditions l'écartement e à donner aux solives. Comme l est notablement plus grand que h , la première égalité entraîne la seconde condition.

On pourra procéder de même pour les solivages en fer si le choix du fer est ^{100.}pres-
que imposé par certaines conditions extérieures (hauteur de solive, largeur d'ailes...)
ou par la facilité de se procurer un type courant.

6. Corbeau uniformément chargé et soumis à son extrémité libre à une charge concentrée. On donne le nom de corbeau à une poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre.

Soient Y_0 et M_0 la réaction et le moment d'encastrement; P la charge appliquée à l'extrémité libre; on a: $Y_0 = P + pl$ (projection sur la verticale). Par suite:

$$E = -P - pl + px$$

$$M = M_0 + (P + pl)x - \frac{px^2}{2}$$

Comme à l'extrémité libre M est nul, on a: $M_0 = -\left(P + \frac{pl}{2}\right)l$, et par suite:

$$M = -\left(P + \frac{pl}{2}\right)l + (P + pl)x - \frac{px^2}{2}$$

Le maximum de E a lieu à l'encastrement; sa valeur absolue est $(P + pl)$.

M croît de M_0 à zéro quand x varie de 0 à l ; la plus grande valeur absolue de M est donc $\left(P + \frac{pl}{2}\right)l$.

Enfin la fibre moyenne déformée est définie par:

$$EI \frac{d^2Y}{dx^2} = \left(P + \frac{pl}{2}\right)l - (P + pl)x + \frac{px^2}{2}$$

ou, en notant que Y et $\frac{dY}{dx}$ sont nuls pour $x = 0$:

$$EIY = \left(P + \frac{pl}{2}\right)\frac{lx^2}{2} - (P + pl)\frac{x^3}{6} + \frac{px^4}{24}$$

Y va en croissant (x variant de 0 à l) depuis zéro jusqu'à:

$$f = \frac{(8P + 3pl)l^2}{24EI}$$

7. Poutre à appuis simples, portant une charge uniformément répartie et une charge concentrée.

Soit P la charge isolée appliquée en un point C dont les distances aux appuis de gauche et de droite soient l' et l'' (soit $l' > l''$ pour fixer les idées). La statique élémentaire donne pour valeurs absolues des réactions des appuis:

$$Y_0 = \frac{pl}{2} + \frac{Pl'}{l}, \quad Y_1 = \frac{pl}{2} + \frac{Pl''}{l}$$

Au gauche de C , on a:

$$E = -\left(\frac{pl}{2} + \frac{Pl'}{l}\right) + px$$

$$M = \left(\frac{pl}{2} + \frac{Pl'}{l}\right)x - \frac{px^2}{2}$$

A droite de C , on a (en notant à l'appui de droite, pour $x = l$, M est nul):

$$E = \left(\frac{pl}{2} + \frac{Pl''}{l}\right) - p(l-x), \quad M = \left(\frac{pl}{2} + \frac{Pl''}{l}\right)(l-x) - \frac{p(l-x)^2}{2}$$

La fibre moyenne a pour équation, dans le premier tronçon;

$$EI \frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{px^2}{2} - \left(\frac{pl}{2} + \frac{Pl'}{l}\right)x$$

ou en notant que Y s'annule pour $x = 0$:

$$EIY = \frac{px^4}{24} - \left(\frac{pl}{2} + \frac{Pl'}{l}\right)\frac{x^3}{6} + Cx$$

dans le second tronçon

$$EI \frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{p(l-x)^2}{2} - \left(\frac{pl}{2} + \frac{Pl''}{l}\right)(l-x)$$

ou en notant que Y s'annule pour $x = l$:

$$EIY = \frac{p(l-x)^4}{24} - \left(\frac{pl}{2} + \frac{Pl''}{l}\right)\frac{(l-x)^3}{6} + C_1(l-x)$$

Les constantes C et C_1 s'obtiendront en exprimant la continuité de la fibre moyenne ^{101.} sous la charge isolée : pour $x = l'$ ou $l - x = l''$, les valeurs de Y et de $\frac{dY}{dx}$ sont égales; d'où les relations

$$\frac{Pl}{24} (l'^4 - l''^4) - \frac{Pl}{12} (l'^3 - l''^3) - \frac{Pl^2}{6l} (l'^2 - l''^2) + Cl' - C_1 l'' = 0.$$

$$\frac{Pl}{8} (l'^3 - l''^3) - \frac{Pl}{4} (l'^2 + l''^2) - \frac{Pl^2}{2l} (l' + l'') + C + C_1 = 0.$$

Dès lors les équations finies des deux parties raccordées de la fibre moyenne sont connues.

Insistons sur la recherche du moment fléchissant maximum. - A gauche de C , quand x va de 0 à l' , M croît à partir de zéro; il atteindra ou non un maximum selon que l'on aura:

$$x_1 = \frac{l'}{2} + \frac{Pl'}{4l} \leq l'$$

ou

$$2Pl' \leq Pl(l'^2 - l''^2)$$

Si $x_1 < l'$, il y a un maximum $M(x_1) = \frac{Pl^2}{8} (1 + \frac{2Pl'}{Pl})$; si $x_1 > l'$, le plus grand moment fléchissant a lieu sous la charge, et vaut $\frac{Pl^2}{2} + \frac{Pl^2}{2}$, valeur inférieure à la précédente.

A droite de C , le moment fléchissant ne saurait passer par un maximum, car on ne peut avoir $\frac{l'}{2} + \frac{Pl''}{4l} < l''$, car $l' < l''$ et par suite $l' < \frac{l''}{2}$; donc M décroît depuis la valeur qu'il a sous la charge jusqu'à zéro.

Soit K le rapport de la charge isolée à la charge uniformément répartie; m le rapport du plus ^{petit} tronçon à la longueur de la poutre; on prend:

$$M_{\max} = \frac{Pl^2}{8} (1 + 2Km)^2.$$

Cette formule sert couramment dans le calcul des solives d'enchevêtrement.

Nous avons renoncé plus haut à calculer la flèche prise par la pièce, à cause de la complexité du calcul. D'ailleurs dans le cas où les distributions des charges sont plus compliquées que celles considérées jusqu'ici, la méthode analytique ne conduit plus à des résultats élégants et faciles à utiliser; dès lors elle perd tous ses avantages, et le mieux est alors de faire dans chaque cas particulier par la méthode graphique la détermination des moments fléchissants et de la fibre moyenne déformée.

Au point de vue analytique, la méthode générale pour l'étude de la déformation est la suivante: Les forces isolées F_1, F_2, \dots, F_n décomposent la poutre en $(n+1)$ tronçons pour chacun desquels il faut écrire une équation différentielle du 2^e ordre distincte; soit $(n+1)$ équations différentielles dont l'intégration introduira $2n+2$ constantes qu'on déterminera en exprimant: 1^e qu'aux n points d'application des charges concentrées, les deux parties de la fibre moyenne qui s'y raccordent ont même ordonnée et même coefficient angulaire, ce qui donne $2n$ conditions; 2^e qu'aux appuis libres, l'ordonnée est nulle, d'où 2 conditions complémentaires.

Avec un encastrement, on aurait une condition de plus, la nullité du coefficient angulaire à l'encastrement, mais aussi une inconnue de plus, le moment d'encastrement.

8. Détermination graphique de la déformation d'une poutre

droite fléchie transversalement par des charges quelconques. — 102.

Cette détermination résultera immédiatement de la comparaison de l'équation différentielle de la fibre moyenne déformée avec celle de la courbe funiculaire relative à des charges quelconques. Nous avons en effet, au § 9 du chapitre II, donné l'équation finie d'une courbe funiculaire; si l'on observe qu'avec les notations adoptées en cet endroit, $S'(x) = p$ [charge par unité de longueur au point d'abscisse x], on obtient par dérivation:

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = -\frac{p}{EI}$$

Donc la fibre moyenne déformée est une courbe funiculaire construite avec une distance polaire quelconque d , pour un système de forces fictives égales à $\frac{M dx}{EI}$ et appliquées aux divers éléments dx de la fibre moyenne.

En point de vue graphique, on ne fait pas l'épure en vraie grandeur: on diminue d'une part les abscisses dans le rapport $\frac{1}{n}$ (échelle des longueurs), et d'autre part, pour rendre palpables les déformations, on amplifie dans le rapport k les ordonnées de la fibre moyenne. En d'autres termes, on construit une ligne dont les coordonnées d'un point (x_1, Y_1) sont liées à celles (x, Y) d'un point de la fibre moyenne par les formules $x_1 = \frac{x}{n}$, $Y_1 = kY$. L'équation différentielle de la transformée construite est par suite

$$\frac{d^2 Y_1}{dx_1^2} = -n^2 k \frac{M}{EI}$$

ou, en introduisant une arbitraire m dont on disposera tout-à-l'heure:

$$\frac{d^2 Y_1}{dx_1^2} = -\frac{nM}{m} : \frac{EI}{nkm}$$

La transformée construite sera une courbe funiculaire de charge $p = \frac{nM}{m}$ obtenue avec une distance polaire $d = \frac{EI}{nkm}$.

La poutre, avec ses points de charge, étant dessinée à l'échelle $\frac{1}{n}$, on construit, comme on peut, un diagramme des moments fléchissants avec une distance polaire Δ mesurée sur l'épure et une échelle des forces $\frac{1}{n}$; nous avons vu au chapitre II comment il suffit de tracer un funiculaire fermé pour avoir ce diagramme dans le cas d'appuis simples; si y est une ordonnée-épure de ce diagramme, le moment fléchissant dans la section correspondante est $M = n n' y \Delta$.

Il reste à construire, avec la distance polaire $d = \frac{EI}{nkm}$, une courbe funiculaire passant par les extrémités de la poutre dessinée, et relative à la charge fictive $\frac{nM}{m} dx$, ou $\frac{n n' \Delta}{m} y dx$, s'exerçant sur chaque élément dx de la poutre. Or $y dx$ est l'aire $d\sigma$ de la bande infiniment étroite limitée dans le diagramme des moments fléchissants par les verticales des extrémités de l'élément dx (aire mesurée sur l'épure). Si donc on divise la poutre en tronçons égaux λ dont les verticales d'extrémités découpent dans le diagramme des moments fléchissants des aires de mesures $\sigma_1 = y_1 \lambda$, $\sigma_2 = y_2 \lambda$, $\sigma_3 = y_3 \lambda$, ..., la courbe cherchée sera enveloppée par le funiculaire des forces fictives $\frac{y_1}{q}$, $\frac{y_2}{q}$, $\frac{y_3}{q}$, ... appliquées respectivement au centre de gravité de chaque bande, la distance polaire étant $d = \frac{EI}{nkm}$, q étant défini par $\frac{n^2 n' \Delta \lambda}{m} = \frac{1}{q}$; et le funiculaire passant par les appuis. Les points de contact du funiculaire et de l'enveloppe

sont sur les verticales séparatrices.

Pratiquement, on dispose de l'arbitraire m de manière que q soit simple ($\dots \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1, 2, 3, \dots$), on se donne d d'après les exigences de l'épure, et on calcule k en conséquence. On a :

$$k = \frac{EI}{nm\delta} = \frac{EI}{n\delta n'q\delta\Delta\lambda} = \frac{EI}{n'q(n\delta)(n\Delta)(n\lambda)}$$

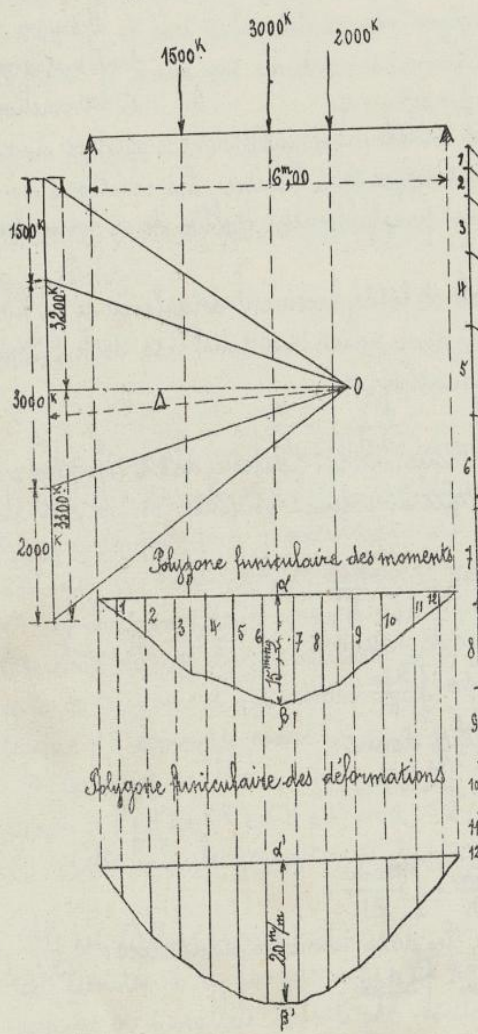
$(n\delta), (n\Delta), (n\lambda)$ représentent les valeurs-espace des segments δ, Δ, λ de l'épure.

C'est par le coefficient $\frac{1}{n}$ qu'il faut multiplier les ordonnées de la courbe funiculaire tracée pour avoir les ordonnées véritables de la fibre moyenne déformée.

On a donné ci-après un exemple du tracé, dans les conditions suivantes :

Echelle des longueurs : $\frac{1}{n} = \frac{1}{100}$; échelle des forces : $\frac{1}{n'} = \frac{1}{100.000}$ ($0^m,001$ pour 100^k) ; $\Delta = 0^m,05$; $\delta = 0^m,05$; $q = 1$; $\lambda = 0^m,005$.

On a : $\frac{100.000 \times 5 \times 5 \times 0,05}{EI} = \frac{EI}{125.0000}$. Comme l'épure donne une flèche de $0^m,02$, la flèche réel le sera $\frac{0^m,02 \times 125.0000}{EI}$ ou $\frac{25000}{EI}$.



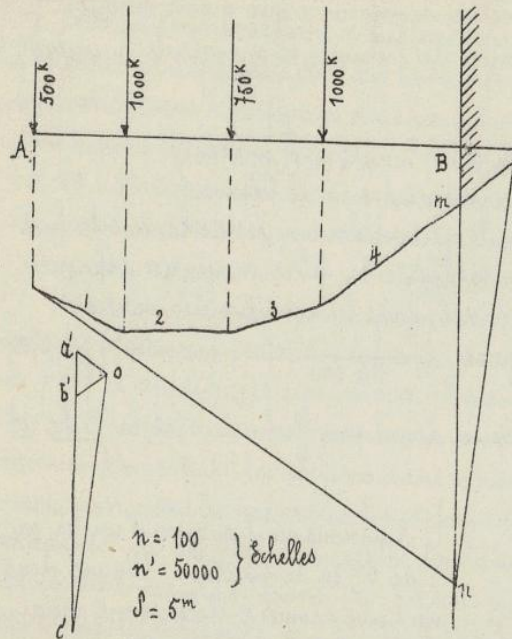
Supposons qu'il s'agisse d'un fer en I de $0^m,30$ de hauteur ; l'épure donne pour moment fléchissant maximum $1^m,52 \times 500^k = 7600^k\cdot m$ environ ; on aura donc $\frac{R}{N} = 7600$, avec $N = 0^m,15$,

$R = 6.000.000$; d'où $I = 0,0002$, et $EI = 28000000000 \times 0,0002 = 4000000$. La flèche de la pièce sera $\frac{25000}{4000000}$ ou $0^m,006$.

9. Même détermination pour une poutre à encastrement...

D'après ce qui précède, l'étude graphique de la déformation résulte immédiatement de la connaissance du diagramme des moments fléchissants. Il suffit donc de savoir tracer ce dernier diagramme.

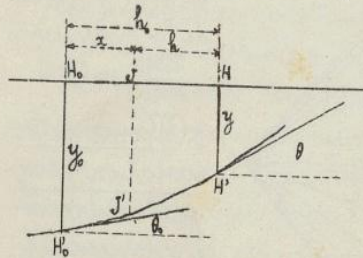
Dans le cas d'un corbeau chargé d'une manière quelconque, il n'y a pas de diffi-



culté; le croquis ci-contre est ¹⁰⁴ assez explicatif. Le moment fléchissant maximum a lieu à l'encastrement; il vaut $m \times d$, ou $2750^k \times 5^m = 13750^k m$ [On a déterminé à part, à une échelle 10 fois plus petite la réaction d'encastrement $a'c' = 20750^k$, c'est la plus grande valeur de l'effort tranchant]. Il en va tout autrement si les réactions

ne sont pas statiquement déterminées, comme dans le cas d'une poutre encastree aux deux extremités ou encastree à une extremité et appuyée à l'autre: les réactions dependent alors de la deformation, et nous allons préalablement établir deux formules importantes touchant cette deformation.

Soient (y_0, θ_0) et (y, θ) le déplacement vertical et le déplacement angulaire de la fibre moyenne pour deux points H_0 et H , distants de h_0 . En intégrant l'équation



et en observant que, vu la petitesse de θ, θ_0 , on peut confondre ces angles avec leurs tangentes, on obtient d'abord:

$$\theta - \theta_0 = - \int_0^{h_0} \frac{M dx}{EI}$$

Remplaçons θ par $\frac{dy}{dx}$, h_0 par x , et intégrons de nouveau de 0 à h_0 . Il vient:

$$y - y_0 - \theta_0 h_0 = - \int_0^{h_0} dx \int_0^x \frac{M dx}{EI}$$

Posons $u = \int_0^x \frac{M dx}{EI}$; une intégration par parties donne

$$\int_0^{h_0} u dx = [ux]_0^{h_0} - \int_0^{h_0} x du$$

L'équation précédente s'écrira donc:

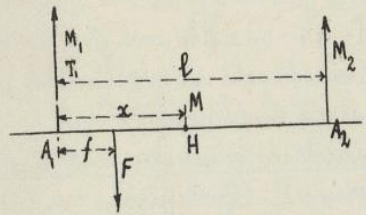
$$y - y_0 - \theta_0 h_0 = - h_0 \int_0^{h_0} \frac{M dx}{EI} + \int_0^{h_0} \frac{M x dx}{EI}$$

Nous poserons $h = h_0 - x$, et nous écrirons ainsi les deux formules annoncées:

$$\theta = \theta_0 - \int_0^{h_0} \frac{M dx}{EI}, \quad y = y_0 + \theta_0 h_0 - \int_0^{h_0} \frac{M dx}{EI}$$

Ces formules sont d'un usage fréquent.

Nous établissons encore une formule donnant, pour une poutre droite quelconque, l'expression du moment M pour une section H , comprise entre deux autres sections A_1 et A_2 , en fonction des moments M_1 et M_2 de ces deux sections et de la distance $x = AH$.



Pour la recherche de ce moment M , on peut d'abord remplacer toutes les forces situées à gauche de A_1 par un couple de moment M_1 et par l'effort tranchant T_1 agissant au point A_1 . Par suite le moment fléchissant en H sera, en désignant par F l'une quelconque des forces agissant entre A_1 et H et par f sa distance à A_1 (nous nous limitons

au cas des forces isolées, mais la démonstration s'étend sans peine au cas de charges continues):

$$M = M_1 - T_1 x + \sum (f-x) F.$$

Posons $T_1 = F_1 + F_1'$, en désignant par F_1 la réaction verticale qui se produirait au point A_1 si la poutre était limitée à la longueur $A_1 A_2$ et posée sur deux appuis en A_1 et A_2 , et soit μ la valeur du moment fléchissant ordinaire qui s'exercerait au point H dans ces conditions; on a:

$$\mu = -F_1 x + \sum (f-x) F.$$

On en déduit par différence:

$$M - M_1 - \mu = -F_1' x.$$

Pour $x = l$, $M = M_2$ par définition, et $\mu = 0$, A_2 étant appui simple dans l'estimation de μ . Donc:

$$M_2 - M_1 = -F_1' l, \text{ et } -F_1' = \frac{M_2 - M_1}{l}.$$

Ainsi:

$$M = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l} x + \mu.$$

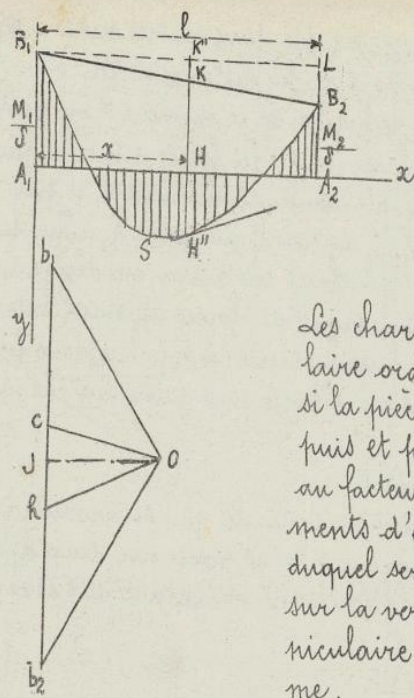
Cette formule est susceptible d'une interprétation graphique. Prenons A_1, A_2 comme axe des abscisses de la courbe des moments. Soient $A_1 B_1 = \frac{M_1}{\delta}$ et $A_2 B_2 = \frac{M_2}{\delta}$. Construisons le polygone funiculaire ordinaire $B_1 S B_2$ correspondant aux forces qui agissent sur la partie $A_1 A_2$ de la poutre, comme si la pièce n'avait que la longueur $A_1 A_2$ et reposait sur deux appuis en A_1 et en A_2 , en choisissant le pôle de façon que la ligne de clôture du funiculaire soit $B_1 B_2$. Il est facile de voir qu'en un point quelconque le moment fléchissant M est représenté, au facteur δ près, par l'ordonnée telle que HH' comprise entre la droite $A_1 A_2$ et le funiculaire $B_1 S B_2$.

En effet, si l'on suppose pour fixer les idées M_1 et M_2 négatifs, on a sur la figure: $HH'' + H''K + KK'' + K''H = 0$, avec $KH'' = \frac{\mu}{\delta}$, $KK'' = \frac{M_1 - M_2}{l \delta} x$, $K''H = \frac{M_1}{\delta}$; d'où $M = \delta \cdot HH''$.

Cette formule permet aussi de trouver géométriquement l'effort tranchant; car

$$T = -\frac{dM}{dx} = -\frac{M_2 - M_1}{l} - \frac{d\mu}{dx}$$

$-\frac{d\mu}{dx}$ est l'effort tranchant qui se produirait dans la section considérée de la poutre limitée à la longueur $A_1 A_2$ et posée sur deux appuis en A_1 et A_2 . Par le pôle o , menons oc parallèle à la ligne de clôture $B_1 B_2$, oh parallèle à la tangente en H''



à la ligne funiculaire, OJ parallèle à $A_1 A_2$. 106.

On a :

$$-\frac{dM}{dx} = cb, \quad \frac{cJ}{J} = \frac{M_2 - M_1}{l};$$

d'où :

$$T = cb - cJ = Jh.$$

Nous allons appliquer ces résultats à la solution de la question posée.

1^o Poutre encastree à ses deux extrémités.

Les charges sont quelconques. - Construisons un funiculaire ordinaire $B_1 S B_2$ des moments fléchissants comme si la poutre était simplement posée en A_1 et A_2 sur ses appuis et portons les ordonnées $B_1 C_1$ et $B_2 C_2$ représentant, au facteur $\frac{1}{J}$ près, les valeurs inconnues des deux moments d'encastrement. La droite $C_1 C_2$ sera l'axe à partir duquel seront comptés, à l'après, les moments fléchissants, sur la verticale de chaque point, jusqu'à la courbe funiculaire $B_1 S B_2$ qui achèvera d'en limiter le diagramme.

Appliquons à la poutre entière les formules relatives à la déformation; comme en A_1 et A_2 , on a : $y_1 = 0, \theta_1 = 0, y_2 = 0, \theta_2 = 0$, et que EI est constant, il vient :

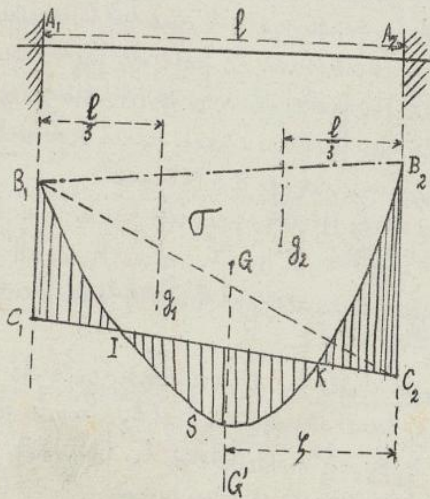
$$\int_0^l M dx = 0 \quad \int_0^l h M dx = 0;$$

ces relations expriment l'équilibre du système des charges fictives $M dx$ appliquées aux éléments dx de la poutre.

La première équation exprime que la somme de ces forces fictives est nulle et que, par suite, l'aire hachurée est nulle. Les moments d'encastrement M_1 et M_2 étant négatifs, la corde $C_1 C_2$ doit donc couper la courbe funiculaire, et, les points de rencontre, l'aire positive ISK sera égale en valeur absolue à la somme des aires négatives $B_1 C_1 I$, $B_2 C_2 K$.

La seconde équation exprime que la somme des moments de ces mêmes forces par rapport au point A_2 est nulle, c'est-à-dire que le moment de l'aire positive est égal à la somme des moments des deux aires négatives.

En ajoutant l'aire commune $B_1 I K B_2$, les mêmes conditions s'appliqueront à l'aire positive $B_1 S B_2$ qui est celle du funiculaire ordinaire complet à partir de sa ligne de clôture $B_1 B_2$, et à l'aire négative formée par le trapèze $B_1 C_1 C_2 B_2$. Ces deux surfaces sont donc égales



et leurs centres de gravité sont situés sur une même verticale.

Soit G le centre de gravité du funiculaire, situé sur une verticale $G'G$ à une distance φ de la verticale A_2B_2 ; σ l'aire du funiculaire $B_1S B_2$; son moment par rapport à A_2 sera $\sigma \varphi$.

Décomposons le trapèze en deux triangles $C_2B_1B_2$ et $C_2C_1B_1$; ces deux triangles auront leur surface totale égale à σ et la somme de leurs moments égale à $\sigma \varphi$; d'où les deux équations:

$$\frac{M_1}{\delta} \cdot \frac{l}{2} + \frac{M_2}{\delta} \cdot \frac{l}{2} = -\sigma, \quad \frac{M_1}{2\delta} \cdot \frac{2}{3}l + \frac{M_2}{2\delta} \cdot \frac{l}{3} = -\sigma \varphi;$$

de là on tire les valeurs de M_1 et M_2 :

$$M_1 = -\frac{2\sigma\delta}{l^2}(3\varphi - l), \quad M_2 = -\frac{2\sigma\delta}{l^2}(2l - 3\varphi).$$

Posons $\sigma = \lambda l$; nous aurons:

$$\frac{B_1C_1}{2\lambda} = \frac{3\varphi - l}{l}, \quad \frac{B_2C_2}{2\lambda} = \frac{2l - 3\varphi}{l};$$

on aura donc M_1C_1 et M_2C_2 par la simple construction de quatrième proportionnelles.

Ces longueurs une fois connues, le diagramme des moments fléchissants sera connu. Son ordonnée la plus grande permettra de déterminer l'équarissage. Les variations de l'effort tranchant se suivront sans peine, et on construira comme au 76^e précédent une transformée de la fibre moyenne déformée par un second funiculaire de charges fictives; ce funiculaire a ses côtés extrêmes dans la direction même de la poutre A_1A_2 . Les forces fictives sont portées dans un sens ou dans l'autre, sur la ligne des forces, suivant que les surfaces élémentaires correspondent à des moments positifs ou négatifs.

La fibre neutre présente des points d'inflexion sur les verticales des points I et K pour lesquels M est nul.

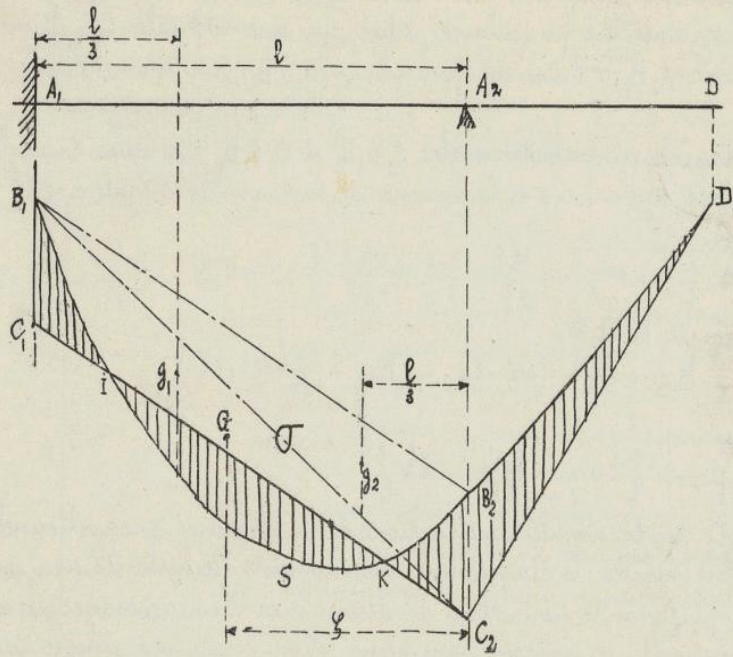
2^e: Poutre encastree à une extrémité et posée sur un appui vers l'autre extrémité. Soit la poutre A_1D encastree en A_1 et posée au point A_2 sur un appui. Construisons, comme s'il n'y avait pas encastrement au point A_1 , un funiculaire ordinaire $B_1S B_2D$, dont la ligne de clôture serait la droite B_1C_2 qui joint le point B_1 au point C_2 où la tangente en D , rencontre la verticale du point d'appui A_2 ; $-B_2C_2 \times \delta$ représente le moment fléchissant ainsi déterminé et négatif dans la section A_2 .

L'encastrement produit en A_1 un moment fléchissant négatif M_1 inconnu; portons B_1C_1 égal à $\frac{M_1}{\delta}$; la droite C_1C_2 sera la nouvelle ligne de clôture formant l'axe des abscisses du diagramme des moments fléchissants dont la courbe funiculaire forme la limite.

Appliquons la seconde équation de la déformation entre les points A_1 et A_2 ; en A_1 et en A_2 , y est nul; en A_1 , δ est nul. On aura donc:

$$\int_0^l M dx = 0$$

Ainsi la somme des moments par rapport à A_2 des aires des moments fléchissants situés à gauche de A_1 est nulle; autrement dit les deux aires de moments fléchissants négatifs C_1IB_1 et C_2KB_2 ont un moment total égal, au signe près, à celui de



l'aire positive ISK ;
 ou encore, en ajoutant de part et d'autre la même surface B_1KB_2 , l'aire négative du quadrilatère $C_1C_2B_2B_1$, a même moment que la partie B_1SB_2 du funiculaire. Soit σ la mesure de cette surface B_1SB_2 , et ξ la distance de son centre de gravité G à la verticale A_2B_2 ; soient g_1 et g_2 les centres de gravité des deux triangles $C_1C_2B_1$ et

$C_2B_1B_2$ qui composent le trapèze négatif; l'équation de condition obtenue s'écrira:

$$\sigma \xi + \frac{M_1 l}{2\delta} \cdot \frac{2}{3} l + \frac{M_2 l}{2\delta} \cdot \frac{1}{3} = 0 ;$$

d'où en posant $\sigma = l \lambda$:

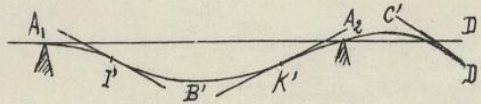
$$2M_1 + M_2 = -\frac{6\lambda \xi \delta}{l} ,$$

ou enfin:

$$\frac{2B_1C_1 + B_2C_2}{l} = \frac{\xi}{\delta} .$$

On aura donc $2B_1C_1 + B_2C_2$ par la construction d'une quatrième proportionnelle, et comme B_2C_2 est connu, on aura immédiatement B_1C_1 , qui permettra de tracer l'axe définitif des moments fléchissants, lesquels seront comptés, au facteur δ près, entre cet axe et le funiculaire pour la portion A_1A_2 de la poutre, et entre ce même funiculaire et son côté extrême prolongé D_1C_2 pour la portion A_2D en encorbellement. Les moments sont positifs entre les points I et K , négatifs en dehors; ces deux points, pour lesquels $M=0$, correspondent aux points d'inflexion de la fibre neutre.

La fibre neutre et la flèche s'obtiendront comme au 96^e précédent par la construction d'un funiculaire de forces fictives, à l'égard desquelles on aura soin d'observer qu'elles sont à porter dans un sens ou dans l'autre sur la ligne des forces suivant que le moment fléchissant est positif ou négatif.



Chapitre VII. - Poutres continues. -

1. Théorème des trois moments, ou de Bertot et Clapeyron. -

On désigne sous le nom de poutre continue une poutre qui repose sur plus de deux appuis simples; ces appuis subdivisent la pièce en intervalles que l'on appelle des travées.

Les réactions des appuis ne peuvent pas se déterminer par la statique; il faut avoir recours à la loi de déformation de la fibre neutre.

Supposons une poutre continue de n travées, posée sur $(n+1)$ appuis et chargée de poids quelconques. Il existe, entre les moments fléchissants M_1, M_2, M_3 de trois appuis consécutifs A, A_2, A_3 quelconques, une relation linéaire facile à établir, due à un ancien officier de marine, Bertot, et attribuée à tort à Clapeyron.

Appliquons en effet aux points de la fibre neutre correspondant à deux appuis consécutifs les relations connues:

$$\theta = \theta_0 - \int_0^{h_0} \frac{M dx}{EI}, \quad y = y_0 + h_0 \theta_0 - \int_0^{h_0} \frac{h M dx}{EI}.$$

Pour les trois appuis consécutifs A, A_2, A_3 , on a: $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, et en désignant par $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ les valeurs correspondantes de θ , par l et l' les longueurs des deux travées, on a pour la première travée A, A_2 , $\theta_0 = \theta_1, \theta = \theta_2, h_0 = l$, et pour la deuxième travée A_2, A_3 , $\theta_0 = \theta_2, \theta = \theta_3, h_0 = l'$. Les formules ci-dessus deviennent:

$$\begin{aligned} \theta_2 - \theta_1 + \int_0^l \frac{M dx}{EI} &= 0 & l \theta_1 - \int_0^l \frac{h M dx}{EI} &= 0 \\ \theta_3 - \theta_2 + \int_0^{l'} \frac{M dx}{EI} &= 0 & l' \theta_2 - \int_0^{l'} \frac{h M dx}{EI} &= 0. \end{aligned}$$

L'élimination des quantités θ entre ces équations donne, EI étant constant:

$$\int_0^l M dx + \frac{1}{l} \int_0^l h M dx - \frac{1}{l'} \int_0^{l'} h M dx = 0 \quad (1)$$

Soit C_1, C_2, C_3 l'axe des abscisses des moments fléchissants de la poutre; portons en $C_1, B_1, C_2, B_2, C_3, B_3$ les ordonnées représentatives, au facteur S près, des trois moments (généralement négatifs) M_1, M_2, M_3 correspondant aux trois appuis consécutifs A, A_2, A_3 , et construisons les deux funiculaires ordinaires B_1, S, B_2 et B_2, S', B_3 des deux travées supposées indépendantes, avec les lignes de clôture B_1, B_2 et B_2, B_3 .

Appelons T et T' les surfaces des deux funiculaires entre les courbes et les droites B_1, B_2 et B_2, B_3 ; désignons par G et G' les centres de gravité de ces deux aires respectivement aux verticales des deux appuis extrêmes A_1 et A_3 .

On voit que les points I et K, T et K' , séparent les surfaces de moments positifs IS et K

110
 I'S'K' des surfaces de moments négatifs $C_1 I B_1, C_2 K B_2, C_3 I' B_2, C_3 K' B_3$, et qu'en ajoutant aux surfaces négatives ou positives, la même surface $B_1 I K B_2$ pour la première travée et $B_2 I' K' B_3$ pour la 2^e travée, on obtient ainsi dans les deux travées: 1^o comme surfaces positives, celles des funiculaires $B_1 S B_2$ et $B_2 S' B_3$; 2^o comme surfaces négatives, celles des trapèzes $C_1 C_2 B_1 B_2, C_2 C_3 B_2 B_3$. En décomposant ces trapèzes en triangles, comme on l'a fait pour les poutres encastrees, on établit facilement que:

$$\frac{1}{\delta} \int_0^l M dx = \sigma + l \frac{M_1 + M_2}{2\delta},$$

$$\frac{1}{\delta l} \int_0^l h M dx = \frac{\sigma(l-\varphi)}{l} + \frac{l}{6\delta} (2M_1 + M_2)$$

$$\frac{1}{\delta l'} \int_0^{l'} h' M dx = \frac{\sigma'\varphi'}{l'} + \frac{l'}{6\delta} (2M_2 + M_3).$$

Par suite de ces substitutions et des réductions qui s'opèrent, l'équation (1) devient l'équation dite des trois moments:

$$M_1 l + 2M_2(l+l') + M_3 l' + 6\delta \left(\frac{\sigma\varphi}{l} + \frac{\sigma'\varphi'}{l'} \right) = 0, \quad (2)$$

qui est la relation linéaire générale, s'appliquant au cas de charges quelconques. Si l'on pose $\sigma = l\lambda, \sigma' = l'\lambda'$, elle s'écrira:

$$M_1 l + 2M_2(l+l') + M_3 l' + 6\delta(\lambda\varphi + \lambda'\varphi') = 0.$$

Considérons en particulier le cas où chaque travée est uniformément chargée; soient p et p' les charges par unité de longueur dans chaque travée; les funiculaires sont des paraboles à axe vertical, de flèches φ et φ' et l'on a:

$$\varphi = \frac{p}{24}, \quad \varphi' = \frac{p'}{24}, \quad \sigma = \frac{2}{3} p l, \quad \sigma' = \frac{2}{3} p' l', \quad \delta = \frac{p l^2}{8}, \quad \delta' = \frac{p' l'^2}{8}.$$

L'équation précédente devient:

$$M_1 l + 2M_2(l+l') + M_3 l' + \frac{p l^3}{4} + \frac{p' l'^3}{4} = 0 \quad (3)$$

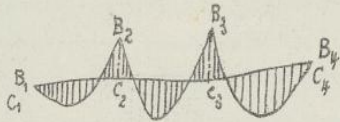
En appliquant ce théorème des trois moments successivement aux n travées de la poutre, on obtiendra $(n-1)$ équations du premier degré qui permettront de déterminer les $(n+1)$ moments inconnus M_1, M_2, \dots, M_{n+1} , car on connaît les deux moments des appuis extrêmes de la poutre qui sont nuls généralement. S'ils n'étaient pas nuls, on les calculerait soit en prenant le moment des forces agissant au delà de ces appuis si la poutre débordait ces appuis, soit en exprimant les conditions d'encastrement de ces extrémités, si la poutre y était encastree.

Ces moments fléchissants aux appuis sont tous négatifs lorsque toutes les travées sont chargées.

2. Représentation des moments fléchissants aux divers points de la poutre. - Lorsqu'on a trouvé, par la résolution des équations ci-dessus les valeurs des moments M_1, M_2, \dots sur les divers appuis de la poutre, il suffira de porter, au dessus de la ligne $C_1 C_2 C_3 \dots$ qui doit former l'axe des abscisses des moments fléchissants les valeurs de $\frac{M_1}{\delta}, \frac{M_2}{\delta}, \frac{M_3}{\delta}, \dots$ en $C_1 B_1, C_2 B_2, C_3 B_3, \dots$, puis de construire les funiculaires ordinaires $B_1 S B_2, B_2 S' B_3, \dots$ ayant pour lignes de clôture les droites $B_1 B_2, B_2 B_3, \dots$ en choisissant convenablement le pôle et en adoptant une distance po-

111.
 ligne unique. Les contours successifs de ces divers funiculaires formeront le diagramme des moments fléchissants qui seront mesurés, au facteur δ près, entre le contour funiculaire et l'axe des abscisses.

On pourrait aussi tracer d'abord les funiculaires avec des lignes de fermeture quelconques, mais se raccordant successivement aux points B_1, B_2, B_3, \dots ; en



portant les ordonnées $B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, \dots$ de haut en bas à partir des points B_1, B_2, B_3, \dots on aurait un axe de moments $C_1C_2C_3, \dots$ polygonal à sommets correspondant aux appuis.

Les moments, sur la figure, sont négatifs de C_1 en I , de K en I' , de K' en M_3 , etc... et positifs entre I et K , I' et K' , etc... Les points I et K , où M est nul, correspondent aux points d'inflexion de la fibre neutre déformée.

Lorsque les moments fléchissants ordinaires μ des diverses travées supposées indépendantes (c'est-à-dire en supposant la poutre discontinue) peuvent s'exprimer analytiquement, par exemple dans le cas de charges uniformément réparties, on pourra avoir la valeur de M dans une section quelconque d'une travée, en fonction des moments M_1 et M_2 sur les 2 appuis A_1 et A_2 qui comprennent cette travée par la relation connue:

$$M = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l} x + \mu x^2$$

où l'on remplacera μ par son expression analytique en fonction de la distance x à l'appui A_1 , de la section considérée de la poutre.

3. Représentation des efforts tranchants et des réactions des appuis.

Les efforts tranchants se mesurent sur les lignes des forces des dynamiques, à partir des points J_1, J_2, J_3, \dots obtenus, dans le dynamique de chaque travée, en mesurant les droites $0J_1, 0J_2, 0J_3, \dots$ parallèles à l'axe des abscisses des moments fléchissants $C_1C_2C_3, \dots$

Ces efforts tranchants seront, pour des charges quelconques, figurées par des contours à gradins, qui deviennent des droites inclinées dans le cas de charges uniformément réparties, comme dans la figure ci-dessous (droites T_1, T_2, T_3, T_4).

La figure de la page suivante indique les valeurs maxima des efforts tranchants, ainsi que les réactions des appuis Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 , égales, pour chaque appui, à la somme des valeurs absolues des deux efforts tranchants de droite et de gauche correspondant aux deux travées contiguës. Par exemple, T_2' étant l'effort tranchant de droite de la section A_2 et T_2 celui de gauche, on a $T_2' = T_2 + Y_2$, d'où $Y_2 = T_2' - T_2$.

D'ailleurs on a :

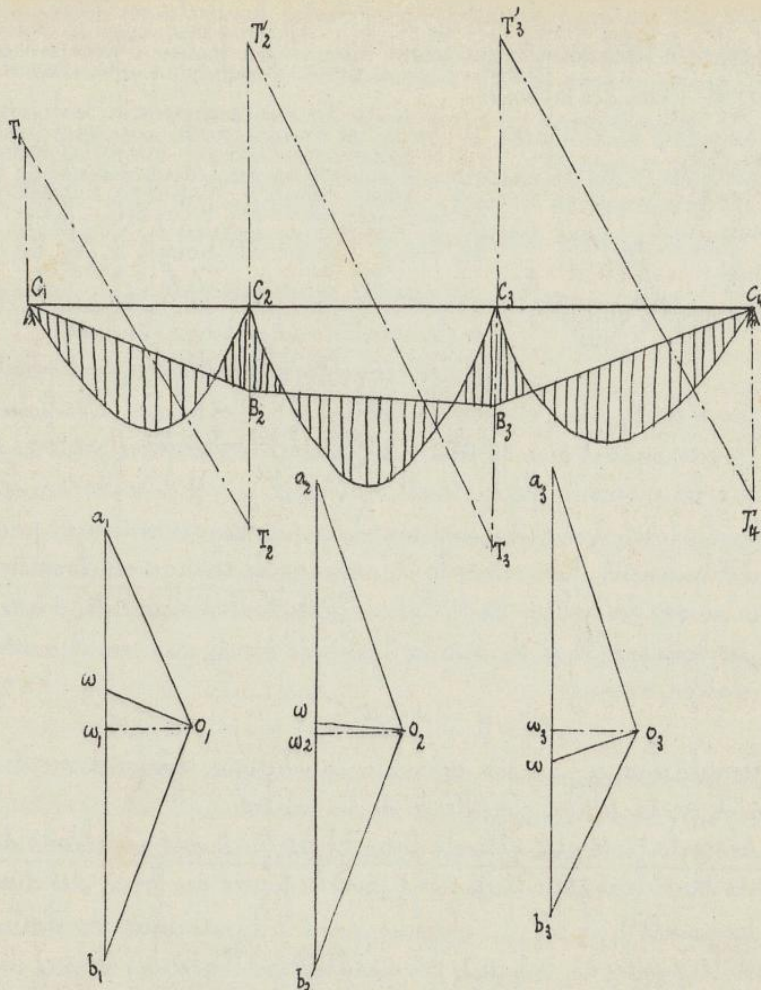
$$T_2 = \frac{M_2 - M_1}{l} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)_{x=l}$$

$$T_2' = \frac{M_3 - M_2}{l'} + \left(\frac{\partial \mu'}{\partial x}\right)_{x=0}$$

donc :

$$Y_2 = \frac{M_1}{l} - M_2 \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'}\right) + \frac{M_3}{l'} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)_{x=0} - \left(\frac{\partial \mu'}{\partial x}\right)_{x=l}$$

Dans le cas de charges uniformément réparties, on a :



$$\begin{aligned}
 T_1 &= \omega a_1 & T_2 &= -\omega b_1 & T_3 &= -\omega_2 b_2 & T_4 &= \omega_3 b_3 \\
 Y_1 &= T_1 = \omega a_1 & Y_2 &= T'_2 - T_2 = \omega b_1 + \omega_2 a_2 & Y_3 &= T'_3 - T_3 = \omega_2 b_2 + \omega_3 a_3 & Y_4 &= -T_4 = \omega_3 b_3
 \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2}, \quad \mu' = \frac{p'l'x}{2} - \frac{p'x'^2}{2};$$

par suite :

$$Y_2 = \frac{M_1}{l} - M_2 \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} \right) + \frac{M_3}{l'} + \frac{pl}{2} + \frac{p'l'}{2}. \quad (4)$$

Cette formule donnera, pour ce cas particulier, les réactions des appuis intermédiaires.

4. Fibre neutre et flèche. - On trouverait la fibre neutre déformée et la flèche de la poutre, en construisant, à partir d'une extrémité de la pièce, les dynamiques et les funiculaires des forces fictives, en raccordant sur chaque appui par un même rayon fictif et une même tangente les dynamiques des forces fictives et leurs funiculaires qui se rapportent aux deux travées contiguës à cet appui.

5. Variation des moments fléchissants avec les charges. - Les poutres continues sont particulièrement avantageuses lorsque leurs diverses travées restent toujours chargées, mais si certaines travées sont momentanément déchargées, elles ne peuvent plus contre-

balancer l'effet des charges des travées voisines sur lesquelles se développent alors des moments fléchissants bien plus considérables. Aussi, lorsqu'on aura à craindre ces variations de charges, faudra-t-il faire l'étude des moments fléchissants dans les diverses travées, d'après la méthode précédente, mais en considérant les diverses hypothèses de surcharge possibles, et en traçant pour chacune d'elles le diagramme des efforts correspondants. On résumera ensuite les divers diagrammes obtenus en un seul qui comprendra, pour toutes les sections de la poutre, les moments maxima, positifs ou négatifs, susceptibles de se produire, d'après l'examen des diagrammes partiels, et c'est d'après les valeurs obtenues, positives ou négatives, du diagramme définitif des moments maxima, que l'on fera le calcul des dimensions de la poutre.

6. Poutres ayant toutes les travées égales et chargées du même poids uniformément réparti. - Nous allons appliquer à ce cas usuel les résultats précédents.

1^o Cas de deux travées. - Supposons d'abord les extrémités simplement appuyées. - On a $M_1 = M_3 = 0$, et comme $p = p'$, $l = l'$, les formules (3) et (4) donnent:

$$M_2 = -\frac{pl^2}{8} \quad Y_2 = \frac{70}{8} pl$$

Par symétrie, $Y_1 = Y_3$, et comme $Y_1 + Y_2 + Y_3 = 2 pl$, il vient:

$$Y_1 = Y_3 = \frac{3}{8} pl$$

Pour la même raison de symétrie, il suffit de suivre la variation du moment fléchissant dans une travée, la seconde par exemple; on a:

$$M = M_2 + \frac{M_3 - M_2}{l} x + \mu = \frac{M_2(l-x)}{l} + \mu$$

ou

$$M = -\frac{pl(l-x)}{8} + \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2} = \frac{p}{2} (l-x) \left(x - \frac{l}{4}\right);$$

$$\frac{dM}{dx} = -p \left(x - \frac{5l}{8}\right).$$

Le moment fléchissant prend ses plus grandes valeurs: pour $x = \frac{5l}{8}$ où il vaut: $\frac{9pl^2}{128}$, et pour $x = 0$, où il vaut: $-\frac{pl^2}{8}$ (quantité supérieure en valeur absolue à la précédente). - Le maximum de l'effort tranchant est $\frac{5pl}{8}$.

La fibre moyenne présentera dans chaque travée une inflexion distante de $\frac{l}{8}$ de la verticale de l'appui intermédiaire. Son équation différentielle

$$EI \frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{p}{8} (4x^2 - 5lx + l^2)$$

donne, en observant que, par symétrie, sur l'appui intermédiaire, la tangente est horizontale:

$$EI \frac{dY}{dx} = \frac{p}{8} \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{5lx^2}{2} + l^2x\right),$$

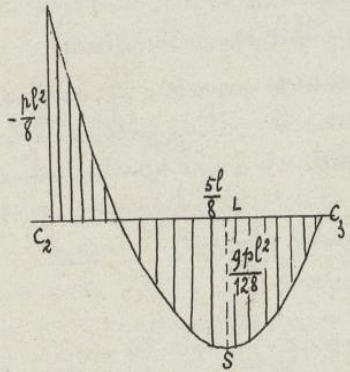
$$EIY = \frac{p}{8} \left(\frac{x^4}{3} - \frac{5lx^3}{6} + \frac{l^2x^2}{2}\right).$$

Le maximum de Y a lieu pour $x_1 = \frac{l}{16} (15 - \sqrt{33})$; sa valeur est [en remplaçant d'abord, dans Y , x^2 par $\frac{3l}{8} (5x - 2l)$]:

$$f_1 = \frac{pl^2}{512 EI} (5x_1 - 2l) (6l - 5x_1) = m \frac{5pl^4}{384 EI}, \text{ en posant:}$$

$$m = \frac{(55\sqrt{33} + 39)l^3}{512 \times 5} = 0,416.$$

En somme, si on compare cette poutre continue à deux poutres indépendantes qua-



apposées sur l'appui intermédiaire, on reconnaît qu'il faut adopter le même ^{11H.} équilibrage, car le moment fléchissant le plus grand est le même ($\frac{pl^2}{8}$), mais au point de vue de la déformation, la flèche est réduite aux $\frac{2}{5}$ environ de ce qu'elle serait avec des travées indépendantes.

Considérons maintenant une poutre à deux travées égales encastrée à ses deux extrémités. On a, par raison de symétrie, $M_1 = M_3$, $Y_1 = Y_3$. Les relations (3) et (4) donnent:

$$4M_1 + 8M_2 + pl^2 = 0, \quad 2Y_2 = 2(M_1 - M_2) + pl^2.$$

Dans la première travée, la fibre moyenne est définie par:

$$EI \frac{d^2 Y}{dx^2} = -M_1 - \frac{M_2 - M_1}{l} x + \frac{px^2}{2} - \frac{plx}{2},$$

ou, en observant que sur l'appui A_1 , Y et sa dérivée sont nulles, par

$$EIY = -M_1 \frac{x^2}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l} \frac{x^3}{3} + \frac{px^4}{24} - \frac{plx^3}{12}.$$

Exprimons que Y est nul pour $x=l$, et nous obtiendrons la relation:

$$8M_1 + 4M_2 + pl^2 = 0.$$

Nous aurons donc:

$$M_1 = M_2 = M_3 = -\frac{pl^2}{12}, \quad Y_2 = pl, \quad Y_1 = Y_3 = \frac{pl}{2}.$$

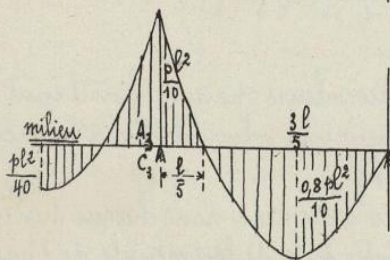
Tout se passe comme si chaque travée était encastrée aux deux extrémités.

2° Cas de trois travées. - Bornons-nous au cas d'appuis simples aux extrémités. On a $M_1 = M_4 = 0$, et par raison de symétrie, $M_2 = M_3$, $Y_1 = Y_4$, $Y_2 = Y_3$. Les relations (3) et (4) donnent:

$$M_2 = M_3 = -\frac{pl^2}{10}, \quad Y_2 = Y_3 = \frac{11}{10} pl.$$

Comme $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 3pl$, il vient:

$$Y_1 = Y_4 = \frac{4}{10} pl.$$



Suivons les variations du moment fléchissant dans la moitié de droite. - Pour la travée de droite, on a, C_3 étant l'origine des abscisses:

$$M = \frac{pl^2}{10} + \frac{plx}{10} + \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2} = \frac{p}{2}(l-x)(x - \frac{l}{5});$$

$$\frac{dM}{dx} = -p(x - \frac{3l}{5})$$

Le moment fléchissant prend ses plus grandes valeurs pour $x = \frac{3l}{5}$ où il vaut $\frac{8pl^2}{100}$, et pour $x=0$, où il vaut $-\frac{pl^2}{10}$ (quantité supérieure en valeur absolue à la précédente). Il s'annule pour $x = \frac{l}{5}$, abscisse correspondant à un point d'inflexion de la fibre moyenne.

Pour la travée précédente, on a, C_2 étant l'origine des abscisses:

$$M = -\frac{pl^2}{10} + \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2} = \frac{pl^2}{40} - \frac{p}{2}(x - \frac{l}{2})^2;$$

ses valeurs limites sont $\frac{pl^2}{40}$ pour le milieu de la travée, et $-\frac{pl^2}{10}$ pour les appuis.

En résumé, la valeur de M à introduire dans l'équation d'équarrissage est $\frac{pl^2}{10}$, tandis qu'elle serait $\frac{pl^2}{8}$ avec des travées indépendantes; il y a donc avantage d'économie à employer une poutre continue; la plus grande valeur de l'effort tranchant est $\frac{3}{5} pl$.

Le calcul de la flèche se conduirait comme plus haut.

3° Cas de quatre travées. - Les appuis extrêmes sont simples. On a $M_1 = M_5 = 0$, et ^{115.}
 par raison de symétrie $M_2 = M_4$, $Y_1 = Y_5$, $Y_2 = Y_4$.

Les relations (3) et (4) donnent; appliquées deux fois :

$$\begin{aligned} HM_2 + M_3 + \frac{pl^2}{2} &= 0 & l Y_2 &= -2M_2 + M_3 + pl^2 \\ 2M_2 + HM_3 + \frac{pl^2}{2} &= 0 & l Y_3 &= 2M_2 - 2M_3 + pl^2 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} M_2 = M_4 &= -\frac{3pl^2}{28}, & Y_2 = Y_4 &= \frac{32pl}{28}, \\ M_3 &= -\frac{2pl^2}{28}, & Y_3 &= \frac{26pl}{28}, \end{aligned}$$

et comme $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 = 4pl$, il vient
 $Y_1 = Y_5 = \frac{11pl}{28}$

On suivrait alors comme précédemment les variations du moment fléchissant.

4° Cas de cinq travées. - On a les résultats suivants :

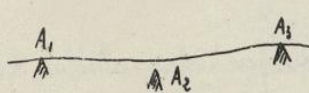
$$\begin{aligned} M_1 = M_6 &= 0, & M_2 = M_5 &= -\frac{4pl^2}{38}, & M_3 = M_4 &= -\frac{3pl^2}{38}; \\ Y_1 = Y_6 &= \frac{15pl}{38}, & Y_2 = Y_5 &= \frac{43pl}{38}, & Y_3 = Y_4 &= \frac{37pl}{38}. \end{aligned}$$

7. Avantages et inconvénients des ponts continus. - Les avantages sont :

1° une rigidité plus grande, les flèches étant beaucoup plus faibles que dans les ponts indépendants, conséquence de la réduction des surfaces Max des moments fléchissants;
 2° l'économie réalisée, dans le cas de ponts longs et fortement chargés, lorsqu'il est possible de profiter de la diminution générale des moments fléchissants pour faire varier leur section de façon qu'en chaque point elle soit strictement suffisante pour résister au moment fléchissant (ce point sera justifié au Chapitre suivant);

3° la possibilité de mise en place, pour les grands ponts par exemple, par les procédés de lancement au lieu de recourir à des échafaudages provisoires, d'une exécution longue et difficile.

Les inconvénients sont : 1° le danger pouvant résulter d'un tassement des appuis,



qui viendrait par exemple à supprimer un support tel que A_2 , et en doublant la portée de la poutre, en compromettrait la solidité; l'emploi des ponts continus exige

donc l'invariabilité absolue des points d'appui;

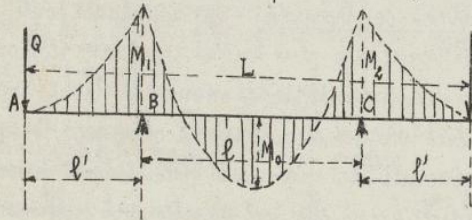
2° l'augmentation des pressions sur les appuis intermédiaires, pressions égales aux réactions Y_1, Y_2, Y_3, \dots calculées comme il a été indiqué, lesquelles sont plus fortes que dans le cas de ponts discontinus. Ainsi, avec des charges uniformément réparties et dans le cas de 2 travées égales, où l'écart est maximum, l'appui intermédiaire porte une charge $\frac{10}{8}pl$ ou $\frac{5}{4}pl$, soit un quart en plus de la charge pl que lui transmettrait une poutre discontinue. Il sera essentiel de tenir compte de ce fait dans le calcul des dimensions des appuis.

3° le changement de sens des efforts qui se produit en certains points dans le cas où les surcharges sont susceptibles de variations importantes et fréquentes comme dans les

116.
 ponts. C'est ce qui a lieu, par suite du changement de signe des moments fléchissants sur une longueur plus ou moins grande, dans le voisinage des points I et K correspondant aux points d'inflexion de la fibre neutre, où $M=0$, dans les figures données plus haut, les variations de charge amenant un déplacement de ces points I et K. Il en résulterait une diminution du coefficient de sécurité à employer, d'où une réduction de l'économie que la poutre continue devait réaliser.

En somme, la poutre continue, dont la théorie a fait l'objet d'études importantes et remarquables de la part d'ingénieurs éminents (Bresse, Maurice Lévy, Lefort, etc...) est un organisme savant et ingénieux, mais qui demande une grande perfection d'exécution et une surveillance constante. On l'emploie de moins en moins pour les grands travaux et on lui substitue les poutres en double console dites Cantilever, système renouvelé du Moyen-âge et de la Renaissance où presque toutes les maisons avaient leurs étages en encorbellement.

8. Poutres en double console ou Cantilever. - Soit une poutre horizontale AD de longueur L, uniformément chargée (à raison de p par unité de longueur); on la soutient en deux points B et C, distants de l et on a deux consoles BA et CD de longueur l'.



Nous supposons en outre qu'à chaque extrémité A et D soit appliquée une même surcharge isolée Q. Nous allons chercher la distribution des moments fléchissants et la valeur du rapport $\frac{l'}{L}$ qui donne la poutre la plus avantageuse.

Le moment fléchissant sur l'appui B est: $M_1 = -(Ql' + \frac{pl'^2}{2})$; en un point d'abscisse x de la travée centrale (origine B), il est: $M = M_1 + \frac{px(L-x)}{2}$, et il atteint son maximum au milieu de la travée, où il est $M_0 = M_1 + \frac{pl^2}{8}$.

Lorsqu'on est libre de faire varier le rapport $\frac{l'}{L}$, il y a intérêt à le choisir de manière à rendre minimum le plus grand moment fléchissant; cette condition sera remplie lorsque les moments sur les piles auront la même valeur que le moment au milieu de la portée BC.

Déterminons donc le rapport $\frac{l'}{L} = u$ de manière à ce que, en valeur absolue, M_1 et M_0 soient égaux; alors $M_0 = -M_1$; par suite: $2M_1 + \frac{pl^2}{8} = 0$, et on a:

$$\frac{pl'^2}{8} - 2Ql' - pl'^2, \text{ ou } (1-2u)^2 - 8u^2 - 8u = 0,$$

en posant $Q = k p L$. On déduit de là:

$$u = \frac{l'}{L} = \sqrt{(0,5+2k)^2 + 0,25} - (0,5+2k).$$

et le moment maximum est alors:

$$M_0 = \frac{p(L-2l')^2}{16} = \frac{pL^2}{16} (1-2u)^2.$$

Soit par exemple $Q = \frac{pL}{10}$; alors $u = 0,1602$ et $M_0 = \frac{pL^2}{8} \times 0,23$. Le moment fléchissant maximum est environ le quart de ce qu'il serait si la poutre portait en A et D.

Le principe des poutres à double potence a été appliqué dans le grand projet étudié par les Ingénieurs du Creusot pour le pont à construire au dessus du Pas-de-Calais: largeur du détroit: 33 kilomètres; 66 travées de chacune 500 m. Profondeur d'eau:

55^m; hauteur libre sous le pont : 61^m. Cravées paires avec cantilever, de 500^m; consoles de 200^m. Cravées impaires formées de poutres de 100^m, posées ensuite sur les consoles. Le pont du Forth, de 500^m de portée, a été construit sur le même principe. Il n'y a plus, avec ce système, à craindre les légers tassements.

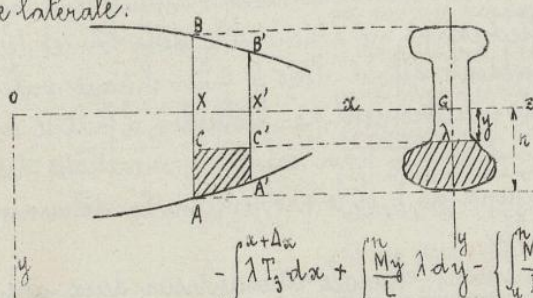
Chapitre VIII. - Poutres droites à section variable et d'é-gale résistance. -

1. Extension de la théorie de la flexion transversale. - Supposons que la poutre droite ne soit pas à section constante, mais à section lentement variable, les conditions de symétrie de la poutre et de répartition des charges restant d'ailleurs les mêmes qu'au Chapitre VI.

L'expérience conduit à admettre que la flexion déterminée dans la pièce des déformations qui obéissent aux mêmes lois que dans une poutre à section constante [Chap. VI, §2, in medio]. Il en résulte que tous les raisonnements faits pour les poutres à section constante s'appliquent aux poutres à section variable, et conduisent aux mêmes formules qui s'emploient de la même manière, à condition d'y regarder les quantités λ , n , n' et I comme des fonctions de l'abscisse x .

Il n'y a d'exception que pour la formule de la tension tangentielle T_3 , la démonstration donnée supposant l'invariabilité de la section transversale, mais il est aisé de voir comment doit être modifiée cette formule, en répétant d'ail-leurs identiquement le même raisonnement (voir page 89).

On considère une portion de la poutre comprise entre deux sections trans-versales voisines AB et $A'B'$ d'abscisses x et $x + \Delta x$, une couche CC' de cote y et la sur-face latérale.



On exprime que la somme des pro-jections sur ox des forces qui solli-citent cette portion de la poutre, supposée isolée, est nulle. On ob-tient :

$$-\int_x^{x+\Delta x} \lambda T_3 dx + \int_y^n \frac{M_y}{L} \lambda dy - \left\{ \int_y^n \frac{M_y}{I} \lambda dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_y^n \frac{M_y}{I} \lambda dy \right] \Delta x \right\} = 0;$$

d'où, Δx étant extrêmement petit et tendant vers zéro :

$$\lambda T_3 + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_y^n \frac{M \lambda y}{I} dy \right] = 0.$$

Comme $\frac{M}{I}$ ne dépend pas de y , on aura :

$$T_3 = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{M}{I} \int_y^n \lambda y dy \right\}.$$

Cette formule peut s'écrire; en notant que $\frac{d}{dx} \frac{dM}{dx}$ n'est autre que E (effort tranchant) :

$$T_3 = \frac{E}{\lambda I} \int_y^n \lambda y dy - \frac{M}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{I} \int_y^n \lambda y dy \right\}.$$

Le premier terme est la valeur qu'aurait T_3 si la poutre avait un profil constant; le second terme fournit la correction à faire subir au premier pour tenir compte de la variation du profil.

Soit par exemple un profil rectangulaire à hauteur seule variable z n. On a:

$$\int_{-y}^y \lambda y dy = \frac{\lambda(n^2 - y^2)}{2}; I = \frac{2\lambda n^3}{3};$$

$$T_3 = \frac{E(n^2 - y^2)}{2I} + \frac{3M}{4\lambda} \frac{n^2 - 3y^2}{n^4} \frac{dn}{dx}$$

2. Poutres d'égal résistance. - Pour un système donné de charges, le choix fait d'un profil constant n'est pas le plus économique: sauf dans une tranche, le moment résistant est partout supérieur au moment fléchissant; la plus grande tension développée sur les sections transversales n'atteint donc pas la limite permise et par suite la résistance de la matière n'est pas utilisée d'une façon complète.

On évite cet inconvénient en faisant varier la section de la poutre de manière qu'en chacune de ses tranches le moment résistant soit égal au moment fléchissant, ce qui revient à régler le profil par l'équation

$$\frac{R_0 I}{N} = M.$$

On obtient ainsi une poutre d'égal résistance. - En d'autres termes, une poutre d'égal résistance à la flexion transversale est une pièce dont le profil varie de telle sorte que chaque section transversale supporte une tension maximum dont la valeur absolue $\frac{M}{I} N$ soit égale à la limite que cette force puisse atteindre.

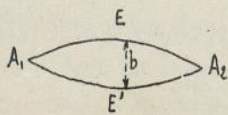
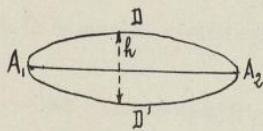
Si les réactions des appuis peuvent être déterminées statiquement (appuis simples, par exemple), le moment fléchissant ne dépend pas de la forme des sections transversales; l'équation précédente définit alors $\frac{I}{N}$ pour chaque valeur de x .

Si l'en est pas ainsi (double encastrement par exemple), il faut se servir de l'équation de la fibre moyenne déformée pour calculer les réactions des appuis; alors le moment fléchissant dépend de I , et le problème de la détermination du profil peut devenir inextricable.

1^{er} Exemple. - Poutre uniformément chargée reposant sur deux appuis.

Soit d'abord une section rectangulaire (b, h). L'équation de définition sera:

$$R_0 \frac{bh^2}{6} = \int_0^x p(x)(l-x) dx.$$



Si on laisse b constant, en faisant varier h , on voit que la hauteur variera comme les ordonnées d'une ellipse, ce qui donnera le profil longitudinal vertical $A_1 D A_2 D'$, le profil longitudinal étant un rectangle $b \times l$.

Si la hauteur h reste constante, et la largeur b

variable, la variation de b correspond à un contour parabolique $A_1 E A_2 E'$, comme la section longitudinale horizontale, le profil en long vertical étant un rectangle $h \times l$.

Soit maintenant un profil à double T, à semelles égales, de largeur b , d'épaisseur e , la hauteur étant h (grande par rapport à e). Comme on a alors sensiblement $\frac{I}{N} = b e h$, l'équation de définition sera:

$$R_0 b e h = \frac{p x (l-x)}{2}$$

On laisse constantes deux des quantités b, e, h ; la troisième varie alors comme les ordonnées d'une parabole. - Généralement on prend comme élément variable soit h , soit e .

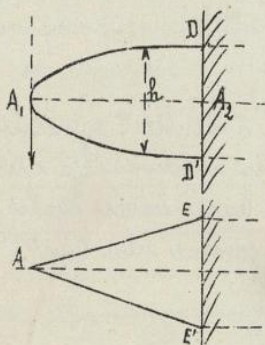
Il est aisé de reconnaître qu'à égalité de hauteur maximum, la poutre de hauteur constante n'exigera pour ses semelles qu'un poids égal aux $\frac{2}{3}$ de celui qui entrerait dans celles de la poutre dont la hauteur serait diminuée suivant la loi parabolique. D'autre part, le rayon de courbure de la fibre moyenne $\rho = \frac{E I}{M}$, sera, pour une poutre d'égale résistance $\rho = \frac{E}{R_0} N$, et dans le cas présent $\rho = \frac{E h}{2 R_0}$; donc une poutre de hauteur décroissante se déformera plus que celle à hauteur constante. - Ainsi dans la pratique, on laissera constantes b et h , et on fera varier l'épaisseur e de la semelle d'après la loi parabolique.

2^e Exemple. - Poutre encastree à une extrémité, libre à l'autre.

Supposons la section rectangulaire ($b h$) et la charge constituée par un poids P fixé à l'extrémité libre (origine) et par un poids uniformément réparti. On a:

$$R_0 \frac{b h^2}{6} = P x + \frac{p x^2}{2}$$

Si p est faible devant P et b constant, h varie comme une ordonnée de parabole; de là le contour vertical symétrique $A D D'$ (balancier de machines, manivelles, etc...).



Si P est négligeable devant p et b constant, h varie comme l'ordonnée d'une droite; d'où le profil triangulaire $A E E'$ utilisé pour marquises, auvents, ... (avec âme évidée).

Remarque. Si l'on acceptait les profils fournis par les considérations précédentes, les pièces ne sauraient résister à l'effort tranchant qui varie pour ainsi dire en sens inverse du moment fléchissant: là où celui-ci est nul, la section devrait l'être aussi.

Il est donc indispensable de modifier les profils théoriques obtenus en augmentant la hauteur selon les exigences de l'effort tranchant. D'après cela, les poutres dites d'égale résistance en construction ne sauraient vérifier rigoureusement la définition des pièces

d'égale résistance, et dès lors les études subtiles pour obtenir une solution rigoureuse sont superflues: on peut se contenter d'une approximation.

3^e Exemple. - Poutre encastree aux deux extrémités. - L'équation de la fibre

moyenne déformée permet, pour 1 variable, d'établir les formules de déformation conduisant aux conditions:

$$\int_0^l \frac{M dx}{I} = 0, \quad \int_0^l \frac{h M dx}{I} = 0;$$

comme $\frac{R_0 I}{N} = M$ et que $h = l - x$, ces conditions équivalent à

$$\int_0^l \frac{dx}{N} = 0, \quad \int_0^l \frac{x dx}{N} = 0. \quad (A)$$

D'ailleurs, on a:

$$M = \frac{R_0 I}{N} = \mu + \alpha x + \beta, \quad (B)$$

μ étant le moment fléchissant qui se produirait si les appuis étaient simples, α et β étant deux constantes à déterminer. Ces constantes seront définies par les équations:

(A) le moment d'inertie et tout est en fonction de N , on tire la valeur de N pour une poutre dans les équations (A) que l'on interprète au lieu de cette manière deux constantes qui dépendent des conditions α et β . Une fois α et β connus, N sera connu en fonction de x .

$$\int_0^l \frac{\mu + \alpha x + \beta}{I} dx = 0 \quad \int_0^l \frac{x(\mu + \alpha x + \beta)}{I} dx = 0.$$

3. Tension tangentielle dans une section transversale d'une poutre d'égalé résistance. -- Comme $\frac{M}{I} = \frac{R_0}{N}$, on peut écrire:
 donner N par tous les points de la poutre, ce qui résout le problème proposé.

$$T_3 = -\frac{R_0}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{N} \int_y^N \lambda y dy \right\}.$$

Dans le cas d'une section rectangulaire, à base constante λ , il vient:

$$T_3 = -\frac{1}{2} R_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{N^2 - y^2}{N} \right) = -\frac{R_0}{2} \left(1 + \frac{y^2}{N^2} \right) \frac{dN}{dx};$$

comme $\frac{I}{N} = \frac{2\lambda N^2}{3}$ (car $h = 2N$), on a:

$$E = \frac{dM}{dx} = -R_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\lambda N^2}{3} \right) = -\frac{4R_0 \lambda N}{3} \frac{dN}{dx};$$

et par suite:

$$T_3 = \frac{3E}{8\lambda N} \left(1 + \frac{y^2}{N^2} \right) = \frac{E}{4I} (y^2 + N^2);$$

la plus grande valeur absolue de cette tension est $\frac{EN^2}{2I}$.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un profil à double T symétrique dont tous les éléments sont constants, sauf la hauteur: avec les notations déjà utilisées, h et h' seuls varient, leur différence restant constante et leurs dérivées égales.

À l'intérieur d'une semelle, on a comme plus haut:

$$T_3 = -R_0 \left(\frac{1}{h} + \frac{y^2}{h^2} \right) \frac{dh}{dx}.$$

D'ailleurs: $\frac{I}{N} = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$, et par suite

$$E = -R_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{bh^3 - b'h'^3}{6h} \right) = -\frac{R_0 [2bh^2 - 3b'h'^2 + b'h'^3]}{6h^2} \frac{dh}{dx}.$$

On remplace approximativement $3b'h'^2$ par $3b'h'^3$ et on prend:

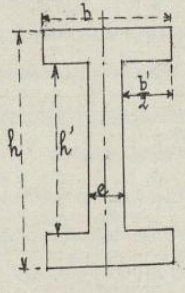
$$E = \frac{bh^3 - b'h'^3}{3h^2} R_0 \frac{dh}{dx} = -\frac{4R_0}{h^2} \frac{dh}{dx}.$$

Dès lors dans une semelle, on a:

$$T_3 = \frac{E}{4I} \left(y^2 + \frac{h^2}{4} \right).$$

À l'intérieur de l'âme, on a:

$$\int_y^{\frac{h}{2}} \lambda y dy = \int_y^{\frac{h'}{2}} y dy + \int_{\frac{h'}{2}}^{\frac{h}{2}} b y dy = \frac{1}{2} \left(\frac{h'^2}{4} - y^2 \right) + \frac{b}{8} (h^2 - h'^2).$$



Par suite:

$$T_3 = -\frac{R_0}{4e h^2} \left\{ e(2h h' - h'^2 + 4y^2) + b(h-h')^2 \right\} \frac{dh}{dx}$$

En notant que $e = b - b'$, et en remplaçant, dans le coefficient de b' , $2 h h'$ par h'^2 , il vient:

$$T_3 = -\frac{R_0}{4e h^2} \left\{ b h^2 - b' h'^2 + 4e y^2 \right\} \frac{dh}{dx},$$

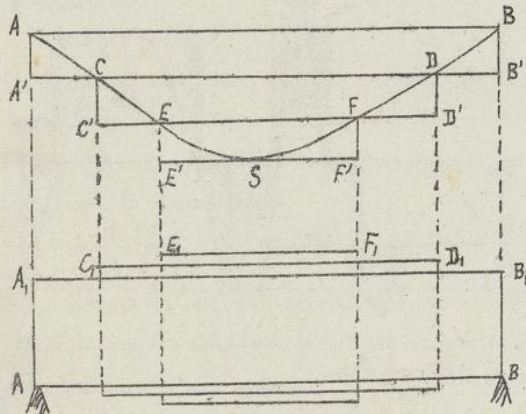
ou enfin:

$$T_3 = \frac{E}{16e l} \left\{ b h^2 - b' h'^2 + 4e y^2 \right\}.$$

4. Poutres à profil discontinu. - Dans la pratique, on ne peut aisément faire varier l'épaisseur des semelles d'une manière continue en suivant la loi donnée par la variation du moment fléchissant. Les semelles sont formées de feuilles de tôle, généralement de même épaisseur, superposées et rivées, de telle sorte que l'épaisseur totale ne peut en être qu'un multiple. Il en résulte un profil à ressant pour lequel les ingénieurs admettent l'identité des déformations avec celles présentées par une poutre à profil graduellement variable. La chose paraît admissible si les ressants sont à faibles saillies et sont assez éloignés les uns des autres. - On peut de vue théorique, il faut reconnaître que l'application des formules habituelles conduit à une contradiction pour un tronçon très mince chevauchant sur une section de discontinuité.

5. Poutres composées d'égale résistance. - Soit donc une poutre à double T formée d'une âme et de quatre cornières, dont les tables se composent de tôles qui ne règnent pas sur toute la longueur de la pièce; supposons que les réactions puissent être déterminées statiquement. - En désignant par b la largeur, par E l'épaisseur en un point de chacune des semelles de la poutre, par h la hauteur de cette dernière; on devra avoir (sensiblement):

$$R_0 b E h = M, \text{ ou } E = \frac{M}{R_0 b h}$$



On procède alors à une épure de repartition des tôles. Ornant tracé un diagramme ASB des moments fléchissants M ; on porte sur lui, en ordonnées, à l'échelle des moments, les valeurs de $R_0 b h E$ correspondant à diverses valeurs de E prises au jugé; on trace, par les extrémités de ces ordonnées des horizontales $A'B', C'D', E'F'$ de façon à recouvrir exactement le diagramme des moments fléchissants; on aura ainsi les longueurs des parties

de la poutre pour lesquelles on peut adopter les épaisseurs choisies.

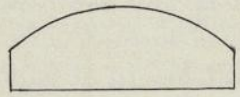
Les ressants de l'épure seront égaux si les feuilles de tôle superposées successivement sont de même épaisseur; le premier gradin $AA'BB'$ aura seul une hauteur plus grande,

due à ce qu'on pourra tenir compte dans le calcul du moment d'inertie du premier profil, des cornières d'assemblage de l'âme avec les semelles.

On peut d'ailleurs, par un choix convenable des échelles, faire en sorte que les épaisseurs des tôles soient représentées en vraie grandeur sur le dessin.

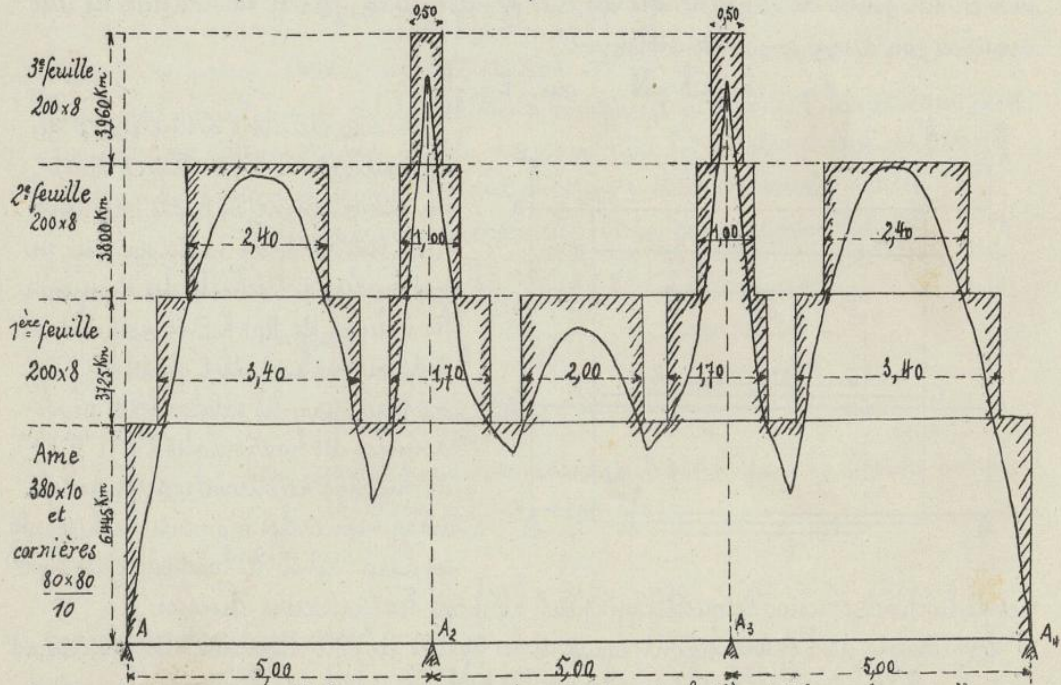
On dispose de l'épaisseur e de l'âme pour résister à l'effort tranchant.

Pour les poutres à grandes portées des ponts, on adopte parfois une forme semi-parabolique, en bow-string: la table inférieure est en ligne droite, la table supérieure suit un arc de parabole. On regarde parfois ce dispositif comme pouvant réaliser une poutre d'égal résistance. En fait, on a alors une poutre à axe curviligne, et la théorie donnée de la flexion transversale ne s'applique plus.



6. Poutres continues. - Sous-poutres. - Supposons qu'on ait établi pour une poutre continue à plusieurs travées un diagramme des valeurs absolues des moments fléchissants aux diverses sections de la poutre, dans l'hypothèse où la section de la poutre est constante. Les ingénieurs utilisent ce diagramme comme le précédent pour procéder à une répartition des tôles qui conduit ici à une économie considérable. Toutefois il est bien évident que cette répartition ne pourra servir qu'à un avant-projet: il y aurait lieu de vérifier la suffisance des équarissages adoptés en construisant le diagramme des moments fléchissants résultant du profil variable accepté.

Souvent on se dispense de cette vérification à cause des difficultés considérables présentées par la théorie de la poutre continue à section variable, théo-



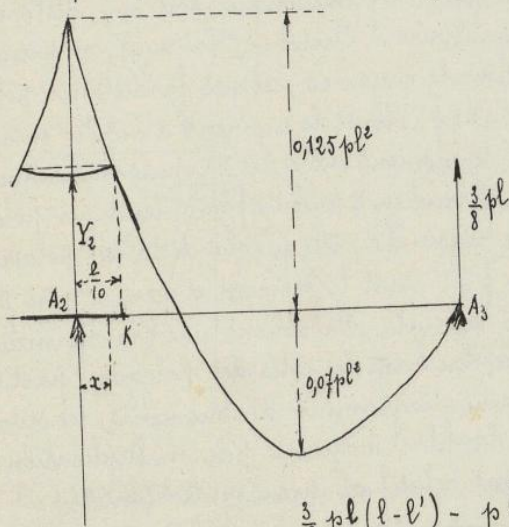
Courbes des moments fléchissants totaux et distribution des feuilles de tôle sur les semelles.

rie qui sort des limites de notre programme.

La figure ci-avant donne un exemple numérique d'une épure de répartition de semelles.

Assez fréquemment, on adopte pour une poutre continue un profil constant, quitte à renforcer la poutre sur les appuis intermédiaires par des sous-poutres.

Soit par exemple une poutre à deux travées égales et uniformément chargées. Nous avons vu que le plus grand moment positif est $0,07 pl^2$ à la distance $\frac{5l}{8}$ de la culée, et que le plus grand moment négatif est $-0,125 pl^2$ sur la pile. On ne calcule la poutre que pour résister au premier de ces moments, et on la renforce sur l'appui par une sous-poutre symétrique. Cette sous-poutre est considérée comme encastree en son milieu et fixée à son extrémité une charge égale à $\frac{Y_2}{2}$, soit $\frac{5}{8} pl$. Pour que le moment fléchissant de la poutre ne soit pas supérieur en valeur absolue à $0,07 pl^2$, il suffit que la demi-longueur de la poutre soit égale à $\frac{l}{10}$ (exactement $0,094 l$).



En effet si $2l'$ est la longueur de la sous-poutre, déterminons le point K de la poutre pour lequel le moment fléchissant soit $-0,07 pl^2$; la réaction de la culée A_3 étant $\frac{3}{8} pl$, on a:

$$\frac{3}{8} pl(l-l') - pl \frac{(l-l')^2}{2} = -0,07 pl^2,$$

et la résolution de cette équation donne $\frac{l'}{l} = 0,094$.

En un point au dessus de la sous-poutre, à la distance x de A_2 , le moment fléchissant est:

$$M = \frac{3}{8} pl(l-x) + \frac{5}{8} pl \left(\frac{l}{10} - x \right) - pl \frac{(l-x)^2}{2} = -\frac{pl^2}{16} - \frac{px^2}{2};$$

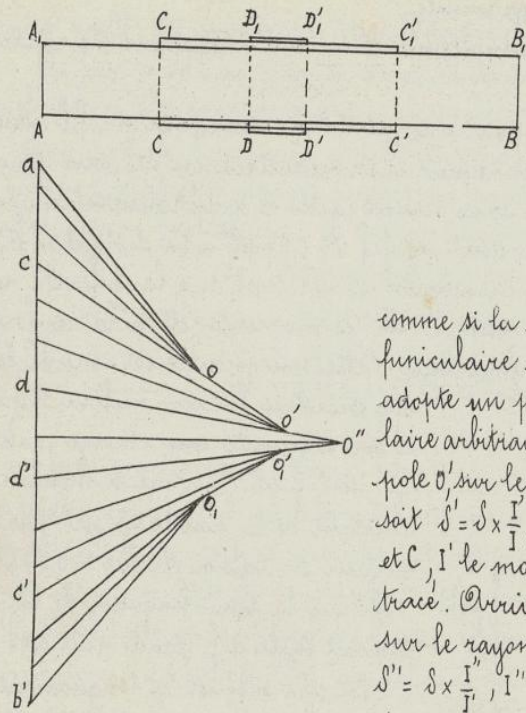
ce moment, toujours négatif, décroît de $0,07 pl^2$ (environ à $0,06 pl^2$), et la courbe des moments fléchissants se trouve dès lors modifiée comme l'indique la figure.

On donne à la sous-poutre la largeur b de la poutre; sa hauteur h doit vérifier la condition:

$$\frac{R_0 b h^2}{6} = \frac{pl^2}{16}; \quad \text{d'où } h^2 = \frac{3pl^2}{8R_0 b}.$$

Dans le cas de trois travées égales et uniformément chargées, on peut ne calculer la poutre que pour résister au moment positif $0,08 pl^2$, avec une sous-poutre de longueur $2l'$ telle que $l' = 0,042 l$; cette sous-poutre est sans importance et pratiquement elle se confond avec le support; pour $l = 4^m$ par exemple, on a: $l' = 16^{\text{cm}}$.

7. Déformation d'une poutre composée. - Nous avons vu au Chapitre VI comment on peut déterminer graphiquement la forme prise par la fibre moyenne. Ce tracé peut être étendu au cas d'une poutre composée d'égale résistance telle que AB. On divise la surface du diagramme des moments par des verticales de manière que



les points C, D, D' et C' où les semelles ^{124.} varient d'épaisseur, et par suite où le moment d'inertie de la section varie, se trouvent sur une des verticales de division.

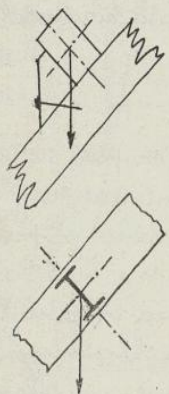
On procède pour la construction du polygone des forces fictives comme au Chapitre VI, c'est-à-dire

comme si la section était constante. Pour tracer le funiculaire correspondant de A en C (ou de a en c) on adopte un pôle O, quelconque, soit une distance polaire arbitraire l . Arrivé en C (ou en c), on prend un pôle O' sur le rayon CO, tel que la distance polaire soit $l' = l \times \frac{I}{I'}$, I étant le moment d'inertie entre A et C, I' le moment entre C et D; puis on continue le tracé. Arrivé en D (ou en d), on prend un pôle O'' sur le rayon DO', tel que la distance polaire soit $l'' = l \times \frac{I'}{I''}$, I'' étant le moment d'inertie entre D et D' et ainsi de suite. On obtient une transformée de

la fibre moyenne en traçant une courbe touchant les côtés des polygones partiels successifs sur les verticales de division du diagramme des moments; les ordonnées de cette courbe font connaître celles de la fibre moyenne par multiplication par le facteur donné antérieurement, I étant relatif au premier tronçon AC.

Chapitre IX. Flexion déviée des poutres droites

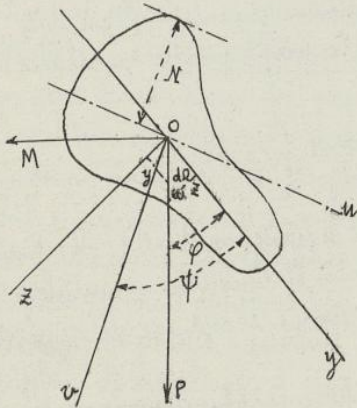
1. Définition de la flexion déviée. - Pour établir les équations générales de la flexion transversale des pièces droites, nous avons supposé que les forces de flexion étaient parallèles au plan de symétrie de la poutre et symétriquement distribuées par rapport à ce plan. Quand les forces de flexion sont parallèles à un plan passant par l'axe moyen de la pièce avant la flexion et sont disposées symétriquement par rapport à ce plan, dit plan de sollicitation, on dit que la poutre est soumise à la flexion déviée. C'est par exemple ce qui arrive aux pannes, en bois ou en métal; comme elles sont presque toujours disposées ainsi qu'on l'a figuré ci-contre, les poids dont elles sont chargées n'agissent pas dans leur plan de symétrie; elles subissent la flexion déviée (De plus, généralement, contrairement à ce qu'on a indiqué dans les figures, la verticale des charges ne passe pas par le centre de gravité de la section de la pièce et celle-ci se trouve soumise à un effort supplémentaire de torsion dont il sera tenu compte dans



un chapitre ultérieur).

2. Hypothèses, théorème et formules de Bavié de Saint Venant.

L'observation conduit à admettre les hypothèses suivantes : 1° toute section transversale tourne autour d'un axe neutre ou passant, dans son plan, par son centre de gravité ; 2° elle subit une translation dans une direction ou perpendiculaire à l'axe neutre et à la fibre moyenne initiale ; 3° son plan reste normal à la fibre moyenne déformée ; 4° l'ensemble des axes neutres forme une surface cylindrique. Prenons pour axe ox la fibre moyenne initiale, pour axe oy l'axe de symétrie de la section, pour axe oz une perpendiculaire au plan xoy . Le plan $x'oy'$ dans lequel se déforme la fibre moyenne est dit plan de flexion ; soit φ son inclinaison sur oy et ψ l'angle du plan de sollicitation $x'oP$ avec la même direction.



Designons enfin par E et M l'effort tranchant et le moment fléchissant calculés à la manière ordinaire.

Les équations d'équilibre d'un tronçon (voir Ch. V, 96:2) s'écrivent :

$$S N_1 d\Omega = 0, S T_2 d\Omega + E \cos \varphi = 0, S T_3 d\Omega + E \sin \varphi = 0,$$

$$S (y T_2 - z T_3) d\Omega = 0, S z N_1 d\Omega - M \sin \varphi = 0, -S y N_1 d\Omega + M \cos \varphi = 0.$$

La distance de l'élément $d\Omega$ à l'axe neutre ox est $y \cos \psi + z \sin \psi$; les hypothèses faites entraînant

la possibilité d'appliquer la formule (II) du paragraphe rappelé, en y remplaçant y par cette distance, nous écrivons

$$N_1 = \frac{E(y \cos \psi + z \sin \psi)}{\rho},$$

ρ désigne le rayon de courbure de la fibre moyenne déformée (au point o).

La première des équations d'équilibre est alors vérifiée identiquement, o étant centre de gravité du profil ; les deux dernières donnent, oy et oz étant axes principaux d'inertie et I_y et I_z désignant les moments d'inertie relatifs à ces axes :

$$\frac{E}{\rho} I_y \sin \psi = M \sin \varphi, \quad \frac{E}{\rho} I_z \cos \psi = M \cos \varphi.$$

On déduit d'abord de la relation :

$$E \operatorname{ctg} \varphi \left(\frac{-1}{E \operatorname{ctg} \psi} \right) = -\frac{I_y}{I_z};$$

comme l'ellipse centrale d'inertie a pour équation

$$I_y Y^2 + I_z Z^2 = \text{const.},$$

$E \operatorname{ctg} \varphi$ et $(- \operatorname{ctg} \psi)$ sont les coefficients angulaires des deux diamètres conjugués par rapport à cette ellipse ; or $(- \operatorname{ctg} \psi)$ est le coefficient angulaire de l'axe neutre ou , perpendiculaire à ov . Donc l'axe d'infléchissement ou axe neutre est le diamètre conjugué, par rapport à l'ellipse centrale d'inertie, de la trace du plan de sollicitation. De là l'utilité qu'il y a à savoir construire cette ellipse (Ch. II).

En second lieu, on conclut des mêmes équations la relation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{I_y^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{I_z^2}}$$

qui est l'équation différentielle de la fibre moyenne déformée.

L'angle $\Delta = \psi - \varphi$ est dit la déviations du plan de flexion; on a:

$$\cos \Delta = \frac{\rho M \sin 2\varphi}{2E} \left(\frac{1}{I_y} + \frac{1}{I_z} \right)$$

Enfin l'expression de N , peut être mise sous la forme

$$N_1 = \frac{M \cos \varphi \cdot y}{I_z} + \frac{M \sin \varphi \cdot z}{I_y}$$

Cette tension peut être regardée comme la résultante de celles que produiraient respectivement les projections des forces de flexion sur le plan xoy et sur le plan xoz .

Par induction, on est conduit à essayer les valeurs suivantes de I_3 et de I_2 , en désignant par λ_y et λ_z les segments interceptés dans le profil par les parallèles à oy et oz issues du point (y, z) :

$$I_3 = \frac{E \cos \varphi}{\lambda_z I_z} \int_{y_1}^y \lambda_y y dy, \quad I_2 = \frac{E \sin \varphi}{\lambda_y I_y} \int_{z_1}^z \lambda_z z dz$$

[y_1 et z_1 sont les maxima de y et de z , et le profil est supposé constant]. Il est aisé de reconnaître qu'elles vérifient effectivement la 2^e et la 3^e équations d'équilibre, mais non pas la 6^e, sauf dans le cas où le profil admet ox comme second axe de symétrie, ce qui est le cas le plus usuel.

La plus grande valeur de N , correspond à la fibre la plus éloignée de l'axe neutre; si R_0 est la distance de cette fibre à on ; l'équation d'équarissage est

$$\frac{R_0}{\text{Max} \left(\frac{y \cos \varphi}{I_z} + \frac{z \sin \varphi}{I_y} \right)} = M.$$

Quant à la condition de stabilité au glissement, on l'écrit, en désignant par α et β les expressions de $\frac{T_3}{E}$ et de $\frac{T_2}{E}$:

$$E \cdot \text{Max} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq 0,8 R_0.$$

3. Cas d'un profil rectangulaire. - Le maximum de N , correspond à une fibre passant par un sommet du rectangle; si b et c sont les côtés du rectangle, on a:

$$I_z = \frac{cb^3}{12}, \quad I_y = \frac{bc^3}{12};$$

et comme y et z se réduisent à $\frac{b}{2}$ et $\frac{c}{2}$, on a:

$$M = \frac{R_0 bc}{6 \left(\frac{\cos \varphi}{b} + \frac{\sin \varphi}{c} \right)}.$$

Soit L le segment intercepté par le plan de sollicitation dans le noyau central du profil (losange de demi-diagonales $\frac{b}{6}$ et $\frac{c}{6}$); on a

$$3L \left(\frac{\cos \varphi}{b} + \frac{\sin \varphi}{c} \right) = 1;$$

l'équation d'équarissage s'écrit

$$R_0 bc L = M.$$

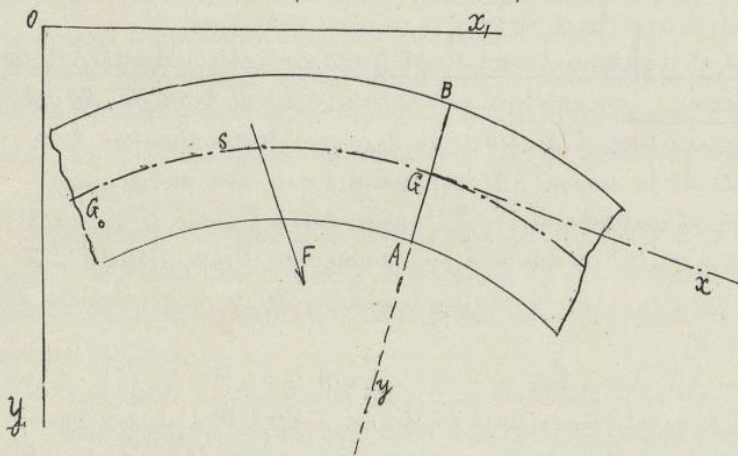
1. Définitions relatives aux pièces et aux forces appliquées. -

Considérons une pièce prismatique, à profil constant ou variable et à axe curviligne, présentant un plan de symétrie dans lequel est située la fibre moyenne (voir les définitions données page 72). Une telle pièce, dite arc, soumise à l'action de forces extérieures symétriquement distribuées par rapport au plan de l'axe longitudinal, se déforme en conservant son plan de symétrie où reste inclus l'axe déformé. C'est cette déformation dite flexion de l'arc qu'il s'agit d'étudier.

En égard à la distribution symétrique des forces, nous remplacerons tout système de deux forces symétriques par leur résultante située dans le plan de symétrie; cela revient à supposer que toutes les forces extérieures appliquées à l'arc sont dans le plan de l'axe, dit plan de flexion. Ces forces sont ou concentrées ou continues; elles comprennent les réactions des appuis.

La petitesse des déformations permet de regarder ces forces et leurs points d'application comme inaltérés par la flexion.

Soit G un point quelconque de la fibre moyenne. Faisons abstraction de la partie de la poutre située, sur la figure, à droite de G . Effectuons pour le point G la réduction de toutes les forces appliquées à gauche de la section transversale de G , à une résultante et à un couple résultant. La résultante, située comme les forces extérieures dans le plan de symétrie, se décomposera en une force N normale au plan de la section et en une force E située dans ce plan et dirigée suivant la normale à l'axe de la pièce. Le couple résultant a pour moment M . Pour fixer les signes, nous



rappor-
terons les quan-
tités N, E, M à un
trièdre $Gxyz$, Gx étant
dirigé suivant la tan-
gente à l'axe dans le
sens G_0G des arcs s crois-
sants, Gy suivant la
normale à l'axe vers
le centre de courbure,
 Gz achevant avec $Gx,$
 Gy un trièdre positif.

On nomme: M le
moment fléchissant, E l'effort tranchant, N l'effort comprimant relatifs à la section
 AGB , ou encore relatifs au point G .

Considérons d'autre part un trièdre positif fixe dont les axes ox_1 et oy_1 sont situés dans le plan de flexion. Soient x_1, y_1 les coordonnées de G par rapport à ces axes; nous les regarderons comme des fonctions de l'arc $G_0G = s$. Les cosinus directeurs de Gx sont $\frac{dx_1}{ds}, \frac{dy_1}{ds}$; ceux de Gy sont $-\frac{dy_1}{ds}, \frac{dx_1}{ds}$. Soient X_1, Y_1 les composantes suivant les axes fixes

de l'une quelconque des forces extérieures, dont le point d'application a pour coordonnées absolues (α, β) . Le signe Σ s'étendant à toutes les forces appliquées au tronçon de gauche, on a:

$$E = -\frac{dy_1}{ds} \Sigma X_1 + \frac{dx_1}{ds} \Sigma Y_1 ;$$

$$N = \frac{dx_1}{ds} \Sigma X_1 + \frac{dy_1}{ds} \Sigma Z_1 ;$$

$$M = \Sigma [X_1(y_1 - \beta) - Y_1(x_1 - \alpha)] .$$

La distribution du moment fléchissant sur la fibre moyenne fait connaître par de simples différentiations l'effort tranchant et l'effort comprimant.

En effet on a évidemment, en différentiant :

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} = -\Sigma Y_1, \quad \frac{\partial M}{\partial y_1} = \Sigma X_1 ;$$

par conséquent :

$$E = -\frac{\partial M}{\partial y_1} \frac{dy_1}{ds} - \frac{\partial M}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} = -\frac{dM}{ds} ;$$

$$N = \frac{\partial M}{\partial y_1} \frac{dx_1}{ds} - \frac{\partial M}{\partial x_1} \frac{dy_1}{ds} .$$

Cinsi, en particulier, l'effort tranchant est, au signe près, égal à la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'arc de l'axe.

La démonstration faite pour des forces concentrées s'étendrait au cas des forces réparties.

Le moment de flexion est toujours une fonction continue de s , mais E et N peuvent varier brusquement lorsque la section AB associée à s vient à passer par le point d'application effectif d'une force isolée.

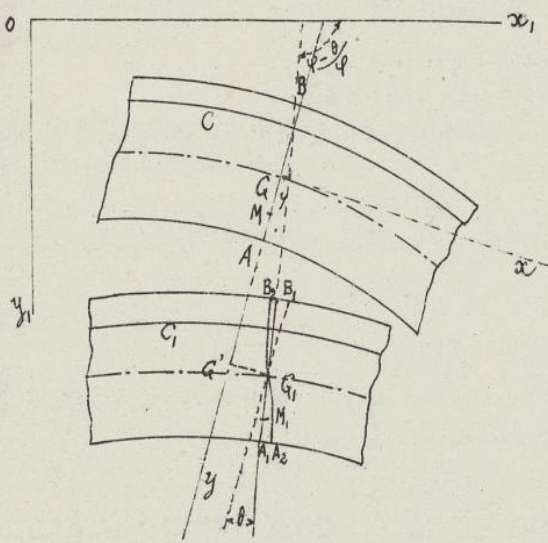
2. Tensions intérieures et déformations élastiques correspondantes dans le voisinage d'une section. — Imaginons qu'on supprime le tronçon de droite de la pièce et qu'on maintienne l'équilibre du tronçon de gauche par l'application aux divers points de la section AB des tensions qui, avec notre choix d'axes Gx, y, z , auront pour composantes N_1, T_3, T_2 (rapportées à l'unité de surface). Écrivons les six équations d'équilibre du tronçon de gauche; elles se réduisent à trois équations, comme dans le cas de la flexion transversale des pièces droites, à savoir:

$$\int N_1 dx + N = 0; \quad \int T_3 dx + E = 0, \quad -\int y N_1 dx + M = 0. \quad (I)$$

Les recherches expérimentales paraissent conduire, à l'égard d'un arc soumis à la flexion en deça des limites de l'élasticité, aux conclusions suivantes: toute section transversale reste plane, invariable de forme et de dimensions, et la fibre moyenne déformée devient l'axe de la pièce déformée; autrement dit, la section transformée rencontre orthogonalement la fibre moyenne déformée et aussi toutes les fibres déformées.

Une section AB subit un déplacement se décomposant: en une translation $G'G'$ normale à la fibre moyenne, en une translation $G'G_1$ parallèle à la tangente à la

129.
 fibre moyenne, et en une rotation autour de la perpendiculaire au plan de flexion issue de G_1 (axe neutre de la section).



Ce mode de déformation transforme une couche quelconque C en une surface cylindrique C_1 , à génératrices normales au plan de flexion. L'ensemble des axes neutres forme une couche dite couche neutre.

L'analyse de cette déformation et le calcul des dilatations et glissements, puis des tensions correspondantes qui en résultent, conduisent à des conclusions contradictoires avec les équations (I). C'est donc que les résultats d'observation signalés ci-dessus sont trop grossiers et que la déformation

est plus compliquée qu'on ne l'estimait. Avec Barvié de Saint Venant, on admet qu'une section transversale subit en outre une incurvation cylindrique et une déformation transversale, comme dans le cas de la flexion transversale des pièces droites.

Comme là aussi, l'insuffisance des observations ne permet pas de prendre la loi expérimentale des déformations comme point de départ, et l'on prend pour point de départ les hypothèses suivantes qui ne conduisent à aucune contradiction, tout en expliquant complètement les résultats d'expérience.

1^{re} Hypothèse. - Dans toute l'étendue de la pièce fléchie, les tensions normales sont nulles sur les éléments plans parallèles au plan de flexion et sur les éléments des couches. Ceci se traduit avec nos notations par les relations :

$$N_2 = 0, \quad N_3 = 0.$$

2^e Hypothèse. - La partie principale du déplacement d'un point suivant la normale à la section transversale contenant ce point, se réduit à ce que serait ce déplacement si la déformation avait lieu sans incurvation ni dilatation transversale des sections.

Ces hypothèses se justifient par leurs résultats.

Nous allons préalablement nous occuper à chercher l'expression de ce déplacement en fonction d'éléments attachés à la fibre moyenne.

Soit $n = G'G$, $t = G'G_1$; ces éléments sont des fonctions de s dont la connaissance entraîne celle de la rotation θ , car la section transformée A, B , est normale à la fibre moyenne déformée. Calculons θ , compté positivement comme en trigonométrie. Les coordonnées de G_1 sont :

$$\xi = x_1 - n \frac{dy}{ds} + t \frac{dx_1}{ds}, \quad \eta = y_1 + n \frac{dx_1}{ds} + t \frac{dy}{ds}.$$

$$d\xi = dx_1 - \frac{dn}{ds} dy_1 + \frac{dt}{ds} dx_1 - n \frac{d^2y_1}{ds^2} ds + t \frac{d^2x_1}{ds^2} ds, \quad d\eta = dy_1 + \frac{dn}{ds} dx_1 + \frac{dt}{ds} dy_1 + n \frac{d^2x_1}{ds^2} ds + t \frac{d^2y_1}{ds^2} ds.$$

Si $\text{tang } \varphi$ est le coefficient angulaire de BA, $\text{tang } (\varphi - \theta)$ sera celui de B_1A_1 , et on aura la condition d'orthogonalité:

$$\text{tang } (\varphi - \theta) \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = -1,$$

ou, en égard à la petitesse de θ et en notant que $\text{tang } \varphi = -\frac{dx_1}{dy_1}$:

$$d\xi (\theta dx_1 - dy_1) + d\eta (\theta dy_1 + dx_1) = 0.$$

Substituons à $d\xi$ et $d\eta$ les valeurs précédentes, et notons que, ρ désignant le rayon de courbure de la fibre moyenne, on a:

$$ds^2 = dx_1^2 + dy_1^2, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{dx_1}{ds} \frac{d^2y_1}{ds^2} - \frac{dy_1}{ds} \frac{d^2x_1}{ds^2}.$$

Nous obtenons:

$$\theta + \frac{dn}{ds} + \theta \frac{dt}{ds} - \frac{n\theta}{\rho} + \frac{t}{\rho} = 0$$

$$\text{ou:} \quad \theta \left(1 - \frac{n}{\rho} + \frac{dt}{ds}\right) + \frac{t}{\rho} + \frac{dn}{ds} = 0 \quad (II)$$

Par la même occasion, on a l'expression de l'arc élémentaire $d\sigma$ de la fibre moyenne déformée; après quelques réductions, il vient:

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = ds^2 \left\{ \left(1 - \frac{n}{\rho} + \frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dn}{ds} + \frac{t}{\rho}\right)^2 \right\}.$$

En vertu de (II), θ étant petit, le second carré est négligeable devant le premier; par suite:

$$d\sigma = ds \left(1 - \frac{n}{\rho} + \frac{dt}{ds}\right) \quad (III)$$

Cela posé, le déplacement d'un point M de la section AB (à la distance y de G_x) a pour composantes suivant les axes Gx, Gy, Gz : $t + \theta y, n, 0$ et suivant les axes fixes ox_1, oy_1 :

$$u_1 = (t + \theta y) \frac{dx_1}{ds} - n \frac{dy_1}{ds}, \quad v_1 = (t + \theta y) \frac{dy_1}{ds} + n \frac{dx_1}{ds}, \quad w_1 = 0.$$

La dilatation relative à la direction Gx , de cosinus directeurs $\frac{dx_1}{ds}, \frac{dy_1}{ds}, 0$ sera, par application de la première formule du $\text{No}^{\circ} 2$ de la page 68 (en remplaçant ∂_x par ∂_{x_1} ; ∂_y par ∂_{y_1} , ... par $\partial_{x_1}, \partial_{y_1}, \dots$; α, β, γ par $\frac{dx_1}{ds}, \frac{dy_1}{ds}, 0$):

$$\partial_x = \partial_{x_1} \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \partial_{y_1} \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \partial_{z_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} \frac{\partial y_1}{\partial s} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) \frac{dx_1}{ds} \frac{dy_1}{ds}.$$

Par groupement convenable des termes, on peut écrire:

$$\partial_x = \frac{dx_1}{ds} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{ds} \right\} + \frac{dy_1}{ds} \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{ds} \right\} = \frac{du_1}{ds} \frac{dx_1}{ds} + \frac{dv_1}{ds} \frac{dy_1}{ds}.$$

Or on a:

$$\frac{du_1}{ds} = \left(\frac{dt}{ds} + y \frac{d\theta}{ds}\right) \frac{dx_1}{ds} + (t + \theta y) \frac{d^2x_1}{ds^2} - \frac{dn}{ds} \frac{dy_1}{ds} - n \frac{d^2y_1}{ds^2},$$

$$\frac{dv_1}{ds} = \left(\frac{dt}{ds} + y \frac{d\theta}{ds}\right) \frac{dy_1}{ds} + (t + \theta y) \frac{d^2y_1}{ds^2} + \frac{dn}{ds} \frac{dx_1}{ds} + n \frac{d^2x_1}{ds^2}.$$

Donc enfin la dilatation suivant Gx a pour valeur:

$$\partial_x = \frac{dt}{ds} + y \frac{d\theta}{ds} - \frac{n}{\rho} \quad (IV)$$

Revenons maintenant aux hypothèses. La première se traduit par les relations

$$N_1 = A(\partial_x + \partial_y + \partial_z) + 2G\partial_x, \quad 0 = A(\partial_x + \partial_y + \partial_z) + 2G\partial_y, \quad 0 = A(\partial_x + \partial_y + \partial_z) + 2G\partial_z.$$

ou encore par les relations:

$$\partial_y = \partial_z = -\eta \partial_x, \quad N_1 = E \partial_x.$$

η est ici le coefficient de Poisson.

La seconde hypothèse se traduit par la relation:

$$N_1 = E \left(\frac{dt}{ds} + y \frac{d\theta}{ds} - \frac{\pi}{\rho} \right) \quad (V)$$

Remplaçons N_1 par cette valeur dans la première et la troisième équations (I). Il viendra d'abord, en notant que $\int y^2 dx = 0$, puisque l'origine G est centre de gravité de la section:

$$N + E \rho \left(\frac{dt}{ds} - \frac{\pi}{\rho} \right) = 0 \quad (VI)$$

On obtiendra ensuite, en notant que $\int y^2 dx$ est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre:

$$M - EI \frac{d\theta}{ds} = 0 \quad (VII)$$

Les relations (VI) et (VII) permettent de mettre l'expression (V) de N_1 sous la forme

$$N_1 = \frac{My}{I} - \frac{N}{\rho} \quad (VIII)$$

et par suite celle de dx sous la forme:

$$dx = \frac{My}{EI} - \frac{N}{E\rho} \quad (IX)$$

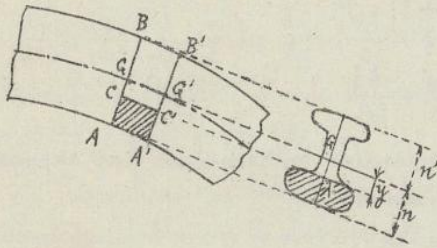
Enfin ds s'écrit:

$$ds = ds \left[1 - \frac{N}{E\rho} \right] \quad (X)$$

Dans tous les raisonnements qui précèdent, rien ne suppose la constance de I ou de ρ ; les formules sont donc valables pour un arc à section variable.

Si nous passons aux tensions tangentielles, la nature même de la déformation supposée entraîne les conséquences suivantes: T_1 et T_2 sont nuls (la déformation transversale de la section étant négligeable); T_3 ne dépend pas de s .

Pour déterminer T_3 , nous utiliserons sa propriété d'être aussi la composante suivant ox de la tension sur un élément normal à oy (voir page 60). Nous isolerons par la pensée une portion de la pièce limitée par deux sections voisines AB et $A'B'$ séparant sur l'axe un arc $GA' = \Delta s$, par un élément de couche CC' distant de y de la couche neutre, enfin par la surface latérale de la poutre. Nous exprimerons que la portion ainsi isolée est en équilibre, ou plutôt nous écrirons



seulement l'équation de projection relative à Gx .

Sur la face AC , les tensions tangentielles, normales à Gx ne donnent rien; les tensions normales donnent: $-\int N_1 \lambda dy$. Sur la face CC' , la résultante des tensions est $-\lambda \int_{-m}^{+m} T_3 \Delta s$, ou simplement $-\lambda T_3 \Delta s$.

Sur la face $C'A'$, les tensions normales donnent: $\int N_1 \lambda dy + \frac{\partial}{\partial s} \left[\int N_1 \lambda dy \right] \Delta s$; les tensions tangentielles donnent, en désignant par $\Delta \alpha$ l'angle des deux tranches: $-\Delta \alpha \int_{-m}^{+m} \left(T_3 + \frac{\partial T_3}{\partial s} \Delta s \right) \lambda dy$, dont la partie principale est $-\Delta \alpha \int_{-m}^{+m} T_3 \lambda dy$.

Soit enfin $\Xi \Delta s$ la composante suivant Gx du poids du tronçon.

On a l'équation de projection:

$$-\lambda T_3 \Delta s + \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_{-m}^{+m} N_1 \lambda dy \right] \Delta s - \Delta \alpha \int_{-m}^{+m} T_3 \lambda dy + \Xi \Delta s = 0,$$

ou, en notant que $\frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$ a pour partie principale la courbure $\frac{1}{\rho}$ de la fibre moyenne:

$$\lambda T_3 + \frac{1}{\rho} \int_y^m T_3 \lambda dy = \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_y^m N_1 \lambda dy \right] + \Xi.$$

T_3 figure sous un signe d'intégration; il serait défini par une équation différentielle obtenue en dérivant l'équation précédente multipliée par ρ . Il resterait à reconnaître si la valeur de T_3 fournie par l'intégration possible de cette équation satisfait à la seconde des équations (I). La complication des calculs fait qu'on n'a jamais tiré aucun parti de cette relation. - Dans la pratique, sans d'ailleurs qu'on puisse légitimer cet usage, on remplace dans la précédente formule N_1 par $\frac{M_1 y}{I} - \frac{N}{\rho}$, et on ne conserve que le premier terme de chaque membre:

$$\lambda T_3 = \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_y^m \frac{M_1}{I} \lambda y dy \right].$$

3. Déformation de la fibre moyenne. - Nous allons tout d'abord établir une relation entre les rayons de courbure de la fibre moyenne avant et après la déformation, dite relation d'Euler.

La relation (VII) nous donne:

$$Ei \frac{d\theta}{ds} = M.$$

Si φ est l'angle de B_1A_1 avec Ox_1 , on a:

$$\varphi_1 = \varphi - \theta, \quad \text{ou} \quad \theta = \varphi - \varphi_1.$$

Donc:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} - \frac{d\varphi_1}{ds} \frac{ds}{ds}$$

Mais $\frac{d\varphi}{ds}$ est la courbure $\frac{1}{\rho}$ de la fibre moyenne initiale; $\frac{d\varphi_1}{ds}$ est la courbure $\frac{1}{\rho_1}$ de la fibre moyenne déformée; enfin la formule (X) donne la valeur de $\frac{ds}{ds}$. On a donc:

$$Ei \left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \left(1 - \frac{N}{E\rho} \right) \right] = M.$$

On l'écrit:

$$Ei \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) = -M + \frac{NI}{\rho_1 \rho}. \quad (XI)$$

Comme l'écart entre ρ_1 et ρ n'est pas très considérable, on remplace, par approximation, dans le dernier terme, ρ_1 par ρ . Il vient ainsi:

$$Ei \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) = -M + \frac{NI}{\rho^2}.$$

Si l'arc considéré est de grand rayon de courbure, le dernier terme peut être inappréciable, et alors la formule se réduit à:

$$Ei \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) = -M \quad (XI')$$

C'est la formule classique qu'on voulait signaler.

Reprenons, à un point de vue plus général la question de la déformation de la ligne moyenne.

Soit S_0 la valeur de S qui correspond à la naissance A_0 de la ligne moyenne, θ la déviation de la normale en ce point. L'intégration de l'équation (VII):

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{Ei}$$

donne:

$$\theta = \theta_0 + \int_{S_0}^S \frac{M ds}{Ei}. \quad (XII)$$

D'autre part, le multiplicateur du petit angle θ dans l'équation (II) n'est autre ¹³³ que $\frac{ds}{ds}$ qui diffère peu de l'unité; on peut donc, sans erreur sensible, substituer à l'équation (II) la suivante :

$$\theta + \frac{dn}{ds} + \frac{t}{\rho} = 0 \quad (\text{II}')$$

qui, jointe à (VI)

$$\frac{N}{E\Omega} + \frac{dt}{ds} - \frac{n}{\rho} = 0$$

définira n et t en fonction de s , θ étant donné par (XII).

Les composantes U, V suivant les axes fixes du déplacement du point G s'obtiennent en faisant $y=0$ dans les expressions u, v :

$$U = t \frac{dx_1}{ds} - n \frac{dy_1}{ds}, \quad V = t \frac{dy_1}{ds} + n \frac{dx_1}{ds}.$$

Pour éviter d'intégrer les deux équations précédentes qui devraient donner les valeurs de n et t à porter dans ces équations, nous allons seulement calculer $\frac{dU}{ds}$ et $\frac{dV}{ds}$. On a :

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{dx_1}{ds} - \frac{dn}{ds} \frac{dy_1}{ds} + t \frac{d^2x_1}{ds^2} - n \frac{d^2y_1}{ds^2},$$

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{dy_1}{ds} + \frac{dn}{ds} \frac{dx_1}{ds} + t \frac{d^2y_1}{ds^2} + n \frac{d^2x_1}{ds^2}.$$

Nous tirerons les dérivées secondes de x_1 et y_1 des relations :

$$\frac{dx_1}{ds} \frac{d^2x_1}{ds^2} + \frac{dy_1}{ds} \frac{d^2y_1}{ds^2} = 0, \quad \frac{dx_1}{ds} \frac{d^2y_1}{ds^2} - \frac{dy_1}{ds} \frac{d^2x_1}{ds^2} = \frac{1}{\rho};$$

$$\frac{d^2x_1}{ds^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dy_1}{ds}, \quad \frac{d^2y_1}{ds^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dx_1}{ds}.$$

Par suite les expressions de $\frac{dU}{ds}$, $\frac{dV}{ds}$ s'écrivent :

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dx_1}{ds} \left(\frac{dt}{ds} - \frac{n}{\rho} \right) - \frac{dy_1}{ds} \left(\frac{dn}{ds} + \frac{t}{\rho} \right); \quad \frac{dV}{ds} = \frac{dx_1}{ds} \left(\frac{dn}{ds} + \frac{t}{\rho} \right) + \frac{dy_1}{ds} \left(\frac{dt}{ds} - \frac{n}{\rho} \right),$$

ou enfin en tenant compte des équations de définition de n et t :

$$\frac{dU}{ds} = \theta \frac{dy_1}{ds} - \frac{N}{E\Omega} \frac{dx_1}{ds}; \quad \frac{dV}{ds} = -\theta \frac{dx_1}{ds} - \frac{N}{E\Omega} \frac{dy_1}{ds}.$$

Nous allons par intégration déduire de là les expressions de U et V ; mais il convient préalablement d'observer que d'après (XII) :

$$\int \theta dy_1 = \theta y_1 + \int dy_1 \int_{s_0}^s \frac{M ds}{EI},$$

et par une intégration par parties, on pourra écrire :

$$\int_{s_0}^s \theta dy_1 = \theta_0 (y_1 - y_1^0) + (y_1 - y_1^0) \int_{s_0}^s \frac{M ds}{EI} + \int_{s_0}^s \frac{M (y_1 - y_1^0)}{EI} ds = \theta_0 (y_1 - y_1^0) + y_1 \int_{s_0}^s \frac{M ds}{EI} - \int_{s_0}^s \frac{M y_1 ds}{EI}.$$

Il vient alors :

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 + (y_1 - y_1^0) \theta_0 + y_1 \int_{s_0}^s \frac{M ds}{EI} - \int_{s_0}^s \frac{M y_1 ds}{EI} - \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{N dx_1}{E\Omega}, \\ V &= V_0 - (x_1 - x_1^0) \theta_0 - x_1 \int_{s_0}^s \frac{M ds}{EI} + \int_{s_0}^s \frac{M x_1 ds}{EI} - \int_{y_1^0}^{y_1} \frac{N dy_1}{E\Omega}, \end{aligned} \right\} (\text{XIII})$$

en désignant par x_1^0, y_1^0 les coordonnées du point G_0 et U_0, V_0 les composantes du déplacement de ce point.

Dans les arcs métalliques d'une certaine longueur, la dilatation n'est pas négligée.

geable. Si λ est l'allongement par mètre pour un écart donné de température, l'arc de s'allongera de λds , ce qui donne un déplacement λdx , suivant ox , et λdy , suivant oy . La somme des variations des coordonnées entre G_0 et G sera par ce fait modifiée de $\lambda(x_1 - x_0)$ suivant ox , et de $\lambda(y_1 - y_0)$ suivant oy . Ce sont les termes qu'il conviendrait alors d'ajouter aux seconds membres des formules (XIII) pour effectuer la correction d'écart de température après la mise en charge.

4. Détermination des équarissades. - Il y aurait à développer à nouveau ici les considérations présentées au $\text{N}^{\circ} 4$ du Chapitre V, et on serait conduit à la même conclusion pratique.

On commence par calculer les dimensions de la section comme si la pièce était fléchie avec un effort tranchant nul partout. Or cet effet, comme la tension maxima dans chaque tranche doit être inférieure aux limites d'élasticité à l'extension et à la compression, limites qui d'ailleurs coïncident pour le fer et l'acier, il faut satisfaire à la condition:

$$\text{Max.} \left\{ \frac{M_y}{I} - \frac{N}{\Omega} \right\} \leq R_0.$$

Si le profil admet l'axe neutre pour axe de symétrie, ce qui est le cas usuel, et si l'on désigne par N la distance à la couche neutre de la fibre qui en est la plus éloignée, on satisfera au mieux à la condition en prenant:

$$\frac{|M| \cdot N}{I} + \frac{|N|}{\Omega} = R_0; \quad ;$$

$|M|$ désignant, suivant une notation connue, la valeur absolue de M .

Cette formule s'écrit souvent:

$$\frac{R_0 I}{N} = |M| + \frac{|N| I}{N \Omega}; \quad (E)$$

sous cette forme, l'équation d'équarissage est analogue à celle donnée pour les pièces droites.

L'équarissage étant choisi conformément à l'équation (E), on vérifie s'il suffit pour résister élastiquement au cisaillement que produirait l'effort tranchant agissant seul dans la section. La complication de l'expression actuelle de T_z fait que pratiquement on ne prend que la valeur approchée donnée à la fin du $\text{N}^{\circ} 2$, et l'on écrit:

$$\text{Max.} \left\{ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_{y_1}^{y_2} \frac{M}{I} \lambda y \, dy \right] \right\} \leq 0,8 R_0.$$

5. Courbe des pressions. - Les forces parallèles $N_i \, d\Omega$ appliquées à une section ont une résultante d'intensité $|N| \leq 0$, appliquée à une distance ε de la couche neutre. En écrivant l'équation des moments par rapport au point d'application de la résultante, on obtient:

$$\sum N_i (y - \varepsilon) \, d\Omega = 0, \text{ ou } M - \varepsilon N = 0.$$

L'ordonnée $\varepsilon = \frac{M}{N}$ définit dans le plan de flexion un point appelé centre de pression dont le lieu forme la courbe des pressions.

L'introduction de ε permet d'écrire la formule (VIII) sous la forme:

$$N_1 = -\frac{N}{R} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon y_1 R}{I} \right\}$$

Donnons-nous au cas particulier d'une section rectangulaire (b, h) on a :

$$R = \frac{bh}{2}, \quad I = \frac{bh^3}{12}, \quad N = \frac{h}{2}$$

et la parenthèse $1 - \frac{12\varepsilon y_1}{h^2}$ varie de $1 - \frac{6\varepsilon}{h}$ à $1 + \frac{6\varepsilon}{h}$. Si l'on est conduit à désirer (ce qui arrive dans certaines applications) que le signe de N_1 soit le même dans tous les points de la section, il faudra réaliser les conditions

$$1 - \frac{6\varepsilon}{h} > 0, \quad 1 + \frac{6\varepsilon}{h} > 0,$$

qui rentrent l'une dans l'autre et expriment que le centre de pression est dans le tiers central du rectangle profil (loi de Navier)

Chapitre XI. - Flexion des Arcs. - Applications. -

1. Éléments à déterminer. - Supposons qu'on ait à calculer un arc de ligne moyenne donnée, capable de résister élastiquement à un régime donné de forces extérieures. Le calcul des équilibrages nécessite pour chaque point la connaissance du moment fléchissant M et de l'effort comprimant N . Or ces éléments portent non seulement sur les forces extérieures, mais encore sur les réactions inconnues des appuis. Le problème préliminaire qui se pose sera donc de déterminer ces réactions qui ne sont pas définissables statiquement, et dont le calcul exige la mise en compte de la déformation.

Les appuis d'un arc peuvent être : ou bien à articulation ou rotule, ou bien à encastrement. On distingue à cet égard trois cas :

1° les arcs articulés aux deux points d'appui, 2° les arcs encastres sur leurs points d'appui ; 3° les arcs articulés aux deux points d'appui et au milieu de l'ouverture. Nous réserverons le troisième cas pour un autre chapitre.

Les points d'appui des arcs s'appellent les naissances, ou les retombées ; on désigne par o la partie qui correspond au milieu de l'ouverture.

Un point de vue des liaisons, une rotule équivaut à la fixité de l'extrémité correspondante de la ligne moyenne ; un encastrement équivaut à cette fixité et aussi à celle de la direction de la tangente à ce point de la ligne moyenne.

Un point de vue des réactions, une rotule équivaut à une réaction appliquée à l'extrémité fixe de la ligne moyenne, cette réaction étant inconnue en direction comme en grandeur ; on décomposera la réaction d'une rotule en une composante verticale P et une composante horizontale Q dite poussée de l'arc. Un encastrement équivaut au système formé par une telle force et par un couple dont le moment est dit moment d'encastrement.

Nous supposons qu'on ait pris pour axe ox la corde de l'arc, l'origine étant l'une des naissances. Nous appellerons S la longueur de l'arc à l'état naturel et l la corde.

Les formules (XIII) donnent, appliquées aux deux naissances ($x_0 = 0, y_0 = 0, x_1 = l, y_1 = 0$,

$U_0=0, V_0=0, U=0, V=0, S_0=0, s=S; E=\text{const.}$) :

$$\int_0^s \frac{M_y ds}{I} + \int_0^l \frac{N dx_1}{\Omega} = 0; \quad (1)$$

$$E l \theta_0 + l \int_0^s \frac{M ds}{I} + \int_0^s \frac{M x_1 ds}{I} = 0.$$

Dans le cas de deux appuis simples, la seconde équation fait connaître θ_0 , et l'équation (1) est la seule équation à adjoindre aux équations de la Statique ordinaire pour définir les réactions.

Dans le cas de deux encastremets, on a $\theta_0=0$ et pour $s=S, \theta=0$; il y a lieu d'adjoindre à l'équation (1) les deux équations

$$\int_0^s \frac{M ds}{I} = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^s \frac{M x_1 ds}{I} = 0;$$

ces trois équations et les équations de la Statique définiront les réactions et les moments d'encastrement.

Explicitons ces résultats dans le cas de deux appuis simples. - Soit ϕ l'angle d'une quelconque F des forces actives extérieures, d sa distance à la naissance prise pour origine; Y_1 et Y_2 les réactions verticales des appuis, Q_1 et Q_2 les poussées correspondantes. Les équations de la Statique donnent les trois relations:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 + Y_2 + \sum F \sin \phi &= 0, \\ Q_1 - Q_2 + \sum F \cos \phi &= 0, \\ Y_2 l + \sum F d &= 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

La première et la troisième définissent les réactions verticales Y_1 et Y_2 qui peuvent donc être considérées comme connues. Soient alors N_1 la somme des projections sur la tangente Gx à la ligne moyenne, et M_1 le moment résultant par rapport au point G , de toutes les forces agissant sur le tronçon A, G de la poutre, autres que la poussée Q_1 (mais y compris la réaction verticale connue Y_1). On a:

$$\left. \begin{aligned} N &= N_1 + Q_1 \frac{dx_1}{ds} \\ M &= M_1 + Q_1 y_1 \end{aligned} \right\} (3)$$

L'équation (1) donne alors:

$$\int_0^s \frac{M_1 y_1 ds}{I} + \int_0^l \frac{N dx_1}{\Omega} + Q_1 \left\{ \int_0^s \frac{y_1^2 ds}{I} + \int_0^l \left(\frac{dx_1}{ds} \right) \frac{dx_1}{\Omega} \right\} = 0 \quad (4)$$

et nous donne Q_1 . Dès lors la seconde équation (2) fera connaître Q_2 .

Une fois connues les réactions et notamment Q_1 , les équations (3) donneront, en un point quelconque de la ligne moyenne, les quantités M et N dont il sera loisible alors de suivre les variations.

En fin de compte, nous sommes conduit à l'estimation de diverses intégrales figurant dans l'équation (4). Pour un arc défini analytiquement et pour des systèmes simples de forces, cette estimation peut être faite par le calcul; c'est la méthode assez laborieuse développée par M. Bresse (Cours de Mécanique Appliquée; Première Partie; 1866). Pour un arc défini géométriquement et pour des forces à distribution quelconque, la méthode graphique est la seule praticable. Dans la

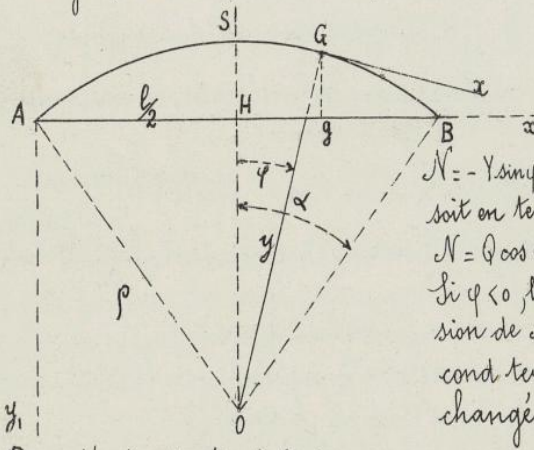
Revue d'Architecture de César Daly (1881), M. Planat a exposé assez simplement une méthode géométrique pour vérifier la stabilité d'un arc donné; cette méthode, bien qu'approximative, donne des résultats suffisamment précis dans la pratique, mais comme elle ne figure pas au programme, nous ne pouvons que renvoyer à l'exposé reproduit par M. Planat dans sa "Mécanique appliquée à la Construction".

2. Cas d'un arc circulaire symétriquement chargé. - Soit un arc circulaire à corde horizontale, soumis à l'action d'un poids $2P_1$ agissant en son sommet S, d'un poids $2P_2$ uniformément réparti suivant la corde AB, d'un poids $2P_3$ uniformément réparti suivant l'arc ASB.

Par raison de symétrie $Y_1 = Y_2$, $Q_1 = -Q_2$, soient Y et Q leurs valeurs communes. En projetant sur la verticale toutes les forces sollicitant l'arc on obtient:

$$2Y = 2P_1 + 2P_2 + 2P_3, \text{ ou } Y = P_1 + P_2 + P_3.$$

Il nous reste à calculer Q. Nous désignerons par 2α l'amplitude de l'arc, par ρ son rayon, et nous fixerons la position d'un point G de la fibre moyenne par l'angle $\text{SOG} = \varphi$ qui variera de $-\alpha$ à $+\alpha$.



Nous commencerons par exprimer M et N en fonction du paramètre φ .

On a d'abord, si $\varphi > 0$:

$$N = -Y \sin \varphi + Q \cos \varphi + 2P_1 \sin \varphi + 2P_2 \frac{\sin \alpha + \sin \varphi}{\sin \alpha} \sin \varphi + 2P_3 \frac{\alpha + \varphi}{2\alpha} \sin \varphi,$$

soit en tenant compte de la valeur de Y:

$$N = Q \cos \varphi + P_1 \sin \varphi + \frac{P_2}{\sin \alpha} \sin^2 \varphi + \frac{P_3}{\alpha} \varphi \sin \varphi.$$

Si $\varphi < 0$, le troisième terme de la première expression de N doit être supprimé, et par suite le second terme de la dernière expression doit être changé de signe.

On a d'autre part, si $\varphi > 0$:

$$M = Y \rho (\sin \alpha + \sin \varphi) - Q \rho (\cos \varphi - \cos \alpha) - 2P_1 \rho \sin \varphi - 2P_2 \frac{\sin \alpha + \sin \varphi}{2 \sin \alpha} \cdot \rho \frac{\sin \alpha + \sin \varphi}{2} - \int_{-\alpha}^{\varphi} \frac{2P_3}{2\alpha} d\varphi' (\sin \varphi - \sin \varphi'),$$

ou encore

$$\frac{M}{\rho} = Q (\cos \alpha - \cos \varphi) + P_1 (\sin \alpha - \sin \varphi) + \frac{P_2}{2 \sin \alpha} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi) + \frac{P_3}{\alpha} \{ (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha) - (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi) \}.$$

Si $\varphi < 0$, on verra comme plus haut qu'il y a lieu de changer de signe le second terme de cette expression.

Nous allons remplacer dans l'équation (1) N et M par ces valeurs pour avoir l'équation déterminant Q. Nous nous limiterons au cas d'un arc à section transversale constante, cas auquel, si l'on pose $I = \pi r^2$, l'équation (1) s'écrit:

$$r^2 \int_0^l N dx_1 + \int_0^s M y_1 ds = 0.$$

Les coordonnées du point G sont:

$$x_1 = \frac{l}{2} + \rho \sin \varphi, \quad y_1 = \rho (\cos \alpha - \cos \varphi),$$

et l'on a:

$$dx_1 = \rho \cos \varphi \, d\varphi, \quad ds = \rho \, d\varphi.$$

En prenant φ comme variable et en calculant diverses intégrales de $-\alpha$ à $+\alpha$, il faut avoir soin, en ce qui concerne les coefficients de P_1 , de diviser le champ en deux: de $-\alpha$ à 0 et de 0 à $+\alpha$.

Tout d'abord on a:

$$\frac{1}{\rho} \int_0^l N dx = Q \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2 \varphi - P_1 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi + P_1 \int_0^{\alpha} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi + \frac{P_2}{\sin \alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi + \frac{P_2}{2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi.$$

Les valeurs des intégrales définies qui figurent comme coefficients au second membre se calculent sans peine, et l'on est conduit à:

$$\frac{1}{\rho} \int_0^l N dx = (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) Q + \sin^2 \alpha P_1 + \frac{2}{3} \sin^2 \alpha P_2 + \frac{1}{4\alpha} (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) P_3.$$

On a ensuite:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^3} \int_0^l M_y ds &= Q \int_{-\alpha}^{+\alpha} (\cos \alpha - \cos \varphi)^2 \, d\varphi - P_1 \int_{-\alpha}^{+\alpha} (\sin \alpha - \sin \varphi) (\cos \alpha - \cos \varphi) \, d\varphi + P_1 \int_0^{\alpha} (\sin \alpha - \sin \varphi) (\cos \alpha - \cos \varphi) \, d\varphi \\ &\quad + \frac{P_2}{2 \sin \alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi) (\cos \alpha - \cos \varphi) \, d\varphi + \frac{P_2}{2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left\{ (\alpha \sin \alpha - \varphi \sin \varphi) (\cos \alpha - \cos \varphi) + (\cos \alpha - \cos \varphi)^2 \right\} \, d\varphi. \end{aligned}$$

Les intégrales coefficients, bien que plus compliquées que les précédentes, ne contiennent encore que des éléments usuels. On trouve:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^3} \int_0^l M_y ds &= (\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha) Q + (2 - 3 \sin^2 \alpha + 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos \alpha) P_1 \\ &\quad + (\alpha \sin \alpha \cos \alpha - \frac{1}{2} \alpha \cot \alpha - \frac{7}{6} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2}) P_2 + (2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha - \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2\alpha} - 5 \sin^2 \alpha + \frac{9}{2}) P_3. \end{aligned}$$

Si donc nous posons:

$$\begin{aligned} B &= \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha + \frac{r^2}{\rho^2} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \\ -B_1 &= 2 - 3 \sin^2 \alpha + 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos \alpha + \frac{r^2}{\rho^2} \sin^2 \alpha \\ -B_2 &= \alpha \sin \alpha \cos \alpha - \frac{1}{2} \alpha \cot \alpha - \frac{7}{6} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} + \frac{r^2}{\rho^2} \frac{2}{3} \sin^2 \alpha \\ -B_3 &= 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha - \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2\alpha} - 5 \sin^2 \alpha + \frac{9}{2} + \frac{r^2}{\rho^2} \frac{1}{4\alpha} (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

nous aurons pour expression de la poussée Q :

$$Q = \frac{B_1}{B} P_1 + \frac{B_2}{B} P_2 + \frac{B_3}{B} P_3.$$

Examinons les cas particuliers du plein cintre. Alors $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et l'on a:

$$B = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{r^2}{\rho^2}\right), \quad B_2 = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right)$$

$$B_1 = \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right), \quad B_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right).$$

Ainsi dans le cas du plein cintre, la poussée a pour valeur

$$Q = \frac{1 - \frac{r^2}{\rho^2}}{1 + \frac{r^2}{\rho^2}} \cdot \frac{2}{\pi} \left[P_1 + \frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 \right].$$

Examinons maintenant le cas des arcs surbaissés. L'indice $\frac{1}{n}$ du surbaissement est le rapport de la flèche $f = HS$ à la portée $l = 2a$. On a:

$$\frac{1}{n} = \frac{f}{2a} = \frac{\rho(1 - \cos \alpha)}{2\rho \sin \alpha} = \frac{1}{2} \tan \frac{\alpha}{2}.$$

Dans la pratique, n varie entre 6 et 30; α est alors relativement petit. Remplaçons dans les expressions de B, B_1, B_2, B_3 , ρ^2 par $\frac{a^2}{\sin^2 \alpha}$, et développons ces expressions suivant

les puissances croissantes de α . Il vient:

$$B = \frac{H}{15} \alpha^5 \left(1 - \frac{H}{24} \alpha^2 + \dots\right) + \frac{r^2}{a^2} \cdot 2 \alpha^3 \left(1 - \frac{2}{3} \alpha^2 + \dots\right)$$

$$B_1 = \frac{5}{12} \alpha^4 \left(1 - \frac{49}{150} \alpha^2 + \dots\right) - \frac{r^2}{a^2} \alpha^4 \left(1 - \frac{2}{3} \alpha^2 + \dots\right)$$

$$B_2 = \frac{H}{15} \alpha^4 \left(1 - \frac{H}{24} \alpha^2 + \dots\right) - \frac{r^2}{a^2} \frac{2}{3} \alpha^4 \left(1 - \frac{2}{3} \alpha^2 + \dots\right)$$

$$B_3 = \frac{H}{15} \alpha^4 \left(1 - \frac{8}{24} \alpha^2 + \dots\right) - \frac{r^2}{a^2} \frac{2}{3} \alpha^4 \left(1 - \frac{11}{15} \alpha^2 + \dots\right)$$

Comme $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{f}{a}$, on en déduit par une formule connue:

$$\frac{\alpha}{2} = \arctan \frac{f}{a} = \frac{f}{a} - \frac{f^3}{3a^3} + \frac{f^5}{5a^5} - \dots,$$

et comme la quantité $\frac{r^2}{a^2}$ est très petite (de 0,001 à 0,0025), on en déduit, tous calculs faits, les valeurs approchées suivantes:

$$\frac{B_1}{B} = \frac{a}{2f \sqrt{1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}}} \frac{25}{16} \left(1 - \frac{286}{525} \frac{f^2}{a^2}\right),$$

$$\frac{B_2}{B} = \frac{a}{2f \sqrt{1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}}} \left(1 - \frac{f^2}{7a^2}\right),$$

$$\frac{B_3}{B} = \frac{a}{2f \sqrt{1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}}} \left(1 - \frac{3f^2}{7a^2}\right).$$

Les coefficients de P_1, P_2, P_3 dans l'expression de la poussée ont ainsi une forme utilisable.

Nous ne nous sommes préoccupés jusqu'à présent que de la détermination de la poussée. En ce qui concerne la déformation, nous nous bornerons à calculer la réduction F de la flèche par suite de la mise en charge de l'arc. - Les formules (XIII) donnent pour expression de cette réduction:

$$F = -\theta_0 \frac{l}{2} - \frac{p}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M ds}{EI} + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M \alpha_1 ds}{EI} + \int_0^f \frac{N dy}{E \Omega}$$

D'ailleurs on a:

$$0 = \theta_0 l + l \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M ds}{EI} + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M \alpha_1 ds}{EI},$$

et par l'élimination de θ_0 , il vient:

$$2 E I F = l \int_{\frac{l}{2}}^l M ds - 2 \int_{\frac{l}{2}}^l M \alpha_1 ds - 2 r^2 \int_0^f N dy.$$

Si l'on prend comme unique variable l'angle φ , nous avons à prendre comme limites d'intégration 0 et α :

$$l \int_{\frac{l}{2}}^l M ds = p^2 l \int_0^\alpha \left\{ Q (\cos \alpha - \cos \varphi) + P_1 (\sin \alpha - \sin \varphi) + \frac{P_2}{2 \sin \alpha} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi) \right\} \cos \varphi d \varphi$$

$$+ \frac{P_3}{\alpha} [(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha) - (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi)]$$

etc.....

Par des calculs analogues à ceux développés à propos de la poussée, mais des plus compliqués, on sera conduit à une équation de la forme:

$$2 E I F = A Q + A_1 P_1 + A_2 P_2 + A_3 P_3,$$

en désignant par A, A_1, A_2, A_3 quatre fonctions de α déterminées. Remplaçons y. q

par la valeur précédemment obtenue, et nous avons

$$2EIF = \frac{C_1}{B} P_1 + \frac{C_2}{B} P_2 + \frac{C_3}{B} P_3.$$

La question est ainsi ramenée au calcul des quantités C_1, C_2, C_3 , pour lequel on se servira avantageusement des tables de Bresse.

Un calcul approché conduit à :

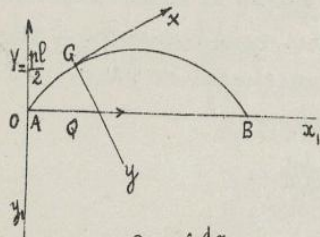
$$\frac{C_2}{2EIF} = 1,56 \frac{\rho^2}{Ea(15 + \frac{15r^2}{8\rho^2})} (1 + 0,0122 \frac{f^4}{a^2r^2})$$

$$\frac{C_3}{2EIF} = 1,56 \frac{\rho^2}{Ea(1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{\rho^2})} (1 + 0,0081 \frac{f^4}{a^2r^2})$$

Enfin les expressions données de M et de N permettent d'en suivre les variations, et par suite de déterminer le maximum de la tension N , en vue de la détermination de l'équarissage.

3. Solides d'équilibre. — On donne le nom de solide d'équilibre à un arc symétrique à section variable, et qu'en aucune de ses tranches il n'y ait flexion, c'est-à-dire tel que les éléments de la réduction des forces extérieures pour un point quelconque de la fibre moyenne se réduisent à l'effort comprimant N .

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un arc symétrique à deux appuis de niveau soumis seulement à une charge uniformément répartie suivant la corde. Les forces moléculaires sur la section du point G se réduiront à une force $-N$, tangente à la fibre moyenne.



Écrivons les équations d'équilibre du tronçon AG (équations de projection et équation des moments par rapport à G); comme par raison de symétrie, les réactions verticales des appuis sont égales et valent $\frac{pl}{2}$, ces équations sont :

$$Q - N \frac{dx_1}{ds} = 0, \quad -\frac{pl}{2} + px_1 - N \frac{dy_1}{ds} = 0, \quad \frac{pl}{2} x_1 + Q y_1 - \frac{px_1^2}{2} = 0.$$

Sont-elles compatibles? Les deux premières donnent, par l'élimination de N :

$$Q \frac{dy_1}{dx_1} = px_1 - \frac{pl}{2},$$

tandis que la troisième donne :

$$Q y_1 = \frac{px_1^2}{2} - \frac{pl x_1}{2}.$$

Il suffit de dériver pour reconnaître la compatibilité. — La fibre moyenne doit donc être parabolique, l'axe de la parabole étant vertical.

D'ailleurs :

$$N^2 = Q^2 + p^2 \left(\frac{l}{2} - x_1\right)^2$$

Si h est la flèche de l'arc, on a : $Qh = \frac{pl^2}{2}$; prenant l'origine au milieu de la corde AB et appelant ξ la nouvelle abscisse, il vient :

$$N^2 = \frac{pl^2}{4h^2} + p^2 \xi^2;$$

La tension se réduit ici (puisque $M=0$) à $\frac{N}{\alpha}$, soit à :

$$\frac{pl^2}{8h\alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{8h\xi}{l}\right)^2}.$$

Par un choix convenable du profil, on pourra faire en sorte que cette quantité soit

constante. Supposant la largeur constante, on voit que la hauteur ira en augmen- ^{141.}
tant depuis la clef jusqu'aux naissances, le coefficient d'accroissement étant $\sqrt{1 + \frac{16q^2}{p^2}}$.

A titre de curiosité, on signalera ^{1°} le cas où les charges sont uniformément réparties suivant l'arc; on a alors (s'étant la longueur de l'arc):

$$Q - N \frac{dy_1}{ds} = 0, \quad -\frac{p s}{2} + p s - N \frac{dx_1}{ds} = 0, \quad \frac{p s}{2} + Q y_1 - \int_0^s p x_1 ds = 0.$$

On en déduit:

$$Q \frac{dy_1}{dx_1} = p \left(s - \frac{s}{2} \right);$$

soit σ l'arc estimé à partir du sommet; l'équation différentielle

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{p}{Q} \sigma$$

caractérise une chaînette. (Cette propriété a été utilisée dans les routes).

^{2°} Le cas où les forces sont uniformément réparties suivant l'arc et normales à l'arc.

On a comme équations de projection:

$$Q - N \frac{dy_1}{ds} + \int_0^s p ds \cos \psi = 0, \quad -Y - N \frac{dx_1}{ds} - \int_0^s p ds \sin \psi = 0,$$

ψ étant l'angle de la normale avec ox . Mais $ds \cos \psi = -dy_1$, $ds \sin \psi = dx_1$. Donc:

$$N \sin \psi = Q - \int_0^s p dy_1 = Q - p y_1, \quad N \cos \psi = Y - \int_0^s p dx_1 = Y - p x_1.$$

Par dérivation, il vient:

$$N \cos \psi d\psi + \sin \psi dN = -p dy_1 = p ds \cos \psi,$$

$$-N \sin \psi d\psi + \cos \psi dN = -p dx_1 = p ds \sin \psi,$$

d'où $dN = 0$, et par suite $\frac{d\psi}{ds}$ est constant. L'arc est donc circulaire et l'effort comprimant N est invariable.

Chapitre XII. - Résistance des enveloppes.

1. Enveloppes cylindriques. - On obtient la répartition de forces qu'on a signalé en terminant le précédent chapitre lorsqu'un cylindre creux est soumis sur chacune de ses faces à une pression s'exerçant normalement et uniformément comme celle qui est produite par un fluide élastique.

Dans ce cas particulier, les équations d'équilibre d'élasticité peuvent être très facilement intégrées et elles conduisent à une formule classique, dite formule de Lamé.

Soit donc un solide limité par deux cylindres circulaires de même axe et par deux bases normales à cet axe, sachant que les surfaces cylindriques sont soumises à des pressions uniformes et que les bases éprouvent des tractions égales entre elles.

Par raison de symétrie, le déplacement de chaque point s'effectue dans le plan méridien contenant ce point. Prenons donc comme origine le centre de gravité G , pour axe des z l'axe de révolution et essayons de représenter le déplacement par les formules

$$u = \varepsilon \frac{x}{r}, \quad v = \varepsilon \frac{y}{r}, \quad w = c z,$$

ε désignant une fonction de la distance r à Gz et c une constante.

Comme $r^2 = x^2 + y^2$, on a :

$$u dx + v dy + w dz = \varepsilon dr + c z dz.$$

Il y a d'après cela une fonction $\phi = \frac{1}{2} c z^2 + \int \varepsilon dr$ dont u, v, w sont les dérivées par rapport aux coordonnées. Donc (Ch. III, D, N° H) la dilatation cubique est constante. Or :

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} \frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{2\varepsilon}{r} - \varepsilon \frac{x^2 + y^2}{r^3} + c = \frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{\varepsilon}{r} + c$$

Donc l'expression $\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{\varepsilon}{r}$ doit être égale à une constante $2a$, ce qui donne, b désignant une autre constante :

$$\varepsilon = a r + \frac{b}{r}$$

La connaissance de u, v, w entraîne celle des (N, T) ; on a :

$$N_1 = A(2a+c) + 2G \left(\frac{x^2}{r^2} \frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{y^2}{r^2} \varepsilon \right), \quad T_1 = 0$$

$$N_2 = A(2a+c) + 2G \left(\frac{y^2}{r^2} \frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{x^2}{r^2} \varepsilon \right), \quad T_2 = 0$$

$$N_3 = A(2a+c) + 2G c, \quad T_3 = 2G \frac{xy}{r^2} \left(\frac{d\varepsilon}{dr} - \frac{\varepsilon}{r} \right).$$

Considérons un point quelconque; faisons passer par lui le plan Gzx ; pour ce point, on aura : $x=r, y=0$; d'où

$$N_1 = A(2a+c) + 2G \frac{d\varepsilon}{dr} = 2(A+G)a + Ac - \frac{2Gb}{r^2}, \quad T_1 = 0.$$

$$N_2 = A(2a+c) + 2G \frac{\varepsilon}{r} = 2(A+G)a + Ac + \frac{2Gb}{r^2}, \quad T_2 = 0$$

$$N_3 = A(2a+c) + 2G c = 2Aa + (A+2G)c, \quad T_3 = 0.$$

Soient r_1 et r_0 les rayons extérieur et intérieur du tube; P_1 et P_0 les pressions correspondantes. On doit avoir pour $r=r_0$, $N_1 = -P_0$ et pour $r=r_1$, $N_1 = -P_1$. En outre la valeur constante N_3 doit être égale à la traction F exercée sur les bases. De là trois conditions à la surface

$$2(A+G)a + Ac - \frac{2Gb}{r_0^2} = -P_0.$$

$$2(A+G)a + Ac - \frac{2Gb}{r_1^2} = -P_1.$$

$$2Aa + (A+2G)c = F.$$

Ces équations déterminent a, b, c . On a :

$$2(A+G)a + Ac = \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}, \quad 2Gb = \frac{(P_0 - P_1) r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}$$

On obtient enfin

$$N_1 = \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} - \frac{(P_0 - P_1) r_0^2 r_1^2}{(r_1^2 - r_0^2) r^2} = - \frac{P_0 r_0^2 (r_1^2 - r^2) + P_1 r_1^2 (r^2 - r_0^2)}{(r_1^2 - r_0^2) r^2}$$

$$N_2 = \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{(P_0 - P_1) r_0^2 r_1^2}{(r_1^2 - r_0^2) r^2} = \frac{P_0 r_0^2 (r_1^2 + r^2) - P_1 r_1^2 (r^2 + r_0^2)}{(r_1^2 - r_0^2) r^2}$$

N_1 est toujours négatif et correspond à une pression; N_2 au contraire peut devenir positif et correspond à une traction qui tend à produire la fissuration suivant le plan méridien.

Supposons $P_0 > P_1$; le maximum de N_2 a lieu pour $r=r_0$ et vaut :

$$\frac{P_0 (r_1^2 + r_0^2) - 2 P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}.$$

Il est supérieur à celui de N_1 ; on choisit l'équarissage, pour ne pas excéder les limites de l'élasticité, de manière que le maximum de N_1 , soit au plus égal à la charge de sécurité de traction R_0 ; d'où :

$$\frac{P_0 (r_1^2 + r_0^2) - 2P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \leq R_0,$$

ou

$$r_1 \geq r_0 \sqrt{\frac{R_0 + P_0}{R_0 + 2P_1 - P_0}}$$

Par économie, on adoptera l'égalité pour déterminer r_1 , quand r_0 et les pressions seront données.

Lorsque P_0 devient égal à $R_0 + 2P_1$, r_1 devient infini; aucune valeur de r_1 , si grande soit-elle, ne donnera à l'enveloppe une résistance suffisante. Cette limite est d'ailleurs au-dessus des pressions usuelles. Pour le fer, R_0 est de 600 K par centimètre carré, et il n'y a guère d'exemples industriels de pressions intérieures excédant 300 K. - Cependant, quand P_0 est grand, il y a intérêt, pour n'avoir pas à donner à l'enveloppe une épaisseur trop forte, à augmenter la pression extérieure P_1 ; ce que l'on fait au moyen de frettes (en particulier dans l'artillerie, par le tubage des canons).

On peut écrire :

$$r_1 = \frac{r_0}{\sqrt{1 - 2 \frac{P_0 - P_1}{P_0 + R_0}}}$$

Soit $r_1 = r_0 (1 + \delta)$; si $\frac{P_0 - P_1}{P_0 + R_0}$ est très petit, ce qui a lieu d'ordinaire, on aura

$$\delta = \frac{P_0 - P_1}{P_0 + R_0}$$

Ces formules ont été données par Lamé.

Supposons qu'il s'agisse d'une enveloppe mince, d'épaisseur e et de rayon moyen ρ . On a, en négligeant δ devant ρ :

$$\frac{(P_0 - P_1) \rho^2}{\rho e} \leq R_0, \text{ ou } e \geq \frac{(P_0 - P_1) \rho}{R_0}.$$

Ces formules serviront à calculer l'épaisseur à donner à la paroi d'une chaudière à vapeur, d'un cylindre de presse hydraulique.

Dans le cas des chaudières, la connaissance de N_2 servira ultérieurement pour le calcul de la closerie de la paroi. - Une telle chaudière est formée d'un cylindre terminé par deux calottes hémisphériques ou aplaties. Celles-ci sous l'action de la pression intérieure, tendent à se déformer, et l'on ne peut pas dire que, dans leurs plans de jonction avec le tube cylindrique, les actions mutuelles se répartissent uniformément. En fait, la question est très complexe. Mais si la chaudière est suffisamment allongée et d'une faible épaisseur, on admet que dans la région moyenne les sections droites supportent sensiblement des tractions uniformes, ce qui rend applicables les formules de Lamé auxquelles nous sommes parvenus.

Nous avons donné l'équation d'équarissage suivant la manière traditionnelle. En fait, c'est la dilatation linéaire maxima qu'il faudrait tenir en deçà de la limite $\frac{R_0}{E}$. Or en un point les dilatations principales sont les dilatations radiale, azimutale et axiale dont les expressions sont ($x=r, y=0$) :

$\epsilon_x = a - \frac{b}{r^2}$, $\epsilon_y = a + \frac{b}{r^2}$, $\epsilon_z = c$.
 a, b, c étant déterminés par les équations données plus haut; d'ailleurs, si la traction F suivant l'axe résulte des pressions intérieure et extérieure qui s'exercent sur les fonds, on a:

$$F \pi (r_1^2 - r_0^2) = P_0 \pi r_0^2 - P_1 \pi r_1^2$$

et par suite :

$$2Aa + (A + 2G)c = \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}$$

Alors :

$$a = \frac{1}{3A + 2G} \cdot \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}, \quad b = \frac{(P_0 - P_1) r_0^2 r_1^2}{2G (r_1^2 - r_0^2)}$$

La pression P_0 étant supposée notablement supérieure à P_1 , a et b sont positifs. La plus grande dilatation en un point se produit donc normalement au méridien, et son maximum est atteint pour $r = r_0$. D'où la condition

$$\frac{1}{3A + 2G} \cdot \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{(P_0 - P_1) r_1^2}{2G (r_1^2 - r_0^2)} \leq \frac{R_0}{E}$$

Pour les métaux durs, on a $A = G = \frac{2}{3} E$; d'où :

$$\frac{1}{2} \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{5(P_0 - P_1) r_1^2}{4(r_1^2 - r_0^2)} \leq R_0,$$

par suite :

$$\frac{r_1}{r_0} \geq \sqrt{\frac{2(2R_0 + P_0)}{7P_1 + 4R_0 - 5P_0}}$$

et l'on a ainsi la plus petite épaisseur qu'on puisse donner à l'enveloppe. Ce n'est pas cette formule qui est adoptée pratiquement, mais bien la précédente qui est moins bien justifiée.

2. Enveloppes sphériques. - Soit une enveloppe sphérique soumise sur chacune de ses faces à une pression normale et uniforme. Tout point se déplace, par symétrie, sur le rayon mené de l'origine (centre de la sphère) à sa position primitive et la grandeur du déplacement ϵ ne dépend que de la distance du point au centre.

Faisons :

$$u = \epsilon \frac{x}{r}, \quad v = \epsilon \frac{y}{r}, \quad w = \epsilon \frac{z}{r} \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2).$$

l'expression $u dx + v dy + w dz = \epsilon dr$,
 est une différentielle totale exacte; donc la dilatation cubique est constante. Or on a :

$$\frac{du}{dx} = \frac{\epsilon x}{r^2} \cdot \frac{d\epsilon}{dr} + \frac{r^2 - x^2}{r^3} \epsilon, \dots, \dots$$

Donc

$$\theta = \frac{d\epsilon}{dr} + 2 \frac{\epsilon}{r} = \text{Const.} = 3a,$$

et

$$\epsilon = ar + \frac{b}{r^2}$$

Par substitution, on obtient pour les (N, T) les expressions :

$$N_1 = 3Aa + 2G \left[\frac{\epsilon}{r} - \frac{3\epsilon x^2}{r^3} + \frac{3ax^2}{r^2} \right], \quad T_1 = 6G \frac{yz}{r^2} \left(a - \frac{\epsilon}{r} \right), \dots$$

Pour étudier les tensions autour d'un point, faisons passer l'axe des x par ce point et soit $x = r, y = 0, z = 0$ ses coordonnées. - Les composantes tangentielles sont alors nulles et

on a :

$$N_1 = (3A + 2G) a - \frac{Hb}{r^3}; \quad N_2 = N_3 = (3A + 2G) a + \frac{2Gb}{r^3}.$$

Exprimez que à la surface intérieure ($r=r_0$), N_1 se réduit à $-P_0$ et sur la surface extérieure ($r=r_1$) à $-P_1$. On obtient :

$$(3A + 2G) a - \frac{HGb}{r_0^3} = -P_0, \quad (3A + 2G) a - \frac{HGb}{r_1^3} = -P_1.$$

Ces relations déterminent a et b , en sorte que les expressions des tensions sont complètement déterminées, ainsi que la loi de déformation.

Pour la recherche de l'épaisseur à donner (r_0, P_0, P_1 étant connus), on suit la même marche que tout à l'heure, et l'on trouve la condition :

$$\frac{P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} + \frac{1}{2} \frac{(P_0 - P_1) r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} \leq R_0,$$

soit

$$\frac{r_1}{r_0} \geq \sqrt[3]{\frac{2(R_0 + P_0)}{2R_0 + 3P_1 - P_0}}.$$

Dans le cas d'une enveloppe mince d'épaisseur e et de rayon moyen ρ , on aura :

$$e \geq \frac{(P_0 - P_1) \rho^2}{2R_0}.$$

3. Plaques circulaires. — La question de la résistance des fonds de chaudières nous incite à dire quelques mots sur la déformation des plaques circulaires dont l'étude est due à Poisson.

La position de la plaque est définie soit par un encastrement suivant son périmètre, soit par un appui de ce périmètre sur l'une des bases d'un cylindre creux. Les deux faces sont respectivement soumises aux pressions normales constantes P_0 et P_1 ($P_0 > P_1$).

Soit ρ le rayon et e l'épaisseur de la plaque; x ou y le plan moyen de la plaque avant la mise en charge et o le centre de la section qu'il détermine; oz la partie de l'axe de la plaque située dans le milieu qui produit la pression P_1 .

Par raison de symétrie, le déplacement d'un point a lieu dans le plan méridien du point et ne dépend que de la cote z et du rayon polaire r du point. Soient U et W ses composantes radiale et axiale, l'expérience conduit à admettre que la dilatation suivant l'épaisseur de la plaque est nulle; par suite W ne dépend pas de z .

Soit G un point de la section méridienne de la couche moyenne déformée; W_0 sa cote. Des considérations d'analogie avec la théorie de la flexion conduisent à prendre $U = -z \frac{dW_0}{dr}$ et à poser :

$$u = -\frac{zx}{r} \frac{dW_0}{dr}, \quad v = -\frac{zy}{r} \frac{dW_0}{dr}, \quad w = W(r).$$

Nous ne développerons pas cette théorie qui conduit à la plus grande dilatation radiale: 1° Dans le cas d'une plaque encastree sur tout son pourtour :

$$\frac{5(P_0 - P_1)}{Hc^2(A + 2G)} \rho^2;$$

comme $A = G = \frac{2}{5} E$, en écrivant que cette dilatation est moindre que $\frac{R_0}{E}$, on aura :

$$\frac{5(P_0 - P_1)}{8e^2} \rho^2 \leq R_0 \text{ ou } e \geq \rho \sqrt{\frac{5(P_0 - P_1)}{8R_0}};$$

2° Dans le cas d'une plaque reposant suivant son pourtour sur un tube : 146.

$$\frac{5(P_0 - P_1)}{16e^2 A} \rho^2 ;$$

on aura de même :

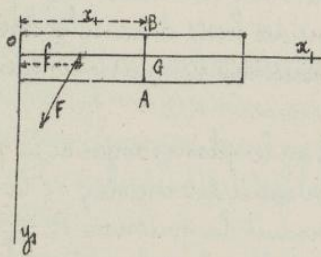
$$\frac{25(P_0 - P_1)}{32e^2} \rho^2 \leq R_0 \quad \text{ou} \quad e \geq \frac{5}{4} \rho \sqrt{\frac{P_0 - P_1}{2 R_0}} .$$

En comparant entre eux les seconds membres des conditions d'équarrissage, on voit que l'encastrement a pour effet de réduire l'épaisseur dans le rapport $\sqrt[5]{5}$ à 5.

Chapitre XIII. - Flexion des poutres droites par des forces obliques. -

1. Généralités. - La flexion transversale des pièces droites étudiée au chapitre V est la déformation produite par des forces toutes situées dans le plan de symétrie de la pièce et normales à la direction de la pièce.

Lorsque les forces, encore situées dans le plan de symétrie, sont obliques à la fibre moyenne, le phénomène est plus complexe et constitue un cas particulier de la flexion des arcs, celui où la courbure de la fibre moyenne naturelle est nulle en tout point.



Prends pour origine O l'un des appuis, pour axe ox_1 la fibre moyenne naturelle. Soit (X, Y) et M_1 la réaction et le moment d'encastrement de l'appui O ; (X, Y) les composantes d'une force extérieure dont la ligne d'action coupe ox_1 en un point d'abscisse f , et qui sollicite le tronçon à gauche d'une section G d'abscisse x_1 . Au point G , le moment fléchissant, l'effort comprimant et l'effort tranchant ont pour valeurs respectives :

$$M = M_1 - Y_1 x_1 - \sum Y f$$

$$N = X_1 + \sum X$$

$$E = Y_1 + \sum Y$$

les sommations s'étendant à toutes les forces appliquées au tronçon OG .

La tension longitudinale en un point a pour expression

$$N_1 = \frac{M y_1}{I} - \frac{N}{\sigma} ;$$

la tension transversale, en supposant la section constante, vaut

$$T_3 = \frac{1}{\lambda I} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\int_{y_1}^n M y \lambda dy \right] - \frac{1}{\lambda \sigma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\int_{y_1}^n N \lambda dy \right] .$$

ou encore :

$$T_3 = - \frac{E}{\lambda I} \int_{y_1}^n \lambda y dy - \frac{1}{\lambda \sigma} \frac{\partial N}{\partial x_1} \int_{y_1}^n \lambda dy$$

Ces valeurs permettront de calculer l'équarrissage.

Quant à la déformation, elle sera régie par les formules (XII) et (XIII) du chapitre ¹⁴⁷ X, qui donnent, en faisant $U_0 = 0, V_0 = 0, x_1 = 0, y_1 = 0, y_1 = 0$:

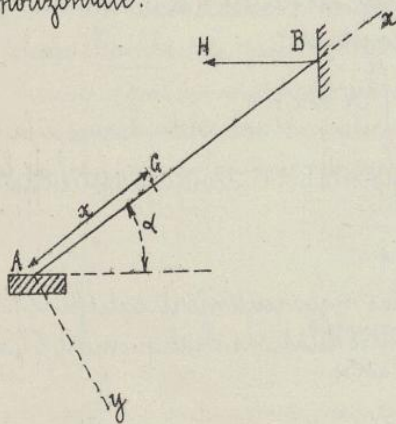
$$U = -\frac{1}{E} \int_0^{x_1} \frac{N dx_1}{\Omega},$$

$$V = -\theta_0 x_1 - \frac{x_1}{E} \int_0^{x_1} \frac{M dx_1}{I} + \frac{1}{E} \int_0^{x_1} \frac{M x_1 dx_1}{I}$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{E} \int_0^{x_1} \frac{M dx_1}{I}.$$

S'il y a encastrement en 0, θ est nul; sinon, c'est M_1 qui est nul.

2. Calcul d'un arbalétrier sans appui intermédiaire. — Un arbalétrier est une pièce de charpente reposant par une extrémité sur une face horizontale d'une pièce dite sablière et par l'autre sur une face verticale d'un appui dit poinçon dont la réaction, par suite de la disposition d'ensemble de la charpente, est horizontale.



Soit l la longueur de la poutre; α son inclinaison sur l'horizon; p sa charge par unité de longueur.

Avec les axes marqués par la figure, soient (X_1, Y_1) la réaction de l'appui A, $(X_2 = H \cos \alpha, Y_2 = H \sin \alpha)$ celle de l'appui B. Ces réactions sont déterminées statiquement.

Projetons les forces appliquées à toute la poutre sur l'horizontale et la verticale, puis prenons les moments par rapport au point B. Il vient:

$$X_1 \cos \alpha + Y_1 \sin \alpha - H = 0, \quad X_1 \sin \alpha - Y_1 \cos \alpha - pl = 0$$

$$-Y_1 l - pl \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha = 0.$$

D'où:

$$Y_1 = -\frac{1}{2} pl \cos \alpha, \quad X_1 = \frac{1}{2} pl \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \sin \alpha \right),$$

$$H = \frac{pl}{2} \cotg \alpha.$$

Calculons pour un point G d'abscisse x les éléments M, N, E . On a:

$$N = X_1 - px \sin \alpha = \frac{pl}{2 \sin \alpha} + p \sin \alpha \left(\frac{l}{2} - x \right),$$

$$E = Y_1 + p \cos \alpha = -p \cos \alpha \left(\frac{l}{2} - x \right),$$

$$M = -Y_1 x - px \cos \alpha \cdot \frac{x}{2} = \frac{p \cos \alpha}{2} x (l - x).$$

N et M ont pour maxima respectifs, l'un, pour $x = 0$:

$$\frac{pl}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \sin \alpha \right), \text{ l'autre, pour } x = \frac{l}{2} : \frac{pl^2 \cos \alpha}{8}.$$

L'équation d'équarrissage sera:

$$\frac{R_0 I}{N} = \frac{pl^2 \cos \alpha}{8} + \frac{I}{N \Omega} \cdot \frac{pl}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \sin \alpha \right).$$

Pour un profil rectangulaire (b, h) , $\frac{I}{N \Omega} = \frac{h}{6}$ et cette équation donne:

$$4 R_0 b h^2 = 3 pl^2 \cos \alpha + 2 pl h \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \sin \alpha \right)$$

Strictement, connaissant M et N, on pourrait calculer le maximum de $\frac{M}{h} - \frac{N}{\sigma}$ au lieu de prendre $\frac{1}{1N} \text{Max } M + \frac{1}{\sigma} \text{Max } |N|$. Le calcul est sans difficulté. Pratiquement on procède comme plus haut.

Pour les fers en I, on aura recours à des approximations successives.

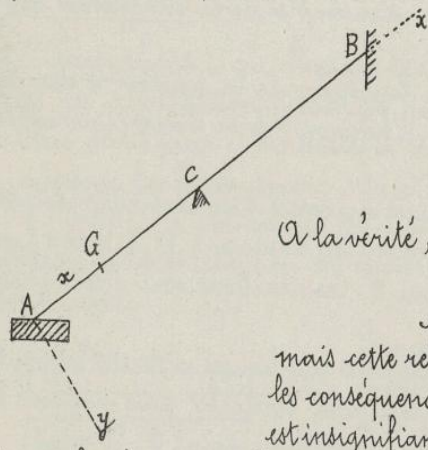
3. Calcul d'un arbalétrier à appui intermédiaire. - Lorsque l'arbalétrier a une trop grande longueur, on le soutient en son milieu C par un appui (contre-fiche ou bielle) qui le maintient dans une position fixe.

Soient $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ les réactions des appuis A, B, C. On admet, ce qui n'est pas rigoureusement exact, que le point B est fixe, et on prend pour réactions normales celles qu'on aurait avec une charge normale uniformément répartie posée, agissant sur une poutre continue à trois appuis de niveau et à travées égales:

$$Y_1 = Y_3 = -\frac{3}{16} pl \cos \alpha, \quad Y_2 = -\frac{10}{16} pl \cos \alpha$$

De plus la fixité des points A et C entraîne le profil étant constant:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} N dx = 0$$



A la vérité, la fixité des points B et C devrait aussi entraîner

$$\int_{\frac{l}{2}}^l N dx = 0;$$

mais cette relation n'est pas rigoureusement satisfaite par les conséquences des précédentes relations. Pratiquement l'écart est insignifiant.

Comme la réaction de l'appui B est horizontale, on a:

$$X_3 = Y_3 \cot \alpha = -\frac{3}{16} pl \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)$$

En second lieu, l'équation de projection des forces extérieures sur AB donne:

$$X_1 + X_2 + X_3 - pl \sin \alpha = 0,$$

d'où:

$$X_1 + X_2 = \frac{3}{16} \frac{pl}{\sin \alpha} + \frac{13}{16} pl \sin \alpha$$

Enfin en un point G entre A et C, on a $N = X - px \sin \alpha$; la relation $\int_0^{\frac{l}{2}} N dx = 0$ donne donc:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} (X_1 - px \sin \alpha) dx = 0 \text{ ou } X_1 = \frac{pl \sin \alpha}{4}$$

Par suite:

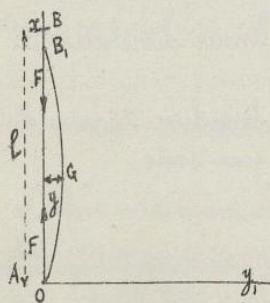
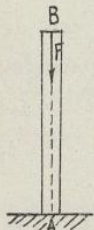
$$X_2 = \frac{3}{16} \frac{pl}{\sin \alpha} + \frac{9}{16} pl \sin \alpha$$

Les réactions sont ainsi déterminées. On peut alors, comme au N° précédent, calculer en un point de chaque travée, les quantités M et N, déterminer leurs plus grandes valeurs et enfin écrire les équations d'équarissage, desquelles celle qui conduit au plus fort équarissage est seule à conserver, le profil étant constant sur toute la longueur de l'arbalétrier.

Chapitre XIV. - Flambement des pièces borbées debout. -

1. Généralités et formule d'Euler. - Les lois de la compression données au Ch. IV, N° 4 ne s'appliquent qu'aux pièces très courtes relativement à la plus petite dimension de leur base.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une poutre plus ou moins longue AB soumise à un effort de compression F dirigé suivant son axe, l'extrémité libre B étant astreinte à rester sur la droite AB. L'expérience montre qu'il existe une certaine valeur minimum de F au dessous de laquelle la pièce, légèrement fléchie par une cause accidentelle se redresse naturellement, tandis qu'au delà de ce point, un accroissement, même assez faible, de la force de compression donne lieu à une flèche considérable et met la pièce en danger de se rompre: on dit alors que la pièce flambe. La pièce est donc, à ce moment, comme en équilibre instable et se trouve dans des conditions inadmissibles dans la pratique, il est donc essentiel de ne jamais atteindre la valeur en question que nous nous proposons de déterminer, en supposant la pièce de section constante.



1° Pièce articulée à ses deux extrémités. - La poutre, de longueur l à l'état naturel, est articulée à ses extrémités A et B; A est fixé en O et B astreint à se déplacer sans frottement sur ox_1 . Une force F agit suivant son axe. Imaginons qu'une cause accidentelle fasse fléchir la ligne moyenne et la transforme en la ligne plane OGB, et étudions la forme d'équilibre prise ultérieurement par la pièce. Prenons oy , normal à ox_1 dans le plan de la ligne moyenne déformée; appliquons les formules générales de la

théorie des arcs. On a:

$M = Fy$, $N = F$, $s = x_1$, $\rho = \infty$
 en désignant par (x, y) les coordonnées du point G quelconque de la ligne moyenne déformée, situé initialement en $(x_1, 0)$ Avec les notations de la théorie des arcs, on a:

Les formules (II), (V), (VII) donnent:
 $\frac{d\theta}{dx_1} = \frac{Fy}{EI}$, $\frac{dx}{dx_1} = 1 - \frac{F}{E\Omega}$, $\frac{dy}{dx} = -\theta$.

On en déduit:
 $x = x_1 \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx_1} \left[\theta \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) \right] = -\frac{F}{EI} \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) y$$

La pièce étant au moins calculée pour résister à la compression simple, le coefficient de y dans le second membre est négatif. Si l'on pose:

l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$k^2 = \frac{F}{EI} \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right),$$

$$\frac{d^2 y}{dx_1^2} = -k^2 y$$

sera:

$$y = A \sin kx + B \cos kx.$$

Pour $x_1 = 0$, y est nul, donc $B = 0$. Pour $x_1 = l$, y doit être aussi nul; d'où: $kl = p\pi$, p étant un entier quelconque. Ainsi:

$$\frac{F}{EI} \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) = \frac{p^2 \pi^2}{l^2}.$$

À cause de la grandeur de E , on peut remplacer la parenthèse par l'unité, et on est conduit à la formule dite d'Euler:

$$F = p^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

L'équilibre de la pièce fléchie n'est donc possible que si la force de compression F a une valeur fournie par la formule précédente en y faisant $p = 1, 2, 3, \dots$. Si donc on a:

$$F < \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

I , étant le plus petit moment d'inertie de la section, la force F sera incapable de maintenir la flexion produite par les causes accidentelles admises, quelque soit le plan de flexion.

Si r est le plus petit rayon de giration de la section, la limite cherchée sera donc $\frac{\pi^2 r^2}{l^2} E\Omega$.

Supposons que par un moyen quelconque on assujettisse le milieu de la pièce à rester sur ox ; on devra avoir au milieu $kl \frac{l}{2} = p\pi$, et par suite:

$$F = 4p^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Si donc F est inférieur à $4 \frac{\pi^2 r^2}{l^2} E\Omega$, il y aura impossibilité de maintenir l'équilibre. La limite est ainsi quadruplée. On l'augmenterait plus encore en multipliant davantage les points d'appui.

2. Pièce encastree à une extrémité et guidée à l'autre suivant sa direction primitive. - La pièce est encastree en A , articulée en B , l'articulation pouvant se déplacer d'une certaine quantité, faible d'ailleurs, suivant ox .

Reprenons la théorie précédente en modifiant convenablement l'expression du moment fléchissant. L'encastrement A donne un couple d'encastrement de moment μ et une réaction normale H , en sorte qu'on a:

$$M = \mu + Fy + Hx, \quad N = F$$

Les équations:

$$\frac{d\theta}{dx_1} = M, \quad \frac{dx}{dx_1} = 1 - \frac{F}{E\Omega}, \quad \frac{dy}{dx} = -\theta,$$

donnent:

$$x = x_1 \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right)$$

$$\text{et } \frac{d^2 y}{dx_1^2} = -k^2 y - \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right)^2 \frac{H}{EI} x_1 - \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) \frac{1}{EI} \mu.$$

Posons:

$$y = Y - \frac{\mu}{F} - \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) \frac{H}{F} x_1;$$

l'équation précédente deviendra:

$$\frac{d^2 Y}{dx_1^2} = -k^2 Y,$$

et donnera:

$$Y = A \sin kx_1 + B \cos kx_1.$$

D'ailleurs à l'origine, y est nul ainsi que sa dérivée. D'où:

$$-\frac{\mu}{F} + B = 0 \quad kA - \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) \frac{H}{F} = 0.$$

et par suite:

$$y = -\frac{\mu}{F} - \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) \frac{H}{F} x_1 + \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) \frac{H}{kF} \sin kx_1 + \frac{\mu}{F} \cos kx_1.$$

D'autre part, au point B ($x_1 = l$), y est nul, et, comme il y a articulation, M est nul. Donc:

$$\mu + Hl \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) = 0, \quad -\frac{\mu}{F} - \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) \frac{Hl}{F} + \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) \frac{H}{kF} \sin kl + \frac{\mu}{F} \cos kl = 0.$$

L'élimination de $\frac{H}{F}$ est immédiate et donne:

$$\text{tang. } kl = kl.$$

La plus petite racine de l'équation transcendante:

$$\text{tang } u = u$$

est $u = 257^{\circ}27'$, ou en arc: $u = 4,493$.

Cinsi la plus petite valeur de F pour laquelle la pièce pourra, fléchir, être maintenue en équilibre, est définie par

$$\frac{F}{EI} \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) = \frac{4,493^2}{l^2};$$

elle est approximativement

$$F = 20,187 \frac{EI}{l^2} = 2,046 \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

L'effort minimum est sensiblement double de celui trouvé dans le cas précédent.

3° Pièce encastree aux deux extremités. - Supposons que, l'encastrement A étant fixe, l'autre B se déplace parallèlement à lui-même d'une certaine quantité, faible d'ailleurs, de telle sorte que les points A et B restent toujours situés sur la direction primitive de l'axe AB.

Il suffira dans l'étude du cas précédent de modifier les conditions limites à l'extrémité B. Pour $x_1 = l$, y sera nul ainsi que sa dérivée. D'où:

$$-\frac{\mu}{F} - \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) \frac{Hl}{F} + A \sin kl + B \cos kl = 0, \quad -\left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) \frac{H}{F} + k(A \cos kl - B \sin kl) = 0,$$

avec

$$-\frac{\mu}{F} + B = 0 \quad kA - \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) \frac{H}{F} = 0.$$

L'élimination de A et B conduit à:

$$\frac{\mu}{F} (1 - \cos kl) + \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) \frac{H}{kF} (kl - \sin kl) = 0$$

$$\frac{\mu}{F} \sin kl + \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) \frac{H}{kF} (1 - \cos kl) = 0,$$

et celle de μ donne, le facteur $\left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) \frac{1}{kF}$ n'étant pas nul:

$$H \left\{ (kl - \sin kl) \sin kl - (1 - \cos kl)^2 \right\} = 0.$$

ou

$$H \sin kl \left(\frac{kl}{2} - \text{tang } \frac{kl}{2} \right) = 0$$

Si $H=0$, comme $\mu \neq 0$, on doit avoir : $\cos kl=1$, $\sin kl=0$; la plus petite valeur de kl est 2π .
 Si $\sin kl=0$, on bien H est nul et on retrouve le cas précédent, ou bien $\cos kl=1$, et la première équation donne encore $H=0$. Enfin si $\frac{kl}{2} = \text{tang} \frac{kl}{2}$, la plus petite valeur de kl est $2 \times 1,103$ et est supérieure à 2π .

Dès lors en prenant

$$\frac{F}{EI} \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right) < \frac{H\pi^2}{l^2}$$

ou

$$F < H \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

la force F ne maintiendra pas la pièce fléchie à l'état d'équilibre. - La limite de F est quatre fois plus grande que dans le premier cas.

II: Pièce encastree à une extrémité, libre à l'autre. - L'équilibre du système total donne en appelant f le déplacement latéral de l'extrémité B:

$$H=0, \quad \mu + Ff = 0.$$

et alors, d'après ce qu'on a vu au 2°:

$$y = f(1 - \cos kx).$$

Comme f est la valeur de y pour $x=l$, on doit avoir : $\cos kl=0$, et la plus petite valeur de kl vérifiant cette condition est $\frac{\pi}{2}$. On en conclut comme plus haut que la limite cherchée pour F est $\frac{1}{4} \frac{\pi^2 EI}{l^2}$; elle est le quart de celle obtenue dans le premier cas.

2. Formule empirique de Navier, Schwarz et Rankine. - La théorie précédente suppose: 1° que l'axe longitudinal de la pièce est parfaitement rectiligne, tant qu'il n'a pas été dévié par une cause extérieure, et qu'il demeure tel si la charge supportée n'atteint pas la valeur limite calculée; 2° que les forces opposées F sont exactement appliquées aux centres de gravité des deux sections d'about. - Dans la pratique, on ne saurait réaliser ces conditions avec une rigueur mathématique; c'est ce qui explique les divergences constatées parfois entre les indications de la formule d'Euler et les résultats des expériences faites sur le flambement des pièces chargées d'about.

Il existe une formule empirique qui répond d'une façon satisfaisante aux phénomènes observés; elle a été établie de différentes façons et à diverses époques, et porte par suite les noms de formule de Navier, de Schwarz ou de Rankine. Cette formule, d'origine expérimentale, est absolument justifiée par la théorie.

Considérons le cas d'une poutre articulée aux deux extrémités (1°); supposons que l'axe décrive dans le plan qui renferme le petit axe de l'ellipse centrale d'inertie de la section, la sinusoïde: $Y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l}$ dont un arc va de A à B. α est très petit vis-à-vis de l et des dimensions de la section; il est dû à un défaut de couverture de la pièce qu'on a voulu fabriquer rectiligne. L'équation de la fibre moyenne déformée devient en remplaçant M par $F(y + \alpha \sin \frac{\pi x}{l})$, et en remplaçant $(1 - \frac{F}{E\Omega})$ par l'unité:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F}{EI} \left\{ y + \alpha \sin \frac{\pi x}{l} \right\}.$$

L'intégrale de cette équation, s'annulant pour $x_1 = 0$ et $x_1 = l$ est :

$$y = \alpha \frac{\pi^2 EI}{1 - \frac{Fl^2}{\pi^2 EI}} \sin \frac{\pi x_1}{l}$$

F ne saurait donc atteindre la valeur d'Euler $\frac{\pi^2 EI}{l^2}$ sans que y ne devienne infini, donc sans qu'il y ait rupture immédiate si la pièce est imparfaitement rectiligne. Le moment fléchissant $F(y + \alpha \sin \frac{\pi x_1}{l})$ a pour expression

$$\frac{\alpha}{1 - \frac{Fl^2}{\pi^2 EI}} \sin \frac{\pi x_1}{l} ;$$

son maximum a lieu au milieu de la pièce ($x_1 = \frac{l}{2}$) et vaut $\frac{\alpha}{1 - \frac{Fl^2}{\pi^2 EI}}$. Cherchons la condition pour que ce moment, résultant d'une imperfection du support, soit indépendant de ses dimensions, longueur et section, et demeure constant quand on fait varier l et I . La condition sera :

$$\frac{1}{F} - \frac{l^2}{\pi^2 EI} = \text{const.} = \frac{1}{m}$$

On en tire :

$$F = \frac{m}{1 + \frac{m l^2}{\pi^2 EI}}$$

C'est la formule annoncée, dans laquelle m est un coefficient numérique dont Rankine tirait la valeur de résultats d'expérience.

Supposons que la longueur l de la pièce décroisse jusqu'à zéro. La pièce tendra à devenir extrêmement courte, et la valeur maximum admissible pour la force sera $R_0 \Omega$, R_0 étant la limite d'élasticité à la compression. Or la formule ci-dessus donne pour $l=0$, $F = m$. Donc $m = R_0 \Omega$ et l'on a la relation définitive :

$$F = \frac{R_0 \Omega}{1 + \frac{R_0 \Omega}{\pi^2 E} \cdot \frac{l^2}{I}}$$

Celle est la valeur de l'effort de compression qu'il ne faut pas dépasser sous peine de provoquer le flambement et la rupture.

M. Jean Résal a montré que la formule obtenue est pratiquement applicable à toutes les pièces chargées debout quelle que soit la courbe suivie par leur fibre moyenne.

Soit $L = \Omega r^2$, on écrit la formule :

$$F = \frac{R_0 \Omega}{1 + k \frac{l^2}{r^2}}$$

Les valeurs usuelles du coefficient k sont les suivantes :

$$\text{Bois : } k = \frac{1}{7000} ; \text{ Fonte : } k = \frac{1}{11000} ; \text{ Fer : } k = \frac{1}{20000} ; \text{ Acier : } k = \frac{1}{15000}$$

Elles supposent que la pièce (et c'est le cas le plus ordinaire des constructions) s'appuie sur des faces planes sans être encastree. Si une des extrémités de la pièce, ou les deux étaient encastrees, et si on pouvait sûrement compter, ce qui est assez rare, sur la résistance complète de ces encastremets, on pourra diminuer de $\frac{1}{4}$ dans le premier cas, de $\frac{1}{2}$ dans le second les coefficients ci-dessus. Il faudrait par contre les doubler si la pièce, au lieu d'être terminée par des faces d'appui planes, était articulée à ses extrémités.

La maison Eiffel et un grand nombre de maisons de construction adoptent la for-

mule d'Euler affectée du coefficient de sécurité $\frac{1}{3}$:

$$F = \frac{\pi^2 E}{3} \frac{I^2}{l^2} \Omega,$$

154.

en prenant pour l la longueur de la poutre dans le cas de deux articulations, la moitié dans le cas de deux encastres et les deux-tiers dans le cas d'un encastrement et d'une articulation.

Ces diverses formules se traduisent en abaques qu'on trouve dans les recueils spéciaux déjà cités.

Pour les profils modulés (c'est-à-dire dont les dimensions sont dans des rapports fixés à l'avance avec l'une d'elles), l'emploi de la formule de Rankine conduit à la résolution d'une équation bicarrée. À cet égard, la dernière formule est d'un emploi plus commode.

Chapitre XV. - Systèmes Articulés Triangulaires.

1. Généralités. - Soit un système de barres élastiques rectilignes, situées toutes dans le même plan et réunies les unes aux autres au moyen d'articulations sans frottement. Supposons que cet ensemble soit soumis à des forces en nombre quelconque qui, en y comprenant les réactions des points d'appui, soient contenues dans le plan en question, aient leurs points d'application situés sur les diverses articulations dites nœuds du réseau, et se fassent équilibre. Supposons encore le poids de chaque tige assez faible pour ne produire sur celle-ci ni flèche sensible, ni fatigue dont il soit utile de tenir compte.

Une quelconque des barres, isolée par la pensée n'est soumise à aucune force entre ses extrémités et par suite à aucun moment flechissant; la résultante des efforts qui s'exercent à la charnière de chaque extrémité est donc dirigée suivant l'axe de la barre. Ainsi les diverses barres du réseau sont uniquement soumises à des forces dirigées suivant leur axe, forces qu'on supposera inférieures à celles qui atteindraient la limite d'élasticité.

Le problème que nous allons résoudre est celui-ci : Un système articulé étant en équilibre sous l'action de forces extérieures situées dans son plan et appliquées à ses nœuds déterminer la tension ou la compression de chaque barre du système.

Dans les applications qu'on développera dans les chapitres suivants, les pièces seront assemblées d'une manière rigide et non plus articulées. À ces assemblages on substitue des articulations pour simplifier l'étude de la répartition des forces intérieures.

Si l'on a équilibre en admettant des articulations, à plus forte raison y aura-t-il équilibre si on rigidifie les articulations, rendant plus strictes les liaisons du système.

Les systèmes considérés sont formés d'une série de triangles juxtaposés constituant un ensemble indéformable.

Pour qu'il n'y ait pas d'éléments surabondants, au point de vue de l'indéformabilité, il doit exister entre le nombre N des nœuds et le nombre B des barres la relation $B = 2N - 3$.

Cette formule, exacte pour un triangle, s'étend à un nombre quelconque de côtés, car, si elle est vraie pour B barres à N nœuds, elle sera vraie pour N' = (N+1) nœuds; pour adjoindre un nœud, il suffit de le relier par 2 barres à 2 nœuds consécutifs de la 1^{ère} figure, ce qui donnera B' = B+2 barres. Puisque B = 2N-3, on aura: B+2 = 2(N+1)-3, ou B' = 2N'-3.

Dans un réseau tel que B - 2(N-3) = K > 0, il y a K barres surabondantes qu'on peut supprimer sans que la figure géométrique constituée par le système articulé cesse d'être connue.

Quand un système ne contient pas d'éléments surabondants, la tension ou compression de chaque barre peut être obtenue par la Statique seule; dans le cas contraire, il faut faire intervenir la déformation de la pièce (pour cette raison le système est dit hyperstatique).

En effet, dans le premier cas, il n'existe aucune relation entre les longueurs des diverses barres, dont chacune peut recevoir une dilatation ou contraction virtuelle infiniment petite. L'application du théorème des déplacements virtuels fournira donc B équations.

Dans le second cas, les longueurs l₁, l₂, ..., l_B des barres seront liées par K relations algébriques qui permettront de calculer les longueurs des K barres surabondantes.

$$l_1 = F_1(l_{k+1}, \dots, l_B),$$

$$l_k = F_k(l_{k+1}, \dots, l_B)$$

Soient t₁, ..., t_B les tensions des diverses barres; Ω₁, ..., Ω_B leurs sections, E₁, ..., E_B leurs coefficients d'élasticité; λ₁, ..., λ_B leurs allongements algébriques. D'après la loi de Hooke, on a:

$$\lambda_i = \frac{t_i l_i}{E_i \Omega_i},$$

et les relations précédentes donnent, en remplaçant les l_i par les l_i + λ_i et en tenant compte de la petitesse des λ_i:

$$\frac{t_1 l_1}{E_1 \Omega_1} = \frac{\partial F_1}{\partial l_{k+1}} \cdot \frac{t_{k+1} l_{k+1}}{E_{k+1} \Omega_{k+1}} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial l_B} \frac{t_B l_B}{E_B \Omega_B}$$

Les K relations entre les tensions, jointes aux (B-K) relations fournies par le théorème des déplacements virtuels, résolvent complètement le problème.

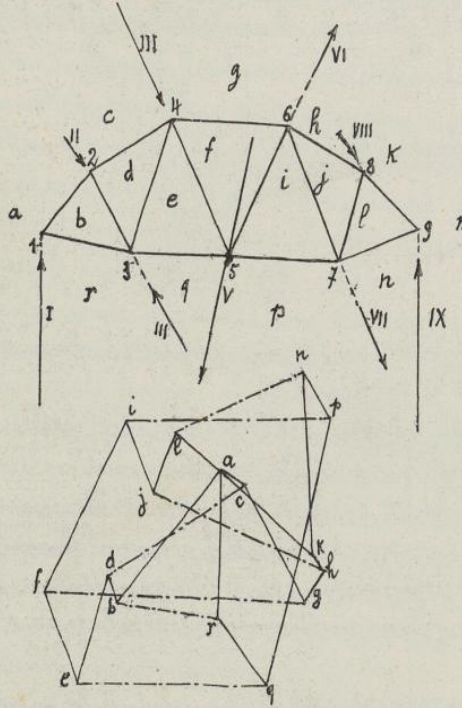
Malgré de beaux travaux de Mohr, du général de Ménabréa, de Castigliano, de M. Maurice Levy pour simplifier autant que possible la détermination des tensions dans les systèmes à éléments surabondants, on évite ces systèmes. Il y a en effet économie à n'admettre que les éléments indispensables pour assurer l'invariabilité; il y a facilité et précision dans les calculs d'établissement, et les systèmes strictement indéformables se prêtent à de nombreuses combinaisons de nature à satisfaire à toutes les exigences de la construction.

Considérons donc un système sans éléments surabondants pour lequel les réactions d'appui, supposées statiquement déterminables, ont été obtenues par des recherches préliminaires. Pour déterminer les efforts de traction ou de compression qui s'exercent longitudi-

nalement sur les barres des systèmes triangulaires, on a recours aux trois méthodes suivantes: 1^o celle des nœuds (Cremona); 2^o celle des sections (Culmann); 3^o celle des moments statiques (Poitier).

2. Méthode de Cremona. - Imaginons que les lignes d'action des forces soient prolongées indéfiniment et extérieurement au système articulé: on découpe ainsi la feuille de l'épure en régions; on affecte chaque région d'une lettre a, b, c, ... Chaque force (extérieure connue ou intérieure inconnue) est, avec cette notation, dirigée suivant une droite séparant deux régions. Sur l'épure ultérieure, elle aura pour vecteur représentatif un vecteur dont les extrémités porteront les lettres des régions définissant les forces, prises en tournant autour du point d'application dans le sens des aiguilles d'une montre. Ainsi la force III appliquée au nœud 3 sera représentée par cg; la tension exercée par la barre 34 sur le nœud 3 sera représentée par cd (Notation des aires).

Cela fait, on construit, pour chaque nœud, le dynamique des diverses forces qui y agissent et dont les lignes d'action sont toutes connues; ce polygone, devant se fermer, permet de déterminer ces forces, pourvu qu'il n'y ait pas plus de deux forces inconnues à chaque nœud. En partant d'un nœud où il n'y a que deux réactions de barres inconnues, on obtiendra celles-ci, et en se reportant ensuite de proche en proche aux autres nœuds de la triangulation, on déterminera en général aisément les tensions de toutes les barres. La méthode de Cremona consiste à superposer les dynamiques sur l'épure, en les traçant de telle sorte qu'un même segment représentatif d'une tension, appartienne à la fois aux deux dynamiques relatifs aux nœuds opposés de la barre correspondante.



Entrons dans le détail. Partons du nœud 1 où n'aboutissent que deux barres; en ce nœud il y a nécessairement une force extérieure ra (sinon, les tensions des deux barres seraient nulles, et ces barres inutiles pourraient être supprimées du système); traçons le vecteur représentatif ra et par ses extrémités menons des parallèles aux barres 12 et 13, r b et ba, formant ainsi le dynamique Tab des forces appliquées au nœud 1 et prises dans l'ordre où on les rencontre en tournant autour du nœud dans le sens des aiguilles d'une montre.

La barre 12 exerce sur le nœud 1 une force représentée par a b, allant de 2 vers 1, à l'extérieur de la barre qui se trouve étendue; la barre 13 exerce sur ce même

nœud 1 une force représentée par b r, allant de 1 vers 3, à l'intérieur de la barre qui se trouve comprimée. Sur le dynamique, on représente en trait plein les extensions et

en pointillé miste les compressions.

Passons au nœud 2. On connaît la tension de la barre étendue 12 qui, regardée comme sollicitant le nœud 2, est représentée par ba , la force extérieure II qu'on porte en a et il y a deux barres 24 et 23 dont les tensions sont inconnues. Par c et b on mène des droites respectivement parallèles à ces droites, d'où le point d et le dynamique $bacdb$. On reconnaît comme tout à l'heure que la barre 24 supporte l'extension cd et la barre 23 la compression db .

Passons au nœud 3 (on ne saurait passer au nœud 4 où trois tensions seraient inconnues). On connaît la force extérieure III qu'on portera en qr , les tensions rb et bd des barres 34 et 32. On mènera de q parallèle à 34 et q parallèle à 35; d'où le dynamique $qr bdeq$. On a pour 34 l'extension de et pour 35 la compression qe .

On continuera ainsi de proche en proche.

En somme, on suppose pour chaque nœud qu'on tourne autour de lui dans le sens des aiguilles d'une montre; chaque fois qu'on traverse une ligne de séparation de deux aires, on doit tracer une parallèle à cette ligne, dans le dynamique, qui portera à ses deux extrémités les lettres qui désignent les aires.

Pour le premier nœud, comme vérification, le dynamique est construit par les opérations précédentes.

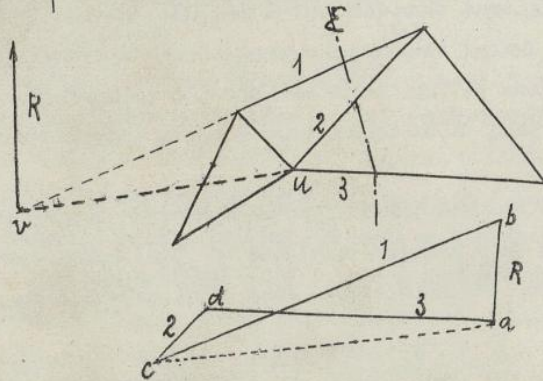
3. Méthode de Culmann. - Faisons dans le système une section quelconque ne passant par aucun nœud, ne coupant une même barre qu'une fois et décomposant le système en deux parties n'ayant plus d'attaches l'une avec l'autre. Si une telle section ne coupe que trois barres, on peut déterminer directement les tensions dans ces trois barres. Le tronçon à gauche de la section étant tenu en équilibre par les trois réactions du tronçon de droite sur ces trois barres, ces trois réactions seront égales et opposées aux composantes respectives, suivant les trois directions de ces barres, de la résultante générale de toutes les forces extérieures qui agissent à gauche de la section.

Supposons cette résultante R connue par les tracés des recherches préliminaires. Nous allons décomposer R suivant les directions des 3 barres non concurrentes coupées. Soit v la rencontre de R avec la barre 1, et u la rencontre des barres 2 et 3. On décompose R suivant vu et 1 ; ses composantes sont ac et cb ; on décompose ac suivant 3 et 2; les composantes sont ad et dc . Les réactions exercées par la partie de droite sur celle

de gauche ont respectivement pour vecteurs représentatifs pour la barre 1, bc (compression), pour la barre 2, cd (traction), pour la barre 3, da (traction).

4. Méthode de Ritter. -

On peut encore déterminer les tensions des trois barres non concurrentes rencontrées par une même section Σ en exprimant que la som-



me des moments de ces forces et des forces extérieures auxquelles elles font équilibre, est nulle. En prenant notamment les moments par rapport au point de rencontre de deux barres, on éliminera les tensions de ces barres et l'on trouvera directement celle de la troisième barre; le signe des moments nécessaires pour l'équilibre donnera le sens d'action des forces inconnues. 158.

Comme généralement la recherche préliminaire des réactions a nécessité le tracé d'un funiculaire des forces extérieures, le moment résultant des forces extérieures sollicitant le tronçon est obtenu graphiquement, et alors le procédé est expéditif.

Remarque. - La méthode de Crémona est généralement préférable aux deux autres; celles-ci cependant sont très précieuses lorsque, dans l'application de la méthode de Crémona, on arrive à un point de l'épure où chacun des nœuds auquel il faudrait passer contient plus de deux tensions inconnues (on en trouve un exemple dans la ferme Polonceau à ~~trois~~ bielles).

Chapitre XVI. - Notions sur les Ponts métalliques.

1. Généralités. - Un pont est un ouvrage d'art destiné à réunir les deux portions d'une voie de communication interrompue par un cours d'eau ou par une autre voie située à un niveau inférieur à celui de la première.

Les supports extrêmes sont les culées, les supports intermédiaires en maçonneries sont les piles; les parties métalliques reposant sur les points d'appui sont les travées.

Le tablier ou plancher d'une travée est supporté par des poutres en tôle dont le dispositif est très variable et qui reposent sur les piles ou les culées. Ces poutres en tôle ayant une grande hauteur, leur face supérieure est ordinairement à un niveau supérieur à celui du plancher; elles servent alors de parapet; souvent, au nombre de deux, ces poutres sont parfois, pour certains ponts de chemin de fer, au nombre de trois ou quatre, les diverses voies étant séparées par les poutres intermédiaires.

Des poutrelles ou entretoises en tôle à section double T reposent sur les nervures inférieures des maîtresses poutres; ces entretoises reçoivent des longrines supportant un plancher en bois ou de toute autre structure.

Comme les poutres latérales ne sont chargées que d'un côté, pour éviter leur déversement, il est essentiel qu'elles soient reliées solidement par les entretoises auxquelles on donne une certaine hauteur et par suite une grande rigidité qui s'oppose à ce déversement. Parfois même faut-il les relier par d'autres entretoises à leur partie supérieure.

À ce point de vue, quand la hauteur sous le pont le permet, il y a avantage à placer le tablier sur les poutres qui peuvent alors être en plus grand nombre, de moindre section et plus maniables. Des garde-corps sont alors assemblés sur les poutres latérales.

Les poutres ne peuvent être reliées invariablement qu'à un seul appui: elles repo-

sent sur l'autre par l'intermédiaire d'une plaque de glissement ou d'un chariot¹⁵⁹ à rouleaux de friction, qui permettent à son extrémité de se déplacer horizontalement. Les dilatations et contractions, qui résultent des variations de la température, peuvent donc se produire librement sans rencontrer d'obstacles sur les points d'appui.

(Nous ne dirons rien des ponts suspendus, aujourd'hui abandonnés. Cependant M. Jean Pésal estime qu'on reviendra à ce genre de construction, les catastrophes qui en ont fait proscrire l'emploi en Europe étant dues à des erreurs dans la conception et dans la construction des ouvrages qui se sont écroulés, et non à un vice inhérent au principe même des ponts suspendus; les Américains en font grand usage sans éprouver les mêmes désastres.)

Les ponts métalliques doivent livrer passage aux charges en vue desquelles ils ont été établis, sans qu'il en résulte en aucun point des pièces, dans les circonstances les plus défavorables, une fatigue dépassant la charge de sécurité du métal. Les formes et les dimensions de toutes les pièces devront être calculées de manière à remplir cette condition. De plus, avant de livrer le pont à la circulation, on s'assure par des épreuves de réception qu'il est réellement en état de résister.

Les conditions d'établissement et de réception des ponts métalliques sont fixées en France par le Règlement du 29 Août 1891 émanant du Ministère des Travaux Publics; elles sont naturellement variables avec la nature des ponts.

Pour les ponts les plus usuels, le Ministère des Travaux Publics a publié un recueil de types remarquablement étudiés et dont les agents des Ponts et Chaussées ont à s'inspirer: si des particuliers ont à établir pour l'industrie privée un projet de pont, ils ne peuvent mieux faire que de se rapprocher le plus possible de ces types.

Les ponts se classent d'après la structure de leurs maîtresses poutres.

On les divise d'abord en poutres à travées indépendantes et en poutres continues; on a eu l'occasion de dire les inconvénients des poutres continues.

Les poutres à travées indépendantes, que nous considérerons seules, se divisent en

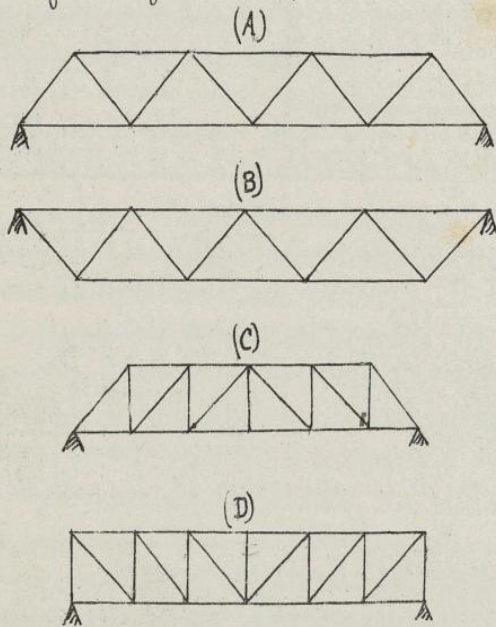
- 1^o poutres droites à âme pleine;
 - 2^o poutres droites à âme évidée, ou en treillis à assemblage rigide;
 - 3^o poutres américaines ou articulées;
 - 4^o poutres en arc.
- (à hauteur constante ou variable).

Les poutres droites ou en arc à âme pleine sont des poutres composées en tôle à l'égard desquelles on a déjà donné des indications. Nous nous bornerons à dire quelques mots sur les poutres américaines et les poutres en treillis.

Tandis que les poutres des ponts européens sont en général constituées par des pièces prismatiques assemblées les unes aux autres à l'aide de couvre-joints et rivets formant assemblages rigides, les poutres des ponts américains sont formées de pièces assemblées à l'aide de chevilles ou articulations, de telle sorte que chaque pièce peut tourner autour de son point d'attache avec une pièce voisine, l'on ne maintient l'invariabilité de figure de ces ouvrages qu'on les compose de triangles.

2. Poutres américaines ou à mailles. - Une poutre américaine comprend une corde supérieure horizontale et une corde inférieure également horizontale situées dans le même plan vertical. - Ces deux cordes, constituées chacune par une seule poutre rectiligne (en général il en est ainsi de la corde supérieure), ou bien par une série de pièces successives placées bout à bout en ligne droite, et assemblées soit par des manchons, soit par des articulations, soit de toute autre manière, sont reliées par une série de barres formant une triangulation. Celles de ces barres qui sont comprimées s'appellent bras, celles qui sont étendues, tirants.

Suivant l'inclinaison des différentes barres qui relient les deux cordes, on distingue les systèmes de poutres suivants :



- 1° Le système Warren ou isométrique, (A) et (B) à bras et tirants également inclinés sur les cordes ; les bras vont en montant et les tirants en descendant vers le milieu de la poutre ;
- 2° le système Howe, (C), à bras obliques et à tirants verticaux ;
- 3° le système Pratt ou Murphy Whipple (D), à bras verticaux et à tirants obliques.

La structure du tablier indiquée au 96° permet de transmettre les charges exclusivement aux nœuds de la triangulation par l'intermédiaire des entretoises. Ces charges sont, suivant les cas, appliquées aux nœuds de la corde inférieure ou à ceux de la corde supérieure.

Il est rare que les deux cordes soient chargées. - Dès lors toutes les pièces prismatiques dont se compose une poutre américaine travaillent uniquement à la compression ou à l'extension simple, et ne sont jamais soumises à un effort de flexion, sauf celui produit par leur propre poids qui est faible ; on peut choisir les équarissages pour que la tension unitaire dans chaque barre soit la même, et égale à la charge de sécurité R_0 quand les charges atteignent leur maximum d'intensité ; les poutres américaines sont ainsi de véritables solides d'égale résistance.

Les tensions intérieures des barres et des semelles se déterminent très simplement par la méthode des nœuds, en partant des extrémités de la poutre où n'intervient que deux pièces et où les réactions d'appui sont préalablement déterminées par l'emploi d'un funiculaire (comme au Chap. I).

Les deux autres méthodes de Culmann et de Ritter, s'appliquent aussi bien et se simplifient même par suite du parallélisme des cordes de la poutre.

En prenant les moments par rapport à un nœud N d'une semelle, voisin d'une section quelconque Σ , en désignant par X la tension de l'autre semelle, par M

le moment fléchissant sur la verticale de N , on a :

$$X \cdot h = M ; \text{ d'où } X = \frac{M}{h}.$$

Le moment $X \cdot h$, de signe opposé à M , indique le sens de la force X (compression ou traction).

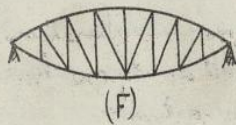
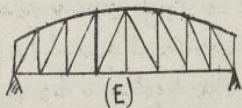
Quant à la force Y développée dans un bras ou tirant, on peut l'avoir en écrivant que sa projection sur une verticale Σ est égale à l'effort tranchant E , on a :

$$Y \cos \varphi + E = 0, \text{ d'où } Y = -\frac{E}{\cos \varphi}.$$

Y est donc de signe contraire à E , ce qui donne le sens de la force, avec sa valeur.

Si l'on construit le contour à gradins représentant le diagramme des efforts tranchants dans le système général de la poutre (dont l'ensemble travaille à la flexion, bien que chaque élément ne subisse que des efforts de traction ou de compression), et si ab représente d'après l'ordonnée de ce contour, la valeur et le sens de l'effort tranchant E dans la section Σ considérée, entre les nœuds N et N' , on aura la tension de la barre NN' en menant par le point a la ligne ac parallèle à NN' , jusqu'à la rencontre de l'horizontale bc menée par le point b . Le segment $ca = \frac{ab}{\cos \varphi}$ donne la valeur et le sens de la réaction de la barre NN' .

3. Poutres à mailles à cordes polygonales. - La formule $X = \frac{M}{h}$ qui donne les tensions des semelles de la poutre, montre que ces efforts vont en croissant avec M vers le milieu de la poutre, en variant graduellement d'intensité à chaque nœud de la poutre si h est constant, et par suite, il y aura lieu d'augmenter progressivement l'épaisseur des semelles, proportionnellement à M .



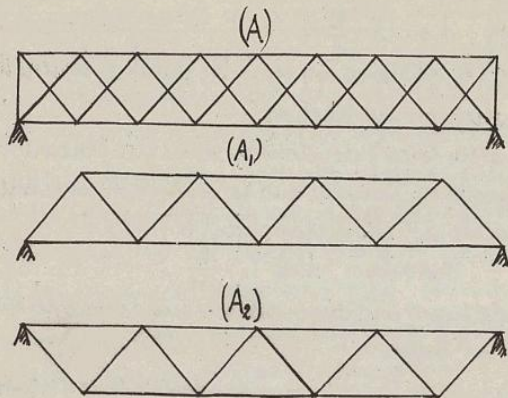
On pourra au contraire conserver les semelles constantes, en faisant varier la hauteur de la poutre proportionnellement à M ; on aura ainsi les poutres à contour parabolique ci-contre :
Poutre String (E) [Ex: Pont sur la Meuse à Rotterdam; sur la Rance à Dinan; sur le Hollandsch-Diep à Woerdijk];
Poutre Poisson (F) [Ex: Pont sur le Rhin, à Mayence; sur l'Elbe, à Hambourg].

L'effort tranchant E va, en diminuant des extrémités au milieu de la poutre où il change de signe; il en résulte que les tensions des barres inclinées vont en diminuant vers le milieu de la poutre.

4. Poutres en treillis. - Une poutre en treillis peut être considérée comme formée par la superposition de deux, de trois ou de quatre systèmes à mailles simples.

Ainsi la poutre (A) en treillis double qui ne pourrait être traitée directement par la Statique graphique, peut se décomposer en deux poutres simples (A) et (A₂) dans chacune desquelles on peut déterminer facilement les tensions et compressions des barres inclinées et des cordes.

Les tensions dans les barres inclinées de la poutre en treillis (A) sont égales à celles des

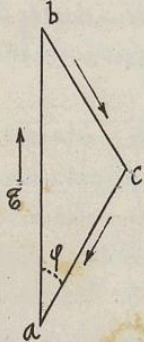


quant deux à deux les points de division correspondants, on obtient une poutre en treillis triple, quadruple, quintuple, etc... dans laquelle une section verticale rencontre 3, 4, 5... barres inclinées.

Les types de poutres composées en usage sont : la poutre Warren double ou quadruple, la poutre Howe double, la poutre Pratt double dite poutre Linville.

Lorsque le treillis est plus serré et que la poutre est chargée d'un poids uniformément réparti, on peut simplifier les opérations par la méthode approximative suivante.

On admet que toutes les barres inclinées rencontrées par une même section verticale subissent les mêmes efforts. Dès lors, si ab représente l'effort tranchant E dans la section considérée, ac et bc les deux directions des barres inclinées dans un sens ou dans l'autre, les segments ac et bc représenteront les efforts totaux d'extension ou de compression dans chaque système de barres.



Si le treillis est quadruple, on aura l'effort de compression dans chacune des deux barres du système ac , en divisant par 2 la force ac et l'effort d'extension dans chaque barre du système bc en prenant la moitié de la force bc .

Si les deux systèmes de barres ont la même inclinaison φ sur la verticale, cela revient à prendre pour l'effort de chaque barre $X = \frac{E}{n \cos \varphi}$, n étant le nombre total des barres coupées par une section verticale.

Quant à la traction ou à la compression X des semelles, dans la section considérée, elle sera sensiblement donnée par la formule $X = \frac{M}{h}$, M étant le moment fléchissant dans cette section et h la hauteur de la poutre.

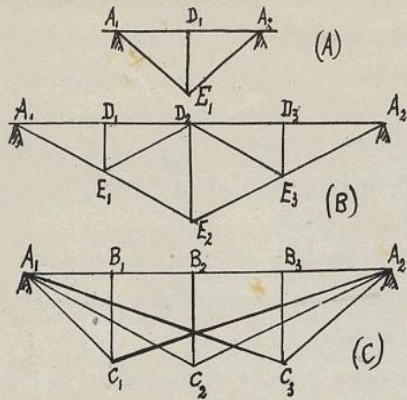
En construisant un funiculaire des forces extérieures et un diagramme des efforts tranchants, on aura tous les éléments pour la solution de la question.

5. Poutres armées. - Les poutres armées ou poutres droites renforcées par des bielles ou contrefiches et des tendeurs, constituent également des réseaux triangulaires qui se calculent facilement par les procédés précédemment indiqués et notamment par la méthode des nœuds.

La poutre armée la plus simple (A) n'est autre qu'une poutre du système Pratt

162.
barres correspondantes des poutres (A_1) et (A_2) , tandis que les efforts d'extension ou de compression, dans les différentes parties des cordes de la poutre en treillis sont la somme des efforts d'extension ou de compression dans les parties correspondantes des cordes des poutres simples.

Si, dans une poutre à mailles simple, on divise en 3, 4, 5, ... parties, l'intervalle des nœuds sur les cordes, en joignant deux à deux les points de division correspondants, on obtient une poutre en treillis triple, quadruple, quintuple, etc... dans laquelle une section verticale rencontre 3, 4, 5... barres inclinées.



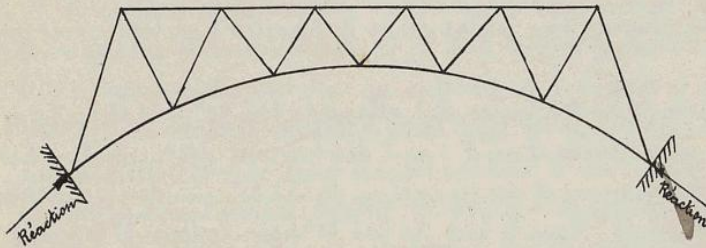
réduite à deux mailles.

Le système Polonceau (B) est analogue à celui des formes du même nom dont il sera question au prochain chapitre. On peut du reste, modifier le système triangulaire à volonté.

Dans le système Bollmann (C), les extrémités de chaque bielle sont reliées par des tendeurs aux deux extrémités de la poutre directement. La méthode des nœuds, appliquée d'abord en B_1, B_2, B_3 donnera les compressions sur les bielles B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 et, en se reportant aux nœuds C_1, C_2, C_3 , on déterminera par suite les tensions des tendeurs qui viennent aboutir à ces différents points.

C_2, C_3 , on déterminera par suite les tensions des tendeurs qui viennent aboutir à ces différents points.

6. Poutres à mailles en forme d'arc. - Les réseaux triangulaires se prêtent à des dispositifs imitant les poutres en arcs et pouvant rendre des services pour augmenter la hauteur libre sous le pont. - La figure ci-contre en donne un exemple.



7. Poutres à assemblages rigides. - Dans les ponts européens, on remplace les articulations des poutres américaines par des assemblages rigides à couvre-joints et rivets. Dans le calcul, on ne tient pas compte de cette rigidité des assemblages, et on opère comme si toutes les pièces étaient articulées entre elles: il n'en résulte aucune erreur sensible, car les poutres droites sont de figure invariable et par suite on peut introduire de nouvelles liaisons entre leurs divers éléments sans rien changer à la distribution des efforts dans les différentes pièces.

On peut établir avec des assemblages rigides des poutres de tous les types précédemment énumérés, et le calcul est le même.

8. Calcul des barres. - Les barres d'un réseau triangulaire ne sont en général soumises qu'à des tractions ou à des compressions que les méthodes développées permettent de déterminer; les sections correspondantes à adopter pour la constitution des barres s'en déduisent par les formules de résistance à ces deux genres d'efforts, en distinguant bien les cas de compression simple et ceux de flambage.

Si exceptionnellement une barre AB était soumise à l'action de charges P_1, P_2, P_3, \dots agissant entre les deux nœuds A et B, on remplacerait ces forces par les deux composantes P et Q agissant aux points A et B, et ce sont ces deux composantes qui interviendraient seules dans la recherche des efforts longitudinaux de traction ou de compression des barres. Supposons la barre AB comprimée et soit F la force de compression longitudinale qu'on aura ainsi trouvée. On déterminera ensuite le moment fléchissant maximum M

développé dans la barre AB sous l'action des charges P_1, P_2, P_3, \dots et l'on calculera la section ^{16K} de la barre supposée soumise au flambage par la formule

$$\frac{MN}{I} + \frac{F}{\alpha} \left(1 + \frac{Kl^2}{r^2}\right) = R_0.$$

Il en serait notamment ainsi lorsque la barre AB sans être soumise à des forces extérieures, aurait un poids propre suffisant, tendant à produire sa flexion, pour que l'on juge utile d'en tenir compte dans le calcul de la pièce.

On calculera ensuite les dimensions des goussets, boulons ou rivets d'assemblage d'après le genre des efforts auxquels ils sont soumis (traction, compression, cisaillement, adhérence, etc...). On reviendra sur ce point au Chapitre XIX.

Nota. - L'étude des ponts métalliques sera reprise avec grands détails dans la 1^{re} partie du cours de Résistance Appliquée.

Chapitre XVII. - Notions sur les Charpentes. -

1. Calcul des pièces. - La charge par mètre carré supportée par les fermes comprend :

1^o le poids q_1 de la couverture (ardoises, tuiles, etc); allant de 20 à 90^K; - 2^o le poids q_2 de la charpente. Ce poids q_2 varie suivant qu'il s'agit des chevrons, des pannes ou des fermes; le poids des lattis des chevrons et des pannes va de 15 à 20^K, celui de la charpente portée par une ferme de 30 à 55^K pour le bois, de 20 à 30^K pour le fer; - 3^o le poids q_3 de la neige, ce poids variable avec l'inclinaison du toit et la région, va, dans le Nord de 20 à 30^K; - 4^o le poids q_4 dû à la pression du vent. Ce poids variable avec l'inclinaison du toit et la vitesse du vent va de 20 à 100^K. En général, on prend dans le Nord, pour $(q_3 + q_4)$, de 60 à 90^K suivant que la pente de la toiture varie de $\frac{1}{3}$ à $\frac{2}{3}$.

Dans chaque avant-projet, on précisera ces chiffres en s'aidant d'Aide-Mémoire.

La charge totale P correspondant à un égout ou pan de toiture porté par une demi-ferme (E étant l'écartement des fermes et L la longueur du toit suivant la ligne à la plus grande pente) sera :

$$P = (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) EL.$$

Chevrons. - Les chevrons, soit en bois, soit en fer, se calculent, de même que les solives de planchers, comme pièce fléchissant sous un poids uniformément réparti $p = qe$ par mètre courant, e désignant l'écartement des chevrons, si l est la portée des chevrons qui correspond à l'écartement des pannes, on aura l'équation d'équarrissage :

$$\frac{Rl}{N} = \frac{qel^2}{8}$$

Pannes. - On détermine le plus souvent la charge des pannes comme si les chevrons étaient discontinus, et cette charge uniformément répartie, q_e par unité de longueur, e , désignant l'écartement des pannes. Par suite, le moment fléchissant ma-

imum aura pour expression $M = \frac{q_e l^2}{8}$. C'est cette valeur de M qui servira à calculer ¹⁶⁵ les dimensions des pannes, d'après les formules de la flexion déviée.

Si l'on voulait plus de précision, dans le cas où les chevrons seraient continus, on obtiendrait la répartition de la charge totale $q_e L$ sur les n pannes de l'arbalétrier (y compris la sablière et la faîtière), en cherchant les réactions des appuis d'une pièce prismatique continue (chevron) reposant sur n appuis (les n pannes) et chargée d'un poids total $q_e L$ uniformément réparti. Or il résulte de ce qu'on a vu ¹⁶⁶ du Chap. VII, que les réactions des appuis, qui donnent ici les charges des pannes, sont au maximum majorées de $\frac{1}{4}$ par rapport à celles que donneraient des chevrons discontinus (ou interrompus au droit des pannes); on pourra donc approximativement et par excès de sécurité, calculer les pannes en prenant $M = \frac{5}{16} \cdot \frac{q_e l^2}{8}$.

Arbalétriers. Si les pannes reposent sur l'arbalétrier au droit des nœuds, la répartition précédente des charges entre les différentes pannes donnera immédiatement la force extérieure agissant en chaque nœud.

Si les pannes ne correspondent point aux nœuds, on obtient la force verticale qui agit sur chacun des nœuds, 1° soit, le plus généralement, en considérant l'arbalétrier comme discontinu ou articulé aux nœuds et en remplaçant par suite les charges des pannes intermédiaires entre les nœuds par les deux composantes statiques appliquées aux deux nœuds voisins; 2° soit, pour plus de précision, en considérant les divers nœuds comme les points d'appui de l'arbalétrier continu et en déterminant les réactions de ces appuis dus au poids des pannes par la théorie des poutres continues. Les charges extérieures, agissant aux nœuds, égales à la valeur de ces réactions ainsi obtenues, permettront de déterminer ensuite, par les trois méthodes exposées, les forces longitudinales de traction ou de compression qui agissent sur les pièces constitutives de la charpente des fermes.

Même que l'arbalétrier soit continu sur toute sa longueur, on le calcule le plus souvent par simplification comme s'il était interrompu aux nœuds. Après avoir déterminé, par la méthode des nœuds par exemple, la compression longitudinale qui agit sur cet arbalétrier entre deux nœuds quelconques [l'arbalétrier est généralement comprimé, sauf dans les auvents ou marquises], on détermine également le moment fléchissant M qui se produit, dans ce même intervalle, sous l'action des pannes situées entre ces deux nœuds, en supposant cette travée indépendante. La compression maximum de la semelle supérieure de l'arbalétrier ayant lieu vers le milieu de la travée, on a l'équation d'équarrissage :

$$\frac{Mn'}{I} + \frac{F}{\sigma} \left(1 + k \frac{l^2}{r^2} \right) \leq R_0,$$

r étant le rayon de giration minimum ou maximum suivant que l'arbalétrier, d'après son mode de liaison avec les pannes (simplement portées ou assemblées contre son âme) a tendance à fléchir perpendiculairement au plan de la ferme ou dans ce plan.

Comme l'arbalétrier est en réalité continu, il y a lieu de vérifier également la

compression maximum de la semelle inférieure de l'arbalétrier, qui se produit au dessus de l'un des nœuds de la travée où le moment fléchissant a un signe contraire. Comme en ce point, le flambage n'est pas à craindre, on a la seconde équation de condition :

$$\frac{M_n}{I} + \frac{F}{\Omega} \leq R_0.$$

n et n' désignent, dans ces formules, respectivement la distance de la fibre neutre à la fibre la plus éloignée de la semelle inférieure ou supérieure.

On obtient d'ailleurs ainsi un excès de sécurité, puisque le moment fléchissant maximum ordinaire M qui entre dans les deux formules précédentes, est supérieur aux moments réels développés, par suite de la continuité de l'arbalétrier, surtout au milieu de la travée.

Il y aura lieu d'ailleurs de vérifier les deux formules pour chacune des travées de l'arbalétrier, si la travée la plus dangereuse n'est pas évidente à priori, et d'adopter la section la plus grande qui en résultera pour l'arbalétrier.

Dans les cas, notamment pour des fermes de grande portée, où l'on voudrait plus de précision, on commencerait par déterminer les moments fléchissants développés sur les appuis des nœuds et aux différents points intermédiaires de l'arbalétrier continu, sous l'action des charges transmises par les pannes, d'après la méthode des poutres continues. En désignant par M_1 le moment fléchissant maximum qui se produit dans la partie centrale d'une travée, et par M_2 le moment fléchissant maximum au droit de l'un des nœuds adjacents, les deux équations d'équarrissage à vérifier pour la semelle supérieure et pour la semelle inférieure deviennent respectivement

$$\frac{M_1 n'}{I} + \frac{F}{\Omega} \left(1 + k \frac{l^2}{\pi^2}\right) \leq R_0, \quad \frac{M_2 n}{I} + \frac{F}{\Omega} \leq R_0,$$

k étant choisi comme il a été dit, selon qu'on peut considérer l'arbalétrier comme encasté à une extrémité ou aux deux extrémités.

Tirants et tendeurs. - Les barres de fermes soumises à des efforts F d'extension, appelées tirants ou tendeurs se calculent par la formule simple de la traction: $F \leq R_0 \Omega$.

Si en outre de la force longitudinale F de traction, il s'exerce sur la barre, entre ses deux nœuds d'extrémités, des efforts de flexion importants dus, soit à des charges extérieures, soit au poids propre de la barre, on appliquerait la formule: $\frac{MN}{I} + \frac{F}{\Omega} \leq R_0$.

Bras et contrefiches. - Les barres de fermes soumises à des efforts longitudinaux F de compression appelés bras ou contrefiches, se calculent par la formule de Rankine. - Celles qui sont soumises en des efforts supplémentaires de flexion se calculent par la formule

$$\frac{MN}{I} + \frac{F}{\Omega} \left(1 + k \frac{l^2}{\pi^2}\right) \leq R_0.$$

Assemblages des pièces. - Le calcul des assemblages appartient au cours de Résistance appliquée: on en dira quelques mots à propos du rivetage.

2. Marche à suivre pour l'obtention des éléments du calcul des fermes. -

Pour appliquer les formules du précédent §6^e, il faut connaître les forces longitudinales F de traction ou de compression des barres de la ferme. Celle-ci constituant un réseau triangulaire, on commence par calculer les charges extérieures transmises par les pannes aux arbalétriers et aux nœuds d'appui de ces derniers, ainsi que les autres charges extérieures (poids de planchers, etc....) qui peuvent agir

aux divers nœuds de la ferme, puis les réactions des appuis, considérés comme forces extérieures, et l'on détermine alors facilement les tensions des divers barres par les méthodes de Cremona, de Culmann et de Ritter. En recherchant ensuite les moments fléchissants qui peuvent s'exercer sur les barres, entre les nœuds, sous l'action de charges extérieures ou du poids propre des pièces, on a tous les éléments nécessaires pour la vérification des dimensions des pièces.

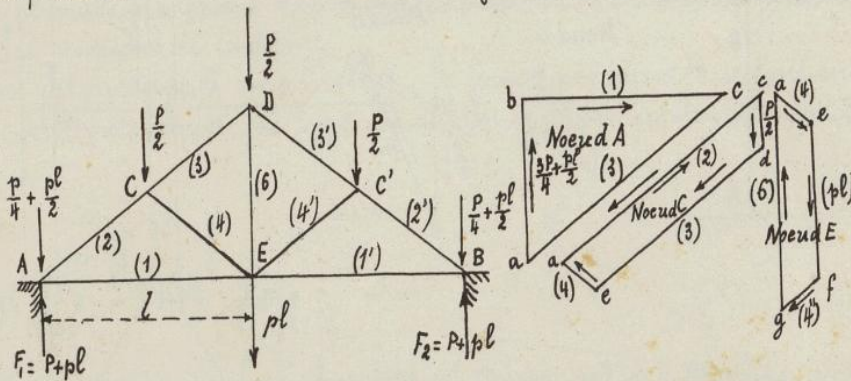
On appliquera ces généralités à quelques exemples.

3. Ferme à contrefiches, avec tirant portant plancher. - Le tirant AB = 2l travaille à la flexion sous l'action d'une charge supposée uniformément répartie pl par unité de longueur. En supposant le tirant interrompu en E, les deux travées AE et BE donneront, pour l'application de la méthode des nœuds, une composante $\frac{pl}{2}$ en chacun des points A et B et une composante pl en E.

Les deux réactions totales F_1 et F_2 des pieds de la ferme A et B sont respectivement égales à $P + pl$.

Chacune des pannes C, D, C' a une charge $\frac{P}{2}$ et les sablières A et B une charge $\frac{P}{4}$.

Le dynamique abc du nœud A ou ab = $\frac{3}{4}P + \frac{pl}{2}$ donne la traction bc du tirant AE et la compression ac de l'arbalétrier AC. Le dynamique acd du nœud C donne la compression de de l'arbalétrier dans sa partie supérieure CD et la compression ae de la contrefiche CE. - En construisant ensuite le dynamique acefg du nœud E, sans tenir



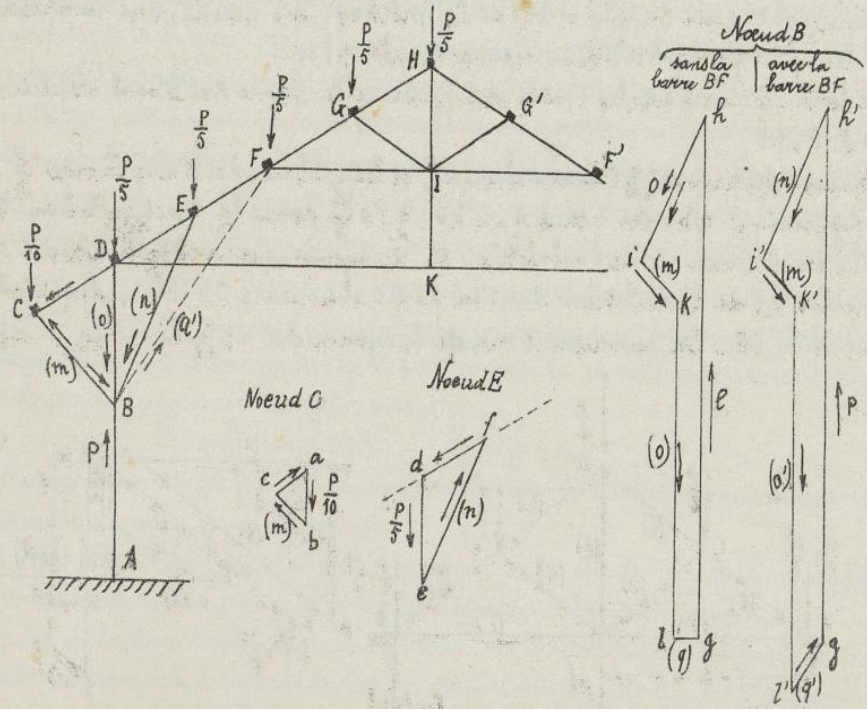
compte des deux réactions (1) et (1') du tirant qui sont égales et de sens contraire, mais en tenant compte de la force extérieure $pl = ef$ et des deux réactions symétriques connues (4) et (4') des contrefiches, on obtient la traction ag du poinçon DE, et l'on a déterminé ainsi toutes les tensions nécessaires pour calculer les divers équarissages, en tenant compte, pour le tirant, des efforts de flexion supplémentaires dus à la charge uniformément répartie pl qui agit sur chacune des deux moitiés AE et BE.

Si le tirant AB est continu, la charge transmise au nœud E est plus forte, et est égale à $\frac{5}{4}pl$ au lieu de pl ; en revanche, chacun des appuis ne portera que $\frac{3}{4}pl$ au lieu de $\frac{pl}{2}$. Les réactions totales des appuis F_1 et F_2 n'étant pas changées $P + pl$, il faudra dans le polygone abc du nœud A prendre $ab = \frac{3}{4}P + \frac{5pl}{8}$, et dans le polygone acefg du nœud E prendre $ef = \frac{5}{4}pl$. Il en résultera une légère augmentation des efforts de toutes les barres de la ferme, sauf les contrefiches.

Dans le cas où la ferme ne serait pas symétrique, ou ne serait symétriquement chargée, on aurait recours à la construction d'un funiculaire pour déterminer les réactions des appuis et obtenir par là même la charge transmise par la ferme au point E.

4. Ferme de hangar. - Dans le type de ferme de hangar représenté sur la figure ci-après, la demi-ferme repose sur un poteau ABD et présente une partie CD en forme d'auvent.

On peut d'abord déterminer directement au moyen des deux triangles des forces abc et def des deux nœuds C et E (construits respectivement sur $ab = \frac{P}{10}$ et sur $de = \frac{P}{5}$), les compressions (m) et (n) qui agissent sur les deux contrefiches BC et BE. On peut alors



se reporter au nœud B où l'on connaît les deux compressions précédentes (m) et (n) ainsi que la compression de la partie inférieure AB du poteau support, laquelle est égale à la réaction totale P du pied A de la ferme (poids de la demi-ferme).

1: Si l'on suppose que la barre BF, figurée en pointillé dans l'élevation de la ferme, n'existe pas, on voit qu'une section verticale faite dans la ferme entre les pannes E et F, ne rencontre que deux barres, et que par suite il doit se développer des efforts de flexion dans la ferme, si la résultante générale des forces situées à gauche de cette section ne passe pas par le point de concours D de ces deux barres, c'est-à-dire si la résultante des pannes C et E ne passe pas par ce point D. C'est ce qui est accusé par la construction du dynamique ghikl du nœud B où $gh = P$; $ih = ef = (n)$; $ik = bc = (m)$. Ce dynamique ne peut se fermer qu'en ajoutant à la force $kl = (o)$, qui représente la compression de la partie supérieure BD du poteau support, une force horizontale $lg = (q)$ correspondant à la différence des composantes horizontales des deux poussées obliques (m) et (n) exercées en B

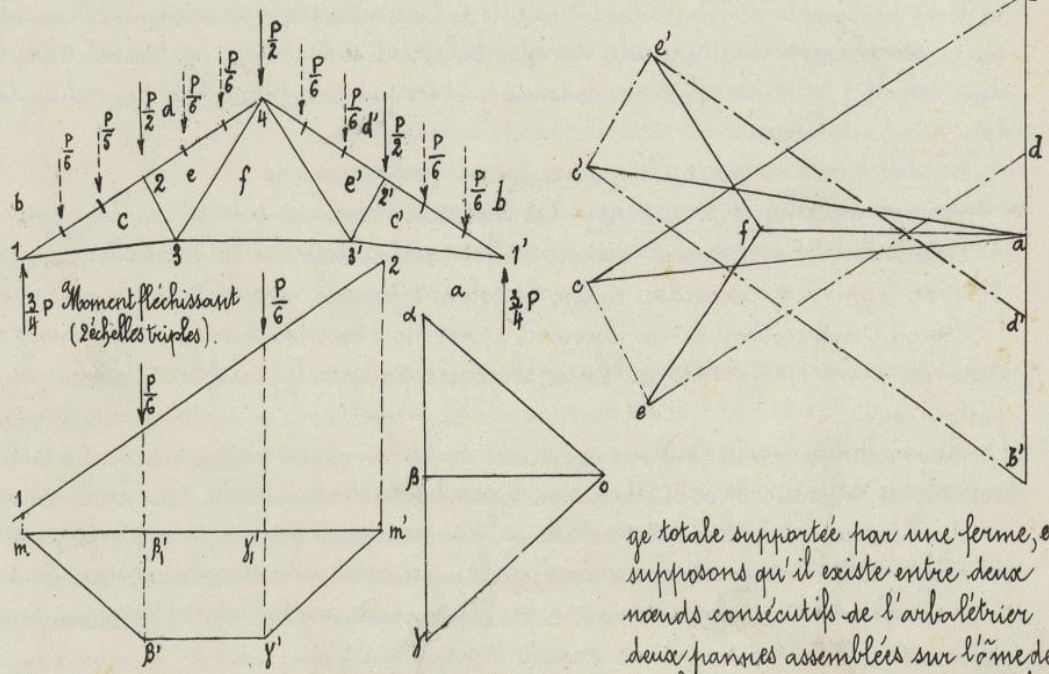
sur le poteau par les deux contrefiches BC et BE. Cette force (q) produit par suite une flexion du poteau, dont le moment maximum, qui a lieu au point d'application B de cette force, a pour valeur $M = q \times \frac{BD \times AB}{AD}$. Le poteau devra donc être calculé comme travaillant d'une part à cette flexion et de l'autre à la compression longitudinale avec flambage, égale à P, qui s'exerce sur la partie inférieure AB la plus chargée.

Cette force (q) horizontale, appliquée en B, fournira d'ailleurs deux composantes horizontales q_1 et q_2 déterminées par la statique ou par un funiculaire, respectivement appliquées aux points A et D, où elles sont équilibrées : 1° par une réaction équivalente (q_1) de la fondation en A ; 2° par une augmentation égale à q_2 de la traction du tirant DK de la ferme, résultant de l'introduction de cette force extérieure supplémentaire q_2 dans le dynamique du nœud D.

2° En ajoutant à la ferme la barre supplémentaire BF, suivant la ligne pointillée, on évitera le travail de flexion ci-dessus du poteau-support. Le nouveau dynamique du nœud B, figuré en g'h'i'k', construit avec les mêmes forces connues : $g'h' = gh = P$, $h'i' = hi = (n)$, $i'k' = ik = (m)$, donne : 1° la nouvelle compression k'l' de la partie supérieure BD du poteau, un peu plus forte que la précédente ; 2° la force longitudinale de traction l'g' = (q') qui s'exerce dans la barre BF ajoutée.

En se reportant ensuite successivement aux autres nœuds de la ferme D, E, F, G, H, I, on achèverait facilement par la méthode des nœuds la détermination des tensions des autres pièces de la ferme.

5. Ferme Polonceau à une bielle. - Les fermes précédentes se font en bois, les suivantes sont métalliques. - Le type dû à Polonceau est très élégant. - Soit 2 Plancher

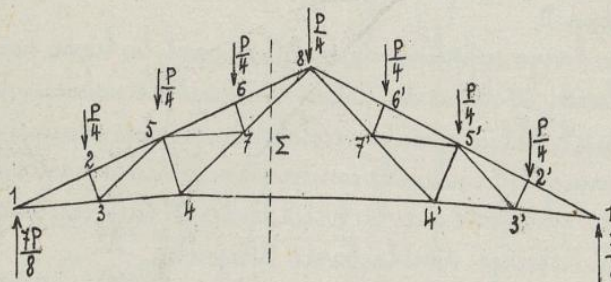


ge totale supportée par une ferme, et supposons qu'il existe entre deux nœuds consécutifs de l'arbalétrier deux pannes assemblées sur l'âme de l'arbalétrier. Nous admettons pour la répartition des charges sur les pannes que l'arba-

l'étrier est interrompu aux nœuds 2 et 2', et nous faisons l'épure des tensions avec une charge $\frac{P}{2}$ aux nœuds 2, 4 et 2' et une réaction $\frac{3}{4}P$. Les résultats se lisent sur l'épure ci-dessus, conformément à la notation de Crémone.

Un funiculaire donne le moment fléchissant maximum de la portion 1-2 de l'arbalétrier soumise aux deux forces $\frac{P}{4}$ appliquées aux pannes; ce moment vaut $\frac{P}{8} \times 0,8$.

6. Ferme Poloncean à trois pannes. - Si $2P$ est le poids supporté par une ferme, la répartition des charges sur les nœuds se fait ainsi que l'indique la figure. - Pour faire l'épure des tensions, on construit sans difficulté les dynamiques pour les nœuds 1, 2 et 3; mais si on passe ensuite au nœud 4 ou au nœud 5, on trouve en ces nœuds trois forces de grandeur inconnue, et il paraît y avoir indétermination pour la ferme-



ture du polygone. Mais si on fait une section Σ dans la ferme entre 7 et 8, l'application de la méthode de Culmann ou de celle de Ritter donnera la tension suivant 4-4'. Cette tension une fois connue, on peut construire le dynamique du nœud 4, puis celui du nœud 5 et ainsi de suite. L'épure n'offre plus de difficulté.

Les arbalétriers des fermes Poloncean peuvent se faire au moyen de poutres en treillis avec des semelles symétriques. On détermine les barres du treillis par la condition que l'âme résiste à l'effort tranchant dû à la flexion dans le plan de la ferme. On ne tient pas compte de l'âme dans le calcul de la compression maximum et l'on admet que la compression longitudinale dans l'arbalétrier se transmet également entre les deux semelles, ce qui suppose que le tendeur et les pannes s'assemblent au milieu de l'âme de l'arbalétrier.

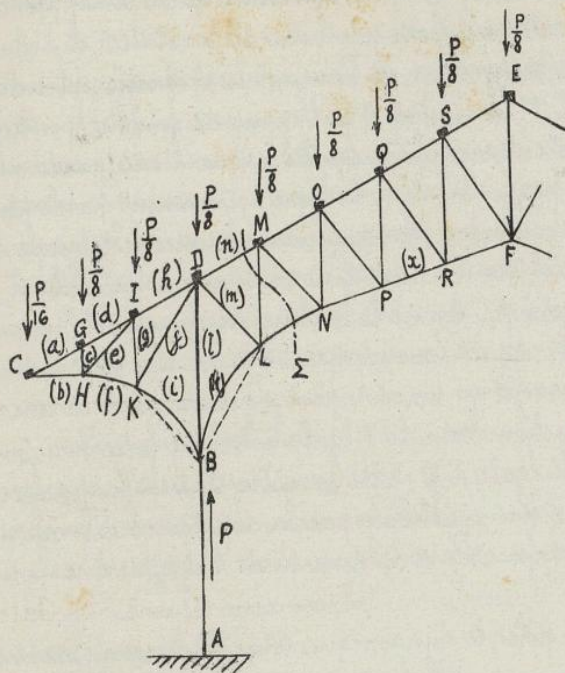
Les arbalétriers de ferme Poloncean se font parfois en bois.

7. Ferme métallique à auvent. - Ces fermes sont souvent portées par des colonnes AB et le tirant BF est souvent disposé en forme curviligne à sa partie inférieure BLN, de façon à se raccorder contre la colonne avec la console B de l'auvent extérieur. Avec la disposition de la figure ci-après, si $2P$ est la charge de la ferme, chacune des pannes, supposées également chargées, portera $\frac{P}{8}$, sauf la sablière qui ne portera que $\frac{P}{16}$.

Pour déterminer les tensions des pièces de la ferme, on fera comme si les parties curvilignes telles que BK et BL étaient en ligne droite et remplacées par leurs cordes, puis on appliquera la méthode des nœuds en commençant par le point C, extrémité de l'auvent, où la charge extérieure connue $\frac{P}{16}$ agissant de haut en bas et servant de base au triangle des forces, fera connaître les deux réactions (a) et (b) des deux barres contigües CG et CH.

En se reportant ensuite aux nœuds successifs G, H, I, K, on déterminera les efforts (c), (d),

(e), (f), (g), (h), (i), (j) qui s'exercent dans les diverses barres attenant à ces nœuds.

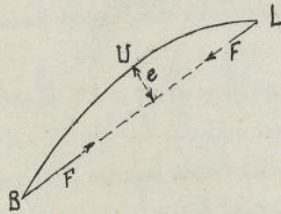


Il est alors possible de construire le dynamique du nœud B où l'on connaît la réaction P de la partie inférieure de la colonne, et la réaction (i) de la barre BK (console de l'auvent); la construction du dynamique donnera la compression (l) de la partie supérieure BD de la colonne, ainsi que la compression (k) de la barre BL correspondant à la partie inférieure du tirant.

Il suffirait ensuite de continuer l'application de la méthode des nœuds en se reportant successivement aux autres nœuds D L M N O P Q R S F pour achever la détermination des tensions des autres barres de la ferme. - D'ailleurs pour ne pas

entacher ces dernières tensions de la très minime erreur due à la substitution des cordes aux arcs, on pourrait par la section Σ obtenir les tensions exactes des barres MD, ML, LN, et reprendre la méthode de Crémone à partir du nœud M.

On calculera ensuite les dimensions des barres comme précédemment, sauf les pièces courbes formant consoles BK et BL.



Soit BUL l'axe neutre d'une pièce courbée, soumise à une compression F suivant la corde BL. La force F produira des moments fléchissants dont le maximum $M = Fe$ aura lieu dans la section U correspondant au maximum e de la flèche de l'arc. La formule d'équarrissage sera la même que celles des pièces longues fléchies, dans laquelle on pose $M = Fe$:

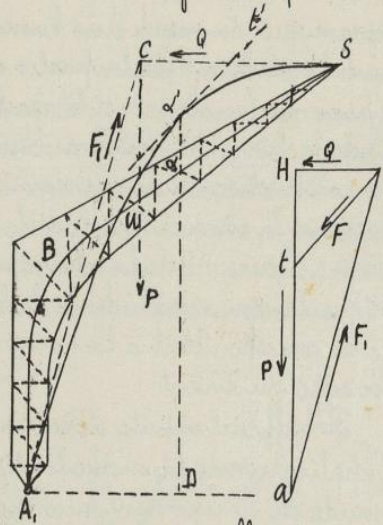
$$\frac{FeN}{I} + \frac{F}{\Omega} \left(1 + k \frac{l^2}{r^2} \right) \leq R_0.$$

La couche la plus comprimée, dont la distance à l'axe neutre est N, est celle la plus rapprochée de la corde ou ligne d'action de la compression F.

8. Fermes en arcs. - Les fermes en arcs se font à mailles ou en treillis; nous allons traiter ici le cas, réservé précédemment, d'une ferme dont l'arc est articulé à rotules ou chevilles, au sommet et aux naissances (ou pieds de la ferme).

Considérons d'abord le cas le plus général d'un arc symétrique et symétriquement chargé. Soit A, S le profil d'une demi-ferme en arc de ce genre, et soit A, B, S l'axe ou la ligne moyenne de l'arc. La demi-ferme A, S est en équilibre sous l'action de trois forces extérieures: 1° la résultante P des charges agissant sur la demi-ferme (une charge

appliquée directement au sommet de l'arc n'intervient naturellement que pour moitié dans la charge de chaque demi-arc considéré); 2° la réaction Q de la demi-ferme de droite, qui passe par l'axe de la rotule S , et à cause de la symétrie, est horizontale et dirigée suivant SC ; 3° la réaction F , de l'appui de gauche A ; cette force devant faire équilibre aux deux précédentes, a pour direction la ligne A, C passant par le point de rencontre des deux autres forces. - Le triangle des forces $OH a$ où $Ha = P$ et où OH et Oa sont parallèles à SC et à A, C donne la valeur des forces Q et F , mesurées respectivement par OH et Oa . La force $F_1 = Oa$ qui agit au point A , peut s'y décomposer en une réaction verticale Y , égale à P et une force horizontale égale à Q ; cette dernière, qui est la poussée, doit être équilibrée par la résistance du massif du support ou par celle d'un tirant en fer reliant les deux pieds A_1 et A_2 de l'arc ou de la ferme.



Construisons, avec le point o pour pôle, le dynamique $OH a$ des forces agissant sur le demi-arc, dont P est la résultante, en portant les forces de H en a , dans l'ordre où elles se présentent à partir du point S et construisons le funiculaire correspondant A, α', S , avec un premier côté SC parallèle à OH ; le dernier côté, parallèle à Oa , devant passer par le point C (avec $Pet Q$), coïncidera avec A, C . - Un côté quelconque $\alpha't$ du funiculaire représentera la ligne d'action de la résultante F des forces extérieures agissant sur l'arc, soit à gauche, soit à droite, en comptant parmi ces forces extérieures, soit la réaction F_1 qui agit en A_1 , soit la poussée Q qui agit en S ; l'intensité de cette force F et son sens d'action seront donnés par la grandeur et la direction du vecteur ot parallèle à $\alpha't$. Le funiculaire construit est appelé une courbe de pression réelle.

Si l'on a fait choix d'un arc à réseau triangulaire tel qu'il n'y ait que 3 pièces non concurrentes coupées par une section, il n'y aura qu'à décomposer la force $F = ot$, dont $\alpha't$ représente la ligne d'action, suivant les directions des trois barres de l'arc existant dans la section correspondante pour avoir la nature et la valeur des efforts qui s'exercent dans ces barres.

On peut aussi employer la méthode des moments en remarquant que, dans une section de l'arc correspondant à un point α de la ligne moyenne, le moment fléchissant est: $M = Qx\alpha'$, égal au produit de la poussée Q , mesurée à l'échelle des forces, par la distance verticale $\alpha\alpha'$ séparant la ligne moyenne de la courbe de pression, mesurée à l'échelle des longueurs. - Cette expression de M s'obtient en décomposant, au point α' , la force $F = ot$ en deux composantes: l'une verticale $= Ht$, qui passe par α , a son moment nul, l'autre horizontale $= OH = Q$, dont le moment est justement $M = Qx\alpha'$.

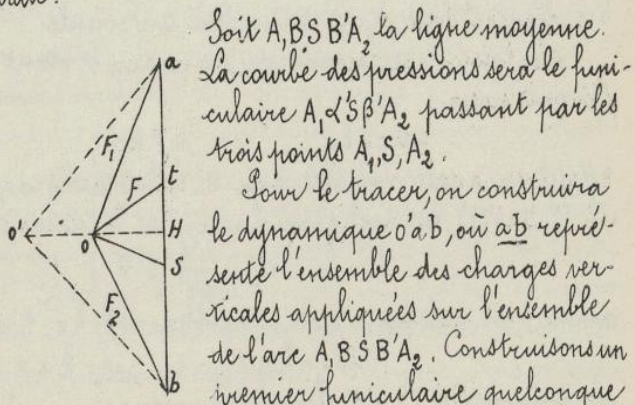
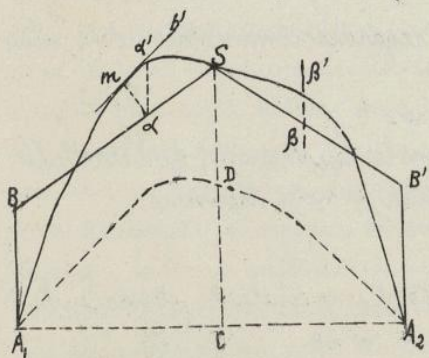
La connaissance du moment fléchissant M en un point quelconque de la ligne moyenne permet, soit de calculer les sections des barres par la méthode des moments de

Ritter, s'il s'agit d'un système triangulaire, soit de vérifier les dimensions des semelles supérieure et inférieure de l'arc, si l'âme est en treillis serré (cette âme se déterminant par la condition de résistance à l'effort tranchant dans chaque section transversale).

Après avoir adopté un profil de section d'essai, on en fera la vérification comme suit. On développe sur une droite horizontale $A_1S_1A_2$ la ligne moyenne $A_1BS_1A_2$ et on prend A_1S_1 comme axe des abscisses d'un diagramme des tensions. Soit N la composante de T_0 (ou de F) suivant la tangente en d à la ligne moyenne $A_1BS_1A_2$; portons en ordonnée, en α, β_1, β_2 , correspondant au point d , la valeur $\frac{N}{\sigma}$ relative à ce point; puis, à partir du point β_1 , les deux valeurs $\frac{M_{n1}}{I}$ et $-\frac{M_{n2}}{I}$, en β_1, β_2 et en β_1', β_2' . Traçons les lieux des points $\beta_1, \beta_1', \beta_2, \beta_2'$. Les ordonnées des lieux de β_1 et β_1' représentent la tension de compression ou de traction des fibres correspondantes des semelles supérieure et inférieure (extrados et intrados). Aucune ordonnée ne devra excéder R_0 .

Le moment fléchissant M est nul en A_1 , en S_1 et au point n commun à la ligne moyenne et à la courbe de pression. Il y a le plus grand avantage, au point de vue économique, à tracer la ligne moyenne de façon qu'elle soit aussi rapprochée que possible de la courbe des pressions, afin de diminuer M qui serait constamment nul si les deux courbes coïncidaient. L'arc forme alors un solide d'équilibre (Chap. XI; 703).

Supposons maintenant que l'arc, toujours articulé au sommet S et aux deux naissances A_1 et A_2 , soit dissymétrique ou dissymétriquement chargé. Le mode de calcul est absolument le même; seulement la réaction au sommet S d'une moitié de l'arc sur l'autre n'est plus horizontale.



Soit $A_1BS_1A_2$ la ligne moyenne. La courbe des pressions sera le funiculaire $A_1dS_1A_2$ passant par les trois points A_1, S_1, A_2 . Pour le tracer, on construira le dynamique $o'ab$, où ab représente l'ensemble des charges verticales appliquées sur l'ensemble de l'arc $A_1BS_1A_2$. Construisons un premier funiculaire quelconque A_1DA_2 ayant A_1, A_2 pour ligne de clôture et une poussée $Q' = O'H$. En déplaçant le pôle sur une parallèle à A_1A_2 et en adoptant une nouvelle distance polaire $OH = Q$ telle que $Q \times SC = Q' \times DC$, on obtient le nouveau funiculaire $A_1dS_1A_2$ qu'on peut tracer aussi en saisissant de ce que, dans le déplacement du pôle, les côtés du funiculaire pivotent autour de points fixes situés sur A_1, A_2 .

Ce nouveau funiculaire constitue la courbe des pressions dont on se servira comme dans le cas précédent. $Q = OH$ sera la nouvelle poussée horizontale. Les lignes Oa et Ob seront les réactions F_1 et F_2 des deux pieds A_1 et A_2 . Dans une section quelconque d , la résultante F des forces agissant d'un côté de la section aura pour ligne d'action

le côté élémentaire $d't$ de la courbe des pressions correspondant à cette section $d'm$ ¹⁴⁴ de l'arc et son intensité sera mesurée par le rayon vecteur et du dynamique parallèle à $d't$. Le moment M est encore $M = Q \times d'$.

Le reste du calcul se poursuit comme dans le cas précédent.

Chapitre XVIII. — Torsion simple et mixte ; Arbres de transmission.

1. Torsion simple d'un cylindre circulaire. — La théorie mathématique de l'élasticité a été appliquée à l'étude de la torsion des cylindres d'abord par Poisson et Cauchy ; mais cette recherche a été ensuite complètement modifiée par Barré de Saint Venant.

Commençons par supposer qu'on torde un cylindre circulaire autour de son axe.

Un prisme reçoit une torsion simple quand il n'est soumis qu'à l'action de couples situés dans des plans perpendiculaires à sa ligne moyenne et se faisant équilibre (la pièce est supposée entièrement libre, ses appuis ayant été remplacés par leurs réactions qui, par hypothèse, se réduisent à des couples).

Tous allons voir que, d'accord avec l'expérience, on peut admettre que toutes les molécules situées dans un même plan perpendiculaire à l'axe, y restent après la torsion et qu'elles décrivent des arcs de cercle autour de cet axe. Prenons pour axe des z l'axe du cylindre et pour origine l'extrémité de cet axe située sur une base fixe, l'autre base étant soumise à un couple.

La torsion se faisant de oz vers oy et étant regardée comme très petite, nous pouvons poser :

$u = -\theta y$, $v = \theta x$, $w = 0$,
 θ étant un angle variable avec z . Substituons dans les équations (E) de l'élasticité (Ch. II, D, N°1), en négligeant l'action de la pesanteur, et nous trouvons :

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = 0 ;$$

comme θ est nul pour $z = 0$, nous obtenons $\theta = kz$, k étant une constante, et par suite :

$$u = -kyz, \quad v = kxz, \quad w = 0 \quad (1)$$

Les tensions (N, T) ont alors pour valeurs :

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0, \quad T_1 = Gkx, \quad T_2 = -Gky, \quad T_3 = 0. \quad (2)$$

La tension doit être nulle sur la surface latérale du cylindre, mais cette condition est vérifiée d'elle-même ; car pour un élément de cette surface, γ est nul et α, β sont proportionnels à x et y , et l'on a les équations :

$$N_1 = 0 \quad N_2 = 0 \quad T_3 = 0 \quad T_2x + T_1y = 0.$$

Quant à la tension qui agit en chaque point de la base ($\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$) elle a pour composantes :

$$X = -Gky, \quad Y = Gkx \quad z = 0 ;$$

elle est donc tangentielle, et de plus tangente au déplacement du point.

La somme des moments de toutes ces tensions autour de l'axe des z est: 175.

$$\int (y x - x y) d\omega = G k \int (x^2 + y^2) d\omega,$$
 $d\omega$ étant l'élément d'aire de la base. L'intégrale qui figure ici est le moment d'inertie polaire de la base par rapport au centre; sa valeur est $J = 2\pi \int_0^R r^2 r dr$, ou $J = \frac{\pi R^4}{2}$, R étant le rayon du cylindre.

Ainsi l'effet de ces forces est celui d'un couple dont l'axe est dirigé suivant l'axe des z et dont le moment est $\frac{\pi}{2} G k R^4$. Soit Θ l'angle dont la base mobile a tourné par rapport à la base fixe; nous aurons, l étant la longueur du cylindre, $\Theta = k l$, ce qui nous définit k en fonction de Θ . Le moment précédent s'écrit alors:

$$M = \frac{\pi}{2} G \frac{\Theta}{l} R^4.$$

On satisfera donc à tous les circonstances énoncés en appliquant à l'extrémité libre de la tige un couple dont l'axe soit dirigé suivant l'axe de la tige et dont le moment ait pour grandeur M .

Ce calcul a été donné pour la première fois par Lamé et Clapeyron; mais le résultat avait été reconnu bien auparavant par l'expérience (Coulomb, 1784).

En pratique, il serait fort difficile de répartir les forces sur le plan de la base suivant la loi fournie par le calcul. Mais quelle que soit leur distribution, il suffit qu'elles soient statiquement équivalentes à un couple de moment M pour que, dès qu'on s'éloigne un peu de la base, la torsion se produise sensiblement ainsi que l'indiquent les formules (1).

Il y a lieu de remarquer que les tensions développées sur une section droite quelconque ont, comme pour la base libre, les valeurs résultant des formules (2) et sont équivalentes au couple de moment M . Si l'on imagine le cylindre partagé en deux tronçons par l'une de ses sections droites, et si l'on applique à ces tronçons dans le plan de la section deux couples égaux et contraires, de manière à maintenir le contact sans glissement relatif, chaque tronçon se comporte individuellement comme nous l'avons trouvé pour le cylindre complet; le tronçon supérieur se déforme pour son compte, et éprouve en outre une rotation d'ensemble égale à celle de la section qui le limite inférieurement. Au lieu de deux tronçons, on peut en considérer un nombre quelconque et raisonner de la même façon. On s'explique ainsi que les lois de la torsion puissent, ainsi que l'indique l'expérience, s'étendre sans modification à un fil de longueur indéfinie pour lequel, grâce à la grandeur de l , la rotation de l'extrémité libre représente plusieurs tours complets.

2. Torsion simple d'un cylindre elliptique. - Supposons maintenant que la section du cylindre soit l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Nous adopterons encore les deux premières équations (1) pour les projections du déplacement sur ox et oy ; mais nous ne pouvons plus supposer w nul; nous poserons:

$$u = -k y z, \quad v = k x z, \quad w = f(x, y).$$

Substituons ces expressions dans les équations d'équilibre d'élasticité (E); nous trouverons qu'on peut effectivement y satisfaire en posant:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

176

Les expressions des tensions (N, T) deviennent :

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0, \quad T_1 = G \left(kx + \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad T_2 = G \left(-ky + \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad T_3 = 0,$$

et la tension qui agit sur un plan parallèle à oz , de cosinus directeurs $\alpha, \beta, 0$, aura pour composantes $0, 0, \alpha T_2 + \beta T_1$. Exprimons que cette tension est nulle sur la surface du cylindre; nous aurons sur cette surface

$$\left(-ky + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\alpha}{a^2} + \left(kx + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\beta}{b^2} = 0$$

ou :

$$\frac{\alpha}{a^2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\beta}{b^2} \frac{\partial f}{\partial y} + k \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) xy = 0. \quad (4)$$

Nous satisferons aux équations (3) et (4) en posant :

$$f = mxy, \quad \text{avec} \quad m = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} k.$$

Quant à la force qui agit en chaque point de la base du cylindre, elle a pour composantes :

$$X = T_2 = -2Gk \frac{a^2}{a^2 + b^2} y, \quad Y = T_1 = 2Gk \frac{b^2}{a^2 + b^2} x.$$

La somme des moments de toutes ces forces par rapport à oz est :

$$S(Yx - Xy) d\omega = \frac{2kG}{a^2 + b^2} S(b^2 x^2 - a^2 y^2) d\omega.$$

Posons $x = a\xi, y = b\eta$; l'intégrale se réduira à $a^3 b^3 S(\xi^2 - \eta^2) d\omega$, la nouvelle intégrale étant étendue au cercle de rayon 1 et coïncidant avec le moment d'inertie polaire de ce cercle, soit $\frac{\pi}{2}$. La somme des moments cherchés sera donc $\frac{\pi k G a^3 b^3}{a^2 + b^2}$, ou en introduisant comme plus haut l'angle Θ de rotation et la longueur l de la pièce :

$$M = \pi G \frac{\Theta}{l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Soit maintenant un cylindre creux compris entre deux cylindres elliptiques de même axe et homothétiques. D'après l'équation (4) la tension est nulle sur toute surface homothétique de la surface extérieure par rapport à o . Donc le calcul précédent est valable, le couple à appliquer à l'extrémité du corps creux étant :

$$M = \pi G \frac{\Theta}{l} \left(\frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} - \frac{a'^3 b'^3}{a'^2 + b'^2} \right),$$

a et b' étant les demi-axes de la surface cylindrique intérieure.

La formule :

$$w = - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} kxy$$

prouve que la section droite se gauchit par la torsion et se change en un paraboloïde. La section s'abaisse dans l'angle des coordonnées positives et dans l'angle opposé par le sommet; elle s'élève dans les deux autres angles (en supposant $a > b$).

3. Torsion simple d'un cylindre de forme quelconque. - Nous ne donnerons pas d'autre exemple et nous nous bornerons à indiquer les résultats obtenus par BARRÉ de SAINT VENANT pour un très-grand nombre de sections transversales de formes variées [Mémoires des Savants étrangers à l'Académie des Sciences; 1855].

Remarquons d'abord une forme intéressante du résultat précédent. Le moment

d'inertie polaire de l'ellipse est :

$$J = I_x + I_y = \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2) = \frac{\Omega (a^2 + b^2)}{4} \quad (\Omega = \pi a b).$$

Par suite pour le cylindre elliptique on a, en remplaçant $a^2 + b^2$ par $\frac{4J}{\Omega}$:

$$M = \frac{1}{4\pi^2} G \cdot \frac{\Omega}{l} \frac{\Omega^4}{J}.$$

Cette expression est valable pour le cylindre circulaire; alors $a = b = R$.

Le coefficient $\frac{1}{4\pi^2}$ vaut 0,02533.

Barre de Saint Venant a constaté que pour les sections les plus diverses on trouve

$$M = \lambda \cdot G \cdot \frac{\Omega}{l} \frac{\Omega^4}{J},$$

le coefficient λ variant de 0,023 à 0,026. On pourrait donc prendre, d'après cela, exactement ou très approximativement quelle que soit la forme de la section transversale de la pièce tordue

$$M = \frac{1}{40} \cdot G \cdot \frac{\Omega}{l} \frac{\Omega^4}{J}.$$

4. Etude de la déformation. - Equation d'équarrissage. - Dans le cas du

cylindre elliptique, qui comprend le cylindre circulaire, les valeurs des (N, T) sont :

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0, \quad T_1 = 2Gk \frac{b^2 x}{a^2 + b^2}, \quad T_2 = 2Gk \frac{a^2 y}{a^2 + b^2}, \quad T_3 = 0.$$

L'équation qui définit les tensions principales (équation en S de la quadrique directrice) :

$$\begin{vmatrix} N_1 - S & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 - S & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3 - S \end{vmatrix} = 0 \text{ donne : } S [S^2 - (T_1^2 + T_2^2)] = 0;$$

par suite la plus grande valeur que puisse prendre, en un point, la tension relative à un élément est $S = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = \frac{2Gk}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2}$.

Dans le cas d'une section circulaire ($a = b = R$), cette tension vaut : $Gk \sqrt{x^2 + y^2}$ et atteint sa plus grande valeur sur le contour : $Gk R$.

Dans le cas d'une section elliptique, pour un azimuth donné, ou pour $\frac{y}{x}$ donné, la tension est d'autant plus grande que x et y sont plus grands, elle se produit donc sur le contour; et là, en égard à l'équation du contour, sa valeur s'écrit : $\frac{2Gk b}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 - b^2} x^2$; cette valeur est le petit possible pour $x = 0$, soit aux extrémités du petit axe, et elle a alors pour expression $\frac{2Gk a^2 b}{a^2 + b^2}$.

En fonction du moment de torsion, $Gk = \frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^2 b^2}$ la plus grande tension a donc pour valeur $\frac{2M}{\pi a b^2}$, ou enfin, Ω étant l'aire de la section : $\frac{2M}{b\Omega}$.

Déterminons maintenant la plus grande dilatation en un point. Les dilatations principales s sont définies par l'équation en S de la quadrique des dilatations

$$\begin{vmatrix} \partial_x - S & \frac{1}{2} g_x & \frac{1}{2} g_y \\ \frac{1}{2} g_x & \partial_y - S & \frac{1}{2} g_x \\ \frac{1}{2} g_y & \frac{1}{2} g_x & \partial_z - S \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } H S^3 - S(g_x^2 + g_y^2) = 0,$$

en notant qu'ici $\partial_x = \partial_y = \partial_z = 0$, et $g_z = 0$. La plus grande dilatation est donc $\frac{1}{2} \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$.

Or $T_1 = G q_x = \frac{2}{5} E q_x$, $T_2 = G q_y = \frac{2}{5} E q_y$. La plus grande dilatation vaut ainsi: $\frac{5}{4E} \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$, et nous devons écrire qu'elle n'exécède pas la limite $\frac{R_0}{E}$ des déformations élastiques. Nous aurons ainsi la condition d'équarrissage

$$\sqrt{T_1^2 + T_2^2} \leq \frac{4}{5} R_0 \quad (\text{nous poserons } \frac{4}{5} R_0 = R'_0):$$

Pour le cylindre elliptique, nous avons donc

$$\frac{M}{R} \leq \frac{b}{2} R'_0.$$

Dans le cas d'un cylindre circulaire, cette relation résolue par rapport au rayon du cylindre donne:

$$R \geq \sqrt{\frac{2M}{\pi R'_0}} \quad \text{ou} \quad R \geq 0,85 \sqrt[3]{\frac{M}{R'_0}}$$

Ces résultats seraient extensibles au cas d'un cylindre elliptique creux. Bornons-nous au cas d'un cylindre circulaire. Alors:

$$M = \frac{\pi}{2} G k (R^4 - R'^4).$$

et l'expression $G k R$ devient: $\frac{2MR}{\pi(R^4 - R'^4)}$; la condition d'équarrissage s'écrit:

$$\frac{M}{R} \leq \frac{R^2 + R'^2}{2R} R'_0.$$

Si on se donne le rapport des rayons: $\frac{R'}{R} = m < 1$, cette relation résolue par rapport à R donne

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{2M}{\pi R'_0 (1-m^4)}} \quad \text{ou} \quad R \geq 0,85 \sqrt[3]{\frac{M}{R'_0 (1-m^4)}}.$$

Pour le cylindre circulaire, observons en terminant que $M = G k J$, et la plus forte tension a pour valeur $G k R$ ou $\frac{MR}{J}$; l'équation d'équarrissage s'écrit:

$$\frac{MR}{J} \leq R'_0,$$

et cette forme est très analogue à celle de la condition d'équarrissage relative à la flexion simple.

L'angle de torsion par unité de longueur de la pièce k , estimé en degrés a pour expression $\frac{M}{GJ} \frac{180}{\pi}$; comme $G = \frac{2}{5} E$, E étant le coefficient d'élasticité, cet angle vaut $\frac{450M}{\pi EJ}$.

Dans les arbres de transmission qui sont souvent soumis à la torsion simple, pour que la transmission s'effectue convenablement, Bouteaux conseille de donner un rayon assez grand pour que l'angle de torsion n'exécède pas un quart de degré par mètre. Le mètre étant l'unité, on aura donc:

$$\frac{450M}{\pi EJ} \leq \frac{1}{4}, \quad \text{ou} \quad R \geq 4,35 \sqrt[4]{\frac{M}{E}}.$$

On prendra la plus forte des valeurs de R donnée par cette condition et par l'équation d'équarrissage.

5. Torsion mixte ou torsion accompagnée de flexion. - Supposons qu'un cylindre circulaire soit fléchi et tordu à la fois. Soit en un point de l'axe M_f le moment fléchissant, E l'effort tranchant, M_t le moment de torsion.

Avec les axes présentement adoptés, les tensions produites par la torsion sont:

$$N_1 = 0 \quad N_2 = 0 \quad N_3 = 0 \quad T_1 = \frac{M_t}{J} x, \quad T_2 = -\frac{M_t}{J} y, \quad T_3 = 0.$$

Les tensions produites par la flexion transversales sont, en supposant que zOy soit

le plan de flexion, et observant que pour passer des notations de la théorie de la flexion aux notations actuelles, il faut permuter les axes oz et ox et les indices 1 et 3:

$$N_1 = 0 \quad N_2 = 0 \quad N_3 = \frac{M_f y}{I} \quad T_1 = \frac{G}{\lambda} \int y dy, \quad T_2 = 0 \quad T_3 = 0.$$

En vertu du principe de la superposition des petits effets, les tensions dans la déformation composée, seront les sommes des tensions correspondantes des déformations élémentaires. On a donc en particulier: $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, T_3 et par suite l'équation aux tensions principales rappelée au N^o précédent donne:

$$S^3 - N_3 S^2 - (T_1^2 + T_2^2) S = 0.$$

La tension maxima a donc pour une des valeurs: $\frac{N_3}{2} \pm \sqrt{\frac{N_3^2}{4} + T_1^2 + T_2^2}$.

Ces seules conditions entraînent: $\partial_x = \partial_y = -\eta \partial_z$, $g_x = 0$, en sorte que l'équation aux dilatations principales donnée au N^o précédent devient:

$$(S - \partial_x) \left\{ (s + \eta \partial_z) (s - \partial_z) - \frac{g_x^2 + g_y^2}{4} \right\} = 0;$$

ses racines sont:

$$s = \partial_x, \quad s = \frac{1-\eta}{2} \partial_z \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1+\eta)^2 \partial_z^2 + g_x^2 + g_y^2}.$$

Regardons ∂_z comme positif, et exprimons que la plus grande dilatation est plus petite que la limite $\frac{R_0}{E}$; nous avons ainsi:

$$\frac{1-\eta}{2} \partial_z + \frac{1}{2} \sqrt{(1+\eta)^2 \partial_z^2 + g_x^2 + g_y^2} < \frac{R_0}{E}$$

On peut écrire cette inégalité sous une autre forme. On a en effet:

$$T_1 = G g_x, \quad T_2 = G g_y, \quad N_3 = [(1-2\eta)A + 2G] \partial_z.$$

$$\eta = \frac{1}{4}, \quad A = G = \frac{2}{5} E;$$

de là l'inégalité suivante:

$$\frac{3}{8} N_3 + \frac{5}{8} \sqrt{N_3^2 + 4(T_1^2 + T_2^2)} < R_0.$$

Si ∂_z est négatif, on aurait pris la valeur absolue de l'autre racine s , et l'on aurait été conduit à la relation:

$$\frac{3}{8} |N_3| + \frac{5}{8} \sqrt{N_3^2 + 4(T_1^2 + T_2^2)} \leq R_0. \quad (E)$$

Cette inégalité doit être vérifiée pour les plus grandes valeurs que puissent prendre dans une tranche N_3 , T_1 et T_2 .

Supposons l'effort tranchant négligeable; $T_1^2 + T_2^2$ a pour maximum $\frac{M_t R}{I}$; comme de plus $N_3 = \frac{M_f N}{I}$, avec $J = 2I$ et $N = R$, la condition d'équarrissage s'écrit:

$$\left(\frac{3}{8} M_f + \frac{5}{8} \sqrt{M_f^2 + M_t^2} \right) \frac{N}{I} \leq R_0.$$

On est ainsi conduit à déterminer les dimensions de la pièce comme si elle avait à résister à un moment fictif de flexion qui aurait pour expression:

$$M = \frac{3}{8} M_f + \frac{5}{8} \sqrt{M_f^2 + M_t^2}.$$

Ces résultats ont été donnés en 1838, dans son Cours lithographié de l'École des Ponts et Chaussées, par Barré de Saint Venant, et retrouvés d'une manière moins rigoureuse par Poncelet en 1839.

Les mêmes considérations permettent d'obtenir la condition d'équarrissage d'une

pièce de révolution (sensiblement cylindrique) soumise à la fois à une torsion et à une flexion quelconque avec compression et cisaillement. Si N est l'effort comprimant, on a alors :

$$N_3 = \frac{M_z y}{I} - \frac{N}{\Omega}, \quad T_1 = \frac{M_z x}{J} + \frac{E}{\lambda I} \int_y^R \lambda y dy, \quad T_2 = -\frac{M_z y}{J},$$

et il faut satisfaire à la condition (E) pour la plus grande valeur que puisse prendre le premier membre dans une section (pour z donné). Pratiquement, on remplace chaque terme par la plus grande valeur qu'il puisse atteindre.

En ce qui concerne le coefficient de $E \int \lambda y dy = \Omega y_1$, en appelant y_1 l'ordonnée du centre de gravité d'un segment de cercle, or, si α est l'amplitude du segment, on a : $y_1 = \frac{1}{8} \frac{R \sin^3 \frac{\alpha}{2}}{\alpha - \sin \alpha}$ et $\lambda = 2 R \sin \frac{\alpha}{2}$; on est amené à chercher le maximum de $\frac{y_1}{\lambda}$ ou de $\frac{1 - \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha}$; il a lieu pour $\alpha = \tan \alpha$, équation dont la plus petite racine est sensiblement $\approx \sqrt{2}$; il vaut $\cot \alpha$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\frac{1}{\pi \sqrt{2}}$; la valeur correspondante du coefficient de E est donc $\frac{\Omega}{I} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou simplement $\frac{1}{R}$, en observant que $I = \frac{\pi R^4}{4}$, et que $3\sqrt{2}$ est sensiblement 4.

On est ainsi conduit à la condition pratique suivante :

$$\frac{3}{8} \left\{ \frac{|M_z| R}{I} + \frac{|N|}{\Omega} \right\} + \frac{5}{8} \sqrt{\left\{ \frac{|M_z| R}{I} + \frac{|N|}{\Omega} \right\}^2 + 4 \left\{ \frac{|M_z| R}{J} + \frac{|E|}{\Omega} \right\}^2} \leq R_s.$$

Dans le cas où le flambement serait à craindre, il faudrait remplacer N par une valeur conforme à la formule de Rankine.

6. Calcul d'un arbre de transmission. - Un arbre de transmission reçoit habituellement son mouvement d'un arbre premier moteur par l'intermédiaire d'une courroie; elle transmet à un ou plusieurs arbres secondaires par l'intermédiaire de courroies qui généralement ne sont pas parallèles à la courroie motrice. La tension des brins de la courroie motrice d'une part, des courroies réceptrices d'autre part, tendent à faire fléchir l'arbre, mais ces efforts sont dirigés dans des plans différents. De plus, le couple moteur, opposé aux couples résistants, produit un effort de torsion.

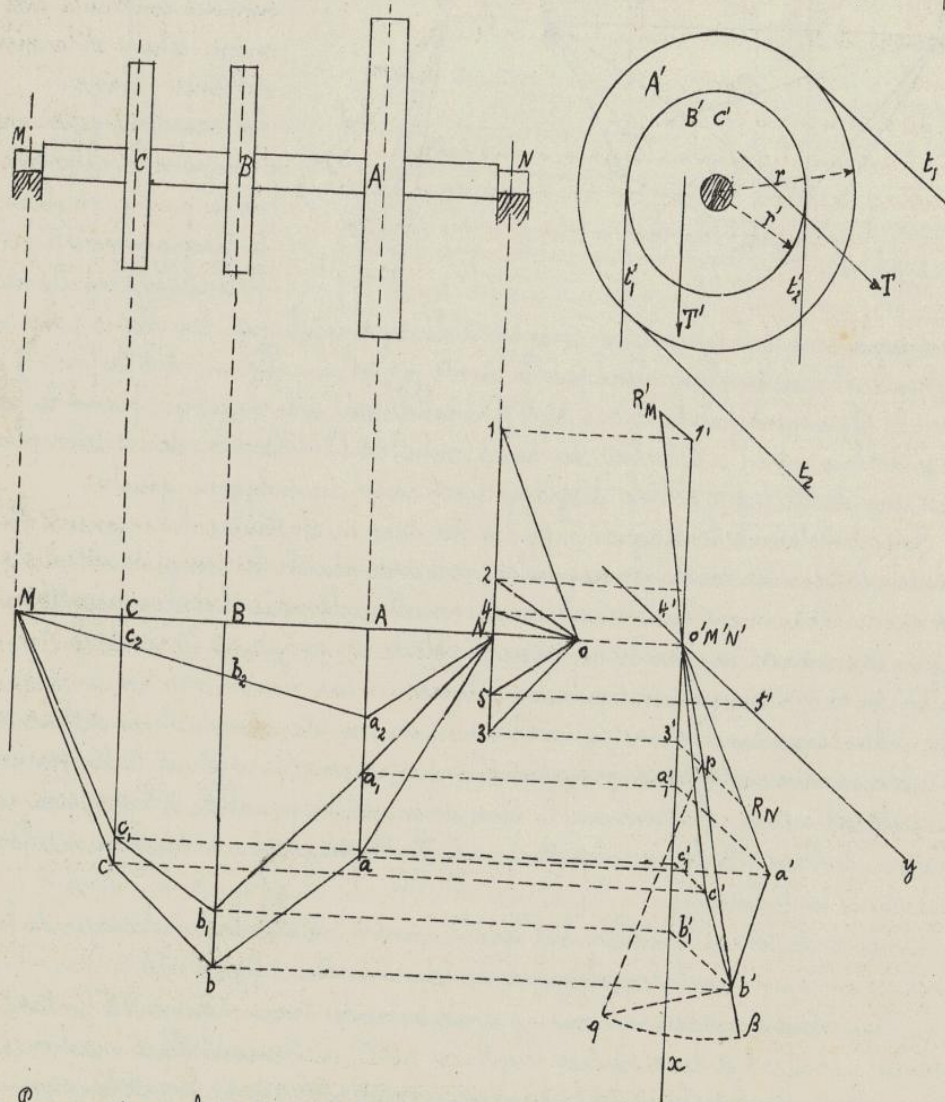
Les praticiens étendent au calcul d'un tel arbre la théorie de la torsion mixte, en généralisant la notion de moment fléchissant.

Preliminairement donnons donc quelques indications sur la composition des moments fléchissants.

Soit une poutre AB reposant sur deux appuis A et B, soumise au point C à une force F_1 perpendiculaire à l'axe de la poutre et située dans un plan dont la trace sur un plan de projection perpendiculaire à l'axe O de la poutre est ox ; elle est soumise également en D à une force F_2 perpendiculaire à AB, mais située dans un plan oy , différent de ox . Nous pouvons construire le diagramme des moments fléchissants relatifs à la force F_1 ; il se projette sur les deux plans de projection en A1B et O1'O, sa ligne de clôture étant l'horizontale AB. Le moment fléchissant correspondant pour un point M quelconque sera représenté par l'ordonnée (M_{m_1}, O_{m_1}) .

Répetons la même construction pour la force F_2 . Le diagramme correspondant étant A2B, O2'O, le moment fléchissant correspondant sera pour le point M représenté

être remplacées par leur résultante T' appliquée sur l'axe et le couple $r'(t'_1 - t'_2)$. ¹⁸² Ces sont les forces appliquées à l'arbre. Nous négligeons le poids de l'arbre et celui des poulies pour ne pas trop changer l'épure, mais il serait aisé d'en tenir compte.



Prenons deux plans de projections, le premier parallèle à l'arbre et aux forces T' , le second perpendiculaire à l'arbre. - Construisons le dynamique 0123 des forces (B) et (C), et le funiculaire correspondant Mc, b, N , de ligne de clôture MN . - Construisons ensuite le dynamique de la force (A) dans le plan dont la trace est $M'y$. Les projections de ce polygone sont $(0H5, M'H'5')$, avec $H'5' = T$.

Le funiculaire correspondant a ses cotés respectivement parallèles aux rayons polaires $(0H, 0'H')$ et $(05, 0'5')$; la projection de ce polygone aura ses cotés parallèles aux projections $0H$ et 05 de ces rayons polaires. Nous pouvons le construire en $M a_2 N$ (nous supposons encore qu'il passe par M et N). Le premier funiculaire Mc, b, N nous donne au point N la réaction d'appui $(3N, 3'N')$; le second donne au même point la réaction

($5N, 5N'$); composons ces deux forces, la résultante $R_M N'$ donne la réaction totale de l'appui N , en grandeur et en direction. On obtiendra de même en $R_M M'$ la réaction de l'appui M . - Ces réactions serviront à la détermination des tourillons. Pour le calcul des tourillons, il suffit de connaître la grandeur de ces réactions; mais leur direction est utile à connaître pour l'organisation des paliers ou consoles qui les supportent.

Le diagramme des moments fléchissants $M_c b a N, M' c' b' a N'$ est construit comme nous l'avons indiqué plus haut. Les côtés extrêmes $M' c'$ et $N' a'$ se confondent avec la direction des forces R_M et R_N ; en effet, pour un point de l'arbre situé entre M et C' par exemple, le moment fléchissant n'est pas autre chose que le moment de la réaction R_M .

Entre M et C , entre A et N , l'arbre travaille seulement à la flexion et le diagramme permet de calculer ses dimensions...

Entre A et B il est soumis en outre au couple de torsion $M_t = r(t_1 - t_2) = 2r'(t'_1 - t'_2)$, et entre B et C , au couple de torsion $M_t = r(t_1 - t_2) - r'(t'_1 - t'_2) = r'(t'_1 - t'_2)$. Ce moment est combiné au moment fléchissant M_f pour fournir le moment fléchissant fictif:

$$M = \frac{3}{8} M_f + \frac{5}{8} \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$$

A cet effet, on construit un vecteur m représentant le moment de torsion M_t à l'échelle à laquelle les ordonnées du diagramme représentent les moments fléchissants: $m \times ON = r(t_1 - t_2)$. Cela fait, construisons par exemple le moment fictif au point B , où il est le plus grand. On a en ce point, au facteur ON près: $M_f = M' b'$. Prenons, sur ce vecteur $M' b'$: $M' p = \frac{3}{8} M' b'$ et $p b' = \frac{5}{8} M' b'$. Prenons sur une perpendiculaire à $M' b'$ la longueur $b' q = \frac{5}{8} m$. On a:

$$p q = \sqrt{\left(\frac{5}{8} M' b'\right)^2 + \left(\frac{5}{8} m\right)^2} \quad \text{et} \quad M' p = \frac{3}{8} M_f + \frac{5}{8} \sqrt{M_f^2 + M_t^2} = M,$$

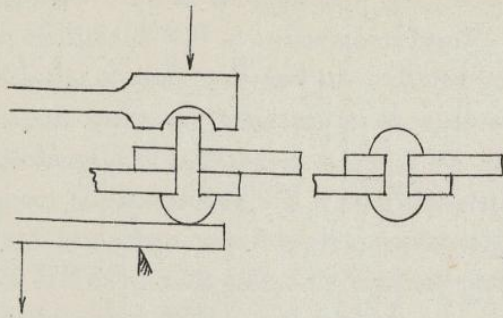
à l'échelle du diagramme.

On applique alors la formule d'équarrissage $\frac{R_0 I}{N} = M$ (toutes réserves faites sur la validité théorique de cette application).

Reuleaux, dans le livre déjà cité, donne de nombreuses applications de ces procédés à divers organes tels que: essieux, manivelles, arbres coudés, arbres de grues, roues hydrauliques, etc...

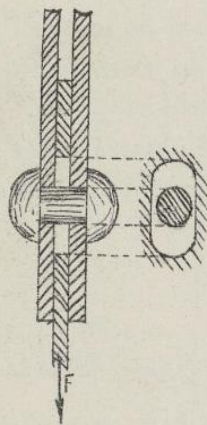
Chapitre XIX. - Applications diverses : rivets et boulons; ressorts; volants. -

1. Généralités sur les rivets et le rivetage. - Un rivet est un clou à tige cylindrique, dont la tête affecte la forme d'une calotte sphérique, et qui sert à assembler des plaques de tôle de fer ou d'acier. A cet effet, on chauffe le rivet à une certaine température (au rouge sombre), on l'introduit dans les trous correspondants des pièces qu'il s'agit d'assembler; puis, avec la partie saillante de la tige, on forme une seconde tête semblable à la première et dite rivure; à l'aide d'une bouterolle, moule ayant en creux la forme de cette tête, qu'on applique sur la tige et qu'on



fait qu'après refroidissement la tige du rivet se trouve soumise à de fortes tensions longitudinales supérieures même généralement à la limite d'élasticité initiale du métal. Il est dès lors à peu près impossible de prétendre calculer la valeur de ces tensions.

Des expériences de traction faites, par Clark en Angleterre et Gouin en France, sur des feuilles de tôle rivées ont permis de constater que la contraction produite par



le refroidissement des rivets détermine entre les feuilles de tôle une adhérence telle qu'il faudrait exercer pour les séparer, un effort de traction équivalent à environ 14 Kg par mm^2 de section du rivet, soit $\frac{1}{3}$ environ de la charge de rupture par traction. Si l'on ajoute la résistance du rivet au cisaillement, qui est au moins les $\frac{2}{3}$ de la charge de rupture par traction, on a, pour chaque rivet, une résistance totale qui sera au moins égale à la charge de rupture par traction, et on peut faire supporter à chaque millimètre carré de section du rivet la charge de sécurité de traction $R_0 = 6 \text{ K}$.

Dans les constructions métalliques sujettes à des vibrations répétées comme les ponts, les feuilles de tôle peuvent se desserrer et la rivure ne résiste plus que par le cisaillement. Aussi est-il prudent de négliger l'adhérence des tôles et de supposer que chaque section de rivet cisailée ne résiste qu'à $0,8 R_0$, soit $4,800$ par $\frac{\text{m}^2}{\text{m}^2}$.

2. Diamètre des rivets - Le diamètre du rivet doit être en rapport avec l'épaisseur des tôles, pour qu'on puisse percer celles-ci par poinçonnage. Le trou est percé d'un seul coup par une tige d'acier dur à qui une machine à vapeur, ou une presse hydraulique, ou même un levier manœuvré à la main, imprime un mouvement de va et vient; la tôle est appuyée sur un bâti solide percé d'un trou un peu plus grand que le diamètre du poinçon et par lequel s'échappe le métal cisailé.

Soit d le diamètre du trou, e l'épaisseur de la tôle; T la charge de rupture de la tôle par cisaillement, T_1 la charge de rupture à l'écrasement de l'acier qui forme le poinçon (qu'on prend dur pour augmenter T_1). La condition de perforation est :

184.
presse soit à la main, soit à la machine, pendant qu'on maintient par en dessous l'extrémité inférieure du rivet. En se refroidissant, la tige se contracte et produit un serrage énergique des pièces réunies par le rivet, et par suite leur adhérence.

La température élevée à laquelle se fait l'opération du rivetage (500° environ)

$$\frac{\pi d^2}{4} T_1 > \pi d e T, \text{ d'où : } d > H \frac{T}{T_1} e.$$

Les chiffres usuels sont $T = 33^k$, $T_1 = 80^k$; donc on doit prendre $d > 16 e$. Ordinairement on prend $d \geq 2e$.

On obtient d'autre part une limite supérieure de d par la condition que les tôles ne subissent pas un effort de compression trop grand du fait du rivet, si celui-ci arrive à travailler au cisaillement. Cela conduit à prendre d inférieur à 3 fois l'épaisseur de la pièce la plus mince parmi celles à réunir ($d \leq 3e$).

Enfin le diamètre doit augmenter avec la longueur de la tige; sinon, la tête du rivet sauterait pendant le refroidissement. L'expérience montre qu'il faut prendre pour d :

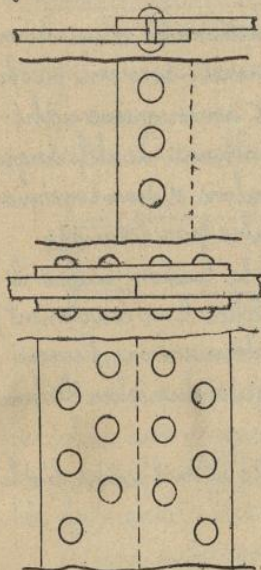
14	16	18	20	22	25
m/m					

quand l'épaisseur totale des tôles est comprise entre

10 à 15	15 à 20	20 à 25	25 à 35	35 à 50	50 à 70
m/m					

La distance des rivets entre eux d'axe en axe, varie moyennement de $3d$ à $5d$, et ne doit pas dépasser $0^m,10$ à $0^m,12$ pour que les tôles ne risquent pas de bailer. Enfin l'axe d'un rivet doit être au moins à 30 ou $40^m/m$ des bords de la tôle.

3. Disposition et calcul des tôles rivées. - Lorsque l'effort de traction est relativement faible, on emploie l'assemblage à recouvrement qui ne comporte qu'une ligne de rivets; c'est ce qu'on fait généralement pour les réservoirs en tôle. Mais



quand l'effort devient considérable, on emploie l'assemblage à coudre-joints qui donne deux sections de cisaillement par rivet, et qui surtout, supprime l'effort de flexion. Chacun des couvre-joints a une épaisseur égale à la moitié des tôles qu'il réunit... Souvent, dans ce cas, comme on ne peut pas trop rapprocher les rivets, une seule ligne de rivets de chaque côté du joint ne suffirait pas; on en met 2 ou 3; les rivets sont alors disposés en quinconce, leurs axes déterminant des triangles équilatéraux.

Soit n le nombre total des rivets si l'assemblage est à recouvrement, ou le nombre de rivets situés de chaque côté du joint si l'assemblage est à coudre-joints. On détermine ce nombre n par la condition que les rivets produisent une adhérence égale à la force de traction F qui agit sur les tôles à réunir. Cette adhérence ϕ est, d'a-

près ce qu'on a vu, de 5 à 6^k par m^2 . On aura donc, suivant le cas:

$$F = n \frac{\pi d^2}{4} \phi, \text{ ou } F = 2n \frac{\pi d^2}{4} \phi.$$

Il reste à déterminer alors sur combien de lignes on mettra ces n rivets. Soit n_1 le nombre des rivets sur une seule ligne, l la largeur de tôle à assembler; la section de la tôle la plus faible correspond à la ligne de rivet; elle est égale à $e(l - n_1 d)$. On doit donc avoir:

$$F = R_0 e (l - n_1 d),$$

ce qui limitera n , et permettra de choisir le nombre de lignes et la disposition des rivets. 186

4. Répartition des joints. — Souvent les semelles des poutres composées en I sont formées, principalement dans les ponts, de plusieurs tôles. Comme la longueur des poutres est généralement plus grande que celle des tôles, il faut en mettre plusieurs bout à bout. Alors, suivant un principe général en construction, on a soin de ne pas faire coïncider les joints, de les recroiser. On rétablit la continuité des tôles interrompues, au moyen de couvre-joints. Dans le calcul des rivets et du couvre-joint, on prend pour valeur de F la moitié, le tiers ou le quart de la force totale agissant sur les semelles, suivant qu'elles sont composées de 2, 3 ou 4 tôles, et, pour celle de e l'épaisseur de la tôle interrompue et non de l'ensemble.

Les joints peuvent être uniformément répartis, de manière à les espacer le plus possible les uns des autres, ou bien au contraire, tout en les croisant, on peut les rapprocher de manière que le même couvre-joint serve pour plusieurs joints à la fois; malgré l'économie, la première disposition est préférable.

5. Boulons. — Un boulon est une tige cylindrique en fer, terminée d'une part par une tête prismatique à quatre ou le plus souvent à six pans, et de l'autre par un filet de vis destiné à recevoir un écrou également à quatre ou six pans, quand le boulon a été placé dans le trou pratiqué dans les deux pièces qu'il s'agit de réunir.

On produit le serrage de l'écrou en agissant sur l'une des extrémités d'un levier (clef) dont l'autre extrémité forme une sorte de fourche qui permet, avec un très faible jeu, de saisir les faces opposées de l'écrou. — Le serrage peut amener une adhérence des pièces réunies supérieure à celle des rivets, car en se servant de clefs de grande longueur on arrive, à la main, à faire sauter la tête des boulons et par conséquent à produire dans leur tige une tension plus forte que celle subie par les rivets.

Les boulons peuvent travailler soit au cisaillement, soit à la traction (quand ils doivent maintenir deux pièces serrées l'une sur l'autre, et empêcher leur écartement), soit enfin par leur adhérence, comme les rivets. Dans les deux derniers cas, l'écrou joue un rôle capital, tandis que dans le premier, il ne sert qu'à empêcher le boulon de sortir du trou, par vibrations ou choc accidentel.

Soit d le diamètre de la tige, D et D' les diamètres de la tête et de l'écrou, h et h' leurs hauteurs. Les proportions usuelles sont :

$$D = D' = 2d, \quad h = 0,7d, \quad h' = d.$$

Le filet de la vis, généralement triangulaire et isocèle, est en saillie sur un noyau cylindrique dont le diamètre est $d_1 = 0,9d - 1,3$, l'unité étant le millimètre.

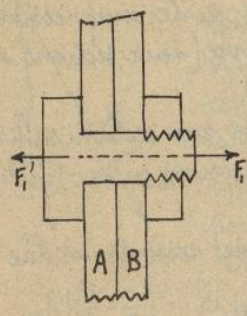
Supposons qu'il y ait cisaillement. Soit n le nombre de boulons cisailés nécessaires pour l'assemblage de deux tôles soumises à l'action d'une force totale F agissant suivant la longueur des tôles. Selon qu'il y a une ou deux sections cisailées, on a

$$F = n \frac{\pi d^2}{4} \cdot 0,8 R_0 \quad \text{ou} \quad F = 2n \frac{\pi d^2}{4} \cdot 0,8 R_0.$$

Cependant, si le diamètre d des boulons était trop faible vis à vis de l'épaisseur e de

la pièce assemblée, c'est le danger de flexion qui serait le plus à craindre; si l'on a $d < 1,6 e$, c'est par la résistance à la flexion qu'il faut calculer les boulons.

Lorsqu'un boulon est soumis à un effort d'extension F_1 suivant son axe, transmis par l'intermédiaire de sa tête et de son écrou, on calcule son diamètre par la relation



$$R_0 \frac{\pi d^2}{4} = F_1 ;$$

les proportions adoptées assurent un excès de solidité au boulon dès que le noyau offre assez de résistance.

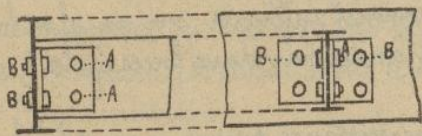
Soit enfin un boulon utilisé pour serrer l'une contre l'autre deux pièces qui tendent à glisser l'une sur l'autre, en produisant une adhérence (par frottement) capable de faire équilibre à la force F qui tend à opérer le glissement des pièces. F est alors une force de frottement dont la composante normale est $\frac{F}{f}$, ou $2F$, car pour les surfaces brutes de bois ou de tôles, on peut prendre approximativement $f = 0,5$. S'il y a n boulons semblables, pour résister à la force de glissement F , on aura la condition

$$2F = n \frac{\pi d^2}{4} R_0 .$$

Le travail par adhérence a pour effet de mieux assurer la répartition des efforts entre les divers boulons de l'assemblage et les diverses fibres des pièces assemblées.

6. Assemblage de poutres et de solives en fer. - L'assemblage d'une solive en fer avec une poutre de plancher se fait à l'aide de deux équerres en fer rivées sur la solive et boulonnées sur la poutre.

La solive, étant chargée d'un poids total uniformément réparti $2P$ reporte un poids P à l'assemblage sur la poutre. C'est cette charge P qui produit le cisaillement des boulons ou rivets. Soit n le nombre des rivets A , de diamètre d assemblant les deux cornières avec la solive et n' le nombre de boulons B , de même diamètre, assemblant chaque cornière avec la poutre; les rivets A présentent deux sections de cisaillement et les boulons B une seule section de cisaillement sous le même effort extérieur P transmis par la solive aux cornières et par celles-ci à la poutre. On a par suite: $P = 2n \cdot 0,8 R_0 = 2n' \cdot 0,8 R_0$ ($w = \frac{\pi d^2}{4}$). Par suite $n = n'$, c'est-à-dire que le nombre de boulons B est double du nombre des rivets A .

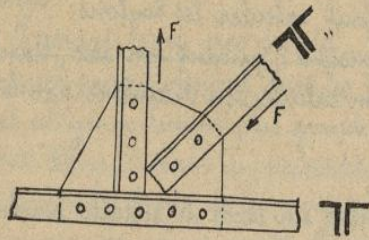


Si une autre solive venait s'assembler, de l'autre côté de la poutre, au même point, bout à bout avec la première solive, les boulons B serviraient également au nouvel assemblage, sans autre renforcement, puisqu'ils auraient alors deux sections cisailées, une de chaque côté de la poutre.

Les cornières d'assemblage doivent présenter une section nette suffisante, déduction faite des trous de rivets, pour résister au cisaillement transversal dû à la charge P qui agit sur elles.

7. Assemblage par goussets. - Dans les assemblages à gousset, rivés particulièrement

188
 rement dans les formes métalliques, chaque barre (généralement double) est assemblée sur le gousset, à chaque extrémité, par un nombre total n de rivets correspondant, d'après la formule générale du cisaillement ou de l'adhérence, à l'effort F de traction ou de compression qui agit suivant cette barre (deux sections de cisaillement généralement).

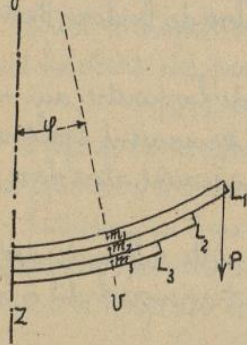


Les goussets doivent avoir une section suffisante dans les différents sens, pour résister aux efforts de compression ou de traction que leur transmettent les barres.

8. ressorts de flexion. - d'étude de la déformation des ressorts est due à M. Phillips (Annales des Mines, 1852)

Un ressort de suspension de véhicule se compose en général d'un système de lames superposées de même épaisseur, dont les fibres moyennes, à l'état naturel, sont circulaires et concentriques. Les profils de ces lames sont symétriques par rapport à une droite oz partant du centre o , et que nous supposerons verticale pour fixer les idées. Les lames sont maintenues par une bride qui les réunit, les serre les unes contre les autres, et qui est placée dans leur région moyenne; elles tournent leur concavité vers le haut, et sont en retraite les unes sur les autres à partir de la première, appelée maîtresse lame. Les extrémités de la maîtresse lame sont reliées au châssis, sur lequel repose la partie relativement fixe du véhicule, par des boulons de suspension verticaux ou légèrement obliques. Nous supposerons verticaux ces boulons, qui ne sont généralement soumis qu'à des efforts de traction. Le ressort s'appuie par son point le plus bas sur la boîte à graisse. D'après cet exposé, on voit que le ressort se trouve dans les mêmes conditions que s'il reposait, par son sommet inférieur, sur un plan horizontal fixe et qu'il fut sollicité à ses deux extrémités par deux forces égales P , verticales et qui sont censées données.

Un tel ressort a deux caractéristiques: sa résistance propre, qui est la charge maxima P qu'il peut supporter sans être exposé à se fausser; sa flexibilité, qui est le rapport du déplacement du point d'application de la charge P à la longueur de la maîtresse lame.

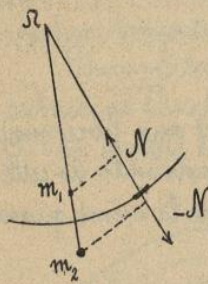


Pour fixer les idées supposons un ressort à trois lames L_1, L_2, L_3 de rayons r_1, r_2, r_3 et d'ouvertures $2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3$ à l'état naturel; désignons par ρ_1, ρ_2, ρ_3 les rayons de courbure des fibres moyennes déformées en leurs points de rencontre m_1, m_2, m_3 avec une normale commune inclinée d'un angle φ sur la verticale du point d'appui; en égard au parallélisme conservé dans la déformation, on a $\rho_3 = \rho_2 + e = \rho_1 + 2e$, e étant l'épaisseur commune des lames.

Nous allons appliquer l'équation d'Euler (Eq. XI, Chap. X) à la détermination des rayons de courbure dans une section m_1, m_2, m_3 rencontrant

les trois lames.

Le moment fléchissant dû au poids P est $Pr_1(\cos\varphi - \cos\alpha_1)$; il correspond à la lame L_1 .
 Passons aux moments dus aux réactions normales des lames. Les réactions égales et contraires appliquées à des éléments en contact de L_1 et L_2 ont leurs moments par rapport aux points m_1 et m_2 de signes contraires, et de plus dans le rapport de r_1 à r_2 . Si donc le moment résultant des actions de L_2 sur L_1 par rapport à m_1 est pris sous la forme $r_1 K_1$, le moment résultant des actions de L_1 sur L_2 par rapport à m_2 sera $-r_2 K_1$. On ferait une observation analogue pour le contact des lames L_2 et L_3 .



On est ainsi conduit aux trois équations :

$$EI\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{r_1}\right) = -Pr_1(\cos\varphi - \cos\alpha_1) + r_1 K_1; \quad EI\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{r_2}\right) = -r_2 K_1 + r_2 K_2; \quad EI\left(\frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{r_3}\right) = -r_3 K_2.$$

L'élimination de K_1 et K_2 donne l'équation :

$$EI\left\{\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{r_3}\left(\frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{r_3}\right)\right\} = -P(\cos\varphi - \cos\alpha_1).$$

Comme on a : $r_3 = r_2 + e = r_1 + 2e$ et $\rho_3 = \rho_2 + e = \rho_1 + 2e$, il en résulte que $r_3 - \rho_3 = r_2 - \rho_2 = r_1 - \rho_1 = e$; par suite cette équation peut s'écrire :

$$EI_3\left(\frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{r_3}\right) + Pr_3(\cos\varphi - \cos\alpha_1) = 0 \quad (1)$$

en posant :

$$I_3 = I\left\{\frac{\rho_3 r_3^2}{\rho_1 r_1^2} + \frac{\rho_2 r_2^2}{\rho_3 r_3^2} + 1\right\}.$$

Comme l'épaisseur e et les variations ϵ sont faibles vis à vis de r , la quantité I_3 vaut sensiblement :

$$I_3 = I\left\{\frac{r_3^5}{r_1^3} + \frac{r_3^2}{r_2^2} + 1\right\}$$

I_3 étant constant, si l'on rapporte la fibre moyenne à des coordonnées polaires de pôle O et d'axe Oz et qu'on mette le rayon polaire R_3 sous la forme $r_3(1 + \Delta_3)$, l'équation (1) équivaudra à :

$$\frac{d^2 \Delta_3}{d\varphi^2} + \Delta_3 + \frac{Pr_3^2}{EI_3}(\cos\alpha_1 - \cos\varphi) = 0$$

(Voir sur ce point le § 67 de l'Appendice); l'intégrale générale de cette équation est

$$\Delta_3 = \frac{Pr_3^2}{EI_3} \left\{ A \cos\varphi + B \sin\varphi + \frac{\varphi \cos\varphi}{2} - \cos\alpha_1 \right\}$$

Comme pour $\varphi = 0$, Δ_3 et sa dérivée sont nuls (équivalence à un encastrement), A et B se trouvent déterminés et l'on a :

$$\Delta_3 = \frac{Pr_3^2}{EI_3} \left\{ \frac{\varphi \cos\varphi}{2} + \frac{\sin\varphi}{2} - \cos\alpha_1(1 - \cos\varphi) \right\}.$$

La déformation est par suite connue pour la lame L_3 , et aussi pour les portions des lames L_2 et L_1 qui sont superposées à L_3 .

Faisonnons de la même manière en partant d'un rayon polaire rencontrant seulement les lames L_2 et L_1 , et nous serons conduit à la relation

$$EI_2\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{r_2}\right) + Pr_2(\cos\varphi - \cos\alpha_1) = 0.$$

$$I_2 = I \left\{ \frac{r_2^3}{r_1^3} + 1 \right\} ;$$

en prenant l'équation polaire de la fibre moyenne de la lame L_2 sous la forme $R_2 = r_2 (1 + \Delta_2)$, on trouve :

$$\Delta_2 = \frac{P r_2^2}{E I_2} \left\{ C \cos \varphi + D \sin \varphi + \frac{\varphi \cos \varphi}{2} - \cos \alpha_1 \right\}.$$

Les constantes C et D se déterminent en exprimant que les tangentes aux fibres moyennes de L_2 et de L_3 sont parallèles aux points qui correspondent à l'extrémité de cette dernière lame, et que les rayons vecteurs de ces points ont varié de la même quantité; autrement dit, en écrivant que $\frac{d\Delta_2}{d\varphi} = \frac{d\Delta_3}{d\varphi}$ et $r_3 \Delta_3 = r_2 \Delta_2$.

La déformation de la lame L_2 est ainsi définie dans la région extérieure à L_3 et par suite aussi celle de L_1 , superposée à cette région.

Enfin pour la partie de L_1 extérieure à L_2 , on trouverait successivement:

$$E I \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + P r_1 (\cos \varphi - \cos \alpha_1) = 0,$$

$$\Delta_1 = \frac{P r_1^2}{E I} \left\{ F \cos \varphi + G \sin \varphi + \frac{\varphi \sin \varphi}{2} - \cos \alpha_1 \right\},$$

les constantes F et G étant déterminées en écrivant que pour $\varphi = \alpha_2$, on a $\frac{d\Delta_2}{d\varphi} = \frac{d\Delta_1}{d\varphi}$ et $r_2 \Delta_2 = r_1 \Delta_1$.

On peut ainsi suivre de proche en proche la déformation des lames et par suite la variation éprouvée par la flèche, c'est-à-dire la hauteur dont chaque extrémité de la première lame s'est abaissée.

Henry Résal a tiré de ces équations des formules pratiquement utilisables dans l'hypothèse (généralement vérifiée) où les différences angulaires $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_2 - \alpha_3$ sont assez petites pour qu'on puisse en négliger la seconde puissance.

Nous nous bornerons à ces indications sur le procédé de calcul, le nombre des lames étant d'ailleurs toujours supérieur à 3.

Les ressorts s'établissent en solide d'égal résistance de la manière suivante.

La plus grande tension dans la partie de la lame L_1 en saillie sur L_2 a lieu au dessus de l'extrémité de L_2 et vaut :

$$\frac{P r_1 e (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)}{2 I_2}$$

la plus grande tension dans la partie de L_2 en saillie sur L_3 a lieu au dessus de l'extrémité de L_3 et vaut :

$$\frac{P r_2 e (\cos \alpha_3 - \cos \alpha_2)}{2 I_2}$$

enfin la plus grande tension dans L_3 a lieu sur l'appui et vaut :

$$\frac{P r_3 e (\cos \alpha_3)}{2 I_3}$$

On choisit les amplitudes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ par la condition que ces diverses tensions limites soient égales à R_0 :

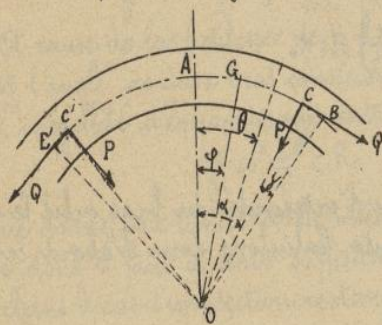
$$\cos \alpha_1 = \frac{2 R_0 I_2}{P r_1 e} ; \cos \alpha_2 = \frac{2 R_0 I_2}{P r_2 e} = \frac{2 R_0 I}{P r_1 e} , \cos \alpha_3 = \frac{2 R_0 I_3}{P r_3 e} = \frac{2 R_0 I_2}{P r_2 e}$$

9. Jante de volant. - Soit r_0 le rayon moyen de la jante d'un volant animé d'une vitesse à peu près constante ω ; soif A l'aire de la section de la jante et I le moment d'inertie de cette aire par rapport à la perpendiculaire au plan de la figure passant

par son centre de gravité.

Considérons la partie du volant comprise entre deux bras consécutifs, d'axes OB et OB' , de naissances C et C' . Si l'on faisait une section méridienne du volant au point C , l'action de la partie extérieure équivaudrait à une réaction radiale P , une réaction tangentielle Q et un couple de moment μ .

Pour une section analogue faite au point G d'azimuth φ par rapport à la bissectrice de l'angle COC' , on obtiendrait des éléments de réduction analogues, N et M . Si l'on appelle θ l'angle polaire d'une section comprise entre C et G , et ω le poids spécifique de la matière du volant ; on a :



$$N = Q \cos(\alpha - \varphi) - P \sin(\alpha - \varphi) - \frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^2 \int_{\varphi}^{\alpha} \sin(\theta - \varphi) d\theta$$

ou :

$$N = \left(Q - \frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^2 \right) \cos(\alpha - \varphi) - P \sin(\alpha - \varphi) + \frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^2 \int_{\varphi}^{\alpha} \sin(\theta - \varphi) d\theta$$

$$M = Q r_0 [1 - \cos(\alpha - \varphi)] + P r_0 \sin(\alpha - \varphi) - \frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^3 \int_{\varphi}^{\alpha} \sin(\theta - \varphi) d\theta + \mu,$$

ou :

$$M = - \left(Q - \frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^2 \right) r_0 \cos(\alpha - \varphi) + P r_0 \sin(\alpha - \varphi) + k,$$

$$\text{en posant : } k = \mu + Q r_0 + \frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^3 \int_{\varphi}^{\alpha} \sin(\theta - \varphi) d\theta.$$

On observera que la valeur de M ici calculée est égale et de signe contraire à celle qui figure dans l'équation d'Euler (éq. XI' du Chap. X), qui s'écrira donc ici :

$$E I \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_0} \right) = M.$$

Formons la condition d'équarrissage. La tension :

$$\frac{M e}{I} + \frac{N}{\alpha} = \frac{k e}{I} + \frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^2 + \left(\frac{r_0 e}{I} - \frac{1}{\alpha} \right) \left[P \sin(\alpha - \varphi) - \left(Q - \frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^2 \right) \cos(\alpha - \varphi) \right]$$

où e représente la demi-épaisseur de la jante, atteindra sa plus grande valeur en même temps que l'expression mise entre parenthèses carrées, car $\frac{r_0 e}{I} - \frac{1}{\alpha}$ est positif avec les proportions habituelles. Cette expression s'écrit :

$$\left\{ P \sin \alpha - \left(Q - \frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^2 \right) \cos \alpha \right\} \cos \varphi - \left\{ P \cos \alpha + \left(Q - \frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^2 \right) \sin \alpha \right\} \sin \varphi.$$

Mais si nous exprimons que le tronçon CC' est en équilibre sous l'action des forces centrifuges et des forces élastiques développées dans les sections C et C' , sections pour lesquelles par raison de symétrie les éléments de réduction ont la même valeur absolue, nous aurons l'équation de projection relative à la bissectrice OA :

$$2 P \cos \alpha + 2 Q \sin \alpha - \frac{2 \omega \Omega}{g} \int_0^{\alpha} \omega^2 r_0 \cos \varphi \cdot r_0 d\varphi = 0,$$

ou

$$P \cos \alpha + \left(Q - \frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^2 \right) \sin \alpha = 0.$$

Le second terme de la précédente expression disparaît, et la plus grande valeur de la tension sera atteinte pour $\cos \varphi = 1$ ou $\varphi = 0$. La condition d'équarrissage de la jante s'écrira donc :

$$\frac{k e}{I} + \frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^2 + \left(\frac{r_0 e}{I} - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{P}{\sin \alpha} \leq R_0,$$

tandis que le moment fléchissant M prend la forme:

$$M = k + \frac{Pr_0}{\sin \alpha} \cos \varphi.$$

Il est aisé d'obtenir la valeur de k . En effet l'influence du bras sur l'anneau en C doit, à très peu près, produire l'effet d'un encastrement; de sorte que, après comme avant la déformation, OC et OA sont des normales qui font entre elles l'angle α . On a donc (Chap. I, formule XII):

$$\int_0^\alpha M r_0 d\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad kd + Pr_0 = 0.$$

L'équation d'équarrissage deviendra donc:

$$\frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^2 + \left\{ \frac{r_0^2}{I} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \right\} P \leq R_0.$$

et l'expression du moment fléchissant s'écrira:

$$M = Pr_0 \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right).$$

La détermination de P se fera en exprimant que l'extrémité du bras subit le même déplacement radial que la partie CB de la jante. Calculons donc d'abord ce déplacement. L'équation d'Euler équivalente à:

$$\frac{EI}{Pr_0^2} \left[\frac{d^2 \Delta}{d\varphi^2} + \Delta \right] = \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

(voir Appendice, N° 7) et donne:

$$\frac{EI}{Pr_0^2} \sin \alpha \Delta = -\frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{\varphi \sin \varphi}{2} + A \sin \varphi + B \cos \varphi.$$

Comme OA et OC sont deux normales après comme avant la déformation, $\frac{d\Delta}{d\varphi}$ doit s'annuler pour $\varphi = 0$ et pour $\varphi = \alpha$, ce qui donne:

$$A = 0, \quad B = \frac{1 + \alpha \cot \alpha}{2}.$$

L'allongement δ du bras est la valeur de $r_0 \Delta$ pour $\varphi = \alpha$; il est défini par:

$$\frac{EI}{Pr_0^3} \sin \alpha \delta = -\frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{\alpha \sin \alpha}{2} + \frac{(1 + \alpha \cot \alpha) \cos \alpha}{2},$$

et vaut:

$$\delta = \frac{Pr_0^3}{2EI \alpha \sin^2 \alpha} [\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha].$$

Si on néglige le rayon du moyeu vis-à-vis de r_0 , la longueur du bras sera sensiblement r_0 ; soit Ω , la section du bras; son poids sera $\omega \Omega r_0$ et l'on aura (voir Chap. IV, 96^b 3, in fine):

$$\delta = \frac{r_0}{E \Omega} \left(F + \frac{\omega \Omega r_0^2 \omega^2}{3g} \right),$$

F étant l'effort de traction exercé par l'anneau sur le bras. Cet effort F équilibre les deux forces $-P$ et les deux forces $-Q$ développées dans la section C et dans la section symétrique par rapport à OB , ainsi que la force centrifuge de la portion de l'anneau limitée par ces sections; on a donc, en désignant par γ l'angle COB qui est assez faible pour qu'on puisse négliger son carré:

$$F = 2 \left[P + Q \gamma + \frac{\omega}{g} \Omega^2 r_0^2 \gamma \right] = 2 \left[P (1 - \gamma \cot \alpha) + \frac{2}{3} \frac{\omega}{g} \Omega^2 r_0^2 \gamma \right].$$

En égalant les valeurs de δ , après avoir remplacé F par sa valeur, il vient

$$P \left\{ \frac{r_0^2}{HI} \cdot \frac{d^2 + d \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha}{d \sin^2 \alpha} - \frac{1}{r_1} (1 - \gamma \cot \alpha) \right\} = \frac{\omega r_0^2 \omega^2}{6g} \left(1 + 12 \gamma \frac{r_0}{r_1} \right).$$

Comme α est de 45° ou de 30° , $(1 - \gamma \cot \alpha) \frac{HI}{r_1 r_0^2}$ est tout à fait minimale, et l'on peut prendre

$$P = \frac{2}{3} \frac{\omega I \omega^2}{g} \left(1 + 12 \gamma \frac{r_0}{r_1} \right) \frac{d \sin^2 \alpha}{d^2 + d \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha}.$$

L'équation d'équarrissage prendra alors la forme :

$$\frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^2 \left\{ 1 + \frac{2}{3} \frac{[r_1 c (d - \sin \alpha) - I d \sin \alpha]}{r_1 r_0^2 (d^2 + d \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha)} \sin \alpha \left(1 + 12 \gamma \frac{r_0}{r_1} \right) \right\} \leq R_0.$$

A cause de la petitesse de γ , il sera loisible, dans cette inégalité, de supposer que $2d$ est l'angle de deux bras consécutifs du volant.

L'inégalité d'équarrissage entraîne à fortiori :

$$\frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^2 < R_0 \quad \text{ou} \quad \omega r_0 < \sqrt{\frac{g R_0}{\omega}},$$

ce qui donne une limite de la vitesse linéaire de l'anneau du volant ou vitesse à la jante dont il faut se tenir suffisamment éloigné.

Dans le cas d'une section rectangulaire de la jante, la condition d'équarrissage s'écrit :

$$\frac{\omega}{g} \omega^2 r_0^2 \left\{ 1 + \frac{e}{r_0} \left(m + n \frac{e}{r_0} \right) \left(1 + 12 \gamma \frac{r_0}{r_1} \right) \right\} \leq R_0,$$

en posant :

$$m = \frac{2}{3} \frac{(d - \sin \alpha) \sin \alpha}{d^2 + d \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha}, \quad n = -\frac{2}{3} \frac{d \sin^2 \alpha}{d^2 + d \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha}.$$

Pour un volant à quatre bras, on $\alpha = \frac{\pi}{4}$, et par suite, les valeurs de ces coefficients sont sensiblement :

$$m = 1,16 \quad \text{et} \quad n = -2,22.$$

La recherche de la condition de résistance des bras n'offre plus maintenant aucune difficulté.

Henry Résal a étudié l'influence que peut avoir, sur la résistance d'un volant, une variation plus ou moins rapide de la vitesse de rotation ; mais cette recherche excède les limites de notre programme.

Chapitre XX. - Bibliographie. -

Le but de ces leçons a été surtout de faire connaître les idées générales qui trouvent leur application dans l'Art de l'Ingénieur et de mettre à même de lire avec fruit les ouvrages spéciaux ; les indications bibliographiques suivantes pourront servir de guide parmi la multiplicité des livres de très inégale valeur que présente la librairie ; elles ne prétendent pas être complètes, mais elles présentent seulement des travaux de premier ordre.

I. Élasticité des corps solides. -

G. Lamé. - Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. -

- Editeur: Bachelier. 1852.
- Clebsch . - Théorie de l'Elasticité des corps solides; traduite par M. B. Barré de Saint Venant et Flamant; avec des notes étendues de M. de Saint Venant. Ed.: Dunod. 1881.
- E. Mathieu. - Théorie de l'Elasticité des corps solides. Tome I: Considérations générales sur l'élasticité. Emploi des coordonnées curvilignes. Problèmes relatifs à l'équilibre d'élasticité. Plaques vibrantes. - Tome II: Mouvements vibratoires des corps solides. Equilibre d'élasticité des lames courbes et du prisme rectangle. Ed.: Gauthier Villars. 1890.

II. Résistance des matériaux.-

- L. Navier. - Résumé des leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Première Partie; 1^{re} Section: De la Résistance des corps solides. - 3^e Edition avec des notes et des appendices par M. Barré de Saint Venant (850 pages) Ed.: Dunod, 1864.
- Cet ouvrage contient un historique étendu de la formation de la théorie de la résistance des matériaux. Il a inspiré la plupart des travaux ultérieurs.
- E. Bresse. - Cours de Mécanique appliquée professé à l'École des Ponts et Chaussées. Première Partie: Résistance des matériaux et stabilité des constructions. Ed. Gauthier Villars, 1866.
- E. Collignon. - Cours de Mécanique appliquée aux constructions professé à l'École des Ponts et Chaussées. - Tome I^{er}: Résistance des matériaux. Ed. Dunod. 3^e Edition, 1898.
- A. Moadamet. - Résistance des Matériaux. Cours professé à l'École d'application du Génie Maritime. Ed.: Bernard et C^{ie}, 1891.
- A. Flamant. - Stabilité des Constructions et Résistance des Matériaux. - Cours professé à l'École des Ponts et Chaussées. Ed.: Paudry et C^{ie}. 2^e Edition, 1897.
- G. Lemay. - Cours de Résistance des Matériaux professé à l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie de Belgique. - Ed.: Gauthier Villars, 1895.
- Cet ouvrage tout à fait remarquable au point de vue didactique, rattache très étroitement les théories de la Résistance des corps solides à la théorie mathématique de l'Elasticité en suivant les appendices II et III du livre de Navier et Barré de Saint Venant. On s'en est inspiré dans les présentes leçons.
- A. Föppl. - Résistance des Matériaux et éléments de la théorie mathématique de l'Elasticité. Traduit par E. Kohn. Ed.: Gauthier Villars: 1901.
- Contient de nombreux exemples numériques.
- A. Castigliano. - Théorie de l'Equilibre des systèmes élastiques et de ses applications (Charpentes en fer). - Eurin, 1881.

H. Résal - Ecrité de Mécanique-générale comprenant les leçons professées à l'École Polytechnique et à l'École des Mines. - Tome V: Résistance des Matériaux. Constructions en bois; Tome VI: Planchers et combles en fer. Ponts. - Ed.: Gauthier Villars, 1880-1881.

Jean Résal - Cours de l'École des Ponts et Chaussées. - Résistance des Matériaux, 1898. Stabilité des Constructions, 1903. - Ed.: Baudry et C^{ie}.

Duquesnoy - Résistance des Matériaux (Encyclopédie des aide-mémoire Léauté). Ed.: Gauthier Villars, 1894.
Excellent memento.

Chéry, Petit, Lerosey, Espitahier, Delalande. } Il est regrettable que les cours professés à l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie de Fontainebleau, par les Commandants Chéry, Petit, Lerosey, Espitahier, Delalande ne soient ni dans le commerce, ni dans les bibliothèques publiques. - On s'en est inspiré pour l'exposé de quelques questions.

III. Procédés graphiques.

Maurice Lévy - La Statique graphique et ses applications aux constructions. 2^e Edition.

1^{re} Partie: Principes et applications de la Statique graphique pure.

2^e Partie: Flexion plane. - Lignes d'influence. - Ponts droits.

3^e Partie: Arcs métalliques. - Ponts suspendus rigides. Coupées et arcs de révolution.

4^e Partie: Ouvrages en maçonnerie. - Systèmes réticulaires à lignes surabondantes.

Ed.: Gauthier Villars. 1886-1888.

E. Pouché - Éléments de Statique Graphique (Polygones et courbes funiculaires. Ligne élastique. Centres de gravité et moments d'inertie. Poutre droite sur deux appuis. Forces intérieures dans les systèmes articulés. Poutre continue). Ed.: Baudry et C^{ie}, 1889.

E. Leyrig - Statique graphique des systèmes triangulés. Tome I: Exposé théorique; Tome II: Exemples d'application. (Encyclopédie des aide-mémoire Léauté) Ed.: Gauthier Villars. 1896.

M. Hoeklin - Applications de la Statique Graphique. Ed.: Baudry et C^{ie}, 1889.

IV. Applications.

J. Pillet - Ecrité de Stabilité des Constructions (Leçons professées au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Spéciale d'Architecture). Ed.: Baudry et C^{ie}, 1895.

Cet ouvrage, d'une très riche documentation, contient de nombreuses applications usuelles. Il est particulièrement recommandé aux praticiens.

J. Résal - Ponts métalliques. - Tome I: Calcul des pièces prismatiques, renseignements

pratiques, formules nouvelles, poutres droites à travées indépendantes,¹⁹⁶
ponts suspendus, ponts en arcs. - Tome II : Poutres à travées solidaires;
théorie générale des poutres à section constante; calcul des poutres symé-
triques; poutres continues à section variable; théorie générale des poutres
de hauteur variable; calcul des systèmes articulés; piles métalliques; ta-
bles numériques. - Ed. : Baudry et C^{ie}, 1893.

J. Planat. - Pratique de la Mécanique appliquée à la résistance des matériaux.
2^e Edition. 3 vol. - Edité par la "Construction Moderne", 1903.

Cet ouvrage contient de très nombreux problèmes complètement trai-
tés; il est excellent pour apprendre à bien juger de l'importance rela-
tive des divers éléments qui interviennent dans une question.

Troisième Partie.

Hydraulique.

Chapitre I. Généralités; théorème de Bernoulli.

1. Objet de l'hydraulique. — L'hydrodynamique étudiée dans le cours de Mécanique Rationnelle conduit à des équations trop compliquées pour permettre de résoudre la plupart des problèmes de la Mécanique industrielle; de plus elle suppose aux fluides une absence de viscosité qui n'existe jamais dans la nature. Aussi les nécessités de la pratique ont-elles conduit à constituer une science d'application, dans laquelle, prenant pour point de départ quelques uns des résultats fournis par l'hydrodynamique et faisant appel en outre à quelques hypothèses auxiliaires, on cherche à se rendre compte sommairement de l'allure générale des phénomènes. Aux équations exactes du mouvement, on substitue de la sorte des équations approchées, contenant des coefficients déterminés empiriquement. Ce corps de doctrine mixte, qui se limite d'ailleurs aux lois relatives au mouvement des fluides pesants, se nomme l'hydraulique.

2. Rappel des équations de l'hydrodynamique. — Les fluides parfaits sont caractérisés par cette propriété que la tension intérieure sur un élément plan quelconque est normale à cet élément. — Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à un élément plan de centre (x, y, z) , p la valeur de la tension sur cet élément; les composantes de cette tension suivant les axes sont $X = -p\alpha, Y = -p\beta, Z = -p\gamma$. Or, dans un milieu continu quelconque, ces composantes sont des fonctions linéaires de α, β, γ : $X = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma$, -----, ----- [2^e Partie, Ch. III, § A, N^o 2, éq. (3)]. Donc p ne dépend que des coordonnées x, y, z et l'on a: $N_1 = N_2 = N_3 = -p$; $T_1 = T_2 = T_3 = 0$.

La fonction p de (x, y, z) est dite la pression au point (x, y, z) .

Nous avons vu comment les fonctions (N, T) sont liées aux forces extérieures sollicitant les éléments de volume du milieu par les équations [2^e Partie, Ch. III, § A, N^o 5, éq. (3)]:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \rho X_0 = 0, \text{ -----, -----}$$

X_0, Y_0, Z_0 étant les projections de la résultante des forces extérieures, rapportées à l'unité de masse, au point (x, y, z) , les forces d'inertie étant comprises parmi ces forces extérieures. Soient u, v, w les composantes de la vitesse de la molécule du fluide passant à l'instant t au point x, y, z ; les composantes de l'inertie rapportée à l'unité de masse seront $u' = \frac{du}{dt}, v' = \frac{dv}{dt}, w' = \frac{dw}{dt}$; si l'on désigne alors par X, Y, Z , les projections de la résultante des forces extérieures au point x, y, z , inertie exclue, les équations

ci-dessus donneront :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho (X_1 - u'), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho (Y_1 - v'), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho (Z_1 - w'). \quad (1)$$

Si l'on remarque que u, v, w sont des fonctions de x, y, z et de t , et que pour une molécule se déplaçant sur une trajectoire, on a : $dx = u dt, \dots$, on obtient :

$$u' = \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

et ces relations permettraient d'expliciter les équations (1).

Nous ne considérerons que des fluides homogènes et incompressibles. La quantité ρ est alors une constante, et la dilatation cubique en tout point est nulle. Comme le déplacement élémentaire de la molécule considérée à partir de la position (x, y, z) a pour projections $U = u dt, \dots$ et que $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$, on a la relation :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

qui est dite l'équation de continuité.

Les quatre équations (1) et (3) sont des équations aux dérivées partielles en u, v, w, p , qui serviraient à déterminer ces quatre quantités. Mais l'intégration de ces équations est impossible en général, et il faut se résigner à n'opérer que sur des cas particuliers dont les données spéciales rendent l'intégration possible. Ce n'est qu'à ce point qu'on peut arriver, quant à présent, à quelques résultats assez simples pour être transportés dans la pratique.

Suivons une molécule dans son mouvement ; son déplacement pendant le temps dt a pour composantes $dx = u dt, dy = v dt, dz = w dt$. Multiplions les équations (1) respectivement par ces composantes et ajoutons-les. Il vient :

$$dp - \frac{\partial p}{\partial t} dt = \rho (X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz) - \rho (uu' + vv' + ww') dt.$$

Soit V la vitesse de la molécule ; on a : $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$, et $\frac{1}{2} dV^2 = (uu' + vv' + ww') dt$; l'équation précédente devient donc :

$$\frac{1}{\rho} [dp - \frac{\partial p}{\partial t} dt] = X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz - \frac{1}{2} dV^2.$$

Désignons par le symbole δ une différentielle totale en x, y, z , abstraction faite de t ; la relation obtenue s'écrira :

$$\frac{\delta p}{\rho} = X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz - V \frac{\partial V}{\partial t} dt - \frac{1}{2} \delta V^2. \quad (4)$$

Lorsque le fluide est uniquement soumis à la pesanteur, en dirigeant l'axe oz suivant la verticale descendante, on aura : $X_1 = Y_1 = 0, Z_1 = g$; comme $V dt$ n'est autre que le chemin ds parcouru par la molécule durant le temps dt , on aura :

$$\frac{\delta p}{\rho} = ds - \frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{1}{2} \delta V^2 \right\}, \quad (5)$$

en posant d'ailleurs $\omega = \rho g$.

Les relations (4), ou (5) jouent en Hydraulique le rôle de l'équation des forces vives en Mécanique Générale.

Nous tirerons encore des équations (1) quelques conséquences qui nous seront très utiles. 199.

(a) Quand tous les points d'un fluide ont un mouvement rectiligne et uniforme, la pression vérifie à chaque instant, dans toute la masse fluide, les équations de l'hydrostatique.

En effet, l'accélération de chaque molécule étant constamment nulle, on a: $u'=v'=w'=0$; comme X, Y, Z , sont supposées indépendantes du temps, les équations (1) se réduisent à celles de l'hydrostatique. La pression p se trouve indépendant du temps, et l'on a:

$$p = \rho \int (X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz).$$

Dans le cas d'un fluide pesant, on aura:

$$p = \rho g z + \text{const.} = \omega z + \text{const.}$$

(b) Dans un fluide animé de mouvements très lents, la pression varie approximativement, à chaque instant, suivant la loi hydrostatique.

On peut en effet alors regarder u', v', w' comme négligeables.

(c) Quand chaque élément d'un fluide se meut comme un point libre soumis à la force (mX_1, mY_1, mZ_1) , la pression est constante (à un instant t) dans toute la masse du fluide.

Autrement dit, p est une simple fonction du temps t . Si notamment le fluide est en contact en un point avec un autre fluide à pression constante, p est une constante absolue. Cela résulte des équations (1); si on y fait $u'=X_1, v'=Y_1, w'=Z_1$, il vient: $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$.

(d) Quand il existe une section plane traversée normalement par toutes les trajectoires, et que celles-ci sont sensiblement rectilignes au voisinage de la section, la pression (à un instant t) varie suivant la loi hydrostatique dans toute l'étendue de la section.

En effet, prenons le plan de la section pour plan xoy ; les trajectoires étant sensiblement parallèles à oz , les accélérations n'ont pas de composantes normales à oz ; u' et v' sont nuls, et l'on a, en tout point de la section, à chaque instant t :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X_1, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y_1.$$

Or ces équations sont celles qui définissent la répartition hydrostatique des pressions dans le plan $z=0$.

3. Mouvement varié d'une veine fluide. — l'équation (4) ou (5) ne s'applique rigoureusement qu'au mouvement d'une molécule d'un fluide parfait sur sa trajectoire. On l'étend au mouvement d'une veine fluide par approximation.

Soit M_0 une position d'une molécule sur sa trajectoire S à l'instant t_0 ; menons par M_0 un plan normal à S et soit w_0 une aire de très petites dimensions tracée dans ce plan et comprenant M_0 à son intérieur. Par chaque point de w_0 passe à l'ins-

tant t_0 une molécule du fluide. Suivons ces molécules dans leur mouvement à partir de l'instant t_0 . Leur ensemble engendre une veine du fluide. Si la section ω_0 est assez petite pour que toutes les molécules passant à l'instant t_0 par cette section aient sensiblement des vitesses équipollentes, on admet que l'équation (4) ou (5) s'applique à toutes les trajectoires du faisceau considéré.

On dit que, dans une telle veine, le mouvement a lieu par tranches lorsque les trajectoires du faisceau, sensiblement parallèles, rencontrent orthogonalement, avec des vitesses équipollentes, toute section normale à la trajectoire centrale S . Toute telle section ω est dite une tranche, et pour tous les points d'une tranche, la pression et la vitesse sont les mêmes, reliées entre elles par la relation (4) ou (5).

Une veine fluide est dite persistante lorsque, l'aire ω_0 étant fixée, cette aire est constamment traversée par des molécules fluides, orthogonalement, mais avec des vitesses variables avec le temps, la trajectoire centrale restant la même.

On peut concevoir une veine persistante comme isolée dans un tuyau à axe invariable, à section variant d'un point à un autre et avec le temps, et à paroi parfaitement polie, de manière que les réactions du tuyau soient normales à chaque instant aux vitesses des molécules; ces réactions n'ont pas alors à intervenir dans l'équation (4).

Pour une veine persistante, l'équation de continuité prend une forme très simple qu'on peut établir directement. Soit, à l'instant t , ω l'aire d'une section transversale, v la vitesse commune de toutes les molécules qui la traversent et $q = V\omega$ le débit de la veine à travers cette section par unité de temps, à cet instant. Considérons dans la veine la section voisine distante de ds , s étant l'abscisse curviligne des points de S à partir de M_0 . Pendant le temps infiniment court dt consécutif à l'instant t , il entre par la première section un volume $q dt$ de fluide, tandis qu'il en sort par l'autre $(q + \frac{\partial q}{\partial s} ds) dt$. Le volume compris entre ces deux tranches a donc varié de $-\frac{\partial q}{\partial s} ds dt$. Mais d'autre part ce volume qui était initialement ωds est devenu $(\omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} dt) ds$, subissant une variation $\frac{\partial \omega}{\partial t} dt ds$. En égalant ces deux valeurs de la même variation, on obtient l'équation:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0, \quad (6)$$

qui est la forme annoncée de l'équation de continuité.

Si ω est indépendante du temps (veine de forme invariable), cette équation se réduit à $\frac{\partial q}{\partial s} = 0$ ou:

$$\omega V = \text{Const.} \quad (7)$$

Le long d'une veine persistante d'axe donné x, y, z sont des fonctions données de l'abscisse curviligne s d'un point de S , en sorte que l'équation (5) peut s'écrire:

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{dz}{ds} - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} \right), \quad (8)$$

v et V étant des fonctions du temps t et de l'abscisse s .

Cette même équation peut être intégrée dans le cas d'une veine de forme invariable.

201.

Soient $A_0 B_0 = \omega_0$ et $A_1 B_1 = \omega_1$ les deux sections extrêmes de la veine que l'on considère, $AB = \omega$ une section intermédiaire; V_0, V_1, V et p_0, p_1, p les vitesses et pressions correspondantes, s_0, s_1, s et z_0, z_1, z les abscisses curvilignes et les côtes des centres de ces sections.

On a:

$$\omega_0 V_0 = \omega_1 V_1 = \omega V,$$

et $\omega_0, \omega_1, \omega$ ne dépendent pas de t . Écrivons de là V en fonction de V_1 , et substituons dans (8) l'expression obtenue. Il vient:

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dz}{ds} - \frac{1}{g} \omega_1 \frac{dV_1}{dt} \frac{ds}{\omega} - \frac{1}{2g} \omega_1^2 V_1^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\omega^2} \right).$$

Intégrons, à un instant t , cette relation, entre s_0 (qui est nul) et s , puis entre s_0 et s_1 . Nous aurons:

$$\frac{p-p_0}{\omega} = (z-z_0) - \frac{\omega_1}{g} \frac{dV_1}{dt} \int_{s_0}^s \frac{ds}{\omega} - \frac{\omega_1^2 V_1^2}{2g} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \right);$$

$$\frac{p_1-p_0}{\omega} = (z_1-z_0) - \frac{\omega_1}{g} \frac{dV_1}{dt} \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\omega} - \frac{\omega_1^2 V_1^2}{2g} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \right) \quad (9)$$

Faisons pour abréger:

$$\int_{s_0}^s \frac{ds}{\omega} = A, \quad \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\omega} = A_1, \quad z-z_0 = h, \quad z_1-z_0 = h_1.$$

L'élimination de $\frac{dV_1}{dt}$ entre les deux relations précédentes donne:

$$p = p_0 + (p_1 - p_0) \frac{A}{A_1} + \omega \left(h - h_1 \frac{A}{A_1} \right) - \frac{\omega \omega_1^2 V_1^2}{2g} \left[\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \right) - \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \right) \frac{A}{A_1} \right] \quad (10)$$

Si la forme de la veine est connue, ω est exprimable en fonction de s et par suite une simple intégration donnera A et A_1 .

L'équation (10) fera donc connaître la pression p en fonction de s et de t dès que V_1 sera connue en fonction de t .

Observons d'ailleurs que l'établissement des équations (9) et (10) ne suppose pas la fixité de la section $A_0 B_0$; si cette section est variable et suit la molécule M_0 , il faut la repérer à un point fixe α de s et son abscisse curviligne s_0 ne sera plus nulle.

La détermination de V_1 peut se faire expérimentalement ou analytiquement. Au dernier point de vue, on utilisera l'équation (9) et la relation:

$$\omega_0 \frac{ds_0}{dt} = \omega_1 V_1,$$

regardées comme équations différentielles du premier ordre en s_0 et V_1 .

Ce procédé, qui convient pour étudier en général le mouvement d'une veine d'eau, sera précisé par une double application.

Imaginons qu'au fond horizontal d'un réservoir rempli d'eau et dont le niveau est supposé maintenu constant, on ait sorti un tube à section lentement variable. Le tube étant rempli comme le réservoir, après avoir bouché l'extrémité libre du tube, on ouvre cet orifice de sortie. V_1 sera nulle à l'instant initial, si l'on prend pour A, B , l'orifice de sortie.

Preons d'autre part pour A, B , une section voisine du raccordement du tube et du vase; comme elle est traversée normalement, p_0 sera donné par la loi hydrostatique

(N° 2, d), et sera par suite constante, le niveau du réservoir étant maintenu invariable et la pression extérieure étant supposée constante. p_1 est également constante (N° 2, c), d'après l'étude expérimentale de la veine à partir de sa sortie du tuyau. Enfin ω_0 et ω restent invariables, et $A_0 B_0$ est fixe.

Il suffit alors pour déterminer la vitesse V_1 , de recourir à l'équation (9) :

$$\frac{p_1 - p_0}{\omega} = h_1 - \frac{\omega_1 A_1}{g} \frac{dV_1}{dt} - \frac{V_1^2}{2g} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right).$$

Posons :
$$h \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right) = A_1 \omega_1, \quad W^2 \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right) = 2g \left[h_1 + \frac{p_0 - p_1}{\omega}\right]$$

Il vient :
$$2k \frac{dV_1}{dt} + V_1^2 = W^2,$$

On déduit de là :

$$\frac{1}{k} dt = \frac{2dV_1}{W^2 - V_1^2}, \quad \text{et} \quad \frac{Wt}{k} = \text{Log.} \frac{W + V_1}{W - V_1},$$

sans constante additive, puisque $V_1 = 0$ pour $t = 0$. On a ensuite successivement

$$\frac{W + V_1}{W - V_1} = e^{\frac{Wt}{k}} \quad \text{et} \quad V_1 = W \frac{1 - e^{-\frac{Wt}{k}}}{1 + e^{-\frac{Wt}{k}}}$$

La valeur de la pression dans une tranche quelconque est alors fournie par l'équation (10), et celle de la vitesse par la relation :

$$V = \frac{\omega_1}{\omega} V_1.$$

L'exponentielle $e^{-\frac{Wt}{k}}$ décroît très rapidement, quand t croît, de sorte qu'au bout d'un temps très court, elle devient négligeable, et V_1 se réduit sensiblement à :

$$W = \sqrt{\frac{2g \left[h_1 + \frac{p_0 - p_1}{\omega}\right]}{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}}}. \quad (11)$$

La valeur de p dans une section tendra alors, $\frac{dV_1}{dt}$ devenant négligeable, vers

$$p = p_0 + \omega h - \frac{\omega W^2}{2g} \left[\frac{\omega_1^2}{\omega^2} - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right].$$

p et V ne dépendent plus alors du temps. Ces conditions caractérisent un état spécial du mouvement qu'on appelle permanent et sur lequel on reviendra longuement.

Pour procéder à l'intégration, nous avons supposé implicitement l'expression de W^2 positive, et comme son numérateur est positif dans les conditions indiquées (la pression atmosphérique s'exerçant la même sur la surface libre du réservoir et sur la veine sortant du tuyau), cela revient à admettre que $1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}$ est positif, c'est-à-dire que l'orifice de sortie soit plus petit que l'orifice d'entrée. S'il en était autrement, on remplacerait W^2 par $-W^2$, on serait conduit à reconnaître que la vitesse tendrait vers l'infini avec le temps : le mouvement ne saurait devenir permanent.

Si enfin on avait un tuyau à section constante, $\omega_0 = \omega_1 = \omega$, on aurait, en posant

$$s - s_0 = \lambda, \quad s_1 - s_0 = \lambda_1,$$

$$A_1 = \frac{\lambda_1}{\omega_1} \quad \text{et} \quad p_1 - p_0 = \omega h_1 - \frac{\omega}{g} \lambda_1 \frac{dV_1}{dt}$$

V_1 croît alors proportionnellement au temps, et l'expression de p est une fonction linéaire de s (ou de λ) :

$$p = p_0 + (p_1 - p_0) \frac{\lambda}{\lambda_1} + \omega(h - h_1) \frac{\lambda}{\lambda_1}.$$

Comme seconde application, supposons que le tube seul rempli se vide dans les mêmes conditions; bornons-nous au cas où l'axe du tube est vertical et où la section libre A₀B₀ (où s'exerce la pression atmosphérique constante p₀), variable avec le temps, se déplace dans une région du tube où les variations de diamètre soient négligeables.

Les λ se confondent avec les h ; on a:

$$s_0 = s_1 - h_1, \quad V_0 = \frac{ds_0}{dt} = -\frac{dh_1}{dt}, \quad \text{et} \quad \omega_1 V_1 = -\omega_0 \frac{dh_1}{dt}$$

Par suite:

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_1}{dh_1} \frac{dh_1}{dt} = -\frac{\omega_1}{2\omega_0} \frac{dV_1^2}{dh_1}.$$

D'autre part A₁ est variable, mais en regard à la lente variation de ω , nous pouvons prendre sensiblement A₁ = $\frac{h_1}{\omega_0}$, ω_0 étant constant.

L'équation (9) s'écrit alors:

$$\frac{p_1 - p_0}{\omega} = h_1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \frac{h_1}{2g} \frac{dV_1^2}{dh_1} - \frac{V_1^2}{2g} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right).$$

V₁², considéré comme fonction de la hauteur h₁ de la colonne, se trouve défini par une équation différentielle linéaire.

Comme p₁ n'est autre que la pression atmosphérique (ainsi que p₀), cette équation s'écrit:

$$\frac{dV_1^2}{dh_1} - \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) \frac{1}{h_1} V_1^2 - 2g \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} = 0.$$

L'intégration donne

$$V_1^2 = 2g h_1 + C h_1 \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right).$$

La constante C se détermine par la condition que V₁² soit nul initialement pour h₁ = h₀; par suite:

$$V_1^2 = 2g h_1 \left\{1 - \left(\frac{h_0}{h_1}\right) \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right\}.$$

La durée d'abaissement (h₀ - h₁) du niveau serait alors:

$$t = -\frac{\omega_0}{\omega_1} \int_{h_1}^{h_0} \frac{dh_1}{V_1} = \int_{h_1}^{h_0} \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} dh_1}{\sqrt{2g h_1 \left\{1 - \left(\frac{h_0}{h_1}\right) \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right\}}}$$

On ne saurait prétendre à déduire de là le temps nécessaire à vider le tube en prenant zéro comme limite inférieure de l'intégrale; h₁ ne peut, pour la validité des calculs précédents, descendre au dessous d'une certaine limite; par suite d'un entonnoir qui se forme dans la région de l'orifice de sortie, le mouvement n'a plus lieu par tranches.

H. Mouvement permanent d'un liquide pesant. — Théorème de D.

Bernoulli. — Le mouvement d'un fluide est permanent si, en chaque point géométrique déterminé de l'espace occupé par le fluide, la pression et la vitesse du fluide restent invariables (cette dernière en grandeur, direction et sens). — Analytiquement, cela signifie que les fonctions p, u, v, w de x, y, z, t sont indépendantes de t.

Par un point déterminé de l'espace passe alors une trajectoire parcourue par une

suite continue de molécules qui constitue un filet.

Dans le mouvement permanent, les différentielles totales d se confondent avec les différentielles δ . Par suite l'équation (5) donnera, tout le long d'un filet :

$$\frac{dp}{\omega} = dz - \frac{1}{2g} dV^2.$$

Cette relation est immédiatement intégrable ; elle donne :

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\omega} + \mathcal{G} = \text{Const.}, \quad (13)$$

en désignant par \mathcal{G} la distance du point considéré à un plan horizontal fixe situé au dessous du fluide [$\mathcal{G} = H - z$, H étant suffisamment grand pour que \mathcal{G} soit positif pour tous les points à considérer].

La quantité $\frac{V^2}{2g}$ est la hauteur dont il faut laisser tomber sans vitesse l'élément fluide en chute libre pour qu'il acquière la vitesse V ; on lui donne le nom de hauteur due à la vitesse V .

La quantité $\frac{p}{\omega}$ représente la hauteur de la colonne du liquide (en équilibre sous l'action de la pesanteur) qui exerce sur sa base la pression p ; on lui donne le nom de hauteur du liquide qui représente la pression p .

La relation (13) peut s'énoncer ainsi :

Dans un fluide incompressible homogène et pesant animé d'un mouvement permanent, si on considère en chaque point du fluide la hauteur au dessus d'un certain plan horizontal fixe, la hauteur due à la vitesse et la hauteur représentative de la pression, la somme de ces trois hauteurs est constante tout le long de la même trajectoire (ou du même filet liquide).

C'est dans cette propriété d'invariance que consiste le théorème de Daniel Bernoulli [Hydrodynamica, Section XII ; 173H].

Elle peut d'ailleurs recevoir une forme géométrique très simple.

En tout point M du fluide, portons sur la verticale ascendante issue de M une longueur MP égale à la somme des deux hauteurs $\frac{V^2}{2g}$ et $\frac{p}{\omega}$. Quand M varie le long du même filet, l'extrémité P du segment MP reste dans un plan horizontal qu'on appelle le plan de charge relatif à ce filet.

La quantité $\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\omega}$ se nomme la charge.

Pour une position de M et une pression donnée, le plan de charge est d'autant plus élevé que V est plus grand.

5. Extensions du théorème de Bernoulli. — Le théorème établi pour un filet s'étend à une veine à régime permanent, dans les limites où il est loisible d'admettre que le mouvement a lieu par tranches. On l'étend même à tout courant liquide dans lequel les filets sont rectilignes et parallèles (mouvement permanent dans les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts). Mais alors, la vitesse variant en grandeur d'un filet à un autre, on introduit la vitesse moyenne du courant.

Soient ω et ω_0 deux sections finies ; $d\omega$ et $d\omega_0$ leurs éléments infiniment petits correspondant à un même filet ; V et V_0 les vitesses à la traversée de ces éléments ; U et U_0 les vitesses

moyennes des sections w et w_0 ; si Q est le débit, on a par définition :

$$Q = U w = \int V dw = U_0 w_0 = \int V_0 dw_0.$$

Preons alors l'équation :

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} + \frac{p - p_0}{\omega} + \zeta - \zeta_0 = 0.$$

À cause du parallélisme des filets, $\zeta - \zeta_0$ reste constant pour tous les filets; pour la même raison et à cause de l'orthogonalité des vitesses sur les sections (N° 2, d), il en est de même pour $p - p_0$. Ces différences s'estimeront pour tel filet particulier qu'on voudra.

Multiplications les divers termes de cette égalité par $V dw$ ou $V_0 dw_0$, sommons pour la totalité des filets du courant, et divisons l'égalité obtenue par Q . Il vient :

$$\frac{1}{2gQ} \left[\int V^3 dw - \int V_0^3 dw_0 \right] + \frac{p - p_0}{\omega} + \zeta - \zeta_0 = 0.$$

Posons $V = U + v$; comme $\int V dw = U w$, il vient $\int v dw = 0$. Par suite :

$$\int V^3 dw = U^3 w + 3U \int v^2 dw + \int v^3 dw.$$

La petitesse de v permet de négliger le dernier terme et d'écrire :

$$\int V^3 dw = QU^2 \left(1 + \frac{3 \int v^2 dw}{U w} \right) = QU^2 (1 + 3\eta).$$

Avec cette notation, l'équation de Bernoulli s'écrira :

$$\frac{(1+3\eta)U^2}{2g} - \frac{(1+3\eta_0)U_0^2}{2g} + \frac{p - p_0}{\omega} + \zeta - \zeta_0 = 0.$$

La petite quantité η dépend exclusivement du mode de distribution des vitesses dans la section w . On peut dans certains cas en obtenir l'expression très approchée en fonction de l'exces, sur l'unité, du rapport de la vitesse maximum à la vitesse moyenne. Pour les canaux, dans les conditions les plus diverses, Bazin a trouvé $\eta = 0,013$ avec des parois lisses et $\eta = 0,041$ avec des parois extrêmement rugueuses. Dans l'ignorance où l'on est ordinairement de la valeur de ce rapport η , les praticiens prennent en moyenne, pour les conditions usuelles $\eta = 0,037$. Ils écrivent alors ainsi la dernière équation :

$$\alpha \frac{U^2 - U_0^2}{2g} + \frac{p - p_0}{\omega} + \zeta - \zeta_0 = 0,$$

avec $\alpha = 1 + 3\eta = 1,11$.

L'équation de Bernoulli peut être généralisée à un autre point de vue.

Nous avons supposé jusqu'ici qu'il s'agissait d'un fluide parfait. Dans les fluides naturels, la tension relative à un élément plan n'est pas normale à cet élément, elle est plus ou moins oblique sur la normale à l'élément; l'obliquité est faible quand les vitesses des éléments fluides sont faibles, et nulle quand ils sont au repos. C'est ce qu'on exprime en disant que les fluides réels sont visqueux. Pour ces fluides, les expressions des composantes (N, T) des tensions ne sont plus aussi simples. Dans le cas d'un courant rectiligne ayant la direction de l'axe des x , par exemple, on est conduit à prendre :

$$N_1 = N_2 = N_3 = -p, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}, \quad T_3 = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y},$$

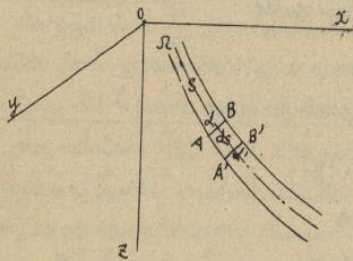
206.

p étant une fonction de x, y, z et ε une sorte de coefficient de frottement dépendant aussi de la position du point.

L'hydrodynamique des fluides naturels a été l'objet de travaux considérables dus à M. Boussinesq, et exposés pour la plus grande partie dans son "Essai sur la théorie des eaux courantes". La difficulté de ces recherches oblige à se borner ici à en signaler l'existence.

Nous nous contenterons de montrer comment, dans l'hydraulique usuelle, on essaie de mettre en compte les résistances dues aux actions tangentielles de viscosité ou aux frottements intérieurs produits par la rugosité des parois, et comment on généralise l'équation de Bernoulli. La marche que nous suivrons fournira d'ailleurs une démonstration directe du théorème de Bernoulli.

Considérons une portion infiniment petite, de longueur ds , d'une veine fluide; soit s sa



distance à un point fixe x pris sur l'axe de la veine, et ω sa section. Enumérons toutes les forces qui sollicitent cet élément et écrivons l'équation de projection, sur l'axe $\alpha\alpha'$ de l'élément, satisfaite pour l'équilibre dynamique de l'élément.

Le poids de l'élément est $\omega \omega ds$, et sa projection sur l'axe de l'élément est $\omega \omega ds \frac{dz}{ds}$. Si p est la pression

unitaire sur la face AB, la pression exercée sur l'autre face sera $-(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds)$. La différence des pressions totales sur ces faces, suivant $\alpha\beta$, est donc $-\omega \frac{\partial p}{\partial s} ds$. La masse de l'élément étant $\frac{\omega}{g} \omega ds$, sa force d'inertie sera $\frac{\omega}{g} \omega ds \frac{dV}{dt}$, ou $\frac{\omega}{g} \omega ds (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt})$, ou enfin $\frac{\omega}{g} \omega ds x$.

Enfin l'élément peut être soumis à des forces résistantes provenant soit de la viscosité, (résistance au glissement d'une couche fluide sur une autre), soit des actions des parois.

Sans entrer pour le moment dans le détail de la nature de ces résistances, nous appellerons ϕ leur résultante rapportée à l'unité de masse, et φ l'angle de sa direction avec l'axe de l'élément. La composante de la force exercée de ce fait sur l'élément, sera, suivant l'axe $\alpha\alpha'$: $\frac{\omega}{g} \omega ds \phi \cos \varphi$.

L'équation annoncée s'écrit alors, après suppression du facteur $\frac{\omega}{g} \omega ds$:

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V^2}{\partial s} \right) = \frac{dz}{ds} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{1}{g} \phi \cos \varphi.$$

Dans le mouvement permanent, $\frac{\partial V}{\partial t}$ est nul et p ne dépend que de s . La relation précédente, intégrée entre les deux positions s_0 et s de l'élément sur la veine; donne:

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} = z - z_0 + \frac{p_0 - p}{\omega} - \frac{1}{g} \int_{s_0}^s \phi \cos \varphi ds,$$

ou encore avec les notations précédentes:

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} + \frac{p - p_0}{\omega} + \zeta - \zeta_0 = \frac{1}{g} \int_{s_0}^s \phi \cos \varphi ds.$$

C'est l'équation que nous voulions établir. — La quantité

$$C = \frac{1}{g} \int_{s_0}^{s_1} \phi \cos \varphi \, ds$$

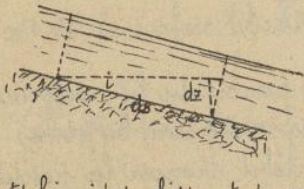
est dite la perte de charge due aux résistances entre les deux sections.

Si l'on a recours à la représentation géométrique du $\nabla \zeta = H$, le lieu du point P sera une surface quelconque dite surface de charge. Pour deux points d'un même filet, la différence des côtes des points correspondants de la surface de charge est égale à la perte de charge due aux résistances entre ces deux points.

C'est à l'expérience à fournir des indications sur les lois qui régissent ces résistances.

6. Mouvement uniforme d'un courant liquide dans un canal découvert rectiligne. — Supposons qu'il s'agisse d'un mouvement uniforme. La vitesse d'une molécule reste constante : $V = V_0$. La différence $p - p_0$ peut être prise pour un filet superficiel ; la surface libre étant à la pression atmosphérique, on aura $p = p_0$. L'équation de Bernoulli généralisée donne donc :

$$z - z_0 = \frac{1}{g} \int_{s_0}^s \phi \cos \varphi \, ds \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{ds} = \frac{\phi}{g} \cos \varphi.$$



Celle est l'équation du mouvement uniforme dans les canaux découverts.

Si i est l'inclinaison des filets sur l'horizon, on a :

$$dz = ds \sin i. \quad \text{— Quant à } \varphi, \text{ il est nul, et } \cos \varphi = 1; \text{ car les fi}$$

lets liquides glissent parallèlement entre eux et aux parois, il paraît naturel d'admettre que les résistances de frottement ont aussi la direction commune des filets.

Il reste à déterminer ϕ . — Nous ne tiendrons compte que du frottement dû à la présence de la paroi ; ce frottement d'ailleurs met en jeu la viscosité intérieure du fluide, car, quand la paroi est mouillée, une mince couche de fluide y adhère, à cause des rugosités de la paroi, et c'est sur cette couche que glisse le fluide : le fluide glisse ainsi sur lui-même. Il résulte des expériences de Du Buat et de Girard que la force représentative de la résistance due au frottement à la paroi est proportionnelle à la surface baignée, à la densité du fluide, au carré de la vitesse moyenne et est indépendante de la pression. Si donc χ est le périmètre de paroi de la section ω qui se trouve mouillée, pour une tranche d'épaisseur ds , cette force aura pour expression

$$b_1 \chi \, ds \cdot \omega \cdot V^2,$$

b_1 étant un coefficient variable avec la nature plus ou moins rugueuse des parois (nature qui modifie l'épaisseur de la couche immobilisée). Comme ϕ est la force de frottement rapportée à l'unité de masse et que la masse de la tranche est $\frac{\omega}{g} \omega \, ds$, il vient :

$$\phi = g \cdot \frac{\chi}{\omega} \cdot b_1 V^2.$$

$\frac{\omega}{\chi} = R$ est ce qu'on appelle, improprement, le rayon moyen de la section.
L'équation du mouvement uniforme s'écrit alors :

$$R \sin i = b_1 U^2$$

La quantité $I = \sin i$ est dite la déclivité par mètre. Avec cette notation, on a :

$$RI = b_1 U^2$$

D'après les expériences de Darcy et de Bazin, le coefficient b_1 dépend du rayon moyen R par la formule

$$b_1 = k \left(1 + \frac{n}{R}\right)$$

k et n étant des coefficients variables avec la nature des parois du lit :

	K	n
Parois très unies (ciment lissé, planches rabotées) -----	0,00015	0,03
- moyennement unies (pierres de taille, planches brutes) -----	0,00019	0,07
- peu unies (maçonnerie de moellons) -----	0,00024	0,25
- rugueuses (terrain naturel) -----	0,00028	1,25
- en gravier -----	0,00040	1,75

(Les unités sont la seconde pour le temps, le mètre pour les longueurs, le kilogramme pour les forces).

Les principaux problèmes pratiques qui se résolvent à l'aide des formules

$$RI = k \left(1 + \frac{n}{R}\right) U^2, \quad Q = w V, \quad R = \frac{w}{X}$$

sont les suivants :

1^o : Étant donné la déclivité I , le débit Q et la nature des parois du lit, déterminer la section transversale du canal (section dont on s'assigne à priori la forme).

2^o : Étant donné le profil de la section, la déclivité et le débit, trouver la position du niveau de l'eau.

3^o : Étant donné la déclivité et la section transversale, déterminer le débit.

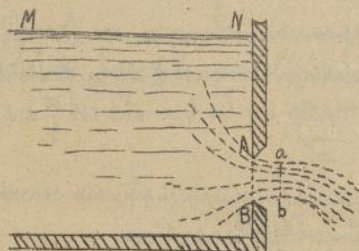
4^o : Étant donné le débit et la section transversale, déterminer la déclivité.

Nous ne ferons qu'énoncer ces questions dont la solution n'offre aucune difficulté, l'emploi du planimétrie rendant les essais d'approximation très rapides.

Chapitre II. - Écoulement par orifices, ajutages et déversoirs. -

1. Écoulement d'un liquide pesant par un orifice en mince paroi. -

Nous nous proposons de chercher la loi de l'écoulement d'un fluide pesant sortant, par un étroit orifice, d'un réservoir ouvert à l'air libre et dans lequel la surface MN du liquide est maintenue par une alimentation convenable à un niveau constant.



Nous supposons que la paroi, sur le pourtour de l'orifice, est taillée de telle sorte que le liquide s'écoule sans toucher le bord de l'orifice autrement que par une arête. Cela se produit lorsque, cet orifice ayant la forme cylindrique, l'épaisseur de la paroi est inférieure à la moitié de la plus petite dimension de l'ouverture, ou mieux en

core lorsque l'orifice est taillé suivant une forme légèrement conique. L'orifice est dit alors en mince paroi. 209.

Dans ces conditions, l'expérience montre que le liquide au sortir du réservoir, présente la forme d'une veine dont la section transversale va d'abord en diminuant jusqu'à un certain minimum qu'on appelle la section contractée. Les filets qui avaient d'abord convergé, deviennent dans cette section, qu'ils traversent normalement, sensiblement parallèles. A partir de là, chacun affecte la forme d'une parabole, représentant la trajectoire librement parcourue par un élément sous la seule action de la pesanteur; par suite (Ch. I, N° 2, c) on peut considérer la pression comme constante dans la section contractée, et égale à la pression p_0 de l'air ambiant. D'autre part, chacun des filets qui sortent du réservoir prend naissance, à l'intérieur de celui-ci, dans une région éloignée de l'orifice et pour laquelle toutes les vitesses et accélérations sont très faibles, en sorte que (Ch. I, N° 2, b) la pression varie suivant la loi hydrostatique. Cette région tranquille s'étend jusqu'à la surface libre qui, pour cette raison, peut être regardée comme un plan horizontal.

Soient z et v la cote et la vitesse d'un filet au passage de la section contractée, z' la cote d'un point de ce filet dans la région tranquille (vitesse nulle), z_0 la cote de la surface libre MN. Le théorème de Bernoulli donne

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_0 - p}{\omega} + z - z' = 0.$$

D'autre part la loi hydrostatique donne :

$$\frac{p - p_0}{\omega} + z' - z_0 = 0.$$

Donc

$$v^2 = 2g(z_0 - z).$$

$z - z_0$ ne diffère guère de la hauteur h de la surface libre au-dessus du centre de gravité de la section contractée, en égard à la petitesse de l'orifice et par suite de la section contractée. Donc :

$$v = \sqrt{2gh}$$

Cette loi a été trouvée expérimentalement par Torricelli, et démontrée pour la première fois par Bernoulli.

On appelle dépense le volume du liquide débité par unité de temps; si ω est la section contractée de la veine, la dépense est $Q = \omega v$. Elle est aussi égale à ΩV , si Ω est la section de l'orifice et V la vitesse du liquide à la sortie. On a donc

$$\frac{V}{v} = \frac{\omega}{\Omega} = m.$$

m s'appelle le coefficient de dépense ou de contraction. Comme $Q = m\Omega\sqrt{2gh}$, la mesure de m résultera de la mesure du volume liquide débité par unité de temps.

m varie avec la forme de l'orifice; pour un orifice circulaire, il est égal à 0,60; pour un orifice carré, à 0,62.

2. Écoulement par un ajutage cylindrique. - On appelle ajutage une por-

tion de tuyau de faible longueur prolongeant extérieurement ou intérieurement un orifice percé dans la paroi d'un réservoir.

Si la paroi du tuyau épouse le profil même que présente la veine dans le cas d'un orifice en mince paroi, on a évidemment $m=1$, R étant la section terminale de l'ajutage. L'expérience confirme ce résultat.

Si l'ajutage est constitué par un tube cylindrique pénétrant horizontalement à l'intérieur du réservoir et dont la longueur n'excède pas son diamètre pour que la veine ne mouille pas la paroi, on a l'ajutage rentrant de Borda. Cette disposition a pour effet de rendre négligeables les vitesses des molécules en contact avec les parois. Elle n'a qu'un intérêt théorique; elle constitue le seul cas où l'on ait pu réussir à déterminer un coefficient de contraction par un calcul satisfaisant et assez simple, sans recourir aux données expérimentales. Le coefficient obtenu est $\frac{1}{2}$, nombre assez voisin de celui trouvé expérimentalement par Borda: 0,515.

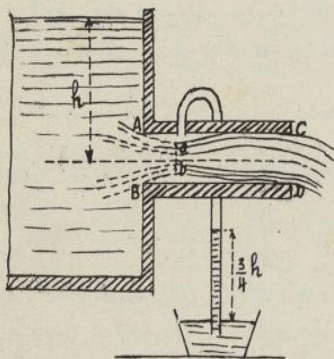
Nous n'étudierons ici que l'ajutage cylindrique extérieur succédant à un orifice en mince paroi. Si le tube formant ajutage a une longueur égale à une fois et demie au moins la plus grande dimension de l'orifice, on constate que la veine fluide, sortie de l'orifice AB, se contracte jusqu'à une section ab, s'épanouit ensuite et vient en contact avec les parois de l'ajutage. L'écoulement se fait alors à plein tuyau, ou à queue-le-beu, par toute la section terminale CD; il n'y a plus au delà, de section contractée.

Le niveau étant maintenu constant dans le réservoir, l'expérience donne pour la dépense: $Q = 0,82 \sqrt{gh}$. La théorie, aidée des résultats expérimentaux relatifs aux orifices en mince paroi, conduit à un résultat fort voisin de celui-là.

Pendant les premiers instants de l'écoulement, la veine sortant de AB s'est contractée jusqu'en ab, puis élargie, venant toucher le tube et emmagasinant un peu d'air entre l'ajutage et elle, autour de la section contractée.

Cet air est entraîné mécaniquement peu à peu par le courant, un vide partiel se fait dans l'anneau qu'il occupait, et le liquide s'y substitue. Bientôt l'ajutage est entièrement plein d'eau.

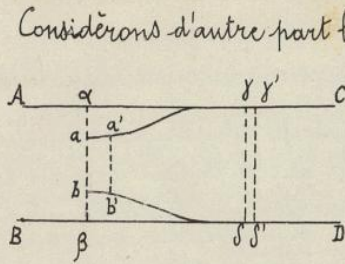
Si, avec Venturi, on sertit sur l'ajutage dans le voisinage de la section contractée un tube recourbé plongeant dans un liquide, ce liquide est soulevé. Il existe donc bien autour de la section contractée une pression inférieure à la pression atmosphérique. L'an-



neau d'air est remplacé autour de la section contractée, par un liquide quasi-stagnant, on tournoyant très lentement; la veine a encore une section contractée à pression p inférieure à celle qui se produit à l'orifice CD; la vitesse v dans la section ab diffère par suite de la vitesse V dans la section libre CD.

Considérons un filet fluide partant de la région tranquille du réservoir et aboutissant à la section contractée. Le théorème de Bernoulli donne (par le même raisonnement qu'au 10^e précédent):

$$\frac{v^2}{2g} = h + \frac{p_0 - p_1}{\omega} \quad (1)$$



Considérons d'autre part la masse fluide comprise entre la tranche $\alpha\beta$ où se trouve la section contractée et une tranche $\gamma\delta$ assez éloignée de $\alpha\beta$ pour qu'on puisse y considérer les filets comme normaux à la tranche; nous allons appliquer à cette masse le théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe parallèle à la direction de l'ajutage.

Dans l'application de ce théorème, les actions moléculaires obéissant à la loi de Newton disparaissent.

Après un intervalle de temps dt , ab est venu en $a'b'$, $\gamma\delta$ en $\gamma'\delta'$. À cause de la permanence du mouvement, nous n'avons pas, en appliquant le théorème, à tenir compte de la masse comprise entre $a'b'$ et $\gamma\delta$, et si m est la masse commune occupant les volumes $ab\beta'a'$ et $\gamma\delta\gamma'\delta'$, et V , la vitesse en $\gamma\delta$, la variation de la somme des quantités de mouvement sera $m(V_1 - v)$.

Passons aux impulsions. La pesanteur ne donne rien, l'ajutage étant supposé horizontal. Il n'y a donc à mettre en compte que les pressions. Les pressions dans chaque section $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ obéissent à la loi hydrostatique: en $\gamma\delta$ et $a'b'$, parce que les vitesses sont normales à la section, en ad et $\beta\beta'$ parce que le fluide y est tranquille. Si p_1 est la pression en $\gamma\delta$, on a pour impulsion totale: $p_1 \omega dt - p_1 \omega dt$.

Ainsi:

$$m(V_1 - v) = (p_1 - p_1) \omega dt.$$

Mais on a: $m = \frac{\omega}{g} \cdot \omega V_1 dt$. Donc:

$$\frac{V_1(V_1 - v)}{g} = \frac{p_1 - p_1}{\omega},$$

ou

$$\frac{V_1^2 - v^2}{2g} = \frac{p_1 - p_1}{\omega} - \frac{(v - V_1)^2}{2g}.$$

Il est loisible d'ailleurs de supposer que $\gamma\delta$ coïncide avec la section terminale CD on sorte que V_1 n'est autre que la vitesse d'écoulement V et p_1 la pression de l'air ambiant p_0 :

$$\frac{V^2 - v^2}{2g} = \frac{p_1 - p_0}{\omega} - \frac{(v - V)^2}{2g} \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\frac{V^2}{2g} = h - \frac{(v - V)^2}{2g}.$$

L'équation de continuité donne, en égard à la région tranquille: $\omega v = \omega V$, ou en désignant par m le coefficient de contraction: $v = \frac{V}{m}$. Il vient donc:

$$V^2 \left\{ 1 + \left(\frac{1}{m} - 1 \right)^2 \right\} = 2gh.$$

Si on prend pour m la valeur 0,62, on trouve

$$V = 0,85 \sqrt{2gh}.$$

Le coefficient de dépense obtenu diffère peu de la valeur 0,82 fournie par l'expérience.

Si on sert de cette valeur de V pour calculer $p - p_0$, on trouve:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = 0,73 h;$$

L'expérience de Venturi conduit à $0,71 H h$ (environ $\frac{3}{4} h$).

La diminution de pression déterminée par un ajutage cylindrique explique l'aspiration produite par les trompes. Il est clair en effet que si le tube recourbé de l'expérience de Venturi était en communication avec un réservoir fermé rempli d'air, le gaz serait peu à peu entraîné par le mouvement du liquide.

3. Écoulement d'une nappe liquide par déversoir. — Un déversoir est un orifice d'assez grandes dimensions découvert à sa partie supérieure. Généralement cet orifice a la forme rectangulaire; l'arête horizontale s'appelle le seuil ou la crête; les côtés verticaux sont les joues.

Quand l'épaisseur du seuil est très petite (seuil constitué par une feuille de tôle ou par une planche taillée en biseau), le déversoir est en mince paroi; dans le cas contraire, il est à crête épaisse.

L'expérience fait connaître que le liquide, avant de passer sur le seuil du déversoir, éprouve une dénivellation notable: l'épaisseur h de la nappe déversante au dessus du seuil n'est qu'une fraction de la hauteur H du niveau d'amont au dessus de ce seuil. Pour une valeur H constante donnée, le régime permanent s'établit d'une manière stable pour une valeur de h telle que le débit soit maximum; car le régime d'un courant ne saurait être stable sans que la masse liquide y coule partout le plus bas possible. C'est là le principe de la théorie de l'écoulement par déversoir.

Considérons d'abord un déversoir à crête assez épaisse pour que les filets liquides soient, au dessus du seuil, horizontaux. Appliquons le théorème de Bernoulli à un filet partant de la région tranquille du fluide en amont, et passant sur la crête avec la vitesse V . Il vient:

$$-\frac{V^2}{2g} + H - h = 0.$$

Si l est la largeur du déversoir, le débit aura

pour expression:

$$Q = lhV = l\sqrt{2g} \cdot h\sqrt{H-h},$$

en négligeant la contraction de la nappe entre les joues du déversoir.

Q sera maximum si

$$\frac{d}{dh}(h\sqrt{H-h}) = 0, \text{ ou } \sqrt{H-h} - \frac{h}{2\sqrt{H-h}} = 0.$$

Or en déduit $h = \frac{2}{3}H$ et la valeur correspondante du débit est

$$Q = 0,385 l H \sqrt{2gH}$$

L'expérience donne le coefficient numérique 0,35 au lieu de 0,385.

Considérons maintenant un déversoir en mince paroi et calculons-en le débit d'a

près la théorie de M. Boussinesq.

La nappe liquide, en même temps qu'elle subit un infléchissement au dessus de la crête, subit un relèvement à la partie inférieure, présentant une région contractée. La théorie, confirmée par l'expérience, est basée sur cette hypothèse que, dans la région contractée d'une section transversale, les filets aient même centre de courbure.

Comptons les cotes positivement au dessus de l'horizon de la crête. Soient : ε le relèvement maximum de la nappe au dessus de ce niveau, R_0 le rayon de courbure du filet inférieur, R le rayon de courbure, en un point M de la section contractée, d'un filet M_0M tel que la cote de M soit z ; V la vitesse sur ce dernier filet au point M .

L'équation $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z_1 w'$ donnera, au point M , en notant que la composante verticale de l'accélération n'est autre que l'accélération normale $-\frac{V^2}{R}$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g + \frac{V^2}{R}.$$

D'autre part l'équation du régime permanent :

$$\frac{dp}{\rho} = -g dz - \frac{1}{2} dV^2$$

donne :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g - \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial z}.$$

Comme, dans la tranche considérée, z est la seule variable, on a :

$$\frac{V^2}{R} = -\frac{1}{2} \frac{dV^2}{dz}, \text{ ou } V dz + R dV = 0.$$

Mais, ε étant centre de courbure commun de tous les filets, on a :

$$R = R_0 - \varepsilon + z, \text{ d'où : } dR = dz.$$

Donc :

$$VR = \text{Const.} = C,$$

et si V_0 et V_1 sont les vitesses du filet inférieur et du filet supérieur, h la hauteur de la section contractée, on a :

$$V(R_0 - \varepsilon + z) = V_0 R_0 = V_1 (R_0 + h).$$

Appliquons d'autre part au filet supérieur et au filet inférieur le théorème de Bernoulli, à partir de la région tranquille d'amont jusqu'à la section contractée. On obtient immédiatement (la vitesse pour le filet inférieur étant négligeable très près de la crête) :

$$V_0 = \sqrt{2g(H - \varepsilon)}, \quad V_1 = \sqrt{2g(H - \varepsilon - h)}.$$

La vitesse d'un filet quelconque est donc :

$$V = \frac{R_0}{R_0 + \varepsilon - z} \sqrt{2g(H - \varepsilon)}.$$

Le débit d'un déversoir a donc pour expression :

$$Q = l \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+h} V dz = R_0 l \sqrt{2g(H - \varepsilon)} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+h} \frac{dz}{R_0 + z - \varepsilon} = R_0 l \sqrt{2g(H - \varepsilon)} \log \left(1 + \frac{h}{R_0} \right).$$

Formons, pour obtenir Q en fonction de h , la valeur de R_0 au moyen de cette va-

riable. On a :

$$\frac{V_0}{V_1} = 1 + \frac{h}{R_0} = \sqrt{\frac{H-\varepsilon}{H-\varepsilon-h}}$$

Soit $\frac{1}{n}$ la valeur commune de ces trois quantités. Nous prendrons n comme variable indépendante au lieu de h . Il vient :

$$\frac{h}{R_0} = \frac{1}{n} - 1, \quad \frac{h}{H-\varepsilon} = 1 - n^2, \quad R_0 = (H-\varepsilon)n(1+n).$$

Par suite :

$$Q = l \sqrt{2g} (H-\varepsilon)^{\frac{3}{2}} (n+n^2) \text{Log} \frac{1}{n}.$$

D'après les expériences de Bazin, le relèvement ε de la nappe déversante au dessus de la crête est à peu près proportionnel à H , et pour des charges d'eau d'au moins $0^m,50$, on a :

$$\frac{\varepsilon}{H} = 0,13.$$

L'expression du débit

$$Q = l H \sqrt{2gH} (0,87)^{\frac{3}{2}} (n+n^2) \text{Log} \frac{1}{n}$$

montre que le maximum sera atteint pour une valeur de n vérifiant l'équation :

$$\frac{d}{dn} \left\{ (n+n^2) \text{Log} \frac{1}{n} \right\} = 0 \quad \text{ou} \quad (1+2n) \text{Log} \frac{1}{n} - (1+n) = 0.$$

La résolution de l'équation transcendante :

$$\text{Log} \frac{1}{n} = \frac{1+n}{1+2n}$$

conduit à $n = 0,4685$, et la valeur correspondante de Q est :

$$Q = l H \sqrt{2gH} (0,87)^{\frac{3}{2}} 0,5216 = 0,423 l H \sqrt{2gH}.$$

Les expériences de Poncelet, de Lesbros et de Bazin donnent pour la valeur du coefficient numérique des nombres variant de $0,39$ à $0,44$. L'accord est donc satisfaisant entre la théorie de M. Boussinesq et l'observation.

Pratiquement, on prenait autrefois le chiffre moyen de $0,40$ et comme $0,4 \sqrt{2g} = 1,77$, on adoptait la formule :

$$Q = 1,77 H \sqrt{H}$$

Chapitre III. Mouvement permanent dans les tuyaux de conduite.

1. Equation générale du mouvement permanent. - Considérons un tronçon de conduite d'eau compris entre deux sections d'aires ω_0 et ω (les pressions et altitudes étant, pour leurs centres respectifs p_0, p et z_0, z), et présentant toutes les particularités qu'on peut rencontrer pratiquement.

On applique au mouvement permanent de l'eau dans l'équation de Bernoulli généralisée.

1° Les filets liquides ayant des vitesses inégales de l'axe à la paroi, on introduit les vitesses moyennes V_0 et V relatives à chaque section, et les termes provenant de la varia-

tion de charge due aux vitesses s'écrivent : $\alpha \frac{(V^2 - V_0^2)}{2g}$, α étant un coefficient voisin ²¹⁵ de l'unité et qu'on prend usuellement égal à $\frac{10}{9}$.

2° Les filets liquides frottant entre eux et sur la couche adhérente à la paroi, il y a lieu de tenir compte de la perte de charge due à ce frottement, frottement qui d'ailleurs peut être variable dans les divers tronçons de la conduite; nous la représenterons par ΣC .

3° Enfin d'autres pertes de charge peuvent être produites en diverses régions intermédiaires de la canalisation par l'existence de résistances extérieures provenant de diverses réactions de parois (élargissements ou rétrécissements brusques de la conduite, coudes, etc...); nous en ferons l'analyse ultérieurement: leur ensemble sera représenté, entre les sections considérées, par $\Sigma \Gamma$.

L'équation de Bernoulli s'écrit donc :

$$\alpha \frac{V^2 - V_0^2}{2g} + \frac{h - h_0}{\omega} + \mathcal{G} - \mathcal{G}_0 + \Sigma C + \Sigma \Gamma = 0,$$

ou encore

$$h_1 = \left(\mathcal{G}_0 + \frac{h_0}{\omega} \right) - \left(\mathcal{G} + \frac{h}{\omega} \right) = \alpha \frac{V^2 - V_0^2}{2g} + \Sigma C + \Sigma \Gamma.$$

Si, en un point quelconque M de la canalisation, on porte sur la verticale une longueur $MN = \frac{h}{\omega}$ égale à la hauteur représentative de la pression en ce point, le niveau de N marque le niveau piézométrique au point M. Dans ces conditions, h_1 est la différence des niveaux piézométriques aux centres des sections ω_0 et ω , la différence des niveaux vrais étant $h = \mathcal{G}_0 - \mathcal{G}$.

L'équation de continuité $\omega V = \omega_0 V_0$ permet de calculer la vitesse et par suite le débit dans la section ω connaissant la différence des niveaux piézométriques entre les sections considérées. On a :

$$V = \sqrt{\frac{2g(h_1 - \Sigma C - \Sigma \Gamma)}{\alpha \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}} \quad \text{et} \quad Q = m \omega \sqrt{\frac{2g(h_1 - \Sigma C - \Sigma \Gamma)}{\alpha \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}},$$

m étant un coefficient dépendant de la nature de l'orifice de la section terminale.

2. Perte de charge due à la résistance de frottement des parois. —

Considérons une portion rectiligne de tuyau. Soit L la longueur, D le diamètre de la section supposée circulaire et constante. Supposons que le régime uniforme soit établi, la vitesse moyenne V étant la même pour toutes les sections. L'équation de Bernoulli se réduit à :

$$h_1 = \Sigma C.$$

Nous poserons $\frac{h_1}{L} = I$ (déclivité de la ligne piézométrique pour le tronçon considéré), et nous reconnaitrons, comme pour les canaux, qu'on peut écrire :

$$I = \frac{1}{L} \int_0^L \phi ds = \phi,$$

en observant que, par raison de symétrie, ϕ doit être constant.

Soit $F(V)$ la force représentative du frottement par unité de surface de la paroi; pour une zone de paroi comprise entre deux sections distantes de l , la résistance totale de frottement est $F(V) \cdot \pi D l$, et son rapport à la masse fluide comprise entre ces sections est

$$\phi = \frac{F(U) \pi D l}{\frac{\omega}{g} \frac{\pi D^2}{4} l} = \frac{4}{D} \cdot \frac{g}{\omega} F(U).$$

On a donc :

$$\frac{Dl}{H} = \frac{g}{\omega} F(U) = f(U).$$

Il faut s'adresser à l'expérience pour déterminer $F(U)$ ou $f(U)$.

Dès le commencement du dernier siècle, Coulomb signale que la résistance $F(U)$ devait pouvoir s'exprimer sous la forme $\alpha U + \beta U^2$, α et β ne dépendant pas de la vitesse.

Prony, ayant à sa disposition les résultats de cinquante et une expériences de Couplet, Bossut et Du Buat, construisit, en prenant U comme abscisse, les points représentatifs de $\frac{Dl}{HU}$ et les trouva sensiblement répartis en ligne droite. Il en conclut que $\frac{Dl}{HU}$ était une fonction linéaire de U et posa :

$$\frac{Dl}{HU} = a + bU, \text{ ou : } \frac{Dl}{H} = aU + bU^2;$$

et regarda les coefficients a et b comme des constantes auxquelles il attribua les valeurs :

$$a = 0,000173, \quad b = 0,000348.$$

(unités : seconde, mètre, kilogramme force). Comme $\frac{\omega}{g} = 1000$, on en déduit :

$$F(U) = 0,0173 U + 0,348 U^2.$$

Des expériences ultérieures, dans lesquelles on s'est préoccupé de l'influence du diamètre sur les variations de $F(U)$, ont amené à modifier ces conclusions.

Faisons :

$$\frac{Dl}{H U^2} = \psi(U, D).$$

Les lois successivement proposées sont les suivantes :

1^o Formule de Weisbach :

$$\psi = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{U}} \quad (\alpha = 0,0001889; \beta = 0,0001207).$$

2^o Formule de Darcy :

$$\psi = \alpha + \frac{\beta}{D} \quad (\alpha = 0,000507, \beta = 0,00001294).$$

3^o Formule de M. Maurice Lévy :

$$\psi = \frac{1}{\alpha + \beta \sqrt{D}} \quad (\alpha = 840,50; \beta = 1782,28).$$

4^o Formule de M. Flamant :

$$\psi = \frac{\alpha}{\sqrt{DU}} \quad (\alpha = 0,000345).$$

Ces résultats sont relatifs aux tuyaux en fonte des canalisations usuelles.

La formule de M. Flamant, commode pour le calcul à cause de sa forme monôme, résulte de l'examen comparatif de plus de 500 observations portant sur des tuyaux dont les diamètres allaient de 0^m,20 à 3^m,00. Toutes les autres formules sont basées sur un nombre bien plus restreint de données expérimentales. Aussi la formule de M. Flamant semble-t-elle actuellement devoir être préférée aux autres.

Les divers problèmes qu'on peut être amené à résoudre sur les tuyaux de conduite se réduisent à la détermination de deux des quatre quantités D (diamètre du tuyau), U

(vitesse moyenne du courant), Q (débit), i (pente hydraulique ou perte de charge par unité de longueur), connaissant les deux autres.

On se sert à cet effet des relations

$$Q = \frac{\pi D^2 U}{4}, \quad \frac{D i}{4 U^2} = \psi,$$

ψ étant l'une des fonctions empiriques énumérées.

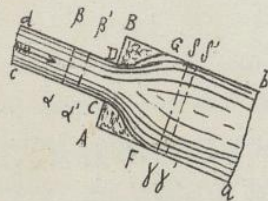
Pour abréger les calculs numériques, on a traduit ces diverses formules en tables qu'on trouve dans tous les Manuels d'Hydraulique. Leur disposition n'est pas constante; en voici une adoptée par M. Masoni réunissant tous les résultats connus:

Diamètre D en mètres	Vitesse U en mètres	Débit Q en mètres cubes	Perte de charge I par mètre linéaire de tuyau d'après les formules de:				
			Frany	Weisbach	Darcy	Levy	Flamant
0,10	0,50	0,0039	0,0038	0,0035	0,0063	0,0071	0,0071
	1,00	0,0078	0,0146	0,0122	0,0260	0,0291	0,0238
	1,50	0,0118	0,0324	0,0254	0,0572	0,0641	0,0508
	2,00	0,0157	0,0571	0,0430	0,1018	0,1140	0,0829

Pour les divers diamètres, depuis 0^m,02 jusqu'à 3^m, on a en regard marqué les vitesses correspondantes usitées dans la pratique (de 0^m,25 à 2^m,50).

Ces tables fournissent, par des interpolations sans difficultés spéciales, la réponse aux problèmes signalés.

3. Perte de charge due à une variation brusque de la section du tuyau. - Supposons qu'une conduite cylindrique, en un certain endroit, augmente brusquement de diamètre. L'expérience montre que la veine remplissant le tuyau étroit cd , arrivée à cet élargissement, s'épanouit progressivement de façon à occuper de nouveau, un peu plus loin, en FG , la totalité de la section. Dans l'espace annulaire ACF, BDG qu'on appelle l'espace mort, séjourne une masse fluide, présentant des tourbillonnements locaux assez lents, dus au frottement des filets formant le pourtour de la veine DG, CF .

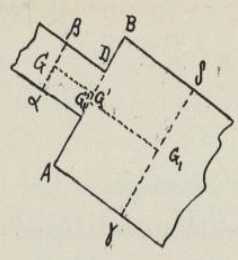


Considérons la masse fluide comprise, à l'instant t , entre deux sections droites $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$, situées l'une en deçà de l'élargissement, l'autre au delà de FG , et correspondant à des vitesses moyennes V et V_1 , à des aires w et w_1 . Au bout du temps dt , cette masse se est comprise entre deux sections $\alpha'\beta'$ et $\gamma'\delta'$ infiniment voisines des deux premières.

Soit m la valeur commune des masses comprises dans les volumes $\alpha\beta\beta'$ et $\gamma\delta\delta'$, on a: $m = \frac{w}{g} V w dt = \frac{w}{g} V_1 w_1 dt$. En égard à la permanence du mouvement, la variation de la quantité de mouvement de la masse totale, en projection sur la direction des génératrices du tuyau est $m(V_1 - V)$. On néglige la variation des projections des vitesses de tourbillonnement qui existent dans l'espace mort.

Passons alors à la détermination des impulsions élémentaires des forces extérieures,

projetées sur la direction du tuyau.



Soient G et G' , les centres de gravité des sections α et β ; G et G' , les traces, sur le plan d'élargissement, des parallèles aux génératrices menées par G et G' ; ζ , ζ_1 et ζ' , ζ'_1 les cotes de ces points. La pression en G est $p + \omega(\zeta - \zeta')$, et en G' , elle est $p + \omega(\zeta - \zeta'_1)$. Les pressions sur α , β , C , D , A , B et γ , δ donnent les termes suivants:

$$[p\omega - \{p + \omega(\zeta - \zeta')\}\omega + \{p + \omega(\zeta - \zeta'_1)\}\omega_1 - p_1\omega_1] dt,$$

ou après réductions:

$$[(p - p_1)\omega_1 - \omega(\zeta - \zeta')\omega + \omega(\zeta - \zeta'_1)\omega_1] dt.$$

La pesanteur donne d'autre part l'impulsion projetée suivante:

$$(\omega \cdot w \cdot \overline{GG} \sin i + \omega \omega_1 \cdot \overline{G'G'_1} \sin i) dt,$$

i étant l'inclinaison du tuyau sur l'horizon; ou encore:

$$[\omega(\zeta - \zeta')\omega + \omega(\zeta'_1 - \zeta_1)\omega] dt.$$

La somme des impulsions projetées des forces extérieures est donc:

$$[(p - p_1)\omega_1 + \omega(\zeta - \zeta_1)\omega] dt.$$

Nous avons donc la relation:

$$m(V_1 - V) = [(p - p_1)\omega_1 + \omega(\zeta - \zeta_1)\omega] dt,$$

ou en remplaçant m par $\frac{\omega}{g} V_1 \omega_1 dt$ et en simplifiant:

$$\frac{V_1(V_1 - V)}{g} = \frac{p - p_1}{\omega} + \zeta - \zeta_1.$$

Cette égalité peut s'écrire:

$$\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} + \frac{(V - V_1)^2}{2g} = \frac{p - p_1}{\omega} + \zeta - \zeta_1,$$

ou encore:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\omega} + \zeta = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\omega} + \zeta_1 + \frac{(V - V_1)^2}{2g}.$$

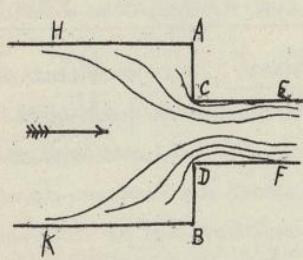
Le passage par l'élargissement de section donne donc lieu à une perte de charge égale à $\frac{(V - V_1)^2}{2g}$. En appelant $V - V_1$ la vitesse perdue, on a cet énoncé connu sous le nom de Règle de Borda: L'élargissement brusque d'une conduite produit une perte de charge égale à la hauteur due à la vitesse perdue.

Comme $\omega V = \omega_1 V_1$, cette perte de charge a pour valeur $\frac{V^2}{2g} (1 - \frac{\omega}{\omega_1})^2$.

Supposons que l'élargissement brusque soit remplacé par un élargissement progressif, tel que les filets périphériques puissent s'infléchir en demeurant au contact de la paroi, sans production d'espace mort. Le théorème de Bernoulli resterait applicable à titre de première approximation, sans introduction de perte de charge.

Supposons enfin qu'au lieu d'un élargissement brusque, nous ayons un rétrécissement. Il faut bien se garder de croire que les phénomènes seront exactement inversés des précédents, c'est-à-dire que dans le tuyau large devenu tuyau d'amont il va se pro-

duire un espace mort et que



le tuyau rétréci va être entièrement rempli par la veine liquide. L'observation montre que les choses se passent différemment. Il n'apparaît en amont du rétrécissement aucun espace mort et aucune perte de charge; c'est encore en aval qu'on observe en CE, DF, un espace mort avec perte de charge. On rend compte de ce fait en notant que la vitesse des molécules, rapidement croissante de H en A, tend, en vertu de la vitesse,

à entraîner énergiquement les molécules qui tenteraient de séjourner dans cette région et à supprimer par conséquent l'espace mort d'amont, tandis qu'au delà de AB, les filets convergent comme au sortir d'un orifice en mince paroi, et s'écartent de la paroi CE, DF, en laissant un vide qui doit être comblé par du liquide stagnant.

L'expérience a conduit à cette règle que la perte de charge est $\frac{1}{2} \cdot \frac{V_1^2}{2g}$, en désignant encore par V_1 la vitesse dans le tuyau d'aval, tandis que M. Boussinesq a trouvé théoriquement $0,49 \frac{V_1^2}{2g}$.

On doit d'ailleurs aussi à M. Boussinesq une expression de la perte de charge due à un élargissement brusque de section, qui constitue une seconde approximation, mais qui est beaucoup plus compliquée que celle de Borda.

H. Perte de charge produite par un coude. - La présence d'un coude sur une conduite est aussi une cause de perte de charge.

M. Boussinesq en a donné une théorie rationnelle (Essai, p. 605), en concordance avec un aperçu de Barré de Saint Venant. La valeur de la perte de charge est:

$$0,005 \frac{V^2}{r} \sqrt{\frac{D}{r}}, \text{ ou } 0,096 \cdot \frac{1}{r} \sqrt{\frac{D}{r}} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

r étant le rayon de courbure du coude, D le diamètre intérieur et V la vitesse moyenne du courant qui est la même avant et après le passage du coude. Ce résultat concorde avec les expériences de Du Buat sur la résistance des courbes circulaires des tuyaux de conduite, ou sur le supplément de charge que leur courbure exige pour que le débit ne soit pas réduit.

Dans le cas d'un coude brusque, on est réduit à faire appel à l'empirisme.

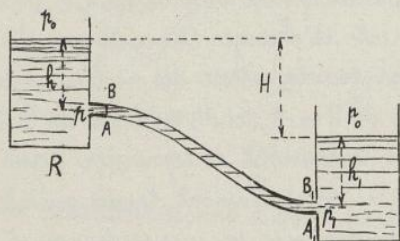
Si le coude est à angle droit sans variation de section, on trouve une perte de charge d'environ $\frac{1}{4} \frac{V^2}{2g}$.

5. Perte de charge au passage des robinets. - On assimile un robinet de puisage à un ajetage cylindrique; comme on a vu que la vitesse d'écoulement a pour expression $V = 0,82 \sqrt{2gh}$, h étant la charge avant le robinet, on en déduit: $\frac{V^2}{2g} = 0,67 h = \frac{2}{3} h$ environ. La perte de charge au passage du robinet est donc $\frac{1}{3} h$, soit le tiers de la charge disponible.

Pour les robinets-vannes partiellement ouverts, on doit à Weisbach de nombreux résultats expérimentaux qu'on trouvera consignés dans les Aide-Mémoire, ou dans

les traités spéciaux tels que celui de Masoni.

6. Écoulement, par un tuyau, d'un liquide d'un réservoir dans un autre, tous deux maintenus à niveau constant. — Ce problème se présente fréquemment dans les questions d'établissement des fontaines publiques.



La section du tuyau est supposée constante.

Soient h et h_1 les hauteurs des niveaux dans les réservoirs d'alimentation R et de réception R_1 , au dessus des centres de gravité des sections du tuyau au départ et au débouché; p_0 la pression atmosphérique; p_1 la pression dans la section AB située immédiatement

au-delà de la contraction; p_2 la pression au débouché A_1B_1 ; U la vitesse moyenne dans le tuyau; H la différence de hauteur des niveaux de R et de R_1 .

D'après la formule donnée pour l'ajutage cylindrique, nous avons:

$$U = 0,82 \sqrt{2g \left(h + \frac{p_0 - p_1}{\omega} \right)},$$

ou

$$\frac{3}{2} U^2 = h + \frac{p_0 - p_1}{\omega}.$$

approximativement. Pour avoir la pression p_1 en A_1B_1 , si l'on suppose la paroi traversée normalement et si l'on remarque que les mouvements le long des parois sont très lents, on pourra appliquer la loi hydrostatique et poser:

$$p_1 = p_0 + \omega h_1.$$

Par suite:

$$\frac{p_0 - p_1}{\omega} = h - h_1 - \frac{3}{2} \frac{U^2}{2g}.$$

La différence de hauteur des niveaux piézométriques aux deux orifices du tuyau est

$$H + h_1 - h + \frac{p_0 - p_1}{\omega},$$

soit

$$H - \frac{3}{2} \frac{U^2}{2g}.$$

Ecrivons qu'elle est égale à la perte de charge due aux frottements et donnée par exemple par la formule de Prony, c'est-à-dire à:

$$\frac{H L U^2}{D} \left(a + \frac{b}{U} \right).$$

Nous avons pour déterminer U , et par suite pour calculer la dépense, l'équation

$$H = \frac{3}{2} \frac{U^2}{2g} + \frac{H L U^2}{D} \left(a + \frac{b}{U} \right).$$

Inversement si on se donne U , cette formule permettra de calculer D .

Les règles concernant l'établissement des embranchements d'une conduite sont purement empiriques. On consultera à leur sujet les Aide-Mémoire.

7. Répartition des vitesses dans une section. — Soit R le rayon d'un tuyau circulaire, v la vitesse sur l'axe, v_r la vitesse de la couche cylindrique de rayon

x , I la pente hydraulique du tuyau.

C'est un résultat semi-théorique, semi-empirique, que :

$$v = V - 2,95 \sqrt{RI} \left(1 - \sqrt{1 - 0,95 \frac{x^2}{R^2}} \right).$$

D'après cela, la vitesse décroît de l'axe à la paroi. En exprimant de deux façons le débit :

$$Q = \pi R^2 U = \int_0^R 2\pi x dx \cdot v,$$

on trouve que la vitesse moyenne U coïncide avec la valeur de v relative à $x = 0,74R$, ou n'est autre que la vitesse de la couche de rayon égal aux $\frac{3}{4}$ du rayon du tuyau.

Chapitre IV. - Actions mutuelles d'un solide et d'un fluide en mouvement. -

1. Pression exercée par une veine liquide sur un plan fixe. -

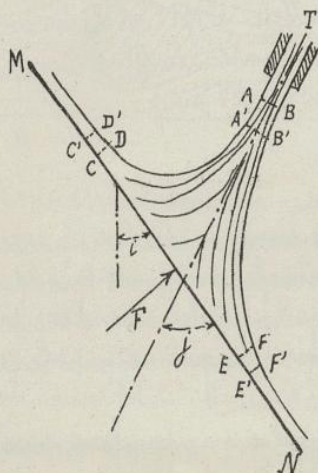
Lorsqu'un fluide en mouvement rencontre un solide au repos, il exerce sur lui un système de pressions dont les éléments réduits sont extrêmement difficiles à déterminer.

On doit cependant à Bernoulli la connaissance d'un cas où exceptionnellement la solution est aisée.

Supposons qu'une veine fluide sortant d'un tuyau cylindrique T vienne s'écraser sur un plan MN dont les horizontales sont perpendiculaires à l'axe du tuyau.

Le plan oblige le jet à se dévier, la veine se gonfle aux environs de sa rencontre avec le plan, les filets s'étalent et tendent à devenir parallèles au plan.

Le régime permanent étant établi, nous allons déterminer l'effort F normal au plan, qu'il faut exercer pour empêcher ce plan de subir une translation normale à sa direction.



A cet effet, nous appliquerons, en projection sur la normale au plan MN , le théorème des quantités de mouvement à la masse fluide comprise entre une section droite de la partie cylindrique de la veine choisie assez loin pour que la vitesse v soit ce qu'elle serait sans la présence de ce plan, et un cylindre CD, EF normal au plan, de rayon assez grand pour qu'au delà de ce cylindre le liquide coule parallèlement au plan pressé.

On bout du temps dt , la masse se trouve limitée par une section $A'B'$ parallèle à AB , et un cylindre $C'D', E'F'$ qui enveloppe le premier. - Pour calculer la variation de la quantité de mouvement, en raison

de la permanence du régime, il n'y a pas à s'occuper de la partie commune²²² aux deux volumes; de plus les vitesses entre CD et C'D', EF et E'F' étant perpendiculaires à l'axe de projection, il n'y aura à tenir compte que du liquide ABA'B', dont la quantité de mouvement est $\frac{\omega}{g} \Omega V dt \times V$, en désignant par Ω et V l'aire de la section AB et la vitesse de traversée; si j est l'angle de l'axe de la veine et du plan, la variation de la quantité de mouvement projetée sera donc: $-\frac{\omega}{g} \Omega^2 V^2 \sin j dt$.

Estimons maintenant les projections des impulsions des forces extérieures.

Les réactions tangentielles ne donnent rien, et les réactions normales, toutes parallèles et de même sens ont une résultante F qui est, au sens près, la pression à calculer; l'impulsion totale de ces réactions est donc $F dt$. - La pression atmosphérique a une impulsion projetée nulle. En effet, en AB, les molécules ont les vitesses qu'elles auraient eu si le plan n'avait pas existé (chaque décrirait la parabole qui serait sa trajectoire sous l'action de la pesanteur); la pression est donc constante dans toute la section AB et égale à la pression atmosphérique p_0 régnant sur son contour. La même pression p_0 s'exerce sur tout le pourtour AD, BF. Nous pouvons supposer que la pression p_0 s'exerce aussi sur la surface cylindrique CD, EF, car les pressions sur cette surface, normales à l'axe de projection, disparaissent en projection, et on ne commet pas d'erreur en les altérant. Enfin la paroi CE supporte de son côté la pression atmosphérique. Dès lors le volume fermé considéré est soumis sur toute sa surface à la pression constante p_0 , et on sait que dans ces conditions la somme algébrique des projections sur un axe quelconque est nulle. - Quant à la pesanteur, elle a pour impulsion projetée $-P \sin i dt$, P étant le poids du liquide compris dans le volume considéré, et i l'angle du plan avec la verticale.

En résumé, on a, après suppression du facteur dt :

$$\frac{\omega}{g} \Omega V^2 \sin j = F - P \sin i;$$

d'où:

$$F = \frac{\omega}{g} \Omega V^2 \sin j + P \sin i. \quad (1)$$

Soit ω la section de la veine par un plan parallèle à MN, et V_n la composante de la vitesse dans la section AB suivant la normale au plan; on a:

$$\Omega = \omega \sin j, \quad V_n = V \sin j \quad \text{et} \quad \omega V_n^2 = \Omega V^2 \sin j.$$

Donc:

$$F = \frac{\omega}{g} \omega V_n^2 + P \sin i.$$

D'après cela, la pression supportée par le plan se compose de trois parties: 1^o la pression atmosphérique; 2^o la composante normale du poids $P \sin i$ (qui disparaît si le plan est vertical); 3^o la quantité $\frac{\omega}{g} \omega V_n^2$, égale à la densité du liquide, multipliée par la section parallèle au plan choqué et par le carré de la vitesse estimée normalement au plan.

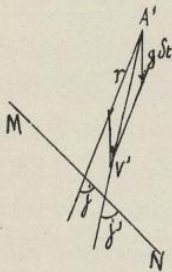
On pourrait s'étonner de ce que la pression supportée par le plan, pression bien déterminée quelle que soit la section AB considérée, puisse dépendre de P ,

223.
 poids du liquide limité par une section AB prise arbitrairement. Mais il y a lieu d'observer qu'en changeant AB, si on fait varier P, on fait aussi varier ρ , V, j.

Il est aisé de reconnaître que le passage de AB à une section infiniment voisine A'B', donne une variation nulle de F. En effet, ρV étant constant, on a:

$$\delta F = \frac{\rho}{g} \rho V \delta (V \sin j) + \sin i \cdot \delta P.$$

Or chaque molécule se meut de AB en A'B' comme un point matériel pesant libre, de vitesse V; sa vitesse acquise en A'B' est la résultante de V et de la vitesse verticale $g \delta t$; si donc on projette sur la normale au plan, on a, en désignant par j' l'angle de la nouvelle vitesse V' avec le plan:



$$V' \sin j' = V \sin j + g \delta t \sin i, \text{ ou } \delta (V \sin j) = g \sin i \delta t.$$

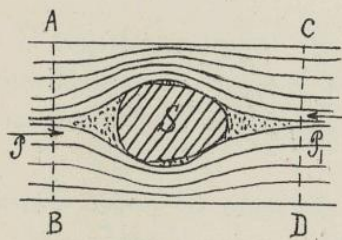
Mais d'autre part, δP est égal à $-\omega \rho V \delta t$. Donc, on a bien, par substitution: $\delta F = 0$.

En dehors du cas simple que nous venons d'examiner, la théorie ne peut pas faire connaître exactement la pression exercée sur un solide par un fluide en mouvement relatif; il faut alors avoir recours aux indications de l'expérience.

2. Pression d'une masse fluide en mouvement sur un solide immergé. - Quand un solide est plongé dans un courant liquide, il tend à être entraîné par ce courant, et il présente un phénomène intéressant.

Admettons qu'avant l'introduction du solide, le courant soit formé de filets rectilignes horizontaux possédant une même vitesse constante. Le corps est supposé de révolution autour d'un axe placé parallèlement aux filets, et il est maintenu au repos dans le liquide par une mince tige de suspension.

Au Buat, et plus tard, Duchemin, ont reconnu qu'au bout de quelques instants il s'établit un nouveau régime permanent dans lequel les filets s'infléchissent en amont et en aval du solide, formant comme une proue et une poupe liquides dans lesquelles existent des tourbillonnements. Ils ont en outre observé qu'à une certaine distance du solide, en amont, en aval et latéralement, le mouvement du fluide n'est nullement troublé (cette distance dépendant en chaque point de la forme de la surface).



Considérons donc la portion du courant limitée par un cylindre ABCD, entourant le solide S, à bases normales au courant, et tel que la région extérieure ne soit pas troublée (cylindre limite). Les bases AB et CD de ce cylindre reçoivent du fluide extérieur des pressions totales P et P_1 . D'autre part, comme par raison de symétrie les pressions exercées par le fluide sur le solide ont une résultante R_0 parallèle aux filets, le fluide recevra du solide une réaction $-R_0$.

Je dis que l'on a:

$$R_0 = P - P_1.$$

224

Il suffit en effet d'appliquer à la partie liquide du cylindre le théorème des quantités de mouvement projetées sur l'axe du courant. La quantité de mouvement est constante à cause de la permanence du mouvement; dès lors la somme des projections des forces extérieures est nulle. Or les pressions sur la surface latérale du cylindre sont normales à ce cylindre, même si le fluide est visqueux, parce que le cylindre est en repos relatif dans le courant; elles ont donc des projections nulles, tout comme la pesanteur. Dès lors, on a: $P - P_1 - R = 0$.

Nous allons appliquer maintenant à la même masse fluide le théorème des forces vives. Désignons par $-E_f$ le travail négatif, rapporté à l'unité de temps, des frottements intérieurs du fluide et des frottements à la surface de S . Durant un temps dt , le travail de ces forces est $-E_f dt$; celui de la pesanteur et des pressions sur la surface latérale est nul; enfin le travail des pressions sur les surfaces de base est $(P - P_1) U dt$, en désignant par U la vitesse moyenne du courant. A cause de la permanence du régime, la force vive ne varie pas. On a donc, en supprimant le facteur dt :

$$(P - P_1) U - E_f = 0 \quad \text{ou} \quad R = \frac{E_f}{U}.$$

D'après cela, l'effort d'entraînement du solide par le fluide est égal au quotient de la valeur absolue du travail des frottements par la vitesse moyenne du courant.

Cet effort serait donc nul pour le cas d'un fluide parfait et d'un solide parfaitement poli.

Imaginons maintenant que le liquide soit au repos et que le solide soit déplacé d'un mouvement uniforme dans le sens des filets. Il suffit de concevoir qu'on ait donné à tout le système une vitesse égale et opposée à la vitesse du solide pour être ramené au cas précédent dont la conclusion s'applique immédiatement.

Comme l'expérience courante nous permet d'évaluer l'effort nécessaire à produire la translation, dans un fluide estimé parfait, d'un corps parfaitement poli, on peut en conclure que l'hypothèse de la fluidité parfaite n'est encore qu'une approximation grossière.

Désignons par A l'aire du plus grand parallèle du corps immergé, l'expérience a montré que l'on pouvait représenter R de la manière suivante:

$$R = k \cdot \pi \cdot A \cdot \frac{U^2}{2g},$$

k étant un coefficient numérique dépendant de la forme du corps immergé. Pour une demi-sphère pleine recevant le courant sur sa partie convexe, on a: $k = 0,45$; pour une sphère entière, $k = 0,60$; pour une plaque mince placée normalement au courant, $k = 1,80$; pour un cylindre allongé, $k = 1,20$.

Les Aide-Mémoire donnent d'ailleurs à ce sujet de nombreuses indications. Les aperçus théoriques donnés par Poncelet paraissent justifier ces résultats en

rendent très grossièrement compte.

Les questions relatives à l'évaluation du travail produit par un fluide exerçant sa pression sur un solide en mouvement seront examinées dans le cours de Machines, comme introduction à l'étude des moteurs hydrauliques.

Nota. - Bibliographie. - Nous citerons encore ici quelques ouvrages importants relatifs à l'hydraulique.

Ed. Collignon. - Cours de Mécanique appliquée aux constructions; Seconde Partie. Hydraulique. - 1^{re} Edition. 1870; 2^e Ed. 1880. Ed.: Dunod.

A. Graëff. - Etraité d'Hydraulique, 3 volumes in 4^e. - Imprimerie Nationale. - 1882-1885.

A. Flamant. - Hydraulique. - 2^e Ed. 1900. - Ed. Baudry et Cie.

V. Masoni. - Corso di Idraulica teoretica e pratica. - 2^e Ed. 1900. Ed.: Pellerano, Naples.

G. Darriès - Mécanique, Hydraulique, Thermodynamique. 2^e Ed. 1906. Ed.: Dunod et Pinat.

A. Boulanger. - Hydraulique Générale (Principes et problèmes fondamentaux). 1907. Ed.: O. Doin.

Cet ouvrage est consacré exclusivement à l'exposition didactique des méthodes de M. Boussinesq.

Appendice.

Modifications et Additions.

1. Résistance de l'air. - Les plus récents travaux sur la résistance des gaz au mouvement des corps solides sont ceux du colonel Ch. Renard (à Chalais).

Le facteur de proportionnalité dans la formule de Newton, c'est-à-dire la résistance qu'éprouve une surface de 1^{m^2} animée d'une vitesse orthogonale de 1^{m} par seconde, varie entre $0,070$ et $0,125$ suivant les observateurs. Tandis que Moray obtient $0,125$, Ch. Renard trouve $0,085$, et ce dernier chiffre encadre les résultats de Fobert, Morin, Langley.

Ch. Renard a reconnu que la résistance éprouvée par une surface plane inclinée sur la direction du mouvement est simplement proportionnelle au sinus de l'angle que fait la vitesse avec la surface (alors que la loi de Newton indiquait la proportionnalité au carré de ce sinus).

[Comptes Rendus de l'Académie des Sciences; 1904].

2. Transmission par engrenages coniques. - Prenons pour origine des axes le sommet commun O des deux cônes primitifs, pour axe Oz la génératrice de contact de ces cônes, pour plan zOy le plan tangent commun. Les axes OA et OA' des deux engrenages E et E' sont situés dans le plan zOx , le premier du côté des x négatifs, le second du côté des x positifs. Pour fixer les idées, nous supposerons que l'Engrenage E tourne dans le sens adopté comme positif pour le trièdre $oxyz$ et que par l'Engrenage E' tourne dans le sens négatif.

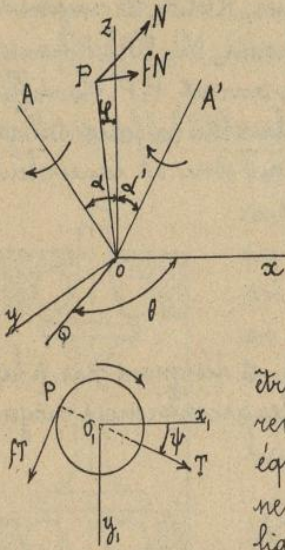
La résultante N des pressions normales exercées par E' sur E est appliquée en un certain point P (inconnu) situé sur la génératrice de contact des deux dents en prise; elle est perpendiculaire à OP et se trouve dans le plan zOP qui est normal aux dents le long de cette droite. En outre, la résultante des forces de frottement des deux dents est pour E une force fN appliquée en P , normale au plan zOP , et opposée au sens de glissement relatif de E sur E' . Soit OQ la trace du plan zOP sur zOx , la longueur OP , $\varphi = z\widehat{OP}$, $\theta = x\widehat{OQ}$. On a comme sinus directeurs:

$$\begin{array}{l} \text{pour } OP : \quad \sin \varphi \cos \theta, \quad \sin \varphi \sin \theta, \quad \cos \varphi ; \\ \text{pour } fN : \quad \sin \theta, \quad -\cos \theta, \quad 0 \\ \text{pour } N : \quad -\cos \varphi \cos \theta, \quad -\cos \varphi \sin \theta, \quad \sin \varphi. \end{array}$$

On en déduit les moments par rapport aux axes qui sont:

$$\begin{array}{l} \text{pour } N : \quad Nl \sin \theta, \quad -Nl \cos \theta, \quad 0 \\ \text{pour } fN : \quad fN l \cos \theta \cos \varphi, \quad fN l \sin \theta \cos \varphi, \quad -fN l \sin \varphi. \end{array}$$

La droite OA ayant pour cosinus directeurs $-\sin \alpha, 0, \cos \alpha$, les moments par



rapport à cette droite sont:

pour \$N\$: \$-Nl \sin \theta \sin \alpha\$,

pour \$fN\$: \$-fNl \cos \varphi \cos \theta \sin \alpha - fNl \sin \varphi \cos \alpha\$.

Considérons maintenant un plan perpendiculaire à \$OA\$, et prenons dans ce plan 2 axes rectangulaires \$o, x_1, y_1\$, issus de la trace \$o\$, de \$OA\$; le premier incliné de \$\alpha\$ sur \$ox\$, le second parallèle à \$oy\$. Soit \$\psi\$ l'angle que forme avec \$o, x_1\$, la direction de la réaction normale des tourillons; la force de frottement des tourillons \$fT\$, directement opposée au glissement, forme avec \$o, x_1\$, un angle \$\psi + \frac{\pi}{2}\$ et peut être regardée comme appliquée en un point \$P\$ de la circonférence de rayon \$\rho\$ et de centre \$o_1\$. Soit \$M\$ le couple moteur; les équations d'équilibre limite de la roue, considérée comme ne pouvant se mouvoir que parallèlement au plan de la figure, sont alors:

$$T \cos \psi - fT \sin \psi - N \cos \varphi \cos \theta \cos \alpha + N \sin \varphi \sin \alpha + fN \sin \theta \cos \alpha = 0,$$

$$T \sin \psi + fT \cos \psi - N \cos \varphi \sin \theta - fN \cos \theta = 0,$$

$$M - fT \rho - Nl \sin \theta \sin \alpha - fNl (\cos \varphi \cos \theta \sin \alpha + \sin \varphi \cos \alpha) = 0.$$

Posons \$f = \text{Eang. } i\$. Observons qu'à cause de la brièveté du pas, \$\varphi\$ est extrêmement petit, et négligeons \$\varphi^2\$. Les deux équations donnent par l'élimination de \$\frac{T}{N}\$:

$$\text{Eang} (\psi + i) = \frac{\sin(\theta + i)}{\cos \alpha \cos(\theta + i) - \varphi \sin \alpha \cos i}$$

L'angle \$\theta\$ est toujours assez voisin de \$90^\circ\$, l'angle de frottement \$i\$ ne dépasse pas \$3^\circ\$ à \$10^\circ\$; \$\sin(\theta + i)\$ est donc voisin de l'unité et \$\cos(\theta + i)\$ voisin de zéro; \$\varphi\$ étant très petit, \$\text{tang}(\psi + i)\$ est très grand, et \$(\psi + i)\$ ne s'écarte guère de \$90^\circ\$. Étant donné la lenteur de variation du sinus dans le voisinage de son maximum, le rapport \$\frac{\sin(\theta + i)}{\sin(\psi + i)}\$ ne s'écarte guère de l'unité. Or la seconde équation donne précisément cette valeur pour \$\frac{T}{N}\$ en négligeant \$\varphi^2\$.

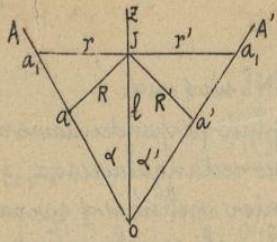
Donc on peut admettre que \$T = N\$ et écrire:

$$M = N \left\{ f \rho + l \sin \theta \sin \alpha + f l (\cos \varphi \cos \theta \sin \alpha + \sin \varphi \cos \alpha) \right\}.$$

Pour le second cône, il faut changer \$\alpha\$ en \$-\alpha'\$, \$N\$ en \$-N\$, \$fN\$ en \$-fN\$, \$\rho\$ en \$\rho'\$ et remplacer le moment \$M\$ par le moment résistant \$M'\$ pris positivement, la rotation autour de \$o_1\$ s'effectuant dans le sens inverse. On obtient ainsi:

$$M' = N \left\{ -f \rho' + l \sin \theta \sin \alpha' - f l (-\cos \varphi \cos \theta \sin \alpha' + \sin \varphi \cos \alpha') \right\}.$$

La résultante des pressions \$N\$ s'applique entre les extrémités de la génératrice de contact qui est relativement assez courte par rapport au rayon moyen de chaque roue; on peut donc prendre pour \$l\$ la distance moyenne du contour de la roue au sommet du cône primitif, mesurée suivant la génératrice de ce cône. - Soient \$P\$ et \$P'\$ les forces équivalentes à la puissance et à la résistance utile



respectivement tangentes aux deux circonférences moyennes des cônes primitifs des roues; R et R' les rayons de ces circonférences; on a $M = PR = Pl \sin \alpha$, $M' = P'R' = P'l' \sin \alpha'$. S'il n'y avait pas frottement, on aurait $P = P'$. La différence $P - P'$ représente donc la valeur de la force tangente à la circonférence moyenne du cône OA équivalente au frottement; et l'on a :

$$\frac{P - P'}{P} = f \frac{\left[\frac{P}{\sin \alpha} + \frac{P'}{\sin \alpha'} \right] + l \sin \alpha (\cot \alpha + \cot \alpha')}{l \sin \theta + f \cos \theta - f \left[\frac{P'}{\sin \alpha'} + l \sin \alpha \cot \alpha' \right]}$$

Supposons les rouillons choisis de telle sorte que $\frac{P}{\cos \alpha} = \frac{P'}{\cos \alpha'} = \lambda$, et désignons par p la longueur de la normale issues du point J de oz située sur les circonférences moyennes. On a :

$$P - P' = f P' (\cot \alpha + \cot \alpha') \frac{(\lambda + p)}{l (\sin \theta + f \cos \theta) - f \cot \alpha' (\lambda + p)}$$

On point J, dans le plan des axes, menons une perpendiculaire à oz, limitée aux axes; soient r et r' les segments limités entre J et les axes; $r = l \tan \alpha$, $r' = l' \tan \alpha'$. Le travail absorbé par le frottement pour un déplacement élémentaire ds sur chacune des circonférences primitives est $(P - P') ds$, soit :

$$f P' \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \cdot \frac{(\lambda + p) ds}{\sin \theta + f \cos \theta - \frac{f(\lambda + p)}{r'}}$$

Le travail de frottement pour une conduite d'un pas est donc, par rapport au travail utile

$$E_f = E_u \cdot f \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \frac{1}{a} \int_0^a \frac{(\lambda + p) ds}{\sin \theta + f \cos \theta - \frac{f(\lambda + p)}{r'}}$$

Pour pousser le calcul plus loin, il faudrait faire intervenir la forme des dents.

Approximativement, en égard à la brièveté des dents on peut prendre $p = s$; comme θ est voisin de 90° , on remplacera les deux premiers termes du dénominateur par 1; le dernier terme sera négligé à cause de la petitesse de $f(\lambda + p)$ devant r' ; l'intégrale vaudra alors $\lambda a + \frac{a^2}{2}$, et l'on aura :

$$E_f = E_u \cdot \frac{fa}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \left(1 + \frac{2\lambda}{a} \right)$$

Cette formule se réduit, pour $\lambda = 0$, à celle donnée au N° 2 du Ch. IV (1^{ère} Partie); elle se transforme de même et conduit à :

$$E_f = E_u \cdot f \pi \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} + \frac{2 \cos i}{n n'}} \left(1 + \frac{2\lambda}{a} \right),$$

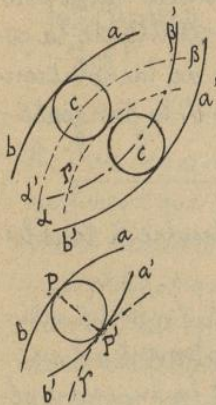
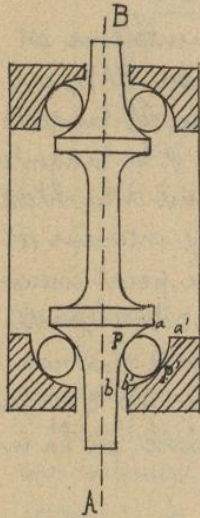
n et n' étant les nombres de dents, $i = \alpha + \alpha'$ l'angle des axes.

[L. Lecornu; Journal de l'Ecole Polytechnique, 2^e Série; 3^e Cahier; 1897].

3. Roulements sur billes. — Dans l'automobilisme et dans la construc-

tion des bicyclettes, pour diminuer le travail des forces de frottement dans la rotation d'un arbre autour de son axe, on interpose des billes entre l'arbre tournant et ses supports, et on substitue ainsi la résistance de pivotement au frottement de glissement.

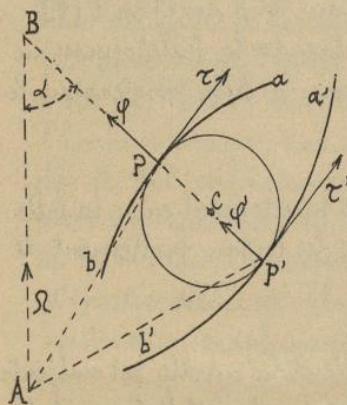
Pour que les billes ne puissent s'échapper, on les loge vers chaque bout de l'arbre dans un espace annulaire compris entre un épaulement présenté par l'arbre et un évidement appartenant au support. L'épaulement (engendré par a b) se nomme le cône, l'évidement (engendré par a' b') constitue la cuvette. Un jeu de vis permet d'écartier ou de rapprocher soit les deux cônes, soit les deux cuvettes, de façon à régler les dimensions des logements offerts aux billes. Le serrage est fait à fond quand on ne peut plus diminuer les logements sans écraser les billes.



Avant que le serrage soit fait à fond, la bille a son centre situé dans l'espace annulaire engendré par les arcs parallèles aux méridiennes du cône et de la cuvette, à une distance égale au rayon de la bille. Le serrage rapproche ces deux arcs; à l'instant où ils deviennent tangents, il n'y a plus qu'une seule position possible pour la bille, et le serrage est fait à fond: dans cette position, les points de contact P et P' de la bille avec le cône et avec la cuvette sont diamétralement opposés.

Le serrage doit être fait presque à fond pour éviter le ballonnement de l'arbre, mais sans excès de pression, pour éviter que les frottements deviennent considérables.

Souvent, au lieu de faire tourner l'arbre portant les cônes par rapport aux cuvettes, on maintient cet arbre fixe, et la rotation est donnée à un arbre creux portant les deux cuvettes. C'est ce dispositif que présentent les roues de bicyclettes, et que nous considérerons dorénavant.



Nous allons étudier le mouvement de l'une des billes pendant la rotation de la cuvette. Chaque bille est supposée de poids négligeable, c'est-à-dire que son poids et les forces d'inertie développées par son mouvement sont toujours insignifiants vis-à-vis des pressions qu'elle supporte. Les forces extérieures qui lui sont appliquées et qui se font équilibre sont les réactions exercées sur la bille par le cône en P (pression normale N , force de frottement F , couple ϕ) et par la cuvette en P' (pression normale N' , force de frottement F' , couple ϕ'). Les pressions normales N et N' d'une part, et les forces de frottement F et F' d'autre part,

sont égales et de sens contraires. De plus, si d est le diamètre de la bille, on a, en valeur absolue $Fd = \phi + \phi'$, et $\frac{F}{N} = \frac{\phi}{Nd} + \frac{\phi'}{Nd}$. Comme $\frac{\phi}{Nd}$ et $\frac{\phi'}{Nd}$ sont très petits par rapport au coefficient de frottement f , si l'écrasement de la bille n'est pas considérable, la valeur de $\frac{F}{N}$ est inférieure à f ; dès lors la condition pour qu'il n'y ait pas glissement est remplie et la bille va rouler et pivoter sans glisser sur le cône et sur la cuvette.

Le mouvement élémentaire de la bille par rapport à l'arbre intérieur est une rotation ω autour d'une droite PA située dans le plan méridien PAB, car elle est perpendiculaire à la vitesse du centre C de la sphère qui est tangente à un parallèle. Les composantes φ et τ de ω suivant la normale et la tangente à la méridienne en P sont respectivement la vitesse de pivotement et la vitesse de roulement en P. La vitesse du point P' par rapport à l'arbre intérieur est alors τd , mais comme elle est égale d'autre part à la vitesse du point coïncidant de la cuvette, la bille ne glissant pas sur la cuvette, on a $\tau d = \omega l$, en désignant par ω la rotation instantanée de l'arbre extérieur creux par rapport à l'arbre intérieur plein, et par l la distance de P' à l'axe AB. τ est ainsi connu en grandeur, et son sens est immédiatement déterminé; on l'a indiqué par une flèche sur la figure.

Le mouvement de la bille par rapport à la cuvette sera d'autre part une rotation ω' autour d'un axe passant par P'; mais comme il résulte de la rotation ω autour de PA et de la rotation ω autour de AB, l'axe de la rotation ω' sera PA; de plus ses composantes φ' et τ' suivant la normale et la tangente à la méridienne de la cuvette en P' auront pour expressions:

$$\varphi' = \varphi - \omega \cos \alpha, \quad \tau' = \tau - \omega \sin \alpha,$$

α étant l'angle de P'P avec AB. Ces formules peuvent d'ailleurs s'étendre à tous les cas possibles de figure, avec des conventions de signes convenables.

D'après cela, τ et τ' sont connus en fonction de ω , tandis que φ et φ' n'ont à vérifier qu'une relation. Mais il est naturel d'admettre que le pivotement a lieu par rapport à celle des deux surfaces qui oppose au pivotement la moindre résistance. Le cône et la cuvette ayant la même structure superficielle et les pressions normales étant égales, il résulte des indications données au No 8 du Chap. I (1^{ère} Partie), que la cuvette, qui tourne sa concavité vers le centre de la bille, oppose au pivotement une résistance plus grande que le cône. Donc la bille pivotera sur le cône et roulera sur la cuvette; on aura:

$$\varphi' = 0, \quad \varphi = \omega \cos \alpha.$$

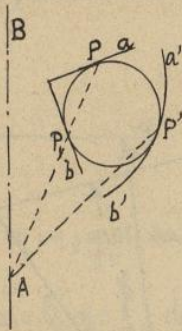
Soient ϕ_n et ϕ'_n les axes des couples dus au frottement de pivotement entre la bille et le cône et entre la bille et la cuvette; on aura d'après les lois du frottement de pivotement:

$$\phi_n = f_n N \quad \text{et} \quad \phi'_n \leq f_n N.$$

Le travail du frottement de pivotement entre la bille et la cuvette est nul; entre la bille et le cône, il vaut: $\int f_n N \omega \cos \alpha dt$; comme d'autre part c'est le travail du

frottement de pivotement qui est ici prépondérant, le cône doit s'user plus vite ^{231.} que la cuvette, ainsi qu'on le constate effectivement.

Lorsque les pressions à transmettre sont considérables, on peut avoir recours aux roulements à trois ou quatre contacts. La figure ci-contre montre un dispositif où chaque bille a deux contacts P et P_1 avec le cône, et un seul contact P' avec la cuvette. La cinématique suffit alors à déterminer le mouvement de la bille par rapport au cône : c'est une rotation ω autour de la droite PP_1 , P et P_1 ayant une vitesse nulle par rapport au cône, et la rotation $\omega \Delta = \omega l'$ (Δ étant la distance de P' à PP_1) fait connaître sa grandeur ω . Le mouvement de la bille sur la cuvette sera une rotation connue autour de $A P'$; si $A P'$ est tangente à la méridienne de la cuvette, il y aura roulement sans pivotement.



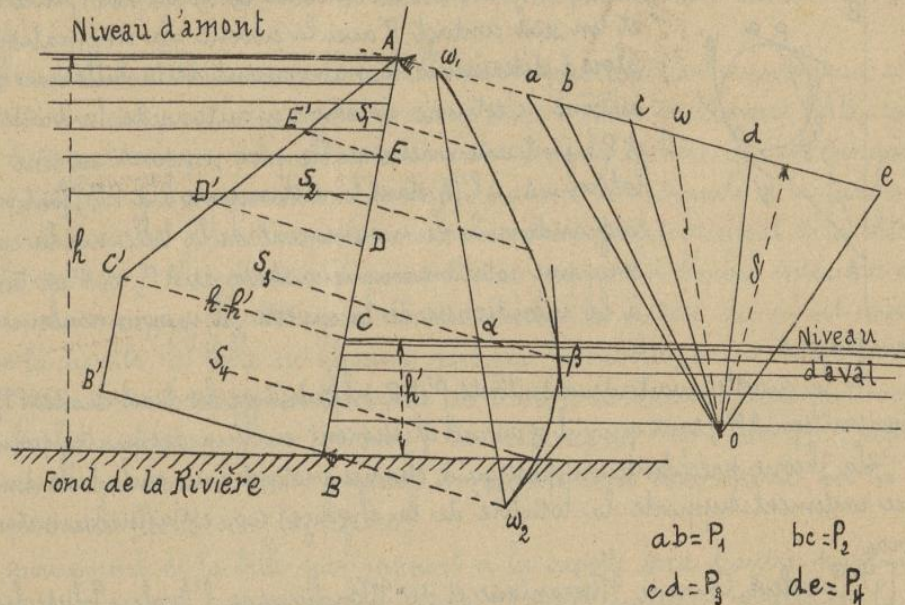
Si la cuvette avait deux contacts P' et P_1 , il faudrait que les trois droites PP_1 et $P'P_1$ se coupassent sur AB , sans quoi il y aurait glissement en l'un des quatre points.

La théorie précédente suppose qu'à chaque instant une seule bille dans chaque roulement supporte la totalité de la charge; ceci est approximativement vrai.

[P. Painlevé, Cours de Mécanique et de Machines de l'École Polytechnique; 1905].

H. Sur les origines de la Statique Graphique. - Les premiers essais ne furent que la traduction en langage géométrique d'expressions préalablement déduites de l'Analyse (Poncelet, Saint Guilhem, Méry). L'idée d'employer systématiquement le polygone des forces et le polygone funiculaire, apparait bien à l'état embryonnaire dans un Mémoire publié par Lamé et Clapeyron, en 1826, dans un Recueil peu connu de St-Petersbourg. Mais c'est en 1843 que le capitaine du génie Moichon, professeur à l'École d'application de Metz, présente la première application directe des propriétés des deux polygones à l'étude de la stabilité des voûtes et des murs de revêtement. L'enseignement de Moichon fut tout à fait conforme à l'esprit des méthodes de la Statique Graphique. Les droits de priorité de Moichon ont été très explicitement reconnus par Culmann à qui revient l'honneur d'avoir, par son enseignement à l'École Polytechnique de Zurich, à partir de 1860, définitivement constitué la Statique graphique à l'état de corps de doctrine autonome et homogène. Il n'a pas bien entendu, d'un seul coup épuisé la matière. Par exemple, la méthode graphique pour déterminer les moments d'inertie des aires planes est due à Mohr. C'est aussi à Mohr qu'est due la construction graphique de la ligne élastique des prismes travaillant à la flexion.

5. Aiguille de barrage soutenant une charge d'eau. - Comme exemple ²³² du pontre soumise à une charge continue non uniformément répartie, nous donnerons la détermination de l'équarrissage d'une aiguille soutenant une charge d'eau. On désigne, sous ce nom des madriers AB placés côte à côte, soutenus



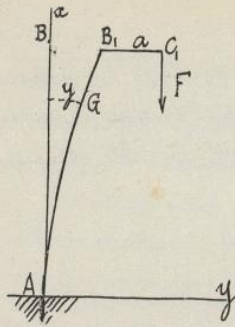
par des appuis horizontaux, et qui ont pour objet de former un barrage plus ou moins étanche (barrage Poirée).

La hauteur d'eau en amont étant h et celle en aval h' , la ligne de charge sur l'aiguille AB sera la ligne AC'B'B formant le triangle ACC' et le rectangle BB'C'C tels que $BB' = CC' = h - h'$. - Désignons par S_1, S_2, S_3, S_4 les surfaces élémentaires AEE', DD'EE', CC'DD', BB'CC', par a la largeur horizontale d'une aiguille le en travers de la rivière; par P_1, P_2, P_3, P_4 les charges élémentaires agissant sur les parties AE, DE, CD et BC de l'aiguille. On a:

$$P_1 = 1000^k \cdot a \cdot S_1, \quad P_2 = 1000^k \cdot a \cdot S_2, \quad P_3 = 1000^k \cdot a \cdot S_3, \quad P_4 = 1000^k \cdot a \cdot S_4.$$

Construisons le dynamique $oabcde$ et le funiculaire correspondant ω_1, ω_2 ; on aura ainsi le diagramme des moments fléchissants ($M = \alpha \beta \times S$), qui permettra de déterminer la dimension b de l'aiguille parallèlement au courant par la relation $\frac{R_0 \cdot a \cdot b^2}{6} = M$.

6. Pontre chargée debout par une force excentrée. - Soit une pièce verticale AB élastique à sa partie inférieure A et sollicitée à son extrémité supérieure libre B par une force verticale F, agissant à l'extrémité d'un bras rigide BC fixé à angle droit sur AB. La force F est supposée située dans un plan de symétrie de la pièce; elle produira une flexion dans ce plan, don-



nant lieu à une flèche f . Nous admettrons de plus qu'elle²³³ est inférieure à la limite de flambage trouvée au § 6² 1 du Chapitre XIV dont nous conserverons les notations. Soit $B_1 C_1 = a$, nous aurons : $M = F(a + f - y)$, et en posant $k^2 = \frac{F}{EI} \left(1 - \frac{F}{E\Omega}\right)$, l'équation de la fibre moyenne déformée sera :

$$\frac{d^2 y}{dx_1^2} = k^2 (a + f - y).$$

Cette équation a pour intégrale générale :

$$y = a + f + A \cos kx_1 + B \sin kx_1.$$

Pour $x_1 = 0$, y et sa dérivée sont nuls ; on a donc :

$$B = 0 \quad a + f + A = 0.$$

Pour $x_1 = l$, $y = f$; donc :

$$0 = a + A \cos kl.$$

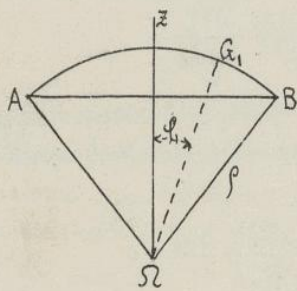
La flèche f a donc pour expression :

$$f = a \left(\frac{1}{\cos kl} - 1 \right).$$

La tension maximum dans une section sera définie par :

$$N_1 = \frac{F}{\Omega} + \frac{F(a + f - y)}{I}.$$

7 Sur les faibles déformations des pièces circulaires. — Soit une



pièce circulaire AB, de centre Ω , de rayon ρ à l'état naturel, Ωz un axe fixe dans le plan de la fibre moyenne. Un point G_1 de coordonnées polaires (ρ, φ_1) vient après la mise en charge occuper une position G de coordonnées polaires (r, φ) par rapport à Ωz . Posons : $r = \rho(1 + \Delta)$. Δ est une fonction de φ que nous admettrons assez petite pour que ses puissances et celles de ses dérivées soient négligeables. Nous nous proposons de former une équation différentielle linéaire du second ordre définissant cette fonction Δ .

À ce degré d'approximation, l'expression de la courbure en coordonnées polaires

se réduit à :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{r \frac{d^2 r}{d\varphi^2} - 2 \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r^2}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}},$$

se réduit à :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \Delta - \frac{d^2 \Delta}{d\varphi^2} \right).$$

L'équation d'Euler [Chap. X, formule XI] : $EI \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) = M$ donne :

$$\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2} + \Delta + \frac{Mp}{EI} = 0.$$

Le moment fléchissant M étant une fonction donnée de φ , soit $M = F(\varphi)$, la détermination de Δ et par suite celle de la déformation est réduite à l'intégration de cette équation différentielle, intégration possible par quadratures. L'intégrale générale est :

$$\Delta = A \cos \varphi + B \sin \varphi - \cos \varphi \int \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} \int F(\varphi) \cos \varphi d\varphi,$$

A et B étant deux constantes arbitraires qu'on déterminera par les conditions relatives aux extrémités de la pièce.

On pourra calculer, en utilisant cette équation, la flèche prise par l'arc étudié au 96^o 2 du Chapitre XI.

8. Plaques circulaires. - Il existe plusieurs théories de la déformation des plaques; elles diffèrent par leurs hypothèses, mais conduisent à des conclusions très voisines. Il ne paraît donc pas inutile de donner un aperçu de la démonstration des résultats simplement énoncés au Chapitre II de la 2^e Partie.

Soit une plaque d'épaisseur constante $2e$, soumise seulement sur chacune de ses faces à une pression uniforme P_0 et P_1 ($P_0 > P_1$); le feuillet moyen étant pris pour plan xoy , on dirige oz vers le milieu où agit la pression P_1 . Partons alors des équations générales de l'équilibre élastique (2^e Partie, Ch. III, § A, N^o 5, équ. 3), en observant que

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial(zT_2)}{\partial x} \right] - z \frac{\partial^2 T_2}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial(zT_1)}{\partial y} \right] - z \frac{\partial^2 T_1}{\partial y \partial z}.$$

Dérivons la première équation par rapport à x , la seconde par rapport à y , ajoutons les équations obtenues; multiplions l'équation résultat par z et ajoutons-la à la troisième équation. Il vient :

$$\left(\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} \right) z + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial(zT_2)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial(zT_1)}{\partial y} \right] + \frac{\partial N_3}{\partial z} = 0.$$

Multiplions par dx et intégrons de $-e$ à $+e$. Nous regardons les efforts tangentiels comme sensiblement les mêmes, sur une même normale à xoy , aux points situés sur les deux faces, les efforts étant relatifs à ces faces; l'intégration des termes contenant T_2 et T_1 donnera par suite des résultats négligeables; celle du terme contenant N_3 donne la différence des pressions normales exercées sur les deux faces de la plaque: $p = P_0 - P_1$, et l'on a:

$$\int_{-e}^{+e} \left(\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} \right) z dx + p = 0.$$

Cinsi qu'on l'a signalé au 96^o 3 du Chap. XII, l'expérience conduit à admettre que la dilatation suivant l'épaisseur de la plaque est nulle. Prenons donc:

$$N_1 = \frac{2}{5} E \left[3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right], N_2 = \frac{2}{5} E \left[3 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right], T_3 = \frac{2}{5} E \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

la relation précédente s'écrit :

$$\frac{6}{5} E \int_{-e}^{+e} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) z dz + \nu = 0.$$

Limitons-nous au cas des plaques circulaires et prenons l'origine o au centre de la section moyenne. - Par raison de symétrie, le déplacement d'un point a lieu dans le plan méridien du point et ne dépend que de la cote et du rayon polaire r du point. Soient U et W ses composantes radiale et axiale; W ne dépend pas de z , puis-que ∂_z est nulle. On a alors :

$$u = \frac{x}{r} U, \quad v = \frac{y}{r} U.$$

et par suite :

$$\phi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2U}{r} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Ur);$$

la fonction ϕ doit vérifier la relation :

$$\frac{6E}{5} \int_{-e}^{+e} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) z dz + \nu = 0.$$

Mais si l'on transforme en coordonnées polaires ($x = r \cos \omega$, $y = r \sin \omega$), on a identiquement :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right), \quad (a)$$

et il en résulte que :

$$\frac{6E}{5} \int_{-e}^{+e} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Ur) \right] \right\} z dz + \nu = 0.$$

Soit alors G un point du feuillet moyen déformé; W_0 sa cote; W_0 ne dépend que de r . Considérons un point situé, à l'état naturel, sur la parallèle à oz menée par G . Par analogie avec la théorie de la flexion, on admet que la dilatation radiale est proportionnelle à la distance z du point considéré, au feuillet moyen et à la courbure $-\frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2}$ prise par ce feuillet moyen, en G , et l'on pose :

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -z \frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2}, \text{ et par suite } U = -z \frac{\partial W_0}{\partial r} + f(z);$$

comme pour $r=0$, $\frac{\partial W_0}{\partial r}$ est nul comme U , par raison de symétrie, quel que soit z , on a $f(z)=0$. L'intégration par rapport à z est alors possible, et l'on a :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W_0}{\partial r} \right) \right] \right\} = \frac{5\nu}{16 E e^3}$$

Cette équation déterminera W_0 en fonction de r ; il vient d'abord :

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W_0}{\partial r} \right) \right] = \frac{5\nu r^2}{8 E e^3} + A$$

Puis :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W_0}{\partial r} \right) = \frac{5\nu r^2}{16 E e^3} + A \log \frac{r}{\rho} + B,$$

236.
 étant le rayon de la plaque. D'après l'identité (a), le premier membre n'est
 autre que $\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}$, somme des courbures du feuillet moyen dans le sens des
 axes x et y .

Il ne saurait être infini pour $r=0$. Donc $A=0$. Il vient ensuite :

$$r \frac{\partial W_0}{\partial r} = \frac{5\nu r^4}{6H E e^3} + \frac{B r^2}{2} + C.$$

Or pour $r=0$, $\frac{\partial W_0}{\partial r} = 0$. Donc $C=0$. Enfin :

$$\frac{\partial W_0}{\partial r} = \frac{5\nu r^3}{6H E e^3} + \frac{B r}{2}, \text{ et } W_0 = \frac{5\nu}{256 E e^3} (r^4 - \rho^4) + \frac{B}{H} (r^2 - \rho^2).$$

1° Il y a encastrement sur le pourtour de la plaque. Pour $r=\rho$, $\frac{\partial W_0}{\partial r} = 0$.

$$B = -\frac{5\nu \rho^2}{32 E e^3}.$$

La dilatation, qui atteint sa plus grande valeur à la surface, y vaut :

$$e \frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2} \text{ ou } \frac{5\nu (3r^2 - \rho^2)}{6H E e^2};$$

son maximum a lieu pour $r=\rho$ et vaut : $\frac{5\nu \rho^2}{32 E e^2}$ ou $\frac{5(P_0 - P_1)\rho^2}{8E(2e)^2}$; exprimons qu'il
 n'excède pas $\frac{R_0}{E}$, et nous aurons :

$$\frac{5(P_0 - P_1)\rho^2}{8(2e)^2} \leq R_0 \text{ ou } \text{Epaisseur} \geq \rho \sqrt{\frac{5(P_0 - P_1)}{8R_0}}$$

C'est le résultat donné au Chapitre XII (remarquer seulement que l'épaisseur
 désignée alors par e , s'appelle ici $2e$).

2° La plaque est posée sur son pourtour. Le moment fléchissant est nul
 sur le contour. Prenons les points $x=\rho$, $y=0$; on y a :

$$N_1 = -\frac{2Ez}{5} \left\{ \frac{H}{r} \frac{\partial W_0}{\partial r} + 3\rho \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W_0}{\partial r} \right] \right\}_{r=\rho}$$

La condition de nullité du moment fléchissant sur le contour donne :

$$\int_{-e}^{+e} N_1 z dz = 0; \text{ et par suite : } B = -\frac{25\nu \rho^2}{6H E e^3}$$

La dilatation à la surface : $\frac{5\nu(5\rho^2 - 6r^2)}{128 E e^2}$ a sa plus grande valeur pour

$r=0$ et vaut : $\frac{25\nu \rho^2}{128 E e^2}$ ou $\frac{25(P_0 - P_1)}{32 E (2e)^2}$. On en conclut comme plus haut

$$\text{Epaisseur} \geq \frac{5}{H} \rho \sqrt{\frac{P_0 - P_1}{2R_0}}$$

C'est bien là le résultat énoncé à la fin du Chapitre XII.

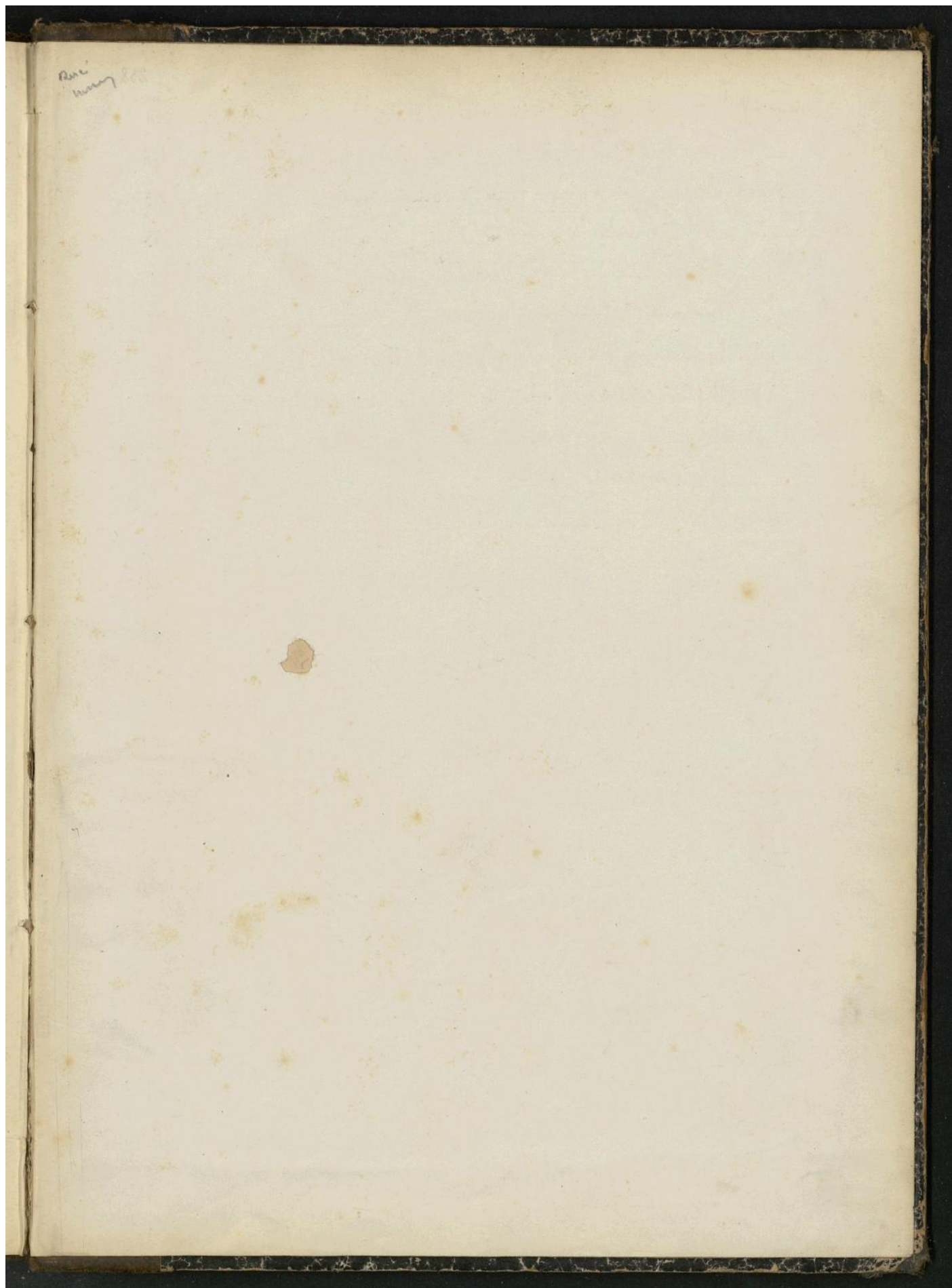
Autographié par E. Crébaux, dessinateur, Jure de Rouai - Lijesville.

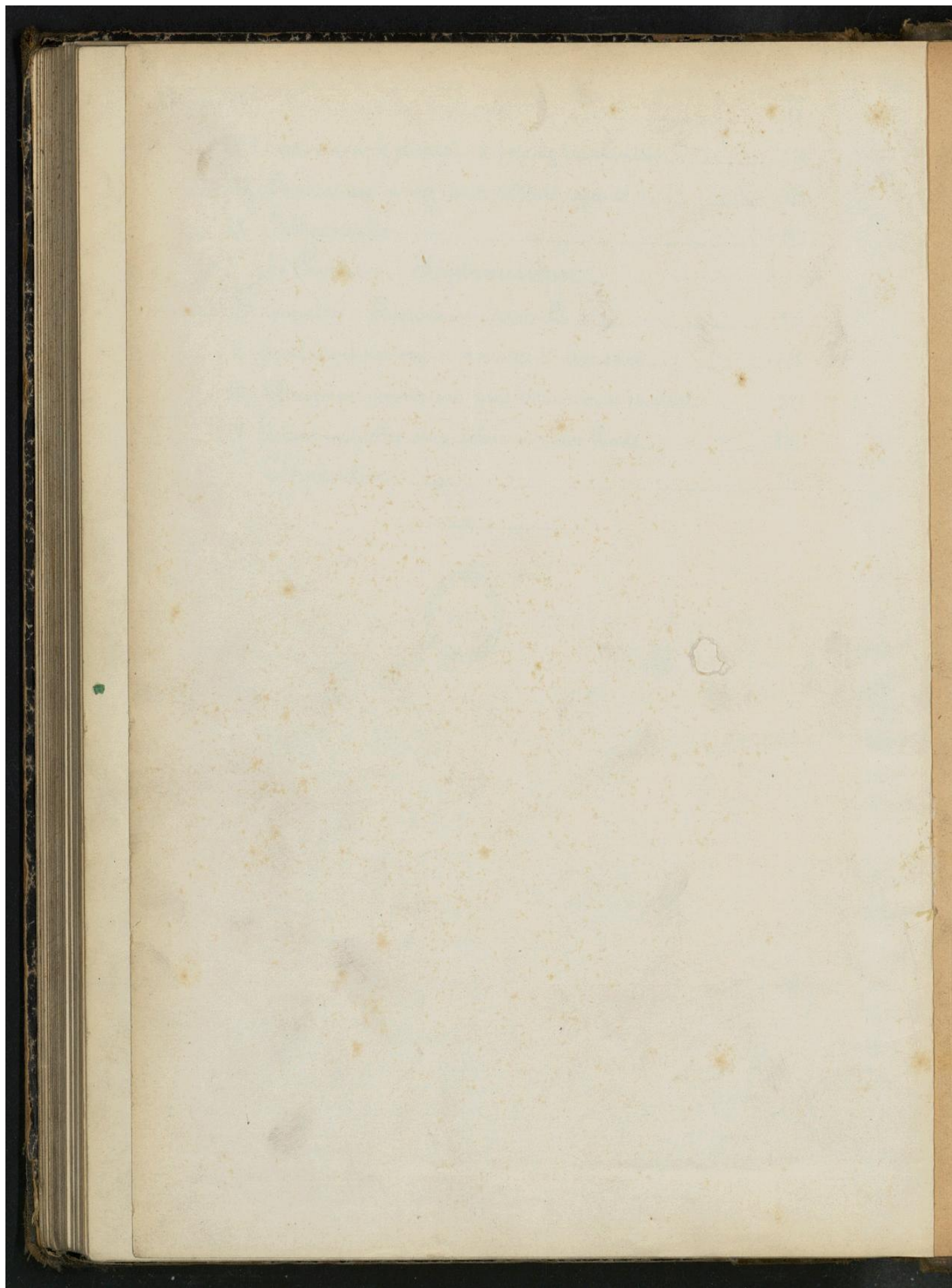
Table des Matières

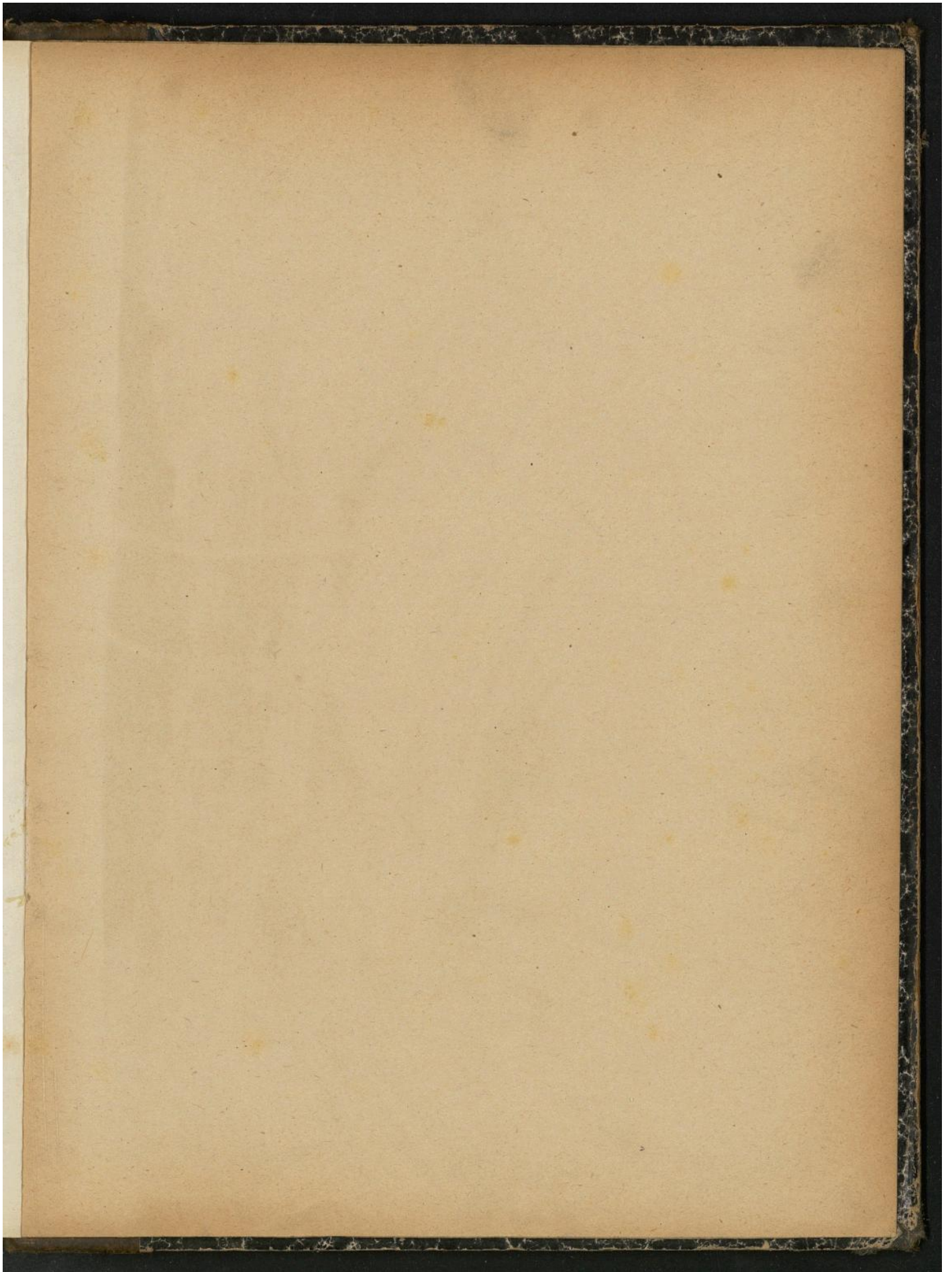
	Pages
Introduction	2
1 ^{ère} Partie. — Mécanique des solides naturels.	
Chapitre I. Généralités et lois expérimentales	3
— II Rendement des machines simples	10
— III Utilisation des forces de frottement	18
— IV Résistances passives dans les transmissions usuelles	28
2 ^e Partie. — Résistance des Matériaux.	
Chapitre I. Principes généraux de Statique graphique	38
— II Détermination des centres de gravité et des moments d'inertie des aires planes	47
— III Principes généraux de la théorie de l'élasticité	57
— IV Extension, compression, cisaillement des pièces prismatiques	72
— V Flexion transversale des prismes droits	83
— VI Moments fléchissants et efforts tranchants dans les poutres droites posées sur deux appuis simples ou à encastrement	96
— VII Ponts continus	109
— VIII Ponts droites à section variable et d'égal résistance	117
— IX Flexion déviée des poutres droites	124
— X Flexion des arcs	127
— XI — Idem — Applications	135
— XII Résistance des enveloppes	141
— XIII Flexion des poutres droites par des forces obliques	146
— XIV Flambement des pièces chargées debout	149
— XV Systèmes articulés triangulaires	154
— XVI Notions sur les ponts métalliques	158

	238
	Pages
Chapitre XVII Notions sur les Charpentes -----	164
— XVIII Eorsion simple et mixte; arbres de transmission -----	174
— XIX Applications diverses: rivets, ressorts, volants -----	183
— XX Bibliographie -----	193
3 ^e Partie .. Hydraulique..	
Chapitre I Généralités .. Théorème de Bernoulli -----	197
— II Ecoulement par orifices, ajutages et déversoirs -----	208
— III Mouvement permanent dans les tuyaux de conduite -----	214
— IV Actions mutuelles d'un solide et d'un fluide -----	221
Appendice -----	226





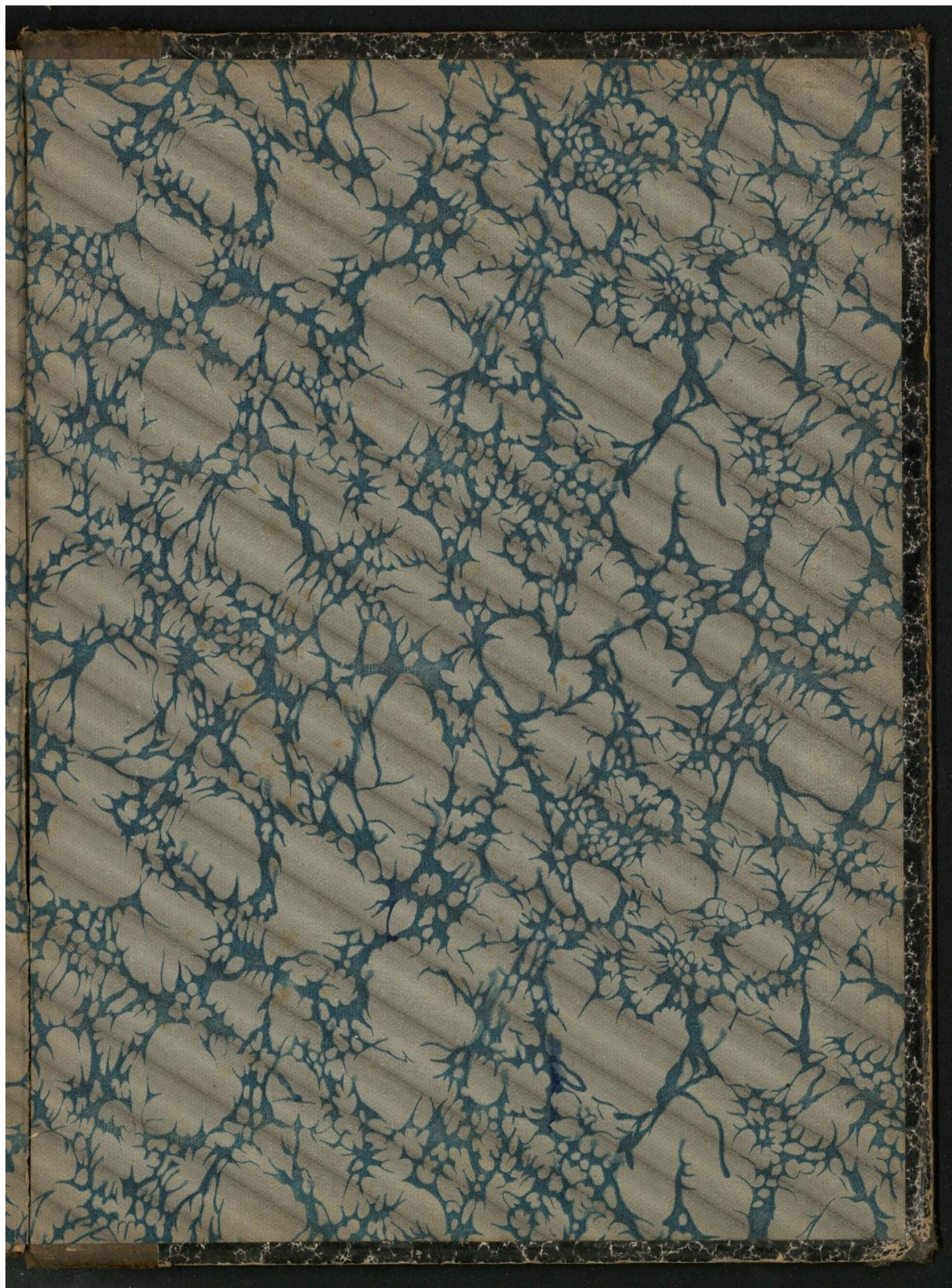




Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires