

Conditions d'utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- [Le Conservatoire numérique](#) communément appelé [le Cnum](#) constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d'œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n° 78-753 du 17 juillet 1978 :

- la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue ([Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - http://cnum.cnam.fr](#))
- la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- les reproductions de documents protégés par le droit d'auteur, uniquement consultables dans l'enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

4- Pour obtenir la reproduction numérique d'un document du Cnum en haute définition, contacter [cnum\(at\)cnam.fr](mailto:cnum(at)cnam.fr)

5- L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d'utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

Auteur(s)	Koenigs, Gabriel (1858-1931)
Titre	La statique et les méthodes graphiques appliquées aux machines et aux constructions : 1929-1930 : notes prises par les élèves au cours de la session 1926-1927
Adresse	Paris : La circulaire modèle, 1930
Collation	1 vol. (146 f.-l f. de pl.) : ill. ; 22 cm
Nombre d'images	159
Cote	CNAM-BIB 4 Da 18
Sujet(s)	Constructions -- Méthodes graphiques -- Manuels d'enseignement supérieur Machines -- Méthodes graphiques -- Manuels d'enseignement supérieur Mécanique -- Manuels d'enseignement supérieur Statique -- Manuels d'enseignement supérieur
Thématique(s)	Histoire du Cnam Machines & instrumentation scientifique
Typologie	Ouvrage
Langue	Français
Date de mise en ligne	20/05/2021
Date de génération du PDF	20/05/2021
Permalien	http://cnum.cnam.fr/redir?4DA18



LA CIRCULAIRE
MODELE

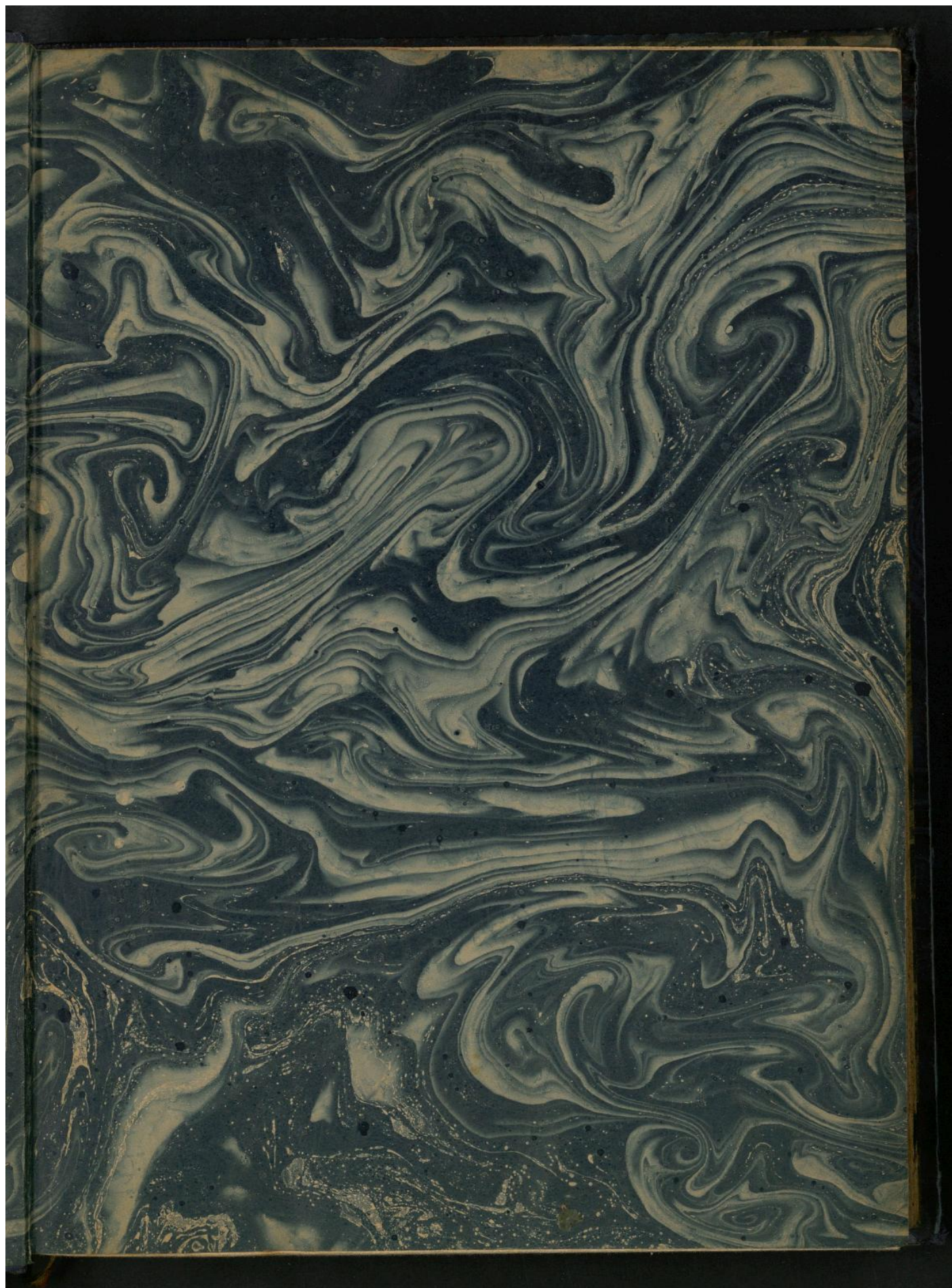
DIRECTEUR
R. RIBEYROL

TÉLÉPH.
LITRÉ 78.59

48, RUE ST PLACIDE, PARIS VI

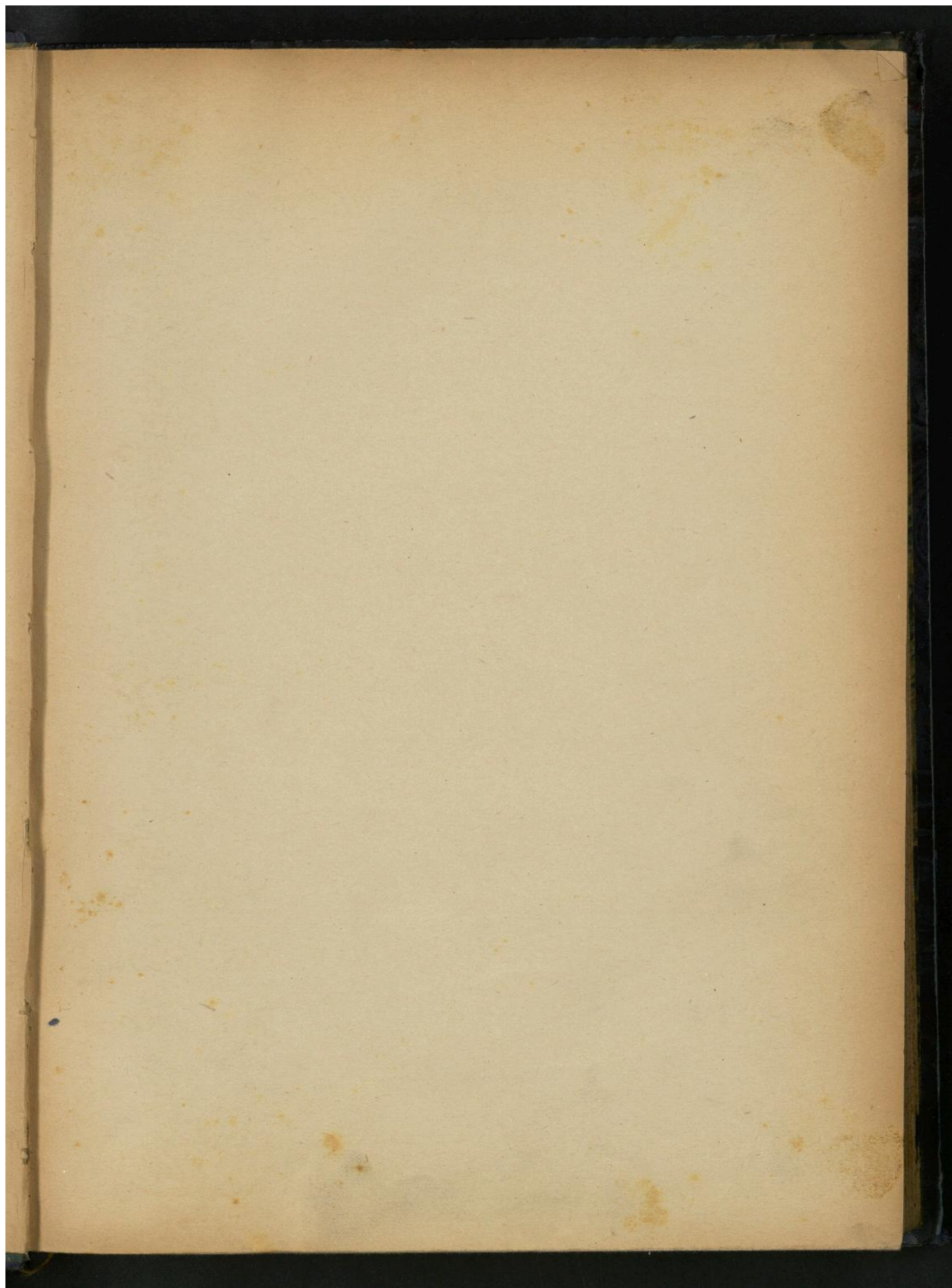
Reproduction rapide et irréprochable de tous documents

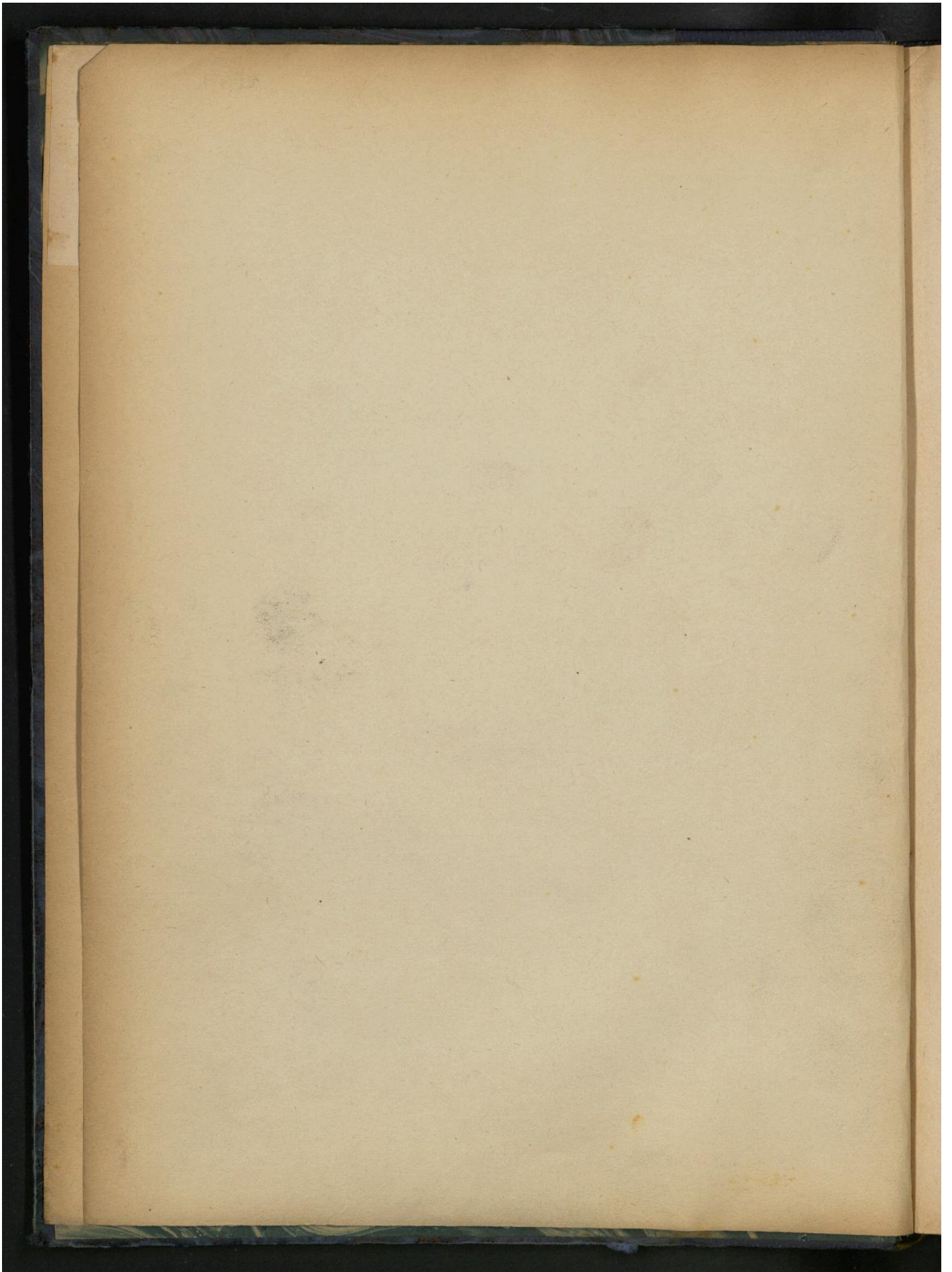
■ PRIX CONSCIENCIEUX ■



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires







4° Da. 18

Conservatoire National des Arts et Métiers

COURS DE MECANIQUE

PAR M. KOENIGS
Membre de l'Institut



LA STATIQUE ET LES METHODES GRAPHIQUES
APPLIQUEES AUX MACHINES ET AUX CONSTRUCTIONS

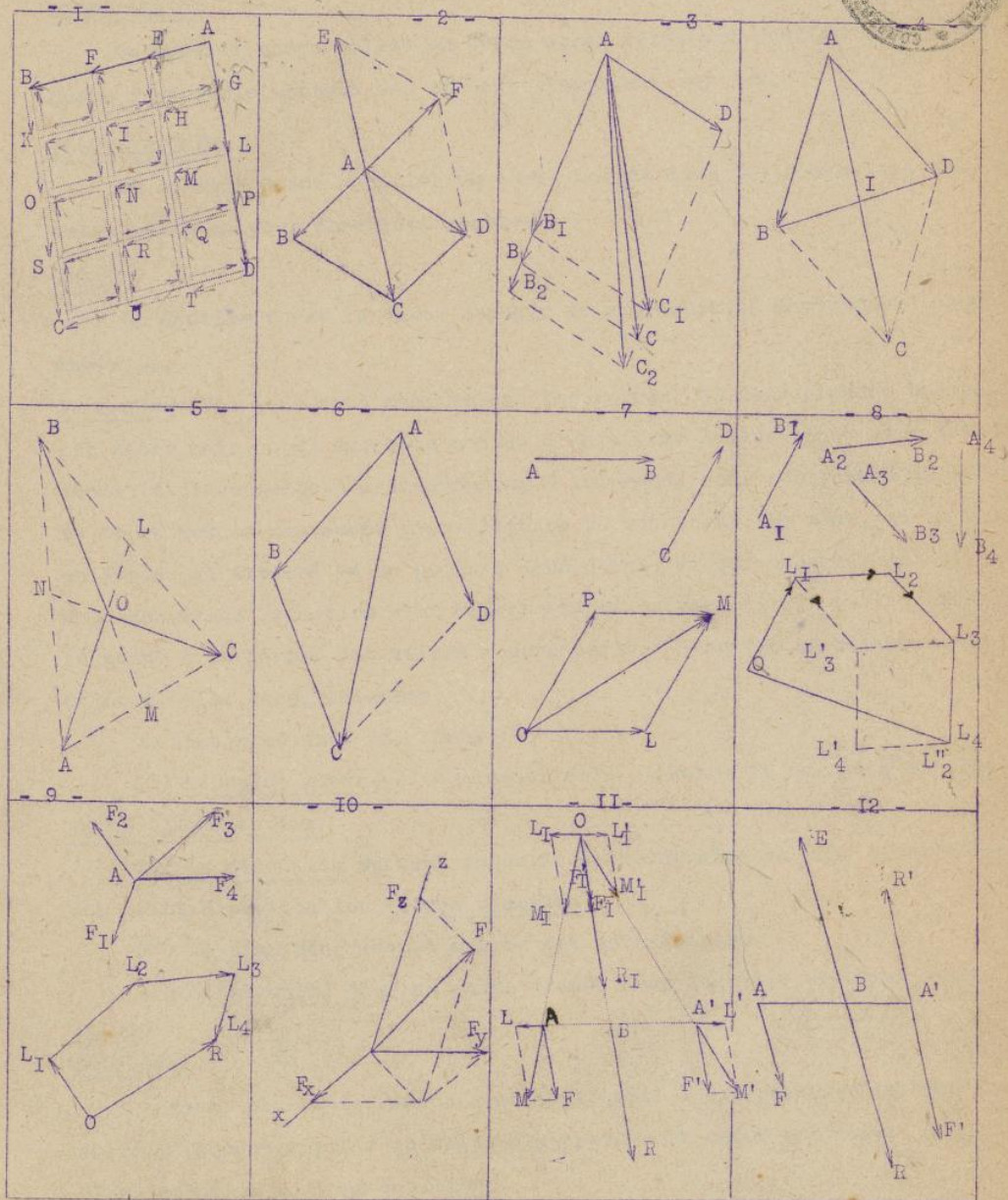
1929 - 1930



Notes prises par les Elèves au cours de la Session

1926 - 1927

DEUXIEME EDITION



NOTIONS DE STATIQUE THEORIQUE

DEFINITIONS ET PREMIERS PRINCIPES

CORPS SOLIDE

On appelle corps solide un corps assez résistant pour conserver une forme invariable lorsque des efforts s'exercent sur lui.

POINT MATERIEL

On appelle point matériel un corps solide dont les dimensions sont assez réduites pour être négligeables.

FORCE

On appelle force la cause capable de provoquer le mouvement d'un point matériel.

Remarque.- Nos sens nous manifestent les forces. Si nous plaçons un poids sur notre main, nous avons la notion d'un effort à développer pour le soutenir, et lorsque nous l'abandonnons à lui-même, nous constatons qu'il tombe et se met en mouvement sous l'action de son poids. De même, si un fil ou un câble est attaché en un point A d'un corps, et que nous tirions dessus, nous acquérons la notion d'un effort exercé suivant le fil ou le câble sur le point A du corps. Cet effort pourra arriver à mettre en mouvement le point A et le corps lui-même.

On distingue dans une force :

1°) Le point matériel sur lequel elle s'exerce et que l'on appelle point d'application.

2°) La direction suivant laquelle elle entraîne ou tend à entraîner son point d'application (ligne d'action).

3°) Le sens dans lequel a lieu cet entraînement.

4°) L'intensité plus ou moins grande avec laquelle s'exerce cette force.

EQUILIBRE

Lorsque plusieurs forces sont appliquées à des points d'un même corps solide, il peut arriver qu'elles n'y provoquent aucun mouvement. On dit alors qu'elles se font équilibre.

EFFET STATIQUE

Quand des forces appliquées à un corps solide se font équilibre, on dit que l'effet qu'elles produisent est un effet purement statique.

EFFET CINÉTIQUE

Si, au contraire, elles provoquent un mouvement, on dit qu'elles produisent un effet cinétique.

DYNAMIQUE CINÉTIQUE

La dynamique cinétique est l'étude du mouvement dans ses relations avec les forces qui le produisent.

DYNAMIQUE STATIQUE

Tandis que la dynamique statique, ou simplement statique, est l'étude de l'équilibre des forces.

PRINCIPE.- Soit S un système de forces appliquées à divers points d'un corps et se faisant équilibre sur ce corps ; soit S' un second système de forces qui, appliquées à des points du même corps, et seules appliquées, se font aussi équilibre. Si l'on applique simultanément au corps les deux systèmes S et S', le système S'' ainsi obtenu sera lui-même en équilibre sur le corps.

Réciproquement, soit S'' un système de forces en équilibre sur un corps, et soit, parmi ces forces, un système S' de forces qui, à elles seules, seraient en équilibre sur ce corps. Si l'on supprime le système S', le système S des forces restantes sera, lui aussi, en équilibre.

ÉGALITÉ DE DEUX FORCES

Deux forces sont égales si, appliquées à un même point matériel suivant une même direction, mais en des sens opposés, elles se font équilibre. On considère que ces forces ont la même intensité.

ÉQUILIBRANTE

Soient plusieurs forces en équilibre sur un corps. On peut remarquer que l'une quelconque de ces forces réalise l'équilibre aussitôt qu'on l'adjoint aux autres. Pour cette raison, on dit que la force considérée est l'équilibrante de toutes les autres.

RÉSULTANTE

La force R égale et opposée à l'équilibrante ferait équilibre à celle-ci. R produit donc le même effet que les autres forces, on l'appelle leur résultante.

Remarque.- Un système de forces quelconques n'a pas, en général, de résultante. Il y a cependant des cas où l'existence de cette résultante apparaît immédiatement.

RAPPORT DE DEUX FORCES - DEFINITION DE L'UNITE DE FORCE

Si l'on applique deux forces égales F et F' à un même point matériel, suivant la même direction et dans le même sens, leur ensemble produit le même effet qu'une force F'' double de chacune des forces F , F' et de même sens. Plus généralement, si l'on applique à un même point matériel, dans la même direction et avec le même sens, n forces égales à une force F , il y a une force unique R qui produit le même effet que ces n forces, et l'on dit que R vaut n fois la force F , par définition. Inversement, la force F est la n ième partie de la force R .

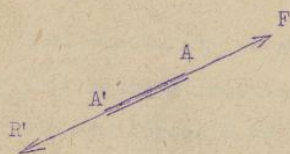
En prenant p forces égales à la n ième partie d'une force F , on a une force R égale à $\frac{p}{n}$ de F ; et $\frac{p}{n}$ est le rapport de la force R à la force F .

En prenant conventionnellement pour unité de force une force U , si $\frac{p}{n}$ est le rapport d'une force F à U , $\frac{p}{n}$ est dit la mesure de la force F .

REPRESENTATION VECTORIELLE D'UNE FORCE

Si l'on convient d'une longueur l qui représente l'unité de force U , on représentera une force F , appliquée à un point A , dans une direction et un sens donnés d'intensité $n \times U$ (n pouvant être un nombre fractionnaire), en traçant un vecteur \overrightarrow{AF} , dirigé dans le sens de l'action de la force et ayant une longueur égale à $n \times l$.

PRINCIPE - Pour que 2 forces appliquées aux 2 extrémités d'une tige de longueur invariable se fassent équilibre, il faut et il suffit :



1°) qu'elles agissent dans la direction de cette tige ;

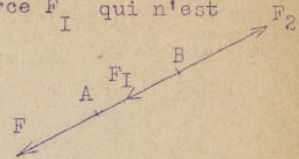
2°) qu'elles soient égales ;

3°) Qu'elles soient opposées.

Un cas limite de ce principe est celui dans lequel 2 forces appliquées à un même point matériel se font équilibre sous la condition nécessaire et suffisante qu'elles soient égales et opposées.

COROLLAIRE - Toute force appliquée en un point A d'un solide peut être remplacée par une force égale, de même sens, appliquée en un point B de sa ligne d'action. - En effet, : au point B de la ligne d'action de la force F , appliquons 2 forces F_1 et F_2 , portées par la droite AF , égales à F , et opposées entre elles. L'introduction de ces forces ne change rien aux conditions statiques. Or, d'après le principe précédent, les forces F et F_2 s'é-

quillibrent ; on peut donc les supprimer. Il reste la force F_I qui n'est autre que la force F transportée en B.



COMPOSITION DES FORCES COPLANES

I - FORCES AYANT MEME LIGNE D'ACTION

1°) Forces de même sens. - Considérons des forces F_I, F_2, F_3, \dots d'intensité i_I, i_2, i_3, \dots agissant en un même point matériel A dans la même direction et le même sens. Ces forces peuvent être remplacées par une force unique F de même direction et de même sens et d'intensité $(i_I + i_2 + i_3 + \dots)$. Cette force F résulte géométriquement de la juxtaposition des vecteurs F_I, F_2, F_3, \dots , et elle est représentée par la somme géométrique de ces vecteurs qui a pour longueur $i_I + i_2 + i_3 + \dots$

2°) Forces de sens quelconques. - Soient F_I, F_2, \dots des forces de même direction et de même sens appliquées à un même point matériel, et soient F'_I, F'_2, \dots d'autres forces, appliquées au même point, de même direction, mais de sens opposé à celui des premières. D'après le 1°, les forces F_I, F_2, \dots admettent une résultante de même sens ; les forces F'_I, F'_2, \dots admettent également une résultante F' de même sens qu'elles. F et F' sont de sens contraires. Supposons que F' soit plus grande que F . D'après le 1°, F' peut être considérée comme la résultante de 2 forces de même sens qu'elle, F'_0 et R .

$$F' = F'_0 + R.$$

Choisissons F'_0 de même intensité que F , alors, F'_0 et F se détruisent ; il reste R , résultante du système qui est égale à la différence géométrique des forces F et F' . On a :

$$F = i_I + i_2 + \dots \text{ et } F' = i'_I + i'_2 + \dots$$

d'où :
$$R = (i'_I + i'_2 + \dots) - (i_I + i_2 + \dots).$$

La mesure de R est la somme algébrique des mesures des forces $F_I, F_2, \dots, F'_I, F'_2, \dots$

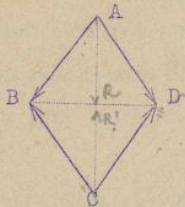
II - FORCES CONCOURANTES

1°) Cas de 2 forces égales.

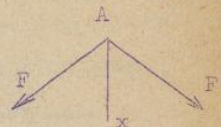
Soit AX la bissectrice intérieure de l'angle formé par les 2 forces égales AF et AF' . Par une rotation de 180° autour de AX , les 2 forces s'échangent : le système reste identique à lui-même ; la résultante doit alors

se reproduire ; elle est donc portée par la bissectrice AX.

Equilibre du losange



Soient \vec{AB} , \vec{AD} , \vec{CB} , \vec{CD} , 4 forces égales formant losange. D'après ce qui précède les résultantes \vec{AR} de \vec{AB} et \vec{AD} et \vec{CR} de \vec{CB} et \vec{CD} sont dirigées suivant la diagonale AC, bissectrice commune aux angles \hat{A} et \hat{C} . D'autre



part, en effectuant une rotation de 180° autour de la diagonale BD, les forces \vec{AB} et \vec{AD} s'échangent respectivement avec \vec{CB} et \vec{CD} : donc, les résultantes \vec{AR} et \vec{CR} s'échangent ; par suite, elles sont égales et opposées. Donc, le losange est en équilibre.

2°) Résultante de deux forces concourantes. - Parallélogramme des forces.

Soient 2 forces quelconques \vec{AB} , \vec{AD} appliquées à un même point A.

a) - Démontrons d'abord que la résultante est dirigée suivant la diagonale AC du parallélogramme construit sur AB et AD.

Supposons (Fig. I) que les 2 forces aient une commune mesure f, telle, par exemple, que $AB = 3f$ et $AD = 4f$.

Soit :

$$AG = GL = LP = PD = AE = EF = FB = f.$$

Par les points G, L, P, D menons des parallèles à AB, et par E, F, B des parallèles à AD. On découpe ainsi le parallélogramme ABCD en losanges égaux de côté f. Introduisons alors des forces toutes égales, les unes dans un sens, les autres dans le sens opposé : \vec{GH} et \vec{HG} , \vec{HI} et \vec{IH} , \vec{IK} et \vec{KI} , portées par la droite GK, et semblablement des forces portées par les droites LO, PS, DC, ET, FU et BC. Ces forces, égales et directement opposées, se font équilibre 2 à 2, et leur introduction ne change rien à l'état statique du parallélogramme ABCD. Or, on voit que chacun des losanges formés groupe 4 forces qui, d'après ce qui précède, se font équilibre. Toutes les forces en équilibre peuvent être supprimées. Il reste les forces \vec{BK} , \vec{KO} , \vec{OS} , \vec{SC} dont la résultante est \vec{BC} , et les forces \vec{DT} , \vec{TU} , \vec{UC} dont la résultante est \vec{DC} . Les systèmes \vec{AB} , \vec{AD} et \vec{BC} , \vec{DC} sont équivalents : ils admettent alors la même résultante, en grandeur et en sens, qui, par suite, est dirigée suivant AC, puisqu'elle doit passer par le point d'application A des forces \vec{AD} et \vec{AB} et par C, point d'application des forces \vec{BC} et \vec{DC} .

cette diagonale, mais en sens contraire de la résultante. Les 3 forces $\vec{A B}$, $\vec{A D}$ et $\vec{A E}$ sont en équilibre autour du point A. Déterminons la grandeur de A E. La résultante des 2 forces $\vec{A D}$ et $\vec{A E}$ est directement opposée à leur équilibrante $\vec{A B}$; donc la droite BA prolongée est la diagonale du parallélogramme DAEF construit sur $\vec{A D}$ et $\vec{A E}$. Or, par construction, ADFE et ACDF sont des parallélogrammes, donc, on a :

$$AE = DF = AC.$$

Donc, la résultante cherchée est A C. D'où le THEOREME : La résultante de 2 forces appliquées à un même point A est représentée par la diagonale AC du parallélogramme construit sur ces 2 forces.

Ce théorème donne une première construction de la résultante.

Remarque I - Pour établir la première partie du théorème précédent, nous avons supposé que les 2 forces $\vec{A B}$ et $\vec{A D}$ admettaient une commune mesure. Soit 1 une longueur telle que :

$$AD = n \times 1$$

$$\text{et } p \times 1 < AB < (p + 1)1 \text{ (Fig.3)}$$

Soient $\vec{A B}_1$ la force de longueur $p \times 1$, et $\vec{A B}_2$ la force de longueur $(p + 1)1$. La résultante de $\vec{A D}$ et $\vec{A B}_1$ est la diagonale AC_1 du parallélogramme construit sur ces deux forces; la résultante de $\vec{A D}$ et $\vec{A B}_2$ est la diagonale du parallélogramme construit sur ces 2 forces. Le point B étant, par construction, entre B_1 et B_2 , le sommet C du parallélogramme construit sur $\vec{A D}$ et $\vec{A B}$ est entre C_1 et C_2 . Or, comme on peut prendre 1 aussi petit qu'on le veut, les points C_1 et C_2 sont aussi rapprochés l'un de l'autre qu'on le veut. A la limite C_1 et C_2 coïncident, et comme ils sont toujours de part et d'autre du point C, ils se confondent avec C. Donc, dans ce cas, $\vec{A C}$ est encore la résultante.

Remarque II - 2ème construction de la résultante (Fig.4). Les diagonales AC et BD d'un parallélogramme se coupent en leur milieu I. On peut donc construire la résultante en joignant A au milieu I de BD, et en prolongeant AI d'une longueur IC égale à AI.

Remarque III - En remarquant (Fig.4) que la résultante $\vec{A C}$ de 2 forces $\vec{A B}$ et $\vec{A D}$ est la médiane du triangle ABD relative au côté BD (d'après la remarque II), on voit (Fig.5) que si 3 forces OA, OB, OC se font équilibre autour d'un point O, le point O est le point de concours des médianes du triangle ABC.

Remarque IV - 3ème construction de la résultante (Fig.6). En menant par B

un vecteur \vec{BC} équipollent à \vec{AD} , on obtient en C le 4e sommet du parallélogramme construit sur \vec{AB} et \vec{AD} . En joignant A et C on a donc la résultante. On voit que \vec{AC} est la somme géométrique des vecteurs représentant les 2 faces.

RAPPEL DE QUELQUES THEOREMES DE LA THEORIE DES VECTEURS - SOMME GEOMETRIQUE .-

1° Cas de 2 vecteurs. Soient \vec{AB} et \vec{CD} 2 vecteurs quelconques (fig. 7). Par un point O quelconque menons un vecteur \vec{OL} équipollent à \vec{AB} et par L un vecteur \vec{LM} équipollent à \vec{CD} . Le vecteur \vec{OM} est par définition la somme géométrique des 2 vecteurs \vec{AB} et \vec{CD}

$$\vec{OM} = \vec{OL} + \vec{LM} .$$

Remarquons que, dans le parallélogramme construit sur OL et LM, LES VECTEURS \vec{OP} et \vec{PM} sont équipollents respectivement aux vecteurs \vec{OL} et \vec{LM} , on a donc

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM} .$$

D'où : la somme géométrique de 2 vecteurs est indépendante de l'ordre dans lequel on juxtapose ces vecteurs.

2° Cas de plusieurs vecteurs. Soient (fig. 8) $\vec{A_1B_1}, \vec{A_2B_2}, \dots, \vec{A_nB_n}$ des vecteurs quelconques. Par un point O, pris arbitrairement, menons les vecteurs $\vec{OL_1}$ équipollent à $\vec{A_1B_1}$, $\vec{L_1L_2}$ équipollent à $\vec{A_2B_2}$, $\vec{L_{n-1}L_n}$ équipollent à $\vec{A_nB_n}$. Le vecteur $\vec{OL_n}$ est la somme géométrique des vecteurs $\vec{A_1B_1}, \vec{A_2B_2}, \dots, \vec{A_nB_n}$. D'après le cas précédent, on peut intervertir l'ordre de 2 vecteurs consécutifs dans le polygone des vecteurs, d'où, par voie d'échange entre les vecteurs consécutifs, on peut intervertir l'ordre des vecteurs d'une manière quelconque.

POLYGONE FERME. Si le polygone des vecteurs se ferme, la somme géométrique est nulle.

THEOREME - Dans un polygone ferme, le vecteur opposé à l'un quelconque des vecteurs est la somme géométrique de tous les autres.

RECIPROQUE - En adjoignant à un ensemble de vecteurs un vecteur égal et opposé à leur somme géométrique, on obtient un système fermé.

PROJECTIONS.

Theorème I - La projection, sur une droite ou sur un plan, d'un système fermé est un système fermé. D'où Theorème II - La projection de la somme géométrique de plusieurs vecteurs sur une droite ou sur un plan

est la somme géométrique des projections des vecteurs sur la droite ou sur le plan.

Théorème III - La mesure de la projection de la somme géométrique de plusieurs vecteurs sur un axe est la somme algébrique des mesures des projections de ces vecteurs.

APPLICATION DE CES THEOREMES AUX FORCES.

Théorème I - Polygone des forces (Fig.9). La résultante de plusieurs forces concourantes est égale à la somme géométrique des vecteurs qui représentent ces forces.

Théorème II - Toute force, appliquée en un point A, peut être décomposée en 2 autres ayant des directions quelconques AX, AY, issues du point A.

Ce théorème s'applique dans l'espace : toute force peut être décomposée en 3 autres formant trièdre.

Théorème III - La projection de la résultante de plusieurs forces sur une droite ou sur un plan est la résultante des projections de ces forces sur la droite ou sur le plan (Fig.10).

Théorème IV - Pour qu'un système de forces appliquées en un point ait une résultante nulle, il faut et il suffit que le polygone des forces se ferme.

III - FORCES PARALLELES

La composition des forces parallèles se ramène, par application des théorèmes I et II précédents, au cas des forces concourantes.

I°) CAS DE 2 FORCES PARALLELES ET DE MEME SENS (Fig.11)

Soient \vec{AF} et $\vec{A'F'}$ ces 2 forces. Introduisons en A et A' 2 forces \vec{AL} et $\vec{A'L'}$, égales et opposées, et dirigées suivant AA'. Les forces \vec{AL} et \vec{AF} peuvent être composées en une force unique \vec{AM} , de même $\vec{A'F'}$ et $\vec{A'L'}$, en une force unique $\vec{A'M'}$. Le système $(\vec{AF}, \vec{A'F'})$ est équivalent au système $(\vec{AM}, \vec{A'M'})$. Soit O le point de concours des forces \vec{AM} et $\vec{A'M'}$. Transportons ces 2 forces au point O en \vec{OM}_I et \vec{OM}'_I , et décomposons chacune d'elles en deux autres, dont l'une sera portée par la parallèle à AA' menée par O, et l'autre ^{par} la parallèle à la direction commune des forces \vec{AF} et $\vec{A'F'}$ menée par O. Or,

$$\vec{OL}_I = \vec{AL} \text{ et } \vec{OL}'_I = \vec{A'L'}$$

Donc, les deux forces \vec{OL}_I et \vec{OL}'_I se détruisent comme étant égales et opposées. Il reste alors les 2 forces

$$\vec{OF}_I = \vec{AF} \text{ et } \vec{OF}'_I = \vec{A'F'}$$

qui admettent une résultante \vec{OR}_I de même direction et de même sens qu'el-

les et de longueur

$$\vec{OR}_I = \vec{OF}_I + \vec{OF}'_I = B R.$$

Donc, 2 forces parallèles et de même sens admettent une résultante parallèle à leur direction commune, de même sens qu'elles, et égale à leur somme.

Remarque - On applique généralement la résultante au point B où elle coupe AA'.

Déterminons la position de B sur le segment AA'. En remarquant que les triangles AOB et MAF sont semblables, ainsi que les triangles A'OB et M'A'F', on a :

$$\frac{AB}{MF} = \frac{OB}{AF} \quad \text{et} \quad \frac{A'B}{M'F'} = \frac{OB}{A'F'}$$

$$\text{Or,} \dots \dots \dots MF = M'F'$$

$$\text{d'où} \dots \dots \dots \frac{AB}{A'B} = \frac{\frac{I}{AF}}{\frac{I}{A'F'}}$$

$$\text{ou} \quad \frac{AB}{A'F'} = \frac{A'B}{AF} = \frac{AA'}{AF + A'F'}$$

d'où on tire :

$$AB = \frac{AA'}{AF + A'F'} \cdot A'F' \quad \text{et} \quad A'B = \frac{AA'}{AF + A'F'} \cdot AF$$

Donc B divise intérieurement le segment AA' en 2 segments inversement proportionnels aux 2 forces AF et A'F'.

2°) CAS DE DEUX FORCES PARALLELES ET DE SENS CONTRAIRES.

Considérons (Fig. I2) 2 forces parallèles et de même sens, \vec{AF} et $\vec{A'F'}$, qui admettent d'après le cas précédent une résultante \vec{BR} . Construisons une force \vec{BE} égale et opposée à \vec{BR} . BE est l'équilibrante de \vec{AF} et $\vec{A'F'}$; on peut aussi dire que A'F' est l'équilibrante de \vec{AF} et \vec{BE} , qui admettent alors pour résultante la force $\vec{A'R'}$ égale et opposée à $\vec{A'F'}$. Et on a :

$$EB = BR = (AF + A'F') = AF + A'R'$$

$$\text{ou} \dots \dots \dots A'R' = BE - AF.$$

Donc, 2 forces parallèles et de sens contraires admettent une résultante parallèle à leur direction commune, de même sens que la plus grande, et égale à leur différence.

Par un raisonnement identique à celui du cas précédent, on voit que le point A', où la résultante coupe la droite AB, divise extérieurement le segment AB en 2 segments inversement proportionnels aux forces.

Remarque - Dans le cas où $AF = BE$, on a un couple ; la résultante est nulle,

et le point A' est rejeté à l'infini.

3°) CAS DE PLUSIEURS FORCES PARALLELES QUELCONQUES

Soient $F_1, F_2, F_3 \dots F'_1, F'_2, F'_3 \dots$ des forces parallèles de sens quelconques, $F_1, F_2 \dots$ étant celles de ces forces qui ont un certain sens, et $F'_1, F'_2 \dots$ celles qui sont de sens opposé au précédent. Composons F_1 et F_2 , qui admettent, comme on vient de le voir, une résultante F_{12} de même sens, et égale à leur somme ; puis composons F_{12} et F_3 , dont la résultante est

$$F_{123} = F_1 + F_2 + F_3, \dots$$

... Finalement la résultante F de toutes les forces de même sens $F_1, F_2 \dots$ est une force de même sens et égale à la somme de toutes ces forces. On a le même raisonnement pour la résultante F' des forces $F'_1, F'_2 \dots$

Les 2 forces F et F' , parallèles et de sens contraires, admettent une résultante R , résultante du système donné, qui est égale à leur différence.

Remarque - On a vu que la position du point d'application de la résultante de 2 forces parallèles, sur la droite qui joint les points d'application de ces forces, dépend de la grandeur des forces, mais non de leur direction ni de leur sens (ceci s'étend aussi au cas de plusieurs forces parallèles quelconques).

Si donc on fait tourner plusieurs forces parallèles autour de leur points d'application respectifs, le point d'application de la résultante générale reste invariable. Ce point est appelé le "centre des forces parallèles considérées".

Remarque - Le centre de gravité d'un corps pesant est le centre des forces parallèles de pesanteur qui s'exercent sur les divers éléments du corps.

IV - FORCES QUELCONQUES - REDUCTION DES FORCES COMPLANES

Un système quelconque de forces complanes se réduit à une force unique (qui est nulle dans le cas de l'équilibre) soit à un couple.

Considérons un système de n forces.

Si 2 forces sont concourantes, on les compose et on les remplace par leur résultante ; on est alors ramené à un système de $(n - 1)$ forces. De la même manière, on remplace 2 forces concourantes de ce système par leur résultante : il reste $(n - 2)$ forces ; ...

Si les forces sont toutes ainsi concourantes, le système donné se réduit à une force unique.

FASC. II

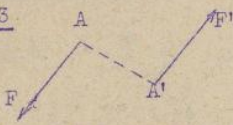
S'il y a des forces parallèles : le système se réduit à une force unique dans le cas où les deux dernières forces à composer sont de même sens ou bien de sens contraires et inégales ; il se réduit à un couple si ces 2 forces sont égales, de sens contraires et non opposées.

THEORIE DES COUPLES

La notion des couples a été introduite en mécanique par POISSON.

DEFINITION.- On appelle couple (Fig.I3) un système de deux forces égales, parallèles et de sens contraires, mais non opposées.

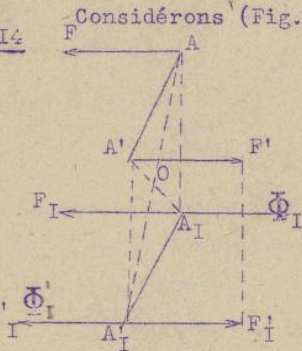
Fig. I3



IDENTITE D'UN COUPLE

Théorème I - Un couple reste équivalent à lui-même si on lui imprime une translation d'ensemble dans son plan.

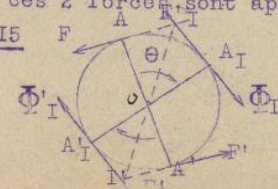
Fig. I4



Considérons (Fig.I4) le couple $(AF, A'F')$. Soit $(A_1F_1, A'_1F'_1)$ sa position après translation dans son plan. Introduisons les forces A_1F_1 et $A_1\bar{F}_1$ égales et opposées, et, de même, les forces $A'_1\bar{F}'_1$ et $A'_1F'_1$. Remarquons que $AA'A_1A_1$ étant un parallélogramme les diagonales AA'_1 se coupent en leur milieu O. Les forces égales, parallèles et de même sens, $A_1\bar{F}_1$ et $A'F'$ ont une résultante R_1 appliquée en O, de même sens et double de chacune d'elles. De même AF et $A'_1\bar{F}'_1$ ont une résultante R'_1 appliquée en O. R_1 et R'_1 sont égales et directement opposées, donc se détruisent. Il reste les forces A_1F_1 et $A'_1F'_1$ qui sont, par suite, équivalentes aux forces AF et $A'F'$. C.Q.F.D.

Théorème II - Un couple reste équivalent à lui-même si on le fait tourner d'un angle quelconque dans son plan autour d'un point équidistant des 2 forces.

Fig. I5



Soit O un point équidistant des 2 forces (Fig.I5). On peut supposer que ces 2 forces sont appliquées aux points où leurs lignes d'action coupent la droite passant par O qui leur est perpendiculaire. Soit $(A_1F_1, A'_1F'_1)$ la position du couple $(AF, A'F')$ après une rotation dans son plan autour de O. Introduisons les forces A_1F_1 , $A_1\bar{F}_1$ égales et

opposées, et, de même $A_I F_I$ et $A'_I \Phi'_I$. Remarquons que les angles formés par les droites $AF, A_I \Phi_I$, et $A'_I \Phi'_I, A'_I F'$ ont des bissectrices confondues passant par O. Les forces concourantes égales $A_I \Phi_I$ et AF ont une résultante R_I portée par la bissectrice de leur angle, de même $A'_I \Phi'_I$ et $A'_I F'$ ont une résultante R'_I portée par la bissectrice de leur angle. R_I et R'_I sont égales et opposées, donc se détruisent. Il reste le couple $(A_I F_I, A'_I F'_I)$ qui est donc équivalent au couple $(AF, A'_I F')$. C.Q.F. D.

Théorème III - Généralisation. Un couple reste équivalent à lui-même s'il subit un déplacement quelconque dans son plan.

Ce théorème est une conséquence des 2 précédents, tout déplacement étant décomposable en une translation et une rotation (Fig. 16)

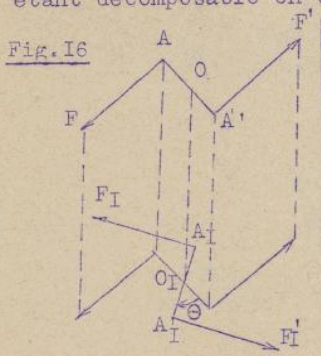


Fig. 16

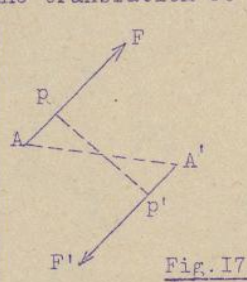


Fig. 17

ORIENTATION D'UN COUPLE (Fig. 17)

Un couple $(AF, A'_I F')$ est dit de sens "direct" quand, pour un observateur debout en A sur le plan du couple, la force $A'_I F'$ va de droite à gauche. Dans le cas contraire, le couple est dit "rétrograde". (REMARQUE :

la qualification directe rétrograde d'un couple dépend évidemment du côté du plan où l'observateur se place).

AXE D'UN COUPLE

Le bras de levier d'un couple est la distance pp' des 2 forces parallèles (Fig. 18). On appelle axe d'un couple le produit de la force par le

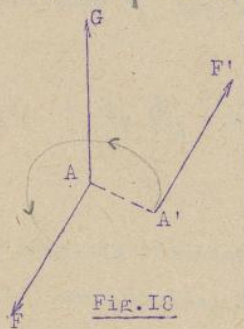


Fig. 18

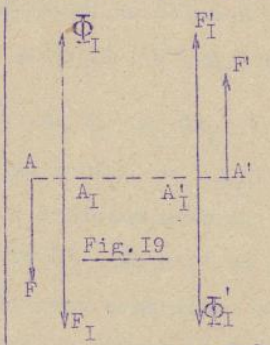


Fig. 19

bras de levier, ce produit étant positif ou négatif suivant que le couple est direct ou rétrograde. Géométriquement, l'axe d'un couple est représenté par un vecteur AG normal au plan du couple (Fig. 18), de longueur $AA' \times AF$, et de sens

tel que un observateur personnifiant AG voit la force $A'_I F'$ aller de sa droite à sa gauche.

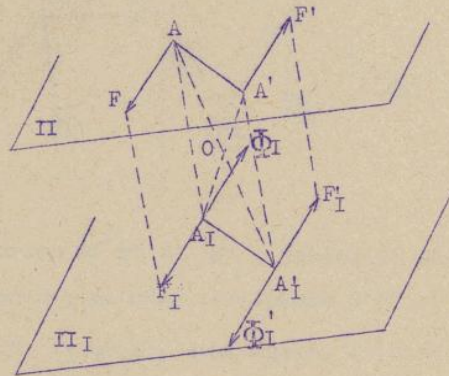
Théorème IV - Deux couples d'un même plan ayant même axe en grandeur et en sens sont équivalents.

On peut toujours supposer que par un glissement des forces sur leurs lignes d'action, et par une rotation suivie d'une translation de l'un des couples :

1°) On a amené les deux couples à avoir leurs forces parallèles et appliquées aux points de rencontre de leurs lignes d'action avec une perpendiculaire commune, et que :

2°) On a amené en coïncidence les deux points milieux des bras de leviers. Considérons donc le couple $(AF, A'F')$ (Fig. 19). - Introduisons les forces

Fig. 20



ces $A_I F_I$ et $A'_I \Phi_I$ égales et opposées, et, de même, les 2 forces $A'_I F'_I$ et $A'_I \Phi'_I$. Les forces $A_I F_I$ et $A'_I F'_I$ sont, d'après l'hypothèse, respectivement de même sens que les forces AF et $A'F'$, et de grandeur telle qu'on ait :

$$AF \times AA' = A_I F_I \times A_I A'_I$$

$$\text{ou } AF \times OA = A_I F_I \times OA_I .$$

Les forces AF et $A_I \Phi_I$ (parallèles et de sens contraires) admettent une résultante R_I appliquée en un point B de la droite AA_I tel que

$$AB \times AF = A_I B \times A_I \Phi_I$$

$$\text{or : } A_I F_I = A_I \Phi_I, \text{ et } A_I F_I \times OA_I = AF \times OA ,$$

$$\text{donc : } AB \times OA_I = A_I B \times OA .$$

et B coïncide avec O.

De même, la résultante R'_I de $A'F'$ et $A'_I \Phi'_I$ est appliquée en O. R_I et R'_I sont égales, de sens contraires et directement opposées, donc, se font équilibre. Il reste le couple $(A_I F_I, A'_I F'_I)$ qui est donc équivalent au couple $(AF, A'F')$. C.Q.F.D.

Théorème V - Un couple reste équivalent à lui-même par translation dans un plan parallèle à son plan.

Considérons le couple $(AF, A'F')$ dans son plan II (Fig. 20 - page 13)



Fig.21

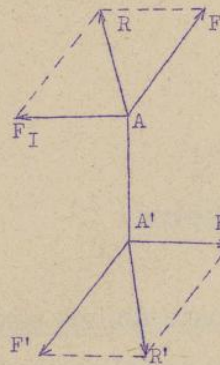
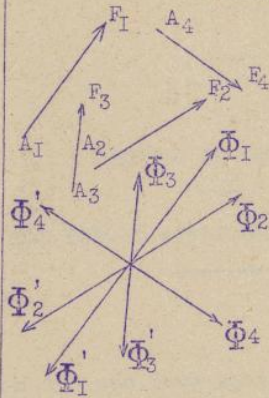


Fig.22



Soit $(A_I F_I, A'_I F'_I)$
 sa position après translation dans un plan Π_I parallèle à Π . Introduisons dans Π_I les forces $A_I F_I$ et $A_I \bar{\Phi}_I$ égales et opposées, et de même les forces $A'_I F'_I$ et $A'_I \bar{\Phi}'_I$. On remarque que $A'AA'_I$ étant un parallélogramme les diagonales $A'A_I$ et AA'_I se coupent en leur

milieu O.

Les forces AF et $A'_I \bar{\Phi}'_I$, égales et de même sens ont une résultante R_I appliquée en O ; de même les forces $A'_I F'_I$ et $A_I \bar{\Phi}_I$ ont une résultante R'_I appliquée en O. R_I et R'_I sont égales et directement opposées, donc se détruisent. Il reste le couple $(A_I F_I, A'_I F'_I)$ équivalent au couple $(AF, A'_I F'_I)$.

C.Q.F.D.

COMPOSITION DES COUPLES

Théorème : Deux couples quelconques admettent un couple résultant dont l'axe est la somme géométrique des axes des 2 couples.

Soient 2 couples quelconques dont les plans se coupent suivant une droite AA' (Fig.21). On peut toujours supposer que par des déplacements dans leurs plans respectifs on a amené les forces des 2 couples à être perpendiculaires à la droite d'intersection de leurs plans, et appliquées en des points de cette droite, les points d'application A et A' des forces de l'un des couples coïncident avec ceux des forces de l'autre et étant tels que AA' soit l'unité de longueur. Les forces concourantes AF et AF_I ont une résultante AR ; de même AF' et $A'_I F'_I$ ont une résultante $A'R'$. Les forces AR et $A'R'$ sont parallèles, égales et de sens contraires : elles forment un couple. Puisque par hypothèse $AA' = 1$, on a :

- axe du couple $(AR, A'R')$ = AR
- axe du couple $(AF, A'_I F'_I)$ = AF
- axe du couple $(AF_I, A'_I F'_I)$ = AF_I ,

or, par construction :

$$\vec{AR} = \vec{AF} + \vec{AF_I}$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rcl}
 0 \vec{\Phi}'_1 & \text{forme un couple avec} & A_1 F_1 \\
 0 \vec{\Phi}'_2 & - & A_2 F_2 \\
 \hline
 0 \vec{\Phi}'_n & - & A_n F_n
 \end{array}$$

Ces n couples admettent un couple résultant d'axe \vec{OG} . Donc le système des forces données est équivalent à la force unique \vec{OR} et auquel est adjoint le couple \vec{OG} .

Remarque I - La force unique étant la somme géométrique de toutes les forces appliquées au solide, sa grandeur et sa direction sont indépendantes du point O. Sa direction est appelée "direction principale". (La somme géométrique en un point O est quelquefois appelée "la résultante de translation en O"). Mais c'est une faute de l'appeler la résultante tout court. En effet, un système de forces appliquées à un corps solide n'a une résultante qu'exceptionnellement.

Remarque II - On voit qu'une force $A_1 F_1$ appliquée en un point A_1 peut être translaturée en un point quelconque O, à condition de lui adjoindre un couple dont l'une des forces $A_1 F_1$ et dont l'autre est appliquée en O. Ce couple est dit résulter de la translation de $A_1 F_1$ en O.

Théorème II - La réduction d'un système de forces à une force unique et à un couple peut se faire de façon telle que le plan du couple soit perpendiculaire à la direction principale.

Cette réduction est dite "réduction canonique".

Considérons (Fig.23) un système de forces dont les éléments de la réduction à une force unique et à un couple en un point O quelconque sont \vec{OR} et \vec{OG} . Menons par O le plan normal à OR ; et dans ce plan construisons 2 axes rectangulaires : Ox, normal au plan ROG, et Oy dans le plan ROG. Décomposons le couple \vec{OG} en deux autres couples : l'un \vec{OG}'_o suivant la droite OR, l'autre \vec{OG}'_1 suivant Oy. Considérons un point A de Ox ; les éléments de la réduction en A sont :

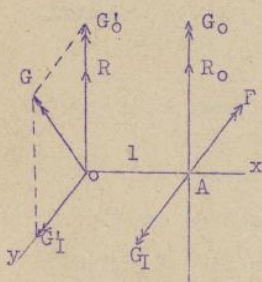


Fig.23

la force unique $A R_o$ équipollente à $O R$, les deux couples $A G'_o$ et $A G'_1$ équipollents à $O G'_o$ et $O G'_1$, et enfin un couple $A F$ résultant du transport de $O R$ en $A R_o$. Or, $A F$ est normal au plan

ROx , c'est-à-dire les parallèles à Oy , il est, par suite, porté par la même droite \vec{AG}_I . Soit l la mesure sur Ox de OA . Il existe une position de A et une seule telle que \vec{AF} qui égal à $l \times \vec{OR}$ soit égal et de sens contraire à \vec{AG}_I . Dans ce cas, les éléments de la réduction au point A se réduisent à \vec{AR}_O et \vec{AG}_O ; \vec{AG}_O étant par construction porté par la même droite que \vec{AR}_O le plan du couple est normal à \vec{AR}_O . C.Q.F.D.

La droite qui porte \vec{AR}_O et \vec{AG}_O est appelée "l'axe central".

Le couple \vec{AG}_O est dit "couple principal".

Théorème III - La réduction est la même pour tous les points de l'axe central, ou plus généralement elle est la même pour tous les points d'une même parallèle à la direction principale.

En effet, soient (Fig.24) OR et OG les éléments de la réduction en un point quelconque O . Soit O' un point de la parallèle menée par O à la direction principale. O' est sur la ligne d'action de OR ; on peut alors faire glisser OR en $O'R'$ sans qu'il en résulte un couple de translation; le couple adjoint en O' est le couple adjoint en O , translaté dans un plan parallèle, donc c'est le même couple.



Fig.24

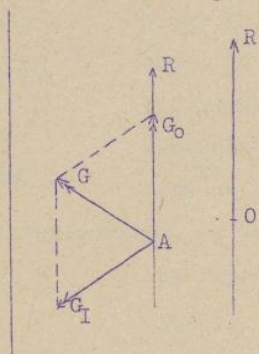


Fig.25

Théorème IV - Pour tout point situé hors de l'axe central, l'axe du couple adjoint n'a pas la direction principale.

Soient (Fig.25) AR_O et AG_O les éléments de la réduction canonique. Soit O un point quelconque pris hors de l'axe central. Pour effectuer la réduction en O , il faut adjoindre au couple \vec{AG}_O un couple \vec{AG}_I résultant de la translation de AR_O en OR : or,

l'axe de ce couple \vec{AG}_I étant normal au plan OAR_O est perpendiculaire à \vec{AG}_O .

Les 2 couples \vec{AG}_O et \vec{AG}_I admettent donc un couple résultant \vec{AG} dont l'axe ne peut jamais avoir la direction de \vec{AG}_O .

Théorème V - La projection OG_O , sur la direction principale, d'un couple adjoint OG quelconque est un vecteur constant.

On sait que la mesure de la projection de la résultante est égale à la somme des mesures des projections des composantes. Or, le couple adjoint en un point O quelconque est, comme on l'a vu dans le théorème précédent, la

somme géométrique de l'axe du couple principal $\vec{A G}_0$ et de l'axe d'un couple $\vec{A G}_I$ (perpendiculaire à $\vec{A G}_0$), résultant du transport de $\vec{A R}_0$ en $\vec{O R}$. Or, la projection de $\vec{A G}_I$ sur la direction principale est nulle ; donc la projection de $\vec{O G}$ sur la direction principale se réduit à $\vec{A G}_0$.

Remarque - D'après ce théorème, la valeur minimum du couple adjoint est celle du couple principal $\vec{A G}_0$.

MOMENTS PAR RAPPORT A UN POINT

La notion de moment a été introduite par CAUCHY. La théorie des moments se ramène à celle des couples de Poinsoot qui a devancé Cauchy dans cette voie.
MOMENT D'UNE FORCE - DEFINITION

Considérons une force AF (Fig.26) et un point O quelconque. Soit OD la

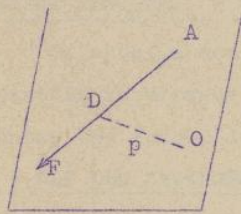


Fig.26

perpendiculaire abaissée de O sur AF dans le plan OAF. Par définition, le moment de AF par rapport à O est le produit $p \times AF$ de la force AF par la distance de O à AF, ce produit étant positif ou négatif suivant que la force AF tend à tourner dans le sens direct ou rétrograde pour un observateur debout en O sur le plan OAF. OP est le bras de levier

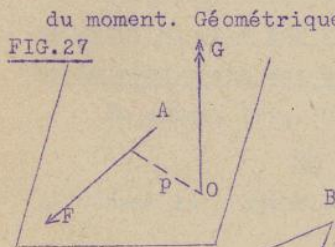


FIG.27

du moment. Géométriquement, on représente (Fig.27) le moment d'une force AF par rapport à un point O par un vecteur $\vec{O G}$, de longueur $p \times AF$, porté par la perpendiculaire en O au plan OAF, de sens tel que AF tende à tourner autour de OG dans le sens direct.

Remarque I - Représentation d'un moment par une aire. Par définition (Fig.28) on a

$$m_O^t AF = p \times AF.$$

Or, le double de l'aire du triangle OAF est égal à $p \times AF$, c'est-à-dire égal à l'aire du parallélogramme construit sur OA et AF. D'où

$$m_O^t AF = 2 (\text{aire OAF}) = \text{aire (OFAF)}.$$

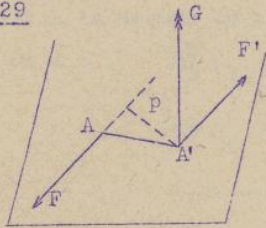
Remarque II - On peut ramener la considération des moments à celle des couples. En effet, (Fig.29) considérons un couple (AF, A'F'). L'axe de ce cou-

ple est le produit $p \times AF$ avec le signe + ou - suivant que le couple est direct ou rétrograde. Or, on a :

$$m_{A'}^t AF = p \times AF$$

ce moment étant positif ou négatif suivant que AF tend à tourner dans le

Fig.29



sens direct ou rétrograde. On a donc :

$$\text{axe du couple } (\vec{AF}, \vec{A'F'}) = -m_{A'}^t \vec{AF}$$

et le vecteur $\vec{A'G}$ représente soit l'axe du couple $(AF, A'F')$, selon Poinsoot, soit le moment de AF par rapport à A', suivant Cauchy.

Remarque III - Il résulte des conventions

adoptées pour la représentation géométrique d'un moment que les moments de 2 forces égales et opposées sont deux vecteurs égaux et opposés.

MOMENT RESULTANT D'UN SYSTEME DE FORCES. DEFINITION

On appelle moment résultant d'un système de forces par rapport à un point la résultante des vecteurs moments, pris par rapport à ce point, de toutes les forces du système.

I - CAS DES SYSTEMES DE FORCES COMPLANES

1°) Cas des forces concourantes - Théorème de Varignon.

Le moment résultant d'un système de forces complanes concourantes en un point A, pris par rapport à un point O de leur plan, est égal au moment de la résultante des forces.

En effet, (Fig.30), remarquons d'abord qu'on a :

$$m_O^t AF = 2 (\text{aire OAF}) = AF \times OP = OA \times AF'$$

AF' étant la projection de AF sur la perpendiculaire en A à OA.

Fig.30

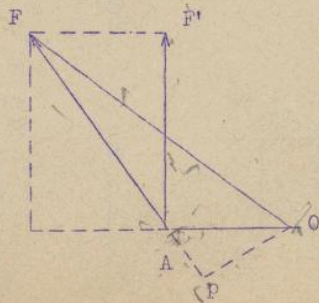
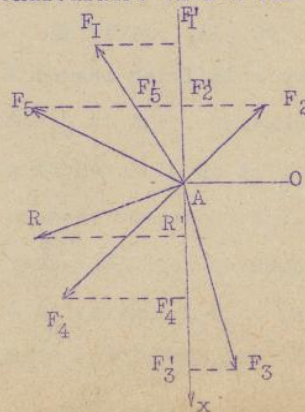


Fig.31



Soit maintenant (Fig.31 - p.19) un système de n forces coplanes concourantes en un point A , et admettant AR pour résultante. Soit O un point quelconque de leur plan Π . Elevons en A , dans le plan Π , une droite Ax perpendiculaire à OA , ayant le sens direct par rapport à un observateur debout sur le plan O . Projetons toutes les forces du système sur Ax . Soient $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ les mesures algébriques des forces $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$, et soit X la mesure de projection de la résultante AR .

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad m_0^t F_1 &= OA \times x_1 & x_1 &= AF'_1 \\ m_0^t F_2 &= OA \times x_2 & x_2 &= AF'_2 \\ & & & \cdot \\ m_0^t F_n &= OA \times x_n & x_n &= AF'_n \\ \text{et} \quad m_0^t R &= OA \times X & X &= AR' \end{aligned}$$

En faisant la somme des n premières égalités, membre à membre, on a :

$$m_0^t F_1 + m_0^t F_2 + \dots + m_0^t F_n = OA(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Or, on sait que la somme algébrique des mesures des projections des composantes est égale à la mesure de la projection de la résultante :

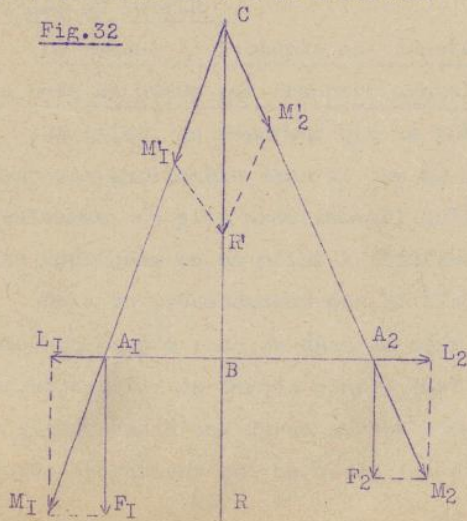
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = X,$$

d'où

$$m_0^t F_1 + m_0^t F_2 + \dots + m_0^t F_n = OA \times X = m_0^t AR. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque - En réalité, Varignon n'avait démontré le théorème (et d'une autre façon) que dans le cas de 2 forces.

Fig.32



2°) CAS DES FORCES PARALLELES

Le moment résultant d'un système de forces parallèles est égal au moment de la résultante.

En effet, (Fig.32) considérons 2 forces parallèles quelconques A_1F_1 et A_2F_2 . Introduisons les 2 forces A_1L_1 et A_2L_2 égales et opposées. Composons A_1F_1 et A_1L_1 suivant A_1M_1 , et de même A_2F_2 et A_2L_2 suivant A_2M_2 . Les lignes d'action des forces A_1M_1 et A_2M_2 sont

concourantes en un point C. Appliquons A_1M_1 et A_2M_2 en C, en remarquant que si une force se déplace sur sa ligne d'action, son moment ne change pas.

O étant un point quelconque de l'espace, on a, d'après le théorème précédent relatif aux forces concourantes :

$$m_0^t CR' = m_0^t CM'_1 + m_0^t CM'_2$$

ou

$$m_0^t DR = m_0^t A_1M_1 + m_0^t A_2M_2$$

or :

$$A_1M_1 = A_1F_1 + A_1L_1$$

et

$$A_2M_2 = A_2F_2 + A_2L_2 .$$

On a donc toujours d'après le même théorème :

$$m_0^t A_1M_1 = m_0^t A_1F_1 + m_0^t A_1L_1$$

et

$$m_0^t A_2M_2 = m_0^t A_2F_2 + m_0^t A_2L_2$$

d'où :

$$m_0^t DR = m_0^t A_1F_1 + m_0^t A_1L_1 + m_0^t A_2F_2 + m_0^t A_2L_2 .$$

Or, A_1L_1 et A_2L_2 étant 2 forces égales et opposées, leurs moments sont égaux et opposés :

$$m_0^t A_1L_1 + m_0^t A_2L_2 = 0 .$$

Donc, on a :

$$m_0^t R = m_0^t A_1F_1 + m_0^t A_2F_2 . \quad \text{C.Q.F.D.}$$

3°) CAS DU COUPLE

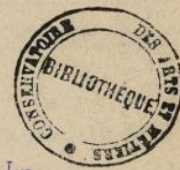
Le moment d'un couple est constant et égal à l'axe de ce couple, quel que soit le point par rapport auquel on prend le moment.

En effet, on remarque que le théorème relatif aux forces parallèles n'est pas applicable dans le cas du couple, puisque celui-ci n'admet pas de résultante, ou plus précisément, qu'il admet une résultante infiniment petite appliquée en un point à l'infini.

On a vu précédemment que si l'on transforme par translation un couple dans son propre plan ou dans un plan parallèle, cette opération se réalise par adjonction de forces deux à deux égales et opposées de glissement d'une force sur sa propre ligne d'action toutes opérations qui ne modifient pas le moment

le couple équivalent à lui-même.

Soit donc (Fig.33 - p.22) un couple AF, A'F', et soit O un point quel-



conque de l'espace. On peut toujours faire en sorte que la ligne d'action de l'une des forces, A'F' par exemple, passe par le point O. On a alors :

$$m_O^t \text{ couple} = m_O^t AF = AO \times AF$$

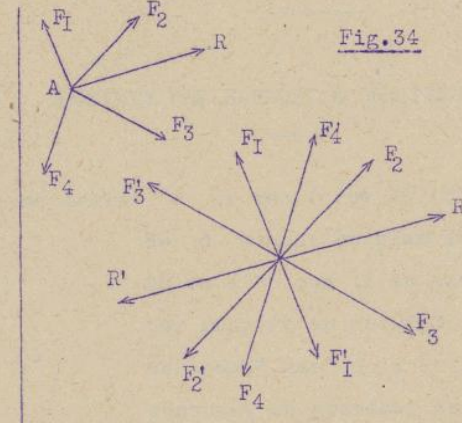
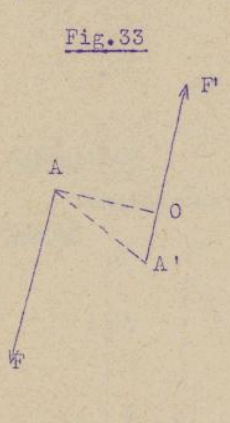
or, on a vu dans la remarque II du paragraphe relatif à la définition du moment d'une force que $m_O^t AF$ est égal en grandeur et en signe à l'axe du couple. Donc, on a :

$$m_O^t \text{ couple} = \text{axe du couple} = \text{cte.} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

II - CAS DES SYSTEMES DE FORCES CONCOURANTES DANS L'ESPACE

Théorème - (Extension du théorème de Varignon). - Le moment résultant d'un système de forces concourantes quelconques est égal au moment de la résultante.

Soit (Fig.34) un système de forces F_1, F_2, \dots, F_n , de directions quelconques mais concourantes en un point A. Soit AR la résultante. Soient,



d'autre part, G_1, G_2, \dots, G_n et G , les moments des forces F_1, F_2, \dots, F_n et R pris par rapport à un point O quelconque de l'espace. Au point O introduisons les forces suivantes, égales et opposées 2 à 2 :

$$\begin{array}{l} \vec{O F_1} \text{ et } \vec{O F'_1} \text{ égales et opposées} \quad \vec{O F_1} \text{ équipollente à } \vec{A F_1} \\ \vec{O F_2} \quad - \quad \vec{O F'_2} \quad - \quad - \quad - \quad \vec{O F_2} \quad - \quad - \quad \vec{A F_2} \\ \vec{O F_4} \quad - \quad \vec{O F'_4} \quad - \quad - \quad - \quad \vec{O F_4} \quad - \quad - \quad \vec{A F_4} \\ \text{enfin :} \\ \vec{O R} \quad - \quad \vec{O R'} \quad - \quad - \quad - \quad \vec{O R} \quad - \quad - \quad \vec{A R} \end{array}$$

L'introduction de ces forces ne change pas le moment du système puisque leurs moments sont 2 à 2 égaux et opposés.

Les forces AF_1 et OF_1 , AF_2 et OF_2 , \dots , AF_n et OF_n , AR et OR' forment des couples dont les axes sont respectivement égaux aux moments des forces $AF_1, AF_2, \dots, AF_n, AR$. Il reste les forces OF_1, OF_2, \dots, OF_n et OR dont les moments par rapport à O sont nuls. Or, AR est la résultante de $AF_1,$

$AF_2 \dots AF_n$; donc, le couple (AR, OR') est le couple résultant des divers couples $(AF_1, OF'_1), (AF_2, OF'_2) \dots (AF_n, OF'_n)$; donc son axe est égal, d'après le théorème sur la composition des composants :

$$\vec{OG} = \vec{OG}_1 + \vec{OG}_2 + \dots + \vec{OG}_n$$

C.Q.F.D.

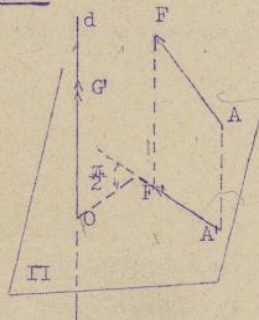
III - CAS DES SYSTEMES DE FORCES QUELCONQUES

Considérons un système de forces quelconques, et effectuons la réduction à une force unique et un couple en un point O quelconque. Le moment résultant du système par rapport à O est égal au moment résultant du système formé par la force unique \vec{OR} et le couple d'axe \vec{OG} , puisque les 2 systèmes sont équivalents. Or, le moment de OR par rapport à O est nul. Donc, le moment résultant d'un système de forces par rapport à un point O de l'axe \vec{OG} du couple adjoint en O .

MOMENTS PAR RAPPORT A UNE DROITE

DEFINITION

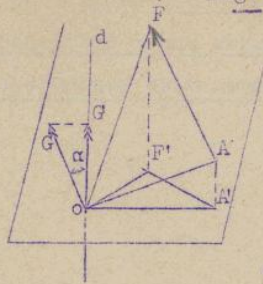
Considérons une droite d et une force AF (Fig.35). Par un point O de d menons un plan Π normal à d . Projétons AF en $A'F'$ sur Π et prenons le moment de $A'F'$ par rapport au point O : le vecteur moment OG' est porté par d ; et on remarque qu'il est constant en grandeur et sens quand O varie le long de d puisque les projections d'un vecteur sur 2 plans parallèles sont des vecteurs équipollents. OG' est le moment de AF par rapport à d . Donc, on appelle moment de la force AF par rapport à une droite d , le moment de la projection de AF sur un plan normal à d , en un point O quelconque de la droite considérée pris par rapport au point O .



Théorème - Le moment d'une force par rapport à une droite est égal à la projection, sur cette droite, du moment de la force pris par rapport à un point quelconque de la droite.

En effet, soit Fig.36 - p.24) \vec{OG} le moment de la force AF par rapport à O . Soit \vec{OG}' le moment de AF par rapport à d , c'est-à-dire le moment de $A'F'$ par rapport à O . OG' est dextrorsum par rapport à $A'F'$ par

Fig. 56



définition, donc aussi par rapport à AF. OG est doxtrosum par rapport à AF par définition. \vec{OG} et $\vec{OG'}$ sont donc d'un même côté du plan OAF. Or, OG est normal au plan OAF, donc l'angle α de OG avec OG' est aigu et égal à l'angle des plans OAF et OA'F'. On a :

$$OG = 2 \text{ aire (OAF)}$$

$$OG' = 2 \text{ aire (OA'F')}$$

or : aire (OA'F') = proj sur II aire (OAF) = aire (OAF) cos α ; donc :

$$OG' = OG \cos \alpha$$

$$OG' = pr_d OG$$

C.Q.F.D.

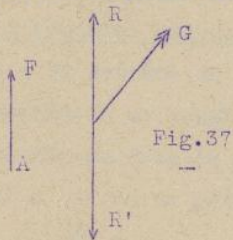
En appliquant ce théorème au cas de plusieurs forces, on a le théorème suivant :
Le moment résultant d'un système de forces par rapport à une droite est la projection sur cette droite du moment résultant par rapport à un point quelconque de la droite.

MOMENT PAR RAPPORT A UN AXE

Le ^{moment par} rapport à une droite est un vecteur. - Le moment par rapport à un axe est la mesure algébrique du vecteur précédent.

SYSTEMES DE FORCES
 REDUCTIBLES A UNE FORCE UNIQUE

Considérons un système de forces se réduisant, en un certain point A, à une force unique AF (Fig. 37). Effectuons la réduction en un point O quel con-



que. Les éléments de la réduction sont : 1°) une force unique OR équipollente à AF ; 2°) un couple (AF, OR') résultant de la translation de AF en OR, et dont l'axe OG est normal à OR.

Montrons que si OG est normal à la direction principale en un point quelconque de l'espace, le système est réductible à une force unique. Effectuons la réduction en un point A de l'axe central ; le couple OG étant, par hypothèse, rectangulaire avec l'axe central, le couple principal AG_0 est nul ; donc le système se

réduit à la force AR_0 .

D'où : La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de forces soit réductible à une force unique est que l'axe OG du couple adjoint en un point quelconque soit normal à la direction principale.

SYSTEMES DE FORCES
REDUCTIBLES A UN COUPLE

Considérons un système de forces se réduisant, en un point O, à un couple d'axe OG.

Un couple restant équivalent à lui-même quand on lui fait subir une translation quelconque dans l'espace, l'axe du couple adjoint reste égal à OG quand on effectue la réduction en un point O' quelconque.

Montrons que si l'axe du couple adjoint est constant quel que soit le point où on effectue la réduction, le système est réductible à un couple. Soient (Fig.38) OR et OG les éléments de la réduction en un point O; en un point O' ils sont : 1°) une force unique O'R' équipollente à OR, 2°) un couple dont les composantes de l'axe sont : l'axe O'G' équipollent à OG, et l'axe

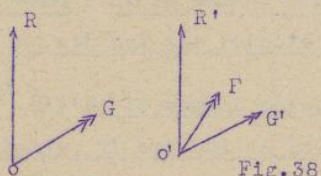


Fig.38

O'I du couple résultant du transport de OR en O'R'. Or, par hypothèse, le couple résultant de O'G' et de O'I est égal à OG; donc : O'I = 0, d'où : OR = 0.

En remarquant que l'axe OG est égal au moment résultant, on a le résultat suivant :

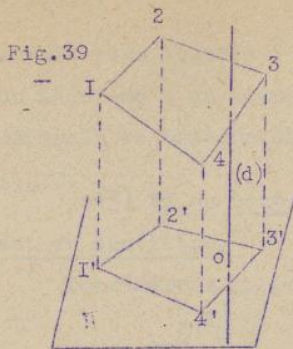
La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de forces soit réductible à un couple est que le moment résultant du système soit le même par rapport à tous les points de l'espace.

Remarque : Un système de forces constituant un polygone fermé, plan ou gauche, est réductible à un couple, puisqu'il a une résultante nulle.

Considérons (Fig.39 - page 26) une droite d traversant le polygone plan Π normal à d en un point O. Projetons le polygone I 2 3 ... sur Π suivant I'2'3' On a :

$$m_d^t(I, 2) = m_O^t(I', 2') = 2 \text{ aire}(O, I', 2').$$

Or, puisque d traverse le polygone, le point O où elle coupe Π est intérieur au polygone projeté.



- 26 -

Donc, on a :

$$m_d^t(1,2) + m_d^t(2,3) + \dots = 2 \text{ aire}(1',2',3',\dots)$$

c'est-à-dire que le moment résultant du polygone donné par rapport à d est le double de l'aire de la projection du polygone sur un plan normal à d .

CONDITIONS D'EQUILIBRE D'UN SYSTEME DE FORCES

Considérons un système de forces en équilibre. - Soient OR et OG les éléments de la réduction en un point O ; le couple et la force unique doivent s'équilibrer, autrement dit la force unique est l'équilibrante du couple ; or, un couple a une résultante nulle, donc OR est nulle, et, par suite OG est nul aussi. Donc, pour qu'un système soit en équilibre, il faut et il suffit que la force unique OR et le moment résultant OG soient nuls simultanément.

Théorème : Si le moment résultant d'un système de forces appliquées à un corps solide est nul par rapport à 3 points formant triangle, le corps est en équilibre.

1°) Si le moment résultant est nul par rapport à trois points formant triangle, il est nul en tout autre point. En effet :

Considérons (Fig. 40) un système de forces ayant des moments résultants

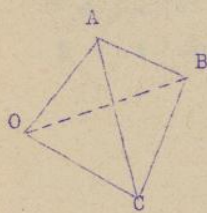


Fig. 40 μ_A, μ_B, μ_C nuls par rapport aux 3 points A, B, C non en ligne droite. Soit O un point quelconque pris en dehors du plan ABC, et soit μ_O le moment résultant du système par rapport à O . on a :

$$pr_{OA} \mu_A = m_{OA}^t \quad \text{et} \quad pr_{OA} \mu_O = m_{OA}^t$$

$$pr_{OA} \mu_A = pr_{OA} \mu_O$$

or : $\mu_A = 0$ par hypothèse, d'où $pr_{OA} \mu_O = 0$,

de même, on a : $pr_{OB} \mu_O = 0$ et $pr_{OC} \mu_O = 0$.

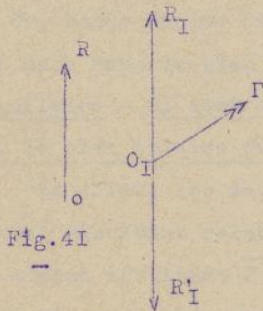
Le moment résultant μ_O ayant ses 3 projections (sur 3 axes formant trièdre,) nulles est nul.

Remarque - Si le point O était dans le plan ABC le raisonnement précédent ne

serait plus valable ; on appliquerait alors cette première partie précédente du théorème à un point O' quelconque pris en dehors du plan ABC, et en considérerait le trièdre dformé par le point O avec le point O' et 2 des points A, B, C.

2°) Si en tout point de l'espace le moment résultant est nul, le corps est en équilibre.

Considérons un point O . L'axe OG du couple adjoint est nul par hypothèse.



Soit (Fig. 4I) OR , la force unique. Effectuons la réduction en un point O_I quelconque ; les éléments de cette réduction sont : la force unique $O_I R_I$ équipollente à OR , et le couple $O_I \Gamma$ résultant de la translation de OR en $O_I R_I$. Or, $O_I \Gamma$ est nul par hypothèse, donc OR est nulle. Le couple adjoint et la force unique étant nuls tous les deux, le corps est en équilibre. C.Q.F.D.

APPLICATION

Théorème - Si 2 systèmes de forces appliquées à un corps solide ont même moment résultant par rapport aux 3 sommets d'un triangle, ils sont équivalents.

Soient Σ et Σ' , 2 systèmes ayant même moment résultant par rapport à 3 points non en ligne droite. Soit Σ'_0 le système obtenu en changeant de sens toutes les forces de Σ' . Le moment résultant de Σ'_0 est en tout point égal et opposé à celui de Σ il est donc égal et opposé à celui de Σ aux 3 points donnés. L'ensemble des 2 systèmes Σ et Σ'_0 ALORS UN MOMENT RESULTANT NUL PAR RAPPORT AUX 3 POINTS (formant triangle) : d'après le théorème précédent Σ et Σ'_0 s'équilibrent. Or, par construction de Σ'_0 , les 2 systèmes Σ' et Σ'_0 s'équilibrent également. Les 2 systèmes Σ et Σ' équilibrant un système Σ'_0 sont équivalents. C.Q.F.D.

DROITES DE MOMENT NUL

DEFINITION

On sait que le moment résultant d'un système par rapport à une droite d est la projection sur d du moment résultant par rapport à un point O quelconque de d . Or, il se peut que cette projection soit nulle, ce qui a lieu quand le moment résultant par rapport au point O est perpendiculaire à d . On dit que la droite d est "de moment nul".

Il résulte que toute droite de moment nul est perpendiculaire à tous les moments résultants relatifs à ses différents points.

Théorème I - En tout point O de l'espace, il passe des droites de moment nul dont le lieu est le plan Π du couple adjoint relatif au point O. Ce plan Π est dit le "plan polaire du point O".

En effet, soit OG le moment résultant en un point O ; on sait que OG représente aussi l'axe du couple adjoint quand on effectue la réduction au point O. Or, toute droite de moment nul passant par O est perpendiculaire à OG ; elle est donc dans le plan du couple adjoint.

Corollaire - Si deux droites de moment nul se coupent en un point P, leur plan est le plan polaire du point P.

En effet, les deux droites, étant de moment nul, sont perpendiculaires au moment résultant relatif à l'un quelconque de leurs points et, en particulier, au moment résultant \vec{PG} relatif à leur point de rencontre P ; elles déterminent alors un plan normal en P à \vec{PG} : c'est le plan du couple adjoint en P, c'est-à-dire le plan polaire du point P.

Théorème II - Toute droite d coupant à angle droit l'axe central est une droite de moment nul.

En effet, considérons la réduction canonique dont les éléments sont \vec{OR}_0 et \vec{OG}_0 . La droite considérée d étant perpendiculaire à l'axe central, la projection de \vec{OG}_0 sur d est nulle. D'autre part d coupant l'axe central, le moment de \vec{OR}_0 , par rapport à d est nul. Donc, le moment résultant par rapport à d est nul. c'est une droite de moment nul.

Réciproque I - Toute droite d de moment nul qui coupe l'axe central lui est perpendiculaire.

En effet, d coupant l'axe central, le moment de \vec{OR}_0 par rapport à d est nul. Or, d est, par hypothèse, de moment nul, il faut donc que le moment du couple adjoint par rapport à d soit nul, c'est-à-dire \vec{OG}_0 soit perpendiculaire à d.

Réciproque II - Toute droite d de moment nul, qui est rectangulaire avec l'axe central, le coupe.

En effet, d étant rectangulaire avec l'axe central, la projection de \vec{OG}_0 sur d est nulle ; or, d est, par hypothèse, de moment nul. Il faut donc que le moment de \vec{OR}_0 , par rapport à d soit nul, c'est-à-dire que d soit dans un même plan avec \vec{OR}_0 : donc, d coupe l'axe central.

Théorème III - Les plans polaires relatifs aux différents points d'une même parallèle à la direction principale sont parallèles entre eux.

En effet, on sait que les éléments de la réduction sont les mêmes en tous points d'une parallèle à la direction principale. Donc, les plans polaires, qui sont les plans des couples adjoints, sont tous parallèles entre eux.

Théorème IV - Tout plan Π est le plan polaire d'un point P appelé "son pôle", ce point pouvant être rejeté à l'infini, ce qui a lieu quand Π est parallèle à l'axe central (en particulier quand il contient l'axe central).

1°) Cas où Π coupe l'axe central.

Soient (Fig. 42) AR_0 et AG_0 les éléments de la réduction en un point A de l'axe central. Soit Π un plan quelconque coupant l'axe central en A. Soit Ax l'intersection de Π avec le plan Π_0 normal en A à l'axe central : Ax est une droite de moment nul d'après le théorème II précédent.

Soit M un point quelconque de Π ; d'après le théorème I, M a un plan polaire passant par M. L'intersection M_y de ce plan avec le plan Π est une droite de moment nul. Deux cas peuvent alors se présenter :

a) M_y et Ax se coupent en un point P.

D'après le corollaire du théorème I, le plan qu'elles déterminent, c'est-à-dire le plan Π , est le plan polaire du point P. Donc, Π a pour pôle le point P.

b) M_y et Ax sont parallèles.

Ax étant par construction rectangulaire avec l'axe central, M_y l'est aussi, et comme elle est de moment nul, elle coupe l'axe central en un point A' d'après la réciproque II du théorème II. L'axe central ayant alors 2 points A et A' dans Π est tout entier contenu dans Π . Toutes les perpendiculaires à l'axe central situées dans Π sont, d'après le théorème II, des droites de moment nul ; comme elles sont parallèles, leur point d'intersection est rejeté à l'infini, donc, le pôle de Π est rejeté à l'infini.

2°) Cas où Π est parallèle à l'axe central.

Dans ce cas, une parallèle à l'axe central menée par un point de Π est tout entière contenue dans Π . Soit alors AA' une droite de Π parallèle à l'axe central. D'après le théorème III les plans polaires de A et A' sont parallèles : leurs traces (droites de moment nul) sur Π sont parallèles ; leur point d'intersection est alors rejeté à l'infini, donc le plan Π a son pôle à l'infini.

DROITES CONJUGUÉES

Conformément à la désignation introduite par PLUECKER, nous appellerons dyname tout système de forces appliquées à un corps solide.

Théorème I - Tout dynamé est équivalent à un système de deux forces dont l'une portée par une droite arbitraire, pourvu que celle-ci ne soit ⁿⁱ une droite de moment nul, ni une parallèle à l'axe central.

Fig. 42

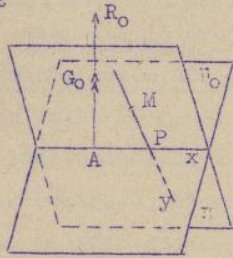
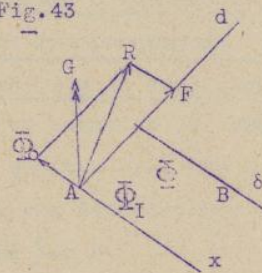


Fig. 43



Soit, en effet (Fig. 43) une droite d soumise à cette double restriction. Prenons un point quelconque A sur cette droite, \vec{AG} l'axe du couple adjoint et Π le plan normal

en A à AG . Soit encore \vec{AR} la résultante de translation des forces du dynamé. Le plan mené par d et par \vec{AR} coupe le plan Π suivant une droite Ax , différente de d , la droite d n'étant pas une droite de moment nul n'est pas située dans le plan Π . De plus, puisque d n'est pas parallèle à la directrice principale AR n'est pas sur d , on pourra donc décomposer AR en deux forces, une \vec{AF} (ou \vec{F}) suivant d et une autre $\vec{A\Phi_I}$ (ou $\vec{\Phi_I}$) suivant la droite Ax .

Soit $\vec{\Phi_I}$ (ou $\vec{\Phi_I}$) la force directement opposée à $\vec{\Phi_0}$. Le couple adjoint dont \vec{AG} est l'axe peut être réalisé par la force $\vec{\Phi_I}$ et par une force $\vec{B\Phi}$ (ou $\vec{\Phi}$) portée par une droite δ du plan Π .

Le dynamé est initialement représenté par les forces \vec{R} , $\vec{\Phi_I}$ et $\vec{\Phi_0}$, on remplaçant \vec{R} par ses composants \vec{F} et $\vec{\Phi_0}$, le dynamé est représenté par les forces \vec{F} , $\vec{\Phi_0}$, $\vec{\Phi_I}$ et $\vec{\Phi}$. Comme Φ_0 et Φ_I sont égales et directement opposées, le dynamé se réduit aux forces \vec{F} , $\vec{\Phi}$, portées par les droites respectives d et δ .

La droite δ est dite la conjuguée de la droite d .

Théorème II - Toute droite qui est dans un même plan avec la droite d et aussi dans un même plan avec la conjuguée de d est une droite de moment nul, et réciproquement, toute droite de moment nul qui est dans un même plan avec une droite est aussi dans un même plan avec ses conjuguées. En effet, d'abord si

la droite x est dans un même plan avec d et aussi dans un même plan avec δ , les moments par rapport à x des forces F et Φ sont nuls séparément, donc le moment résultant du dynamisme par rapport à x est nul.

Réciproquement, si x est une droite de moment nul qui soit dans un même plan avec d , le moment de \vec{F} par rapport à x étant nul, il faudra que le moment de Φ soit aussi nul afin que le moment résultant par rapport à x le soit. Par suite, x et Φ sont aussi dans un même plan.

Théorème III - La droite δ conjugquée d'une droite d est le lieu des pôles des plans menés par la droite d et réciproquement, la droite d elle-même est le lieu des pôles des plans menés par sa conjugquée δ .

En effet (Fig.44) soit B ce point où δ est coupée par un plan mené par D , si l'on mène dans ce plan 2 droites DA, DB , ces droites sont de moment nul et, par suite, B , où se coupent ces deux droites est, d'après un théorème précédent, le pôle du plan ADD mené par d .

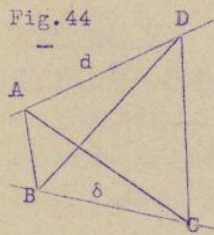


Fig.44

Si l'on mène un plan quelconque par δ et le point A de d , des droites quelconques AB et AC de ce plan sont de moment nul et, par suite, le point A où elles se coupent est le pôle de ce plan.

Remarque I - On observera qu'en joignant les points C et D on forme un tétraèdre $ABCD$ dans lequel les arêtes opposées sont deux droites conjuguées et les 4 autres sont des droites de moment nul.

Remarque II - Les droites d, δ sont chacune le lieu des pôles des plans menés par l'autre, on sorte que d peut être définie au moyen de δ comme δ l'a été au moyen de d . La droite d est la conjuguée de δ de même que δ l'est de d .

Théorème IV - Deux droites conjuguées et l'axe central sont parallèles à un même plan.

En effet, soit F, Φ les deux forces portées par les droites d et δ , conjuguées. Si l'on mène par un point P de l'espace les parallèles à $\vec{F}, \vec{\Phi}$ et que l'on construise la somme géométrique, cette somme n'est autre que la résultante de translation des forces du dynamisme. Cette résultante étant parallèle à l'axe central, le théorème est démontré.

Corollaire I - La perpendiculaire commune à deux droites conjuguées coupe à angle droit l'axe central.

En effet, cette perpendiculaire est une droite de moment nul puisqu'elle coupe deux droites conjuguées, de plus, elle est normale au plan que l'on peut, d'après le théorème précédent, mener par l'axe central, parallèle à la fois à d et δ . Donc, d'après un théorème démontré antérieurement, cette droite coupe l'axe central à angle droit.

Corollaire II - Les projections de 2 droites conjuguées sur un plan normal à l'axe central sont parallèles.

En effet, d'après le théorème IV, les plans menés par d et δ parallèlement à l'axe central sont parallèles. Ils sont donc coupés par le plan normal à l'axe central suivant deux droites parallèles.

Si l'on considère un ensemble de droites $d, d', d'' \dots$ issues d'un point A , leurs conjuguées $\delta, \delta', \delta'' \dots$ sont dans le plan polaire α du point A . Cela résulte de la conception des droites conjuguées.

Il est, de même, aisé de constater que :

Théorème V - Si un plan Π passe par un point A , le plan polaire α de A passe au pôle P du plan Π .

En effet, le plan α polaire de A , coupe le plan Π suivant une droite x , issue de A , puisque A est dans le plan Π , par hypothèse. Cette droite x issue de A , dans le plan α polaire de ce point, est une droite de moment nul. D'autre part, une droite de moment nul x est dans le plan, elle passe donc par le pôle P de ce plan.

Comme x est aussi dans le plan d , on voit bien que le plan α passe au point P .

Théorème VI - Si l'on mène par une droite d un plan α parallèle à la direction principale, les droites de moment nul contenues dans ce plan sont toutes parallèles à la droite δ conjuguée de d , le pôle du plan α est à l'infini sur δ .

En effet, le point A , où un plan mené par d coupe δ , pôle de ce plan et toutes les droites de moment nul qui se trouvent dans ce plan vont passer par ce point.

Lorsque le plan est le plan α mené par d et parallèlement à la direction principale, ce plan α est aussi parallèle à δ et le point A est rejeté à l'infini. Dès lors, toutes les droites de moment nul, situées dans le plan α sont parallèles à δ .

Remarque - Tout plan α , parallèle à la direction principale a un pôle à l'infini, dans une direction à laquelle sont parallèles toutes les droites δ

conjuguées des droites d tracées dans ce plan.

Théorème VII - Deux droites δ et δ' parallèles ont pour conjuguées des droites d , d' situées dans un même plan parallèle à la direction principale.

Nous allons montrer que les deux plans α , α' menés par d et d' respectivement à la direction principale coïncident.

En effet, le plan Π mené par δ et par δ' (parallèles coupe la droite d en un point P qui est le pôle du plan Π et il coupe de même d' au même point les plans α , α' parallèles, ces parallèles à δ , δ' et à la direction principale ayant un point P commun coïncident.

La démonstration tombe en défaut si les droites δ , δ' sont dans un même plan β parallèle à la direction principale car alors ce plan est parallèle à d et à d' .

Mais, dans ce cas, on peut montrer que d , d' sont parallèles. Cela résulte intuitivement de la remarque suivante :

Un dyname reste identique à lui-même par une translation suivant l'axe central. Les droites δ , δ' étant parallèles et dans un même plan parallèle à la direction principale, on peut les superposer l'une à l'autre par translation parallèle à la direction principale dans les conjuguées d , d' de δ , δ' se trouvent ainsi ^{ront} superposées l'une à l'autre par la même translation, elles sont parallèles. On reconnaît, de plus, que d , d' sont dans un même plan parallèle à la direction principale.

Si l'on considère une figure polyédrique (A_0) dans l'espace, composée de faces pleines juxtaposées suivant les arêtes de côtés communs, et que l'on prenne les droites conjugues de ces arêtes, on constitue une 2^e figure polyédrique (D_0) dans laquelle aux polyèdres des faces de la première (A_0) correspondent des angles polyèdres dans la seconde et inversement. Les projections de ces polyèdres (A_0) (D_0) par un plan normal à l'axe central nous fourniront des figures qui interviennent dans les méthodes de la statique graphique des systèmes articulés plans.

EQUILIBRE DES CORPS SOLIDES GENES

Action mutuelle de deux corps l'un sur l'autre.

Considérons plusieurs corps solides en relation par contact, les contacts ayant lieu suivant des surfaces géométriques données qui permettent une cer-

taine mobilité des corps les uns par rapport aux autres. Ces corps devant rester en contact, les seuls mouvements possibles sont ceux dans lesquels les surfaces en contact glissent les unes sur les autres.

Considérons alors 2 corps A et B en relation par contact, et auxquels sont appliqués des systèmes de forces. Soient S_A et S_B les surfaces de contact des deux corps : S_A et S_B sont tangentes en chaque point de contact. Soient (Fig. 45)

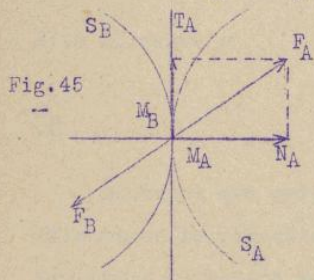


Fig. 45

M_A un point de S_A , et M_B , le point de S_B qui, à l'instant considéré, coïncide avec M_A . Sous l'influence des forces appliquées aux 2 corps, ceux-ci tendent à prendre un mouvement de glissement l'un par rapport à l'autre. Dans ce glissement, S_A exerce sur S_B une action \vec{F}_B et S_B exerce réciproquement sur S_A une action \vec{F}_A ; les deux forces \vec{F}_A et \vec{F}_B sont égales et opposées, mais non appliquées au même point; \vec{F}_A est appliquée en M_A et \vec{F}_B en M_B , les 2 points M_A et M_B étant en coïncidence à l'instant considéré.

Si les surfaces S_A et S_B sont parfaitement polies, elles n'opposent aucune résistance au glissement de l'une sur l'autre. Dans le cas contraire, la résistance opposée est appelée frottement.

Décomposons la force \vec{F}_A en 2 autres : l'une \vec{N}_A portée par la normale à la surface S_A en M_A , l'autre \vec{T}_A portée par la tangente. \vec{T}_A représente la force de frottement. Si $\vec{T}_A = 0$, \vec{F}_A se réduit à \vec{N}_A : donc : dans le cas de glissement sans frottement, l'action et la réaction, égales et opposées, sont normales aux surfaces au point de contact considéré.

EQUILIBRE D'UN CORPS ASSUJETTI A TOURNER AUTOUR D'UN AXE FIXE.

Le guidage d'un corps A assujetti à tourner autour d'un axe fixe Δ par rapport à un autre corps B, est réalisé par une surface de révolution R_A (à axe Δ) solidaire du corps mobile et emboîtée dans une autre surface de révolution R_B (axe Δ) égale et solidaire du corps fixe.

Soient $F_1, F_2 \dots F_n$ les forces directement appliquées au corps mobile A, et soient $R_1, R_2 \dots R_n$, les réactions exercées par la surface de révolution fixe sur la surface mobile. Supposons le corps en équilibre. Le moment résultant des forces et des réactions par rapport à un axe quelconque est alors nul; on a en particulier pour l'axe Δ :

$$(m_{\Delta}^t F_I + m_{\Delta}^t F_2 + \dots + m_{\Delta}^t F_n) + (m_{\Delta}^t R_I + \dots + m_{\Delta}^t R_n) = 0.$$

Si l'on suppose qu'il y a glissement sans frottement les réactions sont normales aux surfaces de révolution en contact ; or, toute normale à une surface de révolution est dans un même plan avec l'axe de révolution Δ ; on a donc :

$$m_{\Delta}^t R_I = 0, \quad m_{\Delta}^t R_2 = 0, \quad \dots, \quad m_{\Delta}^t R_n = 0.$$

d'où il reste :

$$m_{\Delta}^t F_I + m_{\Delta}^t F_2 + \dots + m_{\Delta}^t F_n = 0$$

ou

$$\sum m_{\Delta}^t F_i = 0.$$



Montrons que cette condition est suffisante pour qu'il y ait équilibre. Effectuons la réduction du système des forces F_i en un point O de l'axe Δ . Par hypothèse le moment résultant par rapport à Δ étant nul, l'axe OG du couple adjoint est normal à Δ , c'est-à-dire que les 2 forces du couple sont dans un même plan avec Δ . Le système des forces F_i est par conséquent réductible à un système de 3 forces qui coupent l'axe Δ en des points auxquels on peut les supposer appliquées. Ces 3 forces sont donc détruites par les réactions de l'axe fixe. D'où :

La condition nécessaire et suffisante d'équilibre d'un corps assujéti à tourner sans frottement autour d'un axe fixe Δ est : $\sum m_{\Delta}^t F_i = 0$.

EQUILIBRE D'UN CORPS ASSUJÉTI A GLISSER SUIVANT UNE DROITE FIXE OU EQUILIBRE DU COUPLE PRISMATIQUE

Le guidage d'un corps A assujéti à glisser suivant une droite fixe d'un corps B est réalisé par une glissière rectiligne prismatique : un prisme P_A solidaire du corps A peut glisser dans un autre prisme P_B solidaire du corps B ; on remarquera que les profils des sections droites des 2 prismes ne sont pas nécessairement identiques ; il suffit de trois points de contact entre les profils pour réaliser un bon guidage, à condition toutefois que les 3 normales en ces points ne soient pas concourantes comme on le verra plus loin.

Soit Δ la droite fixe. Supposons le corps A en équilibre. La résultante des forces directement appliquées et des réactions est alors nulle, c'est-à-dire que la somme des projections des forces et des réactions sur une droite quelconque est nulle, et, en particulier sur l'axe Δ :

$$Pr_{\Delta} F_I + Pr_{\Delta} F_2 + \dots + Pr_{\Delta} R_I + Pr_{\Delta} R_2 + \dots = 0.$$

Or, on suppose que les frottements sont nuls, c'est-à-dire que les réactions sont normales aux faces des prismes, donc rectangulaires avec Δ , d'où :

$$\text{Pr}_{\Delta} R_1 = 0 \quad , \quad \text{Pr}_{\Delta} R_2 = 0, \dots$$

D'où la condition nécessaire pour l'équilibre :

$$\text{Pr}_{\Delta} F_1 + \text{Pr}_{\Delta} F_2 + \dots = 0$$

ou
$$\sum \text{Pr}_{\Delta} F_i = 0.$$

Cette condition est suffisante. Établissons d'abord le théorème suivant :

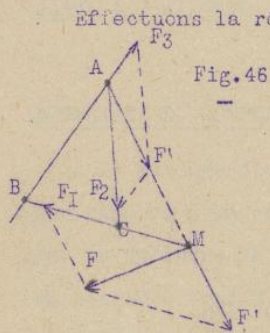
Théorème : Toute force située dans un même plan avec un triangle quelconque est équivalente à un système de 3 forces agissant suivant les 3 côtés du triangle.

Soit (Fig.46) ABC un triangle quelconque et F une force située dans son plan. Soit M le point d'intersection de la ligne d'action de F avec l'un des côtés du triangle. Appliquons F en M, et décomposons cette force en 2 autres F_1 et F' portées par le côté DC du triangle et la droite AM. Appliquons F' en A, et décomposons là en 2 forces F_2 et F_3 portées par les côtés AC et AB du triangle. On a ainsi décomposé la force F en 3 autres forces portées par les côtés du triangle ABC.

Montrons maintenant que si l'on a :

$$\sum \text{Pr}_{\Delta} F_i = 0 ,$$

la glissière rectiligne est en équilibre.



Effectuons la réduction des forces F_i en un point O de l'axe fixe Δ . La projection de OR étant nulle, OR est perpendiculaire à Δ , c'est-à-dire située dans un plan de section droite des prismes. Quant au couple adjoint : si OG est parallèle à Δ les 2 forces du couple sont situées dans un même plan de section droite avec OR ; si, au contraire, OG n'est pas parallèle à Δ , le plan du couple et le plan de section droite se coupent suivant une droite Ox normale à Δ , et on peut toujours par rotation du couple dans un plan amener les 2 forces à être parallèles à Ox, c'est-à-dire à être chacune dans un plan de section droite. Considérons alors les 2 profils des sections droites, et soient (Fig.47 - page 37) L, M, N trois points de contact. Les réactions s'opèrent normalement aux profils en L, M, N et sont contenues dans le plan de section droite. Soit L', M', N' le triangle qu'elles forment.

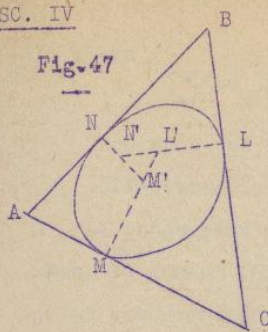


Fig. 47

D'après le théorème précédent, on peut décomposer dans leurs sections droites respectives les deux forces du couple et la force OR en 3 forces portées par les côtés du triangle L'I' N'. On peut donc ramener le système des forces directement appliquées à un système de forces portées par les mêmes droites que les réactions. Donc, si la liaison permet aux réactions de se développer dans les 2 sens sur les normales aux points de contact, il y a toujours équilibre ; si, au contraire, la liaison permet aux réactions de se développer dans un sens unique, ou bien il y a équilibre, ou bien le couple est dissocié (Fig. 48).

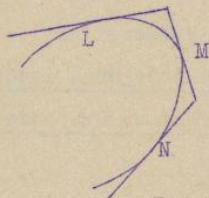


Fig. 48

Remarque - Si les profils n'ont que 3 points de contact L, M, N, et si les normales en ces points sont concourantes, la décomposition des forces du couple et de la force OR en 3 forces portées par les côtés du triangle L'M'N' est impossible. Mais dans ce cas le corps n'est plus assujéti uniquement à glisser suivant Δ : une rotation infiniment petite peut s'effectuer autour du point de concours I des normales ; on a vu, en effet, dans le cours de Cinématique que dans ce cas I est un centre instantané de rotation.

En résumé : La condition nécessaire et suffisante d'équilibre d'un corps assujéti à glisser suivant une droite fixe Δ est

$$\sum pr_{\Delta} F_i = 0.$$

EQUILIBRE DU COUPLE VERRU

Le guidage d'un corps A assujéti à tourner autour d'un axe fixe Δ par rapport à un corps B, et à glisser suivant ce même axe, est réalisé par un cylindre de révolution C_A d'axe Δ , solidaire de A, et emboité dans un cylindre égal C_B , de même axe, solidaire de B.

S'il y a équilibre, on a :

$$\sum pr_{\Delta} F_i + \sum pr_{\Delta} R_i = 0,$$

et
$$\sum m_{\Delta}^t F_i + \sum m_{\Delta}^t R_i = 0.$$

Or, on suppose que les réactions sont normales aux surfaces cylindriques en contact, donc elles coupent l'axe Δ à angle droit. D'où :

$$\sum pr_{\Delta} R_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum m_{\Delta}^t R_i = 0.$$

Il reste :

$$\sum \text{pr}_{\Delta} F_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum m_{\Delta}^t F_i = 0 .$$

Montrons que ces deux conditions sont suffisantes pour l'équilibre.

Effectuons la réduction du système des forces F_i en un point O de l'axe Δ . La projection de OR sur Δ étant nulle, OR est perpendiculaire à Δ . De même, le moment résultant par rapport à Δ étant nul, l'axe OG du couple adjoint est perpendiculaire à Δ , c'est-à-dire que le plan du couple contient Δ : on peut alors choisir le couple dans son plan de telle façon que ses 2 forces soient perpendiculaires à Δ et appliquées en deux points de cet axe. Donc le système des forces F_i est réductible à 3 forces perpendiculaires à Δ et appliquées en des points de Δ : par suite, il y a équilibre puisque les réactions coupent Δ à angle droit.

En résumé : Les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre d'un corps assujéti à tourner autour d'une droite fixe Δ et à glisser suivant cette droite sont :

$$\sum \text{pr}_{\Delta} F_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum m_{\Delta}^t F_i = 0$$

EQUILIBRE D'UN CORPS ASSUJÉTI A TOURNER ATOUR D'UN POINT FIXE OU EQUILIBRE DU COUPLE SPHERIQUE.

Le guidage d'un corps A assujéti à tourner autour d'un point fixe O par rapport à un autre corps B est réalisé par une sphère de centre O solidaire de A encoûtée dans une autre sphère de même rayon solidaire de B .

S'il y a équilibre, le moment résultant des forces directement appliquées et des réactions est nul par rapport à un point quelconque, et, en particulier, par rapport à O :

$$\sum m_O^t F_i + \sum m_O^t R_i = 0 .$$

Or, on suppose les réactions normales aux surfaces sphériques en contact : elles passent donc par O . D'où :

$$\sum m_O^t R_i = 0 .$$

Il reste

$$\sum m_O^t F_i = 0 .$$

Montrons que cette condition est suffisante. Effectuons la réduction des forces F_i au point fixe O . Le moment résultant en O étant nul, le couple adjoint en O est nul ; le système se réduit alors à une force unique passant par le point O : cette force est équilibrée par les réactions passant par O .

En résumé : La condition nécessaire et suffisante d'équilibre d'un

corps assujéti à tourner autour d'un point fixe 0 est :

$$\sum_0 m_i^t F_i = 0 .$$

EQUILIBRE D'UN CORPS ASSUJÉTI A GLISSER SUR UN PLAN FIXE OU EQUILIBRE DU COUPLE DU PLAN

Le couple plan est un cas particulier du couple sphérique : celui où le rayon des 2 sphères en contact devient infini.

Soit Π un plan sur lequel un corps est assujéti à glisser. Si le corps est en équilibre, la résultante des forces directement appliquées et des réactions est nulle, c'est-à-dire que sa projection sur une droite quelconque est nulle, et, en particulier, sur 2 droites de Π non parallèles Ox et Oy :

$$\sum pr_{Ox} F_i + \sum pr_{Ox} R_i = 0$$

et

$$\sum pr_{Oy} F_i + \sum pr_{Oy} R_i = 0 .$$

De plus, le moment résultant par rapport à une droite quelconque est nul, et en particulier par rapport à une droite Oz perpendiculaire à Π :

$$\sum m_{Oz}^t F_i + \sum m_{Oz}^t R_i = 0 .$$

Or on suppose que les frottements sont nuls, c'est-à-dire que les réactions sont normales à Π , d'où :

$$\sum pr_{Ox} R_i = 0 , \quad \sum pr_{Oy} R_i = 0$$

et

$$\sum m_{Oz}^t R_i = 0 .$$

Il reste :

$$\sum pr_{Ox} F_i = 0 , \quad \sum pr_{Oy} F_i = 0$$

et

$$\sum m_{Oz}^t F_i = 0 .$$

Montrons que ces trois conditions sont suffisantes pour qu'il y ait équilibre dans le cas d'une liaison bilatérale. Effectuons la réduction en un point 0 quelconque du plan Π ; les projections de OR sur 2 droites quelconques de Π étant nulles, Or est normale à Π ; d'autre part le mouvement résultant par rapport à une droite normale à Π étant nul, l'axe OG est contenu dans Π , c'est-à-dire que le plan du couple est normal à Π , et on peut alors représenter le couple par 2 forces perpendiculaires à Π . Ainsi le système des forces F_i est équivalent à 3 forces perpendiculaires à Π . Il y a donc toujours équilibre puisque la liaison bilatérale permet aux réactions de se développer dans les 2 sens sur les normales à Π .

En résumé : Les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre d'un

corps assujéti à glisser sans frottement sur un plan Π sont dans le cas d'une liaison bilatérale :

$$\sum \text{pr}_{Ox} F_i = 0 , \quad \sum \text{pr}_{Oy} F_i = 0 , \quad \sum \text{m}_{Oz}^t F_i = 0$$

(Ox et Oy étant 2 droites quelconques de Π non parallèles, et Oz une perpendiculaire à Π).

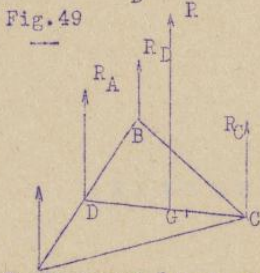
Remarque - Dans le cas d'une liaison unilatérale où le couple est dissociable, les 3 conditions précédentes sont nécessaires mais non suffisantes.

Nous allons étudier un cas particulier d'une liaison unilatérale.

Problème - Chercher les conditions d'équilibre d'un corps pesant reposant sur un plan horizontal par 3 points formant triangle.

Soient (Fig.49) A,B,C les 3 points d'appui du corps en équilibre sur le plan horizontal.

Les réactions R_A, R_B, R_C qui se développent respectivement en A, B, C sont portées par les verticales ascendantes. La résultante R_D des 2 réactions R_A et R_B , forces parallèles et de même sens,



est appliquée en un point D de AB situé entre A et B, et est portée par la verticale ascendante, de même la résultante R de R_D et R_C , qui est celle des 3 réactions en A, B, C est appliquée en un point G' de DC entre D et C, c'est-à-dire intérieur au triangle ABC, et est portée par la verticale ascendante.

Or le corps étant en équilibre, son poids P est égal et opposé à la réaction R, donc est porté par la verticale en G', ce qui peut s'exprimer de la façon suivante : le centre de gravité G du corps se projette sur le plan horizontal en un point intérieur au triangle ABC dit "de sustentation".

Montrons que cette condition est suffisante pour qu'il y ait équilibre. Soit G' la projection du centre de gravité du corps sur le plan horizontal ABC. Soit D l'intersection de G'C avec AB. Décomposons le poids P en 2 forces verticales appliquées en D et C ; le point G' étant compris entre D et C, les 2 forces P_D et P_C sont de même sens que P ; décomposons maintenant P_D en 2 autres forces verticales appliquées en A et B : P_A et P_B sont encore de même sens que P. Le poids P est ainsi décomposé en 3 forces verticales de même sens que P appliquées aux points A, B, C, c'est-à-dire portées par les mêmes droites que les réactions et en sens contraire. Il y a donc équilibre.

Déterminons les réactions R_A , R_B , R_C aux 3 points d'appui. Ces réactions sont égales et opposées respectivement aux composantes P_A , P_B , P_C du poids P . Or, on a :

$$P_C \times CG' = P_D \times G'D$$

d'où

$$\frac{P_C}{G'D} = \frac{P_D}{CG'} = \frac{P}{CD}$$

de même, on a :

$$\frac{P_B}{AD} = \frac{P_A}{DB} = \frac{P_D}{AB}$$

d'où on tire :

$$R_C = -P_C = -\frac{G'D}{CD} \times P$$

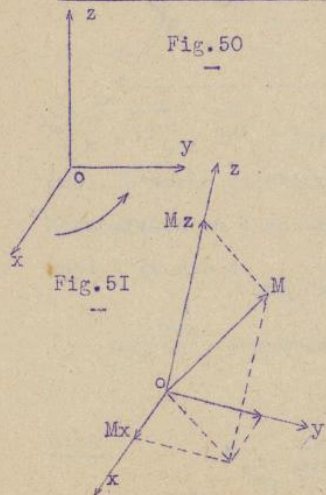
$$R_B = -P_B = -\frac{A}{AB} \times \frac{CG'}{CD} \times P$$

$$R_A = -P_A = -\frac{DB}{AB} \times \frac{CG'}{CD} \times P$$

ETUDES ANALYTIQUES DES DYNAMES

PRELIMINAIRES

ORIENTATION D'UN TRIEDRE DE COORDONNEES (Fig.50).

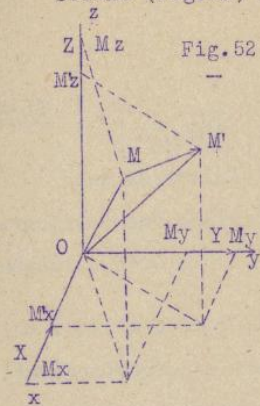


On adoptera pour sens direct d'un trièdre de coordonnées $O(x, y, z)$ le sens défini de la façon suivante : l'axe Ox doit, pour se superposer à Oy , tourner de 90° de droite à gauche pour un observateur personnifiant l'axe Oz .

COORDONNEES D'UN POINT M - Etant donné (Fig.51) un trièdre direct $O(x, y, z)$ et un point M de l'espace, on appelle coordonnées du point M les mesures algébriques x, y, z des projections du vecteur \vec{OM} sur les axes Ox, Oy, Oz .

PROJECTIONS D'UNE FORCE

Soient (Fig.52) x, y, z les coordonnées du point d'application M de la force, et soient x', y', z' celles du point M' extrémité du vecteur représentant la force.



Dans le triangle OMM' , on a :
 $\vec{OM'} = \vec{OM} + \vec{MM'}$.

En projetant sur l'axe Ox , on a :

$$\text{mes pr}_{Ox} \vec{OM'} = \text{mes pr}_{Ox} \vec{OM} + \text{mes pr}_{Ox} \vec{MM'}$$

On a donc en posant $\text{mes pr}_{Ox} \vec{MM'} = X$:

$$x' = x + X$$

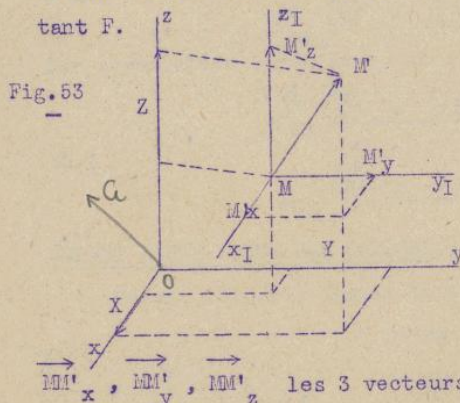
$$\text{d'où } X = x' - x$$

et par projection sur Oy et Oz , on a de même :

$$Y = y' - y \quad \text{et} \quad Z = z' - z$$

MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A L'ORIGINE DES COORDONNEES

Soient (Fig.53) x, y, z les coordonnées du point M d'application de la force F , et soient X, Y, Z les projections des vecteurs $\vec{MM'}$ représentant F .



Le moment de F par rapport à O a pour projections sur les 3 axes Ox, Oy, Oz , des vecteurs qui sont les moments respectifs de F par rapport à ces axes. Cherchons alors le moment de F par rapport à l'un des 3 axes, Oz par exemple.

Menons par M des axes Mx_I, My_I, Mz_I , parallèles aux axes Ox, Oy, Oz . Soient

$\vec{MM'_x}, \vec{MM'_y}, \vec{MM'_z}$ les 3 vecteurs projections de $\vec{MM'}$ sur ces nouveaux axes. D'après un théorème sur le moment résultant d'un système de vecteurs concourants on a en valeurs algébriques puisqu'il s'agit de moments par rapport à un axe :

$$m_{Oz}^t \vec{MM'} = m_{Oz}^t \vec{MM'_x} + m_{Oz}^t \vec{MM'_y} + m_{Oz}^t \vec{MM'_z}$$

Or, $\vec{MM'_z}$ étant dans un même plan avec Oz , on a

$$m_{Oz}^t \vec{MM'_z} = 0$$

d'où :

$$m_{Oz}^t \vec{MM'} = m_{Oz}^t \vec{MM'_x} + m_{Oz}^t \vec{MM'_y}$$

Or, $\vec{MM'_x}$ étant perpendiculaire à Oz , sa projection sur un plan perpendiculaire à cet axe lui est égale, on a alors :

$$\left| m_{Oz}^t \overrightarrow{MM'}_x \right| = \text{long } \overrightarrow{MM'}_x \cdot |y|$$

$$\text{long } \overrightarrow{MM'}_x = |X|$$

d'où : $\left| m_{Oz}^t \overrightarrow{MM'}_x \right| = |y X|$ et $m_{Oz}^t \overrightarrow{MM'}_x = \pm y X$.

Pour déterminer le signe, il suffit de remarquer que si y et X sont simultanément positifs, le vecteur $\overrightarrow{MM'}_x$ est sinistrorsum, et donc son moment négatif, d'où :

$$m_{Oz}^t \overrightarrow{MM'}_x = -y X$$

(on verrait que si l'un des 2 facteurs changeait de signe, ou tous les 2 simultanément, le moment est toujours égal à $-y X$).

On a également : $\left| m_{Oz}^t \overrightarrow{MM'}_y \right| = |x Y|$

$$m_{Oz}^t \overrightarrow{MM'}_y = \pm x Y$$

or, si x et Y sont positifs, le vecteur $\overrightarrow{MM'}_y$ est dextrorsum, on a donc :

$$m_{Oz}^t \overrightarrow{MM'}_y = + x Y$$

d'où :

$$m_{Oz}^t \overrightarrow{MM'} = x Y - y X = N.$$

Par permutation circulaire, on a :

$$m_{Ox}^t \overrightarrow{MM'} = y Z - z Y = L.$$

Et :

$$m_{Oy}^t \overrightarrow{MM'} = z X - x Z = M.$$

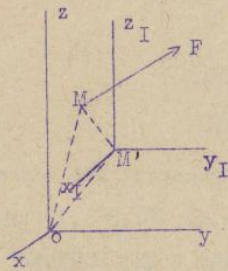
Tous en tirons

$$OG = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN POINT QUELCONQUE

Soient (Fig.54) donnés la force F de projections X, Y, Z, appliquée au point M de coordonnées x, y, z, et le point M' de coordonnées x', y', z' par rapport auquel on cherche le moment de F.

Fig.54



Par M' menons des axes $M'_{x'I}$, $M'_{y'I}$, $M'_{z'I}$, respectivement parallèles aux axes Ox, Oy, Oz ; et cherchons les nouvelles coordonnées du point M.

Dans le triangle OM'M on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}.$$

En projetant sur $M'_{x'I}$ parallèle à Ox, on a :

$$x = x' + x_I$$

$$x_I = x - x'$$

ou

et, de même :

$$y_I = y - y' \quad \text{et} \quad z_I = z - z'$$

En appelant L' , M' , N' les projections du moment de F par rapport à l'origine M' des nouvelles coordonnées, on a, d'après les expressions trouvées précédemment :

$$\begin{aligned} L' &= (y - y') Z - (z - z') Y \\ M' &= (z - z') X - (x - x') Z \\ N' &= \dots \end{aligned}$$

Or, on a : $yZ - zY = L$

en appelant L , M , N les projections du moment de F par rapport à O .

D'où :

$$\begin{aligned} L' &= L + Yz' - y'Z \\ M' &= M + Zx' - z'X \\ N' &= N + Xy' - x'Y \end{aligned}$$

COORDONNEES D'UN DYNAMES

Considérons un dynames, c'est-à-dire un système de forces $F_1, F_2 \dots F_n$ ayant pour projections respectives $(X_1, Y_1, Z_1) \dots (X_n, Y_n, Z_n)$ et appliquées aux points $(x_1, y_1, z_1) \dots (x_n, y_n, z_n)$.

La projection de la somme géométrique étant égale à la somme des projections des composantes, on a :

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum X_i \\ Y &= \dots = \sum Y_i \\ Z &= \dots = \sum Z_i \end{aligned}$$

De même pour le moment résultant au point O , on a :

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + \dots + L_n = \sum L_i \\ M &= \dots = \sum M_i \\ N &= \dots = \sum N_i \end{aligned}$$

L'ensemble des projections X, Y, Z de la somme géométrique et des projections L, M, N du moment résultant par rapport à l'origine, est appelé le "SYSTEME DES 6 COORDONNEES DU DYNAMES"

COMPOSITION DES DYNAMES

Pour composer deux dynames, on fait la somme géométrique des forces du premier dynames, celle des forces du deuxième et enfin la somme géométrique de ces sommes géométriques partielles ; il en est de même pour les moments. En projection on a donc :

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 & , & & Y &= \dots & Z &= \dots \\ \text{et } L &= L_1 + L_2 & , & & M &= \dots & N &= \dots \end{aligned}$$

Donc, pour composer des dynames on ajoute les coordonnées de même nom.

REDUCTION D'UN DYNAMME A UNE FORCE UNIQUE ET UN COUPLE

I - Réduction à l'origine des coordonnées.

Soit donné le dynamme X, Y, Z, L, M, N .

La force unique, égale à la somme géométrique a pour projections X, Y, Z , et étant appliquée au point 0, elle a pour moment par rapport au point 0 : $0, 0, 0$. Le couple a pour projections (résultante nulle) : $0, 0, 0$; et pour moment (l'axe du couple adjoint étant égal au moment résultant au même point) : L, M, N .

II - Réduction en un point M' (x', y', z') quelconque.

Soit toujours donné le dynamme X, Y, Z, L, M, N . La force unique appliquée en M' a pour projections X, Y, Z et pour moment, par rapport à 0 ($y'Z - z'Y$), ($z'X - x'Z$), ($x'Y - y'X$).

Le couple a pour projections $0, 0, 0$; et a pour axe le moment résultant par rapport au point M' :

$$\begin{aligned} L' &= (L + Yz' - y'Z) \\ &= L + z'Y - y'Z \\ &= L + Yz' - Zy' \\ M' &= M + Zx' - Xz' \\ N' &= N + Xy' - Yx' \end{aligned}$$

On voit qu'on a :

$$\begin{aligned} (y'Z - z'Y) + (L + Yz' - Zy') &= L \\ (z'X - x'Z) + (M + Zx' - Xz') &= M \\ (x'Y - y'X) + (N + Xy' - Yx') &= N \end{aligned}$$

donc la somme des moments par rapport à 0 de la force unique et du couple adjoint est égale. au moment par rapport à 0 du dynamme.

REDUCTION CANONIQUE

Dans la réunion canonique, l'axe G_0 du couple adjoint et le vecteur unique R, étant portés par la même droite, ont leurs projections proportionnelles. X, Y, Z étant les projections de la force unique appliquées en un point M' (x', y', z') de l'axe central, et L', M', N' étant celles de l'axe du couple principal ou moment résultant en M', on a donc :

$$\frac{L'}{x} = \frac{\pi'}{y} = \frac{\pi'}{z} = \frac{G_0}{R}$$

Or :

$$\begin{aligned} L' &= L + y z' - z y' \\ \pi' &= \pi + z x' - x z' \\ \pi' &= \pi + x y' - y x' \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{L + y z' - z y'}{x} = \frac{\pi + z x' - x z'}{y} = \frac{\pi + x y' - y x'}{z} = \frac{G_0}{R}$$

or, on sait que si on a les égalités $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, on a aussi (l, m, n étant des nombres quelconques) :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{al + bm + cn}{a'l + b'm + c'n}$$

Multiplions alors les 2 termes du 1er rapport par x, ceux du 2ème par y, ceux du 3ème par z, et additionnons ; on obtient, après simplification du numérateur :

$$\frac{Lx + \pi y + \pi z}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{G_0}{R}$$

or,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

d'où :

$$\frac{Lx + \pi y + \pi z}{R^2} = \frac{G_0}{R}$$

G_0 et R étant constants, ($Lx + \pi y + \pi z$) est constant.

Posons

$$\frac{Lx + \pi y + \pi z}{R^2} = h$$

L, π , π étant des moments, donc homogènes à des aires, le numérateur est homogène à un volume, par suite h est homogène à une longueur ; h est appelé le "pas" du dynamisme ; et l'expression $Lx + \pi y + \pi z =$ est "L'INVARIANT" du dynamisme.

PROJECTION D'UN VECTEUR SUR UN AXE QUELCONQUE

Considérons un vecteur \vec{V} porté par un axe δ . Soit v la mesure algébrique de V sur δ , et soient α, β, γ les directeurs cosinus de δ . En appelant X, Y, Z les projections de \vec{V} sur Ox, Oy, Oz , on a :

$$X = \alpha v, \quad Y = \beta v, \quad Z = \gamma v.$$

Cherchons la projection de \vec{V} sur un axe ξ dont les cosinus directeurs sont α', β', γ' . Soit Θ l'angle des 2 axes δ et ξ .

Si $\vec{V}_x, \vec{V}_y, \vec{V}_z$ sont les vecteurs projections de \vec{V} sur Ox, Oy, Oz , on a :

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z$$

et en projetant sur ξ :

$$\text{pr } \xi \vec{V} = \text{pr } \xi \vec{V}_x + \text{pr } \xi \vec{V}_y + \text{pr } \xi \vec{V}_z.$$

$$\text{mes pr } \xi \vec{V} = \text{mes pr } \xi \vec{V}_x + \text{mes pr } \xi \vec{V}_y + \text{mes pr } \xi \vec{V}_z$$

$$v \cos \Theta = \alpha' v_x + \beta' v_y + \gamma' v_z$$

or : $v_x = X = \alpha v, v_y = Y = \beta v, v_z = Z = \gamma v$

d'où : $\text{pr } \xi \vec{V} = v \cos \Theta = (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') v$

d'où on tire : $\cos \Theta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'.$

Si les axes δ et ξ sont orthogonaux, on a :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

PROJECTION DU COUPLE ADJOINT SUR L'AXE CENTRAL

On a déjà établi, par des considérations géométriques que la projection d'un couple adjoint quelconque sur l'axe central est un vecteur constant. Montrons-le par l'analytique.

L'axe $M'G$ du couple adjoint en un point $M'(x', y', z')$, étant le moment résultant en ce point, a pour projections sur les axes Ox, Oy, Oz :

$$L' = L + \gamma z' - \gamma y'$$

$$M' = M + \gamma x' - \alpha z'$$

$$N' = N + \alpha y' - \beta x'.$$

D'autre part, la force unique $M'R$, c'est-à-dire la direction principale a pour cosinus :

$$\alpha = \frac{L}{R}, \quad \beta = \frac{M}{R}, \quad \gamma = \frac{N}{R}.$$

La projection de $M'G$ sur la direction principale a alors pour valeur, d'après l'expression trouvée plus haut :

$$\begin{aligned} \text{pr}_{H'R} \overrightarrow{H'G} &= \frac{x}{R} L' + \frac{y}{R} \mathcal{M}' + \frac{z}{R} \mathcal{N}' = \\ &= \frac{xL' + y\mathcal{M}' + z\mathcal{N}'}{R} = \frac{\mathcal{H}}{R} = \text{cte.} \end{aligned}$$

CONDITION POUR QU'UN DYNAMÉ SOIT REDUCTIBLE A UNE FORCE UNIQUE

Si le dynamé est réductible à une force unique, le moment résultant en tout point est rectangulaire avec l'axe central ; sa projection sur celui-ci est donc nulle, c'est-à-dire qu'on a :

$$\frac{\mathcal{H}}{R} = 0, \text{ d'où } \mathcal{H} = 0,$$

et réciproquement si $\mathcal{H} = Lx + My + Nz = 0$ le dynamé est réductible à une force unique.

CAS D'UN SYSTEME DE FORCES PARALLELES - CENTRE DES FORCES PARALLELES

On a vu sur le chapitre relatif à la composition des forces parallèles, qu'étant données 2 forces parallèles quelconques $\overrightarrow{A_1F_1}$ et $\overrightarrow{A_2F_2}$ leur résultante passe par un point O du segment A_1A_2 tel que :

$$\frac{\overrightarrow{OA_1}}{I} = \frac{\overrightarrow{OA_2}}{I}$$

$$\frac{\overrightarrow{A_1F_1}}{A_1F_1} = \frac{\overrightarrow{A_2F_2}}{A_2F_2}$$

I étant égal à + ou à - I suivant que les 2 forces sont de sens contraires ou de même sens. Ce point dépend de la valeur des forces et de leurs sens, mais il est indépendant de leur direction commune.

D'une manière générale, étant donné un système de forces parallèles appliquées en des points A_1, A_2, \dots, A_n , il existe un point C tel que la résultante passe constamment par C quand la direction commune des forces varie. Ce point C est appelé le "centre des forces parallèles".

Démontrons analytiquement que ce point existe et cherchons ces coordonnées.

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la direction commune des forces, et soient F_1, F_2, \dots, F_n ces forces prises avec le signe + ou - suivant leur sens.

La résultante F a pour valeur :

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_i.$$

Si X, Y, Z, L, M, N sont les 6 coordonnées du système des forces parallèles, et si X_i, Y_i, Z_i sont les projections d'une force F_i appliquée au point de coordonnées x_i, y_i, z_i , on a :

$$X = \sum X_i = \sum \alpha F_i = \alpha \sum F_i = \alpha F$$

et, de même :

$$Y = \beta F \quad \text{et} \quad Z = \gamma F$$

et l'on a, de plus :

$$\begin{aligned} L &= \sum (y_i z_i - z_i y_i) \\ &= \sum \left[y_i (\gamma F_i) - z_i (\beta F_i) \right] = \gamma \sum y_i F_i - \beta \sum z_i F_i \end{aligned}$$

de même :

$$M = \alpha \sum z_i F_i - \gamma \sum x_i F_i$$

$$N = \beta \sum x_i F_i - \alpha \sum y_i F_i$$

Posons maintenant :

$$x_c = \frac{\sum x_i F_i}{F}, \quad y_c = \frac{\sum y_i F_i}{F}, \quad z_c = \frac{\sum z_i F_i}{F}$$

ces 3 coordonnées x_c, y_c, z_c définissent un point c. Montrons que la résultante passe par ce point. En portant ces valeurs dans les expressions de L, M, N on a :

$$L = \gamma F x y_c - \beta F x z_c$$

$$M = \alpha F x z_c - \gamma F x x_c$$

$$N = \beta F x x_c - \alpha F x y_c$$

or,

$$\alpha F = X, \quad \beta F = Y, \quad \gamma F = Z$$

d'où

$$L = Z y_c - Y z_c$$

$$M = X z_c - Z x_c$$

$$N = Y x_c - X y_c$$

ce qui exprime que le système des forces parallèles est équivalent à la force F appliquée au point de coordonnées x_c, y_c, z_c ; et on voit que ces coordonnées étant indépendantes de α, β, γ , le point C est indépendant de la direction des forces.

Remarque - Dans le cas où les forces sont parallèles à Oz , on a : $X_i = 0, Y_i = 0, Z_i = F_i$. Le moment par rapport à Ox d'une force F_i se réduit alors à $y_i F_i$. Ce produit $y_i F_i$ est appelé le moment de F_i par rapport au plan zOx .

Or, d'après les expressions des coordonnées du centre des forces parallèles, on a :

$$y_c F = \sum y_i F_i$$

O_c voit donc que le moment de la résultante F par rapport à un plan est égal à la somme des moments des composantes par rapport au même plan. C'est le théorème des moments par rapport à un plan.

CENTRES DE GRAVITE

Définitions

PESANTEUR - Tout corps, si petit soit-il, est attiré vers le sol par une force dite de pesanteur.

VERTICALE - La direction de cette force reste sensiblement constante lorsqu'on s'écarte suffisamment peu d'une position initiale donnée. Cette direction est appelée la verticale de la position donnée. Si la terre était rigoureusement sphérique et ne tournait pas sur elle-même, la direction de la pesanteur passerait constamment par un point fixe, centre de la sphère terrestre ; mais la pesanteur est la résultante de l'attraction de la terre et de la force centrifuge.

CENTRE DE GRAVITE ET POIDS - On sait qu'étant donné plusieurs forces parallèles, il existe, à moins qu'elles ne soient équivalentes à un couple, un point dit "centre des forces parallèles" auquel est appliqué la résultante et qui est indépendant de l'orientation des forces. Or, les forces de pesanteur parallèles quand on les considère suffisamment rapprochées les unes des autres, ne peuvent être réductibles à un couple puisqu'elles ont toutes le même sens ; il existe donc un centre des forces parallèles de pesanteur qu'on appelle le centre de gravité ; la résultante est appelée le poids de l'ensemble des points pesants.

POIDS SPECIFIQUE - Considérons un corps quelconque et concevons que l'on découpe un petit volume v ; soit p le poids de ce volume ; le rapport $\frac{p}{v} = \bar{\omega}$ représente le poids de l'unité de volume : on l'appelle poids spécifique.

CORPS HOMOGÈNE - Si le poids p est le même quel que soit le point du corps où on prélève le volume v , le corps est dit homogène, et $\bar{\omega}$ est le même pour tous les points du corps. Dans ce cas, le poids d'un volume v quelconque du corps a pour valeur $p = \bar{\omega} v$.

Considérons deux corps homogènes, de formes identiques, mais constituées par des matières différentes dont $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}'$ sont les poids spécifiques. Leurs poids sont : $p = \bar{\omega} v$ et $p' = \bar{\omega}' v$; et on a $\frac{p}{p'} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}'}$, d'où $p = \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}'}, p'$; le poids de l'un des corps est donc égal au poids de l'autre à un facteur constant près qui est le rapport des poids spécifiques. Or, on voit, d'après les expressions des coordonnées du centre des forces parallèles que celui-ci reste le même quand on multiplie toutes les forces par un même coef-

ficient ; donc, le centre de gravité d'un corps homogène est indépendant du poids spécifique, et il ne dépend que de la forme géométrique du corps.

THEOREMES RELATIFS AU CENTRE DE GRAVITE DES CORPS ADMETTANT UNE SYMETRIE

I - Si un corps homogène admet un plan de symétrie son centre de gravité est dans ce plan.

II - Plus généralement, si un corps homogène admet un plan diamétral, son centre de gravité est dans ce plan.

Un plan est dit diamétral si les éléments du corps peuvent être groupés 2 à 2 de façon telle que la droite joignant 2 éléments correspondants ait une direction fixe et son milieu dans Π .

III - Si un corps homogène admet un axe de symétrie, ou, plus généralement, un diamètre, son centre de gravité est sur cet axe ou sur ce diamètre.

IV - Si un corps homogène admet un centre de symétrie, son centre de gravité coïncide avec ce centre de symétrie.

CENTRE DE GRAVITE DE SURFACES ET DE LIGNES

De même qu'on considère le poids d'un corps ayant un volume fini, on est amené à considérer le poids d'une surface ou d'une ligne admettant par conséquent un centre de gravité.

Une surface pesante est un solide dont une dimension est infiniment petite.

Une ligne pesante est une surface canale dont le rayon de la sphère génératrice est infiniment petit.

Un point matériel d'une ligne pesante est pesant : il coïncide avec son centre de gravité.

Les lois de symétrie, énoncées plus haut relativement au centre de gravité des corps homogènes sont applicables au cas des lignes et surfaces pesantes.

DETERMINATION DE QUELQUES CENTRES DE GRAVITE

I - Centre de gravité de 3 poids égaux placés aux sommets d'un triangle.

Le centre de gravité de 3 poids égaux placés aux sommets d'un triangle est le point de concours des médianes du triangle. En effet (Fig.55 - p.52) soient Q_A , Q_B , Q_C les poids placés en A, B, C. La résultante $Q_B + Q_C$ des poids Q_B et Q_C est appliquée au milieu A' de BC puisque $Q_B = Q_C$. Et la résultante de $Q_B + Q_C$ et Q_A est appliquée en un point G de AA', médiane du triangle ABC, tel que :

$$\frac{GA}{GA'} = \frac{Q_B + Q_C}{Q_A} = \frac{2}{1}$$

On voit que G est au $\frac{2}{3}$ de AA', c'est-à-dire est au point de concours des médianes.

$$\frac{R}{R+Q_A} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \quad R = 2Q_A = \frac{2P}{3} \quad Q_A = \frac{P}{3}$$

II - Centre de gravité de 3 poids placés aux sommets d'un triangle et proportionnels aux côtés opposés.

Le centre de gravité du cercle inscrit dans le triangle est au centre

Fig.55

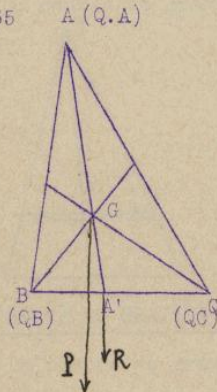
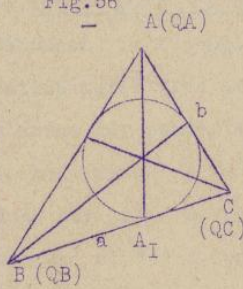


Fig.56



(Fig.56), par hypothèse, on a :

$$\frac{Q_A}{a} = \frac{Q_B}{b} = \frac{Q_C}{c}$$

La résultante de Q_B et Q_C est appliquée en un point A_I de BC, tel que :

$$\frac{A_I B}{A_I C} = \frac{Q_C}{Q_B} = \frac{c}{b}$$

d'où :

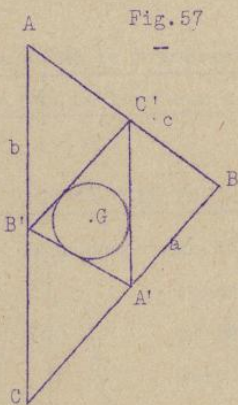
$$\frac{A_I B}{c} = \frac{A_I C}{b}$$

ce qui montre que A_I est le pied de la bissectrice de l'angle \hat{A} . La résultante de $Q_B + C$ et Q_A est alors appliquée en un point G de cette bissectrice. On voit, par le même raisonnement que G est sur la bissectrice de l'angle \hat{B} et sur celle de l'angle \hat{C} ; il est donc au point de concours des bissectrices, c'est-à-dire dans le triangle ABC.

III - Centre de gravité du périmètre Homogène d'un triangle.

Le centre de gravité est au centre du cercle inscrit dans le triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle donné. En effet, (F.57)

Fig.57



soient A' , B' , C' les milieux des côtés du triangle donné ABC. A' étant le centre de symétrie de la ligne pesante BC, le poids $P_{A'}$ de BC est appliqué en A' , de même les poids $P_{B'}$ et $P_{C'}$ de AC et AB sont appliqués respectivement en B' et C' . Or, on suppose le périmètre homogène : les poids des côtés sont donc proportionnels à leurs longueurs, c'est-à-dire qu'on a :

$$\frac{P_{A'}}{a} = \frac{P_{B'}}{b} = \frac{P_{C'}}{c}$$

mais les trois points A' , B' , C' étant les milieux des côtés du triangle ABC,

on a :

$$a = 2 B' C' , \quad b = 2 A' C' , \quad c = 2 A' B'$$

d'où

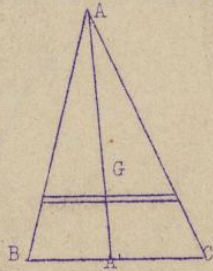
$$\frac{P_{A'}}{B'C'} = \frac{P_{B'}}{A'C'} = \frac{P_{C'}}{A'B'}$$

et on est alors ramené au problème précédent : 3 poids placés aux sommets du triangle A'B'C' et proportionnels aux côtés opposés.

IV - CENTRE DE GRAVITE DE L'AIRE D'UN TRIANGLE HOMOGENE

Le centre de gravité est au point de concours des médianes (Fig.58).

Fig.58

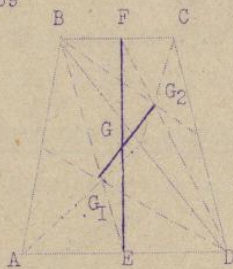


Découpons le triangle en bandes de largeur infiniment petite parallèles au côté BC ; le centre de gravité de chacune des bandes est en son milieu, c'est-à-dire sur la médiane AA' ; le centre de gravité de l'ensemble est donc sur AA' . On voit de même qu'il est sur les médianes BB' et CC' ; donc il est à leur point de concours.

V - CENTRE DE GRAVITE DE L'AIRE D'UN TRAPEZE HOMOGENE

Le centre de gravité est sur la droite qui joint les milieux des bases parallèles, car toute corde parallèle aux bases BC et AD a son milieu et, par suite, son centre de gravité sur cette droite EF (Fig.59). Pour déterminer G

Fig.59



sur EF, partageons le trapèze en 2 triangles en menant la diagonale BD. Si G_1 et G_2 sont les centres de gravité de ces triangles le centre de gravité G du trapèze est au point de rencontre de $G_1 G_2$ avec EF.

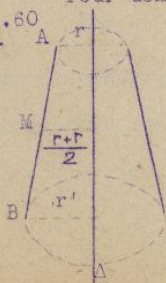
PREMIER THEOREME DE GULDIN

Énoncé : L'aire engendrée par un contour plan quelconque, tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne le traversant pas, est égale au produit de la longueur l du contour par la longueur de la circonférence décrite par le centre de gravité ;

$$S = 2 \pi d l .$$

CAS D'UN CONTOUR POLYGONAL

Fig.60

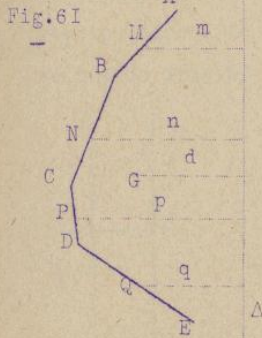


Pour démontrer ce théorème rappelons d'abord que l'aire engendrée par un segment de droite AB tournant autour d'une droite située dans un même plan que lui et qui ne le coupe pas est égale au produit de la longueur AB du segment par la circonférence que décrit son milieu. En effet (Fig.60), l'aire engendrée est celle d'un tronc de cône, et on sait que celle-ci a pour expression, r et r' étant les rayons des cercles de base :

$$S = AB \frac{2 \pi r + 2 \pi r'}{2} = AB 2 \pi \frac{r + r'}{2}$$

Or, $\frac{r + r'}{2}$ est le rayon du cercle équidistant des 2 bases du tronc de cône, et ce cercle passe par le milieu de AB ; donc, $2 \pi \frac{r + r'}{2}$ est la longueur du cercle décrit par le milieu de AB.

Considérons maintenant un contour polygonal plan ABCDE... , tournant autour d'un axe Δ de son plan qui ne le traverse pas. L'aire engendrée par ce contour est la somme des aires engendrées par chacun des côtés. Soient (Fig.61)



M, N, P, Q, ... les milieux de AB, BC, Cd, ... et soient m, n, p, q, ... les distances de M, N, P ... à l'axe Δ .
L'aire engendrée par le contour est :

$$S = AB 2 \pi m + BC 2 \pi n + CD 2 \pi p + \dots = 2 \pi (AB \cdot m + BC \cdot n + CD \cdot p + \dots)$$

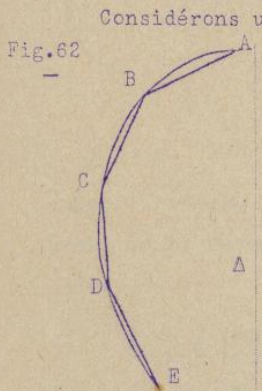
Or, M, N, P, Q, ... sont les centres de gravités des côtés AB, BC, CD ... du contour supposé homogène, et les poids des côtés sont proportionnels à leurs longueurs. Soit G le centre de gravité du contour et d sa distance à l'axe. On a, d'après le théorème des moments, par rapport à un plan

$$d (AB + BC + CD + \dots) = m \cdot AB + n \cdot BC + p \cdot CD = \dots$$

En posant $AB + BC + CD + \dots = l$, l'expression de S devient alors :

$$S = 2 \pi d l, \text{ et } 2 \pi d \text{ est la circonférence décrite par G.}$$

CAS D'UN CONTOUR QUELCONQUE



Considérons un arc de courbe quelconque (Fig.62). Inscrivons un contour polygonal ABCD Soient G_I le centre de gravité de ce contour, d_I la distance de G_I à l'axe Δ et l_I la longueur du contour. L'aire engendrée par ABCD... est, d'après le cas précédent :

$$S_I = 2 \pi d_I l_I . \text{ Or, si on augmente indéfiniment le nombre des côtés du contour polygonal inscrit, } l_I \text{ tend vers la longueur de l'arc de courbe donnée, } G_I \text{ tend}$$

vers le centre de gravité, G de cet arc, donc d_I tend vers d, et S_I tend vers S engendrée par la courbe donnée. On a donc encore :

$$S = 2 \pi d l .$$

Remarque - Ce premier théorème de Guldin montre que : Si 2 contours plans ont des périmètres égaux et ont même centre de gravité pour leurs périmètres, ils décrivent des aires égales par rotation autour de toute droite de leur plan qui ne les traverse pas.

APPLICATION du 1er. théorème de Guldin à la détermination de quelques centres de gravité et au calcul de quelques aires.

I - CENTRE DE GRAVITE 'UN ARC DE CERCLE

Considérons (Fig.63) un arc de cercle AB de centre O. Le diamètre OK perpendiculaire à la corde AB en son milieu étant un axe de symétrie de l'arc, le centre de gravité G cherché est sur OK.

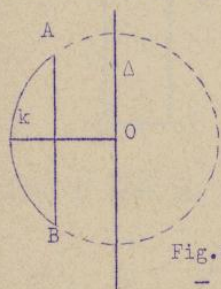


Fig.63

Pour déterminer la position de G sur OK appliquons alors le théorème de Guldin en considérant la rotation de l'arc AB autour du diamètre du cercle parallèle à la corde AB. Soit $\widehat{AB} = l$ et $\overline{AB} = c$. L'aire engendrée par \widehat{AB} est celle d'une zone sphérique de hauteur c. On a donc, d'après le théorème de Guldin :

$$2 \pi r c = 2 \pi d l$$

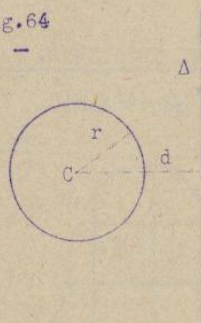
d'où

$$d = r \frac{c}{l}$$

donc d est la 4ème proportionnelle entre l'arc, la corde et le rayon.



Fig.64



II - AIRE DU TORE

L'aire du tore est engendrée par la rotation d'une circonférence de cercle autour d'une droite de son plan (Fig.64). Le centre de gravité de la circonférence est évidemment son centre même. Soit d la distance du centre C du cercle à l'axe Δ de rotation et soit r le

rayon du cercle. La longueur de la circonférence est $l = 2 \pi r$, et la longueur de la circonférence décrite par C est $2 \pi d$. Donc l'aire du tore a pour valeur :

$$S = 2 \pi r \times 2 \pi d = 4 \pi^2 r d.$$

III - AIRE ENGENDREE PAR LE PERIMETRE D'UN TRIANGLE

On a vu que le centre de gravité du périmètre d'un triangle ABC est le centre du cercle inscrit dans le triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle ABC. Si d est la distance de G à l'axe et si 2 p est le périmètre du triangle, l'aire engendrée est :

$$S = 2 p \times 2 \pi d = 4 \pi p d \quad (\text{Fig.65-p.56}).$$

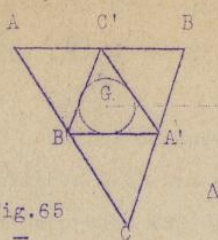


Fig. 65

DEUXIEME THEOREME DE GULDIN

Enoncé : Le volume engendré par une aire plane tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas est égale au produit de l'aire génératrice par la circonférence que décrit le centre de gravité de l'aire.

CAS D'UN RECTANGLE

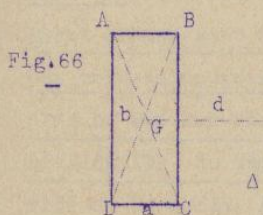


Fig. 66

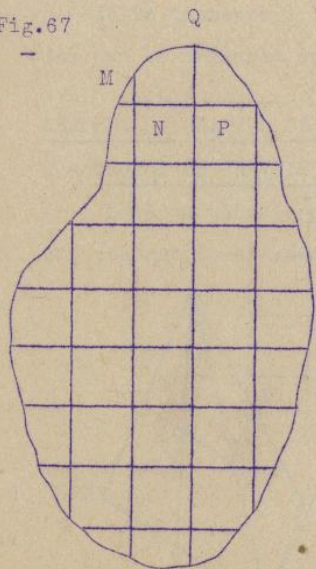
Considérons un rectangle (Fig. 66) tournant autour d'un axe parallèle à l'un de ses côtés. Soit d la distance du centre du rectangle, c'est-à-dire de centre de gravité à l'axe de rotation Δ , et soient a et b les côtés du rectangle. Le volume engendré est la différence des volumes de 2 cylindres de révolution de même hauteur b (on suppose Δ parallèle

à b) et dont les rayons de base sont : $d + \frac{a}{2}$ et $d - \frac{a}{2}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \pi \left(d + \frac{a}{2}\right)^2 b - \pi \left(d - \frac{a}{2}\right)^2 b \\ &= \pi b \left[\left(d + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(d - \frac{a}{2}\right)^2 \right] \\ &= \pi b \times 2 a d = a b \times 2 \pi d = S \times 2 \pi d. \end{aligned}$$

CAS D'UNE AIRE QUELCONQUE

Fig. 67



Considérons une aire

S quelconque de centre de gravité G (Fig. 67), tournant autour d'un axe Δ de son plan. Décomposons cette aire en rectangles, en menant des parallèles à Δ et des perpendiculaires. S est ainsi égale à la somme des aires des rectangles augmentée de toutes les aires telles que $MNPQ$. Si s est l'aire d'un rectangle et d la distance de son centre à Δ , ce rectangle engendre, d'après le cas précédent, un volume

$$v = s \times 2 \pi d = 2 \pi \times s d.$$

Le volume engendré par l'ensemble des rectangles est alors :

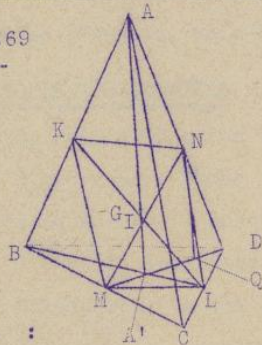
$$v' = \sum 2 \pi \cdot s d = 2 \pi \sum s d.$$

Or, le poids de chacun des rectangles est proportionnel à sa surface (on suppose l'aire homogène), donc, si d_G est la distance à l'axe Δ du centre de gravité G' de l'aire totale des rectangles et si S'

pent suivant KN , MCD et LAE suivant ML . Donc, G est le point d'intersection de KN et ML . Remarquons que $LMKN$ est un parallélogramme ; en effet : dans le triangle ABD , K et N sont les milieux des côtés AB et AD , on a donc : $KN = \frac{1}{2} BD$; de plus, dans le triangle BCD , M et L sont les milieux des côtés BC et CD ; on a donc : $ML = \frac{1}{2} BD$; d'où $KN = ML$. On trouve de même $KM = NL$. Donc, le centre de gravité est le point de rencontre des diagonales du parallélogramme $LMKN$.

Autre détermination de G (Fig.69). Les plans diamétraux LAB et MAD se coupent

Fig.69
--



suivant la droite AA' , A' étant le point de concours des médianes BL et DM du triangle BCD ; donc G est sur AA' . Soit Q le milieu de $A'D$; on a :

$$MA' = A'Q = QD.$$

Joignons N et Q . Dans le triangle QMN on a :

$$A'G = \frac{1}{2} QN$$

et dans le triangle ADA' on a : $QN = \frac{1}{2} AA'$

d'où :

$$A'G = \frac{1}{4} AA'.$$

Le centre de gravité d'un tétraèdre est sur la droite qui joint un sommet au point de concours des médianes de la face opposée, et il est au quart de cette droite à partir de la face.

II - CENTRE DE GRAVITE D'UN PRISME

Par la considération des plans diamétraux on trouve que le centre de gravité d'un prisme est le centre de gravité de la section moyenne (la section moyenne est celle qui passe par les milieux des arêtes).

III - CENTRE DE GRAVITE D'UNE PYRAMIDE OU D'UN CONE

En opérant la décomposition de la pyramide ou du cône en petits tétraèdres, on voit que le centre de gravité est au quart, à partir de la base, de la droite qui joint le sommet au centre de gravité de l'aire de la base.

STATIQUE GRAPHIQUE

ELEMENTS FONDAMENTAUX

Les méthodes courantes de statique graphique ne s'appliquent qu'aux forces planes, c'est-à-dire situées sur un même plan ; mais cela suffit dans la plupart des cas. En effet, lorsqu'on cherche à analyser les conditions d'équilibre des constructions, on n'a, en général, à considérer que des forces de pesanteur, ou des réactions d'appuis qui sont dans le même plan que les charges.

Certains auteurs ont d'ailleurs établi l'extension de ces méthodes aux forces dans l'espace, mais l'application en est assez peu pratique.

POLYGONES FUNICULAIRES

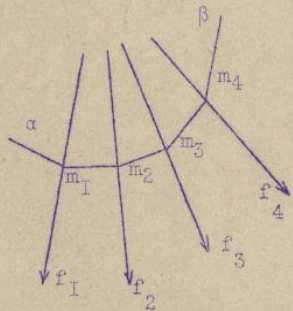
On sait déjà qu'un système de forces planes peut, suivant les cas :

- 1°) se réduire à une force unique, qui est la résultante ;
- 2°) se réduire à un couple ;
- 3°) être en équilibre.

Considérons un tel système, constitué par les forces planes : $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$ appliquées à un corps solide et données en grandeur, en direction et en sens.

Construisons le polygone de forces (Fig.70), en menant, à partir d'un point a quelconque, pris dans le plan des forces, des vecteurs : 1, 2, 3, 4 ... , équipollents aux vecteurs-forces : $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$. Ces vecteurs sont juxtaposés, c'est-à-dire que l'extrémité de l'un aboutit à l'origine du suivant.

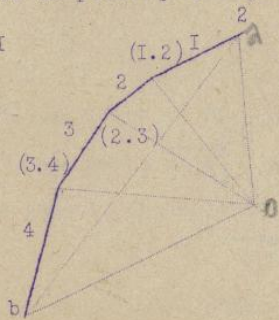
Fig.70



Si b est l'extrémité du dernier vecteur, ab représente la résultante, en grandeur et en direction (mais non en position).

Par un point quelconque appelé pôle, menons les rayons polaires (Fig.71)

Fig.71



$oa, o(1.2), \dots, ob$ et tirons ab .

On a ainsi formé le polygone dynamique, complété par les rayons polaires. A partir d'un point m_1 , pris arbitrairement sur la force f_1 , menons une parallèle am_1 au premier rayon polaire oa , puis du même point une parallèle à $o(1.2)$, dont la rencontre avec la ligne d'action de la force f_2 donne un point m_2 . Opérons de même successi-

vement avec tous les rayons polaires, jusqu'à $m_4 \beta$ parallèles à ob.

Le contour polygonal $\alpha, m_1, m_2, m_3, m_4, \dots, \beta$, déterminé par les points d'intersection des parallèles aux rayons polaires et des lignes d'action des forces s'appelle : polygone funiculaire.

Remarque - Pour un même système de forces, il y a une infinité de polygones funiculaires, car il y a une infinité de points a et de points o . Nous aurons à établir d'intéressantes relations entre ces divers polygones.

PROPRIETES DES POLYGONES FUNICULAIRES

Théorème - Les côtés extrêmes α et β (supposés non parallèles) d'un funiculaire, se coupent en un point I situé sur la ligne d'action de la résultante des forces.

En effet (Fig.72), dans le triangle oa (1.2), le vecteur $a(I.2)$, équipollent à la force f_I , peut être considéré comme la somme géométrique des 2 vecteurs ao et $o(I.2)$:

$$\vec{f}_I = \vec{ao} + \vec{o(I.2)}.$$

Supposons que ces 2 vecteurs représentent des forces, on peut transporter celles-ci en m_1 , parallèlement à elles-mêmes, de telle sorte que f_I se trouve décomposée en (Fig.73) :

Fig.72

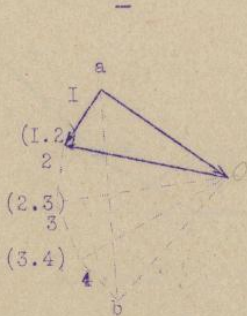
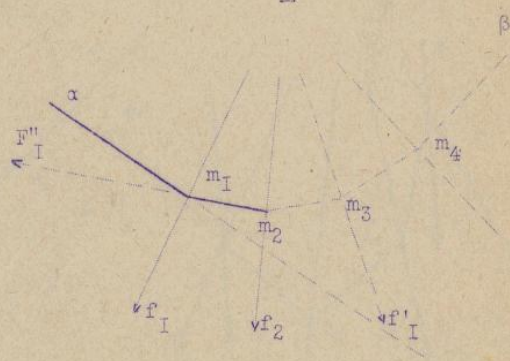


Fig.73



- 1°) une force $m_1 f'_I$, portée par αm_1 , et équipollente à \vec{ao} ;
- 2°) une force $m_1 f''_I$, portée par $m_1 m_2$ prolongé et équipollente à $\vec{o(I.2)}$.

De même le triangle $o(I.2)(2.3)$ permet d'écrire :

$$\vec{f}_2 = \vec{(I.2)o} + \vec{o(2.3)}$$

et les vecteurs correspondants $m_2 f'_2$ et $m_2 f''_2$ sont les composantes de f_2 .

Et ainsi de suite. On peut donc remplacer chacune des forces $f_I, f_2,$

$f_3, f_4 \dots$ par ses 2 composantes. Ces composantes sont égales et opposées 2 à 2, par exemple : f''_1 et f'_2 . Donc, elles se détruisent et disparaissent toutes, excepté les 2 extrêmes : f'_1 et f''_4 , portées par $m_1\alpha$ et $m_4\beta$, et de même direction que ao et ob .

L'ensemble des forces $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$ a donc même résultante que les 2 forces extrêmes f'_1 et f''_4 . Or, la résultante de ces 2 forces passe par leur point de rencontre I, donc ce point est un point de la résultante de l'ensemble des forces, dont la direction et la grandeur sont données par ab .

En menant par I un vecteur équipollent à ab , on aura la résultante en grandeur, en direction et en position. D'où le théorème suivant :

Tout système de forces planes est équivalent à un système de 2 forces portées chacune par un des côtés extrêmes d'un funiculaire et ayant pour grandeur les 2 rayons polaires extrêmes, l'un \vec{oa} , l'autre \vec{ob} .

Remarque I - Si, gardant le même polygone dynamique, on fait varier la position du pôle, le funiculaire change, mais la résultante est invariable, puisqu'un système de forces n'en admet qu'une. Donc, le point I ne peut que se déplacer sur la ligne d'action (d) de la résultante (Fig.74) - d est le milieu des points I.

Remarque II - En particulier, si O étant pris sur la droite ab (Fig.75), on

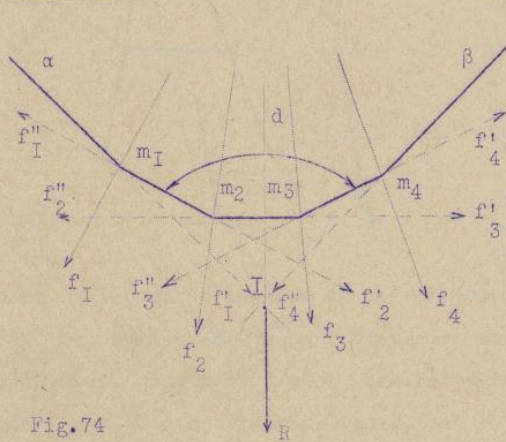


Fig.74

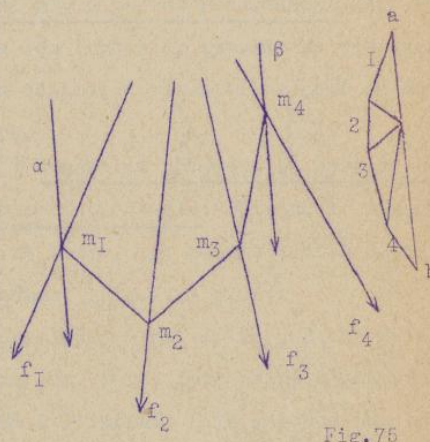


Fig.75

voit immédiatement, en construisant le funiculaire, que les côtés extrêmes α et β , parallèles aux rayons polaires extrêmes oa et ob , sont parallèles et le sont à la résultante qui est leur somme. On est alors ramené à construire la résultante de 2 forces, construction connue. Mais c'est là une complication inutile et il est préférable de prendre le pôle en dehors du polygone dynamique. D'autre part :

Au point de vue de la précision de l'épure, on sait que l'intersection la plus nette est celle de 2 droites perpendiculaires. On réalise cela, en prenant O sur le cercle ayant ab comme diamètre (l'angle O du dynamique se reproduit, par translation de ses côtés, sur le funiculaire).

Remarque III - Si l'on change l'ordre des forces sur le dynamique, on a un funiculaire différent, mais on sait que la somme géométrique ne change pas, et la droite qui porte la résultante fixe, puisqu'elle ne dépend que des forces elles-mêmes.

Remarque IV - Supposons que l'on veuille seulement la résultante partielle d'un certain nombre de forces, consécutives ou non, (si elles ne le sont pas, on peut toujours en changer l'ordre) dans la construction du dynamique, par exemple celle des forces f_2 et f_3 . Il est clair que la portion du funiculaire qui contient ces forces aura les mêmes propriétés que le funiculaire entier: $m_1 m_2$ et $m_3 m_4$ seront les côtés extrêmes de ce funiculaire réduit et leur intersection K est un point de la ligne d'action de la résultante partielle, qui est égale et parallèle à p q (Fig.76).

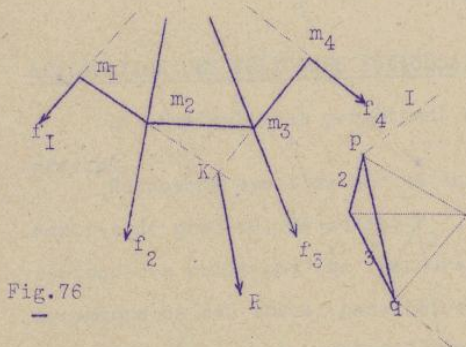


Fig.76

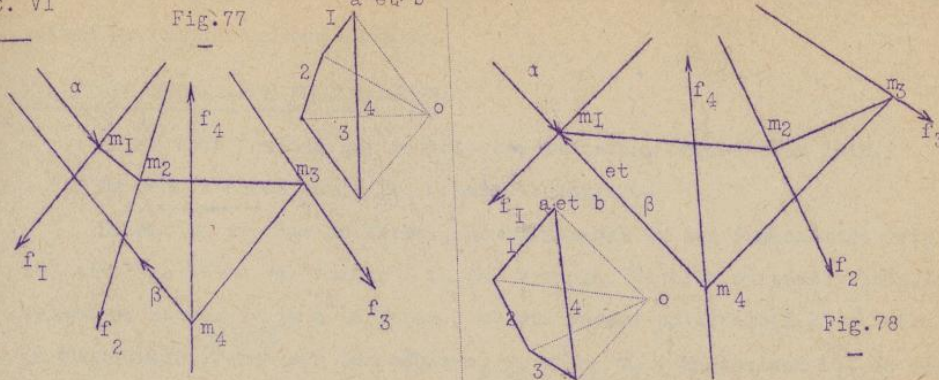
CAS OU LE POLYGONE DYNAMIQUE EST FERME

Cela signifie que la somme géométrique des forces est nulle, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de résultante. Donc, ou bien les forces du système se réduisent à un couple, ou bien elles sont en équilibre.

1°) Condition pour que le système se réduise à un couple. Puisque le dynamique se ferme, les points a et b coïncident et les directions oa et ob sont confondues. (Fig.77 - p.63).

Le premier côté, α , du funiculaire est parallèle à oa, le 2e, β , est parallèle à ob, donc α et β sont parallèles entre eux. Donc, leur point d'intersection, par où passe la résultante, est rejeté à l'infini. Mais α porte une force ao et β une force ob. Ces deux forces sont donc égales, parallèles et opposées, c'est-à-dire que l'on a un couple.

2°) Condition pour que le système soit en équilibre. Il faut évidemment que le couple soit nul.- C'est ce qui a lieu quand les côtés α et β , qui portent les forces du couple coïncident (Fig.78 - p.63). Pour que cela soit, il faut que le côté α passe par le point m_2 , c'est-à-dire que le funiculaire (qui est généralement ouvert) soit fermé. Donc :



Pour que des forces coplanes se fassent équilibre, il faut et il suffit que :

fit que :

1°) le dynamique soit fermé ;

2°) le funiculaire soit fermé (c'est-à-dire que le premier côté passe

par le point m_4). En résumé :

POLYGONE DYNAMIQUE	{	<u>OUVERT</u> :	il y a une <u>résultante</u> .
		<u>FERME</u> :	funiculaire ouvert : il y a un <u>couple</u> . funiculaire fermé : il y a <u>équilibre</u> .

APPLICATION DES POLYONES FUNICULAIRES A LA RECHERCHE DES CENTRES DE GRAVITE

Les funiculaires permettent de déterminer facilement le centre de gravité.

Supposons que l'on ait un ensemble de masses, dont $A_1, A_2 \dots$ sont les centres de gravité, et soient P_1, P_2 (Fig. 79) les poids de ces masses. Représentons ces poids par des vecteurs verticaux. On peut construire le polygone dynamique de ces forces parallèles, dont la résultante, de direction verticale, passera par le point I d'intersection des côtés extrêmes du funiculaire. Mais on peut faire tourner la figure de 90° , ou, ce qui revient au même, faire tourner seulement le dynamique, et mener par les centres de gravité $A_1, A_2 \dots$ des masses, des forces horizontales égales à $P_1, P_2 \dots$. On obtient ainsi une nouvelle résultante dirigée horizontalement, et passant par le point I', qui résulte du nouveau funiculaire.

Le centre de gravité G cherché est sur la résultante passant par I, mais on sait qu'il est indépendant de la direction des forces parallèles, donc il est aussi sur la résultante passant par I', c'est-à-dire à l'intersection des 2 résultantes ainsi obtenues.

(On procède de façon analogue lorsqu'on détermine expérimentalement le centre de gravité d'un corps, en le suspendant successivement par différents points.)

Le centre de gravité est à l'intersection des verticales passant par les points de suspension successifs).

RELATIONS ENTRE DEUX FUNICULAIRES

Elles sont fondées sur un théorème important énoncé plus loin.

On peut d'abord faire les remarques suivantes :

Soient un système de forces, son dynamique et son funiculaire (Fig. 80). Isolons l'une des forces : f_2 par exemple. Si elle existait seule, le dynamique se réduirait à la force 2 et aux rayons polaires (1.2) et (2.3) . Le funiculaire ^{serait} formé par les côtés $m_1 m_2$ et $m_2 m_3$. En isolant f_1 , on aurait de même un funiculaire réduit à αm_1 et $m_1 m_2$, etc. On voit que les funiculaires de 2 forces voisines auraient un côté commun. Considérons un de ces funiculaires (Fig. 81) et soient : f la force unique, et m le point d'intersection des 2 côtés, le pôle étant en O . En prenant un 2ème pôle, o' , on aura un 2ème funiculaire dont les côtés ne seront pas parallèles à ceux du 1er. : donc ils se rencontrent.

αm et $\alpha m'$ se rencontrent en α ,

βm et $\beta m'$ se rencontrent en β .

Je dis que $\alpha\beta$ est parallèle à oo' . En effet : αm et $m\beta$ sont parallèles aux rayons ao et ob , et dans le triangle ab , on a :

$$\vec{ab} = \vec{ao} + \vec{ob}.$$

Posons : $\vec{ao} = \Phi$, $\vec{ob} = \Psi$

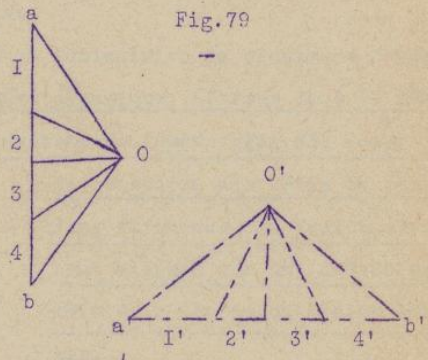
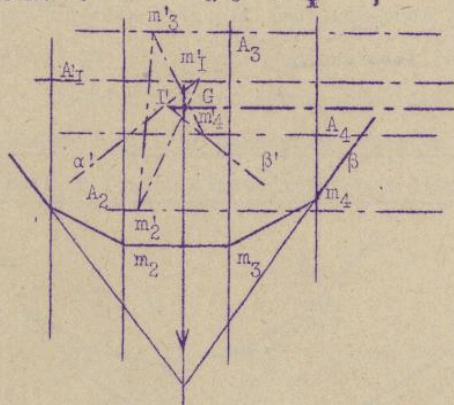


Fig. 79

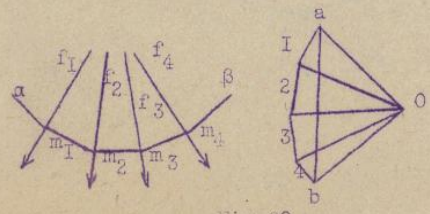


Fig. 80

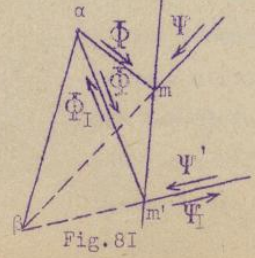


Fig. 81

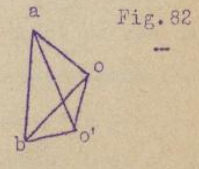


Fig. 82

De même, dans le triangle a o' b, on a :

$$\vec{ab} = \vec{ao'} + \vec{o'b}.$$

Ce sont deux décompositions différentes de la même force f.

Posons encore : $\vec{ao'} = \vec{\Phi}'$, $\vec{o'b} = \vec{\Psi}'$

Or, considérons les 2 forces :

$$\begin{aligned} o'a &= \vec{\Phi}_I = -\vec{\Phi}' \\ b o' &= \vec{\Psi}_I = -\vec{\Psi}' \end{aligned}$$

elles auront pour résultante une force b a égale et opposée à f, donc elles font équilibre aux forces $\vec{\Phi}$ et $\vec{\Psi}$, dont la résultante est f.

On en conclut que les 4 forces $\vec{\Phi}$, $\vec{\Psi}$, $\vec{\Phi}_I$, $\vec{\Psi}_I$ sont en équilibre. Mais on peut les grouper autrement : $\vec{\Phi}$ et $\vec{\Phi}_I$ ont une résultante R, qui passe par leur point de rencontre α ;

$\vec{\Psi}$ et $\vec{\Psi}_I$ ont une résultante R_I qui passe par leur point de rencontre β . Les 4 forces du système étant en équilibre, R et R_I qui les remplacent doivent être égales et opposées, et portées par la même droite. Or, elles passent par α et par β , donc la droite qui porte R et R_I est $\alpha\beta$.

Cette droite est parallèle à oo' . En effet, dans le triangle a o o' :

$$\vec{oo'} = \vec{o'a} + \vec{ao} = \vec{\Phi}_I + \vec{\Phi},$$

c'est-à-dire que oo' représente précisément la résultante R des forces $\vec{\Phi}$ et $\vec{\Phi}_I$. Or, cette résultante est, sur le funiculaire, portée par $\alpha\beta$. Pour que cela soit, il faut, d'après la propriété fondamentale des funiculaires, que $\alpha\beta$ et oo' soient parallèles.

On peut étendre cette propriété à un funiculaire de plusieurs forces:

Théorème : Si l'on construit, avec un même dynamique, (forces dans le même ordre), 2 funiculaires différents d'un système de forces (Fig.83) les points

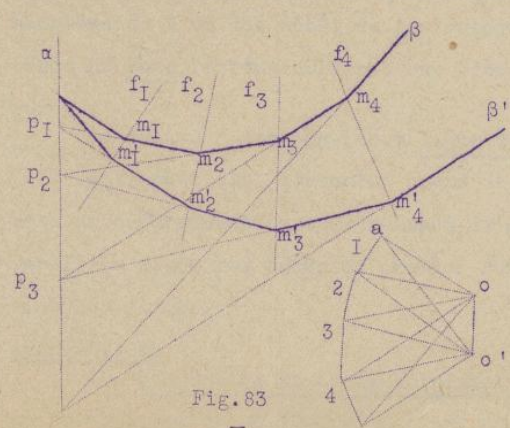


Fig. 83

de rencontre des côtés de même rang de chacun des funiculaires sont alignés sur une droite parallèle à la droite qui joint les pôles.
C'est précisément ce qui vient d'être démontré pour une seule force : α est le point de rencontre des côtés correspondants (1er rang) des 2 funiculaires construits avec les pôles o et o', et β est le point de rencontre des

côtés de 2ème rang des 2 mêmes funiculaires.

Soient maintenant un système de plusieurs forces, et 2 funiculaires de pôles o et o' . D'après ce qui précède, on peut considérer la partie de chacun des funiculaires correspondant à la force f_I :

les côtés de rang I se rencontrent en α ;

les côtés de rang 2 : m_I, m_2 et m'_I, m'_2 se rencontrent en P_I . On sait alors que αP_I est parallèle à $o o'$.

Passons à la force f_2 : prise isolément, les côtés de 1er rang de son funiculaire se confondent avec les côtés de 2ème rang du funiculaire de f_I , et se rencontrent en P_I . Les côtés de 2ème rang : m_2, m_3 et m'_2, m'_3 se rencontrent en un point P_2 , et $P_I P_2$ parallèle à $o o'$, toujours d'après la remarque précédente. Donc : αP_I et $P_I P_2$ parallèles à $o o'$, sont parallèles et ont un point commun : P_I . Elles sont donc portées par la même droite Δ . On démontrerait, de proche en proche, qu'il en est de même pour tous les points d'intersection des côtés correspondants. Ce théorème est la base de constructions importantes.

Remarque - Soient toujours 2 polygones funiculaires relatifs à 2 pôles différents. Considérons les points P_I, P_2, \dots alignés sur Δ parallèle à $o o'$, et supposons que l'on prenne un 3ème pôle o'' sur $o o'$ même. Les côtés du premier funiculaire (relatif à o), seront coupés par Δ en des points P_I, P_2, \dots , qui sont aussi sur les côtés du 2ème funiculaire (relatif à o). Mais les côtés du 3ème funiculaire (relatif à o'') passeront également par ces points, car le point o' est quelconque sur la direction $o o'$ parallèle à Δ . Or, $o o'$ et $o o''$, c'est la même droite. Donc, on peut indifféremment remplacer o' par o'' , ou inversement.

Il en résulte que les points P_I, P_2, \dots , déterminés par les intersections de Δ et des côtés du funiculaire relatif à o , sont les pivots des côtés de tous les funiculaires que l'on peut construire en prenant les pôles sur $o o'$.

La droite Δ est appelée : ligne des pivots.

Autrement dit, lorsqu'on prend des pôles sur une même droite, les pivots se déterminent en construisant la parallèle à la ligne des pôles. Cette parallèle coupe les côtés du premier funiculaire. Les points d'intersection sont les pivots.

APPLICATIONS

I - Construire un funiculaire tel qu'un côté de rang donné passe par un point L, et qu'un côté d'un autre rang passe par un autre point M. Soit

un système de forcés en nombre quelconque. On conservera telles qu'elles sont la 1ère : f_1 , et la deuxième : f_3 . Toutes les forces intermédiaires peuvent être remplacées par leur résultante que l'on appellera f_2 (résultante partielle). Traçons, en partant du point L donné, le funiculaire relatif au pôle o, et menons par ce point L une droite quelconque Δ (non confondue avec L I) (Fig. 84).

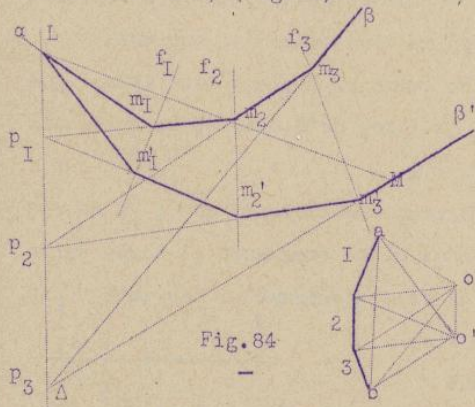


Fig. 84

Construisons les pivots p_1, p_2, p_3 , en prolongeant les côtés du funiculaire jusqu'à leur rencontre avec Δ . Le dernier côté β passe par p_3 . Il faut que ce côté passe par M; pour cela, joignons $m_3 p_3$: le côté $\beta' m_3$ est construit.

Joignons $m_3 p_2$, le côté $m_3' m_2$ est construit. Etc....

D'après la remarque précédente, les points p_3, p_2, p_1, L , appartiennent au 1er. funiculaire et au funiculaire passant par M; ce funiculaire est relatif à un pôle o' situé sur une parallèle au dernier rayon polaire $o' b$. I₁ suffit donc, pour terminer la construction, de mener par b une parallèle à $M p_3$, dont le point de rencontre avec la parallèle à Δ est le pôle o' cherché.

2 côtés de rang donné passent bien par les points donnés : L et M.
Remarque - La droite Δ est arbitraire, d'où une infinité de solutions. Il est alors intéressant de chercher le lieu de o' :

Faisons abstraction du funiculaire relatif à o. Δ peut varier, mais L et M sont désormais 2 points fixes de funiculaires relatif à o' . Or, le premier point d'intersection des côtés de 2 funiculaires (l'un relatif à o' , l'autre relatif à un pôle quelconque o'') sur Δ est L. Le dernier point d'intersection est M, puisque les côtés extrêmes de dernier rang doivent passer par ce point M. Donc, M est un second point de la droite Δ , qui ne peut ainsi être que L M.

D'autre part, $o' o''$ doit être parallèle à Δ , c'est-à-dire à L M. On a donc le résultat suivant :

Le point o' décrit une parallèle à L M.

PROBLEME II

Déterminer les réactions des appuis d'une poutre horizontale portant des charges verticales isolées : P_1, P_2, P_3 (dont l'une peut, si l'on veut, représenter le poids de la poutre).

On a à considérer : les 3 forces données, plus les réactions des appuis qui sont des forces ascendantes, soit 5 forces.

Pour que la poutre soit en équilibre, il faut que la somme des forces appliquées soit égale à la somme des réactions (Fig.85). Construisons le funiculaire en partant d'un point k_0 , de la verticale passant par A. (A et B : appuis de la poutre). Ce funiculaire aboutit en k_4 , sur la verticale passant par B. On sait que l'équilibre est réalisé quand le dynamique et le funiculaire sont fermés à la fois.

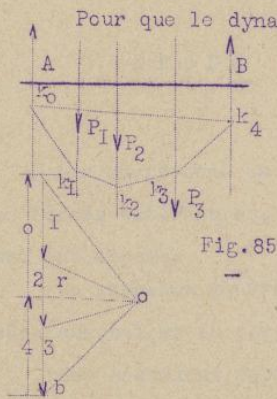


Fig.85

Pour que le dynamique soit fermé, il faut que la somme des réactions soit égale à ba .

Pour que le funiculaire soit fermé, il suffit de joindre $k_0 k_4$, qui est la ligne de fermeture.

Mais $k_0 k_4$, qui est le dernier côté du funiculaire, doit correspondre à un rayon polaire du dynamique. Donc, pour construire ce rayon, il suffit de mener par O une parallèle Or à $k_0 k_4$.

Il est alors facile de voir que :

$$\left. \begin{aligned} br &= \text{réaction en B} \\ ra &= \text{réaction en A} \end{aligned} \right\} \text{réactions cherchées.}$$

CONSTRUCTION GRAPHIQUE DES MOMENTS SUR LE POLYGONE FUNICULAIRE

Soit à construire le moment d'une force AF par rapport à un point donné M (Fig.86).

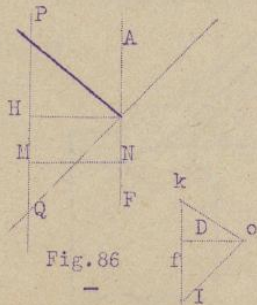


Fig.86

Construisons le dynamique et le funiculaire et, du point M, abaissons la perpendiculaire MN à cette force. Son moment est : $\overline{MN} \times \overline{AF}$.

En menant par le point M la parallèle à AF et, par m, la parallèle à MN, on a une autre expression de ce moment : $\overline{MN} \times \overline{AF} = \overline{mH} \times \overline{AF}$.

D'autre part, les côtés du funiculaire, prolongés, coupent la parallèle à AF en 2 points Q et P.

Sur la dynamique abaissons du point o la perpendiculaire OD à la force

$f = KI$. La similitude des triangles KIO et PQ (côtés parallèles), permet d'écrire :

$$\frac{mH}{PQ} = \frac{OD}{KI}$$

d'où : $\overline{mH} \times \overline{KI} = \overline{OD} \times \overline{PQ}$, ou, en remplaçant KI par AF :

$$\overline{mH} \times \overline{AF} = m_M^+ AF = OD \times PQ.$$

OD s'appelle distance polaire. Ainsi :

Le moment de la force AF par rapport au point M , est égal au produit de la distance polaire par le segment qu'interceptent les 2 côtés du funiculaire sur la parallèle à la force, menée par le point M .

ETUDE GENERALE DES APPUIS

Les corps dont on veut étudier l'équilibre sont, d'une part, soumis à des forces extérieures, et, d'autre part, supportés par des corps fixes qui sont les appuis.

Le problème général consiste à calculer les réactions de ces appuis, grâce auxquelles le corps considéré est maintenu en équilibre.

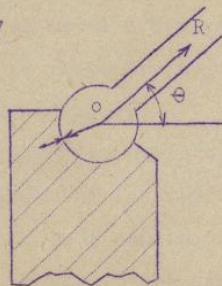
Ces réactions peuvent être avec ou sans frottement. On n'étudiera, ici, que les appuis géométriques, c'est-à-dire sans frottement. On sait qu'alors les réactions sont normales aux surfaces en contact.

Suivant la forme des profils en contact, on peut distinguer 3 types d'appuis : (on va retrouver là, sous des noms différents, des considérations géométriques déjà démontrées, à propos des couples.

1° - APPUI A ROTULE

Un corps articulé dans un corps fixe, constitue un appui à rotule

Fig.87



(Fig.87).- Les réactions sont normales aux surfaces de contact, et ont une résultante $O R$, appliquée en o , sur l'axe d'articulation. La réaction OR dépend de 2 paramètres variables :

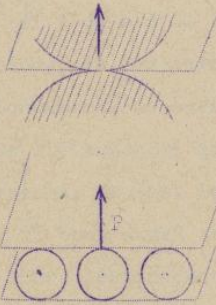
- 1°) la résultante R elle-même ;
- 2°) l'angle θ qu'elle fait avec l'horizontale, par exemple.

On peut se servir aussi des projections de R sur 2 axes constitués par l'horizontale et la verticale passant par o :

$$\left. \begin{aligned} R \cos \theta &= X \\ R \sin \theta &= Y \end{aligned} \right\} \text{ qui sont alors les 2 inconnues de la réaction.}$$

2° - APPUI A ROULEAUX (FIG.88)

Fig.88



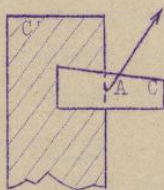
Lorsque 2 corps, C et C', sont en contact la réaction PR est normale au plan tangent Π_0 , commun aux 2 surfaces, au point de contact P. Imaginons un plan Π faisant partie du corps C, et un plan Π' du corps C', parallèles au plan Π_0 , et situés à une assez petite distance l'un de l'autre.

Ces plans Π et Π' étant séparés par des cylindres horizontaux, parallèles. C'est un appui à rouleaux. La résistance, normale aux plans Π et Π' , n'a pas pour effet de faire rouler les cylindres ; la réaction qui se développe au point P est bien normale aux plans. Elle ne dépend que d'un seul paramètre, puisqu'elle doit être dirigée suivant la normale en P au plan Π' .

Ce paramètre R est la valeur de la réaction elle-même.

3° - ENCASTREMENT (FIG.89)

Fig.89



Une partie du corps C, à équilibrer, pénètre dans l'intérieur du corps fixe C'. Exemple : une poutre dont l'extrémité est enrobée dans un massif de maçonnerie. (Cela n'est pas autre chose qu'un couple cinématique d'assemblage par emboîtement). On a vu que des forces quelconques, appliquées à un corps, pouvaient être réduites à une force unique et à un couple.

Ici, les forces sont coplanes, donc la force unique et le couple sont dans un même plan.

La force unique dépend de 2 paramètres : ses projections X et Y .

Le couple dépend d'un paramètre : son moment.

Au total : 3 paramètres.

On rencontre souvent, dans les constructions, des combinaisons de ces 3 types d'appuis.

Dans les calculs, on exprime que l'équilibre existe entre les forces appliquées et les réactions qui se développent aux appuis.

On peut donc, pour cela, écrire que la somme des projections des réactions et des forces est nulle, sur deux axes rectangulaires, ainsi que la somme des moments par rapport à un point arbitraire.

Les données des réactions entrent au 1er. degré dans les projections et les moments.

On disposera donc de 3 équations linéaires.

D'autre part, le nombre des inconnues dépend de la combinaison d'appuis qui se présente :

si c'est un encastrement, on a 3 variables et 3 équations, et la résolution est possible, le problème est déterminé ;

si l'on a à la fois 2 appuis à rotule, cela fait 4 inconnues pour 3 équations, et les considérations de la statique pure (qui suppose les corps indéformables) ne suffisent plus. On est alors obligé de recourir à la théorie de l'élasticité qui, en introduisant l'hypothèse que le corps est un peu déformable, fournit les équations voulues.

Il peut aussi arriver que l'on ait plus d'équations que d'inconnues. On tire alors les inconnues de trois des équations et on les porte dans les équations non utilisées. On arrive ainsi à des relations entre les forces, lesquelles doivent dès lors satisfaire à certaines conditions de possibilité.

L'équilibre de l'appui à rotule en est un exemple. En effet, si O est le centre de la rotule, le moment des réactions par rapport à ce point étant nul, il faudra que la résultante des forces passe par ce point. C'est là une condition imposée aux forces.

LES SIX CAS OU LA STATIQUE GRAPHIQUE SEULE PERMET DE DETERMINER LES REACTIONS

Rappelons que, pour les forces coplanes, les équations de l'équilibre se réduisent à trois, savoir :

Sommes des projections des forces sur 2 axes rectangulaires, séparément nulles ;

Moment résultant des forces par rapport à un point arbitraire du plan nul ; Si les réactions ne présentent pas plus de 3 inconnues, elles peuvent, en général, être déterminées par la statique graphique seule. C'est ce qui a lieu dans les 6 cas suivants, que l'on étudiera successivement :

1°) 1 appui simple, c'est-à-dire où la réaction sera portée par une droite donnée, qui est la normale au point d'appui. Il n'y a qu'une inconnue, c'est la valeur de la réaction suivant la normale, donc 2 conditions pour les 2 forces.

2°) 2 appuis simples - 2 inconnues : les réactions, et une seule condition pour les forces.

3°) 1 rotule - 2 inconnues : direction et valeur de la réaction, ou bien les 2 projections de la réaction, et une seule condition pour les forces.

4°) 3 appuis simples - 3 inconnues : les 3 réactions portées par les

3 normales données, le problème est déterminé, sauf dans les cas d'exception où les forces sont soumises à une condition, ce qui oblige à faire intervenir l'élasticité.

5°) I rotule et I appui simple - 2 inconnues pour la rotule et une pour l'appui, total 3 inconnues. Pas de conditions pour les forces.

6°) I encastrement - 3 inconnues, comme on l'a vu, et 3 équations.

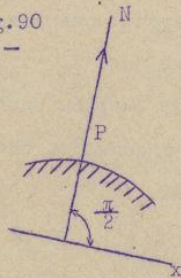
Remarque - Il y a, dans les considérations relatives aux appuis, une condition qu'il ne faut pas perdre de vue : le sens des réactions. Il faut toujours s'assurer que les réactions sont dirigées dans le sens où elles peuvent se développer, c'est-à-dire de P vers N.

I - CAS D'UN SEUL APPUI SIMPLE (FIG.90)

On a, au point d'appui, une normale qui doit porter la réaction.

Soient P, le point d'appui, PN la normale, f_1, f_2, f_3, \dots les forces appliquées. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la résultante des forces appliquées soit égale et opposée à la réaction, et portée par la même droite.

Fig.90



La projection de la réaction sur une droite x, perpendiculaire à la normale, est nulle, donc la projection de la résultante sur cette même droite doit être nulle.

Analytiquement, cela s'exprime par :

$$\text{proj}_x f_1 + \text{proj}_x f_2 + \text{proj}_x f_3 + \dots = 0,$$

qui est une des deux conditions auxquelles doivent satisfaire les forces. D'autre part, la résultante passe forcément par le point P, donc son moment par rapport à ce point doit être nul. Or, le moment de la résultante est la somme des moments des forces. D'où la 2ème condition : La somme des moments de toutes les forces, par rapport au point P doit être nulle :

$$\mathcal{M}_P^t f_1 + \mathcal{M}_P^t f_2 + \mathcal{M}_P^t f_3 + \dots = 0.$$

On peut vérifier cela graphiquement (Fig.91)

On sait que l'équilibre existe si le dynamique et un funiculaire se ferment :

Le dynamique donne la résultante des forces ab, en grandeur et ensens. La réaction est ba, lue sur le dynamique, et portée par PN, sur le funiculaire. Donc ba doit être parallèle à PN, et les côtés extrêmes du funiculaire doivent se couper sur cette normale.

II - CAS DE 2 APPUIS SIMPLES (Fig.92)

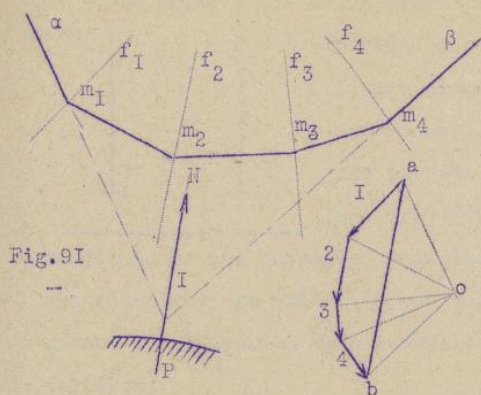


Fig.91

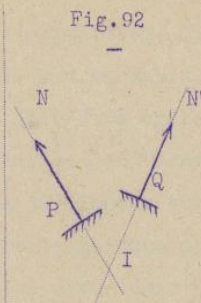


Fig.92

Il n'y a, ici, qu'une seule condition pour les forces. Soient P et Q les points d'appuis ; N et N' les normales en ces points aux profils des appuis.

Dans le cas général, les normales

se rencontrent en un point I. Les réactions, portées par PN et QN', peuvent alors se composer en une force unique, qui doit faire équilibre à la résultante des forces appliquées.

Il faut donc que cette dernière résultante soit égale et opposée à la force unique, et, par suite, passe par I. C'est la condition à laquelle doivent satisfaire les forces. Traduisons cela graphiquement (Fig.93).

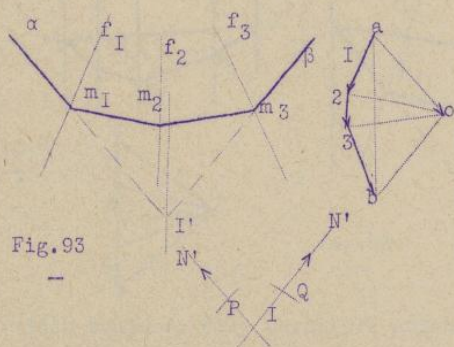


Fig.93

Par le sommet a du polygone des forces, menons une parallèle à la normale PN, et, par le sommet b, une parallèle à la normale QN'. Prenons l'intersection O de ces 2 parallèles comme pôle.

Exprimée sur le dynamique, la condition que la somme des forces et des réactions est nulle, signifie que celui-ci se ferme et qu'alors : ao et ob sont les réactions, ba étant la

résultante des réactions.

Construisons le funiculaire :

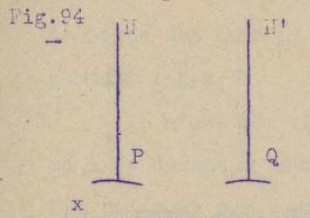
Les côtés extrêmes sont parallèles aux normales. Donc, ils portent les réactions, et le funiculaire se ferme sur leur point de rencontre I'.

Sur le dynamique, la résultante des forces/ab, celles des réactions^{est} est ba.

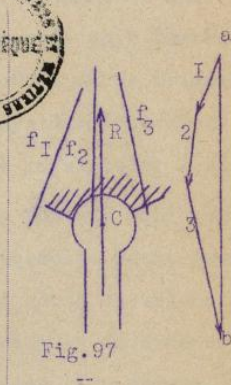
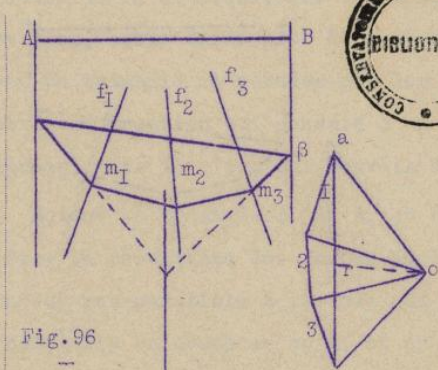
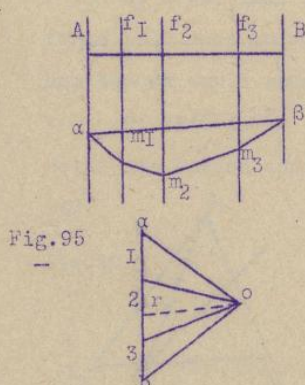
Sur le funiculaire, ces 2 résultantes sont portées par la même droite passant par I', et parallèle à ab.

CAS PARTICULIER OU LES NORMALES N ET N' SONT PARALLELES

Le point I est alors rejeté à l'infini (Fig.94). Les 2 réactions étant portées par des parallèles, leur résultante sera aussi une parallèle aux normales. Donc, la résultante des forces qui doit être égale et opposée, sera portée par une parallèle aux normales d'appui. La somme des projections des forces sur une droite x , perpendiculaire aux normales, doit être nulle puisque celle de la résultante des réactions est nulle. (C'est ce qu'on a vu dans le cas de la poutre reposant sur 2 appuis, dans laquelle les forces appliquées étaient toutes parallèles).



On introduit ici (Fig.95) les réactions br et ra pour fermer le dynamique, de sorte que α et β sont les sommets extrêmes du funiculaire, correspondant à br et ra . Or, il faut que le funiculaire se ferme, donc on doit re joindre les 2 sommets. Si les forces ne sont pas parallèles, on obtient une généralisation du cas précédent (Fig.96). La résultante des forces appliquées



doit toujours être parallèle aux normales d'appuis, puisqu'elle porte les réactions br et ra ; or doit encore être parallèle à $\alpha\beta$; pour que le funiculaire se ferme.

Remarque.- Il n'est pas indispensable que la poutre ait une forme rectiligne, ni que les points d'appui soient pourvu que les réactions soient verticales.

III - CAS D'UNE ROTULE DE CENTRE C

La rotule n'est autre chose qu'un couple rotoïde. Il n'y a qu'une réaction, qui passe par C, mais dont on ne connaît ni la direction, ni la grandeur. - Donc, 2 inconnues seulement, ce qui entraîne une condition pour les forces.

La réaction (Fig.97) doit faire équilibre aux forces appliquées, donc la résultante de ces forces passe par C. Il en résulte que le moment résultant de toutes les forces, par rapport à C, doit être nul. D'où la condition: La somme des moments des forces, par rapport à C, doit être nulle. (Analytiquement : $\sum x_i Y_i - y_i X_i = 0$.

Il n'est pas nécessaire ici d'envisager la configuration du funiculaire : le dynamique donne la réaction en grandeur et en direction, et il suffit de mener par c une parallèle à ab.

Mais il faut se rappeler que la réaction ba doit appuyer le bras dans sa cavité, ce qui implique un sens donné.

IV - CAS DE 3 APPUIS SIMPLES

Chaque appui peut donner lieu à une réaction et le problème est parfaitement déterminé, sauf pour les cas d'exception traités plus loin.

Cas le plus général : les 3 normales se coupent 2 à 2. Elles forment alors un triangle ; soient P_1, P_2, P_3 les points d'appui ; A_1, A_2, A_3 , les sommets du triangle. A_1 étant le sommet opposé à $P_1 N_1$, etc... .

On a vu, dans l'étude de la statique, que : si un triangle et une force sont dans le même plan, cette force peut être décomposée en 3 forces appliquées aux 3 sommets du triangle et portées par les côtés de ce triangle.

On sait faire cette construction qui conduit à un système équivalent à celui des forces appliquées, mais il n'est pas mauvais de le rappeler (Fig. 98).

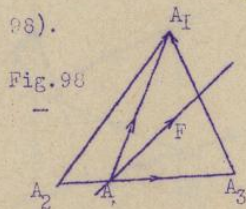


Fig. 98

Soient le triangle $A_1 A_2 A_3$ et la force F (qui peut être la résultante des forces appliquées). Cette force n'est pas parallèle à la fois aux 3 côtés du triangle, donc elle en coupe un en A, et on peut la décomposer suivant ce côté et une droite joignant A au sommet opposé. Cette dernière force peut, à son tour, être décomposée suivant les 2 côtés issus du sommet.

On peut réduire (Fig.99) les forces appliquées à 3 forces agissant

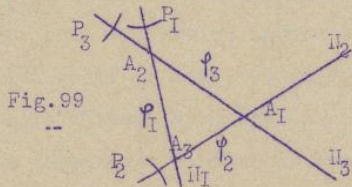


Fig. 99

chacune suivant une normale, savoir :

- φ_1 , portée par $A_2 A_3$ (ou $P_1 N_1$)
- φ_2 $A_1 A_3$ (ou $P_2 N_2$)
- φ_3 $A_1 A_2$ (ou $P_3 N_3$).

Il faut que ces trois forces soient équilibrées par des réactions

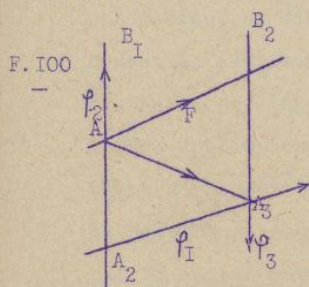
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, respectivement égales et opposées à $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, portées par les mêmes droites respectivement.

Pour s'en rendre compte, il suffit de prendre les moments par rapport aux sommets A_1 , A_2 , A_3 du triangle. Les moments des forces φ_2 , φ_3 , ρ_2 , ρ_3 qui passent au point A_1 sont nuls ; il faut donc, pour l'équilibre, que les forces φ_1 et ρ_1 portées par le côté opposé $A_2 A_3$ aient des moments égaux et de signes contraires. Il faut donc que ces deux forces, portées par la même droite, soient égales et opposées. Résultats analogues en prenant les moments par rapport à A_2 et A_3 . Il convient d'ajouter que les réactions suivant les normales d'appui doivent avoir un SENS donné à l'avance.

CAS PARTICULIERS - 1°) Deux des normales d'appuis sont parallèles. Le problème est encore déterminé, mais A_1 est à l'infini.

Si la force F n'est pas parallèle aux 2 normales parallèles, elle en coupe une en A , et on peut la décomposer suivant AA_2 et AA_3 (Fig. 100). La force portée par AA_3 peut, à son tour, se décomposer suivant $A_3 B_2$ et $A_2 A_3$ ce qui donne bien encore 3 composantes portées par les 3 normales.

Si la force F était parallèle aux 2 normales parallèles, la construction ne serait pas en défaut, car on pourrait alors décomposer F en 2 forces portées chacune par une des normales, mais la 3ème normale ($A_2 A_3$), ne porterait rien. Cela signifierait que la réaction sur l'appui correspondant est nulle.



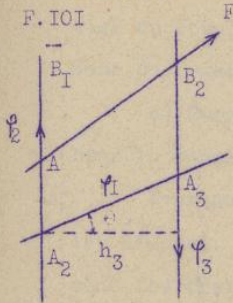
Donc, on aura : sur $A_2 B_1$ une force φ_2 , somme de toutes les forces f_2 , sur $A_3 B_2$, une force φ_3 , somme de toutes les forces f_3 , et enfin sur $A_2 A_3$, une force φ_1 , somme de tous les f_1 .

Les réactions sont portées par les mêmes droites, et doivent être respectivement égales et opposées à ces 3 forces.

La somme des moments par rapport à un point quelconque doit aussi être nulle. Prenons le moment par rapport à A_3 : les forces φ_2 , ρ_1 , φ_3 , ρ_3 ont un moment nul puisqu'elles passent par A_3 . Restent φ_2 et ρ_2 , qui sont les seules forces dont le moment résultant ne soit pas nul. Or, il faut qu'il le soit, et elles sont portées par la même droite $A_2 B_1$, donc elles doivent être égales et opposées. On aurait le même résultat en prenant le moment par rapport au sommet A_2 . Quand au 3ème sommet, il est à l'infini, mais on peut considérer les projections des forces sur une perpendiculaire x aux directions parallèles (Fig. 101).

Les projections de φ_2 et ρ_2 , φ_3 et ρ_3 , seraient nulles.

Enfin, la somme des projections de \vec{p}_I et \vec{p}_I , portées par la même droite, doit être nulle, ce qui entraîne, pour ces forces, la condition d'être égales et opposées.



En résumé, soit que les normales d'appui forment un vrai triangle, soit que deux d'entre elles soient parallèles, on pourra déterminer sur chacune d'elles une réaction de manière que l'ensemble de ces réactions équilibre les forces données.

Seulement, il ne faut pas perdre de vue que l'état des appuis implique un sens donné pour ces réactions d'appui.

2°) Un cas, véritablement exceptionnel, est celui où les normales d'appui sont concourantes ou parallèles. Dans le cas où les normales concourent en un point I, les réactions admettent une résultante issue du point I. Dès lors, les forces appliquées doivent avoir, de leur côté, une résultante opposée, issue du même point I. Telle est la condition imposée aux forces.

Mais, pour répondre au problème, il faudrait équilibrer cette résultante des forces par trois forces portées respectivement par une des normales d'appui. Or, le problème devient indéterminé. Sa solution dépend alors de la considération de la déformation du corps soumis aux forces et aux appuis. C'est en cela qu'il est exceptionnel. Le cas où les normales d'appui seraient parallèles, au lieu d'être concourantes, donne lieu à des remarques du même ordre. La résultante des forces doit être parallèle à la direction commune des normales d'appui. Telle est alors la condition que doivent vérifier les forces appliquées. Mais cette condition nécessaire étant remplie, le problème de placer sur les 3 normales parallèles des réactions équilibrant la résultante des forces est encore indéterminé. Il ne peut se résoudre que par la considération de la déformation du corps actionné.

3°) CAS PARTICULIER DU COUPLE

Nous avons, dans tout ce qui précède, supposé que le corps qu'il s'agit d'appuyer était soumis à des forces possédant une résultante. Examinons ce qui arriverait si les forces appliquées étaient réductibles à un couple.

a) le problème n'a pas de solution, s'il n'y a qu'un seul appui, car un couple n'ayant pas de résultante n'a pas non plus d'équilibrante et une seule réaction ne peut le maintenir en équilibre.

b) s'il y a deux appuis, ils devront développer deux réactions formant un couple, ce qui implique que les normales d'appui soient parallèles et que, de plus, les sens des réactions que les appuis peuvent développer sur les

deux normales parallèles soient de directions contraires. Il faudra enfin que le couple formé en plaçant deux réactions égales sur ces deux normales, soit de sens opposé à celui qu'il s'agit d'équilibrer. Comme le bras de levier du couple des réactions est la distance des normales d'appui, la grandeur des réactions se trouve parfaitement déterminée.

c) Supposons maintenant que l'on dispose de trois appuis pour équilibrer le couple.

Reprenons la considération du triangle $A_1 A_2 A_3$ formé par les normales d'appui. Chaque force du couple donnera lieu à trois composantes, suivant les trois côtés de ce triangle et, en composant entre elles les forces portées par un même côté, nous aurons finalement trois forces $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ portées par les côtés du triangle, dont l'ensemble est équivalent au couple qui actionne le corps que l'on veut équilibrer.

Il est aisé, a priori, de définir les trois forces $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ portées par les côtés du triangle $A_1 A_2 A_3$ qui constituent un couple. Puisqu'elles constituent un couple, leur moment est le même pour les trois sommets du triangle ; puisque les forces φ_2 et φ_3 passent au point A_1 , le moment, par rapport à ce sommet, se résuit au moment de φ_1 , en sorte qu'en appelant h_1 la hauteur du triangle issue de A_1 , le moment du couple en A_1 sera $h_1 \varphi_1$. De même pour les deux autres sommets. Nous aurons donc, en écrivant que ces moments sont égaux :

$$h_1 \varphi_1 = h_2 \varphi_2 = h_3 \varphi_3 .$$

Mais, d'un autre côté, le double de l'aire S du triangle a ses expressions différentes, mais égales, où a_1, a_2, a_3 désignent les côtés du triangle,

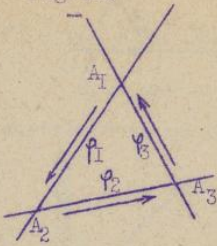
$$h_1 a_1 = h_2 a_2 = h_3 a_3 = 2 S .$$

On en conclut que les forces $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont proportionnelles aux côtés qui les portent :

$$\frac{\varphi_1}{a_1} = \frac{\varphi_2}{a_2} = \frac{\varphi_3}{a_3} = \mu$$

Il faut ajouter que ces forces doivent avoir sur les côtés du triangle, le même ordre de circulation (Fig. 102, par exemple). Le sens de circulation A_1, A_2, A_3 (ou le sens opposé). Ce sens doit être naturellement celui du couple qui est équivalent à ce système de forces. Quant aux réactions, elles seront respectivement égales et opposées aux forces $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Il faudra, toutefois, que la disposition des appuis permette le développement de ces réactions.

Fig. 102



Si deux des trois normales d'appui sont parallèles la normale oblique aux deux autres ne portera aucune réaction et il faudra trouver sur les deux normales parallèles des réactions égales et de sens contraires formant un couple opposé au couple donné. La possibilité de la solution est, ici encore, conditionnée par la disposition des appuis.

Si les trois normales concourent, le problème est impossible, car des réactions concourantes se composeraient en une seule qui ne saurait équilibrer un couple.

Enfin, si les trois normales d'appui étaient parallèles, le problème de trouver des réactions équilibrant le couple donné serait indéterminé.

V - CAS D'UNE ROTULE ET D'UN APPUI SIMPLE

Supposons d'abord que les forces aient une résultante. La normale d'appui coupe en un point I cette résultante et comme la réaction de l'appui et la résultante des forces doivent être en équilibre avec la réaction développée par la rotule, il est nécessaire que cette dernière passe par le point où passent les deux premières forces.

Il suffira donc de décomposer la résultante des forces en deux forces dirigées suivant la normale de l'appui simple et suivant la droite OI, d'où O est le centre de la rotule.

Les réactions seront les deux forces égales et opposées à celles-là. Il faudra, toutefois, que les dispositions de l'appui et de la rotule permettent le développement de ces forces de réaction.

Si la résultante des forces était parallèle à la normale d'appui, le point I serait rejeté à l'infini. Il faudrait prendre le bras de la rotule parallèle à la normale d'appui et décomposer la résultante en deux forces portées, l'une par la normale d'appui, l'autre suivant le bras de la rotule. Les forces égales et opposées à celles-là seraient les réactions. Encore faut-il que la disposition de la rotule et de l'appui simple permette la réalisation de ces réactions.

Lorsque les forces n'ont pas de résultante et se réduisent à un couple, le bras de la rotule devra être parallèle à la normale d'appui, ces deux droites devant servir de ligne d'action à deux forces égales et de sens contraires, de façon à constituer un couple opposé à celui des forces. Encore faudra-t-il que la disposition de l'appui et de la rotule se prête au

développement de ces réactions.

VI - CAS D'UN ENCASTREMENT

Soit une poutre, figurée par son axe, et dont une extrémité est encastrée dans un corps fixe (Fig.103). On peut se représenter l'encastrément comme un appui capable de développer au point A, où la poutre sort du mur :

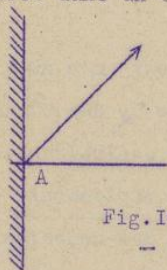


Fig.103

1°) une force, soit 2 inconnues, qui sont ses projections ;

2°) un couple, soit 1 inconnue : son moment.

On sait que toutes les forces appliquées à un corps peuvent se réduire à ces deux éléments. Ici, les forces sont coplanes et la force et le couple sont dans le plan des forces. Il peut donc se développer en A une réaction égale et opposée à la force unique, et un couple de réaction égal et opposé au couple résultant (c'est le couple d'encastrément).

La force unique s'obtiendra, comme d'habitude, au moyen du dynamique, et on l'appliquera au point A, en changeant son sens. On prendra ensuite, sur le funiculaire, le moment résultant de toutes les forces par rapport au point A. Ce moment, changé de sens, sera le moment d'encastrément.

Exemple - Supposons une telle poutre soumise à 3 forces verticales

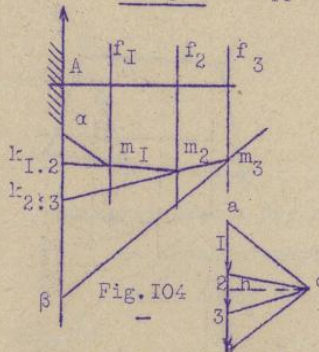


Fig.104

(Fig.104). Construisons le dynamique et le funiculaire, la réaction, appliquée en A, est égale et opposée à la résultante ab.

Cherchons le moment résultant de toutes les forces : on sait que le moment, par rapport à A, d'une force, est le produit de la distance polaire h, par le segment intercepté sur la parallèle à la force, menée par A - par les 2 côtés du funiculaire réduit, construit avec cette force.

On aura donc successivement :

$$\left. \begin{aligned} \sum_A^t f_1 &= h \times \alpha \overline{k_{1.2}} \\ \sum_A^t f_2 &= h \times \overline{k_{1.2} k_{2.3}} \\ \sum_A^t f_3 &= h \times \overline{k_{2.3} \beta} \end{aligned} \right\} = h(\alpha \overline{k_{1.2}} + \overline{k_{1.2} k_{2.3}} + \overline{k_{2.3} \beta}) = h \times \alpha \beta .$$

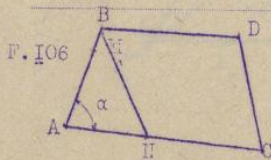
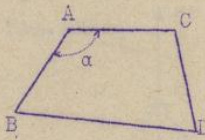
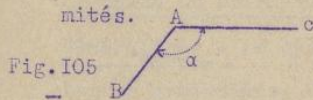
La somme des moments est le moment résultant qui, avec la résultante ab, constitue un système équivalent aux forces données.

Le moment d'encastrement est évidemment $h \times \alpha \beta$, changé de signe.

SYSTEMES ARTICULES

On n'a, jusqu'ici, envisagé que les réactions entre un corps soumis à des forces et un corps fixe qui le maintient en équilibre. Dans les systèmes articulés, on a à considérer à la fois plusieurs corps formant un système cinématique d'assemblage, sur lequel sont appliquées des forces. Une articulation est généralement constituée par une surface de révolution, dans sa forme en creux, et telle que les déplacements le long de l'axe ne soient pas permis. C'est un couple rotoïde.

Considérons 2 tiges AB, AC, articulées en A. Leur angle α est variable (Fig. I05). Ajoutons 2 autres barres CD et BD, articulées à leurs extrémités.



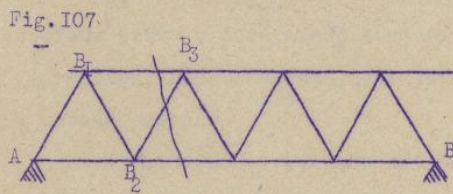
Le quadrilatère ainsi constitué est déformable, et ses angles dépendent de α . Mais si, en des points quelconques M et N de 2 barres contiguës, on articule une 5ème barre, le quadrilatère devient indéformable (Fig. I06). Il n'en reste pas moins que la base de ces liaisons est l'articulation, d'où le nom de systèmes articulés.

On appelle noeuds, les points d'articulation.

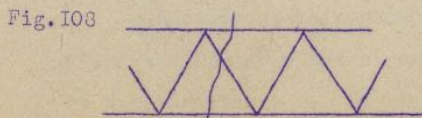
A un même noeud peuvent aboutir 2 ou plusieurs barres qui s'y articulent. On suppose toujours les charges appliquées à des noeuds.

Le problème général qui se pose est le suivant :

Etant donné un système articulé (exemple la poutre Warren ci-contre



(Fig. I07) qui peut être assimilé à un corps solide - en raison de son indéformabilité - il faut déterminer non seulement les réactions des appuis, mais encore les efforts que subit chaque barre.



On remarque que si, dans le triangle $B_1 B_2 B_3$ par exemple, on coupait une barre, le système n'existerait plus.

C'est donc que les barres sont soumises à certains efforts, qui peuvent être de deux sortes : ou bien ces efforts tendent à allonger la barre, qui est alors un tirant ; ou bien ils tendent à la comprimer, et c'est un arbalétrier.

Il faut déterminer la grandeur et la nature de ces efforts. Il existe plusieurs procédés, dont le plus courant (méthode des sections) consiste à couper la poutre par une ligne imaginaire, et à chercher ce qui se passe à droite et à gauche de cette section (Fig.108). Il y a alors deux méthodes :

1°) celle de Culmann, qui s'applique dans le cas où la section ne coupe que 3 tiges formant triangle ;

2°) le procédé des moments de Ritter.

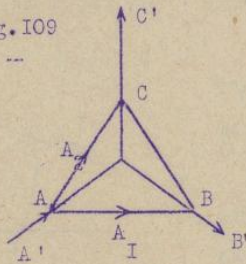
Elles sont mises en défaut dans les mêmes cas, et il faut alors recourir à une 3ème méthode :

3°) méthode de Maxwell, ou des noeuds.

METHODES DE DETERMINATION DES EFFORTS DANS LES DIVERS ELEMENTS

Généralités.- Le système indéformable le plus simple est constitué par 3 barres articulées. C'est une chaîne d'assemblage (Fig.109).

Fig.109



Appliquons une force à chaque noeud. Un tel système est assimilable à un corps solide, donc les forces appliquées peuvent se faire équilibre, à condition qu'elles soient concourantes et qu'elles aient une somme géométrique nulle.

Graphiquement, cette dernière condition est remplie si le dynamique se ferme.

Il est intéressant de connaître les efforts que subit chacune des 3 barres. La détermination de ces tensions est immédiate, en appliquant le théorème relatif à la décomposition des forces coplanes suivant les côtés d'un triangle. Ces 3 composantes représenteront les tensions cherchées (ces tensions pouvant être aussi bien des efforts de traction que des efforts de compression. Dans l'espèce, AA' se décompose en AA_2 , portée par AC , et AA_1 portée par AB .

L'équilibre veut que BB' donne sur AB une composante opposée à AA_1 , et ainsi de suite pour les deux autres côtés.

Considérons maintenant un quadrilatère articulé (Fig.110 - p.83). Il n'est indéformable que si un angle donné α est rendu invariable par une barre supplémentaire EF . Si l'on ajoute une autre barre GH , il est indéformable, a fortiori, et l'on peut alors supprimer l'une ou l'autre de ces 2

barres, sans que le système cesse d'être indéformable. Un tel système est

dit : à liaisons surabondantes.

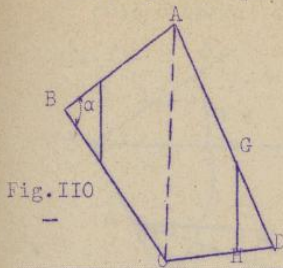


Fig. II0

Soit enfin un système articulé quelconque :ABCDE (Fig.III) sur lequel agissent des forces, qu'on suppose appliquées à des noeuds. Si, d'autre part, ce solide est appuyé sur des corps fixes, il s'introduit des réactions, ces réactions pourront être déterminées par les méthodes précédemment étudiées à propos des corps solides.

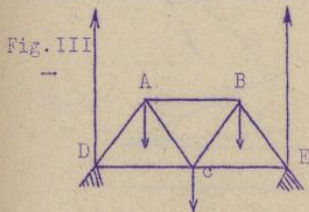


Fig. III

Le problème se ré uit alors à la recherche des tensions dans les divers éléments qui constituent le système. On dispose pour cela de 2 méthodes, dont une se décompose en six.

I - METHODE DES SECTIONS. - Qui prend elle-même deux formes : celle de Culman et celle de Ritter.

I°) Méthode de Culmann : Soient 3 barres, formant un triangle et pouvant être coupées par une section entre des noeuds. Cette section divise le plan en 2 parties : gauche et droite (Fig.II2).

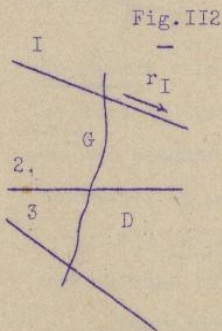


Fig. II2

Soit F le système des forces s'exerçant sur la partie de gauche (G). Ces forces seront équilibrées par des tensions s'exerçant dans les barres 1, 2, 3 .

Constituons, pour chacune des forces de F les composantes triangulaires, et soient φ_I la résultante de toutes les forces, suivant la barre 1 .

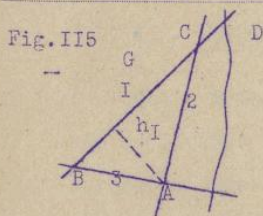
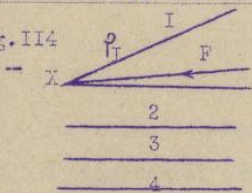
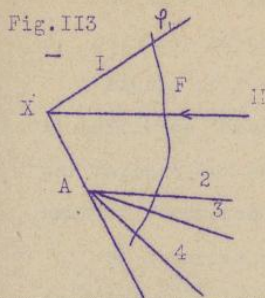
φ_2 = résultante de toutes les forces suivant la barre 2 ; φ_3 = résultante de toutes les forces suivant la barre 3 .

Ces trois résultantes forment un système équivalent à F . Mais alors les composantes triangulaires de l'action de la partie de droite sur la partie de gauche, seront égales et opposées à φ_I , φ_2 , φ_3 . Soient π_I , π_2 , π_3 ces actions. Si π_I va de gauche à droite (\longrightarrow) , la barre 1 sera un tirant. Si au contraire π_2 va de droite à gauche, la barre 2 sera un arbalétrier.

Le procédé s'applique encore quand 2 des barres sont parallèles. On a vu que ce n'est pas un cas d'exception, puisqu'on peut regarder ^{cela} comme un triangle dont le 3ème sommet est à l'infini, et que la décomposition en 3 forces, suivant les 3 droites, est encore possible.

Il peut arriver aussi que la section oimaginaire coupe une barre (I),

puis 3 barres concourantes (2,3,4) en un point A (Fig.II3).



Si la résultante F des forces rencontre la barre I en un point X, on peut toujours, en joignant AX, décomposer F suivant I et AX.

On a ainsi sur I une composante φ_I et, par suite π_I qui est l'action qu'exerce la partie de droite sur la partie de gauche, dans la barre I.

Comme précédemment, si π_I va de gauche à droite, I est tirant.

La composante agissant suivant AX peut être appliquée en A et être considérée à son tour comme une force appliquée au noeud A. Mais c'est un autre problème.

Les forces 2,3,4 (Fig.II4) peuvent tout aussi bien être parallèles, sans que cela change la manière d'opérer : le point A est à l'infini, donc AX est parallèle à 2, 3, 4.

Il suffit alors de décomposer F suivant I et une parallèle à 2, 3, 4, menée par X.

En résumé : la méthode de Culmann exige que l'on puisse englober chaque barre dans un système de 3 forces formant : soit un triangle, soit 2 parallèles et une sécante, soit encore un système groupant la barre I avec d'autres, concourantes ou parallèles.

2°) Méthode de Ritter ou des moments : C'est une autre manière d'arriver au même résultat.

Reprenons le cas où les 3 barres forment un triangle ABC, pouvant être coupé par une même section (Fig.II5).

Supposons que l'on ait fait la décomposition triangulaire et fait la somme des forces sur chacun des côtés ; prenons le moment de toutes les forces du système F, par rapport au sommet A, par exemple ; on aura :

$$\begin{aligned} \sum \mathcal{M}_A^t F &= \mathcal{M}_A^t \varphi_I \\ &= h_I \varphi_I, \end{aligned}$$

h_I étant la hauteur du triangle.

(Les deux autres composantes triangulaires ont des moments nuls par rapport à A. On en tire :

$$\varphi_I = \frac{\sum \mathcal{M}_A^t}{h} \quad \text{et} \quad \pi_I = \frac{\sum \mathcal{M}_A^t}{h}$$

On aura de même τ_2 et τ_3 en prenant les moments par rapport au sommet B, puis par rapport au sommet C.

Ainsi, pour obtenir les tensions τ_1, τ_2, τ_3 dans les barres 1, 2, 3, il suffit de prendre successivement les moments résultant de toutes les forces par rapport aux sommets opposés aux barres 1, 2, 3 et de les diviser par les hauteurs correspondantes : h_1, h_2, h_3 du triangle formé par les barres.

Si 2 barres sont parallèles et la 3^e sécante, la méthode permet encore de déterminer les efforts τ_1 et τ_2 , mais non τ_3 , qui doit être calculé d'une autre manière (Fig. II6).

Ces deux méthodes, bien qu'intéressantes, ne sont pas aussi générales que celles de Maxwell, qui conduit du reste à de remarquables solutions avec d'importantes disciplines de mécanique.

II - METHODE DE MAXWELL OU DES NOEUDS

Cette méthode repose sur la construction suivante : Soit plusieurs forces appliquées à un même point B qu'il s'agit d'équilibrer au moyen de deux forces de directions données, appliquées au même point. On construira le dynamique des forces données et par ses extrémités, on mènera des parallèles aux directions données, supposées différentes. Ces deux droites n'étant pas parallèles entre elles se couperont en un point O. En prenant O comme pôle, les deux rayons extrêmes, pris dans des sens convenables seront les forces données.

Applications :

I°) Poutre armée à 1 poinçon.

Soit une poutre AC, portant une charge verticale appliquée en B. Pour renforcer cette poutre, on peut placer en B un poinçon BD et 2 brides AD et

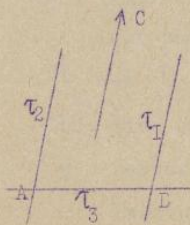


Fig. II6

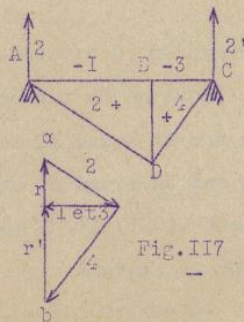


Fig. II7

AC (Fig. II7). La charge F occasionne dans ces 4 barres des tensions qu'il faut déterminer. Figurons par ab la charge F, et par a, menons une parallèle à AD ; par b menons une parallèle à CD. Ces parallèles se coupent en O. Construisons un funiculaire avec le pôle O ainsi obtenu. On peut se servir de la figure elle-même comme funiculaire : soit la réaction en A,

représentée sur le dynamique par ca. Pour qu'il y ait équilibre en A, il faut que le dynamique formé avec les forces agissant suivant I et 2 soit fermé par une parallèle AC, donc oc est parallèle à la ligne I, ou perpendiculaire à ab.

On peut aussi savoir si la barre AB est un tirant ou un arbalétrier : ici la force I agit en se dirigeant vers le noeud A considéré, donc AB est un arbalétrier.

On mettra le signe + aux tirants et le signe - pour désigner les arbalétriers. Par contre, AD est un tirant. En appliquant le même raisonnement au noeud C, on trouve que la réaction en ce point est bc et les tensions suivant BC et CD sont représentées par co et ob. Il reste à déterminer la tension dans la barre BD. On peut considérer le noeud B ou le noeud D, indifféremment. Prenons B : On connaît les forces I et 3, qui sont égales et opposées, puisque portées par la même droite. D'autre part, la charge qui s'exerce en B est ab, donc la tension qui agit suivant BD est ba, d'après le dynamique. Elle est dirigée vers B, et BD est un arbalétrier.

Cet exemple montre suffisamment l'esprit de la méthode de Maxwell.

POUTRE ARBEE A 2 POINCONS, PORTANT DEUX CHARGES VERTICALES EGALES (Longeron de Wagon).

Soient (Fig.II8) C et D les points d'application des 2 charges : CE et

Fig.II8

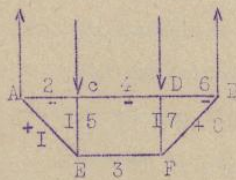
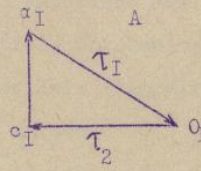


Fig.II9



DF les deux poinçons. La détermination des réactions d'appui est immédiate : en raison de la symétrie, elles ont même valeur qui est égale par chacune à la moitié de la somme des charges. Appliquons la méthode de Maxwell, en commençant par le noeud A : la réaction ca est connue, les tensions

τ_1 et τ_2 sont inconnues. Construisons encore le dynamique partiel (A) en menant par c_I une parallèle à la barre 2, et par a_I une parallèle à la barre 1 (Fig.II9).

Leur point de rencontre O_I détermine, comme on l'a vu déjà, les tensions

τ_1 et τ_2 , en grandeur et en sens.

τ_1 tire sur A, donc la barre AE est tendue (tirant)

τ_2 repousse A, donc la barre AC est comprimée (arbalétrier).

Passons au noeud E (Fig.I20). Une force connue : celle qui agit suivant AE. Comme cette barre est tendue, on doit avoir sur E une traction égale et opposée à τ_1 . Elle sera représentée sur le dynamique partiel (E) par $O_2 a_2$

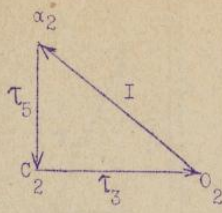


Fig. I20

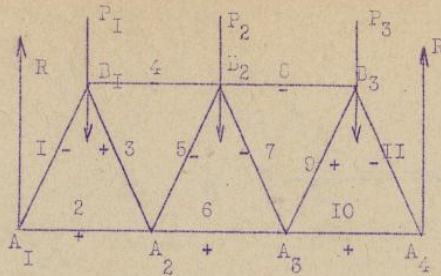


Fig. I21

Restent 2 tensions inconnues τ_3 et τ_5 .
En menant par O_2 et a_2 des parallèles aux barres 3 et 5, on a immédiatement τ_3 et τ_5 .

τ_3 tire sur E, donc 3 est tendue ;
 τ_5 repousse E, donc 5 est comprimée.

NOEUD C. - La force connue est la charge verticale, qui agit suivant CE. Mais on a aussi dans cette barre τ_5 . Ces deux forces sont donc égales et opposées et se détruisent.

τ_2 est également connue. Or, pour que le noeud C soit en équilibre, il faut que τ_2 et τ_4 soient égales et opposées. τ_4 est donc déterminée sans même qu'il soit besoin de construire le funiculaire.

On en déduit ensuite, par symétrie, les tensions dans les autres barres.

POUTRE DE WARREN (Fig. I21).

On procédera de la même manière que dans l'exemple ci-dessus :

Détermination des réactions aux appuis, puis, pour chaque noeud, construction du dynamique partiel, en cheminant de proche en proche.

Ces dynamiques partiels s'appellent : polygones de Cremona. On peut les grouper en une figure unique.

Soient $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3$ les noeuds de la poutre ; P_1, P_2, P_3 des charges égales appliquées en B_1, B_2, B_3 , R et R' les réactions - égales dans le cas considéré - que l'on suppose déterminées par le funiculaire habituel.

Nota : Pour faciliter la lecture des figures, nous figurerons en traits mixtes, dans chaque Cremona, les forces connues.

Noeud A_1 - Il n'y a aucune difficulté : le Crémone obtenu en menant des parallèles aux barres I et 2 et à la réaction, fournit les tensions τ_1 et τ_2 (F. I22).

Noeud B_1 - (Fig. I23) - 3 barres s'y articulent, mais 4 forces y agissent : les tensions dans les barres et la charge P_1 , connue. On connaît τ_1 , qui va de B_1 vers A_1 , donc la tension qui lui fait équilibre et s'exerce sur B_1 , va de A_1 vers B_1 . On peut construire ces deux forces avec leur sens :

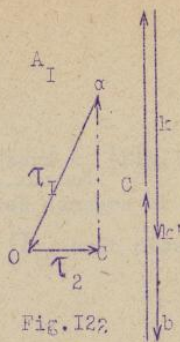


Fig. I22

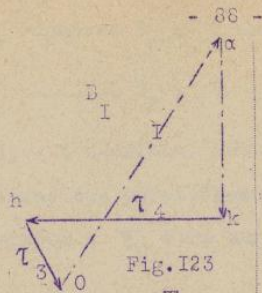


Fig. I23

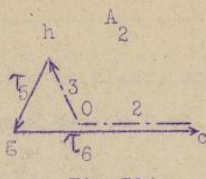


Fig. I24

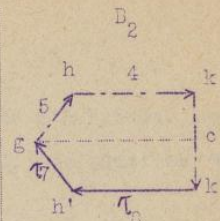


Fig. I25

ak représente la charge P_I ,

Oa représente la tension dans la barre I.

Remarquons que Oa n'est autre que le vecteur aO du Crémone de A_I , changé de sens.

On sait, d'autre part, que les vecteurs représentatifs des tensions dans les barres 3 et 4 doivent être parallèles à ces barres. On peut donc mener ces parallèles par O, la parallèle à la barre 3, et par K, la parallèle à la barre 4. Leur intersection h est le point de fermeture du polygone des forces. Le sens des forces kh et hO est naturellement celui dans lequel on parcourt le polygone en partant de O vers a.

hO = τ_3 tire sur B_I , et 3 est un tirant.

kh = τ_4 repousse B_I , et 4 est un arbalétrier.

Noeud A_2 (Fig. I24). Pas de charge ni de réaction, mais 2 tensions connues et 2 inconnues : τ_5 et τ_6 . Construisons toujours le Crémone, en portant les forces connues CO, égale et opposée à τ_2 (du Crémone A_I) et Oh, égale et opposée à τ_3 (du Crémone B_I). Menons par h, la parallèle à la barre 5, et par O la parallèle à la barre 6 (qui est le prolongement de cO). L'origine du polygone est le point c, ce doit être aussi le point de clôture, donc τ_6 est représentée par gc.

τ_5 repousse A_2 , 5 est comprimée.

τ_6 tire sur A_2 , 6 est tendue.

On pourrait s'en tenir là et obtenir les tensions, dans le reste de la poutre, par symétrie, mais nous continuerons jusqu'au bout, on verra plus loin pourquoi.

Noeud B_2 (Fig. I25).- On connaît τ_4 et τ_5 , et la charge $P_2 = kk'$. Il y a en tout 5 forces. Le Crémone est un pentagone, mais la construction est toujours la même : porter les forces connues, puis par l'origine et l'extrémité du polygone incomplet, mener des parallèles aux barres dont on cherche les tensions.

On a ainsi : τ_7 et τ_8 .

τ_7 repousse B_2 , 7 est un arbalétrier.

τ_8 ——— B_2 , 8 —————

Noeud A_3 (Fig. I26) - 4 tensions. Mettons en place, comme d'habitude, les forces connues et menons des parallèles aux barres 9 et 10. Les tensions τ_9 et

τ_{10} sont déterminées : τ_9 tire sur A_3 } ces 2 barres sont des tirants.
 τ_{10} ——— A_3

Noeud B_3 (Fig. I27) - Il n'y a d'inconnue que la tension τ_{II} , qui s'obtient

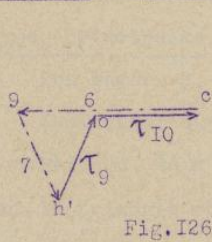


Fig. I26

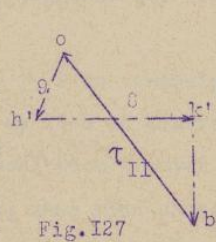


Fig. I27

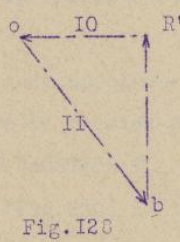


Fig. I28

par un Crémona analogue aux précédents.

Noeud A_4 (Fig. I28) - Rien n'y est inconnu, mais on peut, en partant de τ_{II} , changée de sens, et de R' , vé-

rifier que τ_{10} ferme bien le polygone. C'est ce qui doit arriver si la construction a été faite correctement.

On peut remarquer que les barres obliques sont alternativement des tirants et des arbalétriers, et que les barres horizontales ^{supérieures} sont toutes comprimées, tandis que les barres inférieures sont toutes des tirants.

Si l'on considère un noeud bien déterminé, la condition d'équilibre est, comme on l'a vu, que le polygone des vecteurs soit fermé. C'est ce que nous avons fait pour les 7 noeuds de la poutre qui vient d'être étudiée. Il faut toutefois remarquer que les Crémona, une fois construits, les tensions sont représentées, non par des vecteurs - comme dans les dynamiques habituels - mais par des segments de droites. En effet, un même segment figure tantôt l'action et tantôt la réaction. Autrement dit, son sens dépend du noeud auquel on le rattache.

Reprenons le polygone des forces appliquées et des réactions : ca, ak, k'k', k'b, bc. Il est fermé. C'est la souche d'un dynamique complet, sur laquelle vont se greffer les segments qui représentent les tensions : A partir du point a, on portera les côtés ca, ao, oc du premier polygone d'équilibre (A_I) ; puis, en partant du point o, on portera les segments oa, ak, kh et ho, du polygone (B_I), etc... On mettra ainsi successivement en place les 7 polygones d'équilibre que l'on avait construit séparément, étant entendu

que, mis en place, ils peuvent se superposer en partie ou en totalité. Le dynamique complet D est alors construit. Il représente les charges et les réactions qui sont orientées, et les tensions, qui ne le sont pas.

RELATIONS ENTRE LA CONFIGURATION DE L'OUVRAGE ET LE DYNAMIQUE

La méthode des noeuds est due à Maxwell, mais Crémona en a achevé la mise au point et tiré les conclusions suivantes (Fig. I29).

Si l'on considère la poutre (A), on voit que certaines barres en limitent le contour. Ce sont les barres extérieures, auxquelles correspondent, dans le dynamique (D), des segments qui leur sont parallèles. Ces segments sont dits : lignes principales.

Les barres 3, 5, 7, 9 au contraire, sont appelées barres de remplissage.

Remarquons que, au lieu de construire le premier triangle d'équilibre, cao, on aurait pu, tout aussi bien trouver les tensions τ_1 et τ_2 , en construisant le triangle oc'a, sans rien changer (Fig. I30) à l'équilibre. Mais l'assemblage des polygones d'équilibre n'eût pas donné un ensemble simple.

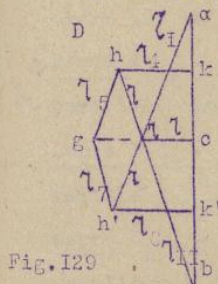


Fig. I29

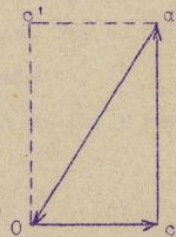
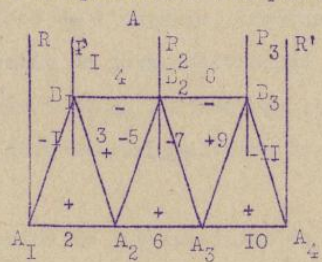


Fig. I30

Pour orienter les constructions successives, imaginons qu'un observateur décrive le contour extérieur de la poutre, dans le sens direct $A_1, B_1, B_2, A_2, A_3, B_3, A_4, A_1$, c'est-à-dire en laissant à sa droite l'intérieur du contour. En partant de A_1 , il trouvera les barres 1, 4, 6, 11, 10, 6 et 2, comprises entre les forces appliquées (charges et réactions) : R, P_1, P_2, P_3, R' . Considérons une barre principale, par exemple la barre 4. Elle aboutit à 2 noeuds : B_1 et B_2 , et on a construit pour chacun de ces noeuds une Crémona.

Pour B_1 - dans (A), 1, 3, 4 et P_1 aboutissent en B_1 ;
sur (D), le polygone d'équilibre correspondant est : a k h o,
avec $kh = \tau_2$.

Pour B_2 - dans (A), 4, 5, 7 et P_2 se rencontrent en B_2 ;
sur (D), le polygone est $kk' h' g h$, avec $hk = \tau_4$.

Si l'on suppose que tous les Crémona sont mis en place, on voit que τ_4 est commun à 2 Crémona :

pour B_1 , il est juxtaposé à ak ,
pour B_2 , il est juxtaposé à kk' ;

c'est dire que dans les 2 cas, il passe par k , qui est précisément le point de juxtaposition des forces extrêmes : $P_1 = ak$ et $P_2 = kk'$. Or, P_1 et P_2 sont aux deux extrémités de la barre 4. Le même raisonnement s'appliquant à toutes les barres principales, on en conclut que : A toute barre du contour de (A) correspond dans (D) une ligne principale qui part du point de juxtaposition dans (D) des vecteurs représentant les forces ou réactions appliquées dans (A) à chaque extrémité de la barre principale considérée.

Par exemple, à $B_1 B_2$ correspond une ligne principale parallèle : kh , partant du point de juxtaposition k des vecteurs ak et kk' représentant les forces P_1 et P_2 appliquées respectivement en B_1 et B_2 .

On peut construire la souche : c'est le polygone fermé formé par les vecteurs représentant les forces et réactions que l'on s'ait construire ou calculer, c'est-à-dire dans l'ordre : ca , ak , kk' , $k'b$, bc . En suivant le même ordre sur le contour de l'ouvrage, traçons les lignes principales (Fig. I29).

Barre $A_1 B_1$ - Le point de juxtaposition de R et P_1 est a . Par a , menons une parallèle indéfinie à $A_1 B_1$. C'est une ligne principale.

Barre $B_1 B_2$ - Le point de juxtaposition de P_1 et P_2 est k . Par k menons une parallèle à $B_1 B_2$.

Barre $B_2 B_3$ - Le point de juxtaposition de P_2 et P_3 est k' . Par k' menons une parallèle à $B_2 B_3$.

Barre $B_3 A_3$ - P_3 et R' se juxtaposent en b . Menons par b une parallèle à $B_3 A_3$.

Barres $A_3 A_2$, $A_2 A_1$ - En A_2 on a la réaction R' , mais en A_3 aucune force n'est appliquée. Continuons : En A_2 pas de force, enfin en A_1 on trouve R . Le point de juxtaposition de R' et R est c . Donc, de c doivent partir 3 lignes principales portant les tensions : τ_{10} , τ_6 et τ_2 . Or, ces lignes sont toutes parallèles. Elles partent du même point c , donc elles sont confondues en une seule. Il suffit, par conséquent, de mener par c une parallèle commune aux barres 10, 6 et 2. Donc :

S'il n'y a de force appliquée qu'à l'une des extrémités d'une barre principale, continuer en parcourant les barres suivantes jusqu'à ce qu'on trouve une autre force, et chercher, sur la souche, le point de juxtaposition des forces entre lesquelles se trouvent placées les barres principales considérées. Par ce point, mener la ou les parallèles à ces barres.

Toutes les lignes principales sont ainsi construites.

Barres de remplissage. - A ces barres correspondent des lignes secondaires.

Remarquons que l'ouvrage est constitué par 5 triangles et que, sur la figure (D) les tensions relatives aux côtés d'un de ces triangles sont représentées par des segments issus d'un même point. Par exemple : au triangle formé dans (A) par les barres 1,2,3 correspond dans (D) le sommet O d'où partent les segments :

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3.$$

On peut former un tableau des triangles de l'ouvrage et des points de concours correspondants dans le dynamique.

(A) triangles	(D) sommets
1.2.3	O
3.4.5	h
5.6.7	g
7.8.9	h'
9. 10.11	O

Ainsi, à chaque triangle se rapporte un point de concours des droites qui portent les tensions s'exerçant suivant les côtés de ce triangle.

Il est, dès lors, facile de construire les lignes secondaires.

Soit à déterminer τ_3 : La barre 3 fait partie du triangle 1.2.3. Le point de concours relatif à ce triangle est O, où aboutissent déjà les lignes principales τ_1 et τ_2 . D'après ce qu'on vient de voir : τ_3

doit aussi y aboutir ; donc de ce point O mener une parallèle à 3. Cette parallèle porte τ_3 .

De même pour τ_5 sommet relatif au triangle 3.4.5. est h, où se rencontrent τ_3 et τ_4 . Donc, par h on mènera une parallèle à 5. τ_5 est déterminé. Ensuite, par g, qui correspond au triangle 5.6.7, mener une parallèle à 7, ce qui donne τ_7 . Puis, par g' (triangle 7.8.9), mener la parallèle à 9, ce qui détermine τ_9 .

Enfin, le sommet relatif au triangle 9.10.11 est O, d'où partent τ_9 , τ_{10} et τ_{11} . - τ_9 et τ_{11} sont déjà déterminés. - τ_{10} doit se juxtaposer, d'une part à ca et d'autre part, elle fait partie du triangle 9.10.11 qui a pour sommet correspondant le point O, donc τ_{10} est portée par Oc ;

En résumé : Construire les lignes principales, comme il a été dit, puis considérer successivement tous les triangles qui constituent l'ouvrage. Ces triangles donnent tous les sommets du dynamique.

APPLICATIONS. - La méthode étant maintenant établie par les remarques successives faites sur une construction simple, nous pouvons nous la rendre familière par quelques applications directes.

FERME POLONCEAU A UNE BIELLE. - Le schéma (Fig. I3I) indique suffisamment la structure. Elle porte 3 charges verticales : P_1, P_2, P_3 . Numérotons les barres en parcourant l'un après l'autre les triangles contigus.

En faisant le tour de l'ouvrage on trouve, dans l'ordre, les barres principales : I, 4, 8, II, IO, 6, 2.

Formons le tableau des lignes principales et traçons-les à mesure :

Barres	Lignes pples.	Détail des opérations
I	a l	Comprise entre les forces ca et ak, elle part du point a. } parallèles Comprise entre ak et kk' part du point k } puisque Comprise entre kk' et k'b part du point k'. } confondues Comprise entre k'b et bc part du point b } dans (A)
4	k m	
8	k'm'	
II	b l'	
IO	c l'	comprises entre bc et ca partent toutes du point c.
6	c o	
2	c l	

Formons maintenant le tableau des lignes secondaires, des triangles dont elles font partie, et des points de concours qui s'y rattachent.

Triangles dans (A)	Barres	Lignes secondaires	Points de concours dans (D)
			Le point de concours est celui de
I.2.3.	3	l m	I et 2 , c. à d. l
3.4.5	5	m o	3 et 4 - m
5.6.7	7	o m'	5 et 6 - O
7.8.9	9	m'l	7 et 8 - m'

On voit que cette méthode est extrêmement rapide. Elle fournit sa propre vérification par le dernier triangle, non utilisé, et qui doit confirmer les résultats obtenus.

FERME POLONCEAU A 3 BIELLES, PORTANT 7 CHARGES VERTICALES EGALES

Fig. I31

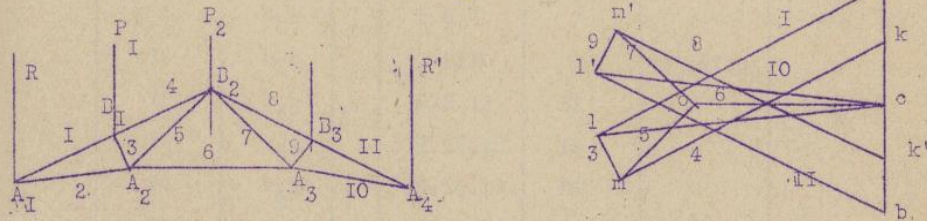
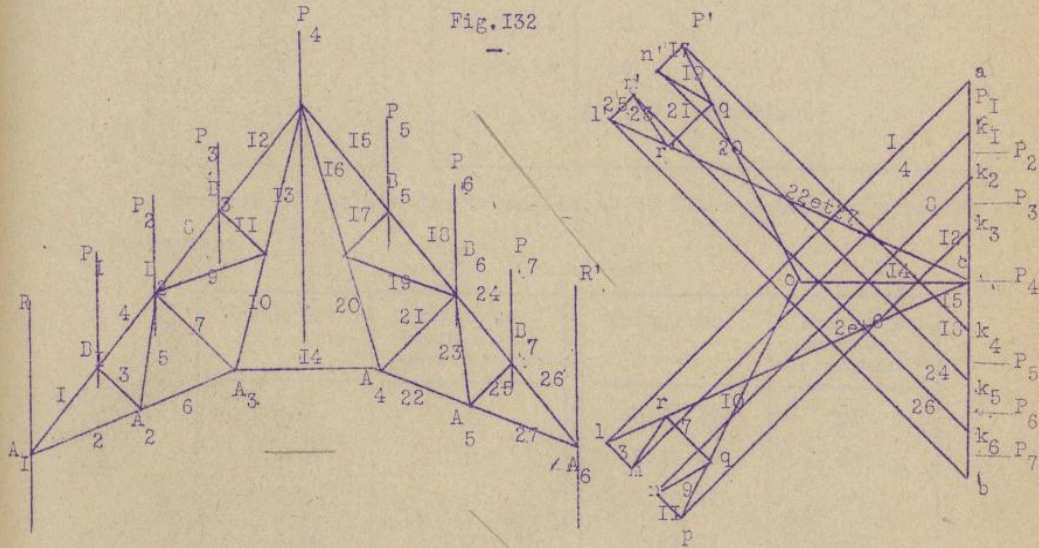


Fig. I32



On se bornera ici à la construction des figures (Fig. I32) et à l'établissement des tableaux directeurs, toutes les autres explications étant superflues si l'on a bien suivi les 2 applications précédentes.

Nous développerons cependant les parties de la construction pour lesquelles la méthode se trouve en défaut, et où il faut recourir à la méthode des moments de Ritter.

Barres	Lignes pples.	Triangles dans (A)	Barres	Point de concours dans (D)	Lignes secondaires
I	a l	I.2.3	3	l	l m
4	k ₁ m	3.4.5	5	m	m r
8	k ₂ n	5.6.7	7	r	r q
I2	k ₃ p	7.9.I0	9	en défaut	
I5	k ₄ p'	8.9.II	II	-	
I8	k ₅ n'	II.I2.I3	I3	-	
24	k ₆ m'	I5.I6.I7	I6	-	
26	b l'	I7.I8.I9	I7	-	
27	c l'	I9.20.2I	I9	-	
22		2I.22.23	2I	r'	r'q'
I4	c0	23.24.25	23	m'	m'r'
6	c l	25.26.27	25	l'	l'm'
2		A ₃ B ₄ A ₄	I0et20	en défaut	

Formons le tableau des triangles et de leurs points de concours correspondants :

Triangles	Points de concours correspondts	Triangles	Points de concours correspondts.
I.2.3	I	I5.I6.I7	p'
3.4.5	m	I7.I8.I9	n'
5.6.7	r	I9.20.2I	q'
7.9.I0	q	2I.22.23	r'
8.9.II	n	23.24.25	m'
II.I2.I3	p	I0 I3-I6 20-	
		I4	o(I)

On a ainsi tous les sommets du dynamique et, par suite, tous les segments.

Il reste à déterminer la nature des tensions ; mais on peut retrouver dans ce graphique tous les Crémona relatifs aux différents noeuds.

Par exemple : au noeud A_I, on a la charge : R = ca, et le dynamique est ca, al, lc, avec :

$$ca = R, \quad al = -\tau_I, \quad lc = +\tau_2.$$

On peut résumer tout cela dans un autre tableau :

Noeuds	Crémonas				
A_1	$\frac{ca}{R}$	$\frac{al}{-\tau_1}$	$\frac{lc}{+\tau_2}$		
B_1	$\frac{a k_1}{P_1}$	$\frac{k_1 m}{-\tau_4}$	$\frac{m l}{-\tau_3}$	$\frac{l a}{-\tau_1}$	
A_2	$\frac{c l}{+\tau_2}$	$\frac{l m}{-\tau_3}$	$\frac{m r}{+\tau_5}$	$\frac{r c}{+\tau_6}$	On part de c, car A_2 est compris entre R et R'
B_2	$\frac{k_1 k_2}{P_2}$	$\frac{k_2 n}{-\tau_8}$	$\frac{n q}{+\tau_9}$	$\frac{q r}{-\tau_7}$	$\frac{r m}{+\tau_5}$ $\frac{m k_1}{-\tau_4}$
A_3	$\frac{c r}{-\tau_6}$	$\frac{r q}{-\tau_7}$	$\frac{q o}{-\tau_{10}}$	$\frac{o c}{+\tau_{14}}$	
B_3	$\frac{k_2 k_3}{P_3}$	$\frac{k_3 p}{-\tau_{12}}$	$\frac{p n}{-\tau_{11}}$	$\frac{n k_2}{-\tau_6}$	
B_4	$\frac{k_3 k_4}{P_4}$	$\frac{k_4 p'}{-\tau_{15}}$	$\frac{p' o}{+\tau_{16}}$	$\frac{o p}{+\tau_{13}}$	$\frac{p k_3}{-\tau_{12}}$

On aurait, par symétrie, ce qui se passe dans l'autre moitié de l'ouvrage.

Remarque. - Si l'on ne tenait pas compte de la propriété des tensions s'exerçant sur les 3 côtés d'un triangle de concourir en un point sur le dynamique, il faudrait recourir à la méthode des moments de Ritter.

Appliquons cette méthode à la recherche de la tension dans la barre 9 : au noeud B_2 , on a les forces et tensions $P_2, \tau_4, \tau_5, \tau_7, \tau_9, \tau_8$ dont les trois dernières sont inconnues.

Mais on peut faire (Fig. I33) une section coupant les barres 8,9,10 et considérer :

1°) les moments par rapport au sommet B_4 , de toutes les forces extérieures comprises entre cette section et le sommet B_4 ,

2°) les moments, par rapport au même point, des forces faisant équilibre aux tensions qui s'exercent dans les barres coupées. Ici, les moments des

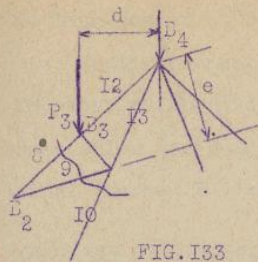


FIG. I.33

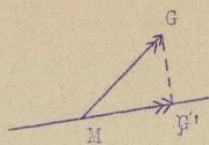


FIG. I.34

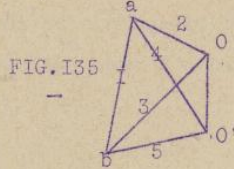
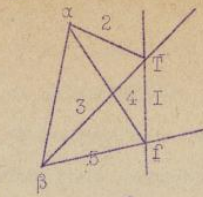


FIG. I.35

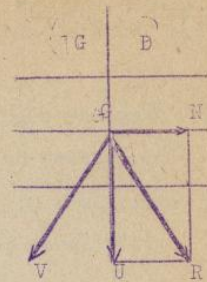


FIG. I.36

forces extérieures se réduisent à celui de P_3 (P_4 passe par le point B_4), qui est connu, c'est $d.P_3$; - ceux des tensions τ_8 et τ_{10} sont nuls, seul le moment de τ_9 ne l'est pas, mais la distance e est connue. Or, il doit y avoir équilibre entre le moment des forces extérieures et les moments des tensions, donc :

$$d.P_3 = e. \tau_9$$

$$\text{d'où } \tau_9 = \frac{d. P_3}{e}$$

Il ne reste alors que 2 tensions inconnues et l'on peut revenir à la méthode de Maxwell-Crémona.

RELATIONS ENTRE LES FIGURES RECIPROQUES

On a vu, à propos de l'étude des dynames, qu'à une droite d correspond une autre droite δ , ces 2 droites étant telles que le dymame puisse être réduit à 2 forces portées par d et δ .

Rappelons aussi que :

Le dymame peut se réduire à une force et à un couple, et que le moment de ce couple par rapport à un point se représente par un vecteur MG issu de ce point. Le moment du couple, par rapport à une droite passant par le point M est la projection MG' de MG sur cette droite (Fig. I.34). Les droites de moment nul sont celles pour lesquelles MG' est nul, ce qui entraîne que MG soit normal à la droite. Il s'ensuit que le lieu des droites de moment nul est le plan normal en M au vecteur - moment MG . Ce plan est le plan polaire du point M , et réciproquement, M est le pôle de ce plan. D'autre part, δ est le lieu des pôles des plans passant par d , et si une droite ξ coupe d et δ , c'est une droite de moment nul ; donc le plan décrit par cette droite ξ est le plan polaire du point M .

Si 2 droites sont concourantes, elles ont pour conjuguées 2 droites concourantes.

A trois droites formant trièdre, il correspond dans le plan polaire Π de leur sommet O, 3 droites a, b, c formant un triangle.

Réciproquement : si l'on a une surface polyédrale constituée par des facettes triangulaires, à chacune de ces facettes correspond un trièdre. On sait enfin que : si l'on projette deux droites conjuguées sur un plan principal (normal à l'axe central), ces projections sont 2 droites parallèles.

THEOREME DE CREMONA

D'après cela, on peut considérer la figure formée par un système triangulé (A) et son dynamique (D), sous l'aspect suivant : (A) est la projection sur le plan du dessin pris comme plan principal, d'une figure polyédrale A' de l'espace, à facettes triangulaires, et (D) est la projection, sur le même plan, d'une figure D' de l'espace, conjuguée de A'.

Ainsi, dans la figure D, on a un ensemble de segments formés par les droites conjuguées de la première figure. On peut donc, en réglant d'une façon convenable le système A, s'arranger pour que certaines des droites soient les lignes d'action des forces extérieures, et il se trouve que dans la figure D les segments représentent les tensions s'exerçant suivant les barres de A auxquelles ces segments sont parallèles.

Nous admettrons ici ce théorème qui est utile pour les procédés commo-
des de dessin qu'il introduit, notamment par la remarque que les forces ^{agissant} sui-
vant les côtés d'un triangle sont figurées par des segments concourants du
dynamique.

Le théorème de Crémone éclaire d'une façon particulière les constructions précédentes (Maxwell-Crémona) : Supposons que les droites de l'espace : R, P'_1, P'_2, \dots , dont R, P_1, P_2, \dots , sont les projections, soient parallèles dans l'espace. On sait que : les conjuguées de droites parallèles sont dans un même plan parallèle à l'axe central, de sorte que, en projection sur le plan principal, toutes ces droites conjuguées coïncident : c'est pourquoi toutes les formes sont superposées sur la souche ab, quand elles sont parallèles dans l'espace.

D'autre part, aux droites d'un triangle (A) (formant une facette) il doit correspondre un trièdre dont le sommet est le pôle du plan, et dont les projections sont 3 droites concourantes.

Par exemple, le point 1 est la projection d'un trièdre dont les arêtes sont les réciproques des côtés 1. 2. 3 de la figure A. En particulier (Fig. I35) : si l'on trace le funiculaire et le dynamique d'une force, avec un pôle O, on a

vu que si l'on prend un autre pôle O' , les côtés extrêmes α et β se coupent sur une parallèle à OO' . On remarque que le funiculaire peut être considéré comme la projection d'un tétraèdre T de l'espace, et le dynamique comme la projection d'un autre tétraèdre O_I , formé par les droites conjuguées de T .

Il en résulte que les lignes homologues des 2 figures sur le plan principal seront parallèles.

Les côtés du funiculaire sont, par construction, parallèles aux rayons polaires; ab est aussi, par construction, parallèle à la force f . Donc, les côtés restants: $\alpha\beta$ et OO' doivent être parallèles.

Remarque - On a vu en statique que le paramètre d'un dynamisme est, si l'on fait la réduction canonique: $h = \frac{OG}{OR}$ si l'on changeait R , on multiplierait toutes les forces du dynamisme par un même nombre, mais les lignes conjuguées resteraient invariables. Donc, R n'intervient pas dans la conception du dynamisme, qui ne dépend que de son pas: h .

Si l'on changeait h , toutes les projections sur le plan se transformeraient par homothétie, et seule l'échelle du dessin serait différente.

FORCES ELASTIQUES DANS LES PIÈCES CHARGÉES

On appelle généralement poutre, tout prisme homogène dont les dimensions longitudinales sont très grandes par rapport à ses dimensions transversales, possédant un plan de symétrie; on suppose, de plus, cet ouvrage soumis à des efforts symétriques 2 à 2 par rapport à ce plan. Cette dernière condition étant remplie, 2 forces symétriques ont une résultante dans le plan de symétrie, et l'ensemble de forces/complanées situées dans le plan de symétrie. On peut aussi considérer la poutre comme un solide engendré par une section plane normale aux génératrices. Plus généralement, si un profil plan, de diamètre relativement faible, de grandeur constante, se déplace de manière que son centre de gravité décrive une courbe gauche à laquelle son plan reste normal, ce profil engendre une certaine surface qui limite un solide. C'est la définition la plus générale de la poutre en arc.

POUTRE RECTILIGNE

On la suppose en équilibre sous l'influence des charges et des réactions; mais elle peut subir des déformations, toujours extrêmement faibles, mais pouvant cependant être décelées au moyen de certains instruments de précision.

Ces déformations sont de ^{deux} trois natures:

1°) si elles cessent en même temps que l'action des forces, le corps reprend son état primitif. On dit alors que les déformations sont élastiques.

2°) si, au contraire, les déformations subsistent après enlèvement des charges, elles sont dites : permanentes.

Dans ce cas, il faut remarquer qu'une fraction seulement de la déformation totale persiste après cessation des efforts : la déformation élastique disparaît. Si l'on applique à nouveau les mêmes forces, il se produit de nouvelles déformations, élastiques et permanentes, mais la marge de ces dernières est plus petite qu'avant l'application primitive.

Le but de la résistance des matériaux est de calculer les pièces de telle sorte que les déformations permanentes ne soient jamais atteintes.

CONDITIONS D'EQUILIBRE (FIG.136)

Coupons une poutre par un plan normal aux génératrices, et considérons les forces agissant sur la partie de gauche de la section : elles sont réductibles à une force unique GR, pouvant être appliquée au centre de gravité de la section, et à un couple dont l'axe GV est normal au plan de symétrie, puis-que toutes les forces sont dans ce plan.

La force GR située dans le plan de symétrie, peut être décomposée suivant la normale N à la section, et suivant la perpendiculaire U à cette normale dans le plan de symétrie.

La composante GN est l'effort normal
 GU — l'effort tranchant } Dans la section faite par un plan normal issu de G.

L'axe GV du couple est le moment fléchissant.

L'effort normal peut avoir 2 effets différents :

s'il est dirigé vers la droite, c'est un effort de traction,
 gauche ————— compression.

Ainsi : FF' F''... étant les forces qui s'exercent sur la partie à gauche de la section :

$$\begin{aligned} N &= \sum \text{proj}_N F + \dots \\ T &= \sum \text{proj}_U F + \dots \\ M &= \sum \mathcal{M}_V^t F + \dots \end{aligned}$$

LOI DE HOOKE - MODULE D'YOUNG

On fait l'hypothèse suivante, de Bernoulli :

Si l'on prend une section droite dont le centre de gravité décrit la ligne moyenne, le lieu de ce centre de gravité reste, après déformation, une courbe à laquelle la section considérée reste normale.

Autrement dit, les molécules constituant cette section en font encore partie après déformation, et cette section reste normale à la courbe déformée.

Soit donc une section ω_0 , dont g_0 est le centre de gravité. On peut prendre un système de coordonnées ayant g_0 pour origine, et dont les axes soient dirigés respectivement suivant N, U et V.

Considérons une section voisine : ω_I de centre de gravité g_I , et 2 points : m_0 et m_I , situés sur une même parallèle aux génératrices (Fig. I37).

Fig. I37

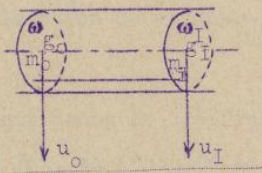
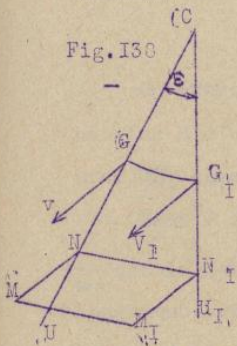


Fig. I38



Après déformation (Fig. I38) $\xi_0 \xi_I$ a pris une forme incurvée GG_I , (on a amplifié la figure pour rendre le dessin plus net), les axes $g_0 u_0$ et $g_I u_I$, devenus GU et $G_I U_I$ se coupent en C, et les perpendiculaires au plan de symétrie sont GV et $G_I V_I$. Enfin, les points M et M_I sont ce que deviennent m_0 et m_I après déformation. Menons de M et M_I les perpendiculaires MN et $M_I N_I$; - on forme ainsi un rectangle : $MN N_I M_I$, donc M et M_I ont les mêmes coordonnées (u,v), dans les 2 sections.

Cherchons l'expression de l'allongement spécifique (allongement par unité de longueur), pour un élément $m_0 m_I$ quelconque. Posons :

$$\xi_0 \xi_I = \xi,$$

Après déformation, cette longueur est devenue : GG_I , donc :

$$GG_I - \xi_0 \xi_I = GG_I - \xi = \text{allongement},$$

et, par unité de longueur :

$$\frac{GG_I - \xi}{\xi} =$$

cela pour la ligne moyenne.

Les sections étant parallèles avant déformation :

$$m_0 m_I = \xi_0 \xi_I = \xi,$$

et on a de même l'allongement spécifique de MM_I :

$$\frac{MM_I - \xi}{\xi} = \lambda = \frac{NN_I - \xi}{\xi}$$

Faisons la différence

$$\lambda - \lambda = \frac{NN_I - GG_I}{\xi}$$

Après déformation, les 2 sections ω_0 et ω_I forment un angle ϵ très petit. En raison de la faible distance des 2 sections, la corde NN_I peut être confondue avec l'arc de cercle de centre C et de rayon CN,

$$NN_I = \epsilon \times CN, \text{ et}$$

$$\Lambda - \lambda = \frac{\epsilon (CN - GG)}{\xi}$$

Or, $CN - GG = GN =$ ordonnée du point $M = u,$

donc :

$$\Lambda - \lambda = \frac{\epsilon}{\xi} u \quad \frac{I}{R}$$

Mais $\frac{\epsilon}{\xi} =$ rapport de l'angle de contingence à l'arc est la courbure et R est le rayon de courbure, donc :

$$\Lambda - \lambda = \frac{u}{R}$$

qui donne le coefficient de dilatation longitudinale :

Λ , en fonction de celui de la ligne moyenne :

$$\Lambda = \lambda + \frac{u}{R}$$

On exprime généralement ce résultat sous une forme plus concrète : entourons M d'un élément de section ω , et considérons le petit prisme formé avec MM_I comme axé. C'est une fibre.

Soit P la charge supposée uniformément répartie qui agit sur cette fibre, $\frac{P}{\omega}$ est la tension par unité de surface. Si l est sa longueur, δl est son allongement, et $\frac{\delta l}{l}$ son allongement spécifique.

Entre ces 2 quantités (tension et allongement spécifiques), il existe une relation (Loi de HOOKE) :

$$\frac{P}{\omega} = E \frac{\delta l}{l},$$

qui exprime la proportionnalité des allongements aux charges. E s'appelle module d'élasticité (module d'YOUNG). C'est un nombre considérable, car si l'on supposait $\frac{\delta l}{l} = 1$ (ce qui signifierait que la longueur de la fibre a été doublée) et $E = \frac{P}{\omega}$ serait précisément la charge par unité de surface capable de doubler la longueur de la tige. Mais cela est purement fictif, car la pièce serait rompue depuis fort longtemps.

Si l'on reprend la formule $\Lambda = \lambda + \frac{u}{R}$, on peut écrire, Λ et λ étant des allongements spécifiques :

$$\frac{\delta l}{l} = \Lambda = \frac{P}{\omega} \cdot \frac{I}{E}.$$

si : $p = \frac{P}{\omega}$ est la relation entre l'allongement et la charge spécifique qui produit cet allongement, on a :

$$p = E \left(\lambda + \frac{u}{R} \right),$$

qui est la relation entre l'allongement et la charge spécifique qui le produit.

Pour $u = 0$, on a la charge au centre de gravité.

Pour $u > 0$, la fibre est au-dessous de la fibre moyenne. Donc, dans toute la partie située au-dessous du centre de gravité, u est positif et les charges sont plus grandes qu'au centre de gravité.

Au contraire, dans toute la partie au-dessus du centre de gravité, u est négatif. Si u , étant négatif, $\lambda + \frac{u}{R}$ est aussi négatif, les fibres sont comprimées au lieu d'être tendues.

CAS PARTICULIER DE LA FLEXION SIMPLE

On supposera que toutes les forces appliquées sont dans un même plan et normales à la ligne moyenne. Les réactions seront, elles aussi, normales à cette même ligne, et la composante horizontale N sera nulle, de sorte que les forces se réduiront à l'effort tranchant T et au moment fléchissant M .

On peut analyser les efforts moléculaires que la partie de droite de la poutre exerce sur la section Ω (Fig. I39).

Cette section peut être regardée comme étant composée d'éléments d'aire ω , infiniment petits, sur chacun desquels s'exerce un effort. Ce sont tous ces efforts moléculaires qui doivent équilibrer N, T et M (mais N est ici nul). Considérons un de ces éléments ω entourant un point m de la section (Fig. I40) sur cet élément s'exerce une force $F \omega$, proportionnelle à son aire, F étant une force spécifique.

Décomposons $F \omega$ suivant les 3 axes perpendiculaires : Gx, Gu, Gv . Ces trois composantes sont :

$$X \omega, \quad X_u \omega, \quad X_v \omega :$$

et leurs sommes doivent équilibrer séparément les 3 composantes des forces appliquées, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} M + \sum X \omega &= 0 \\ T + \sum X_u \omega &= 0 \\ 0 + \sum X_v \omega &= 0. \end{aligned}$$

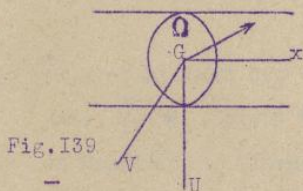


Fig. I39

En remarquant que la composante suivant Gv est nulle, puisque toutes les forces sont dans le plan vertical Gx, Gu . D'autre part, toutes les actions moléculaires sont symétriques par rapport à ce plan, et la dernière équation devient évidente.

Il faut exprimer aussi l'équilibre des moments : Les forces agissant dans le plan Gx, Gu , les moments par rapport à Gx et Gu sont nuls, et il ne reste à considérer que les moments par rapport à Gv . On doit donc avoir : $0 = M + \sum$

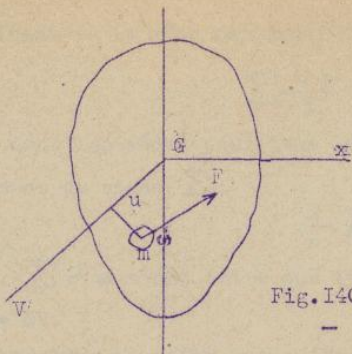


Fig. I40

des moments de toutes les actions moléculaires par rapport à GV. L'une quelconque de ces actions : $F \omega$, a bien aussi 3 composantes, mais seule la composante $X \omega$ suivant la parallèle à Gx a un moment qui n'est pas nul. Le bras de levier de $X \omega$ est donc :

$$M + \sum X \omega u = 0,$$

ce qui fait 4 équations d'équilibre. Ici, N est nul, et ces équations se réduisent à :

$$\begin{array}{l|l} \sum X \omega = 0 & (1) \quad \left| \quad \sum X_u \omega = -T. \quad (3) \right. \\ \sum X_v \omega = 0 & (2) \quad \left| \quad \sum X \omega u = -M \quad (4) \right. \end{array}$$

Cherchons X :

C'est une composante parallèle à Gx , elle agit dans le sens de la fibre et ce n'est pas autre chose que la force spécifique p de la loi de Hooke, donc :

$$X = E \left(\lambda + \frac{u}{R} \right), \quad (5)$$

ce qui exprime la relation entre X et λ .

Remplaçons X dans l'équation (1) :

$$\sum E \left(\lambda + \frac{u}{R} \right) \omega = 0,$$

ou, en développant :

$$E \lambda \sum \omega + \frac{E}{R} \sum u = 0$$

(E, R et λ étant des constantes).

Mais, $\sum \omega$, c'est Ω , et, d'autre part : $\sum \omega u$ n'est autre que Ωu_G , en appelant u_G l'ordonnée du centre de gravité de la section. Or, u_G est nul, puisque l'on a pris le centre de gravité comme origine, donc :

$$\sum \omega u = 0, \text{ et il reste :}$$

$$E \lambda \Omega = 0.$$

n' pas
 E est nul, Ω non plus, c'est donc λ qui est nul. Ainsi, dans les conditions du problème, vue la perpendicularité des charges et des réactions sur la fibre moyenne, celle-ci n'éprouve ni allongement ni raccourcissement. On lui donne pour cette raison le nom de fibre neutre. Cette conséquence est liée directement à la condition que N soit nul. Sous le bénéfice de cette restriction, l'équation (5) se réduit à :

$$X = E \frac{u}{R}$$

En traitant de la même manière l'équation (4), on a :

$$\sum \frac{E u}{R} u \omega = - M$$

E et R sont les mêmes pour tous les éléments, et l'on peut faire sortir ces 2 facteurs du signe \sum :

$$\frac{E}{R} \sum u^2 \omega .$$

Mais : $\sum u^2 \omega$ n'est autre que le moment d'inertie I de l'aire Ω par rapport à l'axe GV.

Rappelons en effet que : (Fig. I4I) si l'on considère un axe z et une masse m à une distance u de cet axe, par définition : $m u^2$ est le moment d'inertie de cette masse par rapport à l'axe z . Cette notion s'étend aisément à toute l'aire Ω , en attribuant à chaque élément ω , une masse proportionnelle à sa surface. Cela s'exprime par :

$$I = \sum u^2 \omega .$$

La section étant constante, cette expression est évidemment la même pour tous les points de la poutre, et l'équation (4) devient finalement : $\frac{EI}{R} = - M$, ou encore :

$$\frac{I}{R} = - \frac{M}{EI} \quad (6).$$

On a considéré jusqu'ici la section Ω sans se préoccuper de sa position par rapport aux extrémités de la poutre. Si maintenant on se donne la distance x de cette section à l'un des appuis, l'état des forces appliquées se trouve déterminé, pour la section envisagée. Il est alors possible d'en déduire la courbure de la ligne moyenne ainsi que la charge spécifique d'une fibre quelconque.

De la formule : $\Lambda = \frac{u}{R}$, on peut exprimer, en remplaçant $\frac{I}{R}$ par sa valeur :

$$\Lambda = - \frac{M u}{E I} ,$$

ce qui exprime la déformation spécifique (allongement ou raccourcissement) de la fibre passant par le point m. On avait aussi :

$$X = \frac{E u}{R} = E \Lambda , \quad \text{ou} : \Lambda = \frac{X}{E}$$

d'où, en remplaçant Λ dans l'équation précédente :

$$\frac{X}{E} = - \frac{M u}{E I}$$

$X = - \frac{M u}{I}$ donne, pour une fibre quelconque, la charge spécifique agissant dans le sens de cette fibre.

C'est l'équation d'équarissage.

DETERMINATION DE LA COURBE ELASTIQUE ET CALCUL DES FLECHES

La courbe élastique est celle que prend la fibre moyenne sous l'effet des charges. Sa courbure est toujours très faible. On a souvent besoin de connaître la flèche de cette courbe, c'est-à-dire la déformation maximum.

Il suffit, pour la déterminer, d'intégrer l'équation (6). Pour cela, considérons la tangente en un point quelconque M de la courbe (Fig. 142) (x,y) étant ses coordonnées courantes : on a :

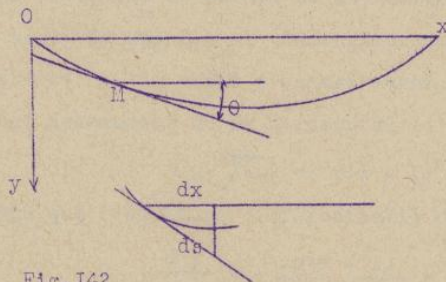


Fig. 142

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx},$$

dont la dérivée, par rapport à x, est

$$\frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

ou :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} \cos^2 \theta$$

ou encore :

$$d\theta = \frac{d^2 y}{dx^2} \cos^2 \theta dx$$

si l'on désigne par s la longueur de l'arc de courbe, et par ds sa différentielle, on a, en divisant par ds dans les 2 membres :

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2 y}{dx^2} \cos^2 \theta \frac{dx}{ds}$$

Or, dx est la projection sur l'axe Ox d'un élément infiniment petit : ds, de l'arc, qui peut être confondu avec sa tangente, de sorte que :

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta,$$

d'autre part,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R},$$

On a donc, en remplaçant :

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2 y}{dx^2} \cos^3 \theta = \frac{1}{R}$$

Comme la courbe s'écarte très peu de la ligne droite, theta est très petit et cos theta est très voisin de l'unité ; - cos^3 theta aussi, et l'on peut, avec une approximation suffisante, écrire :

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2},$$

et, en remplaçant $\frac{1}{R}$ par sa valeur tirée de (6) :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{EI}$$

Donc l'ordonnée y de la courbe en un point quelconque est une fonction de x , dont la dérivée seconde est $-\frac{M}{EI}$. En intégrant 2 fois cette équation, on aura y .

FLEXION SIMPLE - APPLICATIONS

POUTRE DROITE ENCASTREE, CHARGEE A SON EXTREMITÉ

Les forces extérieures se réduisent à la force verticale d'appui qui est égale et de sens contraire à la charge P et le couple d'encastrement égal et de sens contraire au moment de la charge extrême. On néglige le poids propre de la tige. On appelle l la longueur de la tige. On trouve que au point G à la distance x du point d'encastrement, le moment fléchissant est (oy étant vertical descendant et ox horizontal) :

$$\mathcal{M} = p(x - l) ,$$

en sorte que l'équation différentielle de l'élastique

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{p(x - l)}{EI} = \frac{-px}{EI} + \frac{pl}{EI}$$

d'où, en intégrant une première fois :

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{px^2}{2EI} x + c + \frac{pl}{EI} x$$

Mais au point origine, $\frac{dy}{dx}$ est nul avec x , donc $c = 0$ et il reste :

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{px^2}{2EI} + \frac{pl}{EI} x.$$

Intégrons une fois de plus, il vient, en prenant encore une fois la constante nulle car y est nul avec x :

$$y = - \frac{p x^3}{6 EI} + \frac{pl}{2 EI} x^2 .$$

Comme x est positif et moindre que l , la dérivée de y , qui peut s'écrire :

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{px}{2 EI} (x - 2 l)$$

est toujours positive, la courbe élastique ne cess pas de s'incliner vers le bas (Fig. I43).

La flèche de la courbe, c'est-à-dire son plus grand écart de l'horizontale sera obtenue pour $x = l$ et on aura :

$$f = LB = \frac{pl^3}{3EI}$$

La pente de la tangente en ce point est égale à $\frac{pl^2}{2EI}$. Par contre y'' est nul en ce point, en sorte que la courbe élastique prolongée aurait en B une inflexion.

Remarque - On a trouvé pour le moment fléchissant :

$$\mathcal{M} = p(x - l)$$

on a du reste pour l'effort tranchant :

$$T = -p,$$

car l'effet tranchant est de 0 en B égal à la réaction au point 0 d'encastrement, donc à -p. On peut remarquer alors que :

$$d\mathcal{M} = p = -T.$$

DEMONSTRATION D'UNE FORMULE GENERALE

Cette propriété n'est pas spéciale au cas que l'on vient de traduire.

Soit F_I une charge où une réaction verticale appliquée en un point P_I de coordonnées x_I, y_I et de projection X_I, Y_I sur les axes de coordonnées, d'un moment par rapport au point P de coordonnées x, y on a :

$$(x_I - x) Y_I - (y_I - y) X_I,$$

mais ici, on a : $y = 0$ puisque P est un des centres de gravité de la section, il reste donc :

$$(x_I - x) Y_I - y_I X_I$$

Si l'on a ainsi des charges en réaction isolées à gauche de P_I on aura pour le moment fléchissant :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sum (x_I - x) Y_I - y_I X_I \\ &= \sum (x_I Y_I - y_I X_I) - x \sum Y_I \end{aligned}$$

$\mathcal{M}_0 = \sum (x_I Y_I - y_I X_I)$ est le moment à l'origine et, d'autre part

$$T = \sum Y_I$$

est l'effort tranchant, on a donc :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 - Tx,$$

d'où résulte

$$\frac{d\mathcal{M}}{dx} = -T.$$

Nous généralisons encore plus tard cette propriété dans le cas des charges réparties.

REPRESENTATION DES MOMENTS AU MOYEN DU FUNICULAIRE

Construisons un funiculaire des charges et réactions (Fig. I44) $\alpha, m_1, m_2, m_3, m_4, \beta$. Menons par le pôle 0 la parallèle à $\alpha\beta$, elle détermine les réactions ca et bc. Abaissons du pôle 0 la perpendiculaire oh à ab, elle permet d'écrire la valeur pq.ch du moment fléchissant en un point G, pq étant le segment intercepté sur la verticale de G, par les côtés du funiculaire :

$$M_G = \overline{pq} \times \overline{ch} .$$

En effet, à toutes les forces agissant à gauche de G, correspondent des côtés du funiculaire et p, q sont les intersections avec les côtés extrêmes du funiculaire partiel relatif à ces forces.

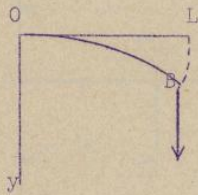


Fig. I43

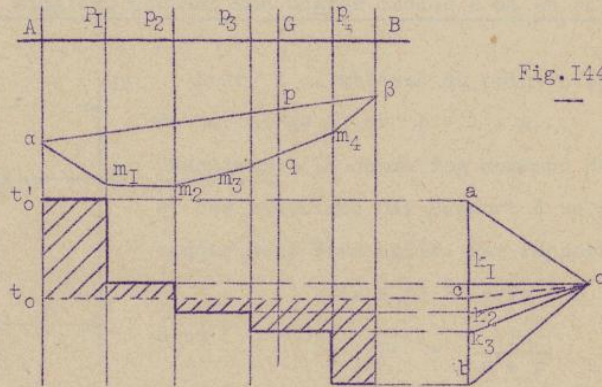


Fig. I44

REPRESENTATION ANALOGUE DE L'EFFORT TRANCHANT

On peut aussi trouver graphiquement l'effort tranchant (Fig. I44) : c'est la somme des forces (charges ou réactions) agissant à gauche du point considéré. En partant de A, on a : la réaction ca et les forces P_1, P_2, \dots . Menons par c une horizontale jusqu'à sa rencontre avec les verticales qui portent les charges. Entre A et P_1 , l'effort tranchant sera représenté en chaque point par un vecteur de longueur constante, puisqu'il n'y a pas de forces entre ces 2 points. Ce vecteur est égal à la somme des forces : R_A , c'est-à-dire à $t_0 t'_0$.

De même entre les autres forces.

Pour un point G quelconque, l'effort tranchant est représenté par le segment compris entre l'horizontale de c et l'horizontale correspondant à la charge précédente.

Remarque. M n'est ici une fonction continue de x qu'entre 2 charges, par exemple P_1 et P_2 , mais quand on a traversé P_2 , l'expression analytique n'est plus la même qu'entre P_1 et P_2 . L'expression du moment à gauche de P_2 est la suivante :

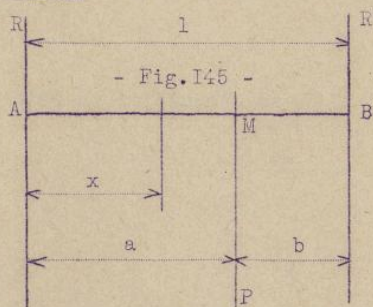
$$M = \sum x_1 Y_1 - x \sum Y_1 .$$

Après P_2 , il faut ajouter des termes correspondant aux charges nouvelles rencontrées. Donc, M est une fonction discontinue de x et si l'on intègre l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{EI} ,$$

on trouve pour la courbe intégrale une certaine forme de courbe entre p_1 et p_2 , et une autre forme entre p_2 et p_3 , etc., avec chaque fois une constante d'intégration différente. Mais il faut évidemment que 2 éléments contigus de la courbe élastique se raccordent, c'est-à-dire aient un point commun et une tangente commune. Cette condition doit suffire à déterminer les constantes d'intégration. On traitera en particulier le cas simple suivant :

Poutre sur 2 appuis simples, portant une charge isolée P en un point quelconque (Fig. I45).



Soit a l'abscisse du point d'application de la charge P , et $b = l - a$.

Réactions. - La somme des moments des forces et des réactions par rapport à un point quelconque doit être nulle. Par rapport à A, on a :

$$-(a + b) R' + Pa = 0,$$

d'où

$$R' = \frac{Pa}{a + b}$$

On calcule de même :

$$R = \frac{Pb}{a + b}$$

Effort tranchant. 1° à gauche de P :

$$T_G = R = \frac{Pb}{a + b}$$

2°) à droite de P :

$$T_D = R - P = \frac{Pb}{a + b} - P = -\frac{Pa}{a + b}$$

Moment fléchissant. 1°) à gauche de P :

on a toujours :

$$\frac{dM}{dx} = R \text{ et } M = Rx - C.$$

et pour $x = 0$, le moment est nul et : $C = 0$, donc :

$$M_G = \frac{Pb}{a + b} x$$

2°) à droite de P :

$$\frac{dM}{dx} = R - P \text{ et } M = (R - P)x + C'.$$

au point B, $x = a + b = l$, le moment est nul, on a donc :

$$0 = (a + l)(R - P) + C' \text{ d'où } : C' = Pa,$$

puis le moment à droite est égal à

$$M_D = -\frac{Pa}{a + b} x + Pa = Pa\left(1 - \frac{x}{a + b}\right)$$

Il est alors facile d'écrire les équations élastiques de gauche et de droite.

A gauche de la charge P, l'élastique a pour équation

$$y'' = -\frac{P}{EI} - \frac{T}{a+b} x$$

d'où en intégrant et en désignant par K et K' deux constantes arbitraires

$$y' = -\frac{Px}{2EI} - \frac{T}{a+b} x^2 + K,$$

$$y = -\frac{Px^2}{6EI} - \frac{T}{a+b} x^3 + Kx + K'.$$

De même à droite de la charge P, l'élastique a pour équation

$$y''_I = -\frac{Pa}{EI} \left(1 - \frac{x}{a+b}\right)$$

d'où en intégrant, et K_I, K'_I désignant deux constantes arbitraires :

$$y'_I = -\frac{Pa}{EI} \left(x - \frac{x^2}{2(a+b)}\right) + K_I,$$

$$y_I = -\frac{Pa}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6(a+b)}\right) + K_I x + K'_I.$$

Il faut exprimer que l'élastique de gauche passe au point A ($x = 0, y = 0$) ce qui montre que $K' = 0$. Il faut ensuite que y', y'_I soient égaux à l'aplomb de la charge, c'est-à-dire pour $x = a$, et de même pour $x = 0$, on doit avoir $y = y_I$.

Enfin, l'élastique de droite passe au second point d'appui par lequel $x = a + b$. Cela fait 4 équations linéaires qui déterminent K, K', K_I, K'_I .

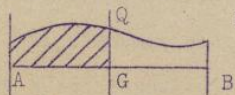
Le calcul n'offre aucune difficulté, on trouve :

$$K = \frac{Pa}{6EI} \frac{-5a^2 + ab + 2b^2}{a+b} \quad K' = 0.$$

$$K_I = \frac{Pa}{3EI} \frac{-a^2 + 2ab + b^2}{a+b} \quad K'_I = -\frac{2Pa^3}{3EI}$$

CHARGES REPARTIES

Supposons sur une poutre droite horizontale, une couche de sable répartie sous une épaisseur variable dans le sens longitudinal. Sur une étendue longitudinale dx , la charge de sable présente un poids q, dx où q représente la charge par unité de longueur. Si q est constant, on dit que la charge est uniformément répartie. On peut représenter q par une verticale GQ de longueur q . Le lieu du point Q est une ligne appelée courbe de charge. Cette ligne est une horizontale dans le cas d'une charge uniforme (Fig. I46). On remarque



F. I46

que l'aire comprise entre la courbe et la droite AG représente la charge totale sur la partie de

la poutre qui est à gauche du point G. Dans le dynamique, cette charge sera représentée par le vecteur ag, qui contient autant d'unités de longueur que l'aire en question contient de carrés correspondant à l'unité de charge (Fig. I47). De même gb représentera l'aire située à droite de G, de sorte que ab

Fig. I47
 —
 a figurera la charge totale, c'est-à-dire la somme de toutes les charges q dx. Pratiquement, on obtiendra cette représentation graphique en divisant la longueur AB = l en n parties, égales ou non, et en menant, par les points de division, des verticales qui décomposeront la surface totale en n trapèzes. Si l'on suppose alors que la charge représentée par chacun de ces trapèzes est concentrée à son Cg, on peut construire le dynamique et un funiculaire de ces charges isolées. Quand n tendra vers l'infini, le polygone funiculaire ainsi construit deviendra une courbe funiculaire. Si m est le point où la verticale de G rencontre le funiculaire, le côté passant par m est parallèle au rayon polaire Og, et, à la limite, ce côté se confond avec la tangente à la courbe funiculaire (Fig. I48).

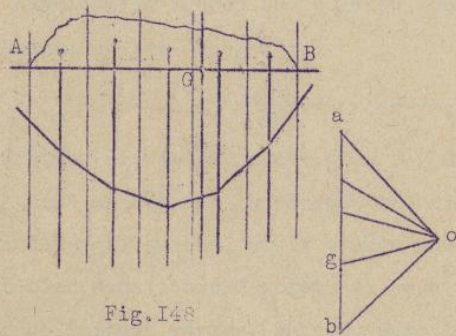


Fig. I48

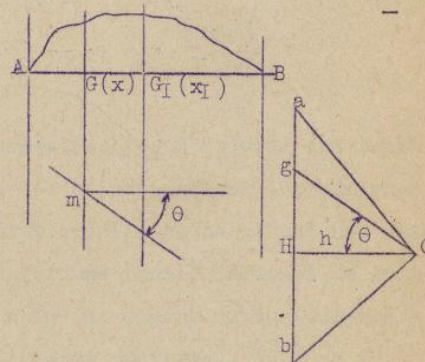


Fig. I49

Toutes les courbes funiculaires jouiront évidemment de cette propriété. Remarquons alors que si l'on mène par o et par m des horizontales, l'angle θ se retrouve sur le funiculaire et le dynamique (Fig. I49), donc :

$$\text{tg } \theta = \frac{Hg}{h}$$

Or, Hg est une charge relative à un certain point G_I d'abscisse x_I , car : ag représente sur le dynamique la charge $\int_0^x q dx$, à gauche de G, aH représente sur le dynamique la charge $\int_0^{x_I} q dx$, à gauche de G_I .

Il s'ensuit que : $Hg = aH - ag$, représente la charge comprise entre G et G_I , c'est-à-dire :

$$\int_0^x q dx - \int_0^{x_I} q dx = \int_x^{x_I} q dx,$$

donc :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\int_x^{x_I} q \, dx}{h} .$$

Mais $\operatorname{tg} \theta$ est la pente de la tangente à la courbe, c'est sa dérivée, et :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\int_x^{x_I} q \, dx}{h} .$$

Dérivons cela ; on sait que si l'on a une fonction : $F(X) = \int_0^X f(x) \, dx$, sa dérivée est $\frac{d}{dx} F(X) = f(X)$.

Ici, l'on a :

$$F(x_I) = \int_x^{x_I} q \, dx ,$$

et :

$$\frac{d}{dx} F(x_I) = f(x_I) = q(x) ,$$

donc :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{q(x)}{h} .$$

On avait obtenu, pour les charges isolées :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{EI} .$$

On voit donc que la courbe funiculaire ainsi tracée est la courbe élastique que produiraient les charges :

$$- \frac{q(x)}{h} = - \frac{M}{EI} ,$$

et le problème se ramène, comme pour les charges isolées à trouver une fonction y dont on connaît la dérivée seconde. Ces 2 intégrations introduiront 2 constantes arbitraires, et il y aura une double infinité de solutions. Mais cela est bien dans l'ordre puisqu'on peut tracer une double infinité de funiculaires en faisant varier, soit O , soit le point de départ du funiculaire.

Exemple - En particulier, si q est constant (charge uniforme), on a :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{q}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{qx}{h} + C$$

$$y = - \frac{q x^2}{h 2} + Cx + C' .$$

C'est une parabole, dont les branches infinies sont tournées vers les y négatifs (Fig.150).

Réactions d'appuis. Supposons que l'on ait construit, soit par la statique graphique, soit par l'analyse, la courbe funiculaire $\alpha\beta$. Les réactions se déterminent comme pour les charges isolées, en fermant le polygone funiculaire

par une droite joignant α et β (ligne de fermeture), et en menant par O une parallèle oc à $\alpha\beta$. ca et bc sont encore les réactions. On a bien le polygone fermé : ca, ab, bc, ab étant la somme des charges continues.

EFFORT TRANCHANT ET MOMENT FLECHISSANT

FORMULE GENERALE

L'effort tranchant est la somme des charges qui s'exercent au point A à gauche du point G d'abscisse x . La réaction est verticale et ascendante, donc négative, tandis que la somme des charges, verticales descendantes est

$$\int_0^x q d\xi$$

(ξ étant le point d'application de la charge $q d\xi$).

On a donc, pour l'effort tranchant :

$$T = -R + \int_0^x q d\xi.$$

Pour le calcul des moments par rapport au point G d'abscisse x , nous partons de somme $(x_I - x)Y_I$, ou Y_I est la charge appliquée en x_I . Pour la réaction, on aura $Y_I = -R$ et $x_I = 0$, donc : Rx est le moment de la réaction.

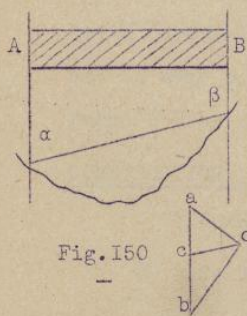


Fig. 150

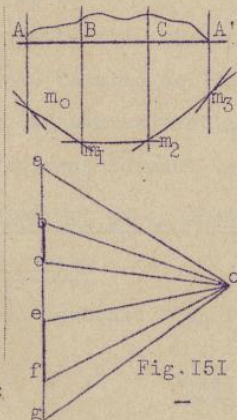


Fig. 151

Pour la charge $q d\xi$ le moment sera $(\xi - x)q d\xi$, d'où pour le moment fléchissant

$$M = Rx + \int_0^x (\xi - x) q d\xi.$$

On suppose une charge quelconque et q fonction de ξ . Cherchons la dérivée de M par rapport à x , on a :

$$M = Rx + \int_0^x \xi q d\xi - x \int_0^x q d\xi$$

d'où en dérivant :

$$\frac{dM}{dx} = R + x q(x) - \int_0^x q d\xi - x q(x) = R - \int_0^x q d\xi$$

c'est-à-dire

$$\frac{dM}{dx} = R - \int_0^x q d\xi = -T,$$

ce qui est une généralisation pour le cas des charges réparties d'une formule déjà obtenue.

CAS D'UNE POUTRE SOUMISE A LA FOIS A DES CHARGES REPARTIES ET A DES CHARGES
CONCENTREES

Soient B et C les verticales des charges concentrées qui s'ajoutent aux charges continues (Fig. 151).

Les charges infiniment petites s'exerçant entre A et B sont représentées sur le dynamique par le segment ab. Continuons : tout naturellement, la charge isolée s'exerçant en B se représentera sur le dynamique par bc, faisant suite à ab,

puis viendront se juxtaposer successivement : ce, correspondant aux charges réparties entre B et C,

ef, représentant la charge isolée en C, enfin :

fg, qui se rapporte aux charges réparties de C à A'.

ga sera, comme toujours, la somme des réactions.

D'après ce qui précède, la tangente en m_0 au funiculaire doit être parallèle à oa, et la tangente en m_1 , parallèle à ob. Mais, en ce point, la tangente au funiculaire doit aussi être parallèle à oc. C'est donc que les 2 courbes funiculaires qui correspondent aux parties AB et BC ne se raccordent pas sur la verticale de B.

Ces courbes partent du même point, mais avec des tangentes différentes. Cette particularité résulte de l'application de la charge isolée en B. Il en est de même pour les autres verticales. Le funiculaire est donc, dans ce cas, formé d'arcs de courbes formant une ligne brisée.

CONSTRUCTION GRAPHIQUE DE LA COURBE ELASTIQUE

CHARGE EIFIEE

On a vu que l'équation d'un funiculaire est de la forme

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{q(x)}{h}. \quad (1)$$

On a trouvé, d'autre part, que l'équation de l'élastique est :

$$y'' = - \frac{M}{EI} \quad (2)$$

On sait aussi trouver les réactions sur le dynamique quand le funiculaire des charges est construit.

Il est alors possible de déterminer le moment fléchissant en un point quelconque :

si M est un moment fléchissant obtenu en ne considérant que les charges et en faisant abstraction des réactions ; et T un effort tranchant défini de la

même manière, les moment fléchissant et effort tranchant exacts : M_I et T_I s'expriment par :

$$\begin{aligned}M_I &= Rx + M \\T_I &= -R + T.\end{aligned}$$

Enfin, en rapprochant (1) et (2), on voit que la courbe élastique et le funiculaire ont des expressions de la même forme. On peut donc les identifier :

$$\frac{M_I}{EI} + \frac{p(x)}{h}.$$

De sorte qu'on peut construire graphiquement la courbe élastique en traçant un funiculaire de charges :

$$p(x) = \frac{M_I}{EI} h,$$

et, si l'on choisit la distance polaire $h = I$, il suffit de prendre des charges : $p(x) = \frac{M_I}{EI}$.

On dit alors que la courbe élastique provient de charges éfiées qui sont des charges fictives égales aux moments fléchissants éfiés, c'est-à-dire divisés par EI .

POUTRES CONTINUES

Une poutre est dite continue lorsqu'elle repose sur des appuis surabondants.

Solent A_0, A_1, \dots, A_n , les n points d'appui.

Les intervalles A_0A_1, A_1A_2, \dots etc. sont appelés des travées.

Les longueurs de ces travées sont comptées horizontalement. Les réactions verticales des appuis seront respectivement : R_0, R_1, \dots, R_n , et les moments fléchissants aux points d'appui (moments sur piles), se désigneront par M_0, M_1, \dots, M_n .

On peut se rendre compte que si l'on connaît ces moments, il est facile de calculer le moment fléchissant en un point quelconque de la poutre.

On envisagera d'abord le cas d'une charge uniformément répartie (où q est constante), et on supposera que les appuis sont à des niveaux peu différents.

Les résultats s'étendent aisément aux charges quelconques. Considérons 2 travées consécutives de rang quelconque : $A_i - A_i$ et A_iA_{i+1} , et un point P de la première de ces travées, situé à une distance x de A_{i-1} .

Désignons par : $l_i =$ la longueur de la travée $A_{i-1} A_i$
 $l_{i+1} =$ $A_i A_{i+1}$

Proposons-nous de chercher le moment fléchissant M , en P . C'est le moment de toutes les charges et réactions à gauche de la section, c'est-à-dire $M = M_{i-1} + \mathcal{M}^t$ de la réaction R_{i-1} + la somme des moments des charges entre A_{i-1} et P .

1°) Moment de la réaction - si l'on reprend la formule générale :

$\sum (\xi - x) Y$: en A_{i-1} , $\xi = 0$ et $Y = -R_{i-1}$, et le moment des charges entre A_{i-1} et P . C'est, d'après la formule déjà établie :

$$\int_0^x (\xi - x) q d\xi = q \int_0^x \xi d\xi - qx \int_0^x d\xi$$

$$= q \frac{x^2}{2} - qx x$$

$$= -q \frac{x^2}{2}$$

Donc, en réunissant les résultats :

$$M = M_{i-1} + R_{i-1} x - q \frac{x^2}{2}$$

Appliquons cette formule au point A_i .

x devient l_i et M devient M_i :

$$M_i = M_{i-1} + R_{i-1} l_i - \frac{q}{2} l_i^2$$

Cherchons à ramener tout aux moments sur piles. On tire de cette équation :

$$R_{i-1} l_i = M_i - M_{i-1} + \frac{q}{2} l_i^2$$

que l'on peut porter dans (3)

$$(4) \quad M = M_{i-1} + \left(M_i - M_{i-1} + \frac{q}{2} l_i^2 \right) \frac{x}{l_i} - q \frac{x^2}{2}$$

FORMULE DE CLAPEYRON (Théorème des 3 moments).

C'est une relation entre 3 moments consécutifs. Elle permet, quand on connaît 2 de ces moments, de calculer le troisième.

Si l'on détermine, pour chacune des travées, la ligne élastique, on aura généralement des courbes de formes différentes qui aboutiront chacune à un appui commun : A_i par exemple. Mais on admet que ces 2 courbes se prolongent, c'est-à-dire qu'elles ont une tangente commune, sans cassure.

Reprenons l'équation de l'élastique : $y'' = -\frac{M}{EI}$,

ou : (3) $M = -y'' EI$.

Désignons par :

S_{i-1} , le coefficient de la tangente, ou

A_{i-1} à la courbe élastique qui va suivant la travée $A_{i-1} A_i$ (Fig. 152)

t_i , le coefficient angulaire en A_i de la tangente à la même courbe. In-

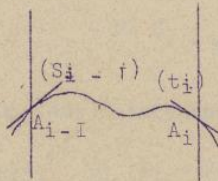


Fig. 152

Intégrons une première fois la formule : $-y'' EI = M$, par la travée $A_{i-1} A_i$, on sait que

$$-EI y' = \int_0^x M dx + C$$

pour $x = 0$, $\int M dx$ est nul et y' devient y'_0 , c'est-à-dire le coefficient angulaire de la tangente sur l'appui, donc :

$$C = -EI y'_0$$

Ici, $y'_0 = S_{i-1}$, donc : $-EI y'_i = \int_0^{l_i} M dx - EI S_{i-1}$.

D'autre part :

$$\int_0^{l_i} M dx = \int_0^{l_i} \left[M_{i-1} + (M_i - M_{i-1} + \frac{q}{2} l_i^2) \frac{x}{l_i} - q \frac{x^2}{2} \right] dx$$

d'après (4). D'où, en remplaçant et en intégrant : (I)

$$(7) \quad -EI (y'_i - S_{i-1}) = M_{i-1} l_i + (M_i - M_{i-1} + \frac{q}{2} l_i^2) \frac{l_i}{2} - \frac{q}{6} l_i^3$$

qui se simplifie :

$$(8) \quad -EI (t_i - S_{i-1}) = \frac{M_i + M_{i-1}}{2} l_i + \frac{q}{12} l_i^3$$

Reprenons l'équation (6) et intégrons une 2ème fois :

$$(9) \quad -EI (y - y_{i-1}) = -EI S_{i-1} x + M_{i-1} \frac{x^2}{2} + (M_i - M_{i-1} + \frac{q}{2} l_i^2) \frac{x^3}{6l_i} - \frac{q}{24} x^4$$

y_{i-1} étant l'ordonnée de l'appui A_{i-1} .

Faisons $x = l_i$, on est en A_i , et y devient y_i :

$$(10) \quad -EI (y_i - y_{i-1}) = EI S_{i-1} l_i + M_{i-1} \frac{l_i^2}{2} + (M_i - M_{i-1} + \frac{q}{2} l_i^2) \frac{l_i^2}{6} - \frac{q}{24} l_i^4$$

(I) La formule : (6) qui a été omise par inadvertance est donnée à la fin de l'ouvrage.

qui se simplifie :

$$(II) \quad -EI (y_i - y_{i-1}) = -EI S_{i-1} l_i + \frac{2M_{i-1} - 1}{6} l_i^2 + \frac{q}{24} l_i^3$$

Divisons par l_i :

$$(I2) \quad -EI \frac{(y_i - y_{i-1})}{l_i} = -EI S_{i-1} + \frac{2M_{i-1} - 1}{6} l_i + \frac{q}{24} l_i^2$$

On peut maintenant éliminer $EI S_{i-1}$, en retranchant (I2) de (8) :

$$(I3) \quad EI \frac{(y_i - y_{i-1})}{l_i} t_i = \frac{M_{i-1} - 1 + 2M_i}{6} l_i + \frac{q}{24} l_i^3$$

L'équation (II) s'applique à la travée l_i , mais on peut écrire la même équation pour la travée suivante :

$$(I4) \quad -EI (y_{i+1} - y_i) = -EI S_{i+1} l_{i+1} + \frac{2M_i + M_{i+1} - 1}{6} l_{i+1}^2 + \frac{q}{24} l_{i+1}^3$$

ou, en divisant par l_{i+1} :

$$(I5) \quad -EI \frac{(y_{i+1} - y_i)}{l_{i+1}} = -EI S_{i+1} + \frac{2M_i + M_{i+1} - 1}{6} l_{i+1} + \frac{q}{24} l_{i+1}^2$$

Mais au point A_i , les 2 éléments de courbe se raccordent, c'est-à-dire ont même coefficient angulaire, donc on doit avoir : $S_i = t_i$. Remplaçons alors dans (I5) S_{i+1} par t_i , et changeons les signes dans le 1er membre :

$$(I6) \quad EI \frac{(y_i - y_{i+1})}{l_{i+1}} = -EI t_i + \frac{2M_i + M_{i+1} - 1}{6} l_{i+1} + \frac{q}{24} l_{i+1}^2$$

En ajoutant (I6) et (I3), on élimine t_i :

$$\begin{aligned} EI \left(\frac{(y_i - y_{i+1})}{l_{i+1}} + \frac{(y_i - y_{i-1})}{l_i} \right) &= \\ &= \frac{1}{6} \left[l_i (M_{i-1} - 1) + 2(l_i + l_{i+1}) M_i + l_{i+1} (M_{i+1} - 1) \right] + \\ &+ \frac{q}{24} (l_i^3 + l_{i+1}^3) \end{aligned}$$

C'est la formule de Clapeyron, elle fournit les 3 moments sur piles :

M_{i-1} , M_i ; M_{i+1} , une relation linéaire.

Il y a bien $(n + 1)$ moments sur piles, mais ceux des piles extrêmes sont nuls et il reste $(n - 1)$ inconnues. Or, on a $(n - 1)$ équations linéaires, donc le problème est déterminé.

FROTTEMENT

La mécanique sans frottement est une abstraction particulièrement favorable aux développements mathématiques et que l'on peut considérer comme une première approximation, mais le plus souvent le frottement joue un rôle trop essentiel pour être négligé.

Une expérience simple permet d'en définir les propriétés : sur un plan horizontal on place un corps, sur le centre de gravité duquel s'exerce une traction T ; (T n'est égal à Q que si la poulie n'offre pas de résistance) produite par un poids Q au moyen d'un fil guidé par une poulie (Fig. I53). Soit

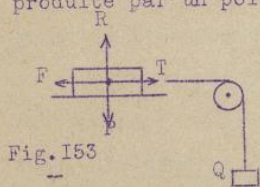


Fig. I53

P le poids de ce corps et R la réaction du plan, égale et opposée à P . S'il n'y avait pas de frottement, le système ne serait pas en équilibre. Sous l'action de la force T il se développe une réaction de frottement F , égale et opposée à T .

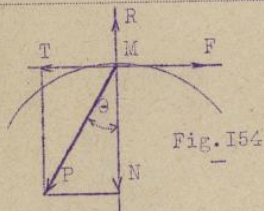


Fig. I54

Donc, tant que le système est en équilibre :

$$R = P$$

$$\text{et } Q = T = F.$$

Si l'on augmente progressivement la charge Q , l'expérience montre que l'équilibre persiste jusqu'à ce que Q atteigne la valeur limite $f.P$, où f est un coefficient déterminé qui dépend de la nature des substances en contact et qu'on appelle le coefficient de frottement.

Ainsi, dans les problèmes où s'introduisent des frottements en divers points des corps, l'équilibre se traduira par des inégalités de cette forme :

$$T = Q < f.P, \text{ ou encore :}$$

$$F < f.R.$$

Le cas qui vient d'être envisagé se généralise immédiatement : soit un point M (Fig. I54), assujéti à se déplacer sur une courbe et sollicité par une force P de direction quelconque.

On peut décomposer P suivant une normale N à la courbe et la tangente T. L'équilibre exige qu'à ces composantes s'opposent des réactions R et F égales, et l'équilibre se traduit par $F = T$, $N = R$.

Il faut encore ici que : $F < f R$, mais on peut exprimer cette condition autrement. Soit θ l'angle que fait la force avec la normale, on a :

$$N = P \cos \theta$$

et $T = P \sin \theta$.

Remplaçons :

$$F = T = P \sin \theta < f P \cos \theta$$

ou $\text{tg } \theta < f$.

On matérialise cette expression en considérant f comme la tangente d'un angle φ appelé angle de frottement $f = \text{tg } \varphi$, et la condition d'équilibre devient :

$$\text{tg } \theta < \text{tg } \varphi,$$

ou, comme θ et φ sont compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$,

$$\theta \leq \varphi.$$

Donc les réactions avec frottement qui assurent l'équilibre d'un corps soumis à l'action d'une force pourront se développer indéfiniment si $\theta < \varphi$.

f n'est pas toujours petit, il peut même être plus grand que 1. Si l'on fait tourner l'angle φ autour de la normale comme pivot, on engendre un cône, dit cône de frottement (Fig. I55). Il y a équilibre tant que P est diri-

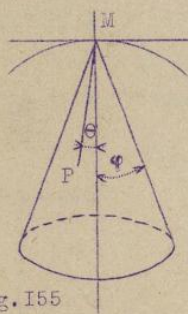


Fig. I55

gée à l'intérieur de ce cône, quelle que soit la grandeur de la force P. Pour détruire l'équilibre, il faudrait appliquer en M une force supplémentaire X, de manière à faire sortir du cône la résultante de ces forces (Fig. I56). Mais si P est très grande et X trop petite pour dévier suffisamment la résultante, il y a arc-boutement. Ce phénomène se rencontre souvent en mécanique, notamment dans les engrenages. Il est très important.

Pour traiter une question où interviennent les frottements, il faut, pour tous les points de contact, introduire les réactions tangentielles de frottement à côté des réactions normales.

Ces réactions tangentielles s'exercent en sens contraire du mouvement qui tend à se produire. Elles jouent un rôle considérable dans la progression à la surface de la terre : aucune progression, animale ou mécanique, ne pourrait avoir lieu sans la réaction de frottement du sol, de la route ou du rail.

Parmi les nombreux exemples des effets du frottement, on peut examiner les problèmes suivants :

Problème I - Soit un point pesant, mobile avec frottement sur une courbe, par exemple un cercle vertical.

Pour que l'équilibre ait lieu, il faut que la direction de la pesanteur soit à l'intérieur du cône de frottement, dont la trace sur le plan de la figure s'obtient en portant l'angle φ de part et d'autre du rayon passant par M. Mais on peut transporter le sommet du cône au centre du cercle, et, en menant une verticale, retrouver l'angle i . Donc, si l'on considère les 2 rayons issus de O, faisant avec la verticale un angle φ , tant que le mobile M sera sur l'arc AB, il restera en équilibre (Fig. I57).

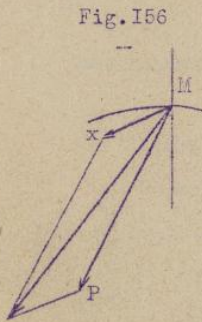


Fig. I56

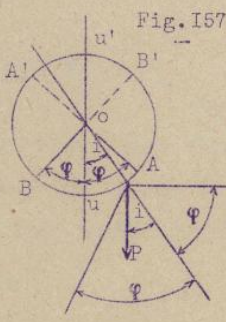


Fig. I57

On construirait de même l'arc supérieur A'B'. S'il n'y avait pas de frottement, le mobile ne serait en équilibre que sur la verticale u u' : stable en u, instable en u'.

Ce n'est donc que grâce au frottement que l'on peut réaliser certains équilibres.

Le résultat est analogue si l'on a une sphère au lieu d'un cercle : l'arc de cercle AB est la trace d'une calotte sphérique, qui est une plage d'équilibre.

Problème II - Conditions d'équilibre d'une échelle placée contre un mur.

On peut faire abstraction, en raison de son peu d'importance, de la résistance de frottement en B, sur le mur (Fig. I58).

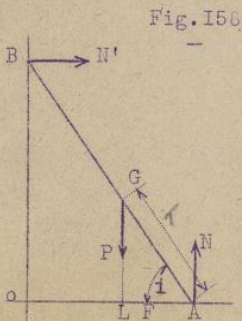


Fig. I58

Soient G, le centre de gravité de l'échelle et la charge qu'elle porte, et λ sa distance au pied A : $\lambda = GA$; P, le poids appliqué en G, et l, la longueur de l'échelle.

Il y a trois inconnues :

N, la réaction du sol,

N', la réaction du mur,

F, la réaction de frottement sur le sol.

Mais on a trois relations :

les sommes des 2 projections des forces nulles sur la verticale et l'horizontale et nulle aussi la somme des moments par rapport à un point.

projection sur OB : $N - P = 0$, $N = P$

projection sur OA : $N' - F = 0$, $N' = F$.

Prenons les moments par rapport à A, il faut que :

$$\mathcal{M}_A^t N' + \mathcal{M}_A^t P = 0,$$

ou $-\overline{OB} \times N' + \overline{AL} \times P = 0$

ou encore : $l \sin i \cdot N' = \lambda \cos i \cdot P.$

Remplaçons N' : $\lambda P \cos i = l \sin i \cdot F$

ou $F = \frac{\lambda}{l} P \cotg i$

Il faut aussi que $F \leq f N$

d'où, en remplaçant F et N : $\frac{\lambda}{l} P \cotg i \leq f P$

et : $\frac{\lambda}{lf} < \tg i.$

Remplaçons f par $\tg \varphi$: $\tg i > \frac{\lambda}{l} \cotg \varphi,$

qui détermine les conditions d'équilibre.

On a envisagé une charge fixe. Supposons maintenant une échelle homogène sur laquelle on fait monter une charge mobile (Fig. I59).

Fig. I59

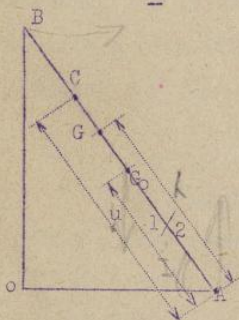
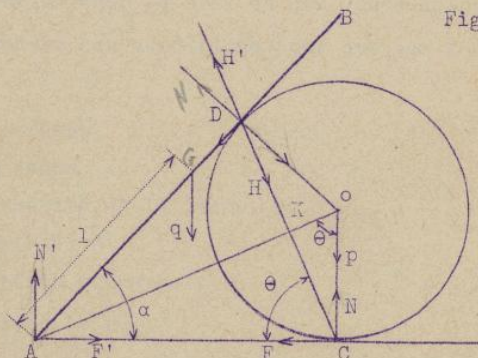


Fig. I60



Soient : p, le poids propre de l'échelle,
 q, le poids de la charge mobile,
 G_0 , le centre de gravité de l'échelle (au milieu de l).
 G, le centre de gravité de l'ensemble, échelle et charge, et
 u, la distance de la charge au point A, pour une certaine position C de la charge.

D'après le théorème du moment, on doit avoir : λ étant toujours la distance du centre de gravité de la charge et de l'échelle au point A :

$$(q + p) \lambda = q u + p \frac{l}{2}$$

d'où :

$$\lambda = \frac{qu + p \frac{l}{2}}{q + p}$$

Pour l'équilibre, il faut, d'après ce que l'on a vu, que :

$$\operatorname{tg} i > \frac{\lambda}{l} \operatorname{cotg} \varphi = \frac{qu + p \frac{l}{2}}{l(q + p)} \operatorname{cotg} \varphi .$$

Pour que cet équilibre subsiste, quelle que soit la position de la charge mobile, il faut que l'on puisse faire $u = l$, sans détruire l'inégalité, - car le 2ème membre croît avec u .

Remplaçons donc u par l :

$$\operatorname{tg} i > \frac{q l + \frac{p}{2} l}{l(q + p)} \operatorname{cotg} \varphi = \left(1 - \frac{\frac{p}{2}}{q + p} \right) \operatorname{cotg} \varphi$$

ou, en remarquant que : $\operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$:

$$\operatorname{tg} i > \left(1 - \frac{\frac{p}{2}}{p + q} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) .$$

C'est la condition pour que la charge puisse monter en toute sécurité jusqu'en haut de l'échelle.

Problème III - Equilibre de la canne et du cerceau.

Soient un cerceau posé verticalement sur le sol, et une canne appuyée, avec frottement, sur le cerceau. Trouver les conditions pour que ces 2 corps soient en équilibre (Fig. 160).

Soient : p , le poids du cerceau,

q , le poids de la canne,

G , le centre de gravité de la canne, et

l , sa distance au pied A.

Il y a frottement aux 3 points suivants :

C, au contact du cerceau avec le sol,

A, au pied de la canne,

D, point de contact de la canne et du cerceau.

En chacun de ces points s'exerce une réaction normale et une réaction de frottement.

On peut écrire séparément l'équilibre du cerceau, à condition d'introduire les réactions exercées par la canne. Remarquons que les réactions normale et tangentielle en D de la canne et du cerceau, peuvent être composées en

une seule force : DH.

Prenons les moments des forces, par rapport à C : les moments de F, N, p, dont les lignes d'action passent par C, sont nuls, donc les moments des réactions normale et tangentielle en D doivent avoir une somme nulle et il en est de même de leur résultante. Il faut, par conséquent, que la ligne d'action de cette résultante passe par C. Annulons la somme des projections sur l'horizontale dirigée dans le sens positif :

$$(1) \quad \overline{DH} \cos \theta - F = 0.$$

et la somme des projections sur la verticale descendante :

$$(2) \quad \overline{DH} \sin \theta + p - N = 0.$$

Il y a trois inconnues : \overline{DH} , F et N, mais on peut exprimer aussi que la canne doit être en équilibre.

Puisque la canne exerce sur le cerceau une action DH, le cerceau produit sur la canne une réaction égale et opposée : $DH' = -DH$.

Projections sur l'horizontale :

$$(3) \quad F' - \overline{DH} \cos \theta = 0,$$

sur la verticale :

$$(4) \quad q - N' - \overline{DH} \sin \theta = 0.$$

Moments par rapport à A : (Fig.161) .

Menons AO, et soit K son point de rencontre avec CD, au milieu de cette droite, on doit avoir :

$$(5) \quad q l \cos \alpha - \overline{AK} \times \overline{DH} = 0..$$

Dans le triangle ADO, on a :

$$\overline{OA} \times \overline{OK} = r^2, \text{ d'où : } OA = \frac{r^2}{\overline{OK}}$$

D'autre part : $\frac{r}{\overline{OK}} = \frac{l}{\cos \theta}$, donc :

$$OA = \frac{r^2}{\overline{OK}} = \frac{r}{\cos \theta}$$

On a aussi :

$$AK = OA - OR = \frac{r}{\cos \theta} - r \cos \theta = \frac{r \sin^2 \theta}{\cos \theta}.$$

Et, en remplaçant dans (5) :

$$q l \cos \alpha = \frac{r \sin^2 \theta}{\cos \theta} \cdot \overline{DH}.$$

D'autre part, dans le triangle isocèle ACD : $\alpha = \pi - 2\theta$, d'où :

$$\cos \alpha = -\cos 2\theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$

done :

$$q l (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = r \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cdot \overline{DH}$$

d'où :

$$DH = \frac{q l}{r} \cdot \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \cos \theta$$

On peut alors tirer les formules (3) et (4) :

$$F' = \overline{DH} \cos \theta$$

$$N' = q - \overline{DH} \sin \theta$$

Et des équations (1) et (2)

$$F = \overline{DH} \cos \theta = F'$$

$$N = p + \overline{DH} \sin \theta$$

Toutes les réactions sont ainsi déterminées en fonction de θ , mais il faut aussi que l'inégalité fondamentale du frottement soit vérifiée.

Si φ_A , φ_C , φ_D sont les angles de frottement en A, C et D :

Au point D, la composante normale avec DH un angle $(\frac{\pi}{2} - \theta)$, qui doit être plus petit que φ_D , c'est-à-dire que l'on ait :

$$\theta > \frac{\pi}{2} - \varphi_D$$

Au point C, il faut aussi que :

$$\frac{F}{N} = \frac{\overline{DH} \cos \theta}{p + \overline{DH} \sin \theta} < \text{tg } \varphi_C$$

Enfin, au point A, on doit avoir :

$$\frac{F'}{N'} = \frac{\overline{DH} \cos \theta}{q - \overline{DH} \sin \theta} < \text{tg } \varphi_A$$

Ces conditions limitent l'angle θ , qui doit être tel que les 3 inégalités soient vérifiées à la fois.

Problème IV - Equilibre de 3 barriques.

Fig. I61

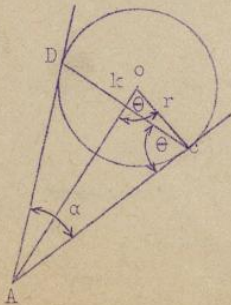


Fig. I62

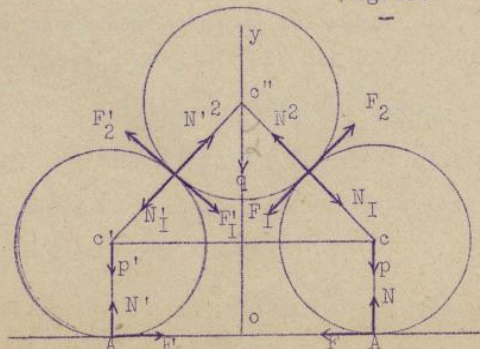
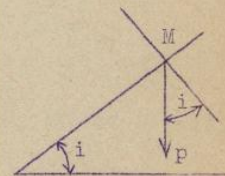


Fig. I63



Soient 3 barriques C, C', C'', de centres c, c', c'', empilées, avec frottement à tous les points de contact. Les barriques C et C' sont égales (Fig. I62). On peut, en raison de la symétrie, prévoir que les réactions normales en A et A' seront égales, ainsi que les réactions de frottement.

Considérons séparément la barrique C : sur le centre C s'exercent les forces suivantes :

- P = poids de la barrique,
- N = réaction normale du sol,
- $N_I = \text{-----}$ de la barrique C'',
- F = réaction de frottement du sol,
- $F_I = \text{-----}$ de la barrique C''.

Sur le centre C', on a des forces symétriques, avec le signe ' , et sur C'' :

- les réactions normales N_2 et N'_2
- les réactions de frottement F_2 et F'_2
- le poids q de la barrique.

Appliquons le théorème des moments, par rapport à C, pour l'équilibre de la barrique C : seuls F et F_I ont des moments non nuls, mais ces moments ont même bras de levier et doivent être opposés, donc : $F = F_I$.

De même, par symétrie : $F' = F'_I$. Les forces de frottement sont toutes égales.

Somme des projections sur l'horizontale ox :

$$(1) \quad - F (1 + \cos \alpha) + N_I \sin \alpha = 0.$$

Somme des projections sur la verticale descendante :

$$(2) \quad N_I \cos \alpha + F \sin \alpha + p - N = 0.$$

On aurait les mêmes équations avec C'. Considérons l'équilibre de C''. Les moments par rapport à C'' sont tous nuls.

Projections sur l'horizontale :

N_I et N'_I ont des projections égales 2 à 2, et de sens contraires ; le théorème des projections est vrai de lui-même.

Projections sur la verticale :

$$(3) \quad - 2 F \sin \alpha - 2 N_I \cos \alpha + q = 0, \text{ ou} \\ F \sin \alpha + N_I \cos \alpha - \frac{q}{2} = 0.$$

On a 3 inconnues : F, N et N_I , et les équations (1), (2) et (3). En retranchant (3) de (2), on tire :

$$p - N + \frac{q}{2} = 0, \quad \text{ou : } p - N = -\frac{q}{2} \text{ et } N = p + \frac{q}{2}.$$

En multipliant (1) par $-\cos \alpha$, (2) par $\sin \alpha$, et en ajoutant, on a :

$$F \cos \alpha + F(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (p - N) \sin \alpha = 0,$$

ou :

$$F(I + \cos \alpha) = \frac{q}{2} \sin \alpha,$$

et :

$$F = \frac{q}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{(I + \cos \alpha)} = \frac{q}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

De (1), on tire :

$$N_I = F \frac{(I + \cos \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{q}{2},$$

de sorte que les 3 inconnues sont déterminées.

En A et A', les contacts sont de même nature, soit f le coefficient de frottement commun, et soit f' le coefficient commun en B et B'.

En A, il faut que :

$$F < f'N, \quad \text{ou} : \frac{q}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < f(p + \frac{q}{2}),$$

ou encore,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < f \frac{p + \frac{q}{2}}{q} = f' \frac{2p + q}{q}$$

ou, en posant :

$$f' \frac{2p + q}{q} = \operatorname{tg} \Psi$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg} \Psi$$

donc :

$$\text{En B, il faut de même que} : F < f' N_I$$

ou :

$$\frac{q}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < f' \frac{q}{2} = \operatorname{tg} \varphi'$$

d'où :

$$\frac{\alpha}{2} < \varphi',$$

et :

$$\alpha < 2 \varphi'.$$

En résumé, on a les 2 conditions .. : $\begin{cases} \alpha < 2 \Psi \\ \alpha < 2 \varphi' \end{cases}$

Pour que l'équilibre soit réalisé, il faut donc que α soit plus petit que le plus petit des angles Ψ et φ' .

EQUILIBRE D'UN CORPS REPOSANT AVEC FROTTEMENT SUR UN PLAN INCLINE

Soient (Fig. 163) M un point pesant reposant sur un plan incliné, et p son poids. Il faut toujours que l'on ait $i < \varphi$. Menons une horizontale, il est facile de voir que l'angle i n'est autre que l'inclinaison du

plan. Il faut donc que la pente du plan soit plus petite que $\text{tg } \varphi$.

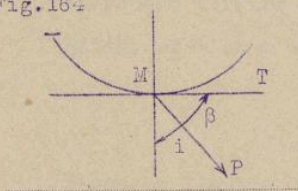
EQUILIBRE DE LA VIS ET DE L'ECROU (Fig. I64)

On a vu que l'équilibre d'un point assujéti à se mouvoir avec frottement sur une courbe, et soumis à une force P, est déterminé par la condition que :

$$i < \varphi,$$

i étant l'angle que fait P avec la normale à la courbe, située dans le plan formé par la tangente et la force P.

Il faudrait donc construire la normale, mais ce que l'on connaît toujours immédiatement, c'est la tangente et l'angle β qu'elle fait avec la force. Or, Fig. I64

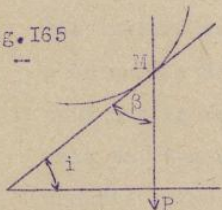


$i = \frac{\pi}{2} - \beta$, donc, il faut que :

$$\frac{\pi}{2} - \beta < \varphi, \text{ ou } \beta > \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Il n'est donc pas nécessaire de construire la normale.

Fig. I65

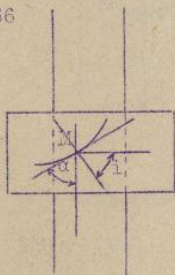


Supposons que la courbe soit une hélice (Fig. I65) à axe vertical, sur un point M de laquelle s'exerce une force p, verticale. On peut remarquer que l'inclinaison de la tangente à l'hélice sur le plan horizontal est précisément : $i = \frac{\pi}{2} - \beta$, or, il faut que $i < \varphi$. Donc l'hélice doit être peu inclinée.

Soit maintenant une vis et un écrou, et un point M sur l'hélice. Supposons la vis fixe, on peut essayer de faire mouvoir l'écrou de 2 manières: soit par une force tangente à un cercle horizontal (couple); soit par une force dirigée suivant l'axe de la vis.

1°) Mouvement sous l'effet d'une force tangentielle. (Fig. I66): C'est le

Fig. I66



cas où l'on attaque l'écrou au moyen d'une clef. Menons la normale à l'hélice, et la génératrice passant par M; soit α l'angle que fait cette génératrice avec la tangente.

Pour que le mouvement soit possible, il faut : $i > \varphi$. Or, $i = \alpha$ (côtés perpendiculaires), donc $\alpha > \varphi$, c'est la condition pour que le vissage de l'écrou soit possible.

2°) Mouvement sous l'effet d'une force axiale (Fig. I67). Il faut toujours :

$i > \varphi$, mais ici, $i = \frac{\pi}{2} - \alpha$, donc : $\frac{\pi}{2} - \alpha > \varphi$, ou : $\alpha < \frac{\pi}{2} - \varphi$. C'est le cas de la drille.

Supposons que l'on ait à la fois :

$$\begin{cases} \alpha > \varphi \\ \alpha > \frac{\pi}{2} - \varphi \end{cases}$$

Le vissage est possible, mais aucune poussée axiale ne pourra produire le dévissage. On a ainsi réalisé une vis de serrage.

Si, au contraire, on a à la fois :

$$\begin{cases} \alpha < \varphi \\ \alpha < \frac{\pi}{2} - \varphi \end{cases}$$

une poussée axiale produira le mouvement, mais on ne pourra rien obtenir en cherchant à faire tourner l'écrou par une force tangentielle.

Enfin, si l'on a à la fois :

$$\begin{cases} \alpha > \varphi \\ \alpha < \frac{\pi}{2} - \varphi \end{cases}$$

l'une ou l'autre des forces produit indifféremment le mouvement. C'est le cas intermédiaire entre les 2 précédents :

pour que le dévissage soit impossible, il faut un pas suffisamment faible; pour que la rotation ne puisse avoir lieu, le pas doit être assez allongé; mais si l'on veut que les 2 mouvements soient possibles, le pas doit être compris entre ces 2 valeurs extrêmes.

Valet de menuisier. C'est un cas d'arc-boutement (Fig. I68). Soient :

Fig. I67

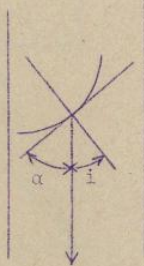
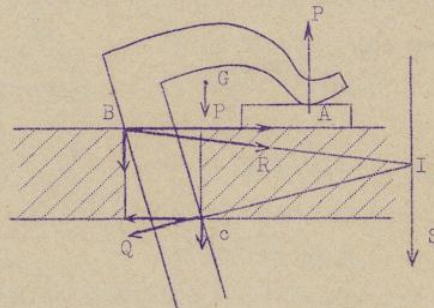


Fig. I68



G, le centre de gravité du valet,

p, son poids,

P, réaction du corps serré,

R, résultante des réactions normales et tangentielle en B

Q, ————— C

I, leur point de rencontre.

S, leur résultante de p et p.

On peut s'arranger pour que S passe par I. Elle fait équilibre à R et Q, et cela permet de construire ces deux dernières forces. Pour que l'arc-boutement soit possible, il faut que les cônes de frottement contiennent BI et CI respectivement.

Equilibre de l'échelle, quand on tient compte du frottement sur le mur. (F.169).

On a alors 4 inconnues : N, F, N', F', et seulement 3 équations. C'est le cas où les équations de la statique ne suffisent pas. On doit alors faire intervenir la résistance des matériaux pour avoir une 4ème condition, mais on peut éviter cela en construisant les cônes de frottement avec les angles :

$$\begin{aligned} EAC &= \varphi \\ CBD &= \varphi' \end{aligned}$$

Les génératrices AE et BD, et les normales AC et BC déterminent un quadrilatère ; CKED - (ombré). En A, la réaction normale AN, et la réaction de frottement AF peuvent se composer en une force unique qui doit agir à l'intérieur du cône de frottement construit avec l'angle φ .

De même, en B, la résultante de BN' et de BF' doit être à l'intérieur du cône construit avec φ' .

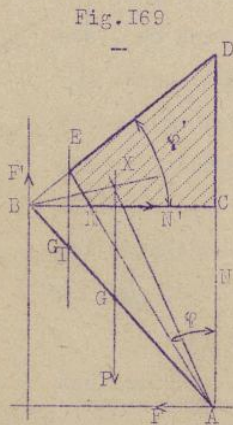


Fig. 169

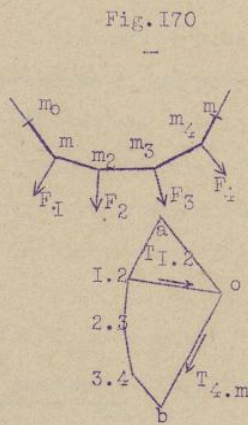


Fig. 170

Ces deux résultantes se rencontrent en un point X, situé à l'intérieur du quadrilatère CKED. Or, elles doivent équilibrer la seule force qui reste : p ; donc la verticale menée par G, qui est la ligne d'action de p, doit passer par X.

Il faut, par conséquent, que la verticale de G traverse le quadrilatère ombré.

Quand la charge monte, le centre de gravité G se déplace, et il peut arriver un moment où G étant venu en G₁ par exemple, cette condition ne serait plus remplie.

Cette éventualité ne doit pas pouvoir se produire.

FUNICULAIRES (Fig. 170)

Considérons un fil maintenu par ses 2 extrémités et portant en certains points m_1, m_2, \dots , des noeuds auxquels sont appliqués des forces F_1, F_2, \dots , etc.

Sous l'action de ces forces, le fil se tend et prend une forme polygonale. Ce polygone est un funiculaire des forces F_1, F_2, \dots . En effet, construisons le dynamique de ces forces et considérons un noeud du funiculaire : m_1 par exemple. Entre m_0 et m_1 s'exerce une tension : $T_{1.0}$; de même entre m_1 et m_2 il existe une autre tension : $T_{1.2}$. Donc, m_1 est en équilibre sous l'influence de 3 forces :

$$F_1 + T_{1.0} + T_{1.2} = 0.$$

On peut, sur le dynamique exprimer cet équilibre par la fermeture d'un triangle dont les côtés sont :

$$F_1 = a(1.2) \quad , \quad T_{1.0} = oa \quad ,$$

$$T_{1.2} = (1.2) o \quad .$$

Pour les mêmes raisons, le point m_2 est en équilibre sous l'action des 3 forces :

$$F_2 + T_{2.1} + T_{2.3} = 0 \quad ,$$

équilibre qui donne lieu à un autre triangle formé avec :

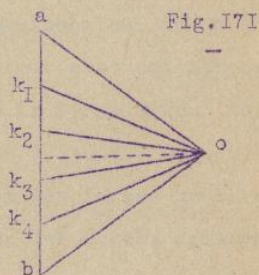
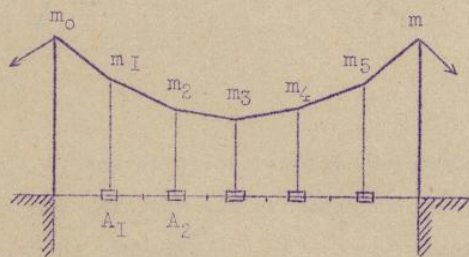
$$F_2 = (1.2)(2.3) \quad , \quad T_{2.1} = o(1.2) \quad , \quad T_{2.3} = (2.3) o$$

etc., on arrive ainsi à reconstruire un dynamique complet.

Dans l'une des propriétés des polygones funiculaires, on a reconnu qu'un système de forces est équivalent à 2 forces ayant pour lignes d'action les côtés extrêmes du polygone funiculaire de ce système. Or les forces intermédiaires que l'on introduit pour la démonstration de cette propriété - et qui se détruisent - ne sont autres que les forces appliquées ici aux points m_1, m_2, \dots .

D'où le nom de funiculaire donné à ces polygones.

Applications - Ponts suspendus (Fig. I71).



Si l'on considère le tablier formé d'un certain nombre de travées égales, et qu'on place à chacun des centres de gravité A_1, A_2, \dots , de ces travées, une poutrelle transversale aux extrémités de laquelle sont les étriers ;

si ces étriers sont soutenus par un fil vertical attaché lui-même à un câble par 2 colonnes, ce câble forme un funiculaire. Il est commode de donner au dynamique une symétrie pareille à celle de l'ouvrage en prenant le pôle sur une perpendiculaire élevée au milieu de ab .

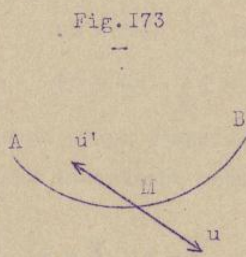
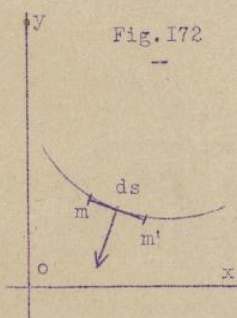
Le câble est en équilibre sous l'influence de toutes les charges verticales agissant suivant les fils et des tensions extrêmes exercées par des treuils situés de part et d'autre de l'ouvrage.

Les tensions dans les divers brins du câble sont fournies par le dynamique.

COURBES FUNICULAIRES

L'étude des charges réparties a montré que le polygone funiculaire devient alors une courbe. Matérialisons cette courbe par un fil, et considérons un élément de longueur ds soumis à une force $F ds$ (Fig. I72) donnée par ses projections : $X ds$ et $Y ds$, X et Y étant des fonctions de la position de la force : $X(x,y)$, $Y(x,y)$.

Considérons un arc AM de la courbe, orienté, et coupé par le fil en M . On peut remplacer l'action du brin MB sur la partie MA en lui appliquant une certaine force MU . Inversement, pour maintenir MB en équilibre, il faut appliquer



en M une force MU' égale et opposée à MU . L'une ou l'autre de ces forces est la tension au point M . Elles n'ont pas de signe, puisque leur sens dépend de la partie que l'on supprime. Soit T leur valeur absolue, et φ l'angle qu'elles font avec ox . Supposons-le donc dans la forme d'équilibre de l'ensemble, on solidifie le petit élément

$m m' = ds$, et qu'on remplace le reste du fil par les forces qu'il exerce en m et m' . Ecrivons les projections sur ox de toutes les forces agissant sur l'élément ds (Fig. I73).

En m , la tension T dirigée en sens contraire des arcs croissants, donc sa projection sur ox est $- T \cos \varphi$.

En m' , la tension est positive, mais augmentée de sa différentielle, puis-

que l'on passe de m en m', c'est donc : $T \cos \varphi + d(T \cos \varphi)$. Entre m et m' agit la force $F ds$, dont la projection est $X ds$. En réunissant les résultats, on a :

$$- T \cos \varphi + T \cos \varphi + d(T \cos \varphi) + X ds = 0,$$

ou, en divisant par ds :

(1)

$$\frac{d(T \cos \varphi)}{ds} + X = 0$$

En recommençant le même calcul pour les projections sur oy , on a :

$$- T \sin \varphi + T \sin \varphi + d(T \sin \varphi) + Y ds = 0, \text{ d'où :}$$

(2)

$$\frac{d(T \sin \varphi)}{ds} + Y = 0$$

Il reste à écrire l'équation des moments. Prenons-les par rapport à l'origine O . Moment des tensions :

En m , leurs projections sont négatives, et les coordonnées de m sont (x, y) . On sait aussi que le moment par rapport à o d'un vecteur XY est $xY - yX$, ce qui donne, ici :

$$x (-T \sin \varphi) - y (-T \cos \varphi)$$

ou :

$$-T (x \sin \varphi - y \cos \varphi).$$

En m' , les projections sont positives et les coordonnées de m' sont : $(x + dx, y + dy)$, d'où les moments :

$$(x + dx) [T \sin \varphi + d(T \sin \varphi)] - (y + dy) [T \cos \varphi + d(T \cos \varphi)].$$

Les coordonnées du point d'application de la force $F ds$ sont : $(x + \xi, y + \eta)$ où ξ, η sont infiniment petits et le moment de force appliquée à l'arc mm' est :

$$(x + \xi) Y ds - (y + \eta) X ds.$$

Ecrivons que la somme de tous ces moments doit être nulle :

$$-T (x \sin \varphi - y \cos \varphi) + (x + dx) [T \sin \varphi + d(T \sin \varphi)] - (y + dy) [T \cos \varphi + d(T \cos \varphi)] + (x + \xi) Y ds - (y + \eta) X ds = 0,$$

qui, développée, et en négligeant les infiniment petits du 2^e ordre, se réduit à :

$$x d(T \sin \varphi) - y d(T \cos \varphi) + T(dx \sin \varphi - dy \cos \varphi) + x Y ds - y X ds = 0,$$

ou, en divisant par ds et en mettant en facteurs :

$$x \underbrace{\left(\frac{d(T \sin \varphi)}{ds} + Y \right)}_{\text{nul}} - y \underbrace{\left(\frac{d(T \cos \varphi)}{ds} + X \right)}_{\text{nul}} + T (dx \sin \varphi - dy \cos \varphi) = 0 .$$

Les deux premiers termes sont nuls, en vertu de (1) et (2), et il reste simplement :

$$T (dx \sin \varphi - dy \cos \varphi) = 0 :$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi .$$

Donc φ est l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x .

Ainsi, on a les équations différentielles suivantes,

(en mettant θ au lieu de φ) :

$$\begin{array}{l|l} \frac{d(T \cos \theta)}{ds} + X = 0 & \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta \\ \frac{d(T \sin \theta)}{ds} + Y = 0 & ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \end{array}$$

CHAINETTE - Soit un fil homogène, pesant, accroché par ses deux extrémités (Fig. 174) (c'est une courbe funiculaire sans charges extérieures). On a ici :

$$X = 0 , Y = -p ,$$

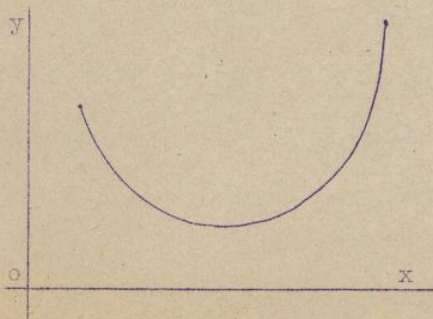
p étant le poids du fil par unité de longueur, et y étant pris dans le sens ascendant. Les équations différentielles du funiculaire deviennent :

$$(1) \quad \frac{d(T \cos \varphi)}{ds} = 0$$

$$(2) \quad \frac{d(T \sin \varphi)}{ds} - p = 0 .$$

La première de ces équations s'intègre immédiatement, car une fonction ayant une dérivée nulle est une constante. Si l'on appelle pa cette constante, on a donc :

Fig. 174



$$T \cos \varphi = pa ,$$

$$\text{d'où} \quad T = \frac{pa}{\cos \varphi}$$

Portons cette valeur dans (2) :

$$pa \frac{d \operatorname{tg} \varphi}{ds} = p .$$

$$\text{Mais : } \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = y' , \text{ donc :}$$

$$a \frac{d}{ds} y' = 1 , \text{ et : } ds = a \, d y' ,$$

$$\text{ou : } a \, d y' = \sqrt{1 + y'^2} \, dx ,$$

$$\text{ou encore} \quad \frac{d y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{dx}{a} ,$$

équation différentielle dont l'intégrale est :

$$L \left| \sqrt{1 + y'^2} + y' \right| = \frac{x - x_0}{a}$$

L étant le symbole d'un logarithme népérien, ou, en revenant aux nombres :

$$\sqrt{1 + y'^2} + y' = e^{\frac{x - x_0}{a}} \tag{1}$$

Remarquons que le produit suivant est égal à 1 ,

$$(\sqrt{1 + y'^2} + y')(\sqrt{1 + y'^2} - y') = 1 + y'^2 - y'^2 = 1$$

donc, l'un des termes du produit est l'inverse de l'autre,

$$\sqrt{1 + y'^2} - y' = e^{-\frac{x - x_0}{a}} \tag{2}$$

Retranchons (2) de (1) :

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + y'^2} + y' - (\sqrt{1 + y'^2} - y') = \\ & = e^{\frac{x - x_0}{a}} - e^{-\frac{x - x_0}{a}} = 2 y' , \end{aligned}$$

d'où :

$$y' = \frac{1}{2} (e^{\frac{x - x_0}{a}} - e^{-\frac{x - x_0}{a}})$$

et, en intégrant :

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x - x_0}{a}} + e^{-\frac{x - x_0}{a}}) + C$$

qui est l'équation d'une chaînette.

On peut la rapporter à des axes de coordonnées tels que x et c soient nuls, l'équation se réduit alors à

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) .$$

Lorsque la chaînette a cette forme, l'axe ox est une droite appelée la base de la chaînette et oy un axe de symétrie de cette courbe.

FORME DE LA COURBE (Fig. 175)

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

pour $x = 0$, $e = 1$ et $y = a$

D'autre part : $y' = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$, qui s'annule pour $x = 0$, ce qui signifie que la tangente est horizontale au point S, d'ordonnée a, sur l'axe oy. Ce point est donc le moment de la courbe.

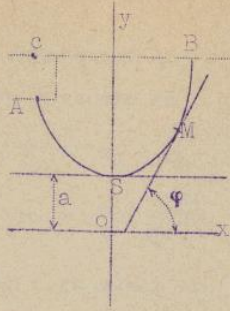


Fig. I75

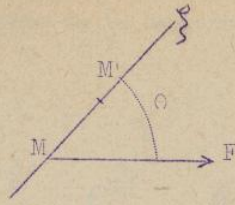


Fig. I76

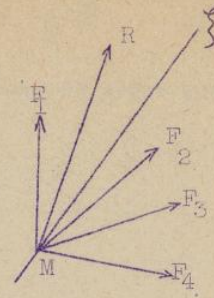


Fig. I77

On voit aussi que si l'on change x en $-x$, y ne change pas, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe oy .

L'expression de la longueur d'un arc fini, compté à partir de S , est remarquablement simple. On a toujours :

$$dy' = \frac{ds}{a}, \text{ et } ds = a dy',$$

d'où :

$$s = a y' + b,$$

b étant une constante arbitraire.

Si l'on compte les axes à partir du point S , vers la droite, s est nul avec y' et on a $b = 0$, d'où $s = a y' = a \operatorname{tg} \varphi$.

Problème I - On donne 2 points A et B , auxquels on accroche un fil pesant, homogène. Trouver la forme et les paramètres de la chaînette ainsi réalisée, la largeur du fil étant connue (Fig. I75).

Faisons passer l'axe oy par le sommet S , où la tangente est horizontale, et soient (x_2, y_2) et (x_1, y_1) les coordonnées de A et de B . Ces 2 points étant sur la courbe, on sait que l'on a :

$$y_1 = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x_1}{a}} + e^{-\frac{x_1}{a}} \right)$$

$$y_2 = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x_2}{a}} + e^{-\frac{x_2}{a}} \right)$$

Posons : $BC = m$, $CA = n$.

Il est évident que la longueur l du fil est plus grande que celle de sa corde AB :

$$l > AB = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Or, à partir de S :

$$s = a y' = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Et, en prenant la valeur de s de part et d'autre de oy :

$$1 = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x_1}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}} - e^{\frac{x_2}{a}} + e^{-\frac{x_2}{a}} \right) \quad (I)$$

(en remarquant que y' = pente de la tangente, change de signe quand on passe à gauche de o y).

Or, $m = x_1 - x_2$ et $n = y_1 - y_2$, donc :

$$n = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x_1}{a}} + e^{-\frac{x_1}{a}} - e^{\frac{x_2}{a}} - e^{-\frac{x_2}{a}} \right)$$

on en tire aussi :

$$1 + n = \frac{a}{z} \left(z e^{\frac{x_1}{a}} - z e^{\frac{x_2}{a}} \right)$$

de même :

$$1 - n = \frac{a}{z} \left(-z e^{-\frac{x_1}{a}} + z e^{-\frac{x_2}{a}} \right)$$

et, en faisant le produit :

$$(1 + n)(1 - n) = 1^2 - n^2 = a^2 \left(e^{\frac{m}{a}} + e^{-\frac{m}{a}} - 2 \right)$$

ou, en remarquant que le terme entre parenthèses est le développement d'un carré :

$$1^2 - n^2 = a^2 \left(e^{\frac{m}{2a}} - e^{-\frac{m}{2a}} \right)^2$$

ou encore :

$$a \left(e^{\frac{m}{2a}} - e^{-\frac{m}{2a}} \right) = \sqrt{1^2 - n^2},$$

équation où ne figure que le paramètre a . Elle admet donc une racine et une seule.

On peut poser : $z = \frac{m}{2a}$, d'où : $a = \frac{m}{2z}$.

D'où, en remplaçant a par sa valeur :

$$\frac{m}{2z} \left(e^z - e^{-z} \right) = \sqrt{1^2 - n^2}. \quad (2)$$

On peut construire la courbe : $y = e^z - e^{-z}$.

Mais si, d'autre part, on porte dans (2) cette valeur, on a :

$$\frac{my}{2z} = \sqrt{1^2 - n^2}, \quad \text{ou } y = \frac{2z}{m} \sqrt{1^2 - n^2},$$

qui est l'équation d'une droite.

Donc, en coupant la courbe par cette droite, on a un point de la chaînette. (Le paramètre a s'obtient en résolvant l'équation transcendante (I)).

Problème II - Trouver la forme d'équilibre d'une courbe dont chaque élément est sollicité par une force verticale égale au poids de la projection de cet élément sur l'horizontale.

Il ne faut pas confondre ce cas avec celui du pont suspendu, où le funiculaire est la forme d'équilibre d'un fil sollicité par des forces égales,

puisqu'on considère le pont comme formé de travées égales. Reprenons les équations générales :

$$d(T \cos \varphi) + X ds = 0 ,$$

$$d(T \sin \varphi) + Y ds = 0 .$$

Ici, X est nul, puisque les forces sont verticales, et :

$$d(T \cos \varphi) = 0 , \quad \text{donc : } T \cos \varphi = \text{cte} = a p \quad (I),$$

d'où : $T = \frac{a p}{\cos \varphi}$. D'autre part, si p est le poids par unité de longueur, comptée suivant l'horizontale, on a :

$$d(T \sin \varphi) = p dx ,$$

ou, en remplaçant T par sa valeur tirée de (I) :

$$a p \cdot d \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = p dx , \quad \text{ou } \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{a} ,$$

d'où, en intégrant :

$$y' = \frac{x}{a} + m$$

et, en intégrant une seconde fois :

$$y = \frac{x^2}{2A} + mx + m' ,$$

qui est l'équation d'une parabole du 2^{me} degré à branches ascendantes.

PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL

Rappelons que le travail élémentaire d'une force F, appliquée en un point M, auquel on donne un déplacement infiniment petit $ds = MM'$, est égal au produit de MM' par la projection de la force F sur la direction de son déplacement :

$$\delta s \cdot F \cos \theta ,$$

en remarquant que $F \cos \theta$, projection de F, a le signe + ou - , selon que, θ étant aigu ou obtus, elle a le sens du déplacement ou le sens contraire. Cette projection est nulle si $\theta = \frac{\pi}{2}$ (Fig. I76).

On peut exprimer le travail par la forme équivalente :

$$F \cdot \delta s \cos \theta .$$

C'est alors la projection du déplacement que l'on considère. Le signe dépend encore de θ .

La première définition conduit immédiatement au théorème suivant :

Si plusieurs forces sont appliquées à un même point, et qu'on fasse subir à ce point un déplacement infiniment petit, le travail est égal à la somme algébrique des travaux des forces composantes.

En effet, écrivons cette dernière somme (Fig. I77) :

$$ds (\text{proj} \left\{ F_1 + \text{proj} \left\{ F_2 + \dots \right. \right.$$

Mais le terme entre parenthèses n'est autre que la projection de la résultante, donc :

$$ds (\text{proj} \left\{ F_1 + \text{proj} \left\{ F_2 + \dots \right. \right. = ds. \text{proj} \left\{ R$$

De la 2^{me} définition, on conclut que :

si au point d'application d'une force F , on fait subir une suite de déplacements $\delta's$, $\delta''s$, ..., la somme algébrique des travaux accomplis par F dans chacun de ces déplacements est égale au travail accompli par F dans le déplacement résultant (Fig. I78)

Fig. I78

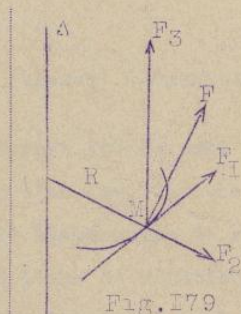
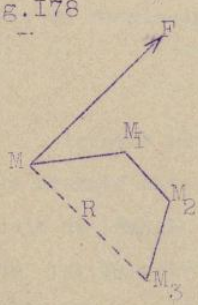


Fig. I79

En effet, le déplacement résultant est, géométriquement :

$$\delta_R s = \delta's + \delta''s + \dots$$

Et, en passant aux projections et en multipliant par F ($\text{proj}_F \delta s + \text{proj}_F \delta''s + \dots$) = $F \text{proj}_F \delta_R s$, ce qui vérifie l'énoncé.

DEPLACEMENTS VIRTUELS

Si l'on considère un corps gêné, c'est-à-dire ne pouvant accomplir que certains déplacements déterminés, ces déplacements sont dits virtuels.

Ils peuvent être réellement accomplis, mais sont conçus en dehors de toute application des forces qui seraient susceptibles de les produire.

Ce sont, d'une manière générale, tous les déplacements compatibles avec les liaisons auxquelles le corps est soumis.

TRAVAIL D'UNE FORCE ASSUJETTIE A TOURNER AUTOUR D'UN AXE Fig. I79).

Soit une force MF , ne pouvant que tourner autour de l'axe Δ . On peut la décomposer suivant 3 directions, en

$MF_1 = \text{proj}_t$ de F sur la tangente au cercle décrit par M ,

MF_2 ————— le rayon du —————

MF_3 ————— la parallèle à l'axe de rotation.

Le travail de F sera la somme des travaux accomplis par ces trois composantes.

Le déplacement virtuel a lieu, ici, suivant le cercle. Les travaux

des composantes F_2 et F_3 , qui sont perpendiculaires à ce déplacement, sont nuls, et le travail élémentaire de la force se réduit à celui de la composante F_I , ce qui fait un angle nul avec la direction du déplacement, donc: $r d\theta F_I$, ou $r F_I d\theta$. Or, $r F_I$ est le moment de la force F_I par rapport à l'axe, avec le signe correspondant à $d\theta$ ($d\theta$ étant ici l'angle élémentaire dont tourne le rayon R). D'autre part, $\vec{F} = \vec{F}_I + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, et le moment de F par rapport à l'axe Δ est la somme des moments des composantes. Mais les moments, par rapport à cet axe, de F_2 et F_3 sont nuls; donc :

$$\mathcal{M}_{\Delta}^t F = \mathcal{M}_{\Delta}^t F_I.$$

et, en remplaçant :

$$\text{travail élémentaire de } F = \mathcal{M}_{\Delta}^t F \delta\theta.$$

Lorsque plusieurs forces sont appliquées à des points d'un solide libre de tourner autour d'un axe, chacune d'elles produit un travail égal au produit de l'angle $\delta\theta$ élémentaire de rotation multiplié par le moment de la force par rapport à l'axe de rotation et la somme des travaux virtuels accomplis par toutes les forces est égal au produit de $\delta\theta$ par le moment résultant des forces qui agissent sur le corps.

TRAVAIL VIRTUEL DANS UN MOUVEMENT DE TRANSLATION RECTILIGNE

Si le point d'application d'une force se meut suivant un axe ξ , avec une amplitude δx , le travail virtuel est égal au produit de δx par la projection de la force sur l'axe ξ .

Dans le cas d'un corps animé d'un mouvement de translation rectiligne, d'amplitude δx , la somme des travaux virtuels des forces appliquées aux divers points du corps a pour valeur le produit de δx par la somme des projections des forces sur l'axe ξ .

$$\sum \text{proj}_{\xi} F \cdot \delta x.$$

Si un corps est libre de prendre un mouvement hélicoïdal de pas h , autour d'un axe ξ , on voit que $\delta\theta$ étant la rotation infiniment petite autour de ξ , tout déplacement virtuel résulte d'une rotation $\delta\theta$ autour de ξ et d'une translation $h \delta\theta$ le long de l'axe. En conséquence, en vertu des théorèmes précédents, le travail virtuel des forces éventuelles appliquées à ce corps a pour expression :

$$\left(\sum \mathcal{M}_{\xi}^t F + h \sum \text{proj}_{\xi} F \right) \delta\theta.$$

Dans le cas du verrou, il y a deux variables indépendantes : 1°) rotation $\delta\theta$ autour de l'axe ξ .

2°) glissement élémentaire possible δu dans la direction de l'axe ξ .

La somme des travaux virtuels sera :

$$\sum \pi_{\xi}^t F \delta\theta + \sum \text{proj}_{\xi} F \delta u.$$

Dans le cas d'un couple plan (corps en contact par une face plane avec un autre corps, exemple : le trusquin).

Il y a trois modes de déplacements possibles, savoir :

1°) une translation rectiligne δx suivant ox .

2°) δy oy , rectangulaire avec ox ;

3°) une rotation $\delta\theta$ autour d'un axe ξ normal au point o , aux faces planes en contact.

La somme des travaux virtuels des forces appliquées aura pour expression, d'après les théorèmes qui précèdent :

$$\sum \text{proj}_{ox} F \cdot \delta x + \sum \text{proj}_{oy} F \cdot \delta y + \sum \pi_{\xi}^t F \cdot \delta\theta.$$

Cas d'un couple sphérique, ou, ce qui est la même chose, d'un couple libre de tourner autour d'un point fixe O . Tout déplacement du corps résulte d'une rotation $\delta\theta_{\xi}$ autour d'un axe ox , d'une rotation $\delta\theta_{\eta}$ autour d'un axe oy rectangulaire à ox et d'une rotation $\delta\theta_{\zeta}$ autour d'un axe oz formant avec ox , oy , un trièdre trirectangle.

La somme des travaux virtuels des forces appliquées à ce corps aura alors pour expression :

$$\sum \pi_{ox}^t F \cdot \delta\theta_{\xi} + \sum \pi_{oy}^t F \cdot \delta\theta_{\eta} + \sum \pi_{oz}^t F \cdot \delta\theta_{\zeta}.$$

Or, rappelons-nous les conditions d'équilibre des forces pour ces divers types de gêne d'un corps :

1°) dans le cas de la rotation d'un axe ξ , il faut et il suffit que $\sum \pi_{\xi}^t F = 0$, ce qui entraîne que la somme des travaux virtuels est nulle à partir de la position d'équilibre.

2°) Dans le cas d'une translation rectiligne restée possible, la condition d'équilibre c'est que la somme des projections des forces sur l'axe ξ de la translation soit nulle.

Ici encore la somme des travaux virtuels est nulle à partir de la position d'équilibre.

3°) Dans le cas d'un couple verrou, la condition d'équilibre, c'est

que le moment résultant des forces par rapport à l'axe ξ du verrou soit nul et que la somme des projections des forces sur le même axe soit nulle. Ici encore la somme des travaux virtuels est nulle à partir de la position d'équilibre, et ainsi de suite pour les autres cas.

La position d'un corps dans l'espace dépend de six paramètres, savoir : les coordonnées x, y, z d'un point du corps et 3 angles de rotation $\theta \xi, \theta \eta, \theta \zeta$ autour des axes des coordonnées ox, oy, oz .

La somme des travaux virtuels des forces =

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z + L \delta \theta \xi + \mathcal{M} \delta \theta \eta + \mathcal{N} \delta \theta \zeta$$

où X, Y, Z sont les sommes des projections des forces sur ox, oy, oz et $L, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ les moments résultant par rapport aux mêmes axes.

Les équations de l'équilibre sont, comme suit :

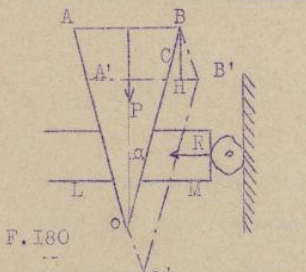
$$X = 0, Y = 0, Z = 0, L = 0, \mathcal{M} = 0, \mathcal{N} = 0,$$

ce qui signifie que la somme des travaux virtuels est nulle pour tous les déplacements virtuels du corps.

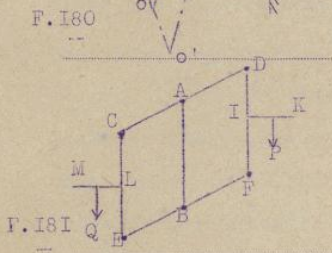
On peut démontrer et nous admettrons que :

la position d'équilibre d'un corps solide gêné est caractérisée par le fait que, à partir de cette position d'équilibre les travaux virtuels des forces appliquées ont une somme nulle pour tout déplacement virtuel élémentaire, compatible avec les liaisons (c'est-à-dire avec l'état de gêne du corps).

Application : Presse à coin (Fig. 180)

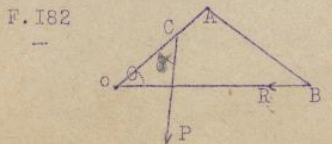


Un coin s'engage entre deux pièces dont l'une L est fixe et l'autre M est mobile, en progressant sur l'action d'une force P qui l'enfonce, le coin chasse la pièce mobile qui, à son tour, presse contre une paroi fixe un objet O à comprimer.



Désignons par P la force qui enfonce le coin et par R la résistance produite par l'objet pressé. Supposons l'équilibre établi. Appelons δx l'enfoncement infiniment petit du coin et δu le déplacement horizontal de la pièce mobile, nous devons avoir, d'après le principe des travaux virtuels :

$$P \delta x - R \delta u = 0.$$



Or, dans le triangle isocèle infiniment petit $B'B'C$ dont $B'H$ est la hauteur, $B'C = 2 B'H = \delta u$.

Appelons α le demi-angle d'ouverture du coin à section isocèle, on a :

$$\delta u = B H \quad , \quad \delta u = 2 B' H \quad ,$$

or, $B' H = B H \operatorname{tg} \alpha \quad , \quad \delta u = 2 \delta x \operatorname{tg} \alpha \quad .$

L'équation $P \delta x - R \delta u = 0$ devient donc :

$$(P - 2 R \operatorname{tg} \alpha) \delta x = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire :

$$P - 2 R \operatorname{tg} \alpha = 0$$

• du :

$$R = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad .$$

On voit que R sera d'autant plus grand que α sera petit.

DEUXIEME APPLICATION : Balance de Roberval (Fig.161)

Un parallélogramme articulé CDFE pivote autour des milieux A, B de ses côtés CD, EF parallèles. AB est supposé vertical. En des points I et L des ses côtés verticaux DF et CE sont des plateaux horizontaux perpendiculaires à ces côtés. Soient IK et LM. Sur le premier plateau est un poids P et sur le second un poids Q. On demande la condition d'équilibre. Les points D et C restent symétriques par rapport à A. Si l'un s'élève de δz , l'autre s'abaisse de la même quantité et les points I, L font de même, ainsi que les plateaux. Le théorème du travail virtuel sera donc :

$$P \cdot \delta z - Q \delta z = (P - Q) \delta z = 0$$

et par suite :

$$P - Q = 0 \quad .$$

On remarquera que la place occupée par les poids sur leur plateau n'intervient pas dans la condition d'équilibre.

Troisième application : Equilibre du genou (Fig.162).

Un levier OA s'articule en un point fixe O. En A un bras de longueur égale AB s'articule à ce levier. L'extrémité B du bras se meut sur une droite ox issue de o. En B s'exerce une résistance R suivant xo, tandis qu'une force CP sollicite le levier de façon à le rapprocher de la droite ox. Trouver à l'état d'équilibre la relation entre la force P et la résistance R.

Appelons u la distance OB, c la distance OG, $a = OA = AB$, $\widehat{PCO} = \gamma$. Le travail virtuel de CP quand l'angle $\theta = \widehat{COB}$, varie de $\delta\theta$ est

$$- PC \sin \gamma \cdot \delta\theta \quad .$$

Le travail de R est $- R du$, ou

$$- \gamma PC \sin \gamma \delta \theta - R du = 0 .$$

Or, on a :

$$u = 2 a \cos \theta ,$$

d'où

$$\delta u = - 2 a \sin \theta \delta \theta$$

d'où, pour le travail virtuel des forces P et R :

$$\begin{aligned} & - P c \sin \gamma \delta \theta - 2 R a \sin \theta \delta \theta = \\ & = (-P c \sin \gamma + 2 R a \sin \theta) \delta \theta = 0 , \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$- P c \sin \gamma + 2 R a \sin \theta = 0 ,$$

d'où :

$$R = \frac{Pc \sin \gamma}{2 a \sin \theta}$$

On voit que l'on a un effort maximum en prenant :

$$\gamma = \frac{\pi}{2}$$

d'où il résulte :

$$R = \frac{Pc}{2 a \sin \theta}$$

Si θ est petit, on peut arriver à équilibrer une résistance considérable.

—
F I N
—

LA CIRCULAIRE MODELE
48, Rue St. Placide
- P A R I S - VI°.
Tél. Littré 78-59.

oo
o

PRIX : 55 FRS.

O M M I S S I O N

A la page 118, ajouter après :

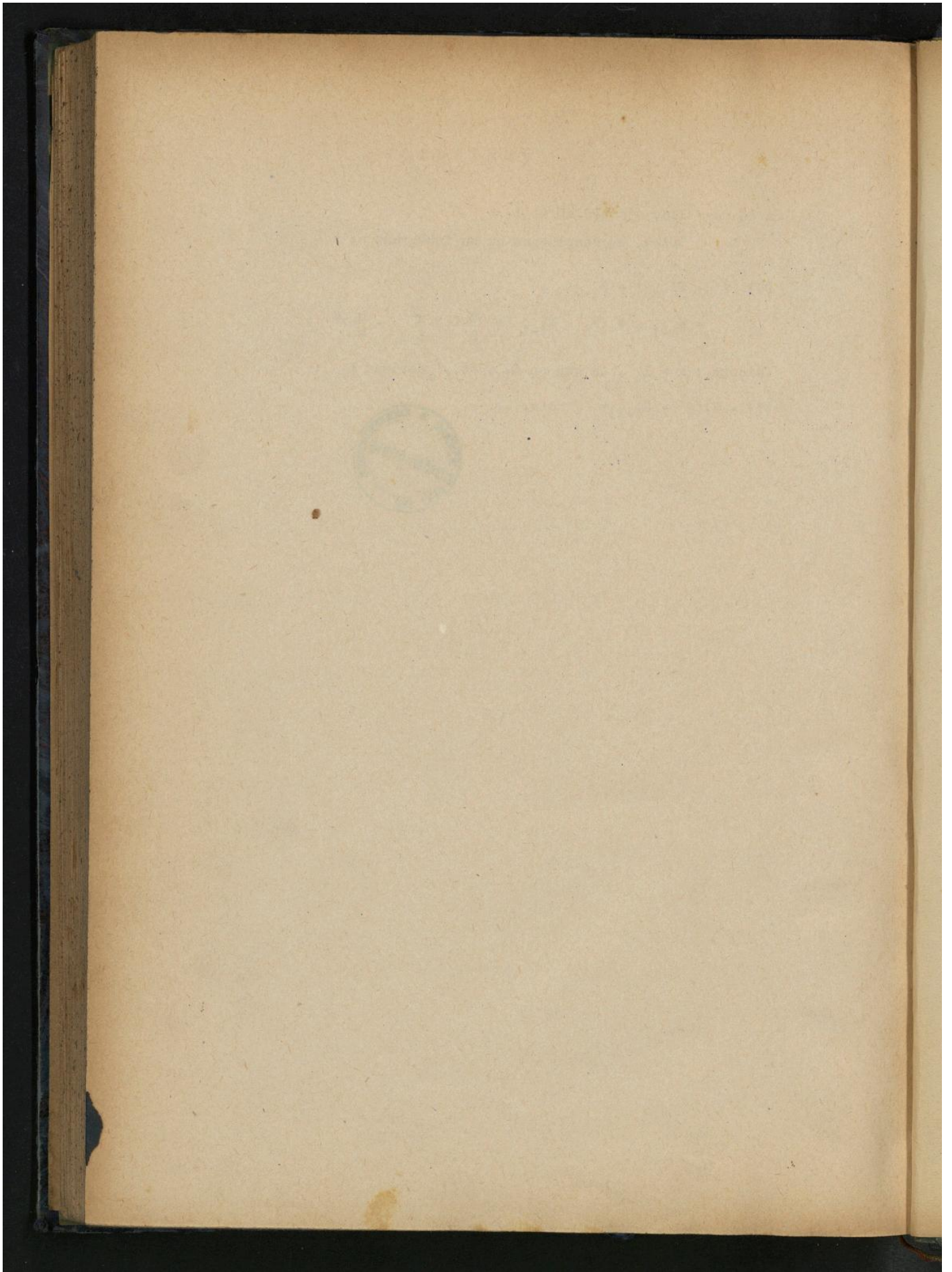
"D'où, en remplaçant et en intégrant : "

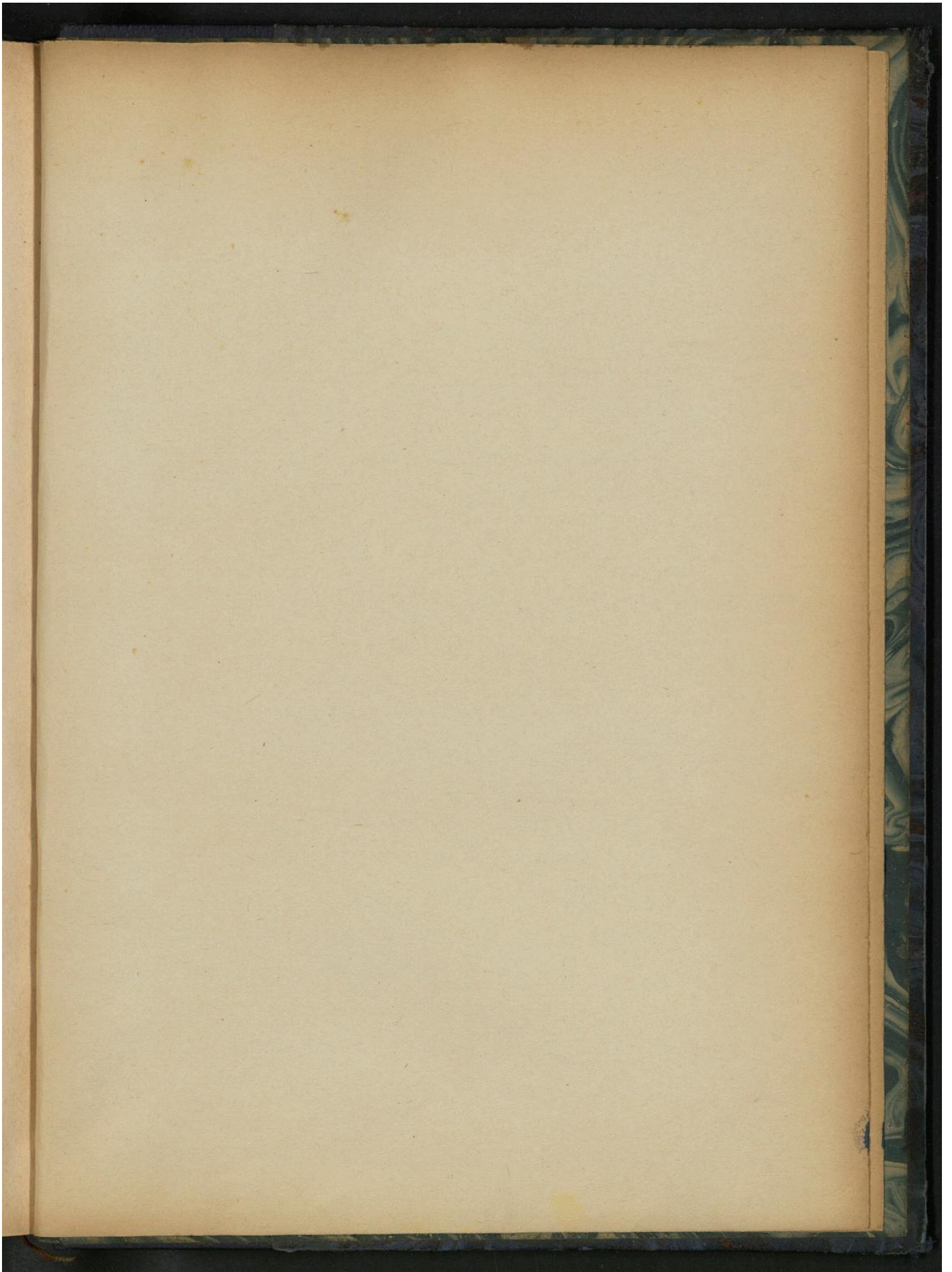
$$(6) \quad - EI (y' - S_{i-1}) = \\ = M_{i-1} x + (M_i - M_{i-1} + \frac{q l_i^2}{2 l_i}) \frac{x^2}{2 l_i} - \frac{q}{6} x^3 ,$$

faisons : $x = l_i$, on est en A_i , et y' devient t_i :

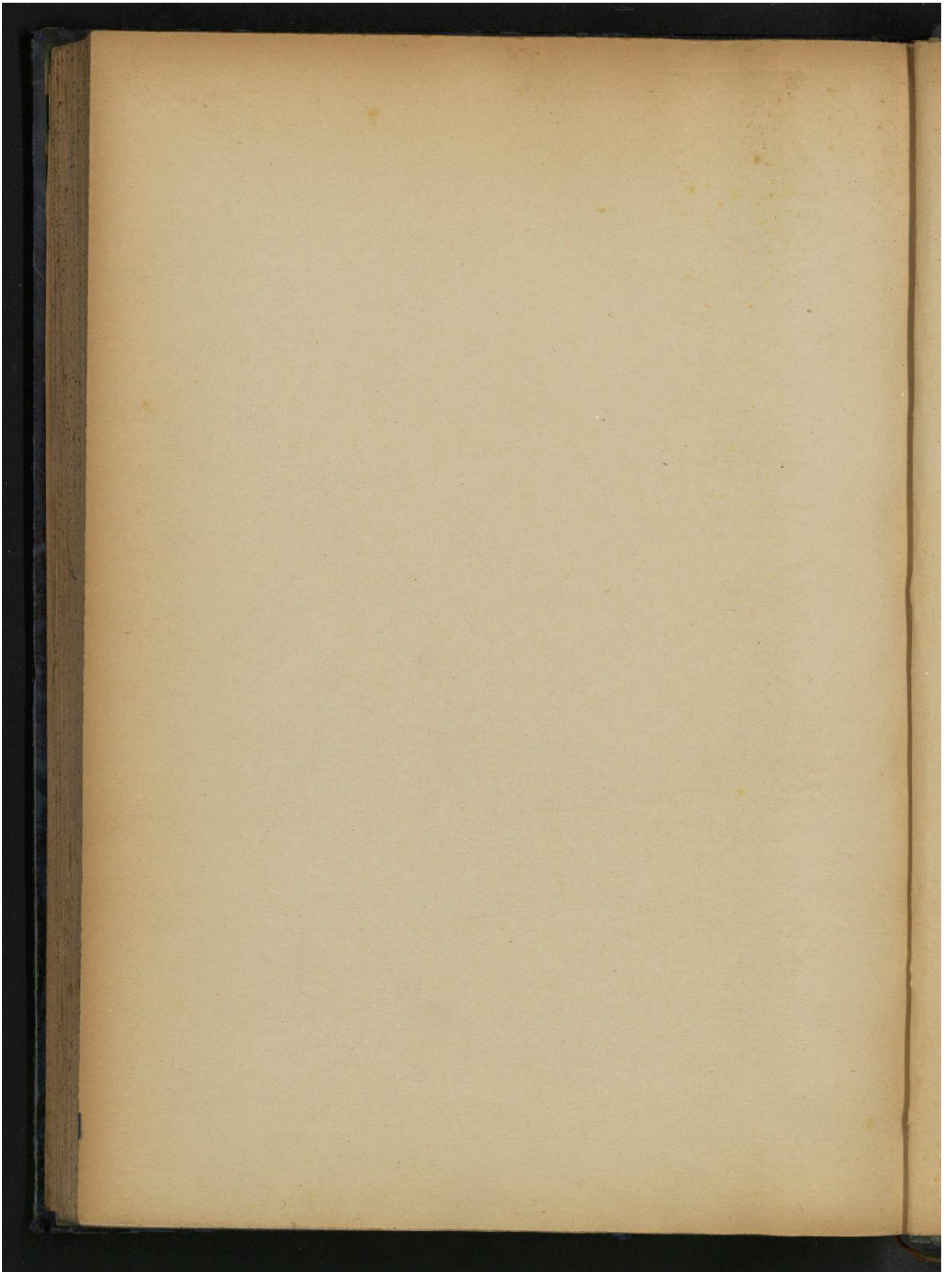
$$(7) \quad - EI(y' - S_{i-1}) = \quad \text{etc.....}$$

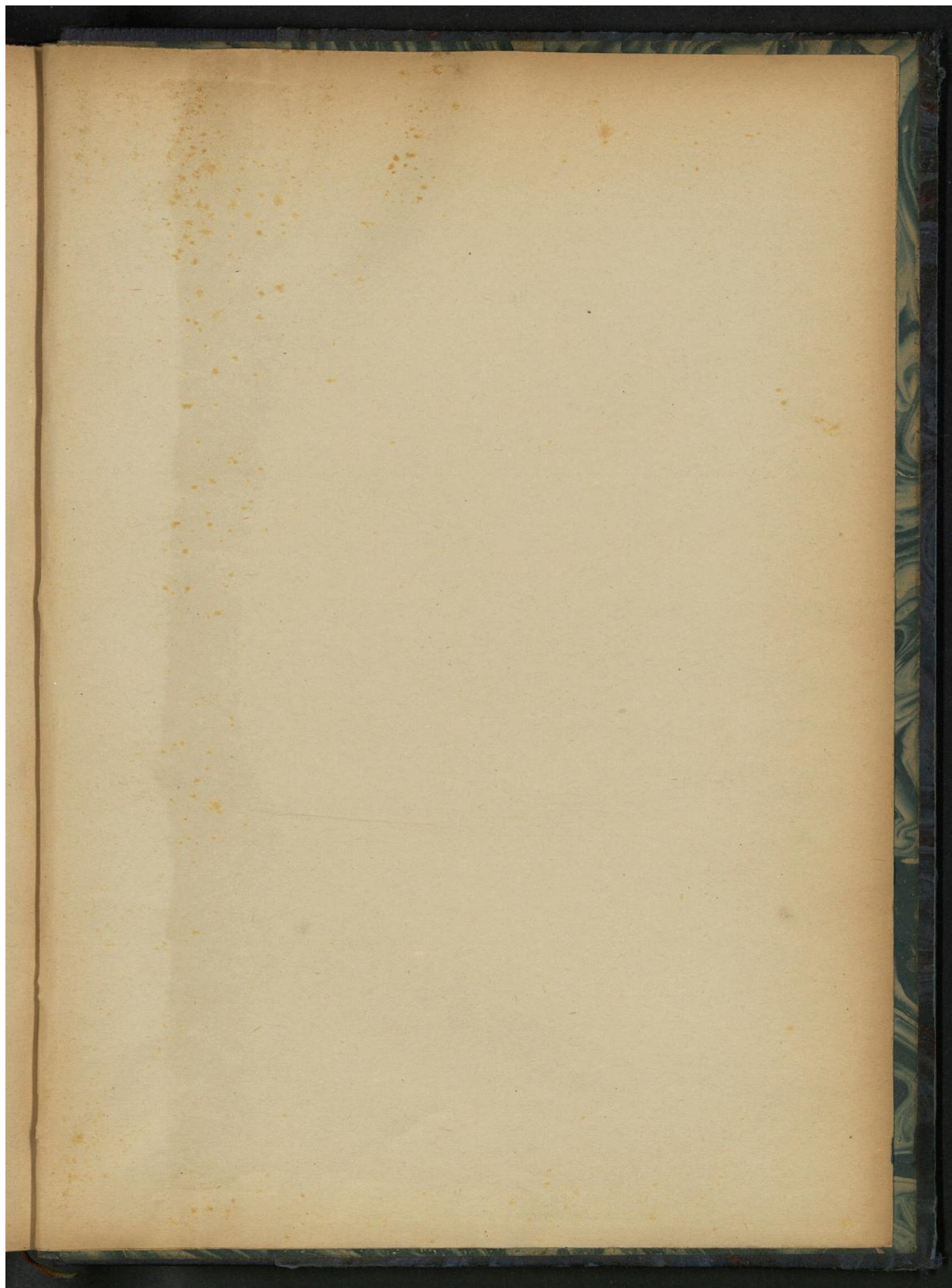


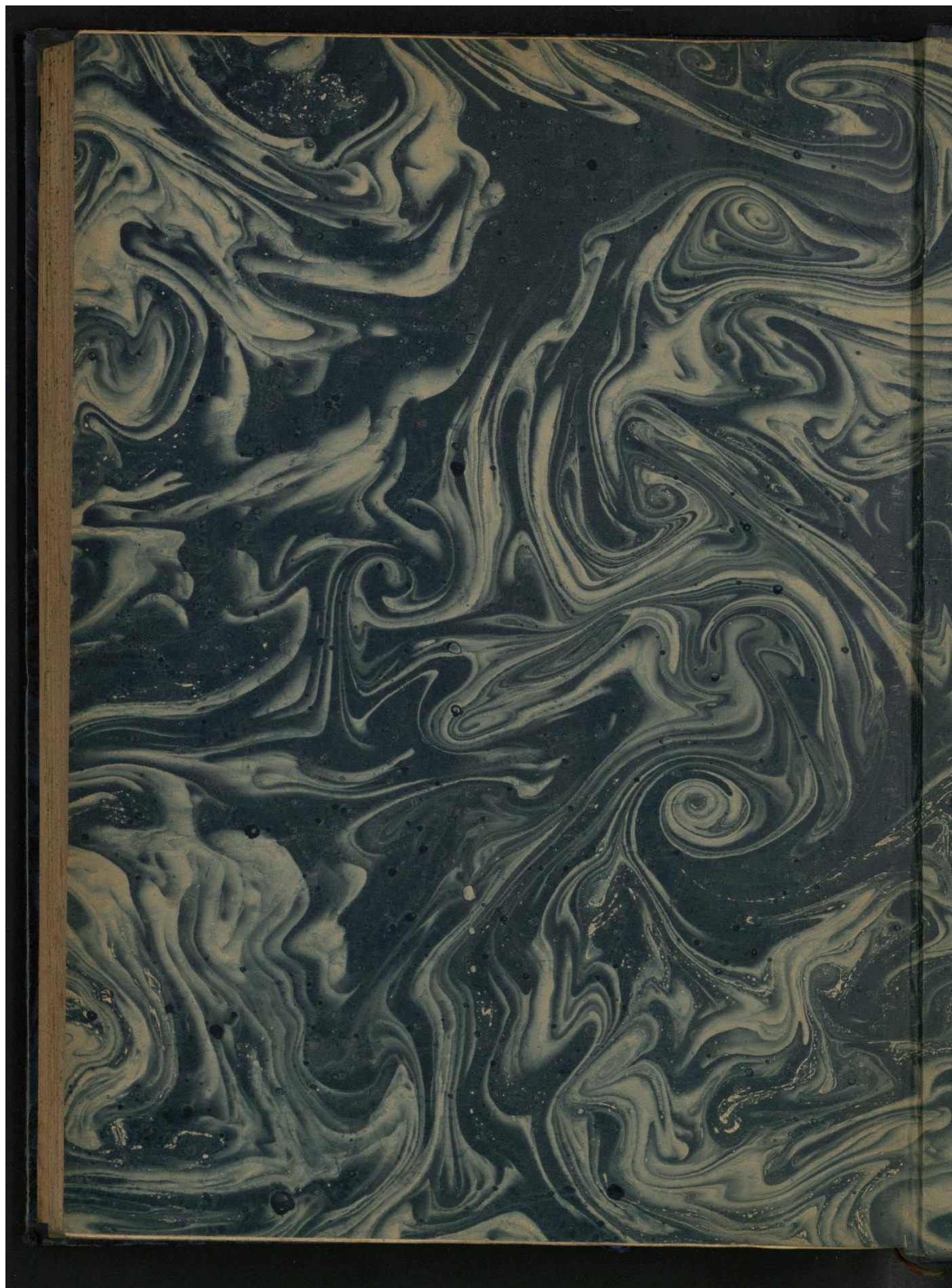




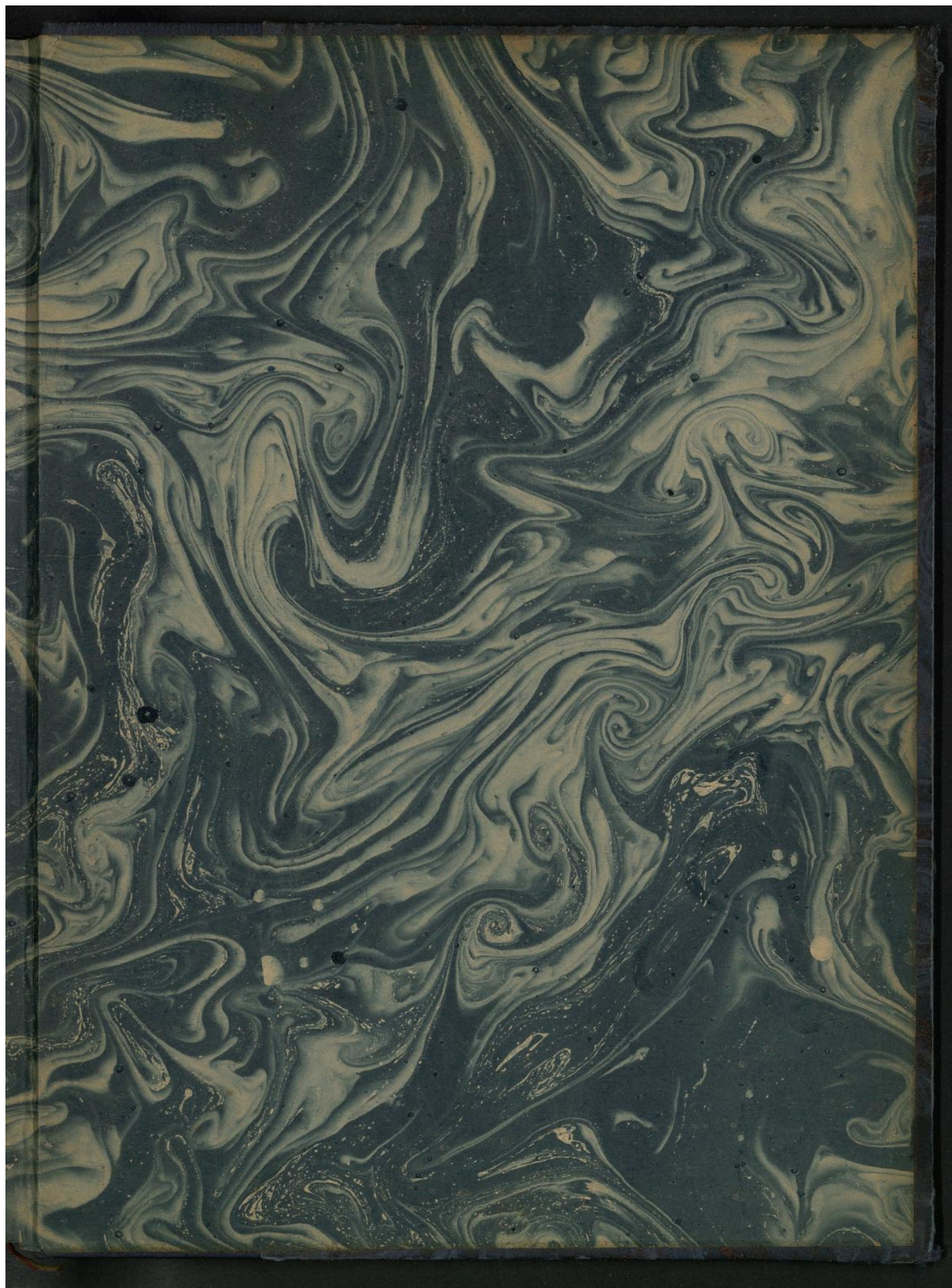
Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires







Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires



Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires