Conditions d’utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- Le Conservatoire numérique communément appelé le Cnum constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d’œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s’inscrit dans le cadre de la loi nº 78-753 du 17 juillet 1978 :

- **la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue (Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - http://cnum.cnam.fr)**
- **la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l’objet d’une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.**

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- **les reproductions de documents protégés par le droit d’auteur, uniquement consultables dans l’enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l’autorisation préalable du titulaire des droits.**

4- Pour obtenir la reproduction numérique d’un document du Cnum en haute définition, contacter cnum(at)cnam.fr

5- L’utilisateur s’engage à respecter les présentes conditions d’utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d’une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

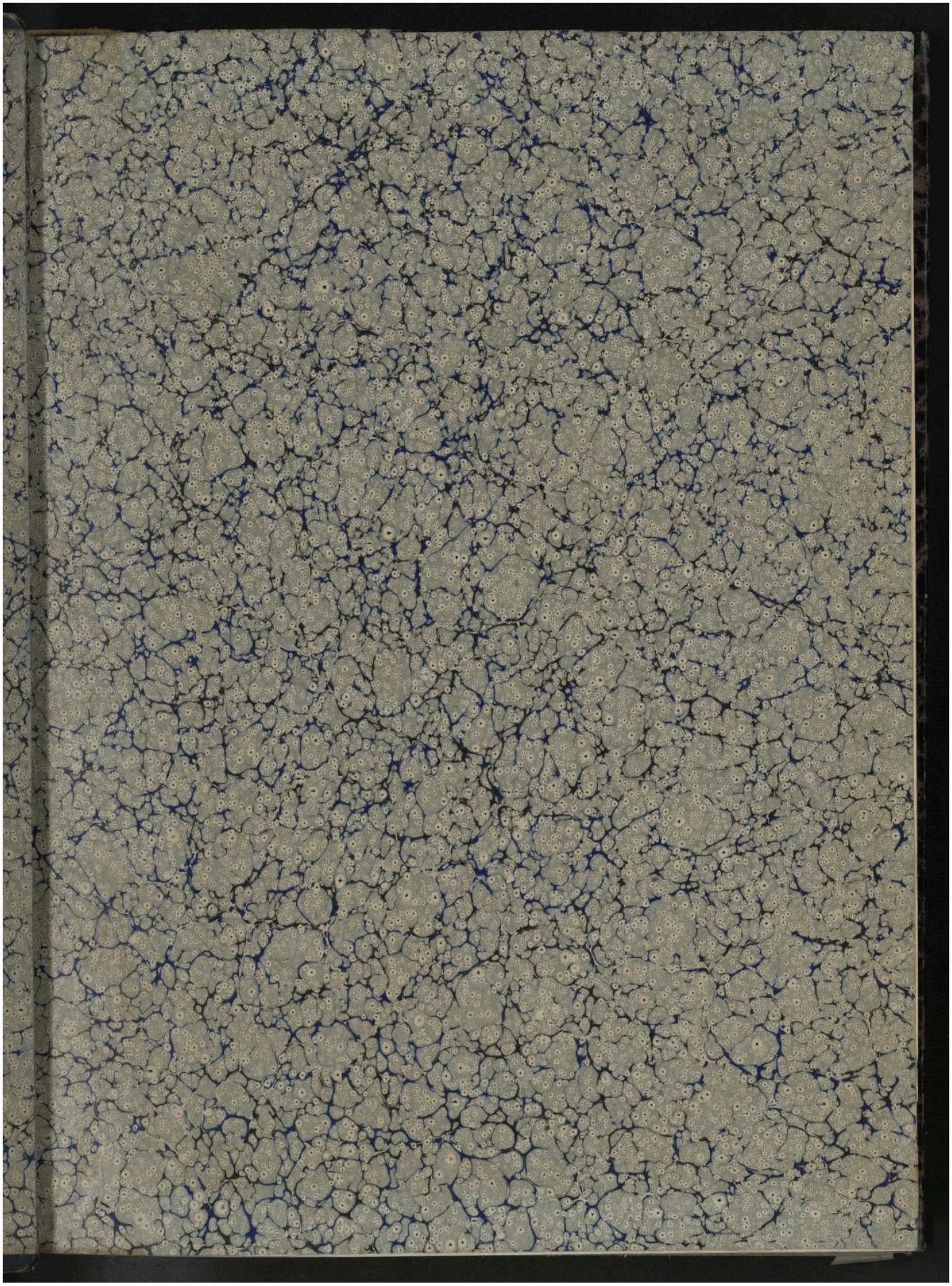
6- Les présentes conditions d’utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

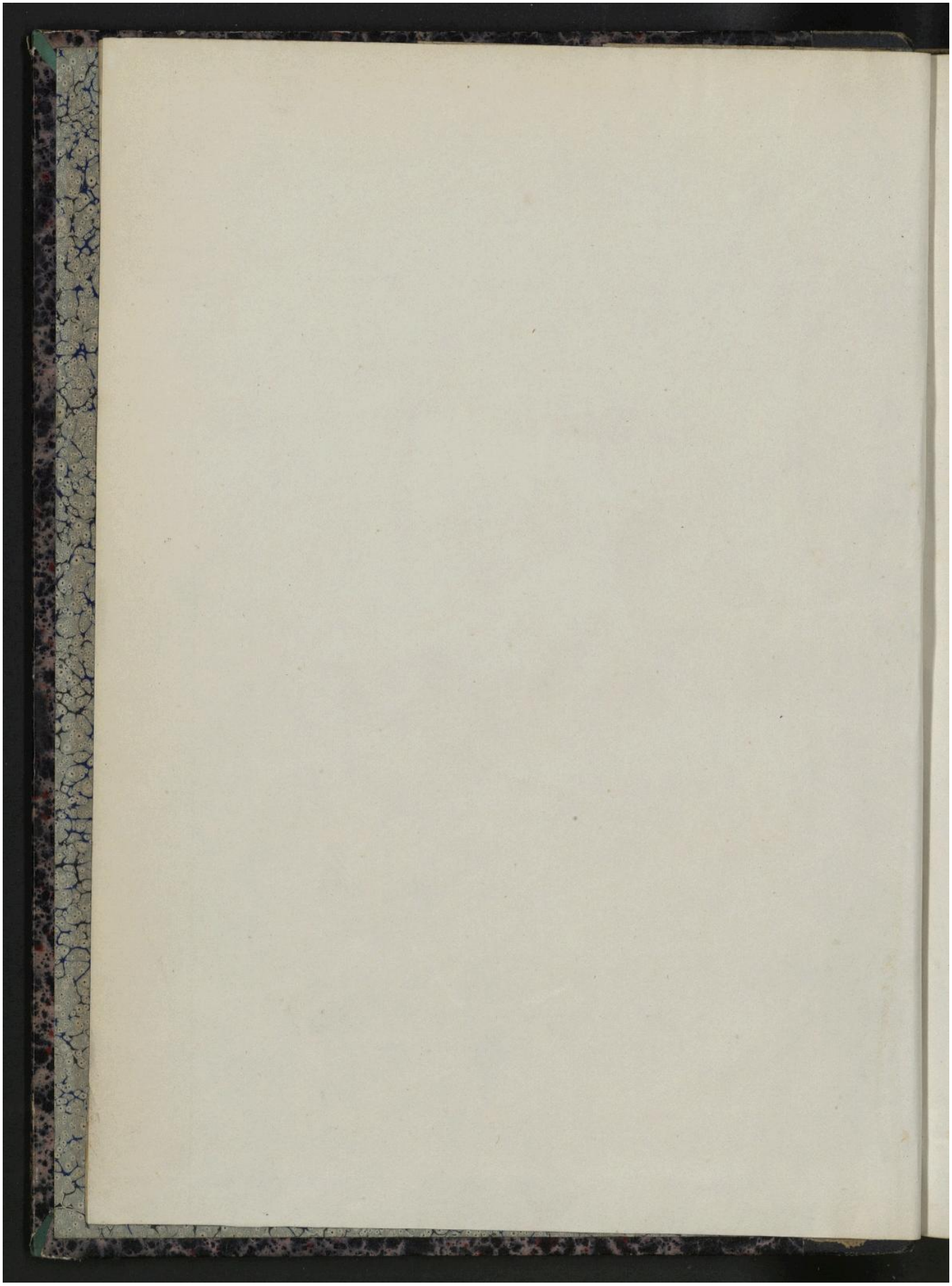
NOTICE DE LA GRANDE MONOGRAPHIE	
Auteur(s) ou collectivité(s)	Tresca, Henri-Édouard
Auteur(s)	Tresca, Henri-Édouard (1814-1885)
Auteur(s) secondaire(s)	École centrale Paris
Titre	Cours de mécanique appliquée
Collation	4 vol.
Nombre de volumes	4
Sujet(s)	Mécanique appliquée -- Manuels d'enseignement supérieur
Permalien	http://cnum.cnam.fr/redir?4DY35
LISTE DES VOLUMES	Cours de mécanique appliquée : [2ème année] : année scolaire 1865-66
	Cours de mécanique appliquée : 2e division : 1867-1868
	Cours de mécanique appliquée : 2me division : 1872-1873
	Cours de mécanique appliquée : 1re division : 1882-1883

NOTICE DU VOLUME	
Auteur(s) volume	Tresca, Henri-Édouard (1814-1885)
Auteur(s) secondaire(s) volume	École centrale Paris
Titre	Cours de mécanique appliquée
Volume	Cours de mécanique appliquée : 2e division : 1867-1868
Adresse	[Paris] : Lith. A. Donnadieu, [1868]
Collation	4 parties en 1 vol. (XX-252 p., 158 p., 79 p., 97 p.) : ill. ; 29 cm
Nombre de vues	623
Cote	CNAM-BIB 4 Dy 35 (2) (P.1)
Sujet(s)	Constructions -- Stabilité -- Manuels d'enseignement supérieur Frottement -- Manuels d'enseignement supérieur Mécanique appliquée -- Manuels d'enseignement supérieur Résistance des matériaux -- Manuels d'enseignement supérieur
Thématique(s)	Machines & instrumentation scientifique
Typologie	Ouvrage
Langue	Français
Date de mise en ligne	20/05/2021
Date de génération du PDF	24/02/2022
Permalien	http://cnum.cnam.fr/redir?4DY35.2.1

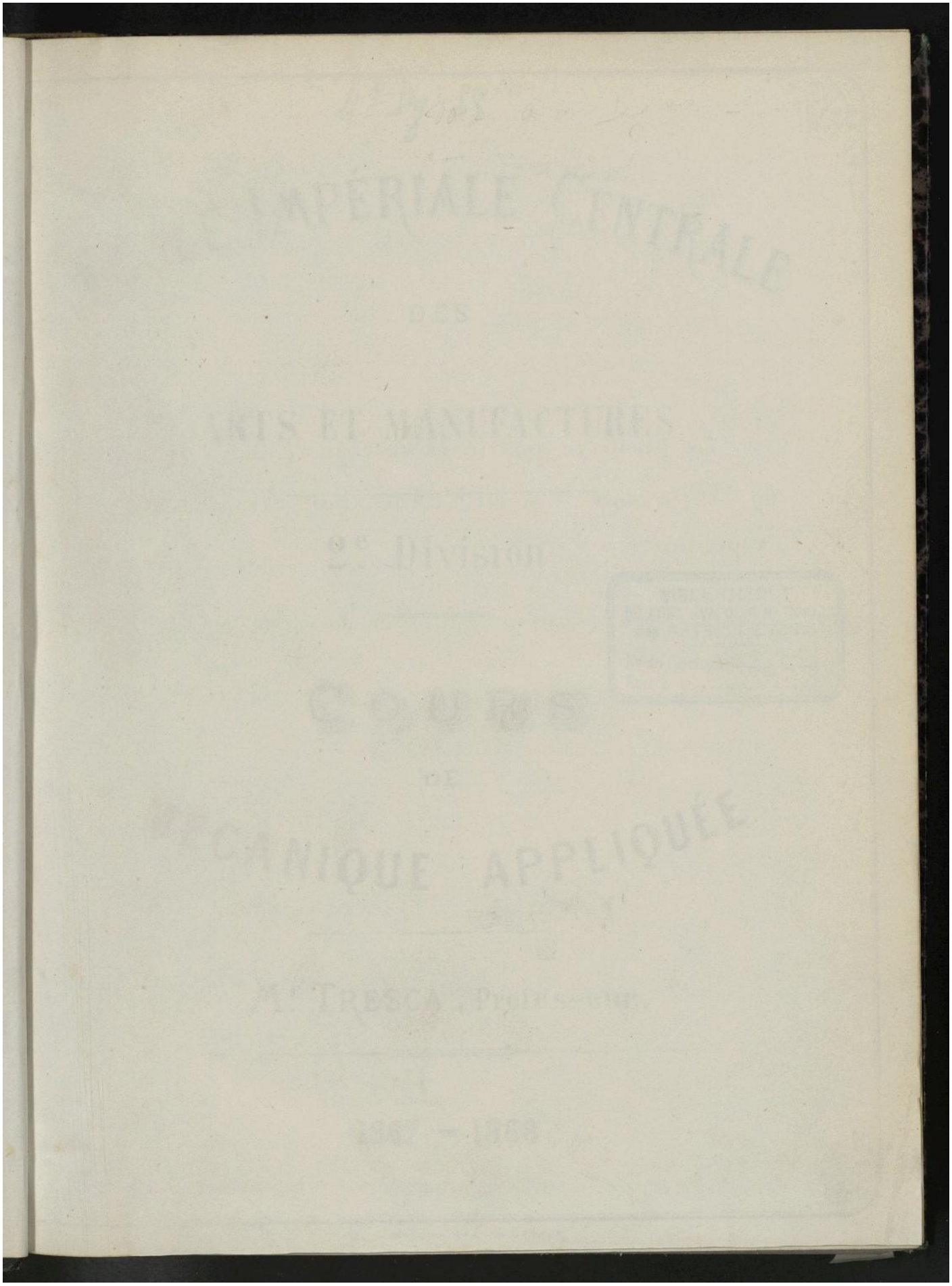
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



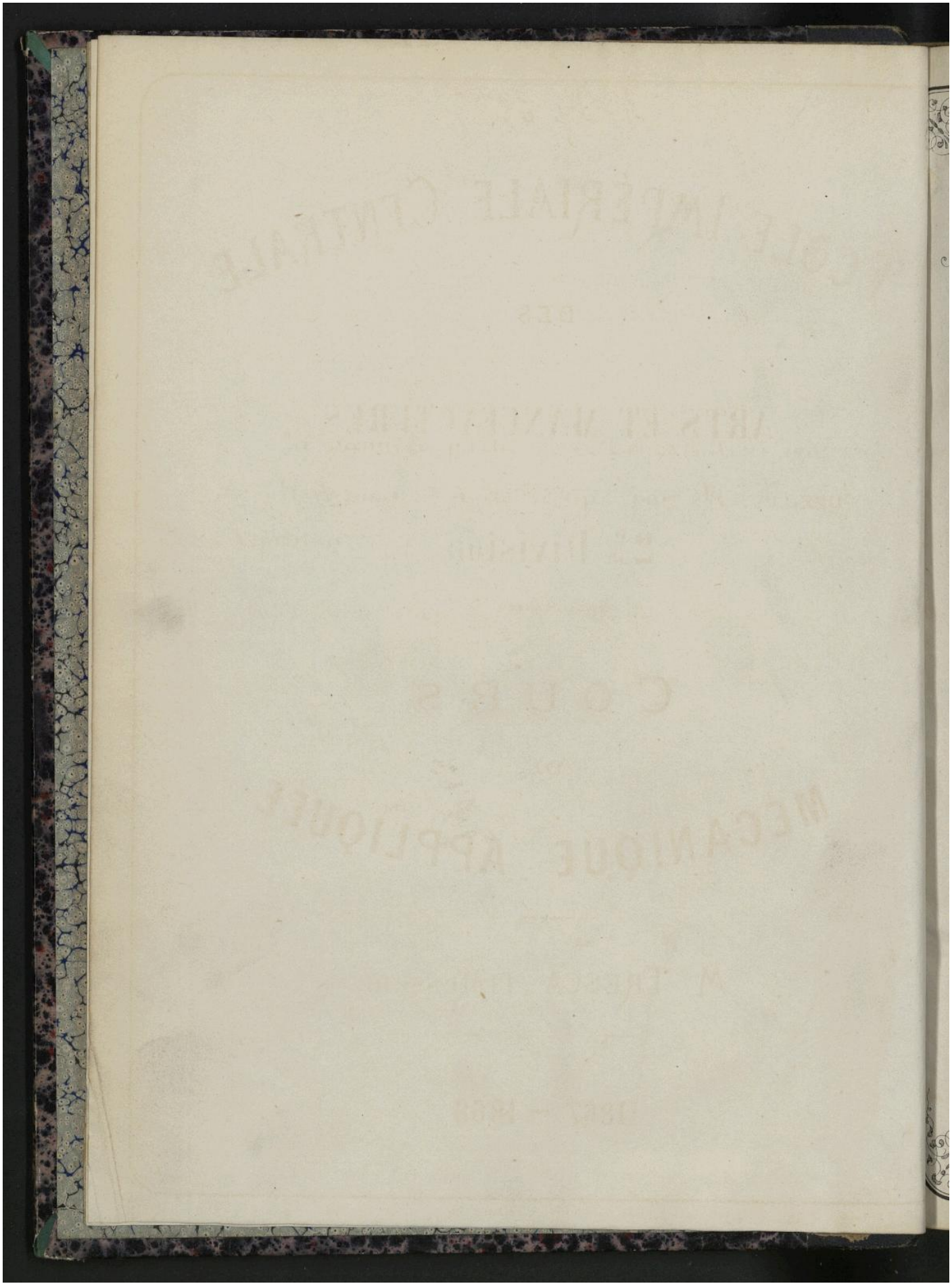
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4° Dy 35 (2) (P.1)

ÉCOLE IMPÉRIALE CENTRALE

DES

ARTS ET MANUFACTURES

2e Division

BIBLIOTHÈQUE
DU CONSERVATOIRE NATIONAL
des ARTS ET MÉTIERS
N° du Catalogue
Entrée le

COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Mr TRESCA, Professeur.

1867 — 1868

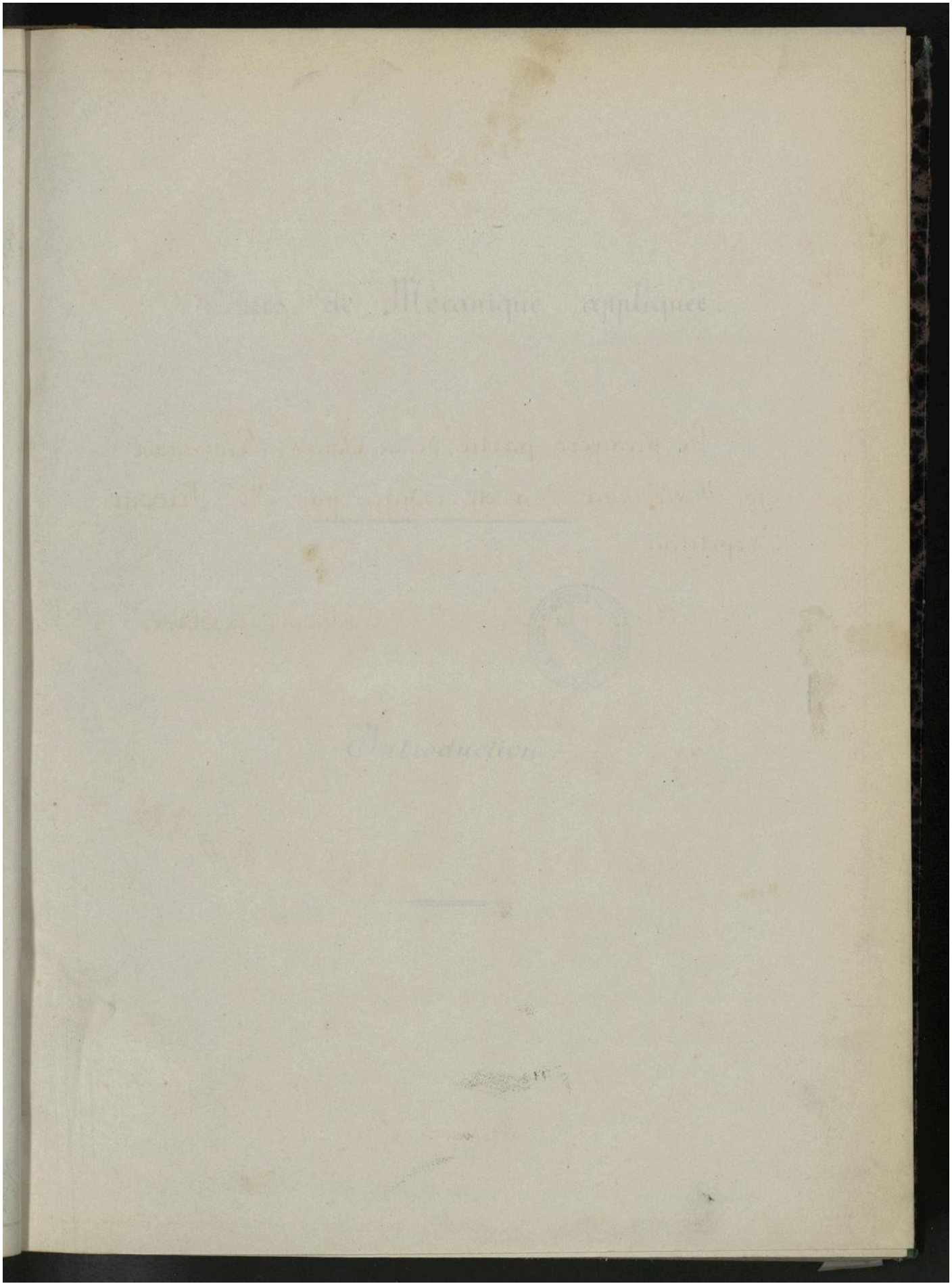
Lith. A. DONNADIEU, Rue du Foin, 3 (Marais)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

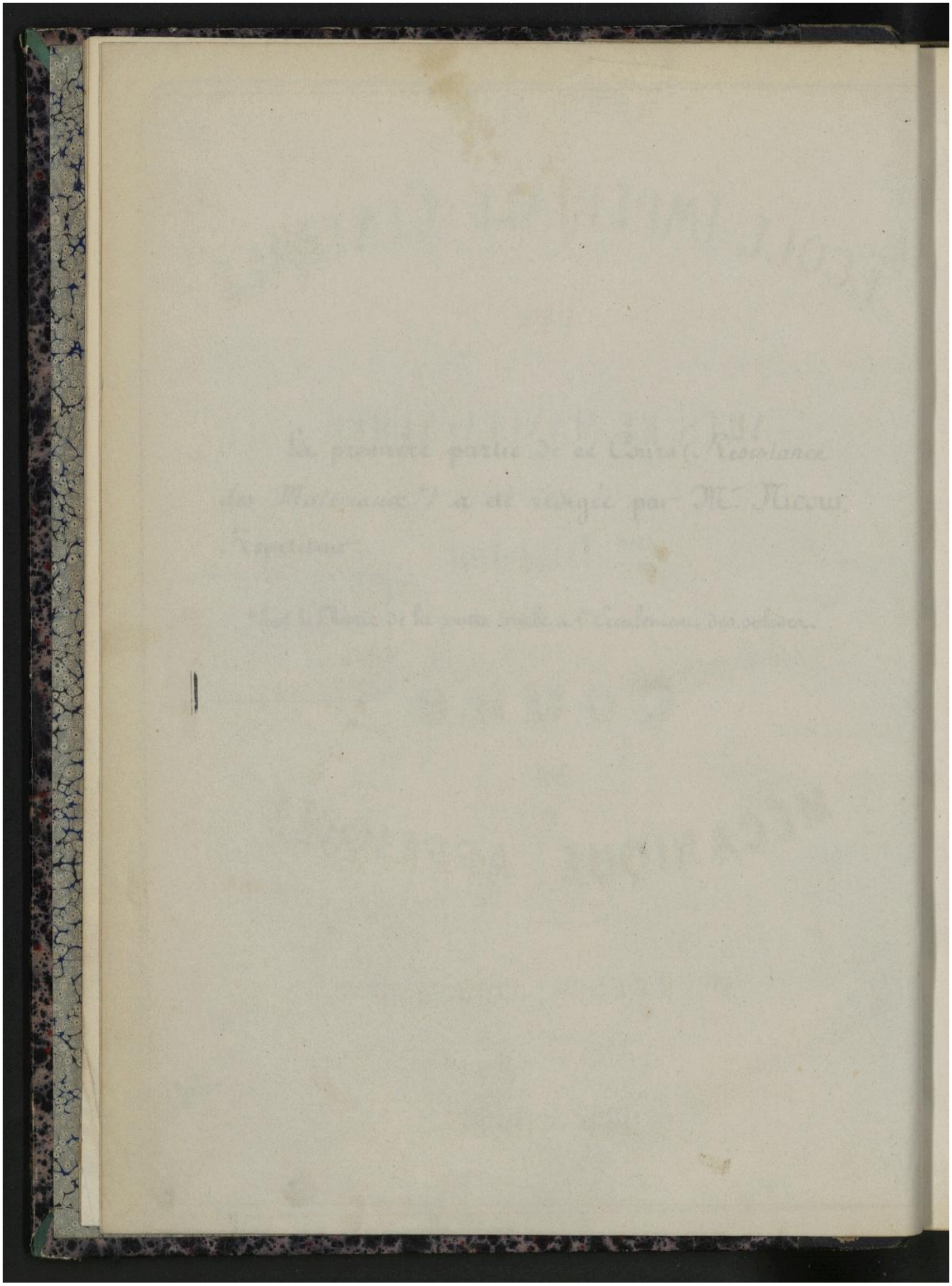
La première partie de ce Cours (Résistance des Materiaux *) a été rédigée par M. Nicour, Répétiteur.

*Sauf la Théorie de la poutre courbe et l'Ecoulement des solides.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

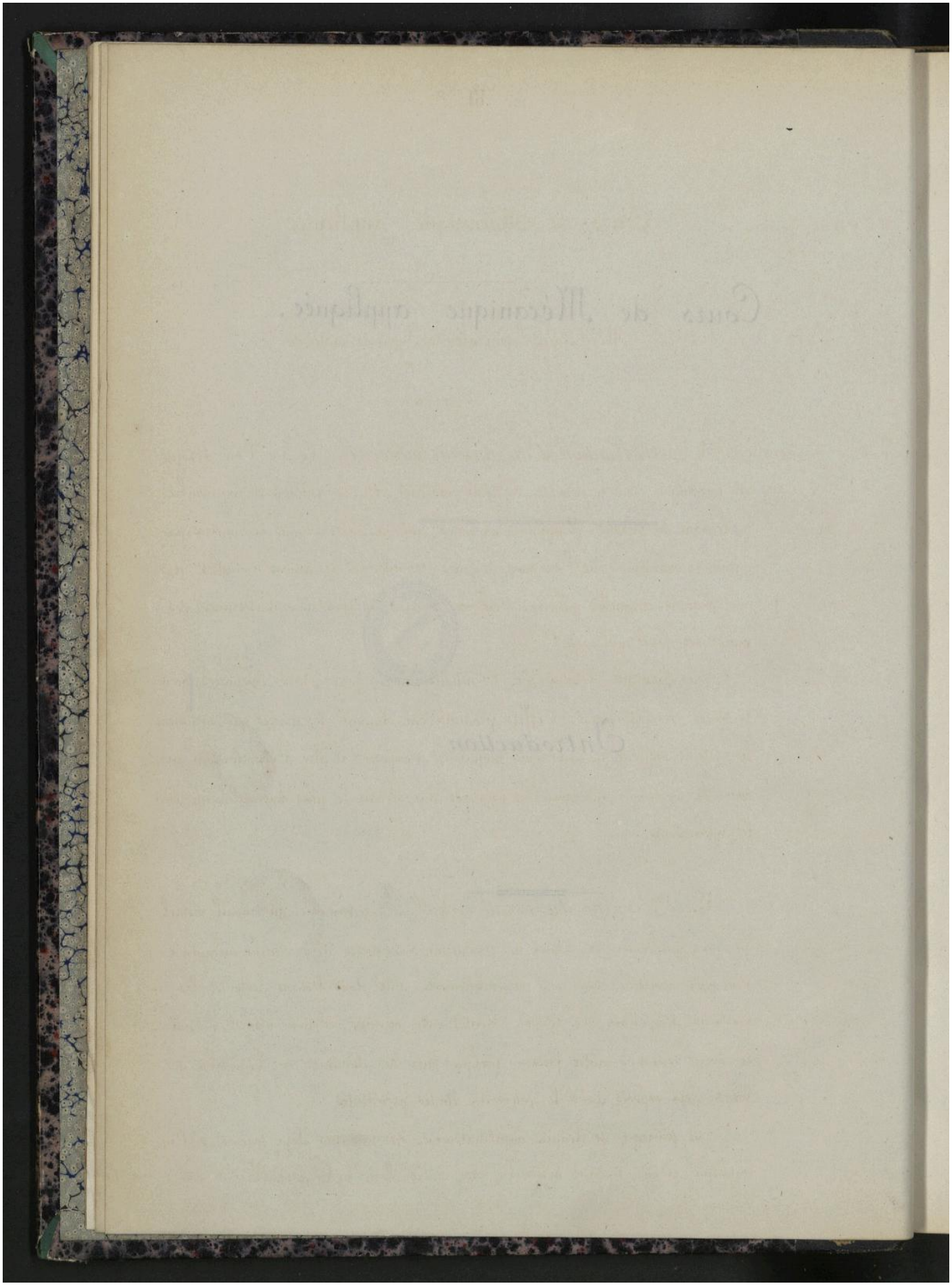


Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cours de Mécanique appliquée.

Introduction.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cours de Mécanique appliquée.

Mécanique générale des Systèmes matériels.

I. — *Définition d'un système matériel.* — Ce que l'on désigne en mécanique sous le nom de système matériel, est la réunion d'un nombre quelconque de masses, élémentaires ou finies, qui sont liées les unes aux autres par certaines conditions, que l'on peut toujours assimiler à des actions mutuelles, et sur chacune desquelles peuvent d'ailleurs s'exercer indépendamment les unes des autres des forces quelconques.

Les effets que déterminent les actions de ces forces, tant extérieures qu'intérieures, se déduisent des effets produits sur chacune des masses qui constituent le système matériel et nous nous proposons d'exposer à titre d'introduction au cours de mécanique appliquée, les principes qui servent le plus habituellement dans les applications.

2. — *Principe du travail virtuel.* — Le principe du travail virtuel qui peut facilement se déduire des connaissances acquises déjà sur la mécanique d'un point matériel, nous sera particulièrement utile, dans l'étude de toutes les questions d'équilibre qui doivent bientôt nous occuper. Il nous permettra d'ailleurs de revoir sous une autre forme, quelques uns des théorèmes sur l'équilibre des forces, déjà exposés dans le cours des études précédentes.

Ce principe se déduit immédiatement des principes déjà connus, si l'on remarque qu'un système matériel, n'est autre chose qu'un assemblage de points

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

matériels soumis individuellement à certaines forces, et exerçant en outre les uns par rapport aux autres, des actions qui tendent dans certains cas à modifier leurs positions relatives.

En désignant les forces extérieures par des lettres majuscules, les forces intérieures par des lettres minuscules, nous pourrons considérer en particulier chaque point matériel m' du système auquel seront appliquées les seules forces F', f'_1, f'_2 &c....., ces dernières, étant en nombre aussi grand que l'on voudra, en exprimant les forces que chacun des autres points du système exerce en particulier sur le point m'.

Si le point m' est en équilibre, la résultante de toutes ces forces devra être nulle, et par conséquent aussi la somme des projections de toutes ces forces sur une direction quelconque que nous désignerons par celle d'un chemin élémentaire quelconque ds'.

On aura donc pour le point m', en vertu des règles de la composition des forces concourantes

$$F' \cos(F', ds') + f'_1 \cos(f'_1, ds') + f'_2 \cos(f'_2, ds') \ldots\ldots = 0$$

L'égalité précédente subsistera encore si nous multiplions tous les termes du premier nombre par un déplacement infiniment petit ds', du point m', dans cette direction, ce qui donne :

$$F' \cos(F', ds')\, ds' + f'_1 \cos(f'_1, ds') + f'_2 \cos(f'_2, ds')\, ds' \ldots = 0$$

Chacun des termes de cette expression représenterait le travail de chacune des forces, si le déplacement ds', avait effectivement lieu, et l'on appelle travail virtuel de chacune d'elles, ce même travail lorsqu'il correspond à un déplacement idéal et hypothétique que nous considérons en ce moment.

En désignant le travail virtuel par la dénomination $\mathcal{C}_v$, on peut écrire la même relation sous cette forme nouvelle

$$\mathcal{C}_v F' + \mathcal{C}_v f'_1 + \mathcal{C}_v f'_2 + \ldots\ldots = 0.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la direction de l'élément ds', étant d'ailleurs quelconque.

On arriverait à une relation semblable par le point m'', sollicité par les forces F'', f''_1, f''_2 ...., et l'on aurait ainsi autant d'équations distinctes que l'on pourra considérer de points distincts.

Nous avons ainsi autant d'équations d'équilibre que nous voudrons ; chacune d'elles doit être absolument vérifiée si le système matériel est en équilibre quelle que soit la direction ds' choisie arbitrairement, et nous pourrons encore exprimer ces mêmes conditions d'équilibre au moyen d'autres relations que nous obtiendrons en combinant algébriquement d'une manière quelconque les relations précédentes.

Parmi ces combinaisons, la plus simple est celle qu'on obtient, en faisant la somme de toutes les relations qui concernent chacun des points matériels, ce qui donne immédiatement ; sous la forme la plus abrégée :

$$\Sigma \left(\mathcal{C}_v F + \Sigma \mathcal{C}_v f \right) = 0 .$$

Cette relation est l'expression la plus usitée du principe du travail virtuel qui doit s'énoncer ainsi qu'il suit :

Lorsque l'équilibre existe entre les forces qui agissent sur un système matériel, la somme algébrique des travaux virtuels de toutes les forces extérieures et intérieures est nulle.

On remarquera d'ailleurs que cette relation en contient implicitement autant d'autres que l'on voudra, puisque l'on pourra varier les déplacements infiniment petits, tout à fait arbitraires en grandeur et en direction, sans pour cela que l'équation fondamentale cesse d'être satisfaite.

Lorsque le travail des forces intérieures ou mutuelles est nul séparément, ce qui arrive toutes les fois que le corps est parfaitement solide et que les distances entre les points matériels qui le constituent restent invariables, l'équation se réduit à $\Sigma \mathcal{C}_v F = 0$.

C'est sous cette forme que nous aurons souvent à en faire l'application

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et c'est sous cette forme aussi qu'elle conduit, par des considérations très simples à l'établissement des conditions fondamentales, relatives à l'équilibre des corps parfaitement solides.

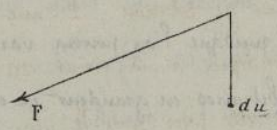
Nous indiquerons seulement ces déductions pour les formules les plus importantes.

3. — *Conditions résultant de la considération du mouvement virtuel de translation.* Si nous considérons un mouvement virtuel de translation $d u$ appliquée à tout le système matériel dans une direction déterminée, chacun des travaux virtuels sera représenté par une expression de la forme $F_u \times d u$, qui revient à $F \cos(F, du) \times d u$.

Après l'introduction de chacune de ces expressions dans la formule générale du travail virtuel appliqué aux solides, nous pourrons diviser par le facteur commun $d u$, ce qui donnera

$$\Sigma F \cos(F, d u) = 0$$

et comme la direction $d u$ est arbitraire, nous aurons séparément cette même relation pour des directions quelconques, et en particulier pour celles de trois axes non situés dans un même plan, ce qui donne, parmi les conditions nécessaires pour l'équilibre, les trois relations :



$$\Sigma F x = 0, \quad \Sigma F y = 0, \quad \Sigma F z = 0,$$

et revient à dire que, dans le cas d'équilibre, les projections des forces sur trois axes sont séparément nulles.

On déduit d'ailleurs de la relation générale que cela est vrai pour un axe quelconque, et par conséquent la somme algébrique des projections de toutes les forces, sur un axe quelconque, est nécessairement nulle, ce qui exige absolument :

1°. — Que les unes fassent avec l'axe des angles aigus, les autres

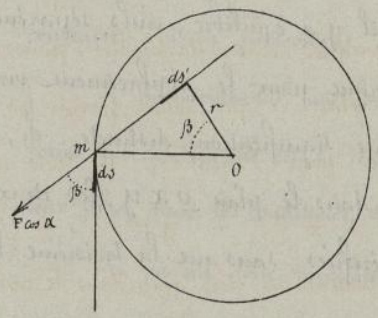
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des angles obtus ;

2°. — Que la somme des projections de l'une des séries soit égale à la somme des projections de l'autre série.

Nous ajouterons que ces trois équations ont une signification distincte, ou en d'autres termes que l'une d'elles n'est pas la conséquence nécessaire des deux autres ; il suffira de démontrer cette indépendance pour un cas particulier pour qu'elle soit démontrée d'une manière générale, et il est facile de voir que si toutes les forces étaient parallèles à l'axe des z, par exemple, les deux premières équations étant évidemment satisfaites, la troisième conserverait alors une valeur tellement individuelle que ce serait sur elle que reposerait la principale condition d'équilibre.

4. — *Condition résultant de la considération du mouvement virtuel de rotation.* — Si au lieu de considérer un mouvement virtuel de translation commun, nous supposons un mouvement de rotation de tout le système matériel solide, nous serons conduits à d'autres équations d'équilibre.



Soit O la projection de l'axe commun de rotation, F une force quelconque appliquée au point m, et α l'angle de cette force avec le plan du tableau, supposé perpendiculaire à l'axe, le travail virtuel de la force F pour un déplacement ds du point m sera

$$F \cos\alpha \times ds \times \cos\beta$$

ou en remarquant que $ds \cos\beta = ds'$, en comptant l'arc ds' sur la circonférence tangente à la projection de F

$$F \cos\alpha \times ds'$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si nous désignons par $d\sigma$, le déplacement correspondant pour un point situé à un mètre de distance de l'axe $ds' = r\,d\sigma$, et par suite, le terme que nous considérons devient $(F\cos\alpha \times r)\,d\sigma$.

L'équation du travail virtuel devient alors :

$$\Sigma(F\cos\alpha \times r)\,d\sigma = d\sigma \Sigma M_o F = 0 .$$

En remarquant que $F\cos\alpha \times r$, n'est autre chose que le moment de la force F par rapport à l'axe O.

On pourrait raisonner de même pour trois axes O_x, O_y, O_z, non situés dans le même plan, ce qui donnerait séparément, en divisant toujours par $d\sigma$

$$\Sigma M_{ox} F = 0 \quad , \quad \Sigma M_{oy} F = 0 \quad , \quad \Sigma M_{oz} F = 0 .$$

Nous voyons ainsi qu'en considérant les moments par rapport à l'un de ces axes, le système en équilibre devra comporter des moments positifs et des moments négatifs d'égale somme.

En opérant de cette manière, nous retrouvons les trois conditions relatives aux moments d'un système de forces qui, pris par rapport à trois axes, doivent être, lorsqu'il y a équilibre, nuls séparément.

On montrerait que, comme pour le déplacement virtuel de translation, ces trois équations ont une signification distincte. Si, par exemple toutes les forces étaient situées dans le plan oxy, les deux premières équations des moments seraient vérifiées, sans que la troisième le soit nécessairement.

Il est facile de reconnaître que les trois conditions relatives à l'égalité des moments sont indépendantes des trois premières. Elles seraient satisfaites pour un nombre quelconque, passant toutes par l'origine, et il est évident que cette condition n'est pas à elle seule suffisante pour assurer l'équilibre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous verrons en outre, que, prises collectivement, les six conditions qui viennent d'être établies, expriment complètement l'équilibre d'un corps solide.

Nous ferons remarquer que ces relations sont tout à fait générales, et elles seraient encore applicables à un système non indéformable à la condition de comprendre parmi les forces à considérer toutes les forces intérieures que nous avions précédemment représentées par la notation f.

5.— *Notions sur l'équivalence de deux systèmes de forces.* — Pour un système matériel, comme pour un point isolé, on dit que deux systèmes de forces sont équivalents, lorsqu'ils produisent les mêmes effets. Il résulte immédiatement de cette définition, et de la complète généralité de l'équation du travail virtuel dans les corps solides, que deux systèmes équivalents pourront se remplacer mutuellement dans cette équation, car, par cela seul, que ces systèmes sont équivalents, ils pourront l'un et l'autre être introduits séparément dans l'équation du travail virtuel avec un système égal et d'effet contraire à l'un quelconque d'entr'eux.

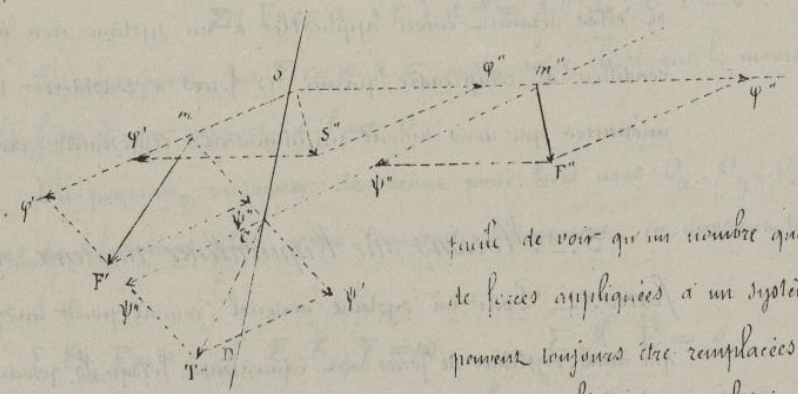
Si, ainsi entendue, une force unique est équivalente à un système de plusieurs forces, on dit qu'elle est la résultante de ces forces, et elle peut être introduite à leur place dans les conditions d'équilibre.

On pourra donc remplacer un système quelconque par son équivalent, par exemple, remplacer des forces par leur résultante ou inversement ; ajouter plusieurs forces et une force égale opposée à leur résultante ; transporter une force, dans sa direction en un point quelconque d'un solide, ou en un point qui y serait relié d'une manière invariable, &c &c. car par cela seul que ces systèmes sont équivalents, ils pourraient l'un et l'autre être introduits séparément dans l'équation du travail virtuel avec un système

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

égal et d'effet contraire à l'un quelconque d'entr'eux.

6. — *Réduction d'un nombre quelconque de forces à deux forces équivalentes.* — En partant de cette notion des forces équivalentes, il est



facile de voir qu'un nombre quelconque de forces appliquées à un système matériel peuvent toujours être remplacées par deux forces dont l'une passerait par un point O, arbitrairement choisi.

Soient F', F'', F''', toutes les forces appliquées au système, nous mènerons d'abord par le point donné O et par chacune des deux premières forces F' et F'' deux plans qui se couperont suivant une droite OD.

Dans le plan F'OD, la force F' pourra être décomposée en deux autres forces φ' et ψ', l'une passant par le point O, l'autre par un point C choisi arbitrairement sur la ligne OD. La force F'' pourra de même être remplacée par deux forces φ'' et ψ'', appliquées respectivement aux mêmes points O et C.

A leur tour, les deux forces φ' et φ'' pourront donner lieu à une résultante unique S'' appliquée au point donné O, par lequel elles passent toutes deux, et les deux forces ψ' et ψ'' pourront de même être remplacées par une force unique T'' appliquée au point C, qui a été choisi arbitrairement sur l'intersection OD.

Le système primitif des forces sera donc remplacé par le nouveau système équivalent

S'' T'' F''' F'^{IV} . . . . .

dans lequel les forces sont encore en égal nombre, mais l'une d'elles S'' pas-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

maintenant par le point donné O.

Nous pourrons opérer de la même façon que précédemment par rapport aux deux forces T'' et T''', et composer ensuite la force passant par le point O avec la force S'' qui vient d'être déterminée, de manière à obtenir un nouveau système

$$S''' \; T''' \; F'' \ldots\ldots$$

dans lequel nous aurons une force de moins avec la condition que la force S''' passe encore par le point O.

En continuant cette série d'opérations, nous finirons par réduire toutes les forces du système à deux forces seulement S et T dont l'une S passera nécessairement, comme toutes celles de même nom, par le point donné O.

Donc un système quelconque de forces appliquées à un solide peut toujours se ramener à deux forces équivalentes, avec la condition que l'une d'elles passe par un point donné arbitrairement.

Cette propriété va nous servir à préciser davantage la signification des conditions générales de l'équilibre, et à faire voir que les six conditions énoncées sont toujours suffisantes lorsqu'il s'agit de l'équilibre d'un corps solide.

7. — Lorsque les composantes de translation sont nulles, le système se ramène à un couple. Nous venons de voir que le système de toutes les forces peut être remplacé par celui des deux forces S et T. Les équations tirées de la considération du mouvement de translation devront donc leur être applicables comme à celles du système primitif, et l'on a ainsi:

$$S_x + T_x = 0 \quad ; \quad S_y + T_y = 0 \quad ; \quad S_z + T_z = 0 .$$

Pour que ces sommes soient séparément nulles, il faut que l'on ait $S_x = -T_x$, $S_y = -T_y$, $S_z = -T_z$, ce qui revient à dire que les deux forces S et T sont égales, parallèles et dirigées en sens opposés, ou en d'autres termes qu'elles forment un couple; ce qui démontre que lorsque les sommes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des projections des forces sur trois axes sont séparément nulles, on peut toujours remplacer ces forces par un couple équivalent.

8. — *Lorsque les sommes des moments sont nulles, le système se réduit à une résultante unique.* — La considération des forces équivalentes nous permettra d'établir avec la même facilité cette nouvelle proposition, car en remplaçant toutes les forces du système par les forces S et T, les équations relatives aux sommes des moments de toutes les forces pourront être remplacées par les équations suivantes :

$$M_{ox}\,S + M_{ox}\,T = 0\,, \qquad M_{oy}\,S + M_{oy}\,T = 0\,, \qquad M_{oz}\,S + M_{oz}\,T = 0\,.$$

Si les axes passent au point O, par lequel nous avons fait passer la force S, les moments de cette force S, par rapport aux trois axes, seront séparément nuls, ce qui ramène les équations précédentes à

$$M_{ox}\,T = 0\,, \qquad M_{oy}\,T = 0\,, \qquad M_{oz}\,T = 0\,.$$

D'où l'on peut conclure que la force T passe aussi par le point O, et que par conséquent elle peut se composer avec la force S, en une résultante unique R, ce qui prouve de dire que quand les sommes des moments de toutes les forces pris par rapport à trois axes sont séparément nuls, toutes ces forces peuvent être remplacées par une force unique passant par l'origine de ces axes.

9. — *Dans un système parfaitement solide, les conditions précédentes sont suffisantes pour l'équilibre.* — Il nous reste à faire voir que si les deux groupes de conditions d'équilibre, celles de translation et celles des moments sont satisfaites, il y a nécessairement équilibre. Il nous suffit pour cela, d'ajouter que les deux forces S et T, équivalentes au système primitif, étant, par suite de la condition de translation, égales, parallèles et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

opposées, elles doivent aussi, par suite de la condition des moments, passer par le même point O; ce sont donc deux forces égales et opposées, appliquées à un même point, et qui par conséquent se font équilibre.

Ces six conditions nécessaires sont donc aussi suffisantes, et nous reconnaissons ainsi que : Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre, et que nous avons si facilement obtenues par la considération du principe du travail virtuel, sont au nombre de six : trois d'entr'elles exprimant que les sommes des projections de toutes les forces, sur trois axes, sont séparément nulles; les trois autres exprimant que les sommes des moments des mêmes forces pris par rapport à trois axes, sont aussi nulles.

Les règles relatives à la composition des forces dans les différents cas particuliers se déduisent si immédiatement de ces conditions générales, que nous passerons en revue les circonstances les plus usuelles de cette composition, particulièrement en ce qui concerne les couples dont les propriétés sont, en général, moins bien étudiées que celles des forces concourantes ou des forces parallèles.

10. — *Application aux règles de la composition des couples.* — Sous ce titre nous passerons en revue les théorèmes principaux de la composition des couples.

1°. Le moment d'un couple est le même par rapport à un axe quelconque, perpendiculaire à son plan. Ce théorème se démontre comme une simple vérification géométrique, parce que, dans toutes les positions du point en lequel l'axe vient percer le plan, le moment du couple est toujours égal au produit de l'une des forces par la longueur de la perpendiculaire, élevée sur la direction commune des deux forces, et, comprise entre ces

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

deux forces.

2°_ Un couple ne peut être tenu en équilibre par une force unique ; car la résultante de translation des deux forces qui constituent le couple étant toujours nulle, il n'en peut être de même lorsque l'on introduit dans le système une troisième force.

3°_ Deux couples sont en équilibre lorsque leurs plans sont parallèles et leurs moments égaux et de signes contraires ; car si l'on prend un axe perpendiculaire à leur plan, les six équations d'équilibre sont satisfaites lorsqu'on considère cette axe comme appartenant à un système de trois plans de coordonnées rectangulaires. Ces six conditions d'équilibre se réduisent alors aux deux seules équations relatives à celui de ces plans qui est perpendiculaire à l'axe, et l'énoncé même du théorème montre que ces deux équations sont satisfaites.

4°_ Deux couples dont les plans sont parallèles et dont les moments sont égaux et de même signe sont équivalents ; car, chacun d'eux considéré individuellement, ferait équilibre à un couple parallèle, dont le moment serait égal et de signe contraire au sien.

5°_ Un couple peut toujours être remplacé par un couple équivalent, dans lequel une des forces a une grandeur donnée et une direction parallèle au plan du premier couple ; car la résultante de translation est nulle pour chacun des systèmes, par rapport à un axe quelconque, et les conditions d'équivalence se réduisent dès lors à celles de l'égalité entre les deux moments.

6°_ Un nombre quelconque de couples appliqués à un corps solide peuvent toujours se ramener à un seul couple. Cette règle est la conséquence immédiate de ce que la résultante de translation est nulle, et de ce que, dans ce cas, nous avons vu que toutes les forces peuvent se ramener

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à un seul couple.

7. — Un système quelconque de deux forces peut toujours se ramener à une force passant par un point donné et à un couple ; car ce système peut toujours être remplacé par deux forces, dont l'une passe par un point donné, et l'une de ces forces peut aussi être remplacée par deux composantes concourant au même point d'application ; l'une d'elles pouvant toujours être égale, parallèle et de sens contraire à l'autre force donnée, constituerait un couple avec elle.

Nous pourrions étudier d'une manière analogue la composition des forces concourantes ou des forces parallèles, mais les règles de cette composition sont trop connues pour qu'il soit utile d'y revenir.

11. — *Énoncé général du principe de D'Alembert.* — Le principe posé par D'Alembert en 1743 a une grande importance historique, parce qu'il a fourni une méthode générale et sûre de résoudre tous les problèmes du mouvement, en les ramenant à des problèmes d'équilibre. Il a mis fin aux incertitudes que comportaient jusqu'alors les méthodes de calcul employées dans les différentes applications, et il doit, sous ce rapport, être considéré comme un des principes les plus féconds de la mécanique.

Cependant il ne consiste réellement qu'en une simple extension donnée aux conditions d'équilibre en résultant immédiatement de l'égalité nécessaire entre l'action et la réaction, égalité qui avait été posée par Newton comme un axiome fondamental. Cette remarque permet de mieux comprendre le jeu de toutes les forces, qui se font équilibre dans le mouvement varié d'un système matériel.

Lorsqu'il s'agit d'un point matériel seulement, on sait que toute action qui apporterait une modification, soit dans sa vitesse, soit dans la direction

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de son mouvement, détermine des forces d'inertie dont l'expression a été calculée dans une autre partie de cet enseignement.

La force d'inertie i, ainsi développée, fait obstacle aux actions extérieures exercées sur le point matériel que l'on considère, et l'on peut dire qu'elle fait alors équilibre à la résultante F de ces actions.

Quand le point fait partie d'un système matériel, on peut, par la pensée, le dégager de ce système, en considérant par rapport à lui comme forces extérieures, toutes les actions résultant des liaisons de ce point avec les autres points du système, de sorte qu'on doit admettre alors que la force d'inertie i fait équilibre, tout à la fois, aux forces extérieures au système, qui sont appliquées au point considéré M, en même temps qu'à chacune des forces f qui expriment les actions que les autres points exercent sur lui.

On pourrait raisonner de la même façon pour chacun des points matériels du système, en considérant alors l'ensemble des forces qui exercent leur action sur le système, en y comprenant toutes les forces d'inertie, lui appliquer le principe général du travail virtuel qui contient à lui seul toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre.

D'après ces indications, le principe de D'Alembert devra être formulé ainsi qu'il suit : Dans le mouvement d'un système matériel quelconque, il y a équilibre en chaque instant entre les forces extérieures appliquées aux divers points du système, les forces intérieures résultant des liaisons des divers points, et les forces d'inertie de tous ces points.

Cette relation nous sera d'une grande utilité dans les questions de dynamique.

12. — *Expression générale du principe de D'Alembert.* En appliquant la formule du travail virtuel au principe de D'Alembert, consi-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

déré par rapport aux forces F, f et i, on a immédiatement :

$$\Sigma F \cos(F, \delta s)\,\delta s + \Sigma f \cos(f, \delta s)\,\delta s - \Sigma i \cos(i, \delta s)\,\delta s = 0$$

δs étant un déplacement virtuel quelconque, et chacune des forces d'inertie devant être considérée comme retardatrice.

Le dernier terme de cette formule représente le travail total de la force d'inertie pour un déplacement δs, et l'on sait qu'un point matériel, sollicité par des forces quelconques, a, sur la courbe qu'il parcourt, le même mouvement qu'il aurait sur une droite, s'il était à chaque instant sollicité suivant cette droite par une force égale à la force totale; on peut donc écrire, en désignant l'accélération par $\frac{d^2 s}{dt^2}$, $\quad i = m \frac{d^2 s}{dt^2}$,

En remplaçant chacune des forces F, f et i par ses composantes parallèles à trois axes, et en mettant pour i cette valeur $\frac{d^2 s}{dt^2}$, on peut également écrire :

$$\left(\Sigma Fx + \Sigma fx - \Sigma m \frac{d^2 s}{dt^2}\right)\delta x + \left(\Sigma Fy + \Sigma fy - \Sigma m \frac{d^2 s}{dt^2}\right)\delta y + \left(\Sigma Fz + \Sigma fz - \Sigma m \frac{d^2 s}{dt^2}\right)\delta z = 0.$$

chacun des trois termes de cette équation étant d'ailleurs nul séparément, et pouvant former des équations distinctes.

Dans tous les cas où il n'y aura pas à tenir compte des forces intérieures, cette expression se simplifierait et se mettrait alors sous la forme :

$$\left(\Sigma Fx - \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2}\right)\delta x + \left(\Sigma Fy - \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2}\right)\delta y + \left(\Sigma Fz - \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2}\right)\delta z = 0$$

13. — *Cas particulier du mouvement d'un point matériel.* — Si à l'aide de l'expression générale, on voulait étudier les conditions du mouvement d'un point matériel, on retomberait nécessairement sur les équations ordinaires de l'accélération

$$Fx = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad Fy = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad Fz = m \frac{d^2 z}{dt^2},$$

et le principe de D'Alembert, qui a surtout pour objet d'étudier le mouvement d'un système de points matériels, nous ramène ainsi, aux formules ordinaires du mouvement d'un point. Il était impossible d'ailleurs de ne pas arriver à cette vérification puis-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que les formules individuelles auxquelles on est conduit de cette façon sont celles dont nous avons implicitement déduit l'expression générale du principe dont nous voulons maintenant étudier les conséquences.

14. — *Utilité du principe de Dalembert dans les questions de dynamique.* — Le caractère essentiel du principe de Dalembert repose sur ce qu'il fournit autant d'équations que l'on voudra entre les diverses forces qui tendent à modifier le mouvement d'un corps, et parmi lesquelles se trouvent les forces d'inertie, qui sont exprimées en fonction des accélérations.

On peut d'ailleurs dans les applications obtenir les équations d'équilibre, nécessaires et suffisantes, que nous avons appris à déduire du principe du travail virtuel, avec cette seule différence que les forces d'inertie des points matériels qui constituent le système, entrent dans chacune d'elles.

On voit aussi comment la détermination des circonstances d'un mouvement peut être déduite de ces équations d'équilibre et, comment, par conséquent, on peut dire que le principe de Dalembert permet de ramener les questions de Dynamique à des questions de Statique.

Mais nous verrons aussi qu'à l'inverse, le même principe peut permettre de déterminer la valeur de certaines forces, lorsque les conditions du mouvement sont connues, et l'on sait également en déduire la plupart des principes fondamentaux de la dynamique.

15. — *Emploi du principe de Dalembert pour la détermination des circonstances du mouvement.* — On peut tirer de l'une des formules générales, la valeur de $\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, de l'accélération, et obtenir par voie d'intégration, celle de la vitesse, toutes les fois que rien ne s'oppose à l'achèvement du calcul. Il est toutefois nécessaire de connaître, dans chaque cas particulier, les valeurs

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de f qui dépendent de la constitution du système en mouvement, et il est le plus souvent nécessaire de faire sur les valeurs de ces forces intérieures des hypothèses plus ou moins approchées de la vérité.

L'ignorance dans laquelle nous sommes encore à cet égard, limitera dans un grand nombre de circonstances l'application complète du principe qui nous occupe. Lorsque le système sera soumis à certaines liaisons, entre différents points, ou aura entre les coordonnées de ces points, des relations de la forme

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = 0$$
$$\varphi_2(x_2, y_2, z_2) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

auxquelles devront satisfaire les déplacements virtuels que les divers points du mobile pourraient prendre simultanément, ce qui donnera entre ces déplacements, un égal nombre de relations telles que celles-ci $\Sigma\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}\delta x_1 + \frac{d\varphi_1}{dy_1}\delta y_1 + \frac{d\varphi_1}{dz_1}\delta z_1\right) = 0$

Si l'on a ainsi K équations de condition, il faudra chercher les autres relations nécessaires au moyen de l'équation du principe de Dalembert, de manière à compléter le nombre d'équations nécessaires pour déterminer tous les éléments de la question.

Nous aurons souvent à faire usage de ces conditions.

16. — *Application du principe de Dalembert aux théorèmes principaux de la mécanique.* — Les théorèmes principaux de la dynamique, peuvent être déduits très-simplement du principe de Dalembert, qui offre sur eux l'avantage de fournir autant d'équations qu'il est nécessaire pour déterminer les conditions du mouvement, tandis que le théorème du travail, qui est le plus important de tous, ne fournit jamais qu'une seule équation entre les quantités qui entrent dans cette relation.

Ce théorème du travail peut d'ailleurs se déduire lui-même du principe de Dalembert, et nous indiquerons encore d'autres exemples de déductions analogues.

17. — *Théorème du travail et des puissances vives.* — Pour déduire du principe de Dalembert, le principe général du travail, il suffit de considérer les déplacements virtuels δx, δy, δz, comme représentant les déplacements réels dx, dy, dz du mobile sous l'action des forces extérieures. L'équation en ds devient alors $\Sigma F\cos(F, ds)\,ds + \Sigma f\cos(f, ds)\,ds - \Sigma m\frac{dv}{dt}ds = 0$.

$\frac{dv}{dt}$ n'étant autre chose, dans cette expression que l'accélération déjà représentée par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\frac{d^2s}{dt^2}$, et l'action de la force d'inertie étant dirigée en sens contraire du déplacement ds. Le dernier terme peut s'écrire $\Sigma d\frac{1}{2}mv^2$, car $d\frac{1}{2}mv^2 = mvdv = m\frac{ds}{dt} \times dv$.

En remarquant que les deux premiers termes doivent être aussi considérés respectivement comme les expressions des travaux élémentaires des forces F et f, on peut transformer cette équation en celle-ci $\qquad \Sigma d\mathcal{C}F + \Sigma d\mathcal{C}f = \Sigma d\frac{1}{2}mv^2$

ou en intégrant entre les limites v et v'

$$\Sigma \mathcal{C}F + \Sigma \mathcal{C}f = \Sigma \tfrac{1}{2}mv'^2 - \Sigma \tfrac{1}{2}mv^2 .$$

On arrive ainsi à l'expression la plus générale du théorème du travail et des puissances vives, que l'on énonce de la manière suivante :

La somme des travaux de toutes les forces appliquées à un système matériel quelconque, est égale à la puissance vive acquise par le mobile pendant leur action.

18. — *Théorème du mouvement du centre de gravité.* — Puisque nous pouvons supposer aux déplacements virtuels, une direction quelconque, la formule générale sera encore vraie, lorsque nous supposerons que ce déplacement a lieu parallèlement à l'axe des x, auquel cas nous devons faire $dy = 0$ et $dz = 0$.

L'équation se réduit alors à

$$\Sigma F x - \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

si nous supposons en même temps que les forces intérieures f se compensent.

Si X est l'abscisse du centre de gravité du système, on a par définition $\qquad dX\Sigma m = \Sigma m dx$

et par suite $\qquad \frac{dX}{dt}\Sigma m = \Sigma m \frac{dx}{dt}$

et $\qquad \frac{d^2X}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}$

L'équation ci-dessus revient donc à

$$\Sigma F x = \frac{d^2X}{dt^2}\Sigma m$$

ce qui exprime le théorème général du mouvement du centre de gravité.

Le centre de gravité d'un système matériel quelconque se meut comme un point qui réunirait seul la masse Σm du système, et qui serait directement sollicité par les forces extérieures transportées parallèlement à elles-mêmes.

Nous ferons dans toutes les questions de dynamique un usage constant du principe de Dalembert.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cours de Mécanique appliquée.

Ce Cours comprend trois parties :

Théorie de la résistance des Matériaux ,

Etude des Résistances passives ,

Mécanique générale des Systèmes matériels considérée dans ses applications aux machines , et à la stabilité des constructions en général .

Première Partie.

Résistance des Matériaux.

1. — *Considérations préliminaires* . — La mécanique générale admet , dans un grand nombre de cas , que les corps solides sont complètement rigides et indéformables ; il n'en est pas ainsi cependant , et l'action d'une force quelconque déforme le solide auquel elle est appliquée .

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On se rend compte de ce fait en remarquant que les corps solides sont des assemblages de molécules ou points matériels groupés entr'eux et tenus à distance par l'effet d'actions mutuelles ou forces moléculaires, les unes attractives, les autres répulsives. Dès qu'une action étrangère intervient, des molécules se rapprochent, d'autres s'écartent et la forme du corps se modifie. Mais, tout effort qui tend à écarter les molécules détermine entre celles-ci des actions attractives, et tout effort qui tend à les rapprocher développe des actions répulsives. Il résulte de là, que si la forme du solide arrive à un état permanent sous l'influence d'efforts déterminés, l'équilibre existe entre les forces extérieures et les réactions moléculaires; par suite, les équations générales qui expriment les conditions d'équilibre d'un système de forces sont applicables, trois de ces équations étant relatives à l'équilibre de translation, et les trois autres à l'équilibre de rotation.

2.—*Problèmes principaux de la résistance des matériaux.*— Cette étude comprend deux problèmes principaux intéressant également l'art de l'ingénieur, et sur lesquels reposent tous les procédés de la construction.

1°— Etudier les lois de la déformation d'un solide donné soumis à des efforts déterminés.

2°— Calculer les formes et les dimensions qu'on doit donner à un solide pour qu'il résiste convenablement à des efforts donnés.

Ces deux questions seront traitées séparément pour les cas où les forces extérieures tendent à allonger un solide, à le refouler sur lui-même, à le tordre ou à le faire fléchir.

On étudiera successivement:

1°— L'Extension,

2°— La Compression,

3°— La Torsion,

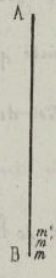
4°— La Flexion.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Extension.

3.— *Ordre dans lequel les phénomènes seront examinés.*— Pour simplifier la question, il convient de la diviser en deux parties et de considérer d'abord une file de molécules soumise à l'extension pour passer ensuite au cas d'une tige prismatique quelconque.

4.— *Extension d'une file de molécules.*— Si l'on conçoit une file de molécules, d'une longueur primitive AB, fixée en A à sa partie supérieure, et chargée ensuite d'un poids à sa partie inférieure, ce poids agit sur la molécule m, qui s'écarte alors de la molécule m', et tend à s'en détacher. Cet écartement augmente l'action attractive exercée entre m et m'; si la rupture ne se produit pas, l'équilibre s'établit et l'action développée entre m et m' est égale à l'action primitive augmentée du poids qui agit sur m.



On conçoit que la charge qui agit en B, doit développer les ressorts moléculaires qui lient toutes les molécules les unes aux autres; c'est-à-dire que l'action exercée par m sur m' doit se transmettre successivement de m' à m", de m" à m"'..... jusqu'en A; et si l'on fait abstraction du poids des molécules, l'action développée et l'écartement produit sont les mêmes entre deux molécules consécutives quelconques. Par suite la ligne AB s'allonge d'une quantité égale à la somme des allongements individuels et l'allongement total est proportionnel à la longueur primitive de la file de molécules.

Cette conclusion se justifie par l'observation des faits constatés dans les expériences sur l'extension des corps solides.

5.— *Extension d'une tige prismatique.*— Une tige que l'on soumet à l'extension peut être considérée comme un faisceau de files de molécules réunies entre elles par des actions latérales. Si l'on admet que la charge totale soit répartie de manière que chacune des files

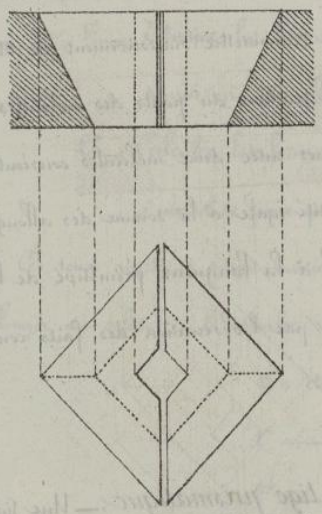
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

supporte un même poids, on se trouve dans les conditions du cas précédent et chaque fil doit se modifier, comme si elle était isolée, sous la charge qui lui est propre.

A cet effet on emboîte la base du corps dans une sorte d'étui portant un crochet sur lequel agit la charge; et, comme on n'opère ordinairement que sur des sections assez faibles, on est porté à croire que la condition de l'uniformité de la répartition de la charge est suffisamment réalisée.

6.— *Mode d'expérimentation*.— On soumet un corps à la traction en l'attachant par l'une de ses extrémités, et en exerçant à l'autre un effort plus ou moins considérable. Pour mettre ce procédé d'expérimentation à l'abri des mouvements que peuvent présenter les points d'attache, on trace deux repères près des deux extrémités de la tige et on mesure leur distance à l'aide de cathétomètres avant et après la traction.

L'un des meilleurs modes de fixation de l'extrémité de la tige, que l'on peut supposer ici rectangulaire, consiste dans l'emploi d'un tronc de pyramide quadrangulaire, formé de deux parties séparées, portant chacune une gouttière destinée à embrasser fortement la tige. Le tronc de pyramide est ensuite placé dans une chape de même forme dans laquelle les mâchoires se rapprochent d'autant plus que la traction qui détermine ce rapprochement est plus grande. Les résultats que l'on déduit des expériences de cette nature sont d'autant plus précis que l'on opère sur des tiges plus longues, parce que l'allongement étant plus considérable, l'erreur que l'on peut commettre en mesurant cet allongement est relativement plus petite. Quelle que soit d'ailleurs la longueur de la tige, il est évident que les cathétomètres doivent toujours être indépendants du bâti qui les supporte.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

7.—*Période d'élasticité.*—Le phénomène de l'extension présente deux périodes qu'il importe de distinguer au point de vue des applications, et la première, nommée période d'élasticité, est caractérisée par le fait suivant :

> Si l'on charge une tige d'un poids qui n'excède pas une certaine limite, il se produit un allongement, et si l'on enlève ensuite cette charge, la tige reprend sa longueur primitive ;

ou, si la longueur n'est pas rigoureusement la même, la différence ne peut être appréciée par les instruments de précision les plus délicats. On peut donc dire que la tige est restée complétement élastique, et qu'elle agit à la manière d'un ressort parfait.

8.—*Lois résultant de l'observation dans la période d'élasticité.*—

L'expérience montre que, dans la période d'élasticité, l'allongement produit est :

1° Proportionnel à la charge.

2° Proportionnel à la longueur primitive de la tige.

3° Inversement proportionnel à la section.

De sorte que si l'on désigne par :

N la charge en kilogrammes ;

L la longueur primitive de la tige mesurée en mètres ;

ω la section en mètres carrés ;

ΔL la longueur de l'allongement en mètres ;

et m un coëfficient constant ou spécifique de la matière qui constitue la tige, on a :

$$(1) \qquad \Delta L = m \frac{L N}{\omega} \quad ;$$

expression qui peut s'écrire, $\frac{\Delta L}{L} = m \frac{N}{\omega}$

$\frac{N}{\omega}$ est la charge en kilogrammes par mètre carré de section.

$\frac{\Delta L}{L}$ est l'allongement par mètre courant ; on le nomme allongement proportionnel

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou allongement élastique, et on le désigne par la lettre i, de sorte qu'on a :

$$\frac{\Delta L}{L} = i$$

9. — *Détermination du coefficient* m. — Pour obtenir la valeur de la constante m, relative à une substance donnée, il suffit évidemment de prendre trois valeurs déterminées L', ω', N', des variables L, ω ; N, faire une expérience de traction, et mesurer l'allongement résultant $\Delta L'$, la formule (1) devient alors

$$\Delta L' = m \frac{L'N'}{\omega'} , \qquad \text{d'où} \qquad m = \frac{\Delta L' \omega'}{L'N'} .$$

On comprend que pour avoir une valeur de m suffisamment exacte, on doit faire plusieurs expériences sur des tiges de même matière et prendre la moyenne des résultats.

10. — *Formule usuelle de l'extension*. — Si l'on prend la valeur inverse du coefficient m et qu'on la désigne par E, c'est-à-dire, si l'on pose $m = \frac{1}{E}$, la formule (1) devient

$$\Delta L = \frac{LN}{E\omega} ;$$

c'est la formule ordinaire de l'extension.

11. — *Coefficient d'élasticité*. — Le nombre E qu'on vient de déterminer, et qui caractérise la période d'élasticité parfaite, se nomme **coefficient** ou **module d'élasticité** ; et si, dans la formule

$$\Delta L = \frac{LN}{E\omega}$$

on suppose $\Delta L = L$, $\omega = 1$, il en résulte $N = E$,

d'où l'on voit que E est la charge qui, pour une section de un mètre carré, doublerait la longueur de la tige, si la loi de proportionnalité entre les charges et les allongements se continuait jusqu'à cette limite ; mais ceci n'a évidemment jamais lieu, et les allongements

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ne s'élèvent réellement, dans la période d'élasticité, qu'à une fraction extrêmement petite de la longueur primitive de la tige.

12.— *Extension prolongée jusqu'à la rupture.*— Au-delà de la limite d'élasticité c'est-à-dire, lorsque les allongements ne sont plus proportionnels aux charges correspondantes, la tige, après le déchargement, ne reprend plus sa longueur primitive, et reste allongée d'une certaine quantité qu'on nomme allongement permanent. Un état nouveau s'est manifesté, le corps s'est plus ou moins altéré sous la charge, et les allongements croissent alors plus rapidement que les efforts correspondants. Si l'on continue d'augmenter la charge, il arrive un moment où les ressorts moléculaires ne peuvent plus l'équilibrer, et où la rupture se produit.

13.— *Nécessité de ne pas dépasser une certaine charge pratique.*— L'état élastique d'un corps s'altérant à partir d'une certaine limite, on doit toujours, dans les constructions, rester en dessous de la charge qui produirait cette altération d'élasticité.

D'ailleurs dans les constructions faites avec les matériaux de l'industrie, on rencontre, soit des mal-façons, soit des défauts d'homogénéité; il peut aussi se produire dans les organes des machines, par exemple, des chocs, des trépidations, et même des altérations chimiques. Par conséquent si on veut se placer dans des conditions de sécurité convenables, il faut s'arrêter, avant la limite d'élasticité, à une certaine charge pratique que l'on indiquera plus loin, et qui résulte de l'étude des constructions qui ont résisté.

14.— *Résistances vives d'élasticité et de rupture.*— Lorsqu'un corps est soumis à un effort de traction, les molécules se déplacent les unes par rapport aux autres; l'étude de ces déplacements et des efforts correspondants permet d'évaluer le travail qui détermine la déformation.

La résistance vive d'élasticité est la quantité de travail qu'il faudrait dépenser pour atteindre la limite d'élasticité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La résistance vive de rupture est la quantité de travail nécessaire pour déterminer la rupture de la pièce.

15. — *Détermination de la résistance vive d'élasticité.* — Cette quantité est facile à déterminer. En effet, si l'on conçoit que la charge augmente successivement jusqu'à la limite d'élasticité, le travail développé est la somme des travaux élémentaires qu'on obtient en multipliant chaque élément infiniment petit de l'allongement par l'effort correspondant. Donc, en désignant ce travail par T_e, on a, d'une manière générale,

$$(1) \qquad T_e = \int F\,ds;$$

et s'il s'agit d'une tige de un mètre de longueur et de un mètre carré de base, on a

$$F = \frac{N}{\omega} \qquad , \qquad \delta = \frac{\Delta L}{L} \qquad , \qquad ds = \frac{d\,\Delta L}{L};$$

mais on a aussi :

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{E\,\omega} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\,\Delta L}{L} = \frac{d\,N}{E\,\omega}$$

par suite l'expression (1) devient :

$$T_e = \int \frac{N}{\omega} \times \frac{d\,N}{E\,\omega} = \frac{1}{2E} \times \left(\frac{N}{\omega}\right)^2 + C.$$

Si l'on prend l'intégrale entre les limites $N = 0$ et $N = N_e$, N_e étant la charge correspondant à la limite d'élasticité, on a pour le travail demandé,

$$T_e = \frac{1}{2E} \times \left(\frac{N_e}{\omega}\right)^2.$$

16. — *Observations sur la transmission des actions moléculaires.* — On a supposé ici que la charge ~~N~~ augmente graduellement depuis l'allongement initial jusqu'à la limite d'élasticité. Cette hypothèse doit toujours être réalisée. En effet une charge ne produit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pas son action d'une manière instantanée sur toute la longueur de la tige : quelque faible que soit la durée de la transmission, l'état d'équilibre doit s'établir de proche en proche ; il y a un travail intérieur qui fait que les différents ressorts viennent successivement se mettre en équilibre, et si l'action exercée au début était assez énergique pour que cet état d'équilibre ne pût se produire, l'altération de l'élasticité pourrait avoir lieu avant que toutes les molécules ne fussent intéressées dans le phénomène.

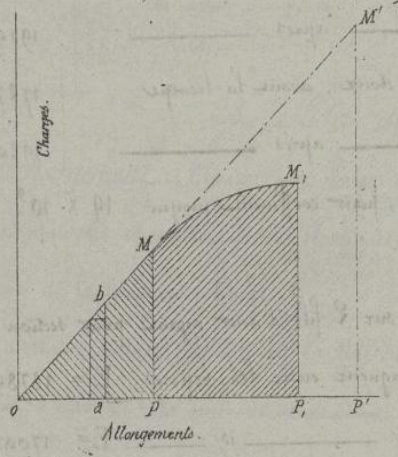
17.— *Détermination de la résistance vive de rupture.*— La loi que suivent les allongements après la période d'élasticité, étant inconnue, la résistance vive de rupture, qui a pour expression générale

$$T_p = \int_0^N \frac{N_r}{\omega} \times d\,\frac{\Delta L}{L} \quad ,$$

ne saurait être déterminée rigoureusement par le calcul, et l'on ne peut l'obtenir qu'approximativement par une quadrature au moyen d'un certain nombre de données résultant de l'expérience.

Il importe d'ailleurs de faire remarquer que la rupture d'une tige pourrait avoir lieu avec une moindre dépense de travail si l'action était assez brusque pour que toutes les molécules ne pussent être intéressées dans le phénomène.

18.— *Représentation graphique du phénomène de l'extension.*



Si l'on prend deux axes rectangulaires, puis qu'à des échelles données on construise une courbe ayant pour abscisses des valeurs proportionnelles aux allongements $\frac{\Delta L}{L}$ par mètre courant, et pour ordonnées des valeurs proportionnelles aux charges $\frac{N}{\omega}$ par mètre carré, on obtient une figure qui indique la première

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

une toutes les circonstances que présente le phénomène de l'extension.

Pour obtenir une figure suffisamment accentuée, il convient, en égard à la petitesse des allongements qui répondent à des charges données, d'adopter deux échelles différentes, l'une pour les allongements, l'autre pour les charges correspondantes.

19.— *Discussion de l'épure.* — 1°.— La courbe passe par l'origine des coordonnées; car, pour $N = 0$, on a $\Delta L = 0$.

2°.— Si M est le point correspondant à la limite d'élasticité, la portion OM de la ligne OMM, est droite; car l'équation

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \times \frac{N}{\omega} \quad ,$$

identique de forme à $y = mx$, représente une ligne droite.

3°.— Quand on a dépassé la limite d'élasticité, les allongements croissent plus rapidement que les charges, la courbe s'infléchit à partir du point M, en tournant sa concavité du côté de l'axe et se termine au point M_1 correspondant à la rupture.

4°.— L'équation

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{E\omega}$$

donne $E = N$ quand on y fait $\omega = 1$ et $\frac{\Delta L}{L} = 1$; donc si l'on prend sur l'axe des abscisses une longueur $OP' = \frac{\Delta L}{L} = 1$ on a $M'P' = E$.

On doit remarquer, toutefois, que la détermination de E par ce procédé graphique ne peut être susceptible d'une précision suffisante; car, le maximum d'allongement d'une tige étant toujours une fraction extrêmement petite de sa longueur, une abscisse d'une longueur égale à l'unité et une ordonnée correspondante, aboutissant au prolongement de OM, seraient réellement des longueurs incompatibles avec les dimensions des échelles adoptées pour l'épure.

5°.— Le travail dépensé pour produire un allongement infiniment petit étant, comme on l'a dit précédemment, égal au produit de la charge par cet allongement infiniment petit,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

il est représenté sur la figure par l'aire du petit rectangle ab, dont la hauteur est $\frac{N}{\omega}$, et la base, l'allongement correspondant $\frac{d\Delta L}{L}$. Donc la somme de ces aires élémentaires, qui est, à la limite, représentée par l'aire du triangle OMP, doit donner la mesure de la résistance vive d'élasticité.

6°. – On voit de même que l'aire de la figure OMMPO, représente la valeur de la résistance vive de rupture.

20. – *Principaux éléments à considérer dans la résistance des corps solides soumis à l'extension.*

– Pour qu'un corps soit suffisamment étudié au point de vue de la résistance à l'extension, il faut connaître :

1°. – Son coefficient d'élasticité E,

2°. – La charge N_e qui amène le corps à sa limite d'élasticité,

3°. – La charge N_p ou charge pratique qu'on ne doit pas dépasser dans les applications,

4°. – La charge N_r qui produit la rupture,

5°. – Les allongements correspondants à ces charges,

6°. – La résistance vive d'élasticité T_e,

7°. – La résistance vive de rupture T_r.

Des expériences faites dans le but de déterminer les valeurs des éléments qu'on vient de considérer, ont donné, pour quelques uns des corps employés le plus fréquemment dans l'industrie, un ensemble de résultats qui sont consignés dans le tableau d'autre part.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

21. Tableau des coëfficients relatifs à la résistance à l'extension.

Éléments à considérer		Fer	Acier	Fonte	Cuivre	Chêne	Sapin
Coefficient d'élasticité	E	20.10^9	20.10^9	10.10^9	10.10^9	$1.2.10^9$	$1.5.10^9$
Charge pratique	$\frac{N_p}{\omega}$	6.10^6	15.10^6	$2,5.10^6$	4.10^6	$0.7.10^6$	$0.8.10^6$
Allongement correspondant	$\frac{\Delta L}{L}$	0.0003	0.00075	0.00025	0.0004	0.00058	0.0006
Charge d'élasticité	$\frac{N_e}{\omega}$	12.10^6	30.10^6	8.10^6	20.10^6	2.10^6	2.10^6
Allongement correspondant	$\frac{\Delta L}{L}$	0.0006	0.0015	0.0008	0.0002	0.000167	0.0013
Charge de rupture	$\frac{N_r}{\omega}$	40.10^6	70.10^6	12.10^6	" "	8.10^6	7.10^6
Allongement correspondant	$\frac{\Delta L}{L}$	" "	" "	" "	" "	" "	" "
Résistance vive d'élasticité	$T_e = \frac{1}{2E}\left(\frac{N_e}{\omega}\right)^2$	$0.0036.10^6$	$0.0225.10^6$	$0.0032.10^6$	$0.02.10^6$	$0.00167.10^6$	$0.0033.10^6$
Résistance vive de rupture	T_r	$0.5.10^6$	$0.4.10^6$	" "	" "	" "	" "

22. *Observations relatives aux expériences faites sur la résistance des corps solides à la traction.* Parmi les résultats de diverses expériences faites par M^r. Tresca, à l'aide des appareils installés au Conservatoire des Arts et Métiers, nous citerons seulement quelques faits importants. Les résultats d'expérience faites sur des barres de fer de Suède et sur des barres d'acier éémenté fabriquées avec le même fer, ont conduit à adopter dans le tableau précédent, le même coëfficient d'élasticité pour le fer et pour l'acier.

La charge d'élasticité de l'acier est supérieure à celle du fer ; la proportionalité entre les charges et les allongements existe donc plus longtemps dans l'acier.

Les chiffres obtenus directement pour le chêne et pour le sapin ne paraissent pas

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

exacts et certains faits semblent prouver que ces deux corps ont la même résistance.

En général, les chiffres qui ont été pris pour la charge de rupture seraient un peu trop forts pour la pratique. Cela tient à ce que les expériences ont été, en général, faites sur des matériaux de choix et dans lesquels on a eu soin d'écarter toute cause accidentelle de défectuosité.

Lorsqu'on veut assurer la solidité d'une construction, les matériaux employés ne doivent être ni énervés, ni modifiés d'une manière sensible dans leurs dimensions. Il faut absolument que la charge d'élasticité ne puisse jamais être dépassée même accidentellement. Il est donc préférable de déterminer la charge pratique en se basant sur la limite d'élasticité et non sur la charge de rupture.

La fonte résiste beaucoup moins que le fer à l'extension, et cette différence a été parfaitement mise en évidence par les expériences spéciales qui ont été faites sur de la fonte dite malléable, qui n'est autre chose que de la fonte décarburée, et par conséquent ramenée à l'état de fer, au moyen d'une opération assez semblable à la cémentation, mais dans laquelle le charbon est remplacé par un oxyde de fer.

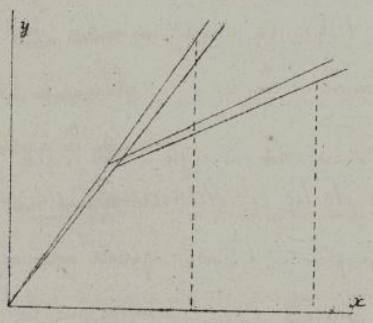
Cette décarburation ne se produit que jusqu'à une certaine profondeur; et, en extrayant au moyen d'une machine à raboter, des barreaux minces dans des barreaux d'un plus fort équarrissage, on a reconnu que le coefficient d'élasticité varie, de la circonférence au centre dans le rapport de 20 à 10, c'est-à-dire depuis le coefficient d'élasticité du bon fer jusqu'à celui de la fonte ordinaire.

Il ne faut donc employer la fonte malléable que sous l'épaisseur de 7 à 8 millimètres si l'on veut compter sur une résistance analogue à celle du fer.

Après avoir enlevé à la machine à raboter une règle de $3^{m/m}$ de longueur et $1\frac{5}{10}$ de section, dans une feuille d'acier non trempé, on a fixé les extrémités dans des mâchoires en deux pièces formant pinces, serrées au moyen de boulons, avec interposition de plomb fondu. La charge totale de rupture s'est élevée à $46^{\text{Kilog}}\,79$ par millimètre carré. Les allongements étaient mesurés en centièmes de millimètres.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les résultats de l'expérience ont été traduits par une courbe se composant d'une première partie sensiblement droite, puis d'une seconde partie presque rectiligne mais s'inclinant davantage sur l'axe des abscisses.



Dans une autre expérience faite sur un échantillon semblable, mais trempé et recuit, la ligne droite de la courbe représentative s'est trouvée plus prolongée; mais peu après que la nouvelle limite d'élasticité avait été atteinte, la rupture a eu lieu.

On doit conclure de ces résultats que si la trempe prolonge la période d'élasticité, elle est néanmoins dangereuse, en ce que la rupture se fait brusquement et sans qu'il ait été dépensé une très grande quantité de travail. Si l'on veut avant tout obtenir la sécurité, il convient de prendre des aciers non trempés parce que l'on a la certitude d'obtenir avant la rupture, une longue période d'allongement après la période d'élasticité.

Le croquis ci-joint indique les formes générales de quatre courbes déduites des expériences faites, dans chaque cas, sur deux barres distinctes, avant et après la trempe.

L'expérience a donné, pour ces aciers, les coefficients d'élasticité suivants :

Acier vif, avant la trempe,	20761000000
——— après ———	19199000000
Acier doux, avant la trempe	17273000000
——— après ———	19206000000

Ces nombres donnent, pour coefficient moyen 19×10^9.

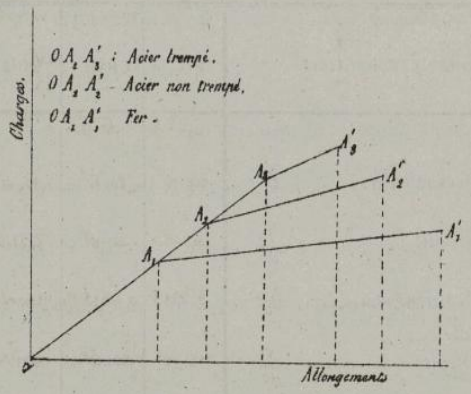
Expériences sur 2 fils d'acier ayant pour section $\omega = 0^{m.q.},000000559$.

1er fil, 24m.60 de longueur entre les repères E. = 18789000000,

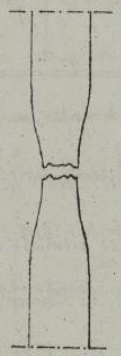
2e fil, 24.m 63 —— id/ ——— id/ —— E = 17091000000.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

23. — *Observation sur les résistances vives d'élasticité et de rupture.* — La figure ci-jointe montre les formes générales qu'affectent les représentations graphiques des expériences comparatives faites sur des barres semblables de fer, d'acier non trempé et d'acier trempé et recuit. On voit comment le fer s'allongeant beaucoup plus que l'acier avant la rupture, la résistance vive de rupture peut être beaucoup plus grande pour ce métal que pour l'acier, tandis que la résistance vive d'élasticité est manifestement moindre.



24. — *Observation sur la déformation qui précède la rupture.* — L'expérience montre que la rupture se produit par étirage; les deux parties voisines de la section de rupture se terminent généralement par des courbes.



Au moment de la rupture la transformation du travail en chaleur se manifeste par une élévation de température très sensible, qui est quelquefois accusée près des lèvres de rupture, ou, vers la section de striction, par une coloration due à une oxydation particulière du métal.

25. — *Etat dans lequel se trouve une pièce après le déchargement.* — Quand une barre a été trop chargée, les allongements, lors d'une nouvelle épreuve, restent élastiques pendant une plus longue période, et jusqu'à la limite de la première charge.

Certains auteurs pensent que la tige, ainsi modifiée, est amenée à un état plus parfait d'élasticité; la pièce se serait ainsi améliorée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En fait, il n'en est rien ; et, ce qui le prouve, c'est que l'expérience donne pour coefficient d'élasticité de la barre, un nombre plus faible, quand elle a été ainsi surchargée, que dans le cas où l'on n'a point dépassé sa limite d'élasticité.

26. — *Applications de la formule générale de l'extension et des coefficients du N°: 21.* — 1°: — Déterminer l'allongement que produit une charge de 2480 Kilogrammes, sur une tige d'acier ayant 5^{m}: de longueur et 2 centimètres carrés de section.

On a $N = 2480^{\text{Kilog}}$:, $L = 5^{m}$, $\omega = 0^{m^2},0002$;

d'où $\Delta L = \dfrac{5 \times 2480}{20 \times 10^{9} \times 0.0002} = 0^{m}.0031$, ce qui donne par mètre courant, un allongement de $\dfrac{0.0031}{5} = 0.00062$.

2°: — Calculer la charge que peut supporter sans altération d'élasticité, une tige de fer de 4 centimètres carrés de section.

On a ici $\omega = 0^{m^2},0004$. En outre, le tableau N°: 21 donne $E = 20 \times 10^{9}$, $\dfrac{\Delta L}{L} = l = 0.0003$; par suite la formule $\dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{N}{E\omega}$, ou plutôt $N = \dfrac{\Delta L}{L} \times E\omega$ donne $N = 0,0003 \times 20 \times 10^{9} \times 0.0004 = 2400$ Kilogrammes.

On remarquera que la longueur de la tige est sans influence sur la valeur du résultat obtenu, ce qui n'aurait pas lieu si l'on tenait compte du poids de cette tige, ainsi qu'on le verra plus loin.

3°: — Déterminer la section d'une tige cylindrique en fonte, de manière qu'elle puisse supporter sans altération une charge de 3800 Kilogrammes.

On a $N = 3800$ Kilog., et le tableau N°: 21 donne, pour la fonte par mètre carré de section, $\dfrac{N_e}{\omega} = 2,5 \times 10^{6}$; donc si r est le rayon, en mètres, de la section ω, on a

$$\frac{3800}{\pi r^2} = 2,5 \times 10^{6} \text{ ; d'où } r = \sqrt{\frac{3800}{\pi \times 2.5 \times 10^{6}}} = 0^{m},022.$$

Si l'on avait rapporté tous les coefficients au millimètre, on aurait trouvé plus immédiatement $r = \sqrt{\dfrac{3800}{\pi \times 2.5}} = 22^{m/m}$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

27. — *Observation relative à la variation du volume d'une tige sous l'influence de la charge.* — Il semble résulter de l'observation des faits que le volume d'une tige prismatique reste constant sous l'influence de la charge, ou, du moins, qu'il ne se modifie que d'une manière insensible. On en conclut que si ω_0 et L_0 sont les dimensions primitives de la tige, ω et L, les dimensions correspondantes à un état quelconque de l'allongement, on doit avoir très-approximativement, sinon exactement,

$$\omega L = \omega_0 L_0 \qquad (1)$$

Cette formule donne

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{dL}{L};$$

et l'on voit que, dans l'hypothèse admise, la diminution de section par unité de surface est numériquement égale à l'augmentation de l'allongement par unité de longueur.

Poisson, en partant d'une théorie mathématique de l'élasticité était arrivé, à l'expression

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{dL}{2L} \qquad (2)$$

Cette formule, si elle était exacte, indiquerait une augmentation de volume sous l'effet de la charge, puisque la diminution de section ne serait ici, pour un même allongement, que la moitié de la valeur donnée par la formule (1), ce qui semble ne pouvoir être d'accord avec les faits observés.

On peut d'ailleurs comparer autrement les formules (1) et (2). La dernière donne, en intégrant les deux membres,

$$\log \omega = -\frac{1}{2}\log L + C;$$

si ω_0 et L_0 sont les dimensions primitives du solide, on a

$$\log \omega_0 = -\frac{1}{2}\log L_0 + C,$$

et, par soustraction,

$$\log \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\log \frac{L_0}{L} = \log \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où $\frac{\omega}{\omega_0} = \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$, ou encore, $\omega L = \frac{\omega_0 L_0}{\sqrt{L_0}}\sqrt{L}$,

ce qui montre que le volume ωL, considéré à un état quelconque de l'allongement, croîtrait comme la racine carrée de la longueur correspondante.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

28. — *Influence de la température sur l'allongement.* — Dans tout ce qui précède on a supposé la température constante pendant le cours de l'expérience. S'il survient un changement de température entre deux instants déterminés du temps pendant lequel le solide est en charge, il en résulte nécessairement une modification dans la longueur totale $L+\Delta L$ de la tige. Mais on peut négliger ΔL comme étant très-petit relativement à L, et dans ce cas, si α désigne le coefficient de dilatation linéaire de la matière considérée, la variation de la longueur L est $\pm L\alpha$ pour un degré, $\pm L\alpha t$ pour t degrés; le signe $+$ correspondant à une élévation, et le signe $-$, à un abaissement de température.

Or, l'allongement ΔL_1 produit par la charge N est

$$\Delta L_1 = \frac{L\,N}{E\,\omega}$$

la variation de longueur résultant du changement de température est

$$\Delta L_2 \pm L\,\alpha t$$

donc, l'allongement final a pour expression

$$\Delta L = \frac{L\,N}{E\,\omega} \pm L\,\alpha t.$$

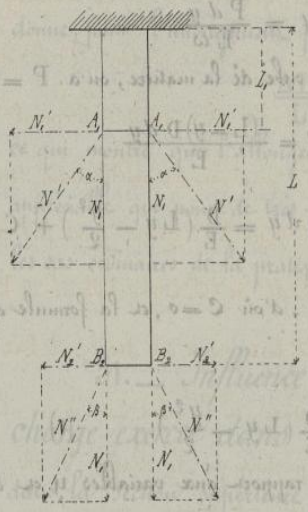
Il peut arriver, comme cas particulier, que l'on ait $\Delta L = 0$; il en résulte

$$\frac{L\,N}{E\,\omega} = L\,\alpha t,$$

c'est-à-dire que dans ce cas, l'allongement, déterminé sous l'influence de la charge, est détruit par la contraction linéaire résultant de l'abaissement de la température.

29. — *Allongement d'un solide prismatique chargé en des points différents de sa longueur.* — Soient deux forces N' égales, agissant respectivement sur deux points symétriques A_1, A_1, et disposées symétriquement par rapport à l'axe de la figure. Chacune de ces forces peut être décomposée en deux autres; l'une, N_1, qui agit dans le sens de la longueur pour allonger le solide; l'autre, N'_1, qui exerce une action normale et ne produit pas d'allongement. Les actions latérales exercées par les deux composantes N'_1, ne déterminent pas de modifications appréciables dans la longueur du solide et l'allongement peut être regardé comme étant produit complétement sous l'influence

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



des deux composantes N_1, dont la valeur est évidemment

$$2N_1 = 2N' \cos\alpha$$

On a de même, aux points B_2 et B_2,

$$2N_2 = 2N'' \cos\beta$$

Cela posé, il est évident que la force $2N_2$ agit sur toute la longueur du solide et produit un allongement

$$\Delta L_2 = \frac{L \times 2N_2}{E\omega}.$$

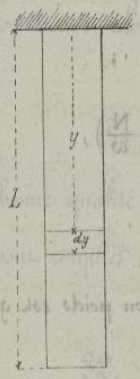
La force $2N_1$ n'exerce son action que sur la longueur L_1 et détermine un allongement

$$\Delta L_1 = \frac{L_1 \times 2N_1}{E\omega}$$

Cette valeur s'ajoutant nécessairement à la précédente si la composante $2N_1$ agit dans le sens de $2N_2$, l'allongement total du solide est

$$\Delta L = \frac{2}{E\omega}\left(LN_2 + L_1N_1\right)$$

30. — *Influence du poids de la tige sur l'allongement.* — Si l'on considère une portion y quelconque d'un solide prismatique soumis à l'extension et dont la longueur, avant l'allongement, est L, la portion inférieure $L - y$ du solide agit évidemment à la manière d'une charge ordinaire pour allonger la partie y, et le solide fatigue d'autant plus, dans la section considérée, que cette section est plus voisine de la partie supérieure. Cela posé, si y s'allonge de la quantité Δy, l'élément dy s'allonge de la quantité $d\Delta y$; et, s'il n'existe pas de charge additionnelle, l'allongement $d\Delta y$ est produit par le poids P de la partie $L - y$ du solide et par le poids de la tranche dy elle-même.



Ce dernier, étant infiniment petit relativement au précédent, est sans influence sur

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le résultat du calcul et la formule ordinaire de l'extension est applicable ; on a donc

$$d\,\Delta\,y = \frac{P\,dy}{E\,\omega}$$

Si D est le poids du mètre cube de la matière, on a $P = \omega(L - y)D$, et en substituant, il vient $d\,\Delta\,y = \frac{(L-y)\,D\,dy}{E}$

d'où

$$\Delta y = \frac{D}{E}\int (L-y)\,dy = \frac{D}{E}\left(Ly - \frac{y^2}{2}\right) + C$$

Pour $y = 0$, on a $\Delta y = 0$, d'où $C = 0$, et la formule qui donne l'allongement de la portion y de la pièce est

$$\Delta y = \frac{D}{E}\left(Ly - \frac{y^2}{2}\right) \qquad (1)$$

Cette équation, considérée par rapport aux variables y et Δy, est celle d'une parabole ; donc les allongements ne sont plus proportionnels aux longueurs correspondantes de la tige, ce qui doit d'ailleurs paraître évident, puisque la charge sur une section donnée est d'autant plus grande que cette section est plus voisine de l'extrémité supérieure du solide.

On obtient l'allongement total de la tige en posant $y = L$ dans la formule (1), ce qui donne

$$\Delta L = \frac{D\,L^2}{2\,E} \qquad (2)$$

Si la tige supportait en outre une charge additionnelle N, la formule (1) deviendrait évidemment

$$\Delta y = \frac{D}{E}\left(Ly - y^2\right) + \frac{N\,y}{E\,\omega} \quad ;$$

et la formule (2), $\Delta y = \frac{D\,L^2}{2\,E} + \frac{NL}{E\,\omega} = \frac{L}{E}\left(\frac{DL}{2} + \frac{N}{\omega}\right)$,

ou encore ; $\Delta y = \frac{L}{2\,E\,\omega}\left(DL\,\omega + 2\,N\right)$.

L'allongement d'une tige sous l'influence de son poids est généralement peu sensible. S'il s'agit du fer, par exemple, on a

$$D = 7788 \quad , \qquad E = 20 \times 10^9$$

et l'expression (2), mise sous la forme

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{D}{2E} \times L,$$

donne, pour l'allongement par mètre,

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{7788}{2 \times 20 \times 10^9} = 0,000000194 \times L;$$

ce qui montre que l'allongement résultant du poids de la tige n'atteint une valeur appréciable que pour de très-grandes valeurs de L, et qu'on peut le négliger dans les cas ordinaires de la pratique.

31. — *Influence du poids d'une tige prismatique sur la charge exercée dans sa section supérieure.* — La charge exercée dans la section supérieure d'une tige prismatique est évidemment proportionnelle à la longueur de la tige. Si P est cette charge par mètre carré, $P\omega$ est la charge sur la section ω; mais la charge $P\omega$ est le poids même de la tige, poids qui est exprimé par $\omega L D$, on a donc

$$P\omega = \omega L D, \quad \text{d'où} \quad L = \frac{P}{D};$$

et, suivant que l'on veut rester dans les conditions ordinaires de sécurité, ou atteindre la limite d'élasticité, ou enfin, déterminer la rupture, on doit poser, s'il s'agit du fer,

$D = 7788$, puis,

$$P = 6 \times 10^6, \qquad P = 12 \times 10^6, \qquad P = 40 \times 10^6;$$

on trouve alors

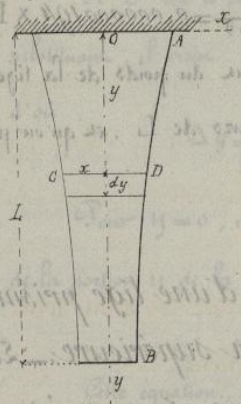
$$L = 770^m, \qquad L = 1541^m, \qquad L = 5136^m.$$

Ces résultats sont des valeurs limites qui supposent l'emploi d'un fer de très bonne qualité, très-homogène et ne présentant aucune défectuosité, conditions qui ne sont remplies que très-imparfaitement par les fers du commerce.

32. — *Allongement d'un solide ayant un profil déterminé et dont la section varie d'une manière continue.* — Soit $y = fx$, l'équation du profil AB du solide. La section ω, projetée en CD,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

est évidemment une fonction de l'abscisse x ; par conséquent cette section est aussi une fonction de y ; on peut donc écrire $\omega = \varphi(y)$



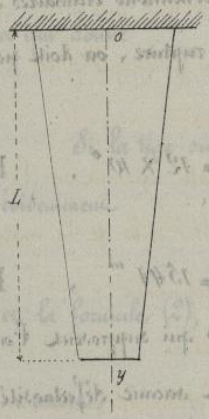
A une longueur quelconque y correspond un certain allongement Δy ; par suite, à la longueur dy répond l'allongement $d\Delta y$. La tranche de hauteur dy pouvant être considérée comme prismatique, si l'on ne tient pas compte du poids du solide, la formule de l'extension est immédiatement applicable à la tranche dy, et l'on a

$$d\Delta y = \frac{N\,dy}{E\,\omega}$$

Si l'on remplace, dans cette formule, ω par sa valeur $\varphi(y)$, il vient

$$d\Delta y = \frac{N\,dy}{E\,\varphi(y)}, \quad \text{d'où} \quad \Delta y = \frac{N}{E}\int \frac{dy}{\varphi(y)} + C \qquad (1)$$

intégrale que l'on peut calculer quand on connaît la forme de la section en celle du profil.



Par exemple, si le solide est de révolution, on a $\omega = \pi x^2$; et si le profil AB est une ligne droite, son équation est de la forme $x = my + n$. Il résulte de là

$$\omega = \pi\,(my+n)^2$$

et l'équation (1) devient

$$\Delta y = \frac{N}{E}\int \frac{dy}{\pi\,(my+n)^2} = \frac{N}{E\,m\,\pi}\int \frac{d(my+n)}{(my+n)^2} + C$$

d'où $$\Delta y = -\frac{N}{E\,m\,\pi\,(my+n)} + C$$

En prenant l'intégrale entre les limites $y=0$ et $y=L$, on obtient, pour l'allongement total,

$$\Delta L = \frac{m\,L\,N}{E\,m\,n\,\pi\,(mL+n)}\,.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

33. — *Solide d'égale résistance.* — On a admis que la charge qui agit à la partie inférieure d'un solide se répartit dans toutes les sections ; et, si l'on tient compte du poids du solide, comme on l'a déjà fait dans la question traitée au N°. 30, les parties supérieures se trouvent évidemment plus chargées que les parties inférieures. Donc, si l'on veut que le solide soit également chargé en toutes ses sections, on doit accroître la section à mesure qu'on approche de son extrémité supérieure.

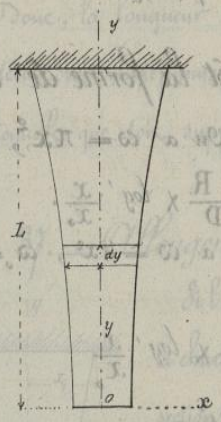
Un solide d'égale résistance est celui dont la charge par mètre carré est la même pour toutes les sections.

Deux questions à résoudre :

1°. Déterminer la forme du profil.

2°. Calculer l'allongement total du solide.

34. — *Forme du profil d'un solide d'égale résistance.* — Soient



R, la charge constante par mètre carré,

$\omega = f(x)$, une section quelconque située à la distance y de l'origine des coordonnées,

N, la charge totale agissant sur la section ω,

D, le poids du mètre cube de la matière,

On a, par définition :

$$\frac{N}{\omega} = R, \quad \text{d'où} \quad N = R\omega \quad (1)$$

A l'accroissement dy correspond un accroissement de charge dN et un accroissement de section $d\omega$; et l'on a, soit en différentiant l'équation (1), soit en vertu de la condition d'égale résistance,

$$dN = R\,d\omega \quad (2)$$

Mais, l'équation $\omega = f(x)$ donne $d\omega = f'(x)\,dx$; et le poids dN de la tranche dy est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$dN = D\,\omega\,dy = D f(x)\,dy\ ;$$

en portant ces valeurs de $d\omega$ et dN dans l'équation (2) on obtient

$$dy = \frac{R}{D} \times \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}\ ;\ \text{d'où}\ y = \frac{R}{D}\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}\ ,$$

et par suite

$$y = \frac{R}{D}\ \log' f(x) + C \qquad (3)$$

La constante C est évidemment déterminée par cette condition qu'au point O, pour lequel $y = 0$, le solide doit avoir une section suffisante pour supporter, sans altération d'élasticité, une charge donnée P. Donc, en ce point, ω_0 est connu et l'équation $\omega_0 = f(x_0)$ donne la valeur de x_0 quand on connaît la forme de la section. Il résulte de là qu'au point O l'équation (3) devient

$$0 = \frac{R}{D} \times \log' f(x_0) + C$$

et si l'on retranche cette équation de (3) on obtient, comme forme générale de l'équation du profil,

$$y = \frac{R}{D} \times \log' \frac{f(x)}{f(x)_0} \qquad (4)$$

35. — Cas où l'on connaît la forme de la section ω. —

1° — Section circulaire. — On a $\omega = \pi x^2$, $\omega_0 = \pi x_0^2$, d'où

$$y = \frac{2R}{D} \times \log' \frac{x}{x_0}\ .$$

2° — Section carrée. — On a $\omega = 4x^2$, $\omega_0 = 4x_0^2$, d'où, comme précédemment,

$$y = \frac{2R}{D} \times \log' \frac{x}{x_0}$$

On pourrait aussi considérer :

Soit une section rectangulaire dont les deux dimensions seraient dans un rapport C, ce qui donnerait encore

$$y = \frac{2R}{D} \times \log' \frac{x}{x_0}$$

Soit enfin une section rectangulaire d'épaisseur constante b, on l'on aurait

$$y = \frac{R}{D} \times \log' \frac{x}{x_0}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

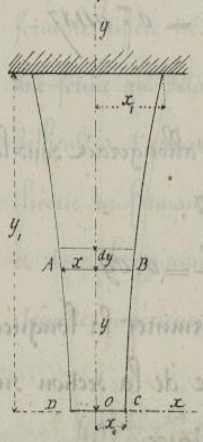
On voit que, dans toutes ces hypothèses, l'équation du profil représente une logarithmique ayant pour asymptote l'axe des y. Cette équation permet de déterminer autant de points qu'on le veut de la courbe; par conséquent, elle fait connaître la hauteur y_1 du solide quand on a le rayon x_1 de la section supérieure et réciproquement.

36. — *Observation relative au cas où la charge additionnelle P décroît indéfiniment.* — Si dans l'une des équations précédentes, par exemple,

$$y = \frac{2R}{D} \times \log' \frac{x}{x_0}$$

on attribue à x une valeur déterminée et qu'on fasse décroître indéfiniment la charge P, la valeur x_0, qui dépend de P, devient une variable et décroît indéfiniment sans s'annuler puisque l'axe des y est une asymptote de la courbe; mais alors $\frac{x}{x_0}$ croît indéfiniment ainsi que la valeur correspondante de y. Donc, la longueur de la portion du solide située au-dessous de la section considérée croît indéfiniment lorsqu'on fait décroître indéfiniment la charge additionnelle que doit supporter le solide.

37. — *Allongement d'un solide d'égale résistance.* —



Si l'on considère la tranche dont la hauteur est dy et la section ω, la charge, par unité de surface, étant R, celle qui agit sur toute la section est ωR, et l'on a

$$d\Delta y = \frac{\omega R\, dy}{E\omega} = \frac{R\, dy}{E};$$

d'où, pour l'allongement total

$$\Delta L = \frac{R}{E}\int_0^x dy = \frac{RL}{E}.$$

Ce qui montre que l'allongement produit est égal à celui qui résulterait de l'action d'une charge R appliquée à une tige prismatique d'une longueur L et d'une section $\omega = 1$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en ne tenant pas compte du poids de cette tige.

38. — *Applications numériques.* — 1°. — Calculer les dimensions d'une tige circulaire d'égale résistance ayant une longueur de 300 mètres et capable de supporter, sans altération d'élasticité, une charge de 1800 Kilog.

En admettant que la tige soit en fer, la charge pratique qu'il ne faut pas dépasser est de 6 Kilog. par millimètre carré ou 6×10^6 Kilog. par mètre carré. Donc, si x_0 est le rayon de la partie inférieure exprimé en mètres, on a

$$\pi x_0^2 \times 6 \times 10^6 = 1800 \; ;$$

d'où

$$x_0 = \sqrt{\frac{1800}{6 \times 10^6 \times \pi}} = 0^m,00977 .$$

ou environ $0^m,010$.

Maintenant, l'équation (4), écrite dans la base ordinaire, donne

$$\log \frac{x_1}{x_0} = \frac{D y_1 \log e}{2R}$$

or, $D = 7788$, $y_1 = 300$, $\log e = 0,434294$, $R = 6 \times 10^6$; il en résulte

$$\log \frac{x_1}{x_0} = \frac{7788 \times 300 \times 0,434294}{2 \times 6 \times 10^6} = 0,084557$$

d'où

$$\frac{x_1}{x_0} = 1,2149$$

et par suite

$$x_1 = 1,2149 \times 0,00977 = 0^m,01187$$

c'est-à-dire, à peu près $0^m,012$

Quant à la quantité dont la tige s'allongerait sous la charge 1800 Kilog. elle serait, d'après la formule du N°. 37,

$$\Delta L = \frac{6 \times 10^6 \times 300}{20 \times 10^9} = 0,09$$

2°. — Soit proposé de déterminer la longueur d'une tige d'égale résistance telle que le diamètre de la section supérieure soit double du diamètre de la partie inférieure.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On remplit cette condition en posant $x_1 = 2x_0$ dans la formule (4) et l'on obtient

$$y_1 = \frac{2R}{D} \times \frac{1}{\log 2} \times \log 2$$

s'il s'agit du fer, on a

$$R = 6 \times 10^6, \quad D = 7788, \quad \frac{1}{\log 2} = 2.302585, \quad \log 2 = 0.30103;$$

en effectuant les calculs, on trouve

$$y_1 = 1068 \text{ mètres}.$$

La formule N° 37 donne, pour l'allongement correspondant

$$\Delta L = \frac{6 \times 10^6 \times 1068}{20 \times 10^9} = 0^m.3204$$

Ce résultat et celui du problème précédent montrent qu'une tige d'une grande longueur peut éprouver, dans le sens vertical, des oscillations considérables et qui, dans le cas de mouvements brusques et précipités, pourraient amener la rupture. Il est donc important de n'imprimer qu'une vitesse faible aux tiges de de très-grandes dimensions.

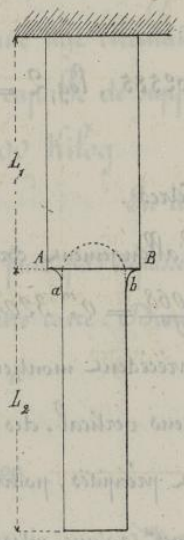
39. — Observation relative au calcul des tiges de sonde. —

Lorsqu'on doit employer des barres d'une très-grande longueur, comme des tiges de sondes, par exemple, on n'en calcule généralement pas les dimensions par la formule relative aux solides d'égale résistance; d'ailleurs le profil que donne cette formule diffère très-peu d'une ligne droite, on pourrait donc sans inconvénient, adopter une forme qui serait celle d'un tronc de cône, mais cette forme présenterait encore des difficultés d'exécution. On se conforme approximativement aux conditions de la théorie en formant les tiges de parties cylindriques vissées les unes aux autres et dont les diamètres vont en augmentant à mesure qu'on approche de l'extrémité supérieure.

40. — Extension d'une tige dont la section varie d'une manière

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

discontinue. — Lorsqu'on soumet à un effort de traction une tige formée de parties ayant des sections différentes, les lois constatées précédemment sur les phénomènes de l'extension ne deviennent applicables que dans le cas où les efforts transmis de la partie L_2 à la partie L_1 se trouvent uniformément répartis sur toute la section AB. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que les deux sections AB et ab, soient raccordées par un congé, et que la différence de ces deux sections ne soit pas trop grande. En outre, l'expérience montre que la rupture, lorsqu'elle se produit, a toujours lieu dans la partie où se montre un changement brusque de section, et qu'elle détermine alors une cassure affectant la forme indiquée par la ligne pointillée sur la figure.



Cela posé, si $L_1, L_2, L_3, \ldots$, sont les longueurs respectives des différentes parties prismatiques qui composent le solide; $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, les sections correspondantes, et N la charge qui produit l'extension, l'allongement total, étant la somme des allongements individuels, on a, en négligeant le poids de la tige

$$\Delta L = \frac{N L_1}{E \omega_1} + \frac{N L_2}{E \omega_2} + \frac{N L_3}{E \omega_3} + \ldots ;$$

c'est-à-dire

$$\Delta L = \frac{N}{E}\left(\frac{L_1}{\omega_1} + \frac{L_2}{\omega_2} + \frac{L_3}{\omega_3} + \ldots\right)$$

Si le solide devait avoir une grande longueur, on devrait tenir compte de son poids, soit au point de vue de l'allongement, soit au point de vue de la résistance de la matière dans les parties supérieures, là où les sections sont le plus chargées.

41. — *Chaînes, cordes et courroies considérées au point de vue de l'extension*. — Ces organes flexibles ne sont soumis qu'à des efforts

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de traction.

L'expérience a donné les résultats suivants :

Éléments déterminés	Chaînes	Cordes	Courroies
Charges pratiques	4.5×10^6	3×10^6	0.2×10^6
Charges de rupture	28×10^6	6×10^6	4×10^6

On doit d'ailleurs remarquer que les courroies s'allongent considérablement sous l'influence des premières charges.

Compression.

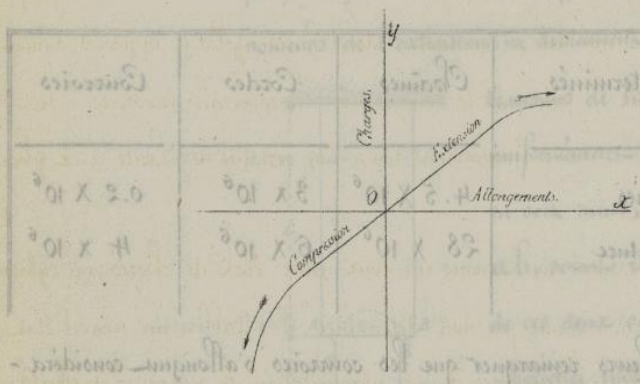
42. On a vu, en commençant l'étude de l'extension, que les corps peuvent être regardés comme formés de séries de molécules réunies entr'elles par des ressorts moléculaires. Ces ressorts s'allongent par l'extension et se raccourcissent par la compression. Entre ces deux phénomènes l'état ordinaire du corps n'est qu'un terme moyen, et l'on comprend que ce corps puisse se comprimer de la même manière qu'il s'étirait précédemment. Il faut conclure de là qu'en restant dans les limites de compression où le solide ne cesse pas d'être élastique, la formule qui a été établie pour le cas de l'extension devient applicable à la compression et l'on a toujours

$$\Delta L = \frac{L N}{E \omega},$$

N étant la charge qui comprime le solide, et ΔL le raccourcissement dû

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à cette charge.



On peut d'ailleurs représenter l'ensemble des deux phénomènes par un tracé graphique, en regardant les charges d'extension comme positives et les charges de compression comme négatives. La partie de la courbe de compression qui répond à la période d'élasticité est située sur le prolongement de la partie rectiligne qui caractérise la période d'élasticité dans l'extension. Mais la ligne de compression se change bientôt en une véritable courbe caractérisant l'état des ressorts moléculaires, qui se fatiguent de plus en plus. Cette courbe doit tourner sa concavité vers les y négatifs, puisque la résistance du corps augmente de plus en plus, à mesure que la compression devient plus grande. L'expérience a d'ailleurs vérifié ces hypothèses, mais d'une manière restreinte.

43. — *Expériences sur la compression.* — Les phénomènes de la compression sont bien plus difficiles à observer que ceux de l'extension; si le corps sur lequel on opère, est long, il fléchit au lieu de se comprimer; le phénomène est alors plus complexe, et on ne peut plus appliquer la formule de la compression simple.

D'ailleurs, les conditions des deux phénomènes diffèrent d'une manière notable:

Une barre soumise à l'extension éprouve toujours une diminution dans sa section: s'il y a éloignement de molécules dans le sens longitudinal, il y a donc rapprochement dans le sens transversal.

Ce rapprochement est nécessairement accompagné de pressions exercées par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les molécules les unes sur les autres.

Le corps étant symétrique, ces pressions le seront aussi et dans chaque plan méridien, nous aurons en général à considérer deux forces égales et opposées s'entre-détruisant vers l'axe de la pièce. Cette compression transversale accessoire se manifestant nécessairement dans l'extension donne une certaine régularité aux phé-nomènes qu'elle produit.

Dans la compression nous avons un tout autre état de choses, un cylindre étant comprimé sous l'action d'une pression déterminée, il s'établit un nouvel état d'équilibre, dans lequel il y a tendance à une augmentation de section. Les efforts transversaux qui se produisent, agissent du centre à la circonférence; et ces forces au lieu de se détruire les unes par les autres, déterminent nécessairement une sorte de poussée au vide vers l'extérieur.

En réalité, il n'y a donc pas entre la compression et l'extension, la corrélation que nous admettions tout d'abord d'une manière un peu trop absolue.

44. — L'expérience suivante due à M.r Tresca, fera mieux comprendre cette différence.

Un cylindre de plomb ayant $0^m.05$ de hauteur, $0^m.05$ de diamètre et formé de dix anneaux concentriques de mêmes sections transversales, a été comprimé de manière à réduire sa hauteur à 3 centimètres.

On a constaté que le volume du corps était resté le même; la forme de la surface latérale était bombée; en coupant le solide déformé, par un plan méridien, on a vu que les génératrices extérieures avaient pris la forme du méridien sur une partie de la longueur seulement, et s'étaient repliées à leurs extrémités, de manière à former, dans les plans de compression, le prolongement des faces primitives;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les autres cylindres affectaient des formes concentriques, mais les modifications de chacun d'eux montrent qu'il y a eu un véritable déplacement du centre à la circonférence.

Nous avons là l'image de ce qui doit se passer dans la compression des corps solides et ces formes démontrent bien l'existence des poussées au vide, déterminées par cette compression.

Nous voyons donc que ce n'est que dans de très-étroites limites que les files de molécules se comportent de la même manière à l'extension et à la compression

45. — Rondelet a déduit de ses expériences qu'un cube soumis à l'écrasement se divise en six pyramides ayant leur sommet commun au centre du cube et pour bases les faces de ce cube ; nous pensons qu'il ne se forme réellement que deux pyramides, celles dont les bases correspondent aux deux plans de compression ; les quatre autres pyramides n'existent qu'à l'état de matières désagrégées. En tous cas la poussée au vide se manifeste clairement dans cette expérience.

Il a été fait beaucoup d'expériences sur la rupture par compression, très peu sur les déformations de la période d'élasticité, si tant est qu'il y en ait de bien sérieuses, car dans les expériences de cette nature on se trouve entre deux écueils. Si le solide est long, il y a flexion ; s'il est court la compression est trop petite pour être appréciée par nos moyens de mesurage.

46. — *Résistance des métaux à la compression.* — M^r Hodgkinson a fait de nombreuses expériences sur la résistance à la compression du bois, du fer et de la fonte.

Il prenait des barres de 3^m" de longueur, 6^cc" 45 de section, et les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

maintenait latéralement dans des gaines de fer qui empêchaient la flexion de dépasser une certaine limite ; d'autres expériences ont été faites sur des solides de 3 à 5 cent.ᵉˢ de hauteur seulement, mais elles ne peuvent conduire qu'à la détermination du coefficient de rupture.

47. — Résultats d'expériences obtenus pour la compression. —

Coefficients		Fer.	Fonte.	Chêne.	Sapin.
Coefficients d'élasticité	E	$16 . 10^9$	$8 . 10^9$	" "	" "
Limite d'élasticité	$\frac{N_e}{\omega}$	$18 . 10^6$	$23 . 10^6$	" "	" "
Charge pratique	$\frac{N_p}{\omega}$	$6 . 10^6$	$10 . 10^6$	$0,4 . 10^6$	$0,4 . 10^6$
Charge de rupture	$\frac{N_r}{\omega}$	$25 . 10^6$	$75 . 10^6$	$4,5\ 10^6$	$4,5 . 10^6$

Il résulte de ce tableau qu'entre certaines limites les coefficients d'élasticité sont sensiblement les mêmes pour l'extension et pour la compression ; et cela montre comment, dans ces mêmes limites, le coefficient d'élasticité caractérise les propriétés mécaniques des matériaux.

Ce rapprochement acquerra du reste toute son importance, lorsque nous pourrons en faire la vérification dans l'observation des phénomènes de flexion.

La limite d'élasticité se produit pour la fonte plus tard que pour le fer ; les molécules du premier métal résistent donc mieux à la poussée au vide, ce qui peut tenir aux différences de constitution des deux métaux. La fonte est un métal homogène, tandis que les molécules du fer affectent l'état fibreux.

D'ailleurs la fonte n'est pas, comme on le dit généralement, plus avantageuse

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que le fer pour résister à la compression, car pour une section et une charge données, la pièce de fonte éprouverait une déformation double de celle de la pièce de fer; et, dans les machines, ce qui importe surtout, c'est que les pièces ne changent pas sensiblement de dimensions.

Dès que les pièces ont une hauteur double de la dimension transversale il y a flexion.

48. — *Résistance des maçonneries.* — En général, pour les maçonneries, quand le rapport de la hauteur à la base est plus grand que 2, la résistance diminue.

La résistance pour des solides semblables semble être proportionnelle aux sections transversales.

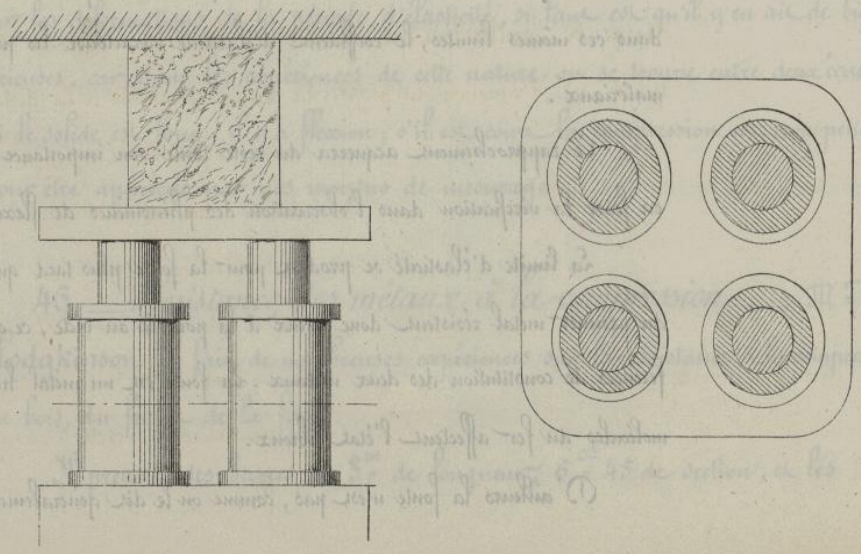
Il convient de ne pas charger les pièces au delà du 1/10e ou du 1/20e de leur résistance à la rupture.

On a sous ce rapport de très-nombreuses déterminations.

En France, M. Michelot, Ingénieur des Ponts-et-Chaussées expérimenté avec un appareil à levier.

Les cubes de 5c de coté sont placés entre deux plaques de fonte.

M. Tresca fait également des expériences sur les diverses pierres employées aux



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

constructions, la pression est obtenue au moyen d'une presse hydraulique à quatre cylindres, ce qui permet, grâce à l'indépendance des pistons d'obtenir un parallélisme très-exact entre les surfaces qui compriment et celles des matériaux à écraser.

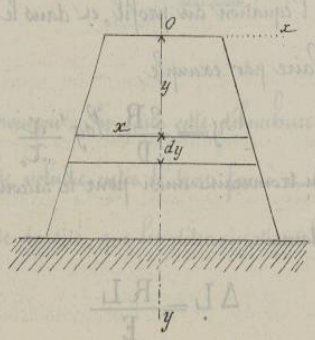
Les expériences ont été faites sur des cubes de 10^c, et dans les divers tableaux qui ont été publiés à ce sujet, on a eu soin d'indiquer les charges sous lesquelles les premières fissures apparaissent et celles qui correspondent à l'écrasement complet.

Voici quelques chiffres sur la résistance des pierres.

Pierres calcaires	0.3	à	$7^K \times 10^6$
Grès des Vosges	1.7	à	5×10^6
Briques	0.3	à	2×10^6
Plâtre	0.3	à	0.6×10^6

Pour des matériaux de même nature la résistance est à peu près proportionnelle au poids du mètre cube.

49. — *Un solide à section variable et de profil déterminé étant donné*, calculer le raccourcissement qui se produit sous l'action d'une charge N, uniformément répartie sur la base supérieure du solide. — Soit $y = f(x)$, l'équation du profil; la section ω, située à la distance y du point O, varie évidemment avec la valeur correspondante de x; cette section est donc une fonction de y, et l'on a $\omega = \varphi(y)$.



Cela posé, si Δy est le raccourcissement de la longueur y, l'élément d'y se raccourcit de la quantité $d\Delta y$ et l'on a d'après la formule du N° 42,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$d\Delta y = \frac{N\,dy}{E\,\omega} = \frac{N\,dy}{E\,\varphi(y)}$$

d'où

$$\Delta y = \frac{N}{E}\int \frac{dy}{\varphi(y)}$$

Si, par exemple, le profil est une ligne droite ayant pour équation $x = my+n$ et la section un carré, on a

$$\omega = \varphi(x) = 4x^2 = 4(my+n)^2,$$

et l'équation précédente devient

$$\Delta y = \frac{N}{4E}\int \frac{dy}{my+n} = -\frac{N}{4mE\,(my+n)} + C.$$

Pour $y = 0$, on a évidemment $\Delta y = 0$, ce qui donne

$$0 = -\frac{N}{4\,m\,n\,E} + C.$$

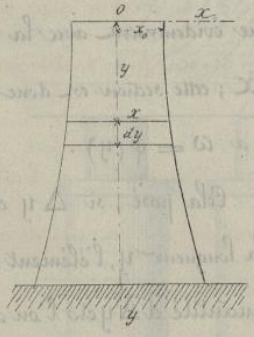
En retranchant cette équation de la précédente, on obtient

$$\Delta y = \frac{N}{4mE}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{my+n}\right) = \frac{y}{4n\,E\,(my+n)}$$

Pour avoir le raccourcissement total du solide, il suffit de poser $y = L$, ce qui donne

$$\Delta L = \frac{L}{4n\,E\,(mL+n)}$$

50. Solide d'égale résistance eu égard à la compression.



En traitant la question comme celle du N°. 34, on trouve pour l'équation du profil, en dans le cas d'une section circulaire par exemple,

$$y = \frac{2R}{D}\log'\frac{x}{x_0}$$

On trouverait aussi pour le raccourcissement correspondant

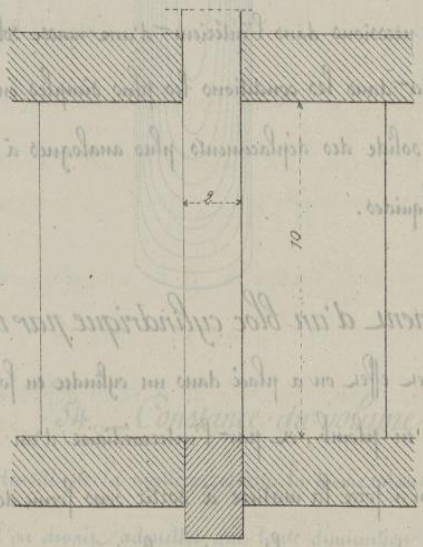
$$\Delta L = \frac{RL}{E}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

51. — **Écoulement des corps solides.** — Bien que le mécanicien ait le plus souvent à considérer les corps dans les conditions qui n'altèrent pas leur forme d'une manière permanente, il importe aussi qu'il connaisse les lois de leurs déformations dans les circonstances où il a besoin d'en modifier la forme.

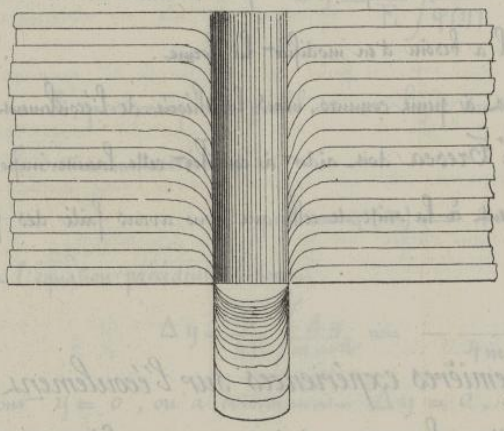
Ces lois sont à peine connues, mais la théorie de l'écoulement des corps solides présentée par M^r^ Tresca doit aider à combler cette lacune importante, et son étude se place naturellement à la suite de celle que nous avons faite des phénomènes de la compression.

52. — *Premières expériences sur l'écoulement des corps solides.* — Les premières observations qui aient conduit à l'étude de cette question se rapportent au poinçonnage d'un cylindre de plomb de 10 centimètres de hauteur. Ce cylindre ayant été placé entre deux plaques de métal percées l'une et l'autre d'un trou cylindrique de 2 centimètres de diamètre, on a fait passer, de part en part, un poinçon de même diamètre, et l'on a ainsi fait sortir une débouchure cylindrique, formée par le métal expulsé, et qui aurait dû présenter une hauteur égale à celle du bloc s'il y avait eu seulement déplacement de la matière dans le sens du mouvement du poinçon. En fait cette débouchure n'avait que 3 centimètres de hauteur, et cette différence de volume entre le trou formé et la débouchure ne pouvait s'expliquer par une augmentation de densité, que les déterminations les plus précises ont démontré ne pas exister.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour reconnaître la cause de cette anomalie apparente on a remplacé la masse de plomb par une série de plaques superposées, et l'on a reconnu que ces plaques étaient très-inégalement représentées dans la débouchure. Celles de la partie supérieure, à l'exception de la première, y étaient réduites à une si petite épaisseur qu'il devenait évident que la matière qui les formait primitivement avait dû être refoulée à l'extérieur du trou de poinçonnage, dans le bloc lui-même.



Ce déplacement a donné la première notion des mouvements intérieurs qui peuvent se produire par le jeu des pressions dans l'intérieur d'une masse solide.

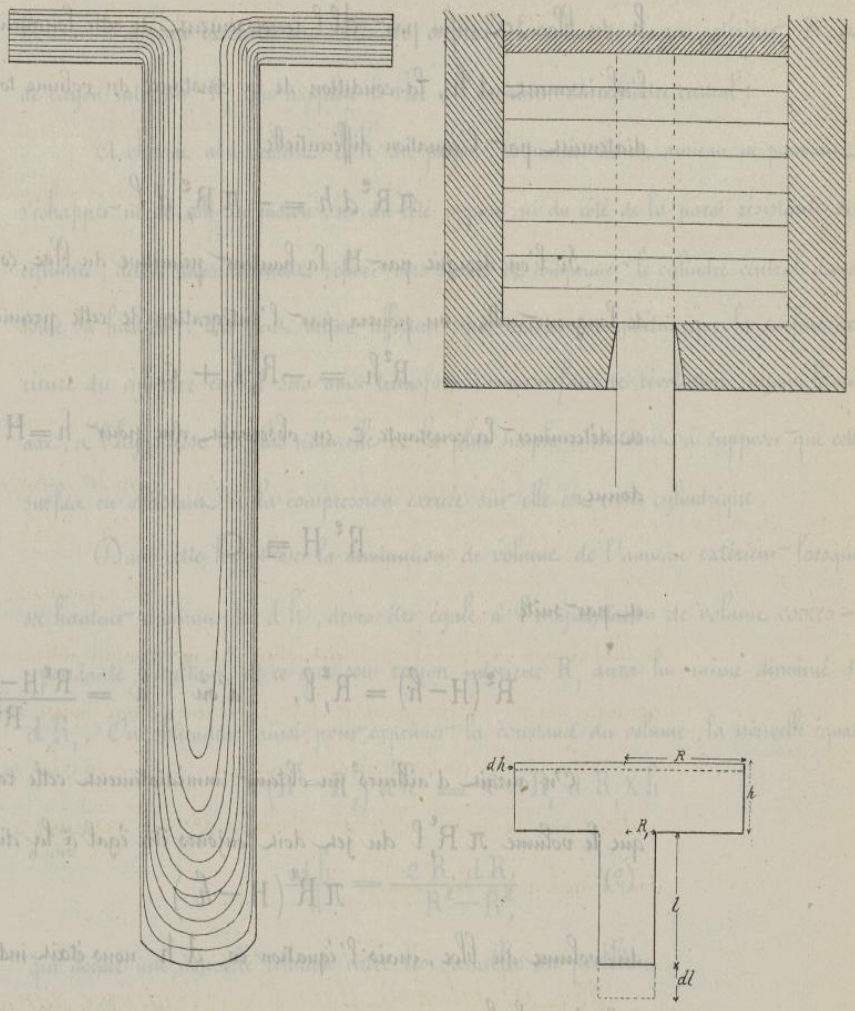
Afin de les étudier dans les conditions les plus simples on a dû chercher à réaliser avec la masse solide des déplacements plus analogues à ceux qui se produisent dans l'écoulement des liquides.

53. — Écoulement d'un bloc cylindrique par un orifice concentrique. — A cet effet on a placé dans un cylindre en fonte une série de rondelles ou de plaques en plomb, et par l'intermédiaire d'un piston fortement pressé sur ces plaques on a forcé la matière à sortir sous forme de jet cylindrique par un orifice circulaire concentrique avec l'axe du cylindre.

Ce jet ainsi obtenu devait permettre d'y retrouver les séparations des différentes plaques, et de fournir ainsi quelques renseignements sur les déformations intérieures, correspondant à la déformation extérieure résultant de la production du jet.

Les faits ont été sous ce rapport si couchants qu'il est devenu possible de les exprimer par des équations, au moyen de quelques considérations géométriques.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



54. — *Constance du volume total.* — L'expérience a montré que la densité de la matière restait la même dans les diverses parties du solide, et qu'ainsi l'on devait admettre que toute diminution dans le volume du bloc était exactement compensée par une augmentation correspondante dans le volume du jet.

Si l'on désigne par R le rayon extérieur du cylindre, par R_1 le rayon de l'orifice circulaire, qui est aussi celui du jet cylindrique, par h la hauteur du bloc à un instant quelconque, par $-dh$ la diminution de cette hauteur par suite de l'écoulement, par l la longueur du jet correspondant à la hauteur

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

h du bloc, et enfin par dl l'accroissement de cette longueur correspondant à l'abaissement dh, la condition de la constance du volume total se traduit immédiatement par l'équation différentielle

$$\pi R^2 dh = -\pi R_1^2 dl$$

Si l'on désigne par H la hauteur primitive du bloc, correspondant à un jet de longueur nulle, on pourra par l'intégration de cette première équation écrire

$$R^2 h = -R_1^2 l + C$$

et déterminer la constante C en observant que pour $h=H$ on a $l=0$, ce qui donne

$$R^2 H = C$$

et par suite

$$R^2(H-h) = R_1^2 l, \quad \text{d'où} \quad h = \frac{R^2 H - R_1^2 l}{R^2}$$

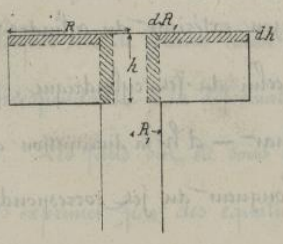
On aurait d'ailleurs pu obtenir immédiatement cette relation en remarquant que le volume $\pi R_1^2 l$ du jet doit toujours être égal à la diminution

$$\pi R^2 (H-h)$$

du volume du bloc, mais l'équation en dh nous était indispensable pour la suite des calculs.

On pourrait aussi obtenir cette valeur de dh en différentiant l'équation en h d'où

$$dh = -\frac{R_1^2 dl}{R^2} \qquad (1)$$



55. — *Hypothèse de la contraction concentrique du cylindre central.* — Nous désignerons sous le nom de cylindre central, le cylindre de rayon R_1 que l'on peut concevoir dans le bloc en prolongement du cylindre formé par le jet, et sous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le nom d'anneau extérieur au cylindre central, l'anneau de rayon extérieur R et de rayon intérieur R_1 qui complète le bloc à l'extérieur du cylindre central.

A chaque abaissement dh du piston, la matière de cet anneau ne pouvant s'échapper ni du côté du piston, ni du côté opposé, ni du côté de la paroi résistante du cylindre, devra nécessairement refluer vers l'axe et comprimer le cylindre central dans toute sa hauteur. On peut même affirmer, par raison de symétrie, que la surface extérieure du cylindre central sera ainsi transformée en une surface de révolution, ayant le même axe, et l'hypothèse la plus naturelle et la plus simple consisterait à supposer que cette surface en obéissant à la compression exercée sur elle est restée cylindrique.

Dans cette hypothèse la diminution de volume de l'anneau extérieur lorsque sa hauteur diminue de dh, devra être égale à l'augmentation de volume correspondante, résultant de ce que son rayon intérieur R_1 aura lui-même diminué de dR_1. On obtiendra ainsi, pour exprimer la constance du volume, la nouvelle équation

$$\pi(R^2 - R_1^2)\,dh = 2\pi R_1\,dR_1 \times h$$

d'où

$$\frac{dh}{h} = \frac{2R_1\,dR_1}{R^2 - R_1^2} \qquad (2)$$

qui donne une nouvelle relation entre les variables du problème.

56. — *Hypothèse de la contraction proportionnelle dans le cylindre central.* — La surface extérieure du cylindre central ne peut diminuer de rayon sans que certains déplacements se produisent à l'intérieur de ce cylindre central et, dès lors que toutes les actions s'exercent d'une manière parfaitement symétrique autour de l'axe, il est naturel de supposer que chaque cylindre de hauteur h et de rayon extérieur r, soit modifié dans sa section transversale proportionnellement à cette section, ce qui permet d'écrire, comme troisième condition,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\frac{d.\pi r^2}{\pi r^2} = \frac{d\pi R_1^2}{\pi R_1^2}$$

ou
$$\frac{2\pi r\,dr}{\pi r^2} = \frac{2\pi R_1 dR_1}{\pi R_1}$$

et enfin
$$\frac{dr}{r} = \frac{dR_1}{R_1} \qquad (3)$$

Cette équation pourra nous servir à déterminer le rayon r en lequel se sera modifié le rayon primitif R_1 du cylindre central, après la formation d'une longueur de jet déterminée.

57. — Transformée du cylindre central primitif dans le bloc.

Les trois équations qui précèdent vont nous permettre de trouver le rayon du cylindre en lequel se sera transformé, dans le bloc, le cylindre central primitif de rayon R_1, quand le jet aura acquis une longueur l.

Il suffira pour cela d'éliminer dR_1 entre les équations (2) et (3), ce qui donne

$$\frac{dh}{h} = \frac{2R_1^2}{R^2 - R_1^2} \times \frac{dr}{r}$$

On obtient par l'intégration directe

$$\log' h = \frac{2R_1^2}{R^2 - R_1^2} \times \log' r + C$$

et en observant que pour $h = H$, on a $r = R_1$

$$\log' H = \frac{2R_1^2}{R^2 - R_1^2} \times \log' R_1$$

$$\log \frac{h}{H} = \frac{2R_1^2}{R^2 - R_1^2} \times \log' \frac{r}{R_1}$$

ou en traduisant cette relation sous la forme exponentielle

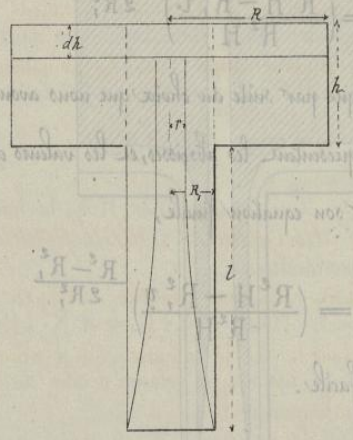
$$\frac{r}{R_1} = \left(\frac{h}{H}\right)^{\frac{R^2 - R_1^2}{2R_1^2}} \qquad (4)$$

Cette formule permettra de déterminer le rayon r du cylindre qui représente, dans le bloc, le cylindre central primitif de rayon R_1.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

58. — Transformée du cylindre central primitif dans le jet.

Pour connaître la transformée dans le jet d'une des génératrices de la surface extérieure du cylindre central primitif, il suffit de faire remarquer que chaque abaissement dh de la hauteur du bloc détermine la formation d'un élément infinitésimal du jet, de hauteur dl, et que dans cet élément cylindrique, le cylindre central primitif est représenté par un élément cylindrique de rayon r' donné par la formule précédente.



Si nous désignons par l la longueur du jet, mesurée à partir de son extrémité, et par r' ce rayon variable mesuré à partir de l'axe de figure considéré comme axe des ordonnées, l'équation cherchée s'obtiendra facilement en cherchant dans nos équations fondamentales une relation entre l et r', ce qui exige que nous éliminions entr'elles, la variable h et les différentielles dh et dR_1.

Il suffit pour cela d'égaler les deux valeurs de $\frac{dh}{h}$ dans les équations (1) et (2) et de remplacer dR_1 par sa valeur en fonction de dr' tirée de l'équation (3) ce qui donne

$$\frac{dh}{h} = \frac{-\frac{R_1^2\,dl}{R^2}}{\frac{R^2H - R_1^2 l}{R^2}} = \frac{2R_1\,dR_1}{R^2 - R_1^2} = \frac{2R_1^2}{R^2 - R_1^2} \times \frac{dr'}{r'};$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{-R_1^2\,dl}{R^2H - R_1^2 l} = \frac{2R_1^2}{R^2 - R_1^2} \times \frac{dr'}{r'}$$

Cette équation peut s'intégrer sous la forme

$$\log z = \frac{R^2 - R_1^2}{2R_1^2} \log\left(R^2H - R_1^2 l\right) + C,$$

et en observant qu'à l'origine,

$$r' = R_1, \quad l = 0,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\log' R_1 = \frac{R^2 - R_1^2}{2R_1^2} \times \log' R^2 H + C$$

et enfin

$$\log' \frac{r}{R_1} = \frac{R^2 - R^2}{2R^2} \times \log' \frac{R^2 H - R_1^2 l}{R^2 H}$$

équation qui peut encore se mettre sous la forme

$$\frac{r}{R_1} = \left(\frac{R^2 H - R_1^2 l}{R^2 H} \right)^{\frac{R^2 - R_1^2}{2R_1^2}}$$

Remarquons maintenant que par suite du choix que nous avons fait de nos axes de coordonnées, les valeurs de r représentent les abscisses, et les valeurs de l, les ordonnées de notre courbe, nous trouvons pour son équation finale,

$$\frac{x}{R} = \left(\frac{R^2 H - R_1^2 y}{R^2 H} \right)^{\frac{R^2 - R_1^2}{2R_1^2}}$$

qui se prête à une discussion facile.

5g. — *Discussion de la transformée.* — La courbe représentée par l'équation précédente présente différentes dispositions suivant que la valeur de R_1 varie par rapport à R. C'est ce que l'on remarque immédiatement si on met cette équation sous la forme

$$\frac{R^2 H - R_1^2 y}{R^2 H} = \left(\frac{x}{R_1} \right)^{\frac{2R_1^2}{R^2 - R_1^2}}$$

dans laquelle y n'entre qu'à la première puissance.

La nature de la courbe variera avec la valeur de l'exposant $\frac{2R_1^2}{R^2 - R_1^2}$

Si cet exposant est plus grand que 2, la courbe peut être considérée comme une parabole d'un degré supérieur.

S'il est égal à 2, auquel cas $R_1^2 = R^2 - R_1^2$ ou $R_1^2 = \frac{R^2}{2}$, la courbe est une parabole du second degré.

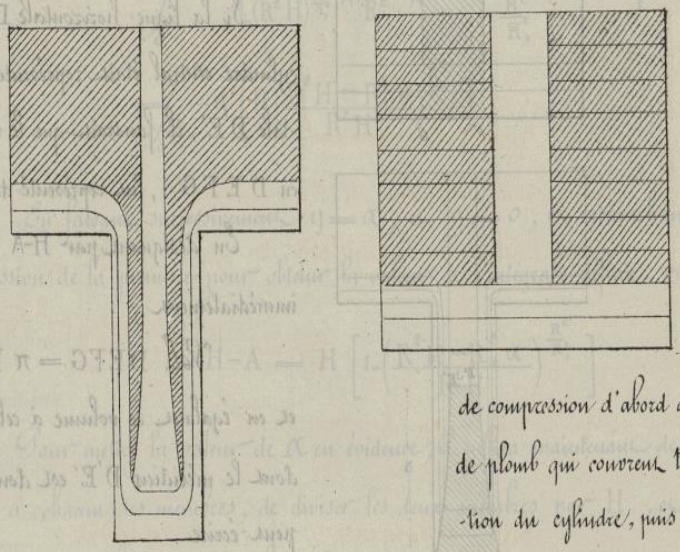
Elle se réduit à une ligne droite si $2R_1^2 = R^2 - R_1^2$ d'où $R_1^2 = \frac{R^2}{3}$

Au-dessous de cette valeur la courbe devient une hyperbole de degré variable, qui serait du second degré si $2R_1^2 = -(R^2 - R_1^2)$ mais on aurait alors $R_1^2 = -R_1^2$, ce

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui conduit pour R_1, à une valeur imaginaire.

60. — *Vérification expérimentale.* — Pour vérifier si les résultats de l'expérience sont conformes à cette théorie nouvelle, M.r Tresca a placé dans son cylindre



de compression d'abord deux plaques de plomb qui couvrent toute la section du cylindre, puis une série de plaques percées au centre d'un trou de même diamètre 0.m 03 que celui du jet qu'il voulait former. Enfin il a rempli le vide cylindrique de toutes les plaques supérieures par un cylindre de plomb bien ajusté. Chacune des génératrices de ce cylindre central devait se transformer, lors de la formation du jet, comme l'indique l'équation; et en coupant le jet suivant un plan diamétral, la ligne de joint entre le cylindre et les plaques devrait réaliser avec plus ou moins d'exactitude la forme calculée.

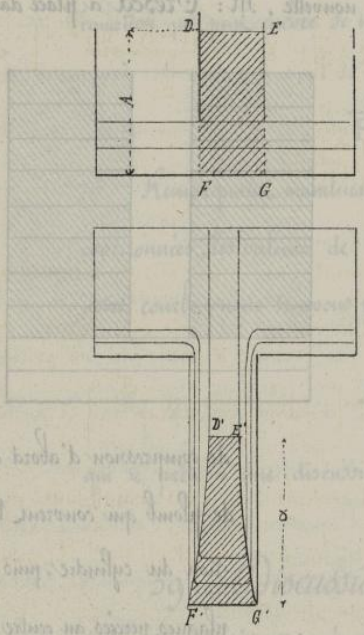
Le résultat de cette expérience a été de tout point satisfaisant; les valeurs de x calculées par la formule, pour les diverses valeurs de y, n'ont jamais différé de plus d'une fraction de millimètre de l'abscisse réellement mesurée sur l'échantillon même.

Cette vérification doit donc être considérée comme une preuve sérieuse à l'appui de la théorie de l'écoulement des corps solides.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

61. — Transformée d'une couche horizontale dans le jet. —

En poussant plus loin le calcul, l'auteur est arrivé d'ailleurs à une autre vérification tout aussi probante; elle se rapporte à la distance des couches dans le jet.



Si la ligne horizontale DE, considérée dans le cylindre central était représentée dans le jet par l'horizontale D'E', il faudrait que le volume primitivement projeté en DEFG, fut représenté dans le jet par D'E'F'G'.

En désignant par H-A la hauteur DE on a immédiatement

$$Vol.\ DEFG = \pi R_1^2 (H-A)$$

et en égalant ce volume à celui du solide de révolution dont le méridien D'E' est donné par son équation, on peut écrire

$$\pi R_1^2 (H-A) = \int_0^\alpha \pi x^2 dy$$

et pour connaître la hauteur $MN = \alpha$, il suffira de déterminer cette limite de manière à satisfaire à cette condition d'égalité.

or on a $$x^2 = R_1^2 \left(\frac{R^2 H - R_1^2 y}{R^2 H} \right)^{\frac{R^2 - R_1^2}{R_1^2}};$$

et en substituant cette valeur de x^2 sous le signe de l'intégration, il vient

$$\pi R_1^2 (H-A) = \int_0^\alpha \pi R_1^2 \left(\frac{R^2 H - R^2 y}{R^2 H} \right)^{\frac{R^2 - R_1^2}{R_1^2}} \times dy$$

Pour résoudre cette équation par rapport à α, nous effectuerons les calculs ainsi qu'il suit:

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$H-A=\int_0^{\alpha}\left(\frac{1}{R^2H}\right)^{\frac{R_1^2}{R^2}-1}\left(R^2H-R_1^2y\right)^{\frac{R_1^2}{R^2}-1}\times\frac{1}{R^2}\times d\left(-\left(R^2H-R_1^2y\right)\right)$$

$$=\int_0^{\alpha}-d\left[\frac{R^2H}{(R^2H)^{\frac{R_1^2}{R^2}}}\times\frac{1}{R_1^2}\times\frac{\left(R^2H-R_1^2y\right)^{\frac{R_1^2}{R^2}}}{\frac{R_1^2}{R^2}}\right]$$

$$=\int_0^{\alpha}-d\left[H\left(\frac{R^2H-R_1^2y}{R^2H}\right)^{\frac{R_1^2}{R^2}}\right]$$

En faisant successivement $y=\alpha$, et $y=0$, et retranchant la seconde expression de la première pour obtenir la valeur de l'intégrale définie, on trouve,

$$H-A=H\left[1-\left(\frac{R^2H-R_1^2\alpha}{R^2H}\right)^{\frac{R_1^2}{R^2}}\right]$$

Pour mettre la valeur de α en évidence, il suffira maintenant de retrancher H à chacun des membres, de diviser les deux membres par H, et de transporter l'exposant dans le premier membre, ce qui donne :

$$\frac{A}{H}^{\frac{R_1^2}{R^2}}=\frac{R^2H-R_1^2\alpha}{R^2H}=1-\frac{R_1^2\alpha}{R^2H}$$

d'où l'on tire

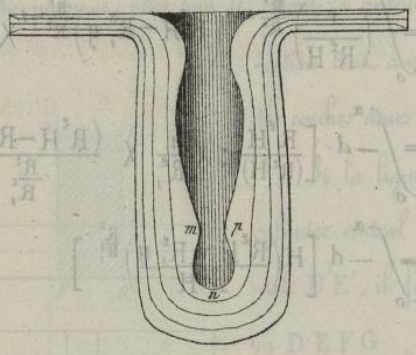
$$\alpha=\frac{R^2H}{R_1^2}\left[1-\left(\frac{A}{H}\right)^{\frac{R_1^2}{R^2}}\right]$$

Cette valeur de α a été vérifiée pour chacune des plaques des nombreux échantillons qui ont été préparés, et elle a donné lieu à autant de vérifications satisfaisantes.

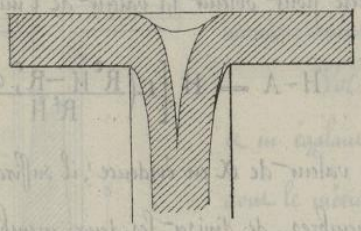
62. — *Formation des jets creux et contraction de la veine.* — Lorsque le bloc a une hauteur moindre que le rayon du jet au commencement de l'expérience, le jet présente une cavité vers l'axe, et la matière s'écoule comme le ferait un liquide sur l'arête d'un déversoir circulaire.

Cette cavité rend compte de l'entraînement qui a lieu dans l'écoulement de l'eau sous une très faible charge dans les machines soufflantes connues sous le nom de trompes catalanes, où l'air s'introduit dans une cavité semblable formée dans l'axe du jet.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

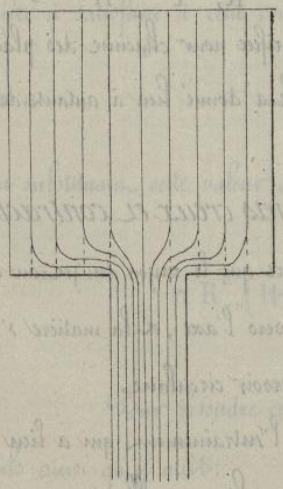


La cavité qui se forme dans les jets de matière solide à une forme très régulière que l'on pourra calculer; et en même temps que le jet se creuse vers l'axe, on voit apparaître à l'extérieur une contraction tout-à-fait analogue à la contraction des veines liquides.



La même cavité et la même contraction se forment dans les jets ordinaires à partir du moment où le bloc est réduit, par le fait même de l'écoulement, à une petite épaisseur.

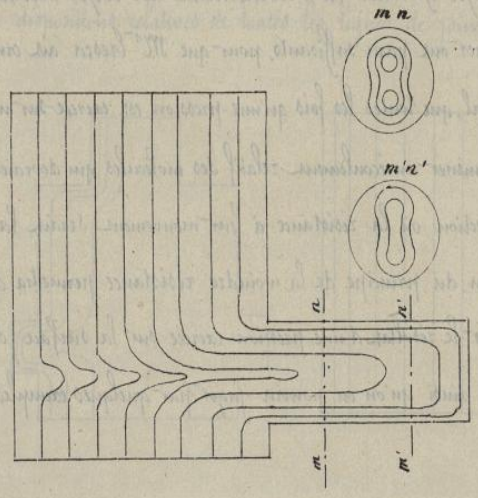
63. — *Rapprochement avec l'écoulement des liquides.* — Si l'on soumet un tronçon de jet ordinaire, formé de couches concentriques, à un nouvel écoulement dans une matrice percée d'un trou concentrique, on voit par la coupe faite ensuite suivant un plan méridien que les génératrices des faces de joint s'infléchissent toute vers l'orifice et qu'à partir d'une certaine hauteur tous les points du bloc sont intéressés à la formation de la veine. On voit, ainsi que dans l'écoulement des liquides que l'hypothèse du parallélisme des couches, bien que parfaitement convenable pour soumettre la section au calcul, n'est pas absolument conforme aux faits qui se rapprochent sans doute beaucoup de ceux qui se trouvent en



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

quelque sorte matérialisés par les expériences sur l'écoulement des corps solides.

64._ *Écoulement d'un bloc cylindrique par un orifice latéral.* Un bloc semblable au précédent étant formé de couches concentriques, si on le place dans une matrice cylindrique percée d'un trou circulaire dans sa paroi courbe, il se forme encore un jet qui offre des particularités intéressantes. La formation de ce jet prouve que la pression exercée sur la face supérieure du bloc se transmet dans l'intérieur de la masse, jusqu'à l'orifice, puisqu'elle force



la matière à sortir sous forme d'un jet cylindrique dont la section est exactement celle de l'orifice.

En coupant ce jet par des plans perpendiculaires à son axe on reconnaît que chacun des anneaux cylindriques a formé une partie distincte du jet total. Les figures ci-jointes reproduisent les contours des lignes séparatives des couches successives, et font voir que le jet total peut être considéré comme formé de la réunion de deux nappes, l'une supérieure qui est la nappe principale de l'écoulement de la partie supérieure du bloc; l'autre, inférieure, d'une section moindre, et que l'on pourrait appeler la nappe d'entraînement parce qu'elle provient de la matière primitivement placée au dessous de l'orifice et qui a été entraînée par la nappe principale dans son mouvement.

L'existence de ces deux nappes est d'ailleurs mise en évidence par la coupe dans le bloc par un plan méridien perpendiculaire à l'axe du jet. Ces déplacements relatifs s'effectuent avec une si grande régularité que le dessin ne peut les représenter que d'une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

manière très-insuffisante.

Des déplacements analogues et tout aussi remarquables, se remarquent encore quand l'orifice est de section carrée ou polygonale.

65.—*Principe général de l'écoulement des corps solides.*—Les faits que nous venons d'indiquer ont paru suffisants pour que M^r^ Tresca ait cru pouvoir énoncer comme principe général, que toutes les fois qu'une pression est exercée sur un corps solide, cette pression tend à déterminer un écoulement relatif des molécules qui devraient dès lors se mouvoir dans la direction où la résistance à leur mouvement serait la moindre.

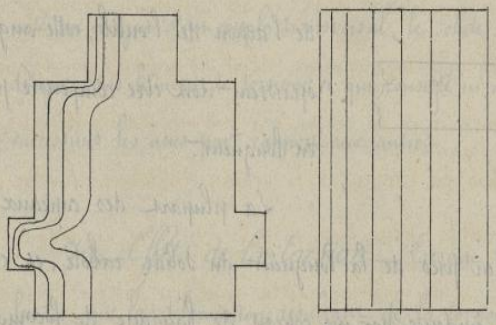
Cette application du principe de la moindre résistance permettra dans beaucoup de circonstances de prévoir le résultat d'une pression exercée sur la surface d'un corps solide de forme déterminée, ainsi qu'on en pourra juger par quelques exemples pris dans quelques opérations usuelles.

66.—*Applications au poinçonnage.*—Dans l'expérience du poinçonnage dont il a été déjà question au N^o^ 52, la pression déterminée par l'application du poinçon fera couler la matière dans le sens de la moindre résistance; dans le sens horizontal, si la résistance est moindre que dans le sens vertical, et c'est ce qui arrive quand le poinçon opère à une grande distance de la face inférieure; dans le sens vertical si la résistance est moindre que dans le sens horizontal, et c'est ce qui arrive lorsque le poinçon ayant beaucoup pénétré dans la masse s'est rapproché de l'orifice par lequel la débouchure est expulsée. C'est pour cette double raison que les couches supérieures ont beaucoup diminué d'épaisseur dans la débouchure, et qu'au contraire les couches inférieures y sont représentées avec une épaisseur peu différente de leur épaisseur primitive.

67.—*Application au forgeage.*—Toutes les opérations de forge peuvent être considérées au point de vue de la théorie de l'écoulement des corps solides, et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'expérience a prouvé que toute pièce de fer fabriquée est le résultat du déplacement individuel de chacune des mises qui constituaient la loupe primitive. Le laminage les étire toutes parallèlement, et lorsqu'on forge ensuite une pièce laminée, on arrive à reconnaître, par des coupes convenablement dirigées, et au moyen d'une oxydation partielle, les dispositions relatives de toutes les lignes de joint, comme par exemple dans l'arbre de moulin représenté par la figure ci-jointe et obtenu à l'aide d'un fer rond, laminé et forgé ensuite au marteau pour produire les refoulements et les étirages convenables.



Toute pièce de fer ainsi laminée, peut être comparée à un paquet de fils, réunis entr'eux par une matière agglutinante, de nature différente, et que fait apparaître le procédé d'oxydation.

Lorsqu'on écrase par le forgeage une pièce de fer semblable à la précédente, de manière à diminuer sa hauteur en augmentant son diamètre, le même mode d'oxydation démontre que les tiges de joints qui étaient d'abord verticales, se courbent vers le milieu de la hauteur de la pièce et que l'augmentation du diamètre est le résultat du pliage d'une partie de la surface extérieure, dans le plan des faces supérieure et inférieure.

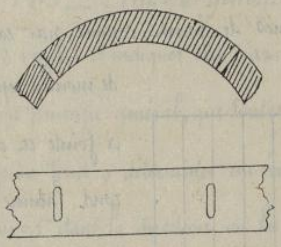
La même expérience faite sur un bloc de plomb composé de couches concentriques montre encore avec une régularité bien plus grande ce mode de déformation (Voir la fig. du N°44)

C'est en effet vers la partie libre du solide que l'écoulement doit se produire, et le frottement qui s'exerce sur les supports tend encore à assurer le résultat que nous venons d'indiquer.

68._*Application au rabotage*_Nous trouverons un nouvel exemple de l'écoulement des solides dans le rabotage des métaux. Le burin ne peut enlever le copeau

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui doit être détaché de la masse, qu'à la condition d'exercer une pression considérable sur elle. Si cette pression détermine un écoulement dans le sens attribué à cette expression, cet écoulement devra se produire dans le sens de la moindre résistance, qui est ici le sens de l'épaisseur du copeau. Cette épaisseur devra donc augmenter, et comme le volume de la matière du copeau ne saurait varier par suite de l'action de l'outil, cette augmentation en épaisseur doit être compensée par une diminution en longueur.



La plupart des copeaux ne représentent que 0.40 à peu près de la longueur du solide raboté, et ce fait est parfaitement mis en évidence par un copeau de bandage de locomotive dans lequel les rivets à section circulaire qui unissaient le bandage à la jante sont représentés par une forme elliptique dans laquelle le rapport entre le grand axe et le petit axe donne la mesure du raccourcissement proportionnel

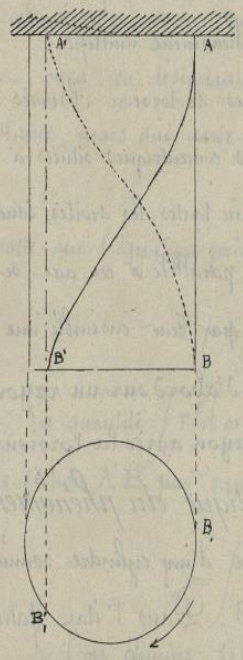
Ces exemples suffisent pour montrer le parti que l'on pourra tirer, dans l'avenir de la théorie de l'écoulement des corps solides.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Torsion.

69. — *Définition de la torsion.* — Lorsqu'on fixe invariablement un solide cylindrique ou prismatique par l'une de ses extrémités, et que l'on agit à l'autre extrémité au moyen d'un couple transversal, le solide subit une déformation que l'on désigne sous le nom de torsion, et qui consiste en un déplacement des sections transversales successives les unes par rapport aux autres.

70. — *Effets de la torsion.* — Lorsque le solide ne diffère pas trop d'un cylindre, que la déformation résultant de la torsion n'est pas trop grande et que l'équilibre est établi entre l'action du couple et les forces moléculaires développées, on constate les phénomènes suivants :



1°. — Une section transversale primitivement plane, l'est encore après la torsion, et ses dimensions n'ont pas changé.

2°. — La distance de deux sections quelconques n'a pas varié sensiblement, et, par conséquent, la longueur du solide est restée à peu près constante.

3°. — Une génératrice AB, primitivement rectiligne, s'est changée en une hélice AB', évidemment plus grande que AB; les molécules situées sur cette droite se sont éloignées les unes des autres; et si l'on conçoit le solide comme formé de disques très-minces, chacun d'eux a tourné autour d'un axe situé dans l'intérieur du solide; la quantité angulaire dont un disque s'est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

déplacé relativement au suivant est constante dans toute l'étendue du solide, de sorte que la somme de ces quantités égales exprime le déplacement angulaire total; c'est à dire la quantité dont le premier disque s'est déplacé relativement au dernier; le déplacement total, désigné par Θ, est donc proportionnel à la longueur du solide et l'on a

$$\Theta = \beta l$$

β étant la valeur de Θ qui correspond à $l = 1$; la valeur β que l'on nomme angle de torsion, se mesure par la longueur de l'arc situé à l'unité de l'axe de torsion

4.° — Une génératrice rectiligne AB, étant devenue une hélice après la torsion, on doit en conclure qu'une hélice telle que A'B', primitivement tracée sur le cylindre s'est transformée en même temps en une ligne droite A'B' plus courte que l'hélice A'B, et, par conséquent, les molécules situées sur cette courbe se sont rapprochées les unes des autres.

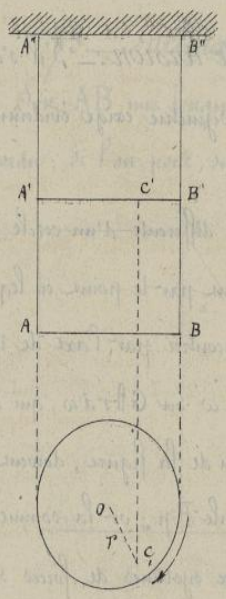
Ainsi, sous l'influence de la torsion, des molécules s'éloignent, d'autres se rapprochent; il y a donc extension dans certaines parties, compression dans d'autres, et l'on voit que la torsion est un phénomène multiple.

On comprend que les phénomènes de torsion observés à la surface du cylindre doivent se reproduire sur les surfaces concentriques situées à l'intérieur du solide. Par conséquent on peut admettre que toutes les droites situées primitivement dans un même plan passant par l'axe et parallèle à cet axe, se sont transformées en des hélices de même pas, formant par leur ensemble une surface hélicoïdale gauche. Toutes les molécules situées d'abord sur un rayon déterminé se trouvent encore sur un même rayon après la torsion.

71. — *Expression analytique du phénomène de la torsion* — Soit A'B' une section quelconque d'un cylindre soumis à l'action d'un couple Pp situé dans le plan AB. Dans l'état statique, il y a équilibre entre les forces moléculaires développées par l'action du couple, dans la section

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

A'B' en les forces exercées dans cette section par la partie du solide située au dessous de A'B', mais ces forces se réduisent évidemment à un couple égal et de sens contraire à celui qui agit en AB, donc, si F est la force par mètre carré, qui agit en un point C' de la section A'B', situé à une distance r du centre de torsion, pour un élément $d\omega$ de cette section, la force est $F\,d\omega$, et son moment, $F\,r\,d\omega$; de sorte que l'on a l'équation



$$P\rho = \int F\,r\,d\omega.$$

Pour évaluer la force F, il faut remarquer que si la section A'B' est située à un mètre de AB, le déplacement de l'élément $d\omega$, est, relativement à celui qui lui correspondait primitivement dans la section AB, égale à θr; et si l'on admet, conformément aux notions relatives à l'extension et à la compression, que F est proportionnel à ce déplacement, on a, en désignant par G un coefficient, constant pour une même substance, mais qui varie avec la nature de la matière

$$F = G\theta r,$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$P\rho = \int G\theta r^2 d\omega = G\theta \int r^2 d\omega.$$

La quantité $\int r^2 d\omega$ est ce qu'on nomme le moment d'inertie polaire de la section A'B' par rapport à l'axe de torsion. En le désignant par I_0 on a

$$I_0 = \int r^2 d\omega, \quad \text{d'où} \quad P\rho = G\theta I_0.$$

Si l'on élimine $G\theta$, entre la dernière équation et l'expression $F = G\theta r$

Bib. CNAM

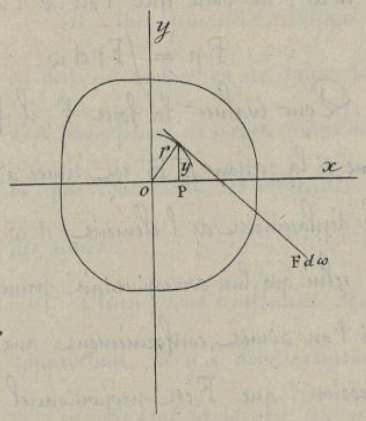
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on obtient une autre relation qui est

$$F = \frac{P\,p\,r}{I_o}$$

72. *Situation de l'axe de torsion.* — S'il s'agit d'un solide dont la section transversale est un cercle, la symétrie exige évidemment que l'axe de torsion soit l'axe de figure du solide.

Soit maintenant une section peu différente d'un cercle, et dans le plan de cette figure, deux axes Ox et Oy passant par le point en lequel cette section est rencontrée par l'axe de torsion. Les forces $F\,d\omega$ ou $G\theta r\,d\omega$, qui agissent dans le plan de la figure, doivent faire équilibre au couple $P.p$; or la somme des projections des deux systèmes de forces sur un axe quelconque doit être nulle, et comme la somme des projections des deux forces $+\frac{1}{2}P$ et $-\frac{1}{2}P$ qui constituent le couple est nécessairement nulle,



on doit avoir sur l'axe Ox, par exemple,

$$\int F\,d\omega \times \cos(F, x) = 0$$

c'est à dire

$$G\theta \int r\,d\omega \times \cos(F, x) = 0 .$$

Mais la force $F\,d\omega$ s'oppose au mouvement de rotation que tend à produire le couple, elle agit donc suivant la tangente au cercle de rayon r, et par suite on a $\cos(F, x) = \sin(r, x)$, d'où

$$G\theta \int r\,d\omega \times \sin(r, x) = 0$$

et à cause de $r \sin(r, x) = y$, cette expression devient

$$G\theta \int y\,d\omega = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \int y\,d\omega = 0$$

On aurait évidemment de même $\int x\,d\omega = 0$, ce qui prouve que le centre de gravité de la figure est situé à l'origine des coordonnées; donc le point en

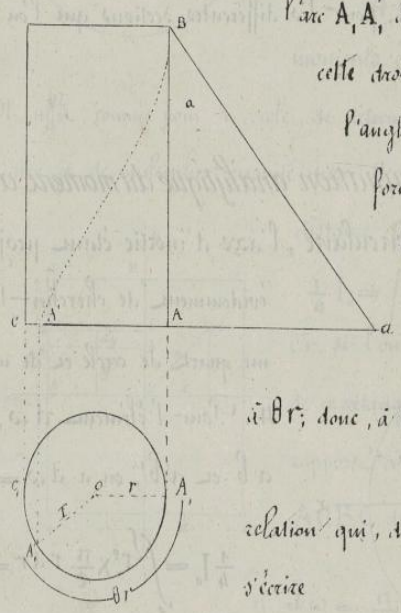
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

lequel l'axe de torsion vient rencontrer le plan de la section, et que l'on appelle centre de torsion, coïncide avec le centre de gravité de la section.

73. — Inclinaison des fibres longitudinales après la torsion.

Soit AB une longueur égale à l'unité, prise sur le cylindre après qu'il a été tordu; si l'on porte, sur le prolongement de CA, une longueur AA_2 égale à l'arc $A_1A'_1$ développé et qu'on mène la droite BC, cette droite est la transformée de l'hélice BA', l'angle α est égal à celui que l'hélice BA' forme avec les génératrices du cylindre; et l'on a $\operatorname{tang}\alpha = \frac{Aa}{AB}$. Mais la quantité Aa, ou son égale $A_1A'_1$ est, d'après une définition précédente, égale à θr; donc, à cause de AB = 1, on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \theta r,$$



relation qui, d'après l'équation $F = G\theta r$, peut aussi s'écrire

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{F}{G}.$$

On voit que pour une fibre située à l'unité de distance de l'axe de torsion, la valeur $\operatorname{tang}\alpha = \theta r$ devient $\operatorname{tang}\alpha = \theta$.

Il faut remarquer que la relation $\operatorname{tang}\alpha = \theta r$ s'applique, non-seulement à l'hélice située sur un cylindre, mais aussi à l'hélice qui serait engendrée par une droite primitivement tracée sur la surface latérale d'un solide prismatique dont la section différerait peu d'un cercle; car, dans le mouvement de torsion, cette droite se comporte comme une génératrice d'un cylindre dont l'axe serait l'axe de torsion du solide considéré.

74. — Formules fondamentales de la torsion. — En rapprochant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les résultats obtenus dans les N^os précédents, on voit que les trois relations fondamentales qui caractérisent le phénomène de la torsion sont

$$M_t = G\theta I_o,$$

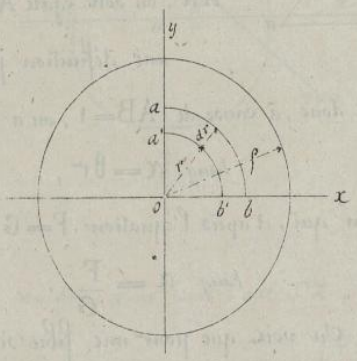
$$F = G\theta r = \frac{M_t r}{I_o},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \theta r = \frac{F}{G},$$

Il s'agit maintenant de déterminer la valeur I_o du moment d'inertie, c'est-à-dire $\int r^2 d\omega$, pour les différentes sections que l'on peut avoir à considérer.

75. — Détermination analytique du moment d'inertie polaire.

1° — Section circulaire, l'axe d'inertie étant projeté en O. — Il suffit évidemment de chercher la valeur de I_o pour un quart de cercle et de multiplier ensuite par 4. Pour l'élément $d\omega$, compris entre les arcs ab et a'b', on a $d\omega = \frac{\pi}{2} r\,dr$, d'où

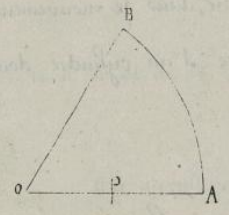


$$\frac{1}{4} I_o = \int_o^{\rho} r^2 \times \frac{\pi}{2} r\,dr = \frac{\pi \rho^4}{8} ;$$

et par suite $I_o = \frac{1}{2}\pi\rho^4 = \frac{1}{2}\pi\rho^2 \times \rho^2 = \frac{1}{2}\omega\rho^2$.

2° — Secteur de cercle. — La même méthode s'applique à la détermination du moment d'inertie polaire d'un secteur par rapport à l'axe projeté en O ; et si l'aire OAB est représentée par ω, on a toujours

$$I_o = \frac{1}{2}\omega\rho^2.$$



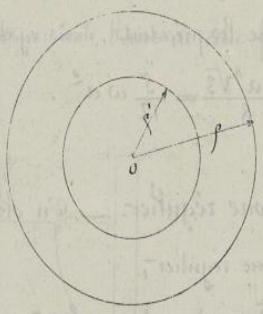
3° — Section annulaire, l'axe d'inertie étant projeté en O. — Le moment d'inertie cherché est la différence des moments d'inertie des deux cercles, et l'on a

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$I_o = \frac{1}{2}\pi(\rho''^4 - \rho'^4),$$

ou encore, ω étant l'aire de la section annulaire,

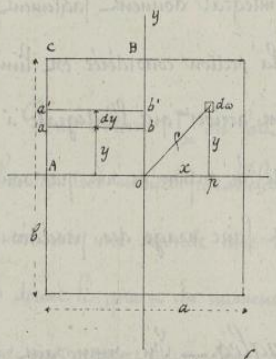
$$I_o = \frac{1}{2}\pi(\rho''^2 - \rho'^2)(\rho''^2 + \rho'^2) = \frac{1}{2}\omega(\rho''^2 + \rho'^2).$$



4°. — Section rectangulaire, l'axe des moments étant projeté au centre de la figure. — Il suffit, comme pour le cercle, de déterminer le moment d'inertie pour le quart de l'aire et de multiplier ensuite par 4. Mais, pour un élément $d\omega$, situé à la distance r de l'axe, on a

$$\frac{1}{4}I_o = \int r^2 d\omega = \int (y^2 + x^2)\, d\omega = \int y^2 d\omega + \int x^2 d\omega$$

Or, si l'on considère le petit rectangle $abb'a'$, l'aire de ce rectangle est $d\omega = \frac{a}{2}dy$, et son moment par rapport à ox, $y^2 \times \frac{a}{2}dy$; donc, pour la partie AOBC du rectangle total, on a



$$\int y^2 d\omega = \frac{a}{2}\int_o^{\frac{b}{2}} y^2 dy = \frac{ab^3}{48}.$$

On trouverait de même, relativement à l'axe oy,

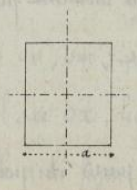
$$\int x^2 d\omega = \frac{b}{2}\int_o^{\frac{a}{2}} x^2 d\omega = \frac{ba^3}{48},$$

d'où l'on conclut

$$I_o = 4 \times \left(\frac{ab^3}{48} + \frac{ba^3}{48}\right) = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2).$$

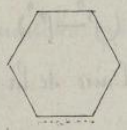
Si ω est l'aire du rectangle, on a $\omega = ab$; et par suite,

$$I_o = \frac{1}{12}\omega(a^2 + b^2).$$



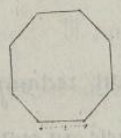
5°. — Carré. — On a, en faisant $b = a$ dans la valeur précédente, $I_o = \frac{a^4}{6} = \frac{1}{6}\omega a^2$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



6°. — *Hexagone régulier.* — On trouverait par des procédés un peu plus longs que les précédents, mais également faciles,

$$I_o = \frac{5a^4\sqrt{3}}{8} = \frac{5}{12}\omega a^2 .$$



7°. — *Octogone régulier.* — On obtient aussi très-facilement pour l'octogone régulier,

$$I_o = \frac{a^4}{6}(8\sqrt{2}+11) = \frac{1}{12}\omega a^2(5+3\sqrt{2}) .$$

76. — *Détermination graphique du moment d'inertie polaire.*

Les procédés ordinaires du calcul intégral donnent facilement le moment d'inertie polaire dans la plupart des cas où la section considérée est limitée par une ligne définie analytiquement. Mais il peut arriver que l'intégrale à déterminer soit trop compliquée ou que la ligne qui limite la section ne soit pas soumise à une loi géométrique donnée. Dans ce cas, on peut faire usage des procédés graphiques suivants.

77. — *Méthode des rectangles.* — En supposant que la figure OABCD représente un quart de la section considérée, on a, comme précédemment,

$$\frac{1}{4} I_o = \int r^2 d\omega = \int y^2 d\omega + \int x^2 d\omega ;$$

et si l'on pose

$$\int y^2 d\omega = I_x , \quad \int x^2 d\omega = I_y ,$$

on peut écrire

$$\frac{1}{4} I_o = I_x + I_y .$$

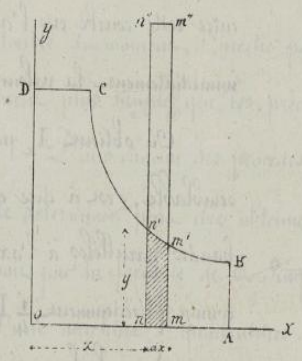
Soit $n\,m\,m'\,n'$ un élément dont la hauteur est y et la base dx ; la valeur de cet élément étant $d\omega = y\,dx$, son moment par rapport à l'axe Oy est $x^2 d\omega = x^2 y\,dx$, et par conséquent,

$$I_y = \int x^2 y\,dx .$$

Si l'on porte à l'échelle du dessin et à partir du point n, une longueur

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$n\,n'$ égale à la valeur numérique du produit x^2y, et qu'on achève le rectangle $n\,m\,m''n''$, l'aire de cette figure représente évidemment le moment de l'élément $n\,m\,m'n'$, et si l'on fait la même construction pour tous les éléments de largeur infiniment petite dx qui forment la figure OABCD on obtient une suite de points, tels que n'', dont l'ensemble détermine une courbe continue; l'aire comprise entre cette courbe et l'axe ox, représente, à l'échelle du dessin, la valeur de I_y. Pour $x=0$ on a $x^2y=0$, donc la courbe passe par l'origine des coordonnées.



Pour obtenir I_x on fait une construction semblable en décomposant la figure en bandes très-minces parallèles à l'axe ox; on détermine ainsi une seconde courbe, et par suite une seconde aire dont la valeur représente I_x; la somme des deux aires donne le quart du moment d'inertie I_o. Si la figure était entièrement symétrique par rapport aux deux axes coordonnés, il suffirait de déterminer une seule aire et de la multiplier par 2.

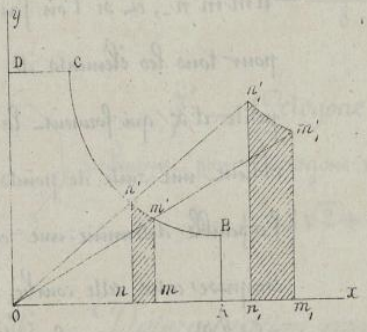
Ce procédé exige beaucoup de calculs, et donne lieu à une épure dont les dimensions sont souvent très grandes relativement à celles de la figure donnée: On peut le remplacer par la construction suivante.

78. — *Modification de la méthode des rectangles.* — Soit, comme précédemment, $n\,m\,m'n'$ l'un des éléments $d\omega$ de la section OABCD, élément dont l'aire est $y\,dx$ et le moment, $x^2y\,dx$. Si l'on mène les droites indéfinies on', om', que l'on prenne $on'_1 = on' \times x$, $om'_1 = om' \times x$, et qu'on abaisse sur l'axe ox, les perpendiculaires n'_1n_1, m'_1m_1, la figure $n_1m_1m'_1n'_1$ est semblable à la figure $n\,m\,m'n'$ et l'on a

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\frac{n_1 m_1 m'_1 n'_1}{n m m' n'} = \frac{on_1^2}{on^2} = \frac{(on_1 \times x)^2}{(on')^2} = x^2$, d'où $n_1 m_1 m'_1 n'_1 = x^2 \times n m m' n' = x^2 y dx$.

Donc si l'on détermine un nombre suffisant de points, tels que n'_1, et qu'on les unisse par une courbe, l'aire comprise entre cette courbe et l'axe des x donne immédiatement la valeur de I_y.

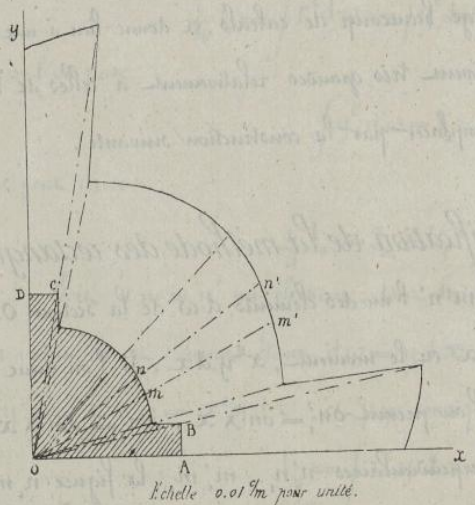


On obtient I_x par une construction semblable, c'est à dire en considérant des bandes parallèles à l'axe des x, et l'on a, comme précédemment, $\frac{1}{4} I_o = I_y + I_x$.

Les calculs sont ici moins laborieux que dans la première méthode, mais il faut encore faire deux quadratures, celle qui donne I_y et celle qui donne I_x.

79.— *Méthode des secteurs* — Soient deux droites om, on, faisant entr'elles un angle très-petit; on peut, avec une erreur qui disparaît à la limite, remplacer la portion mn de la courbe BC par un arc de cercle décrit du point o comme centre; si $d\omega$ est l'aire du secteur omn et r son rayon, le moment d'inertie du secteur est, d'après un résultat du N°75, égal à $\frac{1}{2} r^2 d\omega$. Or, si l'on prend $on' = om' = r^2$, et qu'on décrive l'arc n'm' de rayon on', les deux secteurs on'm', onm donnent la relation

$$\frac{on'm'}{onm} = \frac{\overline{on'}^2}{\overline{on}^2} = \frac{r^4}{r^2} = r^2$$



l'échelle 0.01 %m pour unité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où $o n' m' = r^2 \times o n m = r^2 d\omega$,

quantité qui représente le double du moment d'inertie du secteur $o n m$.

Donc si l'on construit un nombre suffisant de points tels que n', l'aire comprise entre les axes coordonnés et la courbe qui passe par ces points représente le double du moment d'inertie polaire de la section OABCD. Cette méthode est évidemment plus simple que les précédentes.

Dans chacun des procédés graphiques qu'on vient d'examiner, l'aire qu'il s'agit de déterminer peut être obtenue soit par une décomposition de la figure en trapèzes soit par la formule de T. Simpson ou celle de Poncelet, soit enfin par l'emploi d'une machine à quadratures.

Il est évident que quel que soit le moyen qu'on emploie pour obtenir un moment d'inertie, si la figure considérée peut être décomposée en plusieurs parties dont il soit possible de déterminer séparément le moment d'inertie, il suffira de faire la somme des moments partiels pour avoir le moment d'inertie total.

80. — *Quantités à considérer dans le phénomène de la torsion.*

Les valeurs dont la considération importe le plus, sont :

1° — Le coefficient de torsion G

2° — La résistance pratique au glissement transversal F_p, par mètre carré.

3° — La résistance relative à la limite d'élasticité F_e.

4° — La résistance relative à la rupture F

5° — Les valeurs de $\tang \alpha$ correspondantes à ces quantités.

6° — Le déplacement angulaire θ par unité de longueur.

81. — *Résultats principaux des expériences relatives à la torsion.*

Les résultats fournis par les expériences qui ont été faites sur la torsion, sont peu nombreux et, en général, peu concluants. Tous les expérimentateurs à l'exception

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de Duleau, on cherché exclusivement à déterminer la charge de rupture et à vérifier, que dans une certaine limite, les angles de torsion sont proportionnels aux moments de torsion correspondants.

Quoi qu'il en soit, on a admis, jusqu'ici dans la pratique, les valeurs contenues dans le tableau suivant, qui est loin d'être complet.

Coëfficients	Fer	Acier	Fonte	Cuivre	Bronze	Bois
G	6.10^9	10.10^9	2.10^9	4.10^9	1.10^9	$0,4.10^9$
F_p	4.10^6	" "	$1,3.10^6$	" "	" "	$0,3.10^6$
tang α	0.00067	" "	0.00067	" "	" "	0.00075
F_e	14.10^6	" "	" "	" "	" "	" "
tang α	0.0023	" "	" "	" "	" "	" "
F_r	17.10^6 / 26.10^6	" "	" "	" "	" "	" "
tang α	" "	" "	" "	" "	" "	" "

En général les valeurs de G ont été bien déterminées. Les valeurs $F_p = 4.10^6$, $F_p = 1,3.10^6$, données par M^r Morin, sont considérées par M^r Bélanger comme trop faibles, ainsi que les valeurs correspondantes de tang α, et l'on peut prendre :

Pour le fer $F_p = 6.10^6$, tang $\alpha = 0,001$;

Pour la fonte $F_p = 2.10^6$, tang $\alpha = 0.008$;

mais ces nombres ne doivent pas être dépassés dans les applications.

§2. — *Problèmes sur la torsion.* — Les trois équations fondamentales

$$P_p = G\theta I_o \quad , \qquad F = G\theta r \quad , \qquad \text{tang } \alpha = \theta r ,$$

contiennent les sept quantités,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$P_p,\ I_o,\ r,\ \theta,\ \alpha,\ G,\ F,$$

et comme quatre de ces quantités sont généralement données, on peut déterminer les trois autres à l'aide des équations précédentes.

Mais avant d'examiner les principaux problèmes qu'on peut avoir à résoudre, il est utile de faire observer que la partie d'un solide tordu qui fatigue le plus est évidemment celle où la valeur de F est la plus grande ; et l'équation $F = G\theta r$ montre que le maximum de F correspond au maximum de r. Par conséquent, la valeur pratique qu'il faut prendre dans les applications, doit toujours être considérée comme s'appliquant aux points pour lesquels r est un maximum.

Quant à la valeur de I_o, dont l'expression dépend de la forme de la section, elle est déterminée dès que l'on connaît le maximum de r dans cette section, et l'on peut poser, dans tous les cas, $I_o = \varphi(r)$.

83. — *Premier problème.* — Connaissant la valeur du couple transversal qui détermine la torsion d'un cylindre de rayon donné, calculer l'angle de torsion, l'inclinaison de la fibre et le maximum de la résistance développée dans la matière par mètre carré.

Données : $P_p,\ G,\ r,\ I_o$

Inconnues : $\theta,\ \alpha,\ F$.

Les trois relations fondamentales rappelées au N° précédent donnent immédiatement

$$\theta = \frac{P_p}{G I_o} = \frac{2 P_p}{G \pi r^4}, \qquad \operatorname{tang} \alpha = \frac{P_p r}{G I_o}, \qquad F = \frac{P_p r}{I_o}.$$

On peut d'ailleurs déterminer facilement la longueur du pas de l'hélice en laquelle est transformée une génératrice du cylindre ; car, si h est cette longueur, on a $\theta h = 2\pi$, d'où $h = \frac{2\pi}{\theta}$; et en remplaçant θ par sa valeur, il vient

$$h = \frac{G \pi^2 r^4}{P_p} = \frac{G \omega^2}{P_p}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

84. — *Deuxième problème.* — Déterminer le rayon d'un cylindre soumis à l'action d'un couple donné, de manière que la résistance développée aux points extrêmes d'une section quelconque ne dépasse pas une certaine valeur donnée. Calculer l'angle de torsion et l'inclinaison de la fibre.

Données : Pp, G, F, $I_o = \frac{1}{2}\pi r^4$

Inconnues : α, r, θ.

On a d'abord $\operatorname{tang}\alpha = \frac{F}{G}$. Ensuite, en éliminant $G\theta$ entre les équations

$$2Pp = G\theta\pi r^4, \text{ et } F = G\theta r,$$

on obtient $2Pp = \pi F r^3$, d'où $r = \sqrt[3]{\frac{2Pp}{\pi F}}$.

Cette valeur de r, mise ensuite dans l'équation $F = G\theta r$, fait connaître la valeur de θ, et l'on a ainsi les valeurs des trois inconnues α, r et θ.

85. — *Troisième problème.* — On donne la forme de la section transversale d'un solide prismatique, l'intensité du couple et la valeur de l'angle de torsion, déterminer les dimensions de la section, l'inclinaison de la fibre, et le maximum de la résistance moléculaire développée par mètre carré.

Données : Pp, G, θ, $I_o = \varphi(r)$,

Inconnues : r, r', θ.

On a d'abord $I_o = \frac{Pp}{G\theta}$, ou $\varphi(r) = \frac{Pp}{G\theta}$, équation d'où l'on déduit r

La valeur de r mise ensuite dans les équations

$$F = G\theta r \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\alpha = \theta r,$$

fait connaître les valeurs de r' et de α, ce qui résout le problème proposé.

86. — Enfin, la formule $Pp = G\theta I_o$ permet de déterminer la somme P des forces qu'il faut appliquer à une distance p de l'axe de torsion pour que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les valeurs pratiques de F et tang α ne soient pas dépassées.

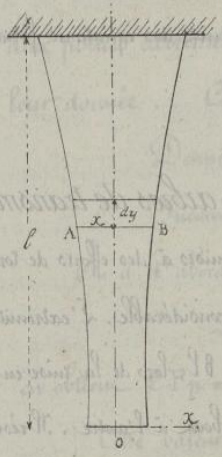
Ces questions ne sont pas les seules que l'on peut avoir à résoudre, mais dans tous les cas la solution du problème se déduit des équations fondamentales établies précédemment.

87. — *Observation relative aux arbres de transmission.* — Les pièces de machines qui sont plus particulièrement soumises à des efforts de torsion sont les arbres de transmission dont la longueur est parfois considérable. L'extrémité d'une génératrice primitive peut donc être déplacée d'un angle θl, lors de la mise en marche de l'arbre, avant que le mouvement soit transmis d'un bout à l'autre. Il résulte de là un retard de certains organes les uns par rapport aux autres, retard qui, dans des cas donnés, ne doit pas dépasser une limite déterminée. On est conduit alors à donner aux arbres des dimensions plus fortes que celles qui seraient nécessaires pour qu'ils puissent seulement résister convenablement aux charges données.

88. — *Torsion d'un solide à section variable et d'un profil déterminé.* — Les équations fondamentales établies précédemment supposent que la section transversale est constante pour toute la longueur du solide. Dans cette hypothèse la somme des résistances moléculaires exercées dans chaque section, reste la même ainsi que la valeur θ du déplacement angulaire et l'inclinaison α de la fibre longitudinale. Mais si la section varie d'une manière continue, les quantités $\int F\,d\omega$ et θ varient elles-mêmes d'une manière continue quand on passe d'une section à la section voisine, et la courbe qu'affecte alors une fibre longitudinale n'est plus une hélice ordinaire ni sur la surface du solide ni sur une surface cylindrique située à une distance quelconque de l'axe de figure. Il en résulte que les équations fondamentales ne peuvent être employées que si l'on considère le solide comme formé de tranches infiniment minces, assimilables chacune à un solide prismatique, et la question à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

résoudre devient alors un problème de calcul intégral.



Soit θ le déplacement angulaire dans la section AB, située à la distance y de l'origine; cette valeur de θ, est, comme on sait, la somme des déplacements que l'on obtiendrait si la valeur du déplacement, telle qu'elle existe dans la section AB, se continuait uniformément d'une section à l'autre sur une portion du solide égale à l'unité de longueur. Pour une longueur dy le déplacement angulaire est $\theta\, dy$, et la somme des déplacements, pour toutes les sections infiniment petites qui composent le solide est

$$\Theta = \int \theta\, dy ;$$

mais Pp étant le moment du couple qui agit à la partie inférieure du solide, on a

$$\theta = \frac{Pp}{G\, I_o}, \qquad \text{d'où} \qquad \Theta = \frac{Pp}{G} \int \frac{dy}{I_o} \quad (1).$$

Or, le moment d'inertie polaire, dans la section AB, est $I_o = \varphi(x)$; on a en outre, pour l'équation du profil, $y = f(x)$, d'où $dy = f'(x)\, dx$, les valeurs de I_o et dy, mises dans l'équation (1) donnent,

$$\Theta = \frac{Pp}{G} \int \frac{f'(x)\, dx}{\varphi(x)}, \quad (2)$$

relation générale qui résout le problème proposé, en y joignant, toutes fois, la relation $\Theta = \frac{Pp}{G\, I_o}$ qui donne la valeur de θ dans une section quelconque quand on connaît la valeur de I_o correspondante à cette section.

89. — *Cas d'un arbre de forme conique.* — Les équations

$$y = f(x), \qquad dy = f'(x)\, dx, \qquad I_o = \varphi(x),$$

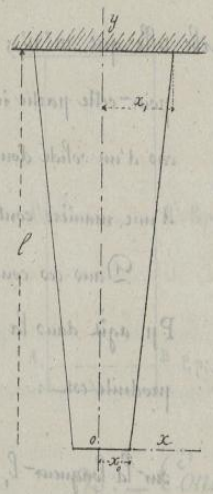
qui interviennent dans la formule (2) sont ici

$$y = mx + n, \qquad dy = m\, dx, \qquad I_o = \tfrac{1}{2}\pi . x^4,$$

et cette formule donne

$$\Theta = \frac{2\, Pp\, m}{\pi\, G} \int_{x_o}^{x_1} \frac{dx}{x^4} = \frac{2\, Pp\, m}{3\pi\, G} \left(\frac{1}{x_o^3} - \frac{1}{x_1^3} \right).$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

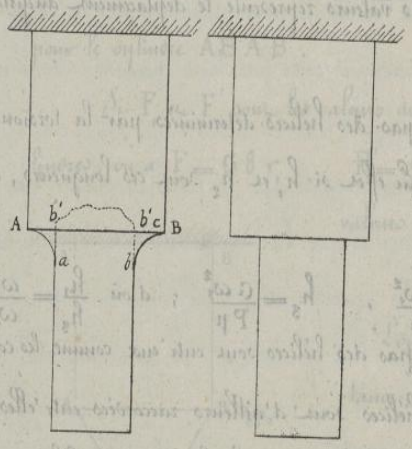


Sous cette forme, l'expression ne s'applique pas directement au cas où le cône se transforme en un cylindre. Mais comme on a évidemment $m = \frac{l}{x_1 - x_0}$, il suffit de porter cette valeur dans l'équation précédente, simplifier le résultat et poser ensuite $x_1 = x_0$, on obtient

$$\theta = \frac{2 P_n l}{\pi G x^4},$$

qui est bien le déplacement angulaire total d'un cylindre de rayon x_0 et de longueur l.

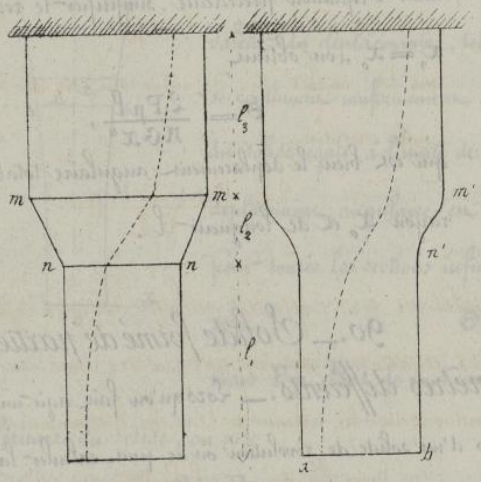
90. — *Solide formé de parties cylindriques ayant des diamètres différents.* — Lorsqu'on fait agir un couple de torsion à l'une des extrémités d'un solide de révolution on ne peut calculer la déformation qu'en supposant que deux sections voisines quelconques sont intégralement intéressées à cette déformation. Cette condition se trouve approximativement remplie si les diamètres diffèrent très-peu l'un de l'autre. Mais si la différence est grande, la solidarité n'existe pas entre les deux sections ; les divers éléments de la section AB ne sont plus sollicités de la même manière, et, la partie a'b' étant plus fatiguée que les parties voisines Aa', Bb', le cylindre inférieur tend à se détacher du cylindre supérieur suivant une surface de rupture irrégulière.



On peut alors, comme cela se fait ordinairement, raccorder la différence des deux diamètres par un congé qui rend la transmission des efforts plus uniforme et supprime les causes de rupture ; cependant il existe toujours, dans la section AB, une petite bande annulaire d'une certaine largeur Bc sur laquelle le couple exercé en ab a une action moins directe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

91. — Il serait préférable au point de vue théorique de faire le raccordement au moyen d'une droite m n, ou d'une courbe telle que m' n' ; on rentrerait alors pour cette partie intermédiaire dans le cas d'un solide dont la section varie d'une manière continue.



Dans ces conditions, si un couple P p agit dans la section a b, la torsion produite est :

sur la longueur l_1, $\theta_1 l_1 = \frac{P p}{G I_1} l_1$,

sur la longueur l_2, $\Theta = \frac{P p}{G} \int \frac{f(x)\,dx}{\varphi(x)}$,

sur la longueur l_3, $\theta_3 l_3 = \frac{P p}{G I_3} l_3$;

et la somme de ces trois valeurs représente le déplacement angulaire pour toute la longueur du solide.

La longueur du pas des hélices déterminées par la torsion, n'est pas la même sur les deux cylindres. En effet si h_1 et h_2 sont ces longueurs, ω_1 et ω_3 les sections des cylindres, on a

$$h_1 = \frac{G\,\omega_1^2}{P p}, \qquad h_3 = \frac{G\,\omega_3^2}{P p} ; \text{ d'où } \frac{h_1}{h_3} = \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2},$$

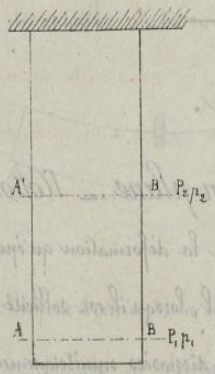
ce qui montre que les pas des hélices sont entr'eux comme les carrés des sections correspondantes. Ces hélices sont d'ailleurs raccordées entr'elles par une courbe facile à déterminer quand on connaît la forme du profil m n ou celle du profil m' n'.

92. — *Cylindre soumis à des efforts de torsion agissant dans des sections différentes.* — Si les couples $P_1 p_1$, $P_2 p_2$ agissent isolément

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les angles de torsion résultants seront

$$\theta_1 = \frac{P_1 p_1}{G I_o} \quad , \quad \theta_2 = \frac{P_2 p_2}{G I_o} \; ;$$



et si les couples agissent simultanément, l'angle de torsion produit dans la partie du cylindre située au dessus de la section A'B', est la somme ou la différence des valeurs précédentes suivant que les couples sont de même sens ou de sens contraires ; cet angle est donc

$$\theta = \frac{P_2 p_2 \pm P_1 p_1}{G I_o} \; .$$

93. — *Condition pour qu'un solide soit d'égale résistance par rapport aux moments de torsion.* — Les deux couples $P_1 p_1$ et $P_2 p_2$ étant supposés de même sens, la valeur de l'angle de torsion est

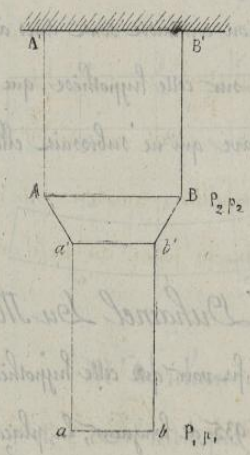
$$\theta_1 = \frac{P_1 p_1}{G I_o} = \frac{2 P_1 p_1}{\pi G r_1^4}$$

pour le cylindre $a\,b\;a'\,b$, et

$$\theta' = \frac{2 (P_2 p_2 + P_1 p_1)}{\pi G r_2^4} = \frac{2 P' p'}{\pi G r_2^4} \; ,$$

pour le cylindre $AB\,A'B'$.

Si F_1 et F' sont les valeurs du maximum de la résistance dans les deux cylindres, on a $F_1 = G \theta_1 r_1$ $F' = G \theta' r^2$; et en remplaçant θ_1 et θ' par les valeurs précédentes,



$$F_1 = \frac{2 P_1 p_1}{\pi r_1^3} \quad , \quad F' = \frac{2 P' p'}{\pi r_2^3} \; .$$

Pour que les cylindres soient de même résistance, il faut qu'on ait $F_1 = F'$; et, par conséquent,

$$\frac{2 P_1 p_1}{\pi r_1^3} = \frac{2 P' p'}{\pi r_2^3} \quad \text{d'où} \quad \frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{P' p'}{P_1 p_1} \; ,$$

ce qui veut dire que les cubes des rayons doivent être proportionnels aux moments effectifs de torsion.

On voit que si la somme des moments croissait

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'une manière continue, il en serait de même de la section du solide considéré.

Flexion.

94._ Définition de la flexion plane._ Notions générales._

On désigne sous le nom de flexion plane la déformation qu'éprouve un solide prismatique, à plan de symétrie longitudinal, lorsqu'il est sollicité par des forces qui agissent dans le plan de symétrie ou qui sont disposées symétriquement deux à deux par rapport à ce plan.

La flexion est de toutes les déformations que nous étudions, celle qui donne lieu aux phénomènes les plus apparents. Dans les constructions, par exemple, les poutres des planchers, des combles, montrent immédiatement, par les flèches qu'elles prennent sous l'action de leurs charges, que certaines réactions moléculaires sont mises en jeu pour y résister, et cette déformation est d'autant plus visible que l'on cherche davantage à économiser la matière dans toutes les pièces transversales de ce genre; depuis longtemps en effet des règles empiriques ont fixé leurs dimensions minimums pour presque tous les cas de la pratique

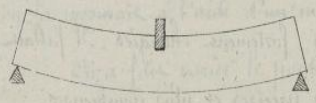
Depuis longtemps aussi on a essayé de faire la théorie des phénomènes de la flexion. Les premières règles que l'on connaisse sont dues à Galilée, puis à Mariotte et à Leibnitz; elles reposaient sur cette hypothèse, que les fibres allaient en s'allongeant à partir de la face concave qui ne subissait elle-même aucune modification dans sa longueur.

95._ Expériences de M.r Duhamel Du Monceau._ M.r

Duhamel Du Monceau le premier, fit voir que cette hypothèse était fausse. Il prit une pièce de bois de saule de $0^m,935$ de longueur, la plaça sur deux appuis par ses extrémités, puis en mesura les flèches pour diverses charges et même pour

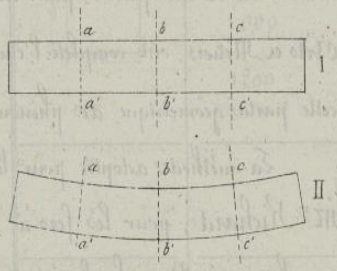
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les charges voisines de celles qui produisent la rupture ; il fit ensuite dans cette pièce des entailles au tiers, à la moitié, aux trois quarts de son épaisseur, à partir de la face supérieure ; il remplaça par des planchettes en bois dur, en chêne, la matière enlevée par le trait de scie, & recommença les mêmes déterminations.



Si les fibres s'étaient allongées à partir de la face concave, la matière enlevée par la scie eût augmenté la flexibilité de la pièce et diminué sa résistance à la rupture ; il n'en a rien été car la flexibilité n'a pas même augmenté sensiblement quand on étendait le trait de scie aux trois quarts de la pièce. Il y a plus, on vit, en supprimant les cales en bois dur, les bords de la fente se rapprocher et la courbure augmenter d'une façon notable. On pouvait donc déjà conclure de ces expériences qu'une véritable compression se réalisait du côté de la face concave de la pièce.

96.— *Expériences de MM^rs Dupin et Duleau.* — M^r le baron Ch. Dupin pour confirmer ce fait, prit une pièce de bois sur laquelle il avait tracé des lignes normales aux arêtes et la plaça sur deux appuis distants de 2^m. En la courbant à l'aide d'un poids appliqué en son milieu, il vit que les lignes restaient normales aux arêtes ; et il en conclut, en se reportant aux expériences constatées par M^r Duhamel, que, si la face supérieure se contracte, la face inférieure au contraire s'allonge dans une certaine proportion dans la partie convexe.



M^r Duleau a mesuré ces nouvelles longueurs ab, bc, ... a'b', b'c'.. ..etc, et il a vu que l'allongement de la partie convexe était égal au raccourcissement de la face concave ; il devait donc exister dans la pièce

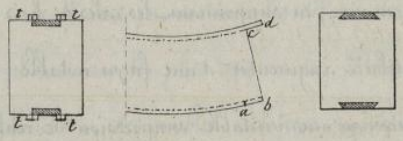
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

soumise à l'expérience certaines lignes longitudinales formant une suite de files de molécules dont la longueur n'avait pas changé.

Ce fait n'avait toutefois été vérifié que d'une manière approximative et pour des barres en fer de petits échantillons, fortement chargées. Il fallait, pour l'établir sérieusement, des expériences plus précises et plus nombreuses.

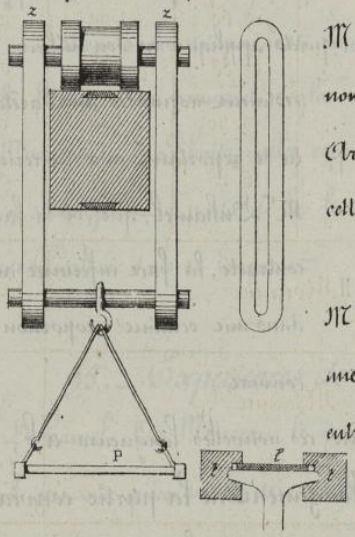
97. — Nouvelles expériences de Mr. Dupin et de Mr. Richard.

Mr. Dupin (1851), indiqua alors un nouveau mode d'expérience : il pratiqua dans la pièce sur laquelle il opérait une rainure ; il y mit une pièce de bois flexible, retenue par des tasseaux t, t, et la longueur de cette lame restant constante puisqu'elle était libre de son mouvement,



il put mesurer c d. Mr Richard conseilla de loger la lame de bois dans une entaille en queue d'hirondelle, afin de supprimer les tasseaux et de rendre l'expérience plus coulante.

98. — Expériences de MM Mrs. Morin et Tresca. — Enfin en 1856,



MM. Mrs. Morin et Tresca, par des expériences très nombreuses et très-précises faites au Conservatoire des Arts et Métiers, ont complété l'étude expérimentale de cette partie géométrique des phénomènes de la flexion.

La méthode adoptée pour le bois fut celle de Mr Richard ; pour les fers à T, on maintint une lame métallique l, formée d'un ressort d'acier entre deux pièces en bois t t adaptées à la pièce.

La poutre reposait sur deux appuis en maçonnerie bien de niveau. Les flexions étaient mesurées au

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cathétomètre ; on déterminait ces flexions au moyen de poids mis dans un plateau supporté par des galets F, reposant au milieu de la pièce en expérience. Un tasseau fixé à l'une des extrémités de la pièce reportait toute la saillie de la lame mobile à l'autre extrémité, on la mesurait à l'aide d'un micromètre.

On a fait varier le poids additionnel depuis 200 jusqu'à 1200 kilogrammes on a retourné plusieurs fois la même pièce ; on a cherché à obtenir une température & un état hygrométrique constants ; en un mot on a pris toutes les précautions nécessaires dans une expérience aussi fondamentale.

Voici quelques uns des résultats obtenus.

99.— *Résultats des expériences.* —

Désignation des matériaux employés	Charges agissant au milieu de la portée.	Flexion		Raccourcissement par 100 kilog.mes	Allongement par 100 Kilog.mes
		Totale	Par 100 Kilog. de charge		
	Kilogrammes	Millimètres	Millimètres	Millimètres	Millimètres
Sapin.	200	2.64	1.32	0.259	0.255
portée 3m. 80	400	5.40	1.36	0.255	0.248
	600	9.60	1.60	0.248	0.243
	800	10.88	1.18	0.242	0.232
	1000	13.40	1.31	0.250	0.244
	1200	16.28	1.44	0.246	0.246
	Moyenne			0.251	0.245
Même pièce retournée	Moyenne			0.236	0.244
id.	id.			0.253	0.262

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Suite du tableau précédent.

Désignation des matériaux employés		Raccourcissement par 100 Kilog^{mes}	Allongement par 100 Kilog^{mes}
Chêne portée 3^{m} 80 Mêmes dimensions (avec un gros nœud)	Moyennes obtenues la pièce ayant été retournée successivement	0.166 0.189 0.165 0.184	0.210 0.209 0.196 0.209
Chêne mêmes dimensions et portée pièce moins sèche (sans nœud)	idem.	0.325 0.310 0.313 0.319	0.324 0.330 0.335 0.355
Remarque. Les concordances sont moins complètes que pour le sapin, mais il faut remarquer que la charge de 1200 Kilog. dépasse toutes les conditions de la pratique.			
Fer à double T semelles égales portée 4^{m}	Moyennes obtenues par plusieurs retournements successifs.	0.096 0.097 0.105 0.107	0.102 0.100 0.112 0.117
Fonte à double T Portée 4^{m} semelles égales	Plusieurs retournements successifs.	0.062 0.067 0.060 0.064	0.058 0.068 0.066 0.064
	Moyenne	0.063	0.064
Semelles inégales (I) (II)	Moyennes : Position — (I).	0.071	0.055
	Position — (I).	0.076	0.052
	Position — (II).	0.059	0.080
	Position — (II).	0.058	0.074

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

100.— Il ressort de ce tableau que, conformément aux faits avancés par Duleau, pour des solides dont la section est symétrique par rapport à la fibre située à la moitié de la hauteur de la section transversale, l'allongement de la partie convexe est sensiblement égal au raccourcissement de la partie concave.

Les expériences faites sur la poutre à semelles inégales, montrent d'ailleurs que, dans le cas de non symétrie par rapport au plan horizontal moyen, les allongements et les raccourcissements sont moindres du côté où il y a une plus grande répartition de matière. Mais si l'on retourne la pièce, le nouveau raccourcissement sera sensiblement égal à l'allongement observé dans la première position.

101.— *Lois reconnues par M^r Dupin.*— Avant de passer à la théorie mathématique de la flexion, nous citerons ici quelques lois indiquées par M^r Ch. Dupin en 1843, et qui résultent d'expériences faites par lui en 1811 à Corcyre.

Toutes choses étant égales d'ailleurs, M^r Dupin a établi que :

1°.— Les flexions sont proportionnelles aux charges ;

2°.— La flexion due à un poids uniformément réparti sur toute la longueur d'une poutre est égale aux cinq huitièmes de ce qu'elle serait si la charge était appliquée au milieu de cette poutre ;

3°.— La flexion varie en raison inverse du produit de la base par le cube de la hauteur de la section transversale.

4°.— Les flexions sont proportionnelles aux cubes des portées.

Il ne sera pas sans intérêt de voir confirmer par la théorie, ces lois simples que M^r Dupin a eu quelque sorte devinées à l'aide de quelques expériences qui demandaient à être confirmées d'une manière plus précise.

102.— *Théorie mathématique de la flexion.*— La vue et la mesure des phénomènes avaient suffi pour établir les lois les plus manifestes de la théorie de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

flexion. Mais pour appliquer ces lois aux divers cas de la pratique et pouvoir résoudre les problèmes nombreux et difficiles que soulèvent aujourd'hui les questions de résistance des matériaux, il était nécessaire d'établir des formules applicables aux diverses circonstances. Navier a posé les bases principales du calcul de la résistance des matériaux; et les études faites dans cette voie ont été ensuite étendues par MM.rs Bélanger, de St.Venant, Philipps et par d'autres géomètres.

La méthode générale qu'on suit ici est celle qui a été adoptée par M.r Bélanger dans le cours qu'il a professé pendant longtemps et avec tant de succès à l'Ecole Centrale

103.— *Hypothèses tirées des faits.*— Pour simplifier la question on peut d'abord supposer que le solide considéré a un plan de symétrie vertical, dit plan de flexion, et que sa section transversale est un rectangle. Le solide étant posé horizontalement sur des appuis, ou encastré à l'une de ses extrémités, est ensuite chargé de poids en des points différents de sa longueur. Lorsque la limite de l'élasticité n'a pas été dépassée, et que l'équilibre est établi entre les forces données et les réactions moléculaires développées dans l'intérieur du prisme, on constate approximativement les faits suivants:

1.°— Les éléments matériels situés primitivement dans une section transversale perpendiculaire aux arêtes du prisme sont situés, après la flexion, dans des sections planes perpendiculaires au plan de flexion et normales aux courbes suivant lesquelles les arêtes se sont infléchies; les dimensions de ces sections n'ont d'ailleurs pas varié d'une manière sensible.

2.°— Les éléments situés dans un même plan longitudinal primitivement horizontal sont situés, après la flexion, sur une surface cylindrique à génératrice rectiligne horizontale.

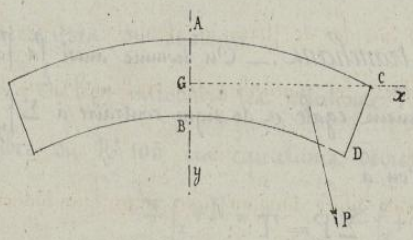
104.— *Fibres neutres.— Fibres moyennes.*— Par le fait de la courbure du solide, certaines files de molécules ou fibres longitudinales ont été allongées.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tandis que d'autres ont été raccourcies ; de sorte que, dans une même tranche, normale aux arêtes courbes du solide fléchi, il s'est produit un double phénomène d'extension et de compression, et les fibres sont d'autant plus allongées ou d'autant plus raccourcies qu'elles sont plus voisines de la surface convexe ou de la surface concave du solide. Ces déplacements moléculaires, produits dans l'étendue d'une même tranche, varient nécessairement d'une manière à peu près continue, quand on passe d'une couche cylindrique à celle qui la suit immédiatement ; d'où il résulte que le passage de l'extension à la compression n'a lieu que là où les déplacements moléculaires longitudinaux sont nuls, et par conséquent, il doit exister dans l'intérieur du corps une couche cylindrique de fibres qui n'ont été ni allongées ni raccourcies, et que, pour cette raison, on désigne sous le nom de **fibres neutres**.

On appelle **fibres moyennes** celles qui forment la couche cylindrique passant par les centres de gravité des sections transversales du solide.

105. — *Équilibre dans une section quelconque* — Si l'on considère la portion d'un solide fléchi comprise entre l'extrémité CD et une section transversale quelconque AB, les forces extérieures P qui sollicitent cette portion du solide développent des actions mutuelles entre les molécules d'une tranche quelconque et celles de la tranche qui la suit immédiatement. De sorte que les forces qui déterminent l'équilibre dans une section telle que AB sont :



D'une part les **forces extérieures** P qui agissent dans l'étendue de la portion du solide située à droite de AB.

D'autre part, les réactions moléculaires ou **forces élastiques** f exercées par les molécules situées à gauche de la section AB sur celles qui sont situées à droite de cette section.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si G est le centre de gravité de la section AB, et si l'on prend, dans le plan de flexion, deux axes rectangulaires Gy, Gx, l'un situé dans le plan AB et l'autre, par conséquent, perpendiculaire à ce plan, chaque force P peut être décomposée en deux forces P_y, P_x, respectivement parallèles aux deux axes donnés. Chaque force f peut être décomposée de la même manière en deux forces f_y et f_x, l'une située dans le plan AB, et l'autre normale à ce plan. De sorte que si l'on désigne par $M_G P$ et $M_G f$ les moments des forces P et f par rapport à un axe perpendiculaire au plan de flexion et projeté en G, les équations nécessaires et suffisantes pour l'équilibre dans la section AB sont :

$$\Sigma f_x + \Sigma P_x = 0$$
$$\Sigma f_y + \Sigma P_y = 0$$
$$\Sigma M_G f + \Sigma M_G P = 0$$

Relativement à cette dernière équation on peut évidemment écrire

$$\Sigma M_G f = \Sigma M_G f_x + \Sigma M_G f_y ;$$

et comme on a nécessairement $\Sigma M_G f_y = 0$, puisque toutes les forces f_y passent par l'axe des moments, la troisième équation d'équilibre se réduit à

$$\Sigma M_G f_x + \Sigma M_G P = 0$$

106. — *Effort tranchant.* — On nomme ainsi la force ΣP_y dont la valeur est numériquement égale et de signe contraire à Σf_y, et on la désigne par T ; de sorte qu'on a

$$\Sigma P_y = T .$$

Cette force ΣP_y est celle qui tend à cisailler, **à trancher** le solide suivant la section AB, c'est à dire à faire glisser l'une contre l'autre les deux faces contigües des deux éléments voisins ; cet effort de cisaillement est neutralisé par la réaction égale et contraire Σf_y.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

107.— **Tension longitudinale.** — La force ΣP_x, dont la valeur est numériquement égale et de signe contraire à Σf_x, se nomme la tension longitudinale ; en la désignant par N, on a :

$$\Sigma P_x = N.$$

Les forces P_x allongent les fibres longitudinales ou les resserrent sur elles-mêmes, et ce sont les forces résistantes f_x qui limitent ces effets d'extension ou de compression.

108.— **Moment fléchissant.** — Enfin, la somme $\Sigma M_G P$ des moments autour de l'axe projeté en G, de toutes celles des forces P qui sont situées à droite de la section AB, a reçu le nom de moment fléchissant. On désigne cette quantité par la lettre μ, ce qui donne :

$$\Sigma M_G P = \mu.$$

Cette quantité $\Sigma M_G P$ est nécessairement égale et de signe contraire à la somme algébrique $\Sigma M_G f_x$ des moments, autour de l'axe projeté en G, de toutes forces moléculaires f_x normales à la section AB, et par conséquent, $\Sigma M_G f_x$ représente le moment résistant qui tend à s'opposer au mouvement de rotation déterminé sous l'influence des moments des forces extérieures du système.

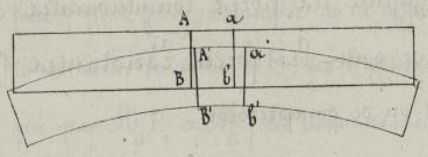
Si l'on introduit les notations T, N et μ dans les équations d'équilibre du N° 105, ces équations deviennent :

$$\Sigma f_x + N = 0, \qquad \Sigma f_y + T = 0, \qquad \Sigma M_G f_x + \mu = 0.$$

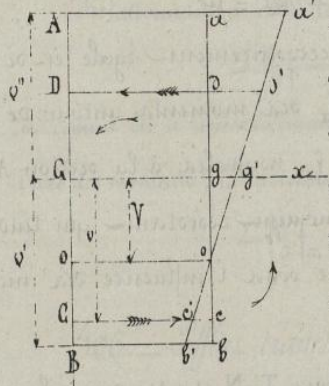
109.— **Valeur de la résistance longitudinale.** — Si l'on considère la portion du solide comprise entre la section AB et une section infiniment voisine, et si l'on suppose, comme cela doit être entendu

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

:ou une fois pour toutes, que la déformation est toujours très faible, les fibres longitudinales comprises entre ces sections peuvent être considérées comme étant des droites sensiblement normales à la section AB, et par conséquent on commet une erreur très-petite en regardant les forces f_x comme étant égales et directement opposées aux forces qui produisent l'allongement ou le raccourcissement des fibres longitudinales.



Donc, si ω représente l'aire de la section AB, et si R est la résistance par mètre carré en un point de cette section, la résistance sur l'élément $d\omega$ situé en ce point, est $f_x = R\,d\omega$, résistance dont l'intensité peut être considérée comme constante sur toute la longueur de la fibre, comprise entre deux sections infiniment voisines; et puisqu'il s'agit ici d'un phénomène d'extension ou de compression, dans lequel on doit admettre que l'élasticité n'est pas altérée, si j est l'allongement ou le raccourcissement par mètre de la fibre dont la section est $d\omega$, on a, d'après la formule générale de l'extension, applicable aussi à la compression,



$$R\,d\omega = E j\,d\omega .$$

Cela posé, soit ab la position, avant la flexion, d'une section infiniment voisine de AB, et a'b' la situation de la même section après la flexion; la courbure en un point quelconque étant supposée très-faible, si l'on rapporte la figure AB b'a' sur la figure AB ba, le dessin étant alors fait à une échelle beaucoup plus grande, on peut admettre, sans erreur appréciable, que les trois points A, a, a' sont en ligne droite, et qu'il en est de même des trois autres points tels que G, g, g'; B, b, b'; C, c, c' .....

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Or, si l'on considère la fibre C c, par exemple, dont le raccourcissement est égal à c c', on a $j = \frac{c\,c'}{C\,c}$. Si en outre on désigne par V la distance des fibres moyennes aux fibres neutres, et par v la distance des mêmes fibres moyennes à celles qui sont projetées en C c, la quantité v étant regardée comme positive ou négative suivant qu'elle est comptée dans le sens des y positifs ou dans le sens opposé, les triangles semblables g g' o, c c' o, donnent :

$$\frac{c\,c'}{g\,g'} = \frac{c\,o}{g\,o} = \frac{v-V}{V}, \quad \text{d'où} \quad c\,c' = \frac{v-V}{V} \times g\,g' ;$$

et à cause de C c = G g, on a

$$\frac{c\,c'}{C\,c} = \frac{v-V}{V} \times \frac{g\,g'}{G\,g} ; \quad \text{c'est-à-dire} \quad j = \frac{v-V}{V} \times \frac{g\,g'}{G\,g}.$$

Le rapport $\frac{g\,g'}{G\,g}$ est l'allongement par mètre des fibres moyennes projetées en G g ; si l'on désigne ce rapport par la lettre i, l'expression précédente devient : $j = \frac{v-V}{V}\,i$, et par suite l'équation $R\,d\omega = E\,j\,d\omega$, prend la forme

$$f_x = R\,d\omega = \frac{v-V}{V} \times E\,i\,d\omega \qquad (1)$$

Pour les points situés au-dessous des fibres neutres, on a $v > V$ et la valeur de f_x est positive ; cette force s'oppose à la compression du solide. Pour $v = V$, on a $f_x = 0$, ce qui doit être, puisque les fibres neutres ne sont ni allongées ni comprimées. Enfin, si l'on a $v < V$, la force f_x est négative ou, ce qui est la même chose, elle agit dans le sens des x négatifs, pour s'opposer à l'extension ; il en est nécessairement de même dans le cas où v est négatif, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit des points situés au-dessus des fibres projetées sur la ligne des centres de gravité. Dans l'hypothèse où l'on a $v = 0$, il vient $f_x = -E\,i\,d\omega$, valeur qui, d'après la définition de i est bien au signe près, l'expression de la tension des fibres moyennes projetées en G g. L'équation (1) montre encore que f_x ou $R\,d\omega$ croît en valeur absolue avec la quantité v, et par conséquent, que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le maximum de la pression a lieu pour $v = v'$, et le maximum de la tension, pour $v = v''$. En résumé, on voit que l'expression (1) s'applique à tous les points de la section considérée quand on tient compte du signe et de la valeur numérique de la quantité v; et puisque la force f_x ou $R\,d\omega$ varie d'une manière continue avec v, dans toute l'étendue de la section ω, on a pour la valeur totale des forces développées dans cette section,

$$\Sigma f_x = \int R\,d\omega = \int \frac{v - V}{V} \times E i\,d\omega,$$

ou encore,

$$\Sigma f_x = \frac{E i}{V} \int v\,d\omega - E i \int d\omega ;$$

expression qui se simplifie en remarquant que $\int d\omega = \omega$, en qu'on a, en outre, $\int v\,d\omega = 0$, puisque l'axe auquel sont rapportées les valeurs de v, passe par le centre de gravité de la section ω. On obtient alors, pour la valeur cherchée,

$$\Sigma f_x = - E i \omega .$$

110. — Valeur du moment résistant. — La valeur de la résistance longitudinale en un point quelconque étant, comme on vient de le voir, de la forme

$$f_x = \frac{v - V}{V} \times E i\,d\omega .$$

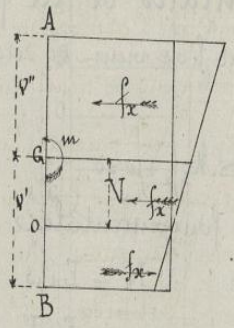
le moment de cette force, par rapport à l'axe projeté en a, est

$$M_a f_x = v \times \frac{v - V}{V} E i\,d\omega ; \qquad (2)$$

expression qui s'applique à toute les points de la section ω, en tant qu'elle exprime un moment résistant, c'est-à-dire opposé au moment fléchissant μ des forces extérieures du système. En effet, il est facile de voir que dans la partie de la section ω, comprise entre les droites projetées en o en B, le moment $v f_x$ dû à la force positive f_x, s'exerce dans le sens de la flèche m, en qu'il va en diminuant de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

valeur depuis $\sigma' f_x$ jusqu'à $V f_x = 0$, valeur pour laquelle $f_x = 0$.



Dans l'intervalle compris entre les droites projetées en 0 et G, la force f_x est négative, et le moment σf_x change de sens tout en restant un moment résistant. Pour $\sigma = 0$, on a $\sigma f_x = 0$; ensuite dans tout l'intervalle compris entre les droites projetées en G et A, le moment change de nouveau de signe, mais il est toujours un moment résistant et sa valeur va en croissant depuis celle qui correspond à $\sigma = 0$, jusqu'à celle qui répond à $\sigma = -v''$.

De ce qui précède il faut conclure que la formule (2) s'applique à tous les points de la section ω et que la valeur du moment résistant exprimé par cette formule varie d'une manière continue dans toute l'étendue de la section, de sorte que le moment résistant total a pour expression:

$$\Sigma M_a f_x = \int \frac{\sigma \cdot V}{V} E i \sigma d\omega,$$

ou encore,

$$\Sigma M_a f_x = \frac{E i}{V} \int \sigma' \sigma d\omega - E i \int \sigma d\omega.$$

La quantité $\int \sigma' \sigma d\omega$, n'étant autre chose que le moment d'inertie de la section ω, par rapport à l'axe projeté en G, si l'on désigne cette quantité par I, l'expression précédente devient, à cause de $\int \sigma d\omega = 0$,

$$\Sigma M_a f_x = \frac{E i I}{V},$$

qui doit être évidemment considérée comme négative, si le moment fléchissant μ est regardé comme positif; on doit donc, dans cette hypothèse, écrire,

$$\Sigma M_a f_x = - \frac{E i I}{V}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

111. — Équations fondamentales de la flexion.

Les valeurs de Σf_x et $\Sigma M_a f_x$ que l'on vient de déterminer étant mises dans les équations

$$\Sigma f_x + N = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma M_a f_x + \mu = 0,$$

conduisent aux deux relations fondamentales suivantes :

1° — Tension longitudinale : $N = E i \omega$;

2° — Moment fléchissant : $\mu = \frac{E i I}{V}$;

formules qui peuvent être regardées comme servant de base à tous les calculs relatifs à la flexion plane.

112. — Formules qui sont la conséquence des précédentes. — Si aux deux équations qu'on vient d'obtenir on ajoute la relation $R = \frac{v - V}{V} E i$, trouvée au N° 109, on en déduit facilement les trois nouvelles équations

$$i = \frac{N}{E\omega}, \qquad V = \frac{IN}{\mu\omega}, \qquad R = \frac{v\mu}{I} \pm \frac{N}{\omega},$$

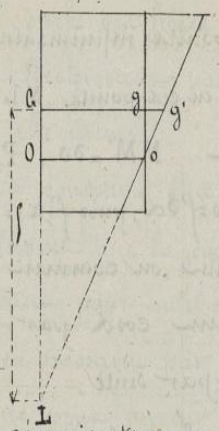
le terme $\frac{N}{\omega}$ de la dernière formule devant être pris avec le signe +, lorsque N exprime une pression, et avec le signe — si N est une tension.

La formule $R = \frac{v\mu}{I} \pm \frac{N}{\omega}$ est celle qui dans les applications servira à déterminer les dimensions des solides soumis à la flexion pour qu'ils puissent résister convenablement à des efforts donnés.

113. — Courbure des fibres moyennes. — Soient G et g' deux points infiniment voisins pris sur la courbe qui passe par les centres de gravité des sections transversales du solide. Les normales g'L et GL, menées à cette courbe par les points G et g' se rencontrent en un point L qui est le centre de courbure, et par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

conséquent GL ou $\int$ est le rayon de courbure de la courbe au point G. Cela posé, les triangles semblables Ggʹ L, ggʹ o donnent $\frac{V}{\int} = \frac{g g'}{G g'}$



ou $\frac{V}{\int} = \frac{g g'}{G g + g g'} = \frac{\frac{g g'}{G g}}{1 + \frac{g g}{G g}} = \frac{i}{1+i}$;

et comme l'allongement i par mètre est une fraction très petite relativement à l'unité, l'erreur que l'on commet en négligeant la quantité i au dénominateur est elle-même très petite, et l'on a très approximativement

$$\frac{V}{\int} = i, \quad \text{ou} \quad \int = \frac{V}{i} ;$$

mais la relation $\mu = \frac{E i I}{V}$, établie précédemment, donne $\frac{V}{i} = \frac{EI}{\mu}$, d'où l'on conclut

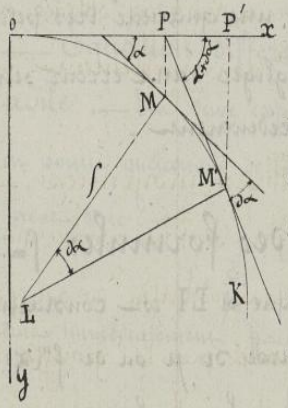
$$\int = \frac{E I}{\mu} .$$

Enfin, si l'on pose $EI = \mathcal{E}$, comme cela se fait ordinairement, l'expression du rayon de courbure prend la forme,

$$\int = \frac{\mathcal{E}}{\mu} .$$

114. — Autre expression du rayon de courbure.

Soit OMK la courbe qu'affecte la fibre moyenne après la flexion. Si cette courbe est rapportée, comme l'indique la figure, à deux axes coordonnés dont l'un, Ox, est une tangente en un point donné O, l'angle α que fait avec l'axe Ox la tangente en un point quelconque M est toujours une quantité très petite dans les cas ordinaires de la flexion plane.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cela posé, M et M' étant deux points infiniment voisins, ML et M'L, les normales à la courbe en ces points, ML ou ρ est le rayon de courbure en M; et en posant $MM' = ds$, $PP' = dx$, on a

$$dx = ds \cos\alpha, \quad ds = \rho d\alpha, \text{ puis } f'(x) = \tang\alpha;$$

et puisque l'angle α est très-petit, on commet une erreur également très-petite en remplaçant $\cos\alpha$ par l'unité, et $\tang\alpha$ par α, ce qui donne $ds = dx$, et par suite,

$$dx = \rho d\alpha, \quad f'(x) = \alpha$$

La seconde équation donne

$$f''(x)\,dx = d\alpha, \text{ d'où } dx = \frac{d\alpha}{f''(x)},$$

et en portant cette valeur dans l'équation $dx = \rho d\alpha$, il vient, pour l'expression demandée

$$\rho = \frac{1}{f''(x)}.$$

Ce résultat peut d'ailleurs être obtenu d'une manière beaucoup plus simple. On sait, en effet, que l'expression générale du rayon de courbure est, en coordonnées rectilignes,

$$\rho = \frac{\left\{1 + [f'(x)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{f''(x)};$$

mais $f'(x)$, dont la valeur est égale à $\tang\alpha$, lorsque les axes sont rectangulaires, est ici une quantité très-petite relativement à l'unité, et qu'on peut négliger sans erreur sensible, ce qui donne $\rho = \frac{1}{f''(x)}$ comme précédemment.

115. — Discussion des formules $\rho = \frac{EI}{\mu}$, $\rho = \frac{1}{f''(x)}$ —

Ces formules montrent que si EI est constant, le rayon de courbure varie en raison inverse de μ ou de $f''(x)$, et pour $\mu = 0$, ou $f''(x) = 0$, on a $\rho = \infty$; ainsi, la courbure en un point donné

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la courbe des fibres moyennes est nulle lorsque la valeur du mo-
=ment fléchissant, par rapport à l'axe projeté en ce point, est
nulle elle-même.

La condition $f''(x) = 0$, pour laquelle on a $\int = \infty$, annonce gé-
=néralement que la courbe a une inflexion au point considéré ;
cependant, pour qu'il en soit ainsi, il faut que $f''(x)$ change de si-
=gne, en passant par zéro, et l'on verra, plus loin, que le rayon de
courbure peut devenir infini sans qu'il y ait de point d'inflexion,
c'est-à-dire, sans que la courbure change de sens.

Si la section du solide est constante dans une partie détermi-
=née de la longueur du solide, la quantité I est aussi constante ;
et si les forces extérieures se réduisent à un couple $(P', -P)$,
le moment fléchissant μ est lui-même constant, car, en dési-
=gnant par l et l' les longueurs des perpendiculaires abaissées
de l'origine sur les directions des forces P et P' on a, dans ce cas,

$$\mu = (l - x)P - (l' - x)P = (l - l')P = \text{constante}.$$

Dans ces conditions, la valeur $\int$ est nécessairement cons-
=tante, et par conséquent la ligne des centres de gravité est
une partie de circonférence après la flexion.

116. — **Équation différentielle de la ligne des centres de gravité.** — Les deux expressions de la valeur du rayon de courbu-
=re en un point quelconque de la ligne des centres de gravité, sont, com-
=me on vient de le voir,

$$\int = \frac{\varepsilon}{\mu} \quad \text{et} \quad \int = \frac{1}{f''(x)} ;$$

on en déduit immédiatement, pour l'équation différentielle demandée,

$$f''(x) = \frac{\mu}{\varepsilon},$$

12/1

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

expression qui donne l'équation même de la courbe par deux intégrations successives. En effet, en multipliant par dx il vient,

$$f''(x)\,dx = \frac{\mu}{\mathcal{E}}\,dx,$$

d'où, en intégrant, et en supposant $\mathcal{E}$ constant,

$$f'(x) = \frac{1}{\mathcal{E}}\left(\int \mu\,dx + c\right),$$

c étant une constante dont la valeur sera déterminée par les conditions du problème posé.

Si l'on multiplie de nouveau par dx et qu'on intègre ensuite, il vient, pour l'équation de la ligne des centres de gravité,

$$f(x) = \frac{1}{\mathcal{E}}\left[\int\left(\int \mu\,dx + c\right)dx + c'\right].$$

117. — **Examen du cas particulier de la flexion dans lequel la ligne des centres de gravité se confond avec les fibres neutres.** — Si dans les formules

$$i = \frac{N}{E\omega}, \quad V = \frac{IN}{\mu\omega}, \quad R = \frac{v\mu}{I} \pm \frac{N}{\omega},$$

on suppose $N = 0$, c'est-à-dire si toutes les forces extérieures du système sont perpendiculaires à la longueur du solide, il vient,

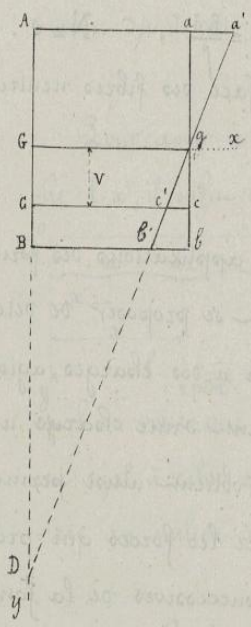
$$i = 0, \quad V = 0, \quad R = \frac{v\mu}{I},$$

ce qui montre que la ligne des centres de gravité se confond avec les fibres neutres.

Les conditions $i = 0$, $V = 0$, introduites dans la formule $\mu = \frac{E\,i\,I}{V}$ du N° 111, conduisent à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; mais ici l'indétermination n'est qu'apparente, car, si l'on remplace, dans l'expression de μ, la quantité Ei par sa valeur tirée de l'équation $R = \frac{v-V}{V}Ei$, il vient $\mu = \frac{RI}{v-V}$, expression qui se réduit à $\mu = \frac{RI}{v}$ pour $V = 0$; c'est, d'ailleurs, ce que donne immédiatement l'équation $R = \frac{v\mu}{I} \pm \frac{N}{\omega}$ quand on fait $N = 0$:

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

118. Les formules de la flexion relatives au cas particulier qu'on vient d'examiner peuvent être obtenues directement de la manière suivante.



En admettant, comme précédemment, que les sections AB et a'b' soient infiniment voisines, les normales GD et gD, menées par les points G et g à la ligne des centres de gravité, se coupent en un point D qui est évidemment le centre de courbure, et l'on a GD = ρ. Cela posé, la pression R par unité de surface sur une fibre quelconque Cc a pour expression $R = E\frac{cc'}{cG} = E\frac{cc'}{gG}$;
et comme les triangles semblables cc'g, GgD donnent

$$\frac{cc'}{gG} = \frac{gc}{GD} = \frac{v}{\rho},$$

il en résulte

$$R = E\frac{v}{\rho} \quad (1), \quad \text{d'où} \quad R\,d\omega = E\frac{v\,d\omega}{\rho};$$

Cette valeur de R dω, mise à la place de f_x dans l'équation $\Sigma f_x + N = 0$ du N° 108 donne

$$\frac{E}{\rho}\int v\,d\omega + N = 0$$

et à cause de $\int v\,d\omega = 0$, on a N = 0, ce qui est d'accord avec les résultats du N° précédent.

Maintenant si l'on prend le moment de la force R dω par rapport à l'axe projeté en G, ou a en remarquant qu'il s'agit ici d'un moment résistant

$$R\,v\,d\omega = E\frac{v^2\,d\omega}{\rho};$$

et si l'on porte cette valeur dans l'équation $\Sigma M_G f_x + \mu = 0$, du N° 108, il vient

$$\mu = \frac{E}{\rho}\int v^2\,d\omega = 0 \; ; \text{ c'est à dire }, \quad \mu = \frac{EI}{\rho}, \quad (2)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Enfin, si l'on élimine $\int$ entre les équations (1) et (2) on obtient

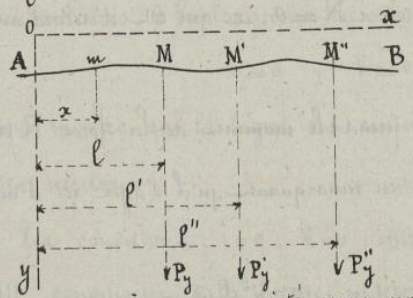
$$R = \frac{\partial \mu}{I}$$, et l'on a ainsi les relations

$$R = \frac{\partial \mu}{I} \quad , \qquad \mu = \frac{E\,I}{\int} \quad , \qquad N = 0 \, .$$

qui conviennent au cas où la surface des fibres neutres passe par la ligne des centres de gravité.

119 Avant de passer aux applications des formules qui ont été établies précédemment on peut se proposer de déterminer séparément le moment fléchissant dû à des charges agissant isolément et le moment fléchissant résultant d'une charge uniformément répartie. Les expressions qu'on obtient ainsi permettront d'ailleurs d'établir de nouvelles relations entre les forces qui produisent la flexion d'un solide et les dérivées successives de la fonction qui détermine la ligne moyenne de courbure du solide.

120.— **Moment fléchissant dû à des charges agissant isolément.** — Si AB est la ligne moyenne d'un solide fléchi sous l'action de forces extérieures dont les composantes parallèles à l'axe des y sont P_y, P'_y, P''_y, ..., le moment fléchissant de toutes ces forces par



rapport à un axe projeté en un point quelconque m est évidemment

$$\mu = P_y(l-x) + P'_y(l'-x) + P''_y(l''-x) + \ldots \, .$$

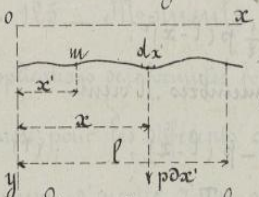
121.— **Moment fléchissant résultant d'une charge uniformément répartie.** — Si une poutre est uniformément

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

chargée d'un poids p par mètre courant dans l'intervalle compris entre deux abscisses x' et l, la charge sur un élément dx est pdx et le mo= =ment dμ de cette charge, par rapport à un axe projeté en m, est

$$d\mu = p\,dx\,(x-x')$$

Pour avoir le moment de toutes les forces réparties dans l'interva= =lle l-x', il suffit d'intégrer depuis x=x' jusqu'à x=l, ce qui donne



$$\mu = \int_{x}^{l} p(x-x')\,dx = \frac{1}{2}\,p(l-x')^2.$$

cette expression peut se mettre sous la forme

$$\mu = p(l-x') \times \frac{l-x'}{2},$$

en l'on voit que le moment d'une charge uniformément répartie est égal à celui qu'on obtiendrait si toute la charge était concen= =trée au milieu de la distance l-x'.

122. — Relation entre l'effort tranchant et la troisiè= =me dérivée de f(x). — Si, dans l'équation du N° 120, on remplace μ par sa valeur Ef''(x) obtenue au N° 116, il vient

$$Ef''(x) = P_y(l-x) + P'_y(l'-x) + P''_y(l''-x) + \ldots.$$

En différentiant et remarquant que les quantités $P_y, P'_y, P''_y \ldots$, $l, l', l'', \ldots$ sont constantes, on a

$$Ef'''(x)\,dx = -(P_y + P'_y + P''_y + \ldots)\,dx,$$

Il suffit maintenant de diviser par dx et de poser, pour simplifier conformément à la notation déjà adoptée, $P_y + P'_y + P''_y + \ldots = T$, ce qui donne pour la relation cherchée

$$Ef'''(x) = -T.$$

on peut évidemment, par trois intégrations successives, remonter de cette équation à l'équation de la ligne des centres de gravité. Mais on abrège le calcul en partant de la relation $Ef''(x) = \mu$, ce qu'on peut faire

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

si l'expression de la valeur μ du moment fléchissant est connue.

123. — Relation entre la quatrième dérivée de $f(x)$ et la valeur p de la charge uniforme par mètre de longueur.

Si l'on considère x comme variable dans la relation $\mu = \frac{1}{2} p (l-x)^2$ du N° 121, et qu'on y remplace μ par sa valeur $\mathcal{E} f''(x)$, on obtient

$$\mathcal{E} f''(x) = \frac{1}{2} p (l-x)^2 ;$$

et si l'on prend la dérivée des deux membres, il vient

$$\mathcal{E} f'''(x) = -p(l-x), \qquad (1)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{E} f'''(x) = -T.$$

relation identique à celle qui a été obtenue au N° 122.

En prenant de nouveau la dérivée de l'équation (1), on trouve

$$\mathcal{E} f^{IV}(x) = p,$$

Equation qui permettrait de remonter, par quatre intégrations successives, à l'équation de la courbe des centres de gravité.

124. — Récapitulation des formules précédentes.

Résistance par mètre carré en un point donné, $R = \frac{o - V}{V} Ei$,

Tension longitudinale, $N = Ei\omega$.

Moment fléchissant, $\mu = \frac{Ei}{V} I$.

Allongement par mètre de la fibre moyenne, $i = \frac{N}{E\omega}$.

Formules résultant des précédentes, $\begin{cases} V = \frac{N}{E\omega}. \\ R = \frac{o\mu}{I} \pm \frac{N}{\omega}. \end{cases}$

Rayon de courbure, $\rho = \frac{EI}{\mu} = \frac{\mathcal{E}}{\mu} = \frac{1}{f''(x)}$.

Equation différentielle de la ligne des centres de gravité, $\mathcal{E} f''(x)\,dx = \mu\,dx$.

Moment fléchissant d'une charge uniformément répartie sur une longueur $(l-x)$, $\mu = \frac{1}{2} p (l-x)^2$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Relation entre l'effort tranchant et la troisième dérivée de $f(x)$ $\left.\right\}$ $Ef'''(x) = -T$

Relation entre la charge uniforme par mètre et la quatrième dérivée de $f(x)$ $\left.\right\}$ $Ef^{IV}(x) = p$

125.— **Moments d'inertie des surfaces planes.** — Les applications des formules fondamentales de la flexion exigent que l'on connaisse, pour les différents cas qui peuvent se présenter dans la pratique, le moment d'inertie d'une surface plane, par rapport à un axe situé dans son plan, et spécialement, par rapport à un axe passant par le centre de gravité de la figure.

La détermination du moment d'inertie n'est qu'une question de calcul intégral lorsque la figure est limitée par un contour affectant une loi géométrique déterminée ; mais il peut arriver, ou que les calculs à effectuer soient trop laborieux, ou que le contour de la figure ne soit soumis à aucune loi donnée ; dans ce cas il peut être utile, ou même nécessaire, de recourir à une méthode graphique.

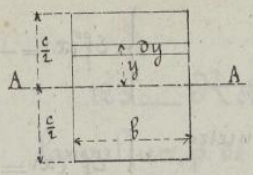
Ces deux méthodes vont être examinées successivement, surtout pour les cas qui se présentent le plus ordinairement.

126.— **Détermination analytique des moments d'inertie.** Dans toutes les questions qui suivent les figures indiquent suffisamment la situation de l'axe AA' des moments d'inertie relativement à la section considérée.

Rectangle. — La figure étant décomposée en éléments de formés de bandes parallèles à l'axe AA', on a

$$dw = b\,dy\,,$$

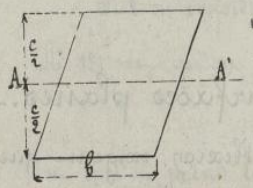
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



et par suite,

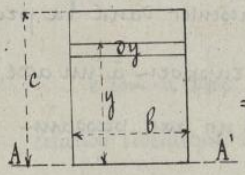
$$I = \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} y^2 b\,dy = \frac{1}{12} bc^3 = \frac{1}{12} c^2\omega.$$

La même formule s'applique évidemment à un parallélogramme de base b et de hauteur c.



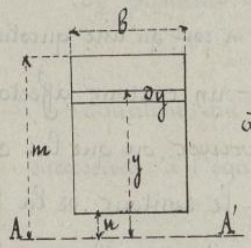
Si la figure donnée est un Carré de côté c, on a $b = c$, et par suite

$$I = \frac{1}{12} c^4 = \frac{1}{12} c^2\omega.$$



S'il s'agit d'un rectangle dont un côté coïncide avec l'axe des moments, on a

$$I = \int_0^c y^2 b\,dy = \frac{1}{3} bc^3 = \frac{1}{3} c^2\omega.$$

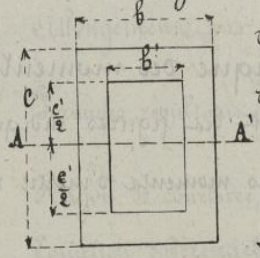


Enfin, si l'axe des moments toujours parallèle à l'un des côtés, en est situé à la distance n, on a

$$I = \int_n^m y^2 b\,dy = \frac{1}{3} b(m^3 - n^3),$$

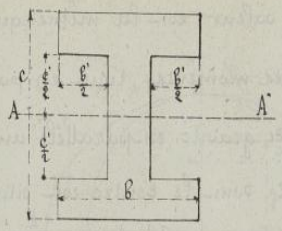
formule qui comprend les cas précédents quand on y fait soit $m = \frac{1}{2}c$ et $n = -\frac{1}{2}c$, soit $m = c$ et $n = 0$.

Rectangle évidé. — Le moment d'inertie est évidemment la différence des moments d'inertie relatifs aux deux rectangles qui composent la figure, et l'on a



$$I = \frac{1}{12}(bc^3 - b'c'^3)$$

Rectangle évidé en forme de double T à semelles égales. — Les deux évidements latéraux formant encore, par leur réunion, un rectangle de base b' et de hauteur c', le moment

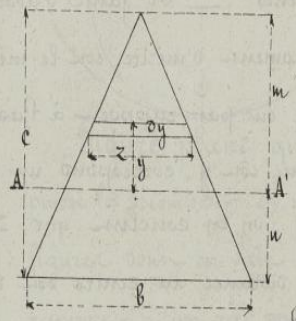


d'inertie de la figure à toujours pour expression

$$I = \frac{1}{12}\left(bc^3 - b'c'^3\right).$$

Triangle dont un côté est parallèle à l'axe des moments d'inertie. — On a $d\omega = z\,dy$ et $\frac{z}{b} = \frac{m-y}{c}$, d'où $d\omega = \frac{b(m-y)}{c}\,dy$; il en résulte

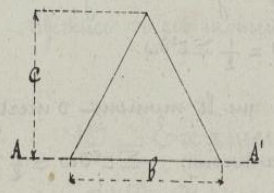
$$I = \int_{-n}^{+m} y^2 \frac{b(m-y)}{c}\,dy = \frac{1}{12}\frac{b}{c}\left(m^4 + 4m n^3 + 3n^4\right)$$



Cas particulier de la formule précédente

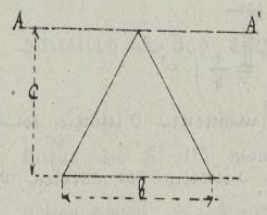
1° Si l'axe du moment d'inertie passe par le centre de gravité du triangle on a $m = \frac{2c}{3}$ et $n = \frac{c}{3}$, ce qui donne

$$I = \frac{1}{36} b c^3 = \frac{1}{18} c^2 \omega .$$



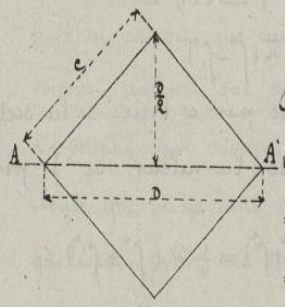
2° Si l'axe du moment d'inertie coïncide avec la base b, on a $n = 0$ et $m = c$, d'où résulte

$$I = \frac{1}{12} b c^3 = \frac{1}{6} c^2 \omega .$$



3° Si l'axe du moment passe par le sommet en restant parallèle à la base du triangle, on a $m = 0$, $n = c$, et par suite

$$I = \frac{1}{4} b c^3 = \frac{1}{2} c^2 \omega .$$



Carré dont une diagonale coïncide avec l'axe des moments. — Il suffit évidemment d'appliquer la formule 2° du cas précédent et de doubler le résultat, ce qui donne immédiatement

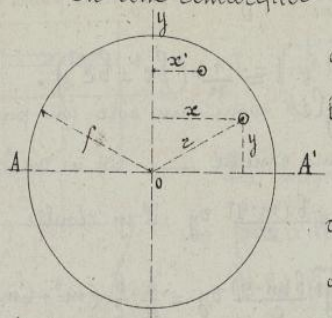
$$I = 2 \times \frac{1}{12} d \times \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{48} d^4 ;$$

si l'on veut le moment d'inertie en fonction du côté c du carré il suffit de remplacer d par $c\sqrt{2}$, et l'on obtient $I = \frac{1}{12} c^4$.

13/1

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On doit remarquer que cette valeur est la même que dans le cas où l'axe des moments, tout en passant par le centre de gravité, est parallèle au côté du carré.



Cercle dont le centre est situé sur l'axe des moments. — Il faut d'abord remarquer que le moment d'inertie est le même quand on le prend par rapport à l'axe oy ou par rapport à l'axe ox, car à tout élément $d\omega$, dont l'ordonnée est y, correspond un élément $d\omega$ dont l'abscisse x' est égale à y ; on en conclut que $\Sigma x^2 d\omega = \Sigma y^2 d\omega$. Or, pour un élément $d\omega$ dont la distance au centre est r, on a $r^2 = x^2 + y^2$

d'où $$\Sigma r^2 d\omega = \Sigma x^2 d\omega + \Sigma y^2 d\omega = 2\Sigma y^2 d\omega,$$

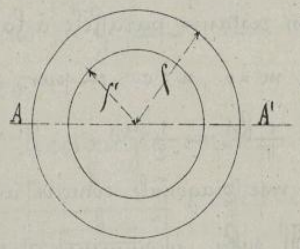
et par suite $$\Sigma y^2 d\omega = \frac{1}{2}\Sigma r^2 d\omega.$$

Or, $\Sigma r^2 d\omega$ n'est autre chose que le moment d'inertie polaire du cercle, et l'on a trouvé, à propos de la torsion, $\Sigma r^2 d\omega = \frac{1}{2}\pi f^4$; on conclut de là que la valeur cherchée est

$$I = \frac{1}{4}\pi f^4 = \frac{1}{4} f^2 \omega.$$

Section annulaire. — Le moment d'inertie est la différence des moments d'inertie des cercles dont les rayons sont f et f', et l'on a

$$I = \frac{1}{4}\pi (f^4 - f'^4);$$



si l'on désigne par ω l'aire de la section annulaire considérée, la valeur de I peut se mettre sous la forme

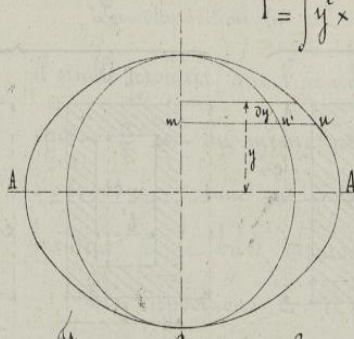
$$I = \frac{1}{4}\pi (f^2 - f'^2)(f^2 + f'^2) = \frac{1}{4}\omega (f^2 + f'^2).$$

Ellipse pleine, dont les axes sont $2a$ et $2b$. — On a évidemment $I = \int y^2 \times m n \times dy$; mais on a aussi $\frac{mn}{m'n'} = \frac{a}{b}$, c'est-à-dire

$$mn = \frac{a}{b} m'n', \text{ donc}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$I = \int y^2 \times \frac{b}{a} m'n' \times dy = \frac{b}{a} \int y^2 \times m'n' \times dy ;$$



or, $\int y^2 \times m'n' \times dy$ est le moment d'inertie du cercle de rayon b, et ce moment a pour valeur $\frac{1}{4}\pi b^4$, par conséquent,

$$I = \frac{1}{4}\pi a b^3 = \frac{1}{4} b^2 cd ,$$

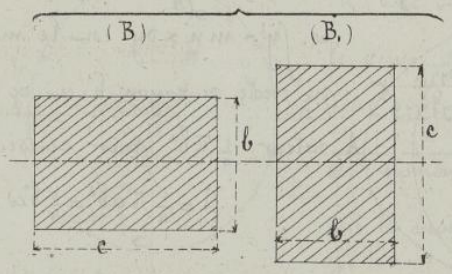
Figure plane quelconque. — Si une figure plane est telle qu'on puisse la décomposer en une somme ou une différence de plusieurs autres figures dont on sait calculer séparément le moment d'inertie par rapport à un axe donné, il suffit évidemment de faire la somme ou la différence de ces moments d'inertie pour avoir celui de la figure donnée.

127 — Examen comparatif des résultats précédents au point de vue de la déformation que subit un solide soumis à des efforts donnés. — La formule

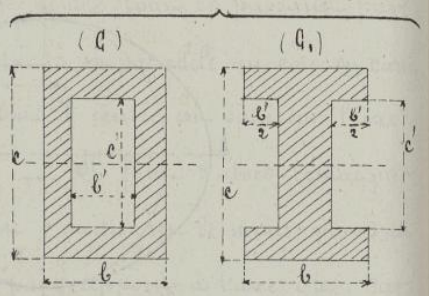
$$\int = \frac{EI}{\mu} , \text{ ou plutôt } \frac{1}{\int} = \frac{\mu}{EI} ,$$

établie au N° 113, montre que la courbure des fibres moyennes, dans une section donnée, est d'autant plus faible que la quantité I est plus grande; et l'on conçoit que dans toute bonne construction, les matériaux employés doivent, autant que possible, conserver les formes qui leur ont été assignées à l'origine ; et comme il convient, au point de vue de la dépense, de n'employer que la quantité de matière strictement nécessaire, on doit rechercher quelle est, pour une section donnée ω, la disposition qui donne la plus grande valeur au moment d'inertie I de cette section. On peut, pour cela, comparer deux à deux, de la manière suivante, les formules qui se rapportent à une même forme de section

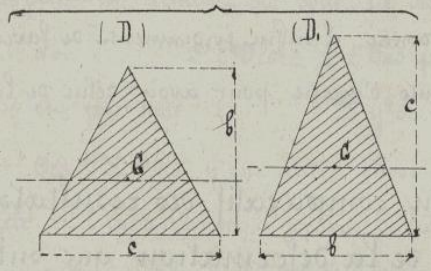
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



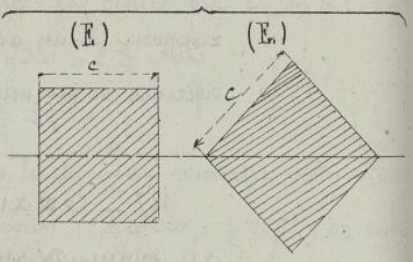
$$I = \frac{1}{12} b^2 \omega \qquad I_1 = \frac{1}{12} c^2 \omega \qquad \frac{I_1}{I} = \left(\frac{c}{b}\right)^2.$$



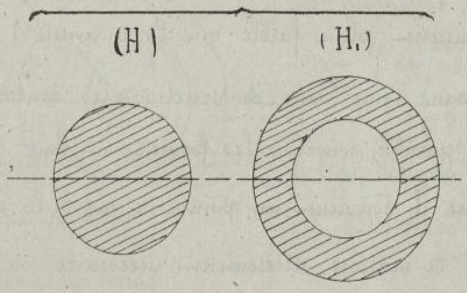
$$I = \frac{1}{12}\left(bc^3 - b'c'^3\right) \qquad I_1 = \frac{1}{12}\left(bc^3 - b'c'^3\right) \qquad \frac{I_1}{I} = 1.$$



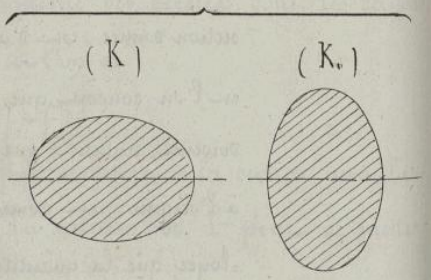
$$I = \frac{1}{18} b^2 \omega \qquad I_1 = \frac{1}{18} c^2 \omega \qquad \frac{I_1}{I} = \left(\frac{c}{b}\right)^2.$$



$$I = \frac{1}{12} c^2 \omega \qquad I_1 = \frac{1}{12} c^2 \omega \qquad \frac{I_1}{I} = 1.$$



$$I = \frac{1}{4} \int^2 \omega \qquad I_1 = \frac{1}{4} \omega \left(\int'^2 - \int^2 \right) \qquad \frac{I_1}{I} = \frac{\int'^2 + \int^2}{\int^2}.$$



$$I = \frac{1}{4} b^2 \omega \qquad I_1 = \frac{1}{4} a^2 \omega \qquad \frac{I_1}{I} = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La disposition (B₁) est plus avantageuse que la disposition (B), d'où il semble résulter que l'avantage est d'autant plus grand que le rapport $\frac{c}{b}$ est lui-même plus grand ; cependant plusieurs causes s'opposent, comme on le verra plus loin, à ce que le rapport de la hauteur à la base dépasse une certaine limite.

Les dispositions (C₁) et (C) sont également avantageuses, mais la disposition (C₁) est toujours préférable en égard aux facilités d'exécution qu'elle présente sur la disposition (C).

La forme (D₁) serait évidemment préférable à la forme (D), si ces formes étaient en usage dans l'industrie.

Les dispositions (E) et (E₁) sont également avantageuses, mais la première satisfait beaucoup mieux aux exigences de la construction.

En supposant toujours que la section soit la même, le rayon ρ'' de la figure (H₁) est nécessairement plus grand que le rayon ρ de la figure (H) et par conséquent la première disposition est plus avantageuse que l'autre.

Quant aux figures (K₁) et (K) on voit que la disposition (K₁) est aussi la plus avantageuse.

128 — **Application numérique** — Déterminer le moment d'inertie d'une section en forme de double T, de dimensions données, à semelles inégales.

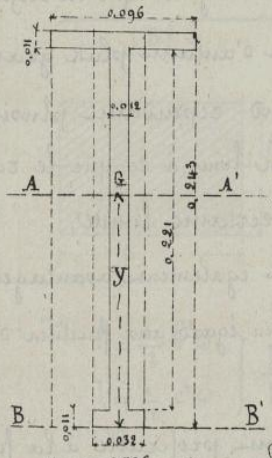
On doit d'abord remarquer qu'au point de vue de la flexion, le moment d'inertie est toujours pris par rapport à un axe passant par le centre de gravité de la section donnée ; il faut donc chercher préalablement la position de ce point, et si l'on désigne par Y sa distance à une droite menée perpendiculairement à l'axe de symétrie

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la figure, par exemple la droite BB', on a évidemment

$$y = \frac{\Sigma \omega y}{\Sigma \omega} ;$$

et comme la figure donne

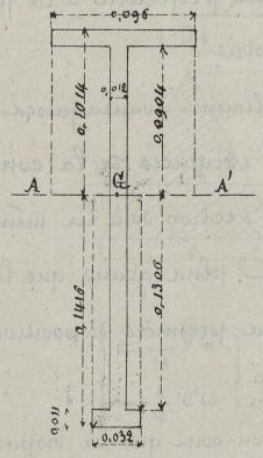


$$\Sigma \omega = \begin{cases} + 0,032 \times 0,243 = 0,007776 \\ - 0,020 \times 0,221 = -0,004420 \\ + 0,084 \times 0,011 = 0,000704 \end{cases} = 0,004060 ,$$

$$\Sigma \omega y = \begin{cases} + 0,007776 \times 0,1215 \\ - 0,004420 \times 0,1215 \\ + 0,000704 \times 0,2375 \end{cases} = 0,0005749 ,$$

Il en résulte

$$y = \frac{0,0005749}{0,004060} = 0,1416 .$$



La position du centre de gravité G étant maintenant déterminée, on calcule facilement le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe AA' qui passe par le point G.

Moment d'inertie de la partie inférieure $\left\{ + \frac{1}{3} 0,032 \times \overline{0,1416}^{3} - \frac{1}{3} 0,020 \times \overline{0,1306}^{3} \right\} = 0,00001172$

Moment d'inertie de la partie supérieure $\left\{ + \frac{1}{3} 0,096 \times \overline{0,1014}^{3} - \frac{1}{3} 0,084 \times \overline{0,0904}^{3} \right\} = 0,00000511$

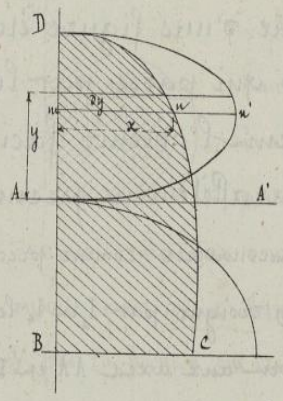
Moment d'inertie total $I = 0,00001683$

129 — Détermination graphique du moment d'inertie d'une figure plane.

1ère Méthode. — Soit DBC la portion de figure considérée et AA' l'axe du moment d'inertie. Le moment d'inertie élémentaire d'une bande infiniment petite de hauteur dy et de longueur dx, prise parallèlement à l'axe AA', est $y^2 x\, dy$. Si l'on construit un rectangle ayant la même

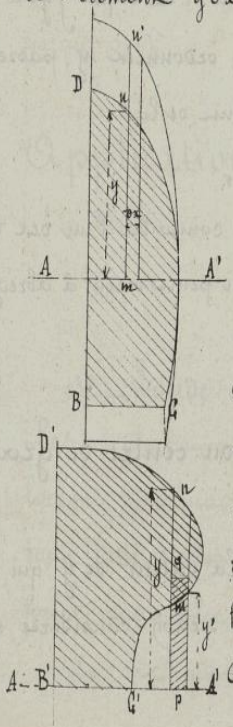
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

hauteur dy, en pour base une longueur mn' égale à y^2x, ce rectangle



exprime graphiquement la valeur du moment d'inertie élémentaire de la bande considérée. Si l'on décompose toute la figure en un nombre suffisant de bandes semblables et qu'on fasse la même construction pour chacune d'elles, on obtient un ensemble de points tels que n', et l'aire comprise dans cette courbe représente le moment d'inertie de la figure.

2ème Méthode. — Si l'on prend maintenant un rectangle infinitésimal perpendiculaire à l'axe AA', son moment d'inertie est, d'après une formule établie précédemment, égal à $\frac{1}{3}dxy^3$; de sorte que si l'on prend à l'échelle du dessin, une longueur mn' égale au produit $\frac{1}{3}y^3$, le rectangle dont la base est dx et la hauteur mn' exprime le moment d'inertie de l'élément ydx.



En faisant la même construction pour un nombre suffisant d'éléments semblables pris sur l'ensemble de la figure donnée, on détermine encore une aire dont la valeur est le moment d'inertie cherché.

Il peut arriver que la section considérée présente un évidement comme dans la figure B'C'D'. Dans ce cas, le moment d'inertie d'un élément tel que mn' a pour expression $\frac{1}{3}dx(y^3-y'^3)$ et la représentation graphique de cette valeur est donnée par un rectangle dont la base est toujours dx et dont la hauteur pq a pour valeur le produit $\frac{1}{3}(y^3-y'^3)$.

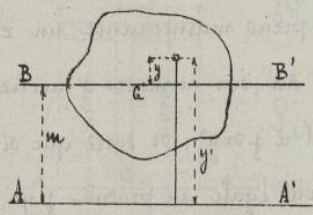
Ce cas se présente dans la recherche du moment d'inertie

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'une section à double T.

130.— Le moment d'inertie d'une figure étant connu par rapport à un axe qui passe par le centre de gravité de la figure, on peut l'obtenir facilement par rapport à un axe parallèle au premier et réciproquement. — Pour reconsidérer, comme précédemment, que le cas d'une figure plane, si l'on désigne par I_A et I_G les moments d'inertie pris séparément par rapport aux axes AA' et BB', ce dernier passant par le centre de gravité de la figure, on a, par définition,

$$I_A = \int y^2 d\omega,$$



et en outre

$$y'^2 = (y+m)^2 = y^2 + 2my + m^2;$$

donc

$$I_A = \int y^2 d\omega + 2m\int y\, d\omega + m^2 \int d\omega$$

mais on a $\int y^2 d\omega = I_G$, $m^2 \int d\omega = m^2\omega$, et enfin $\int y\, d\omega = 0$, puisque l'axe auquel sont rapportées les ordonnées y, passe par le centre de gravité G de la figure ; on conclut de là

$$I_A = I_G + m^2\omega,$$

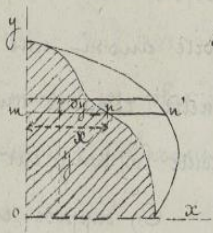
formule extrêmement simple qui fait connaître l'un des deux moments d'inertie en fonction de l'autre, et qui peut servir à abréger les calculs dans un certain nombre de cas.

131.— Détermination graphique du centre de gravité d'une aire plane.

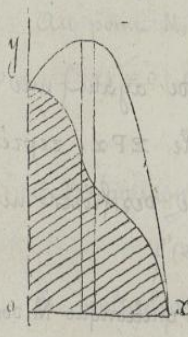
1ère Méthode — Pour calculer la valeur de y qui satisfait à l'équation $y = \frac{\int y\, d\omega}{\omega}$, on décompose la section considérée en bandes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

parallèles à l'axe des x. Le moment de la bande mn étant égal



à $y x dy$, il suffit de construire un rectangle dont la hauteur soit dx et dont la base mn soit égale à xy, puis de déterminer un nombre suffisant de points tels que n'; on obtient ainsi une courbe limitant une aire dont la valeur est égale à $\int y d\omega$, et en divisant ensuite par ω on obtient y. La valeur $X = \frac{\int x d\omega}{\omega}$ qui, avec l'ordonnée y, fixe la position du centre de gravité, se détermine de la même manière par une décomposition de la figure en bandes parallèles à l'axe des y.



2e Méthode. — On peut déterminer la valeur $\frac{\int y d\omega}{\omega} = y$ en considérant des bandes parallèles à l'axe des y et pour chacune desquelles la quantité $y d\omega$ a pour expression $\frac{y}{2} \times y dx$. On obtient ainsi une aire dont la valeur, divisée par celle de la figure donnée, fait connaître la valeur de y.

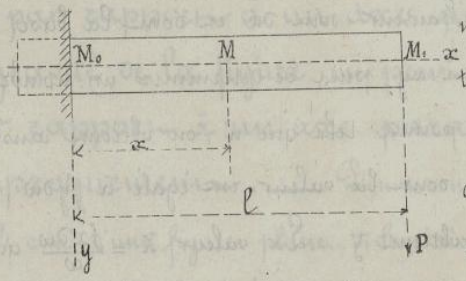
Applications des formules fondamentales de la flexion.

13e. — Solide encastré et soumis à des forces transversales. — On dit qu'un solide est encastré dans une section considérée, lorsque l'inclinaison de la ligne des centres de gravité, au point situé dans cette section, reste invariable quel que soit le mode d'action des forces auxquelles le solide est soumis.

Le cas que l'on considère ici est celui où un solide primitive-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=mem~ horizontal, encastré à l'une de ses extrémités, est chargé d'un poids P à l'autre extrémité, en supporte aussi une charge p, par mètre, répartie uniformément sur toute la longueur l du solide.



On suppose, en outre, que les axes coordonnés sont, l'un horizontal, l'autre vertical, et que l'origine des coordonnées coïncide avec le centre de gravité de la section d'encastrement.

Les forces qui sollicitent le solide ayant une direction parallèle à l'axe des y, la tension longitudinale ΣPx, représentée par N, est nulle; on a donc N = 0, et la ligne des fibres neutres se confond avec la ligne des centres de gravité.

L'effort tranchant en un point quelconque M dont l'abscisse est x a pour valeur $T = P + p(l-x)$, expression dont le maximum est $T_0 = P + pl$, et correspond à $x = 0$; le minimum $T_1 = P$, qui correspond à $x = l$, a lieu tout près du point M_1, et à gauche de ce point.

Le moment fléchissant μ, au point M, se compose du moment $P(l-x)$ de la force P et du moment $\frac{1}{2} p(l-x)^2$ de la charge uniformément répartie; donc

$$\mu = P(l-x) + \tfrac{1}{2} p(l-x)^2, \qquad (1)$$

valeur dont le maximum qui correspond à $x = 0$, est

$$\mu = Pl + \tfrac{1}{2} pl^2;$$

à mesure que x augmente μ diminue et, pour $x = l$, on a $\mu = 0$.

133. — Équation de la ligne des centres de gravité.

Cette équation pourrait se déduire, par trois intégrations successives

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la relation $\mathcal{E} f'''(x) = -T$, qui devient ici

$$\mathcal{E} f'''(x) = -P - p(l-x);$$

mais il est plus simple de prendre la formule $\mathcal{E} f''(x) = \mu$, qui donne, en y remplaçant μ par la valeur (1) et en multipliant par dx,

$$f''(x)\,dx = \frac{1}{\mathcal{E}}\left(P(l-x)\,dx + \frac{1}{2}p(l-x)^2\,dx\right),$$

ou encore

$$f''(x)\,dx = -\frac{1}{\mathcal{E}}\left(P(l-x)\,d(l-x) + \frac{1}{2}p(l-x)^2\,d(l-x)\right),$$

expression dont l'intégrale est

$$f'(x) = -\frac{1}{\mathcal{E}}\left[\frac{1}{2}P(l-x)^2 + \frac{1}{6}p(l-x)^3\right] + C.$$

Au point M_0, pour lequel on a $x=0$, la tangente est horizontale, donc, $f'(x)=0$, et par suite,

$$0 = -\frac{1}{\mathcal{E}}\left(\frac{1}{2}Pl^2 + \frac{1}{6}pl^3\right) + C;$$

Cette équation, retranchée de la précédente, donne :

$$f'(x) = \frac{1}{\mathcal{E}}\left[\frac{1}{2}Pl^2 - \frac{1}{2}P(l-x)^2 + \frac{1}{6}pl^3 - \frac{1}{6}p(l-x)^3\right] \qquad (2)$$

En multipliant de nouveau par dx, on a

$$f'(x)\,dx = \frac{1}{\mathcal{E}}\left[\frac{1}{2}Pl^2\,dx + \frac{1}{2}P(l-x)^2\,d(l-x) + \frac{1}{6}pl^3\,dx + \frac{1}{6}p(l-x)^3\,d(l-x)\right],$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{\mathcal{E}}\left[\frac{1}{2}Pl^2x + \frac{1}{6}P(l-x)^3 + \frac{1}{6}pl^3x + \frac{1}{24}p(l-x)^4\right] + C.$$

On détermine la constante en remarquant qu'au point M_0, on a $x=0$ et $f(x)=0$, ce qui donne, pour ce point,

$$0 = \frac{1}{\mathcal{E}}\left(\frac{1}{6}Pl^3 + \frac{1}{24}pl^4\right) + C;$$

en retranchant cette équation de la précédente, on obtient, pour l'équation de la ligne des centres de gravité,

$$y = f(x) = \frac{1}{\mathcal{E}}\left[\frac{1}{2}Pl^2x + \frac{1}{6}P(l-x)^3 - \frac{1}{6}Pl^3 + \frac{1}{6}pl^3x + \frac{1}{24}p(l-x)^4 - \frac{1}{24}pl^4\right],$$

ou, plus simplement,

$$y = f(x) = \frac{1}{\mathcal{E}}\left[\frac{1}{6}Px^2(3l-x) + \frac{1}{24}px^2(6l^2 - 4lx + x^2)\right], \qquad (3)$$

équation à laquelle il est utile de joindre la relation

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$y' = f'(x) = \frac{1}{\mathcal{E}}\left[\frac{1}{2}Px(2l-x) + \frac{1}{6}px(3l^2 - 3lx + x^2)\right] \qquad (4)$$

qui n'est que l'équation (2) mise sous une forme plus simple.

134. — **Discussion.** — Pour discuter commodément la courbe représentée par l'équation (3) il convient d'examiner séparément les cas où l'on a $p=0$, et $P=0$. En désignant par y_1 l'ordonnée courante dans l'hypothèse $p=0$, et par y_2 celle qui correspond au cas de $P=0$, on a :

pour $p=0$, $\qquad y_1 = \frac{1}{6\mathcal{E}} Px^2(3l-x)$; $\qquad (5)$

pour $P=0$, $\qquad y_2 = \frac{1}{24\mathcal{E}} px^2(6l^2 - 4lx + x^2)$. $\qquad (6)$

135. — **Coordonnées à l'origine.** — Pour $x=0$, on a $y_1=0$ et $y_2=0$, ce qui doit être d'après la situation adoptée pour l'origine des coordonnées.

Valeur de la flèche à l'extrémité du solide. — En posant $x=l$, dans les équations (5) et (6) on obtient pour les flèches correspondantes :

$$Y_1 = \frac{1}{3\mathcal{E}} Pl^3, \qquad Y_2 = \frac{1}{8\mathcal{E}} pl^4 ;$$

et si l'on suppose en outre que le poids P soit égal à la charge pl uniformément répartie, c'est-à-dire si l'on pose $P=pl$, il vient

$$Y_1 = \frac{1}{3\mathcal{E}} pl^4, \qquad Y_2 = \frac{1}{8\mathcal{E}} pl^4, \quad \text{d'où} \quad \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{3}{8} ;$$

ce résultat, conforme à l'une des lois établies par M^r Dupin, montre que la flèche due à une charge uniformément répartie est égale aux $\frac{3}{8}$ de celle qui serait produite si cette charge agissait à l'extrémité du solide. On voit aussi que dans les mêmes conditions les flèches croissent comme les quatrièmes puissances des longueurs et qu'elles sont en raison inverse des quantités E et I.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

136.— Point où la courbe rencontre l'axe des x.—

Pour $y_1 = 0$ on a $x = 0$ et $x = 3l$.

Pour $y_2 = 0$ on a $x = 0$ et $x = 2l \pm \sqrt{-2l}$;

la valeur $x = 2l \pm \sqrt{-2l}$ est imaginaire ; quant à la valeur $x = 3l$ elle forme évidemment avec $y = 0$ une solution de l'équation $y = \frac{1}{6\mathcal{E}} P x^2 (3l - x)$ considérée à un point de vue purement analytique : mais il n'en est plus ainsi lorsqu'il s'agit du phénomène de flexion que l'on considère ici, parce qu'alors on ne saurait avoir $x > l$. Donc, dans les limites où la question est circonscrite, l'origine des coordonnées est le seul point où les courbes coupent l'axe des x .

137.— Inclinaison des fibres moyennes .— Les dérivées de y_1 et y_2 sont

$$y_1' = \frac{1}{2\mathcal{E}} P x (2l - x) \qquad \text{et} \qquad y_2' = \frac{1}{6\mathcal{E}} p x (3l^2 - 3lx + x^2) ,$$

en ces valeurs donnent les inclinaisons des fibres moyennes en un point quelconque . Pour $x = 0$, on a $y_1' = 0$, $y_2' = 0$, les tangentes sont horizontales et elles se confondent avec l'axe des x . La pre=mière courbe a une seconde tangente horizontale qui est déterminée par la condition $2l - x = 0$, d'où $x = 2l$, mais le point correspon=dant à cette valeur ne doit pas être pris en considération . La se=conde courbe n'a pas d'autre tangente horizontale que celle qui passe par l'origine, car le trinôme $3l^2 - 3lx + x^2$, égalé à zéro, ne donne pour x que des valeurs imaginaires .

Pour reconnaître comment varie l'inclinaison à partir de $x = 0$, on peut, si l'on veut, avoir recours aux dérivées secondes dont les valeurs sont

$$y_1'' = \frac{1}{\mathcal{E}} P (l - x) , \qquad y_2'' = \frac{1}{2\mathcal{E}} p (l - x)^2 ;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

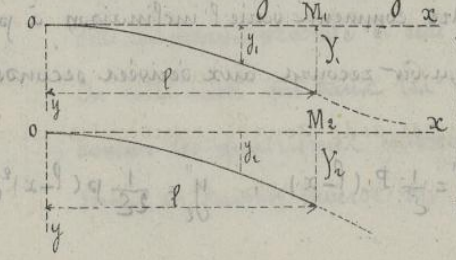
La valeur y'' restant positive pour toute valeur de x plus petite que $x=l$ on voit que y'_1 est une fonction positive et croissante depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$, valeur pour laquelle on a $y''_1=0$ ce qui annonce un point d'inflexion. Au delà de $x=l$, la fonction y'_1 est décroissante, mais alors les circonstances que présente la courbe n'interviennent d'aucune manière utile dans la question. Quant à la valeur de y''_2 on voit qu'elle reste positive quel que soit x; donc y'_2 est une fonction toujours croissante, et la courbe correspondante n'a pas d'inflexion au point pour lequel on a $f''(x)=0$, par la raison que $f''(x)$ ne change pas de signe, en passant par zéro.

138.— **Rayon de courbure.** — Si l'on porte les valeurs de y''_1 et y''_2 dans la formule $\rho = \frac{1}{f''(x)}$, il vient

$$\rho_1 = \frac{\mathcal{E}}{P(l-x)} \; ; \qquad \rho_2 = \frac{2\mathcal{E}}{p(l-x)^2} \; ;$$

pour $x=0$ on a $\rho_1 = \frac{\mathcal{E}}{Pl}$, $\rho_2 = \frac{2\mathcal{E}}{pl^2}$. A partir de $x=0$, les valeurs de ρ_1 et ρ_2 vont constamment en croissant et deviennent infinies quand on pose $x=l$, ce qui doit être puisque le rayon de courbure a aussi pour expression $\rho = \frac{\mathcal{E}}{\mu}$ et qu'au point considéré on a $\mu=0$.

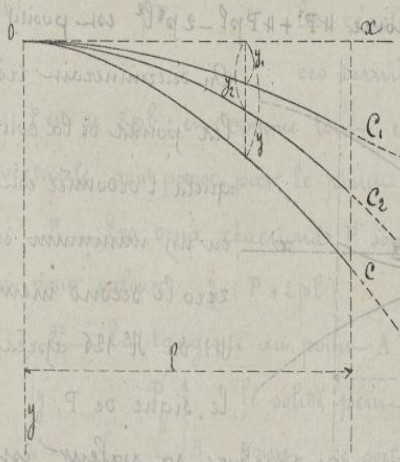
139.— **Résumé de la discussion précédente et construction des lignes moyennes.** — En résumé, les courbes des fibres moyennes passent par l'origine; elles sont tangentes en ce point à l'axe des x; à partir de $x=0$ et jusqu'à $x=l$ pour la



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

première courbe, les inclinaisons, les rayons de courbure en les ordon=
=nées des courbes sont des quantités constamment positives en crois=
=sant; les deux courbes sont convexes du côté de l'axe des x.

Maintenant si l'on veut construire la courbe représentée par l'é=
=quation (3) du N° 133, c'est-à-dire la courbe qui affecte les fibres
moyennes d'un solide fléchi sous l'action d'une charge uniforme ou
d'un poids agissant à l'extrémité du solide, il suffit de remarquer que
l'ordonnée y d'un point quelconque de cette courbe est la somme y_1+y_2
des ordonnées correspondantes des deux courbes qu'on vient de discuter.



Les valeurs de y_1 et y_2 étant
ici positives dans l'intervalle
compris entre $x=0$ et $x=l$, la va=
=leur y est elle-même positive, et
la courbe C ne coupe l'axe des
x qu'à l'origine; cette courbe est
d'ailleurs tangente à l'axe des x
au point 0, car en ce point on a
$y_1'=0$, $y_2'=0$, d'où résulte $y'=0$,
valeur qu'on obtient aussi en faisant $x=0$ dans l'équation
(14) du N° 133.

Il peut arriver que les quantités P et p soient de signes
contraires, par exemple, que p soit positif et P négatif, dans
ce cas la courbe est située au-dessus de l'axe des x, c'est-à-
-dire du côté des x négatifs et la courbe C, qui se déduit toujours
des courbes C_1 et C_2, est encore tangente en 0 à l'axe des x,
mais l'ordonnée y de cette courbe, représentée alors par y_2-y_1,
est positive ou négative suivant que l'on a $y_2>y_1$ ou $y_2<y_1$, de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sorte que la courbe C peut, dans son parcours, rencontrer l'axe des x, en un ou plusieurs points qu'on détermine en égalant à zéro le second membre de l'équation (3) du N°. 133 après avoir changé le signe de P, c'est-à-dire, en posant

$$\frac{1}{24} px^2(6l^2 - 4lx + x^2) - \frac{1}{6} Px^2(3l - x) = 0,$$

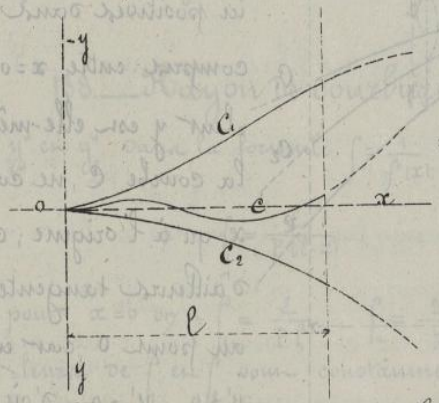
ou

$$px^2 + 4(P - pl)x + 6l(pl - 2P) = 0,$$

d'où

$$x = \frac{1}{p}\left[2(pl - P) \pm \sqrt{4P^2 + 4Ppl - 2p^2l^2}\right]$$

ce qui donne deux points de rencontre, un seul point, ou aucun, suivant que le trinome $4P^2 + 4Ppl - 2p^2l^2$ est positif, négatif ou nul.



On déterminerait très-facilement les points de la courbe C pour lesquels l'ordonnée est un maximum ou un minimum, en égalant à zéro le second membre de l'équation (4) du N°. 126 après avoir changé le signe de P.

Quant au rayon de courbure, sa valeur est

$$\int = \frac{\mathcal{E}}{\frac{1}{2}p(l-x)^2 - P(l-x)};$$

en, suivant qu'on fait $x=0$ ou $x=l$, on a

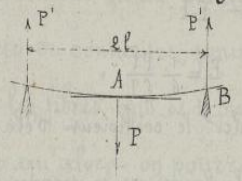
$$\int = \frac{\mathcal{E}}{\frac{1}{2}pl^2 - Pl} \quad \text{ou} \quad \int = \infty.$$

Il est inutile de pousser plus loin cette discussion qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté; mais il convient de remarquer, en terminant que les équations précédentes dans lesquelles entrent P et p doivent être considérées comme des équations homogènes, et-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'homogénéité devient évidente quand on regarde pl en px comme étant de même nature que la quantité P, c'est-à-dire comme représentant des pressions.

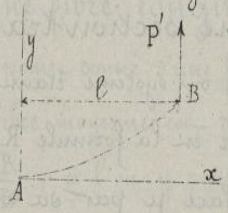
140. — Solide reposant par ses extrémités sur deux appuis de niveau et chargé d'un poids P en son milieu et d'un poids p par mètre répartie uniformément sur toute la longueur du solide. — Les forces extérieures



qui sollicitent le solide sont : la charge P, la charge uniformément répartie 2pl et les réactions verticales P' des points d'appui, ces dernières agissant en sens contraire de P et de 2pl ; et comme tout est symétrique par rapport à la verticale qui passe par le point A on voit que :

1°. — Les deux réactions P' sont égales entr'elles et chacune d'elles a pour valeur $\frac{1}{2}(P+2pl)$.

2°. — La tangente au point A est nécessairement horizontale et



le solide peut être regardé comme encastré en ce point ; de sorte qu'on se trouve dans les conditions du cas précédent quand on ne considère que la moitié de la courbe totale. Les formules déjà obtenues sont donc entièrement applicables à la portion AB de la courbe pourvu qu'on y remplace P par $\frac{1}{2}(P+2pl)$, pl par $-pl$, en quelles y positifs soient pris dans le sens de la flexion du solide.

En faisant ces substitutions dans la formule (3) du N° 133, on obtient

$$y = \frac{1}{\mathcal{E}}\left[\frac{1}{2}Px^2(3l-x) + \frac{1}{24}px^2(6l^2-x^2)\right].$$

Valeur de la flèche au point B, $\cdots\cdots$ $f = \frac{1}{\mathcal{E}}\left[\frac{1}{6}Pl^3 + \frac{5}{24}pl^4\right]$.

Flèche due à la charge P, $\cdots\cdots$ $f_1 = \frac{1}{\mathcal{E}} \times \frac{1}{6}Pl^3$.

15
1

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Flèche due à la charge pl, ... $f_2 = \frac{1}{\mathcal{E}} \times \frac{5}{24} pl^4$.

Pour $\frac{P}{2} = pl$ les valeurs f_1 et f_2 deviennent

$f_1 = \frac{1}{\mathcal{E}} \times \frac{1}{3} pl^3$, $f_2 = \frac{1}{\mathcal{E}} \times \frac{5}{24} pl^4$; d'où $\frac{f_2}{f_1} = \frac{5}{8}$,

résultat conforme à l'une des lois établies par M^r Dupin.

141. — Valeur du coefficient d'élasticité E, déduite des formules de la flexion plane. — La formule (1) donne, en y remplaçant $\mathcal{E}$ par EI.

$$E = \frac{1}{6} \frac{Pl^3}{f_1 I} ,$$

expression qui permet de calculer le coefficient d'élasticité E avec plus d'exactitude qu'on ne pourrait le faire en se servant des formules déduites de la théorie de l'extension, parce que la longueur de la flèche f peut être évaluée avec une précision plus grande que ne le comporte la mesure de l'allongement d'une tige soumise à l'extension.

142. — Valeur de la résistance R par mètre carré en un point donné d'une section transversale quelconque. — Les extérieurs du système étant ici verticaux, la tension longitudinale N est nulle et la formule $R = \frac{v\mu}{I} \pm \frac{N}{\omega}$ se réduit à $R = \frac{v\mu}{I}$; et si l'on remplace μ par sa valeur $\frac{P}{2}(l-x)$, il vient

$$R = \frac{1}{2} \frac{Pv(l-x)}{I} ,$$

formule qui donne la valeur de la résistance R d'une fibre située à la distance v de la fibre moyenne et pour un point de cette fibre, situé à la distance x de la section transversale, qui passe par le milieu de la longueur du solide.

La valeur de R croît évidemment à mesure que v aug-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=ment et que x diminue ; par conséquent on a le point où les fibres sont le plus fatiguées en posant, dans la formule précédente, $x = 0$ et en remplaçant v par la demi-hauteur v' de la section transversale au point milieu de la longueur du solide. On obtient ainsi pour le maximum de R,

$$R = \frac{Pv'l}{2I},$$

et l'on conçoit qu'au point de vue de la résistance des matériaux, il importe de connaître, pour chaque solide soumis à la flexion, quelles sont les fibres qui se trouvent soumises à la plus grande fatigue, parce qu'alors on pourra toujours déterminer les dimensions du solide de manière que la tension ou la pression exercée sur la fibre qui travaille le plus ne puisse pas dépasser les limites pratiques indiquées par l'expérience.

143. — **Allongement par mètre en un point donné d'une fibre longitudinale.** — L'allongement j par mètre, en un point donné d'une fibre longitudinale située à la distance v de la fibre moyenne est donné, comme on le sait, par la relation $j = \frac{R}{E}$; si l'on y remplace R par la valeur trouvée au N° précédent, il vient

$$j = \frac{Pv(l-x)}{2EI} ;$$

et l'on voit que l'allongement par mètre est d'autant plus grand que les points considérés sont plus voisins du milieu de la longueur du solide.

144. — **Allongement total d'une fibre longitudinale.** L'allongement par mètre, en un point dont l'abscisse est x,

étant exprimé par $\frac{Po(l-x)}{2EI}$, l'allongement produit sur une longueur dx est $\frac{Po(l-x)}{2EI}dx$; et si l'on désigne par A l'allongement total sur la longueur l, on a

$$A = \int_0^l \frac{Po(l-x)}{2EI}dx = \frac{Pvl^2}{4EI}.$$

Cette valeur exprime un allongement ou un raccourcissement suivant que la fibre considérée est située en dessous ou en dessus de la fibre neutre. On voit en outre que A est proportionnel à P ce qui est d'accord avec les faits observés ; et enfin, pour une même charge P, la valeur absolue de A est d'autant plus grande que v est lui-même plus grand : par conséquent la fibre longitudinale la plus allongée est la fibre extrême située à la partie convexe du solide ; la fibre la plus comprimée est la fibre extrême située à la partie concave.

Si v' et v'' expriment les distances du centre de gravité aux fibres extrêmes et si A', A'' sont les valeurs correspondantes de A, on a

$$A' = \frac{Pv'l^2}{4EI}, \quad A'' = \frac{Pv''l^2}{4EI}, \text{ d'où } \frac{A'}{A''} = \frac{v'}{v''}.$$

145. — **Vérifications numériques.** — Le cas d'un solide prismatique posé sur deux appuis de niveau, et soumis à une charge unique P appliquée au milieu de sa longueur, est celui qui se prête le mieux aux vérifications numériques des formules fondamentales de la flexion, parce qu'ici la condition d'encastrement peut être considérée comme étant réalisée complètement quand on ne considère que la moitié du solide, ce qui n'a jamais lieu d'une manière aussi parfaite lorsqu'il est encastré par l'une de ses extrémités.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1°. — Rapport entre les variations de longueur des fibres extrêmes. — La section à double T considérée au n° 128 a donné

$$v' = 0^m,1014, \quad v'' = 0^m,1416 ;$$

en mettant ces valeurs dans la formule $\frac{A''}{A'} = \frac{V''}{V'}$, on trouve

$$\frac{A''}{A'} = \frac{V''}{V'} = 1,39,$$

en l'expérience directe donne le nombre 1,376, résultat qui diffère extrêmement peu du précédent. La même coïncidence a lieu entre le nombre déduit des formules et celui qui résulte de la mesure directe quand on retourne la pièce.

2°. — Vérification du coefficient d'élasticité. — Si la section transversale du solide considéré est un rectangle de base b et de hauteur h, on a $I = \frac{1}{12} bc^3$, et la formule du n° 141 devient

$$E = \frac{2Pl^3}{fbc^3}.$$

Une pièce de sapin pour laquelle on avait $b = 0^m,15$, $c = 0^m,20$, $l = 1^m,90$, $P = 100$ kilog., a donné $f = 0,00138$, et si l'on met ces valeurs dans la formule précédente on trouve

$$E = 828\,390\,000,$$ ou environ $0,8 \times 10^9$;

c'est à peu près le nombre que donnent les expériences de traction.

Pour les deux pièces de chêne indiquées au tableau de la page 76, les flèches mesurées étaient $f = 0,00117$ $f = 0,00185$; et l'application de la formule précédente a donné

$$E = 977\,070\,000, \quad E = 617\,930\,000 ;$$

ces valeurs concordent avec celles qu'on déduit de la formule de l'extension.

Une barre d'acier, de la maison Krupp en Gander, avait pour dimensions

$$b = 0^m,030, \quad c = 0^m,040, \quad l = 1^m,50,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la charge était P = 100 Kilog. et la flèche, $f = 0.000\,1543$; la formule a donné

$$E = 22\,779\,000\,000.$$

Les dimensions de la barre ayant été réduites, on a obtenu

$$E = 22\,250\,000\,000.$$

Cette même barre réduite une seconde fois à de plus faibles dimensions transversales en transformée en une tringle de $0^m.01$ a été soumise à des expériences de traction sous une charge de 2980 Kilog; l'allongement par mètre était $i = \frac{0.000098}{2.328}$, et l'on a trouvé dans deux expériences successives

$$E = 21\,816\,325\,530, \quad E = 22\,414\,096\,916,$$

valeur dont la moyenne est 22 115 211 723.

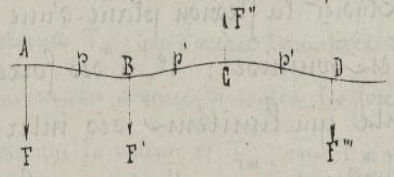
La concordance que l'on constate ici entre les résultats déduits séparément de la formule de l'extension et de l'une des formules de la flexion plane est extrêmement remarquable ; et les différences que présentent, dans les deux cas, les valeurs de E relatives à une même matière, doivent être considérées comme très-petites surtout quand on tient compte des erreurs inévitables résultant de la mesure directe des quantités qui interviennent dans les expériences. Il faut conclure de là que les hypothèses admises au début de l'étude de la flexion plane sont fondées, et bien qu'elles ne soient peut-être pas l'expression exacte des faits, les conséquences que l'on en tire sont d'une grande importance, dans les applications de la mécanique aux constructions et aux machines.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Théorie générale de la flexion plane d'une poutre droite.

146. Généralité de la question. Les deux exemples de flexion plane qui ont été examinés précédemment ne sont que des cas très-simples du problème beaucoup plus général que l'on se propose d'étudier ici en admettant : 1°— que la section transversale n'est plus constante dans toute la longueur du solide ; 2°— que le solide est soumis, dans toute son étendue, à un nombre quelconque de forces agissant en des points différents ; 3°— que les points d'appui sont en nombre quelconque, à des niveaux différents et qu'en même temps le solide peut être encastré soit par l'une de ses extrémités soit par les deux extrémités à la fois.

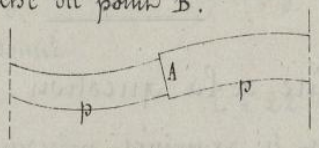
147.— Division en intervalles.— Pour simplifier l'étude de la question il convient de définir d'abord ce que l'on entend par un intervalle. On appelle ainsi toute la partie d'une poutre soumise exclusivement à une charge uniformément répartie ; mais il est nécessaire de préciser cette définition. S'il s'agit, par exemple, d'une poutre chargée uniformément de p kilog. par mètre de A en B, de p' kilog. par mètre de B en C, et soumise en outre



à des forces F, F', F'', F''' ayant leurs points d'application en A, B, C et D, la longueur AB est un intervalle, la longueur BC, un autre, et la longueur CB, un troisième. Si l'on avait $F''=0$, il n'y aurait plus qu'un intervalle de B en D ; mais si l'on avait $F'=0$, les deux intervalles AB et BC seraient considérés comme étant toujours distincts,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la charge uniformément répartie restant différente à droite et à gauche du point B.



Le lieu A où se fait un changement brusque de section, doit aussi être considéré comme une limite commune à deux intervalles distincts lors même qu'aucune force n'agit au point A, et que la charge par mètre uniformément répartie soit la même à droite et à gauche de ce point ; on conçoit en effet que les formules fondamentales de la flexion ne peuvent être appliquées qu'à chacune des deux parties de la poutre considérées séparément, puisque ces formules supposent essentiellement que le moment d'inertie est constant dans toute la longueur du solide, ce qui implique nécessairement que la section est aussi constante. Enfin, on doit ajouter que tous les points d'appui sur lesquels repose le solide doivent être considérés comme points de séparation entre deux intervalles distincts, puisque les réactions exercées par ces appuis font partie des forces extérieures qui agissent sur le système.

Ces définitions établies, le problème général de la flexion plane peut s'énoncer ainsi : Étudier la flexion plane d'une poutre droite de n intervalles soumise : 1°_à des forces déterminées aux n+1 points qui limitent ces intervalles ; 2°_aux charges uniformément réparties sur chacun des n intervalles.

148. __Questions principales à résoudre. ____ Le système considéré étant rapporté à deux axes ox, oy situés dans le plan de flexion, on se propose de déterminer, pour les différents points de la ligne des fibres moyennes :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1°. — Les relations qui existent entre les efforts tranchants ;

2°. — Les relations entre les moments fléchissants,

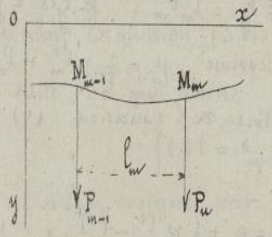
3°. — Les relations entre les inclinaisons,

4°. — Les relations entre les ordonnées.

Chacune de ces questions comprend deux parties distinctes suivant que la relation qu'il s'agit de déterminer doit s'appliquer à deux points situés aux extrémités d'un intervalle de rang quelconque ou bien à un point situé à l'origine d'un intervalle et à un autre point quelconque pris sur cet intervalle.

149. — Relations entre les efforts tranchants.

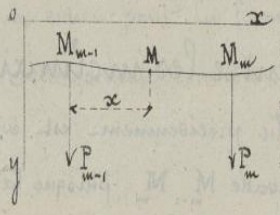
1ère. Relation. — Si l'on considère un intervalle de rang m situé entre les points M_{m-1} et M_m, l'effort tranchant T_{m-1} au point



M_{m-1}, est, d'après la définition du n° 106, la somme de toutes les forces verticales extérieures qui agissent à la droite de ce point ; ces forces sont d'abord la charge $p_m l_m$ uniformément répartie de M_{m-1} en M_m ; ensuite la force P_m qui agit en M_m, et enfin l'effort tranchant T_m qui s'exerce tout près du point M_m, à droite de ce point, et qui est la somme de toutes les forces verticales situées à droite de M_m ; de sorte que la valeur de T_{m-1} est $T_{m-1} = p_m l_m + P_m + T_m$, d'où l'on tire, pour la première relation,

$$T_m = T_{m-1} - P_m - p_m l_m \qquad (1)$$

2ème. Relation. — En désignant par T l'effort tranchant en un point M situé entre M_{m-1} et M_m à une distance



x du point M_{m-1}, pris ici comme une nouvelle origine, il est évident que l'effort tranchant T_{m-1}

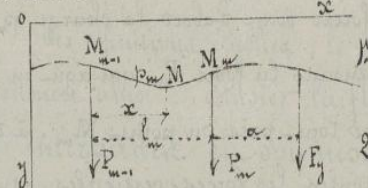
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

a pour expression $T_{m-1} = p_m x + T$, ce qui donne pour la seconde relation,

$$T = T_{m-1} - p_m x \qquad (1\text{ bis})$$

150. — Relations entre les moments fléchissants.

1re Relation. — Le moment fléchissant μ_{m-1}, par rapport à l'axe projeté en M_{m-1} se compose d'abord du moment fléchissant $-\frac{1}{2} p_m l_m^2$ dû à la charge $p_m l_m$ uniformément répartie, soit, du moment fléchissant $P_m l_m$ dû au poids P_m, et enfin de la somme des moments fléchissants des forces situées à droite du point M_m. Si F_y est l'une de ces forces et a sa distance au point M_m, le moment de cette force, par rapport à l'axe projeté en M_{m-1}, est évidemment $F_y(l_m + x)$ ou $F_y l_m + F_y a$, et la somme des moments de toutes les forces analogues est $l_m \Sigma F_y + \Sigma F_y a$, or, comme on a évidemment par définition $l_m \Sigma F_y = T_m l_m$, $\Sigma F_y a = \mu_m$, il en résulte que le moment μ_{m-1} a pour expression $\mu_{m-1} = \frac{1}{2} p_m l_m^2 + P_m l_m + T_m l_m + \mu_m$; si l'on remplace T_m par sa valeur tirée de l'équation (1), et qu'on simplifie il vient



$$\mu_m = \mu_{m-1} + \frac{1}{2} p_m l_m^2 - l_m T_{m-1} \qquad (2)$$

2e Relation. — Pour avoir la valeur de μ par rapport à un axe projeté en un point M, situé entre M_{m-1} et M_m, on peut d'abord écrire, par analogie à ce qui précède, $\mu_{m-1} = \mu + Tx + \frac{1}{2} p x^2$, en remplaçant T par sa valeur tirée de la relation (1 bis) on obtient

$$\mu = \mu_{m-1} - T_{m-1} x + \frac{1}{2} p_m x^2 \qquad (2\text{ bis})$$

151. — Relations entre les inclinaisons. — La formule générale $f''(x) = \frac{\mu}{\mathcal{E}}$, établie précédemment est évidemment applicable dans toute l'étendue de l'intervalle $M_{m-1} M_m$ puisque la quantité $\mathcal{E}_m$ est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

constante pour toute la longueur l_m. En remplaçant, dans cette formule, μ par la valeur (2 bis), puis en multipliant par dx et prenant l'intégrale, il vient

$$f'(x) = \frac{1}{\varepsilon_m}\left(\mu_{m-1}\frac{x}{1} - \frac{1}{2}T_{m-1}x^2 + \frac{1}{6}p_m x^3\right) + C ;$$

si l'on désigne par α_{m-1}, α et α_m, les valeurs que prend successivement l'inclinaison $f'(x)$, aux points M_{m-1}, M et M_m, puis qu'on prenne l'intégrale précédente, d'abord depuis $x=0$ jusqu'à $x=l_m$, et ensuite, depuis $x=0$ jusqu'à la valeur quelconque x, on obtient pour les deux relations demandées :

$$\alpha_m = \alpha_{m-1} + \frac{1}{\varepsilon_m}\left(\mu_{m-1}l_m - \frac{1}{2}T_{m-1}l_m^2 + \frac{1}{6}p_m l_m^3\right) \qquad (3)$$

$$\alpha = \alpha_{m-1} + \frac{1}{\varepsilon_m}\left(\mu_{m-1}x - \frac{1}{2}T_{m-1}x^2 + \frac{1}{6}p_m x^3\right) \qquad (3\text{ bis})$$

152. — **Relations entre les ordonnées.** — On prend d'abord l'équation (3 bis) qu'on multiplie par dx, et qu'on intègre ensuite, ce qui donne

$$f(x) = \alpha_{m-1}x + \frac{1}{\varepsilon_m}\left(\frac{1}{2}\mu_{m-1}x^2 - \frac{1}{6}T_{m-1}x^3 + \frac{1}{24}p_m x^4\right) + C ,$$

et si l'on désigne par y_{m-1}, y, y_m les valeurs de l'ordonnée aux points M_{m-1}, M, M_m, il suffit de prendre l'intégrale, d'abord, depuis $x=0$, jusqu'à $x=l_m$; ensuite, depuis $x=0$ jusqu'à la valeur quelconque x, pour avoir les deux relations cherchées, qui sont

$$y_m = y_{m-1} + \alpha_{m-1}l_m + \frac{1}{\varepsilon_m}\left(\frac{1}{2}\mu_{m-1}l_m^2 - \frac{1}{6}T_{m-1}l_m^3 + \frac{1}{24}p_m l_m^4\right), \quad (4)$$

$$y = y_{m-1} + \alpha_{m-1}x + \frac{1}{\varepsilon_m}\left(\frac{1}{2}\mu_{m-1}x^2 - \frac{1}{6}T_{m-1}x_m^3 + \frac{1}{24}p_m x^4\right). \quad (4\text{ bis})$$

Le caractère de généralité indiqué pour la formule (3 bis) subsiste en entier pour la formule (4 bis) qui en est déduite directement. Cette formule convient donc aussi à tous les points de l'intervalle l_m

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

153. — Tableau des huit formules générales.

$$(A)\quad\begin{cases}(1) & T_m = T_{m-1} - P_m - p_m l_m .\\ (2) & \mu_m = \mu_{m-1} - T_{m-1} l_m + \tfrac{1}{2} p_m l_m^2 .\\ (3) & \alpha_m = \alpha_{m-1} + \tfrac{1}{\varepsilon_m}\left(\mu_{m-1} l_m - \tfrac{1}{2} T_{m-1} l_m^2 + \tfrac{1}{6} p_m l_m^3\right).\\ (4) & y_m = y_{m-1} + \alpha_{m-1} l_m + \tfrac{1}{\varepsilon_m}\left(\tfrac{1}{2}\mu_{m-1} l_m^2 - \tfrac{1}{6} T_{m-1} l_m^3 + \tfrac{1}{24} p_m l_m^4\right)\end{cases}$$

$$(B)\quad\begin{cases}(1\text{ bis}) & T = T_{m-1} - p_m x .\\ (2\text{ bis}) & \mu = \mu_{m-1} - T_{m-1} x + \tfrac{1}{2} p_m x^2 .\\ (3\text{ bis}) & \alpha = \alpha_{m-1} + \tfrac{1}{\varepsilon_m}\left(\mu_{m-1} x - \tfrac{1}{2} T_{m-1} x^2 + \tfrac{1}{6} p_m x^3\right).\\ (4\text{ bis}) & y = y_{m-1} + \alpha_{m-1} x + \tfrac{1}{\varepsilon_m}\left(\tfrac{1}{2}\mu_{m-1} x^2 - \tfrac{1}{6} T_{m-1} x^3 + \tfrac{1}{24} p_m x^4\right).\end{cases}$$

On doit remarquer que les formules (2) (3) et (4) se déduisent immédiatement des formules (2 bis), (3 bis) et (4 bis), quand on fait dans celles-ci $x = l_m$.

154. — Emploi successif des deux séries de formules. — Les quatre équations (A) montrent que si l'on connaît les quantités p_m, l_m, ε_m relatives à un intervalle de rang m ainsi que les valeurs P_m, T_m, μ_m, α_m et y_m à l'extrémité de droite de cet intervalle, on peut calculer facilement les valeurs T_{m-1}, μ_{m-1}, α_{m-1} et y_{m-1} à l'extrémité de gauche du même intervalle. De l'aide de ce groupe de valeurs et des quantités p_{m-1}, l_{m-1}, ε_{m-1} et P_{m-1} supposées connues on calculera le groupe de valeurs T_{m-2}, μ_{m-2}, α_{m-2}, y_{m-2} ; et ainsi de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en puisque l'on suppose qu'il y a n intervalles successifs, les quatre équations (A) se trouveront appliquées successivement n fois ; c'est-à-dire que l'on fera usage en tout de $4n$ équations pour la détermination des n groupes de valeurs relatives aux points qui séparent deux intervalles consécutifs dans toute l'étendue du solide.

Les groupes de valeurs qu'on vient d'indiquer étant déterminés, on pourra étudier les variations des quantités T, μ, α et γ dans l'étendue de chaque intervalle, et par conséquent dans toute l'étendue du solide, en appliquant les quatre équations (B) successivement à chacun des n intervalles qui composent ce solide.

155. — Énumération des quantités engagées dans les formules relatives aux extrémités des intervalles. —

Puisque le solide que l'on étudie contient n intervalles distincts, on peut avoir à considérer, dans le cas le plus général,

n valeurs de l,
n valeurs de ε,
n valeurs de p,
$n+1$ valeurs de P,
$n+1$ valeurs de T,
$n+1$ valeurs de μ,
$n+1$ valeurs de α,
$n+1$ valeurs de γ,

c'est-à-dire $8n+5$ quantités entre $4n$ équations.

Donc, pour que les $4n$ équations soient entièrement déterminées, il faut qu'on puisse se donner $4n+5$ des quantités que renferment ces équations ; ou, ce qui est plus

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

général, il faut s'arranger pour qu'il y ait autant d'équations que le problème comporte d'inconnues, de sorte que si la question contient plus de 4n inconnues on devra avoir recours, s'il y a lieu, à des équations complémentaires, tirées des conditions que renferme l'énoncé

Parmi les 8n+5 quantités à considérer on doit remarquer que les valeurs de l'une généralement connues : et comme ces valeurs sont les seules qui entrent à un degré supérieur au premier dans les équations (1), (2), (3) et (4) il s'ensuit que ces équations sont toutes du premier degré par rapport aux inconnues qu'elles renferment.

156. — **Relations complémentaires relatives aux points extrêmes.** — 1°. — Si l'on considère le point M_0 situé à l'extrémité de gauche d'un solide soumis à des efforts donnés, l'effort tranchant T_0, au point M_0, représente évidemment la somme de toutes les forces verticales situées à droite de ce point, et pour qu'il y ait équilibre en M_0, il faut que les deux forces P_0 et T_0 soient numériquement égales et de signes contraires ; donc on doit avoir la relation

$$T_0 + P_0 = 0 .$$

2°. — Lorsque le solide est libre à son extrémité de droite, les forces qui agissent à la droite du dernier appui sont nulles ; donc les valeurs T_n et μ_n qui dépendent de ces forces sont également nulles, et l'on a

$$T_n = 0 \quad , \quad \mu_n = 0 .$$

157. — **Distinction entre les charges connues P et les réactions P' des appuis.** — Les quantités désignées dans la première des formules (A) par la notation générale P_m, représentent, soit des charges appliquées en des points déterminés, charges

qui peuvent d'ailleurs être positives ou négatives ; soit des réactions déterminées par les appuis sur lesquels repose le solide. Les premières, qui sont toujours données, seront désignées d'une manière générale par la lettre P ; les autres, qui sont généralement des inconnues à déterminer, seront représentées par la lettre P'.

158.—Division du problème général en quatre cas distincts.—Il s'agit maintenant d'examiner les cas principaux qui peuvent se présenter et d'établir, pour chacun d'eux, l'ensemble des conditions moyennant lesquelles le problème est déterminé et peut être résolu. Les quatre cas suivants sont ceux dont l'étude présente le plus d'intérêt.

1°— Poutre encastrée à l'extrémité de gauche, et soumise à des forces déterminées en des points donnés.

2°— Poutre encastrée à l'extrémité de gauche, reposant en outre sur des appuis, et soumise à des forces données.

3°— Poutre encastrée à ses extrémités, reposant en outre sur des appuis intermédiaires et soumise à des forces données.

4°— Poutre non encastrée reposant sur des appuis et soumise à des forces données.

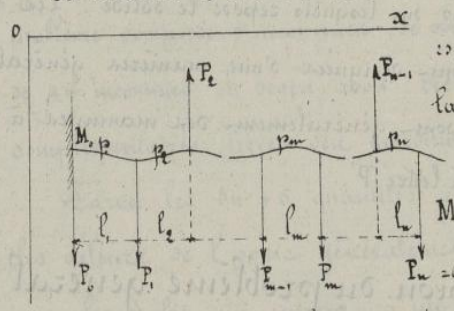
159.—1er Cas.—Poutre encastrée à l'extrémité de gauche et soumise à des forces déterminées en des points donnés.—Le solide étant partagé en n intervalles distincts, on sait d'abord qu'il y a : n valeurs données de l' ; $l'_1, l'_2, l'_3, \ldots l'_n$.

n valeurs données de p ; $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$.

n valeurs données de P ; $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La réaction P_0 due à l'encastrement en M_0, est inconnue, mais elle est liée à l'effort tranchant T_0 par la relation $P_0 + T_0 = 0$.



L'effort tranchant T_n, au point M_n, est nul ainsi que le moment fléchissant correspondant; on a donc $T_n = 0$, $\mu_n = 0$, comme on l'a montré au N° 156. Enfin on connaît l'ordonnée y_0 du point M_0, ainsi que l'inclinaison α_0 de la courbe au même point. Par conséquent les quantités à déterminer sont :

n valeurs de T :	$T_0, T_1, T_2 \ldots, T_{n-1}$
n valeurs de μ :	$\mu_0, \mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{n-1}$
n valeurs de α :	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$
n valeurs de y :	$y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$
1 valeur de P :	P_0.

En tout $4n+1$ valeurs inconnues.

De les quatre équations (A), appliquées successivement aux n intervalles considérés, donnent $4n$ équations.

La relation $T_0 + P_0 = 0$, donne ainsi 1 équation.

On a donc, en tout $4n+1$ équations.

Le nombre des équations étant égal à celui des inconnues, le problème est complètement déterminé, et la marche à suivre pour le résoudre est très simple. Voici l'usage que l'on fait de la série des quatre équations (A).

160. — Détermination successive des inconnues.

Application de la formule $T_m = T_{m-1} - P_m - p_m l_m$.

En faisant successivement dans cette formule,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$m = n$, $m = n-1$, $m = n-2$, ... , $m = 2$, $m = 1$,

on voit que :

De P_n , p_n , l_n on $T_n = 0$, on déduit T_{n-1} .

De P_{n-1} p_{n-1} , l_{n-1} on T_{n-1} , on déduit T_{n-2}

De P_{n-2} , p_{n-2} , l_{n-2} on T_{n-2} , on déduit T_{n-3}

.....

De P_1 , p_1 , l_1 on T_1 , on déduit T_0

Enfin de $T_0 + P_0 = 0$, on tire la valeur de P_0 .

D'après ce qui a été dit au N° 156 , on doit avoir comme vérification de la valeur de T_0 .

$$T_0 = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots + P_n + p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \ldots + p_n l_n ,$$

expression dans laquelle P_1, P_2, P_3, ..., P_n doivent entrer avec leurs signes respectifs.

Applications de la formule $\mu_m = \mu_{m-1} - T_{m-1} l_m + \frac{1}{2} p_m l_m^2$,

De l_n , p_n , T_{n-1} on $\mu_n = 0$, on déduit μ_{n-1} .

De l_{n-1} , p_{n-1} , T_{n-2} on μ_{n-1} , on déduit μ_{n-2} ,

.....

De l_1 , p_1 , T_0 on μ_1 , on déduit μ_0 .

Applications de la formule $\alpha_m = \alpha_{m-1} + \frac{1}{\xi_m} \left(\mu_{m-1} l_m - \frac{1}{2} T_{m-1} l_m^2 + \frac{1}{6} p_m l_m^3 \right)$.

En faisant successivement dans cette formule

$m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, ... , $m = n-1$, $m = n$,

Les valeurs T_0 , μ_0 , α_0 , ξ_1 , l_1 on p_1 donnent la valeur α_1 .

Les valeurs T_1 , μ_1 , α_1 , ξ_2 , l_2 on p_2 donnent la valeur α_2 ,

.....

Les valeurs T_{n-1} , μ_{n-1} , α_{n-1} , ξ_n , l_n on p_n donnent la valeur α_n .

Enfin, en suivant la même méthode dans l'emploi de la formule (4) on en partant d'abord des valeurs T_0 , μ_0 , α_0 , γ_0 , ξ_1 , l_1 on p_1 , qui sont, lire

17/1

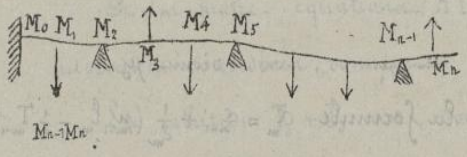
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

unes données, les autres calculées, on détermine successivement les valeurs

$$y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ \ldots\ldots\ y_{n-1}\ y_n$$

Tous ces résultats une fois obtenus on pourra se servir des formules (B) pour étudier les variations des quantités T, μ, & et y, successivement dans toute l'étendue de chacun des n intervalles qui composent la longueur du solide donné.

161 — 2ème Cas. — Poutre encastrée à l'extrémité de gauche, reposant en outre sur des appuis et soumise à des forces données. — S'il y a comme précédemment, n intervalles distincts et si l'on suppose en outre que le solide repose sur n' appuis différents, il est évident que parmi les n + 1 forces P du système, les n' réactions des appuis sont inconnues ainsi que la réaction due à l'encastrement. Ainsi, les forces verticales qui agissent aux points M_1, M_3, M_4, M_n, sont des forces connues, tandis que les réactions qui s'exercent aux points M_0, M_2, M_5, ... M_{n-1} sont des forces inconnues qui doivent être déterminées. Enfin les n intervalles distincts à considérer sont représentés par les longueurs M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, ... $M_{n-1}M_n$.



Comme dans le cas précédent on a $T_n = 0$, $\mu_n = 0$, $P_0 + T_0 = 0$ et l'on connaît y_0 ainsi que δ_0 ; les n' ordonnées des appuis étant aussi des quantités connues, on peut établir le tableau suivant des données et des inconnues qui entrent dans la question.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Quantités à considérer.	Nombre de quantités données.	Nombre de quantités inconnues.
n valeurs de ℓ	n	0
n " " $\mathcal{E}^0$	n	0
n " " p	n	0
$n+1$ " " P	$n-n'$	$n'+1$
$n+1$ " " T	1, $(T_n=0)$	n
$n+1$ " " μ	1, $(\mu_n=0)$	n
$n+1$ " " α	1 (α_0)	n
$n+1$ " " γ	$n'+1$	$n-n'$
$8n+5$	$4n+4$	$4n+1$

On voit que le nombre des inconnues est $4n+1$, comme dans le cas précédent ; mais la série des quatre équations (A), appliquée successivement aux n intervalles donnés, donne toujours $4n$ équations distinctes ; et en y joignant la relation $T_0+P_0=0$, on a en tout $4n+1$ équations entre les $4n+1$ inconnues. Donc le problème est encore complétement déterminé, mais la méthode à suivre pour obtenir les valeurs des inconnues, est un peu plus compliquée que dans le cas qui a déjà été examiné

162.—Détermination des inconnues par élimination entre les équations fondamentales.—Voici la méthode qu'on peut suivre pour résoudre la question.

Des n équations comprises dans la formule générale $T_m=T_{m-1}-p_m\cdot pl_m$, et de la relation $T_0+P_0=0$, on tire n valeurs de T et une valeur de P en fonction des n' inconnues restantes P.

On porte ces valeurs de T, ainsi que la valeur de l'une des inconnues P, dans les n équations comprises dans la formule générale

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\mu_m = \mu_{m-1} - T_{m-1} l_m + \frac{1}{2} p_m l_m^2 ,$$

en l'on en déduira les n valeurs de μ, lesquelles sont toujours exprimées en fonction des valeurs inconnues P.

Ces valeurs de μ, mises dans les n équations que renferme la formule générale $\alpha_m = \alpha_{m-1} + \frac{1}{\xi_m} \left(\mu_{m-1} l_m - \frac{1}{2} T_{m-1} l_m^2 + \frac{1}{6} p_m l_m^3 \right)$, permettront de calculer, encore en fonction des inconnues P, les n valeurs inconnues de α, valeurs que l'on portera ensuite dans les équations que contient la formule générale

$$y_m = y_{m-1} + \alpha_{m-1} l_m + \frac{1}{\xi_m} \left(\frac{1}{2} \mu_{m-1} l_m^2 - \frac{1}{6} T_{m-1} l_m^3 + \frac{1}{24} p_m l_m^4 \right) .$$

Celles-ci, toujours au nombre de n, renfermeront n' inconnues P, et $n-n'$ inconnues y, c'est-à-dire, en tout n inconnues entrant chacune au premier degré dans les n équations. On pourra alors en déduire :

1° Les $n-n'$ valeurs inconnues de y,

2° Les n' valeurs inconnues de P ;

et si l'on porte ces dernières dans les expressions des valeurs T, de μ et de α résultant des éliminations qui viennent d'être indiquées, on obtiendra finalement :

1° Les valeurs de $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_{m-1}$,

2° Les valeurs de $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$,

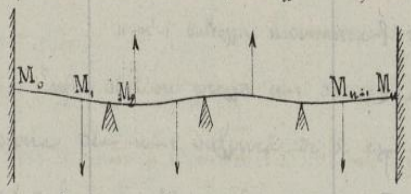
3° Les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$.

Les $4n+1$ inconnues, relatives aux points de séparation des intervalles étant ainsi déterminées, on pourra appliquer les formules (B) à l'étude des variations des quantités T, μ, α et y successivement dans toute l'étendue de chacun des n intervalles qui composent la longueur du solide.

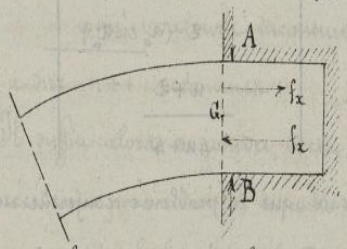
163. — 3e Cas. — Poutre encastrée à ses deux extrémités, reposant en outre sur des appuis intermédiaires et soumise à des forces données. — En admettant toujours qu'il y ait n intervalles distincts et que la poutre repose sur n' appuis intermédiaires,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on voit facilement que les n' réactions des appuis sont inconnues ainsi que les réactions P_0 et P_n aux points extrêmes M_0, M_n, et à gauche de ces points : donc le nombre des forces connues P se réduit à $n+1-(n'+2)$ ou $n-n'-1$.



Maintenant il faut remarquer que, par le fait de l'encastrement à droite de la section transversale qui passe en M_n, il se développe, entre les molécules en contact dans cette section, des actions f dont les composantes normales f_x sont, les unes des pressions et les autres des tensions. Ces forces agissent évidemment comme des forces extérieures relativement à la portion du solide située à gauche de la section considérée, et la somme de leurs moments élémentaires, par rapport à un axe projeté en G_1, par exemple, équivaut à un moment total μ_n qu'il faut ajouter aux moments inconnus μ_0, μ_1, μ_2, ..., μ_{n-1} relatifs aux points M_0, M_1, M_2, ... M_{n-1}.



Quant à l'effort tranchant T_n, à droite de la section transversale qui passe par M_n, on voit qu'il est dû aux réactions exercées verticalement en A et en B, l'une de bas en haut, l'autre en sens opposé. Dans l'état d'équilibre, ces deux réactions contraires sont nécessairement égales, donc leur somme algébrique est nulle et par conséquent on a $T_n = 0$; il résulte de là que les efforts tranchants à déterminer sont T_0, T_1, T_2, ..., T_{n-1} ; et l'on a d'ailleurs, comme précédemment, la relation $T_0 + P_0 = 0$.

Enfin, les inclinaisons α_0, α_n, et les ordonnées y_0, y_n, aux points M_0 et M_n sont connues ainsi que les ordonnées des appuis intermédiaires et l'on peut dresser le tableau suivant qui résume ce qui précède.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Quantités à considérer.		Nombre de quantités données.	Nombre de quantités inconnues.
n valeurs de	l	n	0
n " "	ξ	n	0
n " "	p	n	0
$n+1$ " "	P	$n-n'-1$	$n'+2$
$n+1$ " "	T	1 $(T_n=0)$	n
$n+1$ " "	μ	0	$n+1$
$n+1$ " "	α	2 $(\alpha_0$ et $\alpha_n)$	$n-1$
$n+1$ " "	y	$n'+2$	$n-n'-1$
$3n+5$		$4n+4$	$4n+1$

On voit, par ce tableau, que le problème renferme encore $4n+1$ inconnues, et puisque la relation $T_0+P_0=0$, jointe aux équations (A), donne aussi $4n+1$ équations entre ces inconnues, le problème est déterminé, et l'on peut employer le procédé d'élimination suivant :

164. — **Détermination des inconnues par élimination entre les équations fondamentales.** — D'abord, l'équation $P_0+T_0=0$, jointe aux n équations (1) de la série (A), donne $n+1$ équations, contenant n' valeurs inconnues de T et $n'+2$ valeurs inconnues de P. On peut donc en déduire les n valeurs de T et une valeur de P en fonction des $n'+1$ autres valeurs inconnues de P.

Ces n valeurs de T, mises dans les n équations (2) de la série (A) donnent n valeurs de μ en fonction des $n'+1$ valeurs de P, et d'une valeur restante de μ.

De même, si l'on porte les n expressions de μ dans les n équations (3) de la série (A), on obtient un groupe de n équations contenant :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$n'+1$ valeurs inconnues de P,

1 valeur inconnue de μ,

$n-n'-1$ valeurs inconnues de α.

Enfin si l'on prend $n-1$ de ces équations pour en déduire les expressions des $n-1$ valeurs de α en qu'on substitue ensuite dans les n équations (4) de la série (A), on forme un nouveau groupe de n équations qui contiennent

$n'+1$ valeurs inconnues de P,

1 valeur inconnue de μ,

$n-n'-1$ valeurs inconnues de y;

c'est-à-dire $n+1$ inconnues.

Il suffira alors de joindre à ces n équations l'équation restante du groupe précédent pour avoir un ensemble de $n+1$ équations entre $n+1$ inconnues, ce qui permet de calculer les valeurs de ces inconnues; en en substituant ces valeurs ainsi que celles qu'on en déduit successivement dans les groupes précédents, on obtient finalement les $4n+1$ inconnues relatives aux extrémités des intervalles successifs qui composent le solide.

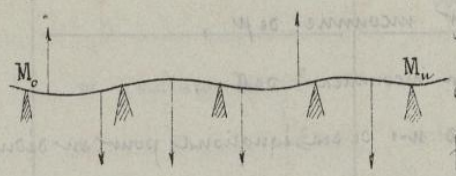
On pourra ensuite étudier les variations des quantités T, μ, α, y, dans toute l'étendue de chaque intervalle par l'application des formules de la série (B).

165. — 4e Cas — Poutre non encastrée reposant sur des appuis et soumise à des forces données. — Ce cas diffère du précédent en ce que les encastrements des extrémités sont remplacés par deux appuis; mais comme on suppose toujours qu'il y a n' appuis intermédiaires, il en résulte que le nombre des réactions inconnues P est encore $n'+2$.

Le solide n'étant soumis à aucune force extérieure à la droite du point

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

M_n, on a évidemment $T_n = 0$ et $\mu = 0$; et il est facile de voir que l'on a aussi $\mu_0 = 0$. On sait, en effet, d'après le numéro 108, que le moment fléchissant relatif à une section donnée, détermine, de la part des molécules situées à gauche de cette section, un moment résistant égal et de signe contraire au premier ; et puisque le solide est entièrement libre à gauche du point M_0, aucune résistance moléculaire ne peut se produire dans la section qui passe par ce point ; donc le moment résistant étant nul, il en est de même du moment fléchissant μ_0. Il faut d'ailleurs remarquer qu'au point M_0, on a toujours $T_0 + P_0 = 0$.



Cela posé, on forme immédiatement le tableau suivant des données et des inconnues qui entrent dans la question.

Quantités à considérer.	Nombre de quantités données.	Nombre de quantités inconnues.
n valeurs de l	n	0
n " " ε	n	0
n " " p	n	0
$n+1$ " " P	$n-n'-1$	$n'+2$
$n+1$ " " T	$1, (T_0 = 0)$	n
$n+1$ " " μ	$2 \begin{cases} (\mu_0 = 0) \\ (\mu_n = 0) \end{cases}$	$n-1$
$n+1$ " " α	0	$n+1$
$n+1$ " " γ	$n'+2$	$n-n'-1$
$8n+5$	$4n+4$	$4n+1$

Le nombre des inconnues étant toujours égal à $4n+1$ et les équations (A) jointes à la relation $P_0 + T_0 = 0$ donnant aussi $4n+1$ équations, le problème est entièrement déterminé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

166.— **Détermination des inconnues par élimination entre les équations fondamentales.** La méthode à suivre est analogue à celle qui a été exposée dans le cas précédent ; on commençant d'abord par les équations (1) de la série (A), équations auxquelles on joint la relation $P_0 + T_0 = 0$, on élimine successivement :

1°.— Les n valeurs inconnues de T en une valeur de P ;

2°.— Les $n-1$ valeurs de μ ;

3°.— Les valeurs de λ moins une.

On obtient ainsi un système de n équations contenant :

$n - n' - 1$, valeurs inconnues de y ,

n' valeurs inconnues de P ,

1 valeur inconnue de λ ,

c'est-à-dire n inconnues, dont on détermine facilement les valeurs. En remontant ensuite au groupe d'équations qui précèdent le dernier on achève de calculer toutes les autres inconnues.

Ces divers de valeurs étant obtenues, on peut étudier les variations de T, μ, x et y dans l'étendue de chacun des intervalles dont l'ensemble constitue le solide donné.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

167. — Tableau général des données et des inconnues dans les différents cas de la poutre à n travées ou intervalles

Désignation et nombre des quantités à considérer	1er Cas. Un encastrement. Pas d'appuis intermédiaires		2e Cas. Un encastrement n appuis intermédiaires		3e Cas. Deux encastrements n appuis intermédiaires		4e Cas. Pas d'encastrement n+2 appuis	
	Nombre de données	Nombre d'inconnues	Nombre de données	Nombre d'inconnues	Nombre de données	Nombre d'inconnues	Nombre de données	Nombre d'inconnues
n valeurs de l	n	0	n	0	n	0	n	0
n " ε	n	0	n	0	n	0	n	0
n " p	n	0	n	0	n	0	n	0
n+1 " P	n	0	n-n'	n'+1	n-n'-1	n'+2	n-n'-1	n'+2
n+1 " T	$T_n = 0$	n	$T_n = 0$	n	$T_n = 0$	n	$T_n = 0$	n
n+1 " μ	$\mu_n = 0$	n	$\mu_n = 0$	n	0	n+1	$\mu_0 = 0$ $\mu_n = 0$	n-1
n+1 " α	α_0	n	α_0	n	α_0 et α_n	n-1	0	n+1
n+1 " y	y_0	n	n'+1	n-n'	n'+2	n-n'-1	n'+2	n-n'-1
8n+5	4n+4	4n	4n+4	4n+1	4n+4	4n+1	4n+4	4n+1

168. — Méthode d'élimination spéciale au 4e cas de la poutre à n travées. — Les procédés d'élimination qui ont été indiqués précédemment sont généralement compliqués ; mais lorsqu'il s'agit d'une poutre reposant exclusivement sur un certain nombre de points d'appui, et que l'on connaît les ordonnées des extrémités de toutes les travées, ce qui est le cas le plus fréquent, on peut établir une formule générale qui ne contienne, comme inconnues, que les moments fléchissants aux extrémités de deux travées successives quelconques.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

169. — Relation entre les moments fléchissants aux extrémités de deux travées successives. — Les trois dernières formules de la série (A) étant écrites sous la forme

$$(2)\quad \mu_{m-1} - \mu_m = T_{m-1} l_m - \frac{1}{2} p_m l_m^2 ,$$

$$(3)\quad \alpha_m - \alpha_{m-1} = \frac{1}{\varepsilon_m}\left(\mu_{m-1} l_m - \frac{1}{2} T_{m-1} l_m^2 + \frac{1}{6} p_m l_m^3\right),$$

$$(4)\quad y_m - y_{m-1} = \alpha_{m-1} l_m + \frac{1}{\varepsilon_m}\left(\frac{1}{2}\mu_{m-1} l_m^2 - \frac{1}{6} T_{m-1} l_m^3 + \frac{1}{24} p_m l_m^4\right),$$

la valeur T_{m-1}, tirée de l'équation (2) et mise dans les équations (3) et (4) donne facilement deux expressions de la forme

$$(M)\quad 24(\alpha_m - \alpha_{m-1}) = \frac{1}{\varepsilon_m}\left(12\mu_{m-1} l_m + 12\mu_m l_m - 2 p_m l_m^3\right),$$

$$(N)\quad 24\frac{y_m - y_{m-1}}{l_m} = 24\alpha_m + \frac{1}{\varepsilon_m}\left(-4\mu_{m-1} l_m - 8\mu_m l_m + p_m l_m^3\right).$$

Ces équations s'appliquant à un intervalle de rang quelconque sont encore exactes quand on y remplace m par $m+1$, ce qui donne

$$(M_1)\quad 24(\alpha_{m+1} - \alpha_m) = \frac{1}{\varepsilon_{m+1}}\left(12\mu_m l_{m+1} + 12\mu_{m+1} l_{m+1} - 2 p_{m+1} l_{m+1}^3\right),$$

$$(N_1)\quad 24\frac{y_{m+1} - y_m}{l_{m+1}} = 24\alpha_{m+1} + \frac{1}{\varepsilon_{m+1}}\left(-4\mu_m l_{m+1} - 8\mu_{m+1} l_{m+1} + p_{m+1} l_{m+1}^3\right)$$

Maintenant si l'on retranche l'équation (N) de l'équation (N_1) et qu'au résultat on ajoute l'équation (M_1) on obtient, pour la relation demandée

$$24\left(\frac{y_{m+1} - y_m}{l_{m+1}} - \frac{y_m - y_{m-1}}{l_m}\right) = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\varepsilon_{m+1}}\left(8\mu_m l_{m+1} + 4\mu_{m+1} l_{m+1} - p_{m+1} l_{m+1}^3\right) \\ + \frac{1}{\varepsilon_m}\left(4\mu_{m+1} l_m + 8\mu_m l_m - p_m l_m^3\right) \end{array}\right\}. \quad (P)$$

Cette formule contenant les moments fléchissants relatifs aux extrémités de deux travées successives ne peut donner que $n-1$ équations distinctes entre les $n+1$ moments fléchissants quand on y fait successivement $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$, ..., $m = n$; mais comme on connaît les moments fléchissants extrêmes dont les valeurs sont $\mu_0 = 0$ et $\mu_n = 0$, il s'ensuit qu'il ne reste entre les $n-1$ équations, que $n-1$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

valeurs inconnues, c'est-à-dire, $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots\ldots, \mu_{n-1}$; par conséquent ces quantités peuvent être toutes calculées.

170.— **Formule de Mr Clapeyron.** — La formule donnée par Mr Clapeyron n'est qu'un cas particulier de la formule générale établie au Nº précédent. Si l'on suppose, en effet, que la section transversale soit la même dans chaque travée, et que la poutre soit homogène dans toute son étendue ; ce qui est le cas le plus ordinaire, on a $\varepsilon_{m+1} = \varepsilon_m = \ldots\ldots = \varepsilon$. Si, en outre, la différence de niveau de deux appuis consécutifs quelconques est constante, ce qui comprend le cas où tous ces appuis sont situés sur une même ligne horizontale, on a aussi, $(y_{m+1} - y_m) - (y_m - y_{m-1}) = 0$; alors la relation précédente se simplifie et peut être mise sous la forme,

$$p_m l_m^3 + p_{m+1} l_{m+1}^3 = 4\mu_{m-1} l_m + 8\mu_m (l_m + l_{m+1}) + 4\mu_{m+1} l_{m+1}.$$

171.— **Cas particulier de la formule de Mr Clapeyron.** — Si aux hypothèses sur lesquelles est fondée la formule précédente on ajoute la condition que la charge par mètre, uniformément répartie soit la même pour chaque travée, et qu'en outre toutes les travées soient de même longueur, on a $p_{m+1} = p_m = \ldots\ldots = p$; $l_{m+1} = l_m = \ldots = l$, et la dernière formule devient, en supprimant l'indice de la quantité l et en divisant ensuite par $2l$,

$$pl^2 = 2\mu_{m-1} + 8\mu_m + 2\mu_{m+1}.$$

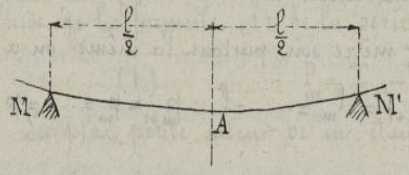
C'est sous cette forme simple que la formule de Mr Clapeyron est le plus fréquemment employée.

172.— **Formule de Mr Bertot.** — Cette formule qu'on déduit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de celle de M.r Clapeyron, sans connaître une nouvelle relation entre les moments fléchissants aux extrémités de deux travées successives, dans une poutre continue reposant sur des appuis, et non encastrée à ses extrémités.

Soit MN' l'une quelconque des travées de la poutre ; p étant la charge uniforme par mètre, si cette travée était entièrement libre à ses extrémités et que les appuis M et N' fussent de niveau,



la réaction de l'appui M' serait égale à $\frac{1}{2}pl$, c'est-à-dire, égale à la moitié de la charge pl, et le moment fléchissant pris par rapport à la section qui passerait au point A, supposé au milieu de la longueur l, se composant :

1°. — du moment fléchissant dû à la réaction $\frac{1}{2}pl$ exercée en M',

2°. — du moment fléchissant dû à la charge uniformément répartie sur la longueur AN'.

Ces deux moments étant de signes contraires, le moment cherché sera, d'après les formules des N.os 120 et 121,

$$M = \frac{1}{4}pl^2 - \frac{1}{8}pl^2 = \frac{1}{8}pl^2.$$

Si l'on admet que toutes les travées soient séparément libres au-delà de leurs extrémités, la formule précédente devient, pour deux travées successives, de rangs m et m+1,

$$M_m = \frac{1}{8}p_m l_m^2, \qquad M_{m+1} = \frac{1}{8}p_{m+1} l_{m+1}^2,$$

d'où

$$p_m l_m^3 = 8 l_m M_m, \qquad p_{m+1} l_{m+1}^3 = 8 l_{m+1} M_{m+1}.$$

En portant ces valeurs dans la formule générale de Clapeyron et en divisant ensuite par 4, on obtient la formule de M.r Bertot, c'est-à-dire,

$$2 l_m M_m + 2 l_{m+1} M_{m+1} = \mu_{m-1} l_m + 2\mu_m (l_m + l_{m+1}) + \mu_{m+1} l_{m+1};$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et l'on a ainsi une nouvelle relation, pour le 4e cas de la poutre à n travées, entre les moments fléchissants aux extrémités de deux travées successives, et les moments auxquels seraient soumises les sections au milieu de ces travées si elles étaient indépendantes.

173.— Cas particulier de la formule de Mr Bertot.—

Si les longueurs des travées sont toutes égales entre elles et que la charge uniforme par mètre soit partout la même, on a

$$l_{m+1} = l_m = \ldots = l \; ; \; p_{m+1} = p_m = \ldots = p \, ,$$

d'où résulte

$$M_{m+1} = M_m = \ldots = M \, ;$$

et la formule précédente se réduit à

$$4M = \mu_{m-1} + 4\mu_m + \mu_{m+1} \, ;$$

expression très-simple et facile à énoncer en langage ordinaire.

La formule générale de Bertot ainsi que le cas particulier qu'on vient d'en déduire ne sont évidemment que des modifications des formules correspondantes de Clapeyron ; les unes et les autres peuvent être également employées au calcul des moments fléchissants, dans les poutres posées sur des appuis de niveau, et l'on en fera plusieurs applications dans la suite de ce cours.

174.— Ordre à suivre dans l'emploi des formules précédentes.

1°.— Moments fléchissants.— On emploie la formule générale (P) du N° 169 si les appuis ne sont pas tous à la même hauteur ; et la formule générale de Clapeyron, ou celle de Bertot si les appuis sont tous à un même niveau.

2°.— Efforts tranchants.— Les moments fléchissants étant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

calculer comme il vient d'être dit, on obtient les efforts tranchants par la formule (2) de la série (A), mise sous la forme

$$(2) \qquad T_{m-1} = \frac{\mu_{m-1} - \mu_m}{l_m} + \frac{1}{2} p_m l_m .$$

3°. — Réactions des appuis. — On résout immédiatement la question à l'aide de la formule (1) de la série (A), formule qui donne

$$(1) \qquad P_m = T_{m-1} - T_m - p_m l_m .$$

La plus petite valeur de m étant $m = 0$, cette formule ne peut donner la valeur de P_0 ; mais on y supplée par la relation $P_0 + T_0 = 0$ qui donne P_0 quand on connaît T_0.

4°. — Inclinaisons aux points d'appuis. — Si l'on emploie la formule (M) du N°. 169, c'est-à-dire,

$$(M) \qquad 24 (\alpha_m - \alpha_{m-1}) = \frac{1}{\varepsilon_m} (12 \mu_{m-1} l_m + 12 \mu_m l_m - 2 p_m l_m^3),$$

on n'obtient que n équations distinctes entre les $n+1$ inconnues α ; mais comme l'une quelconque de ces valeurs peut être calculée par la relation (N) du N°. 169, relation qui est

$$(N) \qquad 24 \frac{y_m - y_{m-1}}{l_m} = 24 \alpha_m + \frac{1}{\varepsilon_m} (-4 \mu_{m-1} l_m - 8 \mu_m l_m + p_m l_m^3),$$

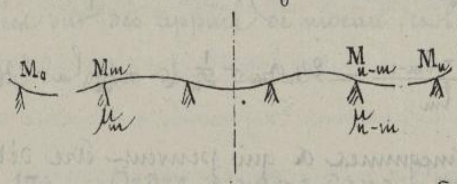
il ne reste que n inconnues α qui peuvent être déterminées par les n équations contenues dans la formule (M). On doit remarquer, d'ailleurs que la formule (N) permet de calculer directement toutes les inclinaisons, moins toutefois la valeur α_0 qui exigerait que l'on eût la valeur μ_{-1}, ce qui n'existe pas dans une poutre à n travées. Cependant, on verra, au N°. 176 que, dans le cas d'une poutre symétrique, on a, au signe près $\alpha_0 = \alpha_n$; et comme α_n peut être calculé par la formule (N), il s'ensuit que l'on pourra, dans

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce cas déterminer toutes les valeurs de a par le moyen de cette relation.

175. — **Vérification des valeurs résultant des calculs précédents.** — Si, après avoir déterminé les valeurs de T, on a eu les porte successivement dans les n équations que renferme la relation (4) de la série (A), on doit pouvoir retrouver toutes les valeurs des ordonnées, moins une ; et puisque ces valeurs sont connues à l'avance, si le calcul les reproduit exactement, on doit en conclure que les valeurs de toutes les autres quantités qui interviennent dans la question, sont aussi exactes. Mais ces vérifications sont laborieuses et l'on en indiquera, par la suite, de beaucoup plus simples, applicables aux cas particuliers qui seront examinés.

176. — **Simplification des calculs dans le cas d'une poutre symétrique.** — On dit qu'une poutre est symétrique par rapport à la verticale qui passe au milieu de sa longueur, lorsque deux travées de rangs m et n-m sont symétriquement placées



par rapport à cette verticale, quelles sont homogènes, de même section, de même longueur, et que la charge uniforme par mètre courant est la même. Dans ces conditions il est facile de montrer qu'il y a égalité ou symétrie entre les moments fléchissants, les inclinaisons et les réactions des appuis de deux points symétriques.

1° — **Egalité entre les moments fléchissants de deux points symétriques.** — Le moment fléchissant μ_m au point M_m est, par définition, la somme des moments de toutes les forces extérieures qui agissent à la droite de ce point ; et comme la poutre est en équilibre

la quantité μ_m doit être numériquement égale et de signe contraire à la somme des moments de toutes les forces extérieures situées à gauche de M_m ; mais il est évident que par le fait de la symétrie, les forces extérieures, à gauche du point M_m sont dans des conditions identiques à la droite du point $M_{n-m'}$; donc le moment $\mu_{n-m'}$ de ces dernières est égal et de signe contraire au moment μ_m, ce qu'on voulait prouver.

2°.—Symétrie des réactions dans la poutre symétrique. —Si l'on considère deux appuis de rangs m et n-m', les conditions dans lesquelles se trouvent ces appuis étant parfaitement identiques, on doit en conclure d'une manière absolue que les réactions qu'ils exercent sont égales.

3°.—Symétrie des inclinaisons en deux points symétriques.—On voit aussi immédiatement que les inclinaisons en deux points symétriques sont numériquement égales et de signe contraire, soit qu'il s'agisse de deux points d'appui ou de deux autres points symétriques quelconques.

Les propriétés que l'on vient de constater seront utilisées dans la suite soit à titre de vérification, soit comme moyen de simplification et d'abréviation dans les calculs.

Application des formules précédentes aux poutres à travées égales, également chargées et dont les appuis sont de niveau.

177.—Calculs des moments fléchissants.—Les deux formules immédiatement applicables à la question sont, d'après les numéros 171 et 173,

19

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

(1) $pl^2 = 2\mu_{m-1} + 8\mu_m + 2\mu_{m+1}$, (Formule de Clapeyron)

(2) $4.M = \mu_{m-1} + 4\mu_m + \mu_{m+1}$: (Formule de Berton)

1°.— Poutre à deux travées égales. — En faisant $m=1$ dans la formule (1) en remarquant que les deux moments extrêmes sont nuls, on a

$$pl^2 = 8\mu_1 \text{ , d'où } \mu_1 = \frac{1}{8} pl^2.$$

La formule (2) donne le même résultat quand on y fait $\mu_{m-1} = \mu_0 = 0$, $\mu_{m+1} = \mu_2 = 0$, en quand on remplace M par sa valeur $\frac{1}{8} pl^2$ trouvée au N°. 172 ; on a donc, pour les trois moments fléchissants

$$\mu_0 = 0 \text{ , } \mu_1 = \frac{1}{8} pl^2 \text{ , } \mu_2 = 0$$

2°.— Poutre à trois travées égales. — En posant successivement $m=1$ et $m=2$ dans la formule (1), on obtient

$$pl^2 = 8\mu_1 + 2\mu_2 \text{ , } pl^2 = 2\mu_1 + 8\mu_2 ,$$

ce qui donne immédiatement $\mu_1 = \frac{1}{10} pl^2$, $\mu_2 = \frac{1}{10} pl^2$. On pouvait d'ailleurs, d'après le 1° du N° 176 ne calculer qu'une seule de ces deux valeurs. Les quatre moments fléchissants sont donc :

$$\mu_0 = 0 \text{ , } \mu_1 = \frac{1}{10} pl^2 \text{ , } \mu_2 = \frac{1}{10} pl^2 \text{ , } \mu_3 = 0 .$$

3°.— Poutre à quatre travées égales. — Si l'on pose successivement $m=1$, $m=2$, $m=3$ dans la formule (1), il vient

Pour $m=1$, $pl^2 = 8\mu_1 + 2\mu_2$,

Pour $m=2$, $pl^2 = 2\mu_1 + 8\mu_2 + 2\mu_3$,

Pour $m=3$, $pl^2 = 2\mu_2 + 8\mu_3$;

en en remarquant que l'on a, par raison de symétrie, $\mu_1 = \mu_3$, on obtient facilement

$$\mu_0 = 0 \text{ , } \mu_1 = \frac{3}{28} pl^2 \text{ , } \mu_2 = \frac{2}{28} pl^2 \text{ , } \mu_3 = \frac{3}{28} pl^2 \text{ , } \mu_4 = 0 .$$

Ces résultats se déduiraient tout aussi simplement de la formule de Berton.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

178. — **Vérifications.** — La condition d'égalité des moments fléchissants de deux points symétriques ne sert pas ordinairement de vérification aux calculs puisque cette condition est généralement introduite dans les équations à l'aide desquelles on détermine ces quantités. Mais il est facile d'établir une formule générale pour la vérification des calculs : en effet si dans la formule

$$pl^2 = 2\mu_{m-1} + 8\mu_m + 2\mu_{m+1}$$

on fait successivement $m=0$, $m=1$, $m=2$, ..., $m=n$, on obtient la série

$$pl^2 = 2\mu_0 + 8\mu_1 + 2\mu_2 ,$$

$$pl^2 = 2\mu_1 + 8\mu_2 + 2\mu_3 ,$$

$$pl^2 = 2\mu_2 + 8\mu_3 + 2\mu_4 ,$$

.....

$$pl^2 = 2\mu_{n-2} + 8\mu_{n-1} + 2\mu_n .$$

En additionnant ces $n-1$ égalités membre à membre, puis en désignant la somme $\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_n$ par $\Sigma\mu$, en posant $\mu_0 = 0$, $\mu_n = 0$, on a

$$(n-1)\,pl^2 = 2\Sigma\mu - 2\mu_{n-1} + 8\Sigma\mu + 2\Sigma\mu - 2\mu_1 ,$$

d'où l'on tire

$$\Sigma\mu = \frac{1}{12}(n-1)\,pl^2 + \frac{1}{6}(\mu_1 + \mu_{n-1}) ;$$

ou, plus simplement, à cause de $\mu_{n-1} = \mu_1$,

$$\Sigma\mu = \frac{1}{12}\,pl^2 + \frac{1}{3}\,\mu_1 ,$$

formule qui peut servir à vérifier les valeurs des moments fléchissants, si la première valeur μ_1 est déterminée exactement.

179. — **Calcul des efforts tranchants.** — Les valeurs précédentes,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mises successivement dans la formule

$$T_{m-1} = \frac{\mu_{m-1} - \mu_m}{l_m} + \frac{1}{2} p l_m \text{ , ou plutôt, } T_{m-1} = \frac{\mu_{m-1} - \mu_m}{l} + \frac{1}{2} p l \text{ ,}$$

donnent très-facilement les résultats suivants en remarquant, d'ailleurs que l'effort tranchant à l'extrémité de droite est toujours nul, et que la formule n'est applicable que pour les efforts tranchants situés à gauche du dernier,

1°—Poutre à deux travées: $T_0 = \frac{3}{8} pl$, $T_1 = \frac{5}{8} pl$, $T_2 = 0$ ..

2°—Poutre à trois travées: $T_0 = \frac{4}{10} pl$, $T_1 = \frac{5}{10} pl$, $T_2 = \frac{6}{10} pl$, $T_3 = 0$.

3°—Poutre à quatre travées: $T_0 = \frac{11}{28} pl$, $T_1 = \frac{15}{28} pl$, $T_2 = \frac{13}{28} pl$, $T_3 = \frac{17}{28} pl$, $T_4 = 0$.

180.—Vérifications.—Si, dans la formule

$$T_{m-1} = \frac{\mu_{m-1} - \mu_m}{l} + \frac{1}{2} pl \text{ ,}$$

on pose successivement $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, ..., $m = n$, il vient, en remarquant que l'on a $\mu_0 = 0$, $\mu_n = 0$, $T_n = 0$,

$$T_0 = \frac{-\mu_1}{l} + \frac{1}{2} pl \text{ ,}$$

$$T_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{l} + \frac{1}{2} pl \text{ ,}$$

$$T_2 = \frac{\mu_2 - \mu_3}{l} + \frac{1}{2} pl \text{ ,}$$

.....

$$T_{n-1} = \frac{\mu_{n-1} - \mu_n}{l} + \frac{1}{2} pl \text{ ,}$$

$$T_n = 0 \text{ .}$$

En additionnant ces n égalités membre à membre, on trouve,

$$T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1} + T_n = \Sigma T = n \times \frac{1}{2} pl \text{ .}$$

Cette formule sert à vérifier les valeurs obtenues pour les efforts tranchants; en en l'appliquant successivement aux cas de deux, de trois et quatre travées, on trouve

$$\Sigma T = pl \text{ , } \Sigma T = \frac{3}{2} pl \text{ , } \Sigma T = 2pl \text{ ,}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

résultats que donnent aussi les trois séries de valeurs du N° 178.

181. — Calcul des réactions aux points d'appuis. — On a d'abord la relation comme $P_0 + T_0 = 0$ qui donne la valeur de P_0 en fonction de T_0 ; ensuite, la formule

$$P_m = T_{m-1} - T_m - pl \qquad (1)$$

donne successivement les valeurs $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots, P_n$ en fonction de $T_0, T_1, T_2, \ldots\ldots, T_n$.

On peut aussi obtenir T_m en fonction de μ_m. En effet la relation (2) de la série (A), appliquée à deux travées successives, donne

$$\mu_m = \mu_{m-1} - T_{m-1} l + \tfrac{1}{2} p l^2 ,$$

$$\mu_{m+1} = \mu_m - T_m l + \tfrac{1}{2} p l^2 ;$$

d'où, par soustraction,

$$T_{m-1} - T_m = \frac{1}{l} \left(\mu_{m+1} + \mu_{m-1} - 2\mu_m \right) ;$$

et comme la formule de Clapeyron peut s'écrire $\mu_{m+1} + \mu_{m-1} = \frac{1}{2} p l^2 - 4\mu_m$, il en résulte

$$T_{m-1} - T_m = \frac{1}{l} \left(\tfrac{1}{2} p l^2 - 6\mu_m \right) ;$$

cette expression, substituée dans l'équation (1), donne, pour la formule cherchée,

$$P_m = -\frac{1}{l} 6\mu_m - \tfrac{1}{2} pl . \qquad (2)$$

Ces formules (1) et (2) ne peuvent pas servir à calculer P_0, puisque la plus petite valeur de m est $m = 1$; mais on a toujours P_0, par la relation $P_0 = -T_0$. En outre la formule (2) employée à la détermination de P_n, donnerait un résultat inexact ; car la valeur μ_n dont dépend P_n, est fonction de μ_{n-1} et de μ_{n+1}, et il est évident que cette dernière valeur n'existe pas dans une poutre à n travées.

Maintenant, soit qu'on applique la formule (1) ou la formule (2), avec les restrictions qui viennent d'être indiquées, les valeurs de P sont faciles à déterminer ; et l'on abrège les calculs en tenant compte de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

propriété constatée au N° 176. Voici les résultats du calcul.

1°. Poutre à deux travées :

$$P_0 = -\frac{3}{8}pl', \quad P_1 = -\frac{10}{8}pl', \quad P_2 = -\frac{3}{8}pl.$$

2°. Poutre à trois travées :

$$P_0 = -\frac{4}{10}pl', \quad P_1 = -\frac{11}{10}pl', \quad P_2 = -\frac{11}{10}pl, \quad P_3 = -\frac{4}{10}pl.$$

3°. Poutre à quatre travées :

$$P_0 = -\frac{11}{28}pl', \quad P_1 = -\frac{32}{28}pl', \quad P_2 = -\frac{26}{28}pl', \quad P_3 = -\frac{32}{28}pl, \quad P_4 = -\frac{11}{28}pl.$$

182. — **Vérifications.** — La formule (1) du numéro précédent, appliquée successivement aux points d'appui $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$, donne, en y joignant la relation $P_0 = -T_0$,

$$\begin{aligned}
P_0 &= -T_0, \\
P_1 &= T_0 - T_1 - pl', \\
P_2 &= T_1 - T_2 - pl, \\
P_3 &= T_2 - T_3 - pl, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_{n-1} &= T_{n-2} - T_{n-1} - pl, \\
P_n &= T_{n-1} - T_n - pl'.
\end{aligned}$$

En additionnant toutes ces égalités membre à membre et en ayant égard à la relation $T_n = 0$, on obtient la formule de vérification

$$\Sigma P = -npl,$$

formule d'ailleurs évidente à priori ; car, pour que la poutre ne tombe pas, il faut que la charge totale npl soit équilibrée par une somme de réactions égale en de signe contraire à npl.

183. **Calcul des inclinaisons.** — Si, dans la formule (N) du N° 174, on pose $l_m = l'$, $p_m = p$, $\varepsilon_m = \varepsilon$ et $y_{0m} - y_{0m-1} = 0$, en qu'on divise les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

deux membres par 24, on obtient

$$\alpha_m = \frac{l}{24\,\mathcal{E}}\,(+\mu_{m-1} + 3\mu_m - pl^2).$$

Cette relation ne donnant pas directement la valeur α_0, on y fait successivement $m = n$, $m = n-1$, $m = n-2$, ..., $m = 1$, ce qui donne les valeurs α_n, α_{n-1}, α_{n-2}, ..., α_1. Quant à la valeur α_0, il suffit de remarquer que, d'après le n° 176, les inclinaisons de deux points symétriques sont égales et de signes contraires, et qu'ainsi l'on a $\alpha_0 = -\alpha_n$.

En suivant la marche qui vient d'être indiquée et en se servant des valeurs de μ déjà calculées, on obtient facilement les résultats suivants :

1° Poutre à deux travées :

$$\alpha_0 = \frac{1}{48\,\mathcal{E}}\,pl^3, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{48\,\mathcal{E}}\,pl^3.$$

2° Poutre à trois travées :

$$\alpha_0 = \frac{3}{120\,\mathcal{E}}\,pl^3, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{120\,\mathcal{E}}\,pl^3, \quad \alpha_2 = \frac{1}{120\,\mathcal{E}}\,pl^3, \quad \alpha_3 = -\frac{3}{120\,\mathcal{E}}\,pl^3.$$

3° Poutre à quatre travées :

$$\alpha_0 = \frac{4}{168\,\mathcal{E}}\,pl^3, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{168\,\mathcal{E}}\,pl^3, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{1}{168\,\mathcal{E}}\,pl^3, \quad \alpha_4 = -\frac{4}{168\,\mathcal{E}}\,pl^3.$$

184. — **Vérifications.** — Après avoir calculé toutes les valeurs de α, moins la première, par la formule précédente, on en obtient la vérification par la relation $\alpha_m = -\alpha_{n-m}$ qui doit subsister pour les inclinaisons en deux points symétriques quelconques. La valeur α_0, qui a été déduite de cette même condition de symétrie, peut être calculée directement par la formule (M) du n° 174 qui devient ici

$$24\,(\alpha_m - \alpha_{m-1}) = \frac{l}{\mathcal{E}}\,(12\,\mu_{m-1} + 12\,\mu_m - 2pl^2),$$

et dans laquelle il suffit de poser $m = 1$, puis de remplacer α_1, μ_0 et μ_1 par les valeurs trouvées précédemment.

185. — **Observation.** — Les exemples qui ont été traités aux n°s 177

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en suivant, suffisent pour montrer comment il faudrait diriger le calcul et faire les vérifications dans le cas d'une poutre ayant un nombre quelconque de travées égales, également chargées, avec appuis de niveau. Quelques-uns des résultats qui ont été calculés seront mis en usage dans la suite du cours, et il est utile de les réunir en un tableau qui permette de les retrouver facilement.

186. — Tableau des valeurs relatives aux points d'appui dans une poutre à travées égales, également chargées, avec appuis de niveau.

	Moments fléchissants	Efforts tranchants	Réactions des appuis	Inclinaisons de la ligne moyenne
Deux travées	$\mu_0 = 0$	$T_0 = \frac{3}{8}\,pl$	$P_0 = -\frac{3}{8}\,pl$	$\alpha_0 = \frac{1}{48}\cdot\frac{1}{E}\,pl^3$
	$\mu_1 = \frac{1}{8}\,pl^2$	$T_1 = \frac{5}{8}\,pl$	$P_1 = -\frac{10}{8}\,pl$	$\alpha_1 = 0$
	$\mu_2 = 0$	$T_2 = 0$	$P_2 = -\frac{3}{8}\,pl$	$\alpha_2 = -\frac{1}{48}\cdot\frac{1}{E}\,pl^3$
Trois travées	$\mu_0 = 0$	$T_0 = \frac{4}{10}\,pl$	$P_0 = -\frac{4}{10}\,pl$	$\alpha_0 = \frac{3}{120}\cdot\frac{1}{E}\,pl^3$
	$\mu_1 = \frac{1}{10}\,pl^2$	$T_1 = \frac{5}{10}\,pl$	$P_1 = -\frac{11}{10}\,pl$	$\alpha_1 = -\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{E}\,pl^3$
	$\mu_2 = \frac{1}{10}\,pl^2$	$T_2 = \frac{6}{10}\,pl$	$P_2 = -\frac{11}{10}\,pl$	$\alpha_2 = \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{E}\,pl^3$
	$\mu_3 = 0$	$T_3 = 0$	$P_3 = -\frac{4}{10}\,pl$	$\alpha_3 = -\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{E}\,pl^3$
Quatre travées	$\mu_0 = 0$	$T_0 = \frac{11}{28}\,pl$	$P_0 = -\frac{11}{28}\,pl$	$\alpha_0 = \frac{4}{168}\cdot\frac{1}{E}\,pl^3$
	$\mu_1 = \frac{3}{28}\,pl^2$	$T_1 = \frac{15}{28}\,pl$	$P_1 = -\frac{32}{28}\,pl$	$\alpha_1 = -\frac{1}{168}\cdot\frac{1}{E}\,pl^3$
	$\mu_2 = \frac{2}{28}\,pl^2$	$T_2 = \frac{13}{28}\,pl$	$P_2 = -\frac{26}{28}\,pl$	$\alpha_2 = 0$
	$\mu_3 = \frac{3}{28}\,pl^2$	$T_3 = \frac{17}{28}\,pl$	$P_3 = -\frac{32}{28}\,pl$	$\alpha_3 = \frac{1}{168}\cdot\frac{1}{E}\,pl^3$
	$\mu_4 = 0$	$T_4 = 0$	$P_4 = -\frac{11}{28}\,pl$	$\alpha_4 = -\frac{4}{168}\cdot\frac{1}{E}\,pl^3$

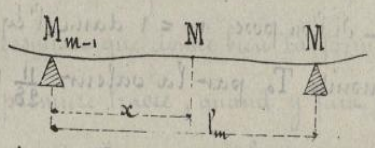
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Examen des valeurs que prennent les quantités T, μ, ℰ et y dans l'étendue de chacune des travées qui composent un solide donné. —

187. — **Rappel des formules fondamentales.** — Ces formules, qui forment la série (B) du N°. 153, sont les suivantes:

$$(B)\quad \begin{cases} (1\,bis) & T = T_{m-1} - p_m x\,, \\ (2\,bis) & \mu = \mu_{m-1} - T_{m-1} x + \frac{1}{2} p_m x^2\,, \\ (3\,bis) & \mathcal{E} = \mathcal{E}_{m-1} + \frac{1}{\varepsilon_m}\left(\mu_{m-1} x - \frac{1}{2} T_{m-1} x^2 + \frac{1}{6} p x^3\right), \\ (4\,bis) & y = y_{m-1} + \mathcal{E}_{m-1} x + \frac{1}{\varepsilon_m}\left(\frac{1}{2}\mu_{m-1} x^2 - \frac{1}{6} T_{m-1} x^3 + \frac{1}{24} p_m x^4\right) \end{cases}$$

on voit que les valeurs T, μ, ℰ et y qui correspondent à un point donné M d'une travée de rang quelconque m sont entièrement déterminées quand on connaît les valeurs T_{m-1}, μ_{m-1}, $\mathcal{E}_{m-1}$, y_{m-1} qui se rapportent à l'origine M_{m-1} de cette travée en se rappelant, d'ailleurs, que l'abscisse x du point M est toujours comptée à partir du point M_{m-1}.



188. — **Application à la poutre à quatre travées égales et également chargées reposant sur des appuis de niveau.** — Puisque les travées sont égales et également chargées, on peut supprimer l'indice des quantités données p_m et l_m et remplacer ces quantités par p et l. En outre, les appuis étant tous au même niveau, on peut supposer que l'axe des x passe par les points surlesquels repose la poutre, et dans ce cas on a $y_{m-1} = 0$.

Enfin, si l'on admet aussi que les travées soient toutes homogènes, et de même section on peut remplacer partout $\mathcal{E}_m$ par la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

valeur constante ε ; de sorte que les formules (B) préparées pour le cas que l'on étudie, sont

$$(B_1)\begin{cases} (1\text{ bis}) & T = T_{m-1} - px\,, \\ (2\text{ bis}) & \mu = \mu_{m-1} - T_{m-1}x + \frac{1}{2}px^2\,, \\ (3\text{ bis}) & \alpha = \alpha_{m-1} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\mu_{m-1}x - \frac{1}{2}T_{m-1}x^2 + \frac{1}{6}px^3\right), \\ (4\text{ bis}) & y = \alpha_{m-1}x + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\mu_{m-1}x^2 - \frac{1}{6}T_{m-1}x^3 + \frac{1}{24}px^4\right). \end{cases}$$

189. — Variations de l'effort tranchant. ———

On reconnaît d'abord à l'inspection de l'équation (1 bis) que la courbe représentative de l'effort tranchant est une ligne droite dont le coefficient d'inclinaison est, pour chaque travée, le même.

1re Travée. — Si l'on pose $m = 1$ dans l'équation (1 bis) et qu'on y remplace ensuite T_0 par la valeur $\frac{11}{28}pl$ du N° 186, il vient,

$$T = \frac{11}{28}pl - px = p\left(\frac{11}{28}l - x\right).$$

et l'on voit immédiatement que T diminue à mesure que x augmente.

Pour $x = 0$, on a, à droite de M_0, $T = \frac{11}{28}pl$,

Pour $x = \frac{11}{28}l$, on a, ——— $T = 0$

Pour $x = l$, on a, à gauche de M_1, $T = -\frac{17}{28}pl$.

2ème Travée. — On pose $m = 2$ dans l'équation (1 bis) et l'on y remplace ensuite T_1 par $\frac{15}{28}pl$, ce qui donne la formule

$$T = \frac{15}{28}pl - px = p\left(\frac{15}{28}l - x\right);$$

valeur qui se réduit à

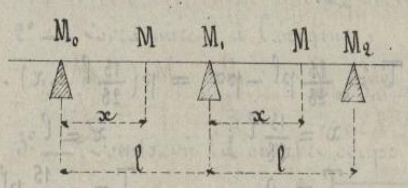
$$T = \frac{15}{28}pl$$

pour $x = 0$, comme cela doit être.

Observation. — Il semble au premier abord qu'en faisant $x = 0$ dans l'équation relative à la deuxième travée et $x = l$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans l'équation qui se rapporte à la première, on devrait retrouver la même valeur de T, ce qui n'a pas lieu, et ce qui ne doit pas être. Il faut se rappeler, en effet, que T_1 est la somme de toutes les forces verticales qui agissent à la droite du point M_1, et qu'aussitôt que l'on passe de la deuxième travée à la première, c'est-à-dire que l'on suppose que le point variable M passe à



gauche du point M_1, l'effort tranchant diminue brusquement d'une quantité égale à la réaction P_1, réaction qui s'exerce de bas en haut et dont la valeur numérique est ici égale à $\frac{32}{28} pl$; de sorte que l'effort tranchant au point M_1, et à droite de ce point, est $\frac{15}{28} pl$; tandis qu'à gauche du même point il a pour valeur $\frac{15}{28} pl - \frac{32}{28} pl$ ou $-\frac{17}{28} pl$, résultat que donne bien la formule $T = \frac{11}{28} pl - px$, relative à la première travée, quand on y fait $x = l$.

Ce changement brusque dans la valeur de l'effort tranchant se produit évidemment au point de passage d'une travée de rang quelconque n, à la travée de rang $n+1$ qui la suit immédiatement. En d'autres termes, la valeur de l'effort tranchant, dans le cas d'une charge uniformément répartie, est continue dans l'étendue d'une travée, et discontinue au point de séparation de deux travées successives.

Maintenant, si l'on reprend l'expression

$$T = \frac{15}{28} pl - px = p\left(\frac{15}{28} l - x\right)$$

qui convient à la seconde travée, on voit, comme pour la première travée, que T diminue lorsque x augmente ; et en posant successivement

$$x = 0 \quad , \quad x = \frac{15}{28} l \quad , \quad x = l \quad ,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on trouve

$$T = \frac{15}{28} pl \quad , \quad T = 0 \quad , \quad T = \frac{13}{28} pl .$$

3e Travée. — $T = \frac{13}{28} pl - px = p\left(\frac{13}{28} l - x\right)$.

Pour	$x = 0$,	$x = \frac{13}{28} l$,	$x = l$
on a	$T = \frac{13}{28} pl$,	$T = 0$,	$T = -\frac{15}{28} pl$

4e Travée — $T = \frac{17}{28} pl - px = p\left(\frac{17}{28} l - x\right)$.

Pour	$x = 0$,	$x = \frac{17}{28} l$.	$x = l$
on a	$T = \frac{17}{28} pl$	$T = 0$	$T = -\frac{11}{28} pl$.

190. — Variations du moment fléchissant. —

On sait, par la formule

$$R = \frac{\nu\mu}{I} - \frac{N}{\omega} ,$$

que l'effort moléculaire R, par mètre carré, dans une section donnée est d'autant plus grand que la valeur correspondante de μ est elle-même plus grande, et par conséquent il importe d'examiner comment varie la quantité μ dans l'étendue de chaque travée et de déterminer les points pour lesquels cette quantité devient un maximum.

La formule préparée pour cet objet est la relation (2 bis) de la série (B_1), c'est-à-dire,

$$\mu = \mu_{m-1} - T_{m-1} x + \frac{1}{2} p x^2 . \quad (2\ bis)$$

La courbe représentée par cette équation est une parabole ordinaire, dont l'axe est perpendiculaire à l'axe des x, et il est nécessaire de déterminer les éléments principaux de cette courbe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1°. — Coefficient d'inclinaison de la tangente

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = px - T_{m-1}$$

2°. — Coordonnées à l'origine :

$$x = 0, \quad \mu = \mu_{m-1}.$$

3°. — Points où la courbe coupe l'axe des x :

$$x = \frac{1}{p}\left(T_{m-1} \pm \sqrt{T_{m-1}^2 - 2p\mu_{m-1}}\right), \quad \mu = 0$$

4°. — Coordonnées du sommet :

$$x' = \frac{T_{m-1}}{p}, \qquad \mu' = \mu_{m-1} - \frac{T_{m-1}^2}{2p},$$

On remarquera que, en égard à la disposition de la courbe relativement aux axes coordonnés, l'ordonnée μ' du sommet est en valeur absolue, un maximum pour la région de la courbe à laquelle appartient ce point.

191. — **Applications.** — Les valeurs de μ dans, comme précédemment, symétriques deux à deux par rapport à la verticale qui passe au milieu de la longueur de la poutre, il suffit de construire les courbes représentatives des variations de μ pour les deux travées seulement et de reproduire symétriquement ces courbes pour les deux autres travées.

1re Travée. — Données : $m = 1$, $\mu_0 = 0$, $T_0 = \frac{11}{28} pl$.

Equation de la courbe : $\mu = -\frac{11}{28} plx + \frac{1}{2} px^2$.

Eléments principaux.

$x = 0$	$\mu = 0$	$\frac{\partial \mu}{\partial x} = -0,3928\, pl$.
$x' = 0,3928\, l$	$\mu' = -0,0772\, pl^2$	$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ (minimum de μ).
$x = 0,7857\, l$	$\mu = 0$	$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0,3928\, pl$.
$x = l$	$\mu = \frac{3}{28} pl^2 = 0,1071\, pl^2$	$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0,6071\, pl$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2e Travée. — Donnée : $m = 2$, $\mu_1 = \frac{3}{28} pl^2$, $T_1 = \frac{15}{28} pl$.

Équation de la courbe : $\mu = \frac{3}{28} pl^2 - \frac{15}{28} plx + \frac{1}{2} px^2$.

Éléments principaux.

$x = 0$ ——— $\mu = \frac{3}{28} pl^2 = 0,1071\, pl^2$ $\frac{\partial \mu}{\partial x} = -0,5357\, pl$.

$x = 0,2660\, l$ ——— $\mu = 0$, ——————— $\frac{\partial \mu}{\partial x} = -0,2690\, pl$.

$x = 0,5350\, l$ ——— $\mu = -0,0363\, pl^2$ ——————— $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ (minimum de μ).

$x = 0,8050\, l$ ——— $\mu = 0$ ——————— $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0,2696\, pl$.

$x = l$ ——— $\mu = \frac{2}{28} pl^2 = 0,0714\, pl^2$ ——— $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0,4643\, pl$.

Bien que les variations de μ soient caractérisées par une parabole spéciale pour chaque travée, ces courbes ont cependant un point commun correspondant au passage d'une travée à celle qui la suit immédiatement ; ce qui montre que les valeurs de μ se succèdent d'une manière continue, non seulement dans l'étendue d'une même travée, mais encore dans le passage d'une travée à la suivante. Cela tient à ce que le moment de la réaction exercée par le point d'appui qui sépare les deux travées que l'on considère, n'intervient dans la valeur de μ que d'une manière continue, en commençant par la valeur zéro, et l'on peut regarder les paraboles qui représentent les différentes séries de valeurs de μ comme formant une sorte de courbe continue qui présenterait un point angulaire au passage d'une travée à l'autre. (Voir plus loin les épures relatives aux poutres à quatre et à deux travées égales.)

192. — Maximum du moment fléchissant. — On reconnaît,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à l'inspection des valeurs calculées au N° précédent que la plus grande valeur de μ, considérée indépendamment de son signe, n'est pas l'ordonnée μ' du sommet de la parabole représentative des moments fléchissants, mais bien l'ordonnée μ dont la valeur est égale à $\frac{3}{28}\,pl^2$ et qui correspond à $x=l$ pour la première travée, ou à $x=0$ pour la deuxième travée. Ainsi, dans une poutre à quatre travées égales, également chargées, avec appuis de niveau, la section pour laquelle le moment fléchissant est le plus grand, est celle qui correspond au second point d'appui de cette poutre. A ce maximum du moment fléchissant correspond aussi le maximum de la courbure du solide, ainsi qu'on le voit par la relation connue $\frac{1}{\rho} = \frac{\mu}{EI}$.

Le moment résistant des forces moléculaires, dans une section donnée d'une poutre quelconque, étant toujours égal et de signe contraire au moment fléchissant correspondant, il faut nécessairement, si l'on veut qu'une poutre chargée résiste convenablement, que sa section transversale soit calculée en ayant égard à la plus grande valeur absolue que prend le moment fléchissant dans toute l'étendue du solide, quel que soit d'ailleurs le signe de cette quantité.

194. — **Variations de l'inclinaison.** — L'équation à considérer est la relation (3 bis) de la série (B_1), c'est-à-dire,

$$\iota = \iota_{m-1} + \frac{1}{E}\left(\mu_{m-1}\,x - \frac{1}{2}T_{m-1}\,x^2 + \frac{1}{6}\,px^3\right).$$

Cette équation qui représente une parabole du troisième ordre, a pour dérivée

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\mu_{m-1} - T_{m-1}x + \frac{1}{2}px^2\right).$$

Les éléments principaux à déterminer sont :

1° — Les valeurs de x pour lesquelles on a $\alpha = 0$, parce que ces valeurs sont celles pour lesquelles l'ordonnée de la ligne moyenne de la poutre est un maximum ou un minimum.

2° — La valeur de x auxquelles correspond un maximum ou un minimum de α, parce qu'à cette valeur répond un point d'inflexion de la ligne moyenne de la poutre.

Il faut donc trouver les racines des équations

$$\alpha_{m-1} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\mu_{m-1}x - \frac{1}{2}T_{m-1}x^2 + \frac{1}{6}px^3\right) = 0. \qquad (1)$$

$$\mu_{m-1} - T_{m-1}x + \frac{1}{2}px^2 = 0. \qquad (2)$$

195. — 1re Travée. — L'équation (2) devient, en y remplaçant μ_{m-1} et T_{m-1} par leurs valeurs,

$$\frac{1}{2}px^2 - \frac{11}{28}pl'x = 0,$$

ce qui donne

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{22}{28}l'.$$

Donc la ligne moyenne doit avoir une inflexion au point dont l'abscisse est $\frac{22}{28}l$. L'inflexion qui correspondrait au point dont l'abscisse est $x = 0$, n'est pas à considérer, puisque la ligne moyenne n'existe pas à gauche de ce point.

L'équation (1), appliquée à la première travée, se réduit à

$$\alpha_0 + \frac{1}{\varepsilon}\left(-\frac{1}{2}T_0x^2 + \frac{1}{6}px^3\right) = 0;$$

et si l'on remplace l'inconnue x par une autre inconnue t, liée à la première par la relation $x = \frac{l}{t}$, le terme du second degré par rapport à l'inconnue disparaît, et l'équation prend la forme plus simple

$$6\alpha_0\varepsilon t^3 - 3T_0l^2t + pl^3 = 0,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en comme on a $\mathcal{L}_0 = \frac{4}{168}\frac{pl^3}{\varepsilon}$. $T_0 = \frac{11}{28}pl$, il vient, toutes déductions faites,

$$4t^3 - 33t + 28 = 0$$

d'où $t = 2,27428$, $t = -3,2278$, $t = 0,95374$;

et par suite,

$$x = 0,4397\,l \quad , \quad x = -0,3098\,l \, , \quad x = 1,0486\,l \, .$$

La valeur $x = 0,4397\,l$ est évidemment la seule qui convienne à la question, x ne pouvant être ni négatif ni plus grand que l. Cette valeur de x correspond à un minimum car, mise dans la dérivée seconde $\frac{d^2\mathcal{L}}{dx^2}$, elle donne un résultat positif.

2e — Travée. — L'équation (2) du N° précédent, devient, pour la deuxième travée,

$$14x^2 - 15lx + 3l^2 = 0 \, ,$$

d'où $x = 0,2660\,l$, $x = 0,8050\,l$;

ce qui montre que la courbe moyenne de la poutre a deux points d'inflexion dans la seconde travée.

Les abscisses correspondant à un maximum ou à un minimum de la ligne moyenne dans la seconde travée pourraient être déduites de l'équation (1) appliquée à cette travée, ce qui conduirait comme précédemment, à une équation du troisième degré. On simplifie le calcul en remarquant que, par le fait de la symétrie des inclinaisons, on peut appliquer l'équation (1) à la troisième travée, pour laquelle on a $\alpha_2 = 0$, ce qui fait disparaître le terme indépendant de x, et l'équation devient alors

$$\frac{2}{28}pl^2x - \frac{13}{2\times 28}plx^2 + \frac{1}{6}px^3 = 0 \, ,$$

21/1

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou simplement, $(28x^2 - 39lx + 12l^2)x = 0$;

équation dont les trois racines sont

$$x = 0 , \quad x = 0,4589l , \quad x = 0,9342l .$$

Mais il faut bien remarquer que ces valeurs, pour être applicables à la seconde travée, doivent être comptées en allant de droite à gauche, à partir de l'extrémité de droite de cette travée de sorte que pour avoir des valeurs qui puissent être comptées à partir de l'extrémité de gauche, il faut que les valeurs précédentes soient toutes retranchées de l, ce qui donne alors

$$x = 0,0658l , \quad x = 0,5411l , \quad x = l$$

Il est facile de s'assurer que la première de ces quantités correspond à un maximum pour y ; la deuxième à un minimum, et la troisième qui se rapporte au point milieu de la poutre à un maximum.

196. — Variations de l'ordonnée. — Les valeurs que prend l'ordonnée, dans l'étendue de chaque travée, sont fournies par l'équation

$$y = \mathfrak{L}_{m-1}x + \frac{1}{\mathcal{E}}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{m-1}x^2 - \frac{1}{6}T_{m-1}x^3 + \frac{1}{24}px^4\right), \qquad (4\text{ bis})$$

qui est une parabole du quatrième ordre ; et l'on connaît déjà, par les calculs précédents :

1°. — Les abscisses correspondant aux points d'inflexion de la courbe.

2°. — Les abscisses des points pour lesquels l'ordonnée est un maximum ou un minimum.

Par conséquent, si l'on substitue ces valeurs de x dans l'équation (4 bis) on obtient les coordonnées des points les plus importants de la courbe. Cependant il importe de déterminer encore

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les points où la courbe de la ligne moyenne de la poutre rencontre l'axe des x dans chacune des deux premières travées. Ces points ayant pour abscisses les racines de l'équation,

$$\alpha_{m-1} x + \frac{1}{\mathcal{E}} \left(\frac{1}{2} \mu_{m-1} x^2 - \frac{1}{6} T_{m-1} x^3 + \frac{1}{24} p x^4 \right) = 0 . \qquad (5)$$

il faut calculer ces racines successivement pour $m = 1$ et pour $m = 2$.

1re Travée. — En remplaçant α_0, μ_0 et T_0 par leurs valeurs dans l'équation (5) et en mettant à part la solution $x = 0$, on obtient, après les réductions convenables,

$$7x^3 - 11lx^2 + 4l^3 = 0.$$

Si l'on pose $x = lz$, cette équation prend la forme plus simple

$$7z^3 - 11z^2 + 4 = 0 .$$

Cette dernière équation est évidemment satisfaite pour $z = 1$; et si l'on élimine cette racine il vient

$$7z^2 - 4z - 4 = 0 , \text{ d'où } z = \frac{1}{7}(2 \pm \sqrt{32}).$$

L'une de ces racines doit être rejetée comme étant négative; l'autre ne convient pas non plus parcequ'elle conduit à une valeur de x plus grande que l. Il résulte de là que la seule valeur admissible est $z = 1$, ce qui donne $x = l$, d'où l'on conclut que la ligne moyenne ne rencontre l'axe des x qu'aux deux extrémités de la première travée.

2e Travée. — La relation (5), appliquée à la deuxième travée, conduirait à une équation du troisième degré; mais si l'on applique cette relation à la troisième travée qui est entièrement symétrique à la deuxième, l'équation à résoudre n'est plus que du second degré à cause du terme α_2 qui se réduit à zéro; on obtient alors, toute réduction faite,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$7x^2 - 13lx + 6l^2 = 0,$$

d'où $x = \frac{l}{14}(13 \pm 1)$; c'est-à-dire,

$$x = \frac{6}{7}l = 0.8514\,l \text{ , et } x = l.$$

Ces deux valeurs, retranchées de l, donnent pour les racines comptées de gauche à droite, dans la seconde travée,

$$x = 0 \text{ , } \qquad x = 0,1429\,l.$$

Il ne reste plus maintenant qu'à faire le calcul de toutes les valeurs de y correspondant aux abscisses déterminées précédemment pour avoir l'ensemble des valeurs qui se rapportent aux points principaux de la ligne moyenne de la poutre dans les deux premières travées.

197. — Formules applicables aux points intermédiaires et qui évitent le calcul des efforts tranchants. —

En éliminant T_{m-1} entre les relations

$$(2) \qquad \mu_m = \mu_{m-1} - T_{m-1} l_m + \frac{1}{2} p_m l_m^2,$$

$$(2\text{ bis}) \qquad \mu = \mu_{m-1} - T_{m-1} x + \frac{1}{2} p_m x^2,$$

on obtient l'équation

$$(6\text{ bis}) \qquad \mu = \frac{1}{2} p_m x^2 - \left(\frac{1}{2} p_m l_m^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right)\frac{x}{l_m} + \mu_{m-1}$$

qui permet de calculer les moments fléchissants relatifs aux points intermédiaires sans qu'il soit nécessaire d'avoir préalablement les valeurs des efforts tranchants.

Les équations qui donnent x en y sont également faciles à obtenir. En effet, si l'on remplace μ par la valeur (6 bis) dans la relation comme $Ef''(x) = \mu$ et qu'on multiplie par dx, il vient, en intégrant, et remarquant que pour $x = 0$ la constante est égale à ε_{m-1},

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$(7\text{ bis})\qquad \alpha = \alpha_{m-1} + \frac{1}{\mathcal{E}}\left[\frac{1}{6}p_m x^3 - \left(\frac{1}{2}p_m l_m^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right)\frac{x^2}{2l_m} + \mu_{m-1}x\right].$$

En multipliant de nouveau par dx et prenant l'intégrale on trouve

$$(8\text{ bis})\qquad y = y_{m-1} + \alpha_{m-1}x + \frac{1}{\mathcal{E}}\left[\frac{1}{24}p_m x^4 - \left(\frac{1}{2}p_m l_m^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right)\frac{x^3}{6l_m} + \frac{1}{2}\mu_{m-1}x^2\right].$$

On peut encore, au moyen de l'équation (6 bis), obtenir une relation qui donne la valeur de T indépendamment de T_{m-1}; il suffit, pour cela, de se rappeler que l'on a

$$T = -\frac{d\mu}{dx},$$

et l'on trouve immédiatement

$$(5\text{ bis})\qquad T = -p_m x + \frac{1}{l_m}\left(\frac{1}{2}p_m l_m^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right).$$

Les valeurs particulières de T, μ, α et y qui ont été calculées précédemment pour les points intermédiaires des deux premières travées dans le cas d'une poutre à quatre travées égales, également chargées, avec appuis de niveau, auraient pu être déterminées tout aussi facilement à l'aide des formules (5 bis), (6 bis), (7 bis) et (8 bis).

L'ensemble des valeurs numériques ainsi calculées, est donné dans le tableau suivant. A la suite de l'épure qui accompagne ce tableau, on a placé un second tableau et une seconde épure représentative des valeurs analogues aux précédentes, dans le cas d'une poutre à deux travées égales, également chargées, avec appuis de niveau.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

198. — Tableau résumant les calculs relatifs aux deux premières travées d'une poutre à quatre travées égales avec appuis de niveau.

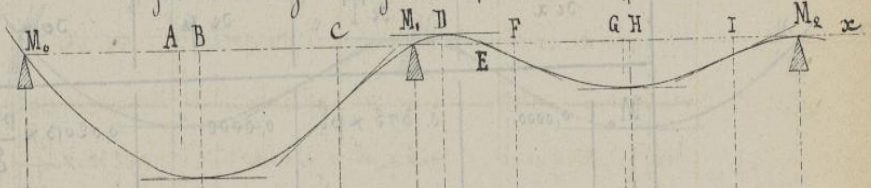
Valeurs de x		Valeurs de T	Valeurs de μ	Valeurs de α	Valeurs de y.
M_0	0,0000	$0,3928 \times pl$	0,0000	$0,0238 \times \frac{pl^3}{\mathcal{E}}$	0,0000
A	$0,3928 \times l$	0,0000	$-0,0772 \times pl^2$	$0,0037 \times \frac{pl^3}{\mathcal{E}}$	$0,0063 \times \frac{pl^4}{\mathcal{E}}$
B	$0,4397 \times l$	$-0,0469 \times pl$	$-0,0761 \times pl^2$	0,0000	$0,0064 \times \frac{pl^4}{\mathcal{E}}$
C	$0,7856 \times l$	$-0,3928 \times pl$	0,0000	$-0,0167 \times \frac{pl^3}{\mathcal{E}}$	$0,0028 \times \frac{pl^4}{\mathcal{E}}$
M_1	$1,0000 \times l$	$-0,6071 \times pl$	$0,1071 \times pl^2$	$-0,0060 \times \frac{pl^3}{\mathcal{E}}$	0,0000
M_1	0,0000	$0,5357 \times pl$	$0,1071 \times pl^2$	$-0,0060 \times \frac{pl^3}{\mathcal{E}}$	0,0000
D	$0,0638 \times l$	$0,4699 \times pl$	$0,0740 \times pl^2$	0,0000	$-0,00016 \times \frac{pl^4}{\mathcal{E}}$
E	$0,1429 \times l$	$0,3928 \times pl$	$0,0408 \times pl^2$	$0,0044 \times \frac{pl^3}{\mathcal{E}}$	0,0000
F	$0,2660 \times l$	$0,2696 \times pl$	0,0000	$-0,0068 \times \frac{pl^3}{\mathcal{E}}$	$0,00073 \times \frac{pl^4}{\mathcal{E}}$
G	$0,5356 \times l$	0,0000	$-0,0363 \times pl^2$	$0,00001 \times \frac{pl^3}{\mathcal{E}}$	$0,0019 \times \frac{pl^4}{\mathcal{E}}$
H	$0,5411 \times l$	$-0,0054 \times pl$	$-0,0264 \times pl^2$	0,0000	$0,00191 \times \frac{pl^4}{\mathcal{E}}$
I	$0,8050 \times l$	$-0,2696 \times pl$	0,0000	$-0,0063 \times \frac{pl^3}{\mathcal{E}}$	$0,0008 \times \frac{pl^4}{\mathcal{E}}$
M_2	$1,0000 \times l$	$-0,4642 \times pl$	$0,0714 \times pl^2$	0,0000	0,0000

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

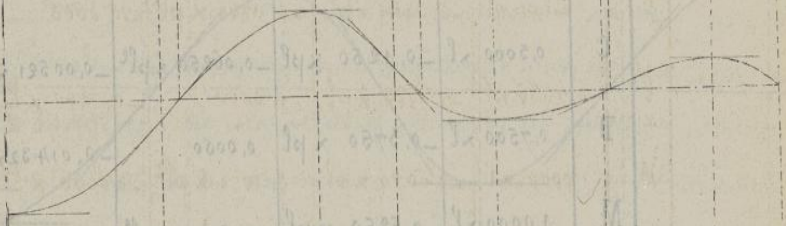
199. Poutre à quatre travées égales avec appuis de niveau.

Epure pour les deux premières travées.

Figure de la ligne moyenne après la déformation.

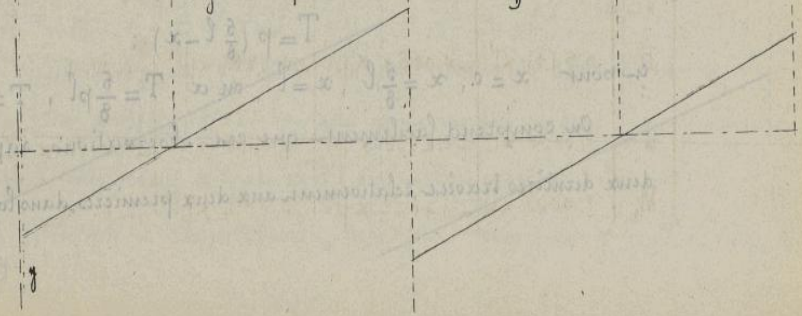


Courbes représentatives des inclinaisons.



Courbes représentatives des moments fléchissants.

Lignes représentatives des efforts tranchants



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

200 ___ Tableau résumant les calculs relatifs à la première travée d'une poutre à deux travées égales, avec appuis de niveau.

	Valeurs de x	Valeurs de T	Valeurs de μ	Valeurs de α	Valeurs de y
M_0	0,0000	$0,375 \times pl$	0,0000	$0,02013 \times \frac{pl^3}{\mathcal{E}}$	0,0000
A	$0,3750 \times l$	0,0000	$-0,07031 \times pl^2$	$0,00325 \times \frac{pl^3}{\mathcal{E}}$	$0,00534 \times \frac{pl^4}{\mathcal{E}}$
B	$0,42154 \times l$	$-0,04655 \times pl$	$-0,06922 \times pl^2$	0,0000	$0,00542 \times \frac{pl^4}{\mathcal{E}}$
C	$0,5000 \times l$	$-0,1250 \times pl$	$-0,06250 \times pl^2$	$-0,00521 \times \frac{pl^3}{\mathcal{E}}$	$0,00521 \times \frac{pl^4}{\mathcal{E}}$
D	$0,7500 \times l$	$-0,3750 \times pl$	0,0000	$-0,01432 \times \frac{pl^3}{\mathcal{E}}$	$0,00244 \times \frac{pl^4}{\mathcal{E}}$
M_1	$1,0000 \times l$	$-0,6250 \times pl$	$0,12500 \times pl^2$	0,0000	0,0000

Toutes les valeurs relatives aux ordonnées ou aux moments fléchissants se reproduisent symétriquement dans la seconde travée ; les valeurs de x, en deux points symétriques, sont égales et de signes contraires. Quant aux valeurs de T, il n'y a aucune espèce de symétrie entre la première et la seconde travée ; en effet, la formule relative aux efforts tranchants, dans la seconde travée, est

$$T = p\left(\frac{5}{8}l - x\right) ;$$

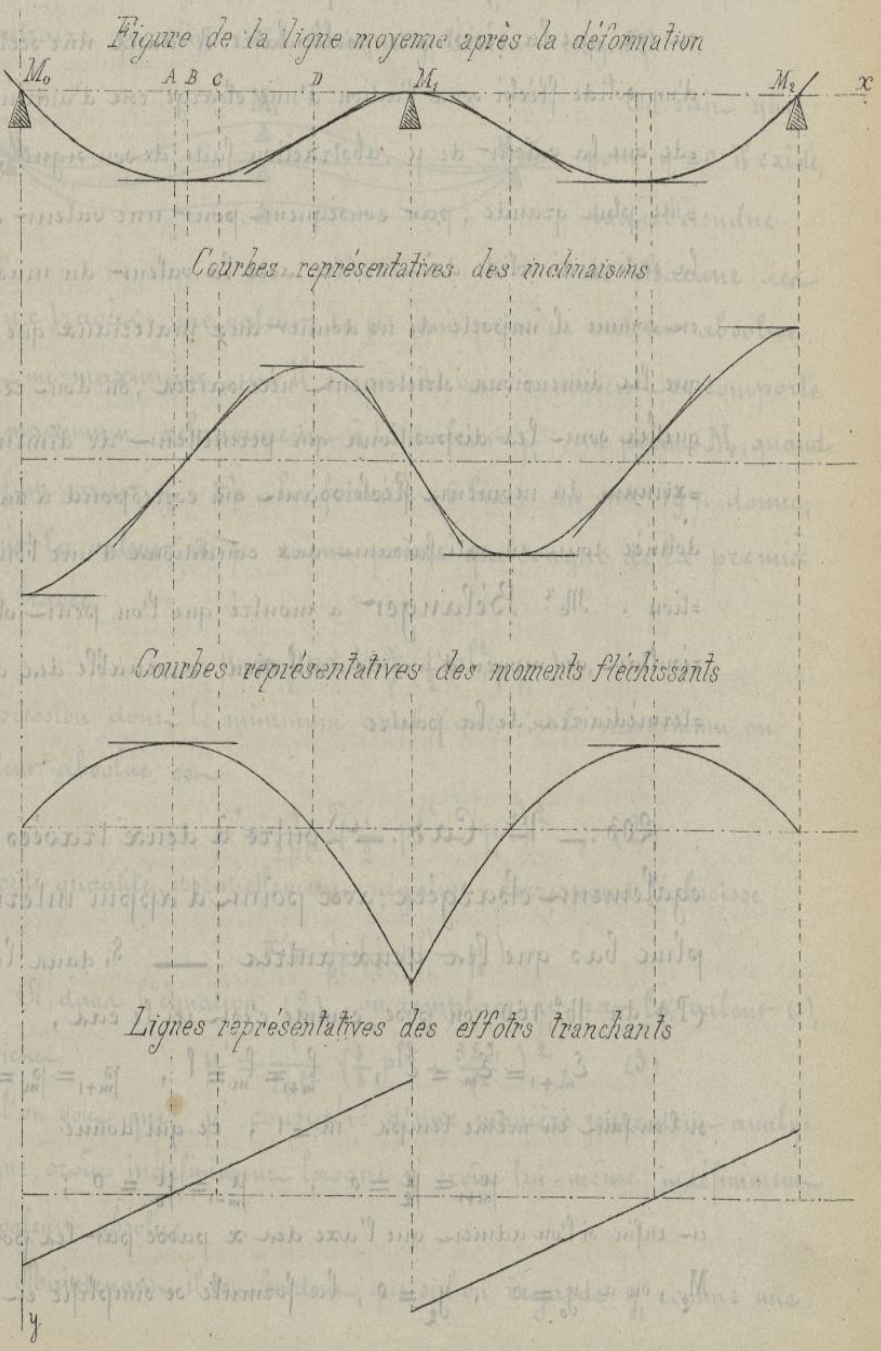
et pour $x = 0$, $x = \frac{5}{8}l$, $x = l$, on a $T = \frac{5}{8}pl$, $T = 0$, $T = \frac{3}{8}pl$.

On comprend facilement que ces observations s'appliquent aux deux dernières travées, relativement aux deux premières, dans la poutre à 4 travées égales

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

201. Poutre à deux travées égales avec appuis de niveau.

Epure pour les deux travées.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Influence d'un changement de niveau dans les points d'appui.

202.— Objet de la question.— On a vu aux Nos 190 et 192 que la résistance moléculaire R dans une section donnée d'un solide fléchi sous l'action d'une charge est d'autant plus grande que la valeur de μ, abstraction faite de son signe, est elle-même plus grande ; par conséquent, pour une valeur donnée de R la section du solide doit croître avec la valeur du maximum de μ; et comme il importe de ne donner aux matériaux que l'on emploie que les dimensions strictement nécessaires, on doit rechercher quelles sont les dispositions qui permettent de diminuer le maximum du moment fléchissant qui correspond à une charge donnée, tout en satisfaisant aux conditions d'une bonne construction. Mr Bélanger a montré que l'on peut obtenir ce résultat au moyen d'une dénivellation convenable des appuis intermédiaires de la poutre

203.— 1er Cas.— Poutre à deux travées égales, également chargées, avec point d'appui intermédiaire plus bas que les deux autres.— Si dans la formule (P) du Nº 160, on pose, comme c'est ici le cas,

$$\varepsilon_{m+1} = \varepsilon_m = \varepsilon \,, \quad l_{m+1} = l_m = l \,, \quad p_{m+1} = p_m = p \,;$$

si l'on fait en même temps $m = 1$, ce qui donne

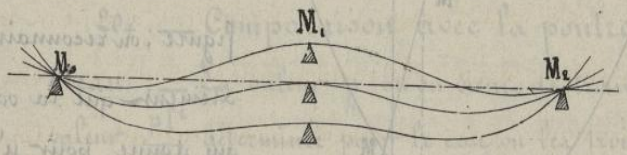
$$\mu_{m+1} = \mu_2 = 0 \,, \quad \mu_{m-1} = \mu_0 = 0 \,;$$

et enfin si l'on admet que l'axe des x passe par les points M_0 et M_2, on a $y_0 = 0$, $y_2 = 0$, la formule se simplifie et l'on en tire,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\mu_1 = \frac{1}{8} pl^2 - \frac{3\Sigma y_1}{l^2}, \qquad (1)$$

expression qui reproduit la valeur comme $\mu_1 = \frac{1}{8} pl^2$ quand on pose $y_1 = 0$, ce qui montre que, pour y_1 différent de zéro, μ_1 diminue lorsque y_1 augmente en restant positif, tandis qu'au contraire μ_1 augmente lorsque y_1 devient négatif.



On sait que pour $y_1 = 0$ il existe, dans l'étendue de chacune des deux travées, une valeur de μ qui, prise en valeur absolue, est un maximum, et il s'agit de voir comment se comporte ce maximum relativement à la valeur μ_1, au point M_1, quand on fait varier y_1. Or, la formule (6 bis) du n° 197. donne, pour la valeur de μ en un point quelconque de la première travée,

$$\mu = \frac{1}{2} px - \frac{x}{l}\left(\frac{1}{2} pl^2 - \mu_1\right),$$

expression dont le minimum analytique, ou le maximum en valeur absolue, est

$$\mu' = -\frac{1}{2pl^2}\left(\frac{1}{2} pl^2 - \mu_1\right)^2 ; \qquad (2)$$

à cette quantité, essentiellement négative, correspond l'abscisse

$$x' = \frac{1}{pl}\left(\frac{1}{2} pl^2 - \mu_1\right).$$

Si, dans l'équation (2), on remplace μ_1 par la valeur (1), il vient

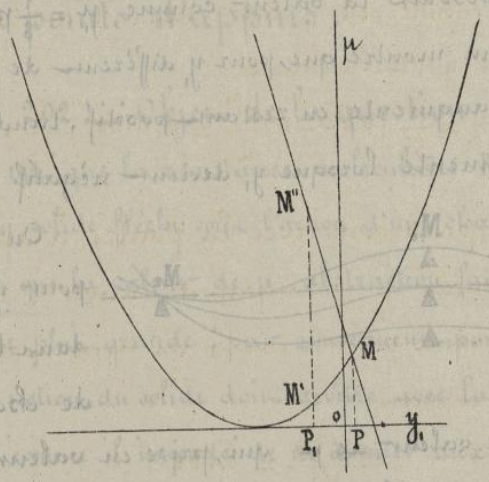
$$\mu' = -\frac{1}{2pl^2}\left(\frac{3}{8} pl^2 + \frac{3\Sigma y_1}{l^2}\right)^2, \qquad (3)$$

et l'on voit que μ', considéré d'une manière purement analytique, croît indéfiniment lorsque y_1 croît lui-même indéfiniment en valeur absolue.

Maintenant il est évident que si l'on regarde y_1 comme une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

variable, l'équation (1) peut être considérée comme représentant une droite et l'équation (3) une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe des μ', et dont le sommet est situé sur l'axe des y_1. Ces deux lignes étant construites comme l'indique la figure, on reconnaît immédiatement que la valeur de y_1 qui donne, pour μ' et pour μ_1 les valeurs simultanées les plus faibles, et par conséquent les plus avantageuses, est la valeur OP pour laquelle on a, en valeur absolue $MP = \mu_1 = \mu'$. En effet, si l'on prend une autre valeur quelconque de y_1, par exemple, $y_1 = OP_1$, la valeur correspondante de μ', représentée par $M'P_1$, serait plus avantageuse que l'ordonnée MP ; mais la valeur μ_1, donnée par la longueur $M''P_1$, serait, par contre, plus défavorable que la valeur MP ; donc cette dernière quantité est celle qui réalise les conditions du problème proposé.



On reconnaît facilement que la droite (1) et la parabole (3), prolongées suffisamment, se couperaient en un second point dont l'abscisse doit évidemment être rejetée, puisque les valeurs correspondantes de μ' et de μ_1 seraient plus grandes que celles qui se rapportent au point M.

Ces valeurs numériques de μ' et de μ_1 devant être égales entre elles ; il suffit, pour les calculer, de remplacer μ' par $-\mu_1$ dans l'équation (2), et d'en déduire μ_1, ce qui donne, en ne prenant que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la racine la plus faible,

$$y_1 = -\mu = \frac{1}{2} pl^2 \left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 0{,}0858\, pl^2.$$

En portant ensuite cette valeur dans l'équation (1) on en tire la valeur de y_1, en l'on trouve

$$y_1 = \frac{1}{24}\left(8\sqrt{2} - 11\right)\frac{pl^4}{E} = 0{,}01307\ \frac{pl^4}{E}.$$

204. — Comparaison avec la poutre à appuis de niveau. — La valeur μ qu'on vient de trouver, comparée à la valeur $\frac{pl^2}{8}$ déterminée pour le cas où les trois appuis sont de niveau, donne le rapport

$$\frac{0{,}0858}{0{,}125} = 0{,}686 ;$$

on l'on voit l'avantage qui résulte de cette dénivellation du point M, quant à la valeur y_1 si on la compare au maximum qui a été trouvé pour la flèche dans le cas où les appuis sont de niveau, on trouve le rapport

$$\frac{0{,}01307}{0{,}00456} = 2{,}866 ;$$

ce qui montre que la flèche est environ trois fois aussi grande dans le second cas que dans le premier.

205. — 2e Cas. — Poutre à quatre travées égales, également chargées, avec points d'appuis intermédiaires plus bas que les points d'appuis extrêmes. —

On se propose, comme dans le cas précédent, d'obtenir une diminution dans valeur absolue du maximum de μ, tout en satisfaisant à la condition que la poutre reste symétrique par rapport à la verticale qui passe au milieu de sa longueur ; cette condition exige nécessairement que l'on ait $y_0 = y_3$; donc les

pointe M_1 et M_3 seront situées à un même niveau différent de celui des pointes M_2 et M_4. Quant au point milieu M_2 de la poutre, sa position, relativement aux autres pointes d'appui, sera déterminée par les conditions du problème posé.

L'équation (6 bis) du N° 197, appliquée au cas que l'on considère, est

$$\mu = \frac{1}{2} p x^2 - \left(\frac{1}{2} p l^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right) \frac{x}{l} + \mu_{m-1},$$

et le maximum de μ a pour expression

$$\mu = -\frac{1}{2pl}\left(\frac{1}{2} p l^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right)^2 + \mu_{m-1}, \qquad (1)$$

valeur à laquelle correspond l'abscisse

$$x = \frac{1}{pl}\left(\frac{1}{2} p l^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right).$$

L'équation (1), appliquée successivement aux deux premières travées donne :

Pour la première travée ($m = 1$, $\mu_0 = 0$),

$$\mu' = -\frac{1}{2pl^2}\left(\frac{1}{2} p l^2 - \mu_1\right)^2, \qquad (2)$$

$$x' = \frac{1}{pl}\left(\frac{1}{2} p l^2 - \mu_1\right).$$

Pour la deuxième travée ($m = 2$),

$$\mu'' = -\frac{1}{2pl^2}\left(\frac{1}{2} p l^2 + \mu_1 - \mu_2\right)^2 + \mu_1, \qquad (3)$$

$$x'' = \frac{1}{pl}\left(\frac{1}{2} p l^2 + \mu_1 - \mu_2\right). \qquad (4)$$

Les deux dernières travées étant symétriques des deux premières, il est inutile de considérer des valeurs de μ autres que les valeurs (2) et (3).

Maintenant il faut, comme dans la question précédente, chercher à déterminer le maximum de μ de manière que l'on ait,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\mu_1 = -\mu' \quad \text{et} \quad \mu_1 = -\mu'' ;$$

Soit donc $\mu_1 = -\mu' = -\mu'' = K p l^2$, K étant un coefficient à déterminer. Si l'on remplace μ_1 par $K p l^2$ dans l'équation (2), il vient d'abord

$$\mu' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - K\right)^2 p l^2 ;$$

ensuite, si l'on remplace μ'' par $-K p l^2$ et μ_1 par $K p l^2$ dans l'équation (3), on obtient facilement,

$$\mu_2 = \left(\frac{1}{2} + K \pm 2\sqrt{K}\right) p l^2 ,$$

expression dans laquelle le radical doit être pris avec le signe —, sans quoi la valeur x'' de l'équation (4) serait négative, ce qui ne doit pas être. Les quatre valeurs à considérer sont donc

$$\mu_1 = K p l^2 , \qquad \mu' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - K\right)^2 p l^2 ,$$
$$\mu'' = -K p l^2 , \qquad \mu_2 = \left(\frac{1}{2} + K - 2\sqrt{K}\right) p l^2 .$$

Les valeurs numériques de μ_1 et μ' devant être égales entre elles, on a

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - K\right)^2 , \text{ d'où } K = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2} ;$$

et puisque l'on doit avoir la plus petite valeur possible pour le maximum de μ, il faut prendre

$$K = \frac{3}{2} - \sqrt{2} = 0{,}0858 ;$$

ce qui donne finalement

$$\mu_1 = 0{,}0858\, p l^2 , \qquad \mu' = -0{,}0858\, p l^2 ,$$
$$\mu'' = -0{,}0858\, p l^2 , \qquad \mu_2 = 0 .$$

Il reste maintenant à déterminer les valeurs des ordonnées y_1 et y_2 correspondant aux points d'appuis M_1 et M_2. A cet effet, on prend la formule générale (B) du n° 169 ; et en l'appliquant successivement aux deux premières travées, on

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on obtient
$$\frac{24\,\varepsilon}{l^2}(y_2 - 2y_1) = 16\mu_1 + 4\mu_2 - 2pl^2,$$
$$\frac{24\,\varepsilon}{l^2}(y_1 - y_2) = 8\mu_2 + 4\mu_1 - pl^2;$$

équations d'où l'on tire
$$y_1 = \frac{l^2}{24\,\varepsilon}(3pl^2 - 20\mu_1 - 12\mu_2),$$
$$y_2 = \frac{l^2}{24\,\varepsilon}(4pl^2 - 24\mu_1 - 20\mu_2);$$

en remplaçant μ_2 par zéro et μ_1 par $0{,}0858\,pl^2$ dans ces expressions, il vient
$$y_1 = 0{,}0536\,\frac{pl^4}{\varepsilon}, \qquad y_2 = 0{,}0809\,\frac{pl^4}{\varepsilon};$$
et par suite
$$y_2 - y_1 = 0{,}0274\,\frac{pl^4}{\varepsilon}.$$

206. — Comparaison avec la poutre à quatre appuis de niveau. — La valeur μ_1, dans le cas où les quatre appuis sont de niveau est, comme on l'a vu précédemment,
$$\mu_1 = \frac{3}{28}pl^2 = 0{,}1071\,pl^2,$$
et celle qui vient d'être calculée est à la valeur précédente dans le rapport
$$\frac{0{,}0858}{0{,}1071} = 0{,}8007,$$
ce qui montre que le maximum du moment n'est, dans le cas actuel, que les 8 dixièmes du maximum relatif au cas où tous les appuis sont de niveau, d'où résulte une diminution très-sensible dans les dimensions transversales de la poutre.

On doit, d'ailleurs remarquer que le résultat qui vient d'être obtenu n'est favorable que parce que μ_2

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

n'est pas supérieur à p.

Si l'on compare le maximum de la flèche, dans le cas de la déni-
-vellation, avec le maximum relatif au cas où tous les appuis sont
de niveau, on voit que ces quantités sont dans le rapport

$$\frac{0,0809}{0,0063} = 12.841.$$

c'est-à-dire que la flèche est environ 13 fois plus grande lorsque les ap-
-puis ne sont plus tous au même niveau. Il faut remarquer toutefois
que cette flèche est toujours très peu apparente dans une construction.
Mais, si l'on tient à profiter des avantages résultant de la dénivella-
-tion, tout en conservant les appuis à un même niveau, on peut, com-
-me le fait observer M^r Bélanger, substituer à la poutre droite une
poutre faiblement curviligne, en dos la courbure naturelle, dont la
charge, serait précisément égale, mais de sens opposé, à celle que la
poutre droite aurait prise par l'effet même de la déniveallation. En effet, il
est souvent plus facile, dans la pratique des constructions, d'obtenir
une courbure déterminée dans la poutre, qu'une déniveallation exacte des
appuis.

La théorie qui précède conduit à un rapprochement assez remarqua-
-ble également dû à M^r Bélanger. Si l'on remplace la poutre à quatre
travées égales, dans l'hypothèse où la déniveallation est la plus
favorable, par deux poutres à deux travées égales, dans lesquelles les
différences de niveau ont été établies en sens du même objet, la valeur
du plus grand moment fléchissant est la même dans les deux cas,
mais les niveaux des appuis ne sont pas disposés de la même manière.

Ici se termine l'étude des poutres horizontales à travées égales avec charges
uniformément réparties. Les poutres inclinées et uniformément chargées seront
étudiées plus loin, à propos de la construction des combles.

23/1

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

207.— Cas où les formules générales ne sont pas applicables.— Les formules établies précédemment, en considérant des tranches distinctes, ne sont plus applicables lorsqu'il s'agit d'une charge qui varie, d'une manière continue dans une certaine étendue, et l'on doit alors recourir aux principes fondamentaux de la théorie pour déterminer en chaque point d'un solide donné, les éléments nécessaires à l'étude de la déformation qu'il éprouve sous l'action des forces qui le sollicitent. On peut prendre le cas des aiguilles d'un barrage comme exemple d'une charge qui varie d'une manière continue dans une étendue déterminée.

208.— Aiguilles d'un barrage soutenant une charge d'eau.— Un barrage se compose en général, de madriers qu'on désigne sous le nom d'aiguilles, et qu'on dispose verticalement les uns à côté des autres en les appuyant à leurs extrémités contre des traverses horizontales. Ces aiguilles étant toutes dans des conditions identiques en égard aux pressions exercées par le liquide, l'une quelconque d'entr'elles peut être considérée comme une poutre reposant sur deux appuis en commise

1°.— à la pression f de l'eau d'amont.

2°.— à la pression f' de l'eau d'aval.

3°.— aux réactions P et P' des appuis.

Les autres éléments de la question sont: (voir la figure ci-après)

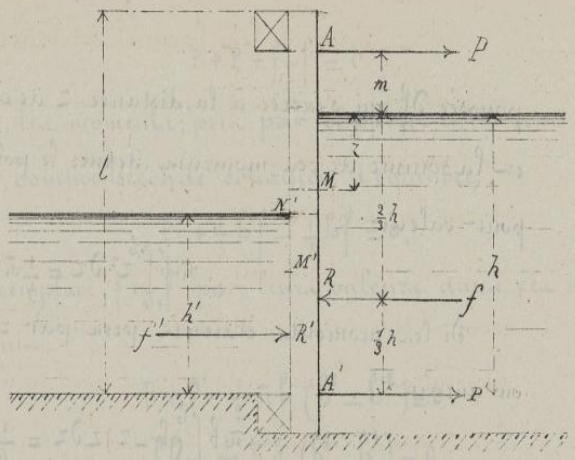
b, largeur de l'aiguille,

l, distance entre les points d'appui,

h, hauteur de l'eau d'amont,

h', hauteur de l'eau d'aval.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



209. — Détermination de la poussée totale du liquide.

Si z est l'ordonnée, comptée à partir du niveau d'amont, d'un point quelconque M de l'aiguille, bdz est l'élément rectangulaire correspondant à ce point, et si π représente le poids du mètre cube de liquide, la pression élémentaire df, exercée sur la surface bdz, a pour expression

$$df = \pi b z\, dz ;$$

par conséquent la pression totale d'amont est, depuis le niveau supérieur jusqu'au point M,

$$f = \pi b \int z\, dz = \frac{1}{2} \pi b z^2 ;$$

depuis le niveau supérieur jusqu'au point A' cette pression est

$$f = \frac{1}{2} \pi b h^2 .$$

On a de même, pour la pression d'aval, dans toute la hauteur h'

$$f' = \frac{1}{2} \pi b h'^2 .$$

210. — Détermination des moments de la poussée.

Le moment élémentaire, pris par rapport au point N de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

poussée df qui s'exerce à la distance z de ce point, est $= z \times \pi b z\, dz$, et la somme de ces moments, depuis le point N jusqu'au point A', a pour valeur

$$\pi b \int_0^h z^2\, dz = \frac{1}{3} \pi b h^3$$

Si les moments étaient pris par rapport au point A', on aurait

$$\pi b \int_0^h (h - z) z\, dz = \frac{1}{6} \pi b h^3 .$$

211. — Point d'application de la résultante des pressions. — Si R est le point d'application de la résultante des pressions d'amont et x la distance de ce point au niveau du liquide, le moment de la poussée totale, prise par rapport au point N, est $= x \times \frac{1}{2} \pi b h^2$; et comme cette quantité doit être égale à la somme des moments élémentaires, pris par rapport au même point, il faut qu'on ait

$$x \times \frac{1}{2} \pi b h^2 = \frac{1}{3} \pi b h^3 ,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{2}{3} h .$$

Ainsi le centre de pression est situé aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur h à partir du niveau supérieur, ou au $\frac{1}{3}$ de h à partir du point N.

On aurait de même, pour le centre de pression en aval,

$$x' = \frac{2}{3} h' ,$$

à partir du point N'.

212. — Réactions des points d'appui. — Le solide étant en équilibre sous l'action des forces horizontales P, P', f, $f' = -f$ qui le sollicitent, on a, comme première condition d'équilibre,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$P + P' + f - f = 0 .$$

Ensuite, les moments, pris par rapport à un axe projeté en A', donnent, comme seconde condition d'équilibre,

$$Pl + \frac{1}{3} b' f' - \frac{1}{3} b f = 0 .$$

Si l'on remplace f et f' par leurs valeurs dans ces deux équations il vient,

$$P + P' - \frac{1}{2} \pi b \left(b^2 - b'^2 \right) = 0 .$$

$$Pl - \frac{1}{6} \pi b \left(b^3 - b'^3 \right) = 0 ;$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{\pi b}{6l} \left(b^3 - b'^3 \right) \quad , \quad P' = \frac{\pi b}{6l} \left(3l \left(b^2 - b'^2 \right) - b^3 + b'^3 \right) .$$

On aurait pu aussi, prendre les moments par rapport à l'axe projeté en A, ce qui aurait donné directement P', mais les calculs auraient été un peu plus longs.

213. — Expression générale du moment fléchissant pour un point intermédiaire entre les deux niveaux.

Si l'on considère toute la portion de l'aiguille située au-dessous de la section qui passe par le point M, les forces qui agissent dans l'étendue de cette partie du solide, sont :

1° La réaction P exercée au point A en que l'on regarde ici comme une force positive.

2° La résultante des pressions exercées par le liquide depuis le point M jusqu'au point N, résultante négative dont la valeur est $\frac{1}{2} \pi b z^2$, et dont le point d'application est situé à une distance de M égale, exprimée par $\frac{1}{3} z$.

Il en résulte que la valeur μ du moment fléchissant au point M, a pour expression

$$\mu = P(m+z) - \tfrac{1}{2}\pi b z^2 \times \tfrac{1}{3} z = P(m+z) - \tfrac{1}{6}\pi b z^3.$$

214. — Maximum du moment fléchissant. —

La dérivée de μ, égalée à zéro, donne

$$P - \tfrac{1}{2}\pi b z^2 = 0, \quad \text{d'où } z = \pm\sqrt{\frac{2P}{\pi b}} ;$$

la valeur négative de z ne pouvant pas convenir à la question, à l'on met la valeur positive dans l'expression de μ, puis qu'on y remplace ensuite m par $l-b$ et P par la valeur obtenue précédemment, on trouve pour le maximum de μ

$$\begin{cases} \mu' = \dfrac{\pi b}{54 l^2}\left(b^3 - b'^3\right)\left(3l(l-b) + 2\sqrt{3l(b^2 - b'^3)}\right), \\ z' = \dfrac{1}{3}\sqrt{3l(b^3 - b'^3)} . \end{cases}$$

On doit remarquer que ce maximum de μ n'est applicable que si la valeur de z' est plus petite que $b - b'$, c'est-à-dire, plus petite que NN'; si cette condition n'est pas remplie, il faut alors considérer la partie de l'aiguille située au-dessous du niveau d'aval.

215. — Expression générale du moment fléchissant pour un point situé au-dessous du niveau d'aval. —

Il faut d'abord remarquer que la pression en un point M' situé entre N' et A' est la différence des pressions en amont et en aval, qui s'exercent en ce point, et il est facile de voir que cette différence a pour expression $\pi b\, dz'(b - b')$, quantité constante pour tous les points de l'intervalle N'A'. Dans ce cas, on simplifie la question en considérant le moment fléchissant, pris par rapport au point M', de toutes les forces qui agissent sur la partie du solide située au-dessous de ce point. Ces forces étant d'une part la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pression uniforme $\pi b z' (b - b')$ répartie sur la longueur z'; en, d'autre part, la réaction P' du point A', la valeur de μ relative à la section transversale située en M' est

$$\mu = P' z' - \frac{1}{2} \pi b (b - b') z'^2.$$

216. — Maximum du moment fléchissant.

Ce maximum a pour expression

$$\mu'' = \frac{1}{2} \frac{P'^2}{\pi b (b - b')}$$

et la valeur correspondante de z' est

$$z'' = \frac{P'}{\pi b (b - b')} ;$$

mais ces formules dans lesquelles on peut remplacer P' par la valeur trouvée précédemment, ne sont applicables que si l'on a $z'' < b'$. De sorte que l'on prendra, suivant les cas, μ' ou μ'' pour calculer les dimensions de la pièce.

Détermination des dimensions transversales d'un solide soumis à la flexion.

217. — Conditions auxquelles on doit satisfaire pour qu'un solide résiste convenablement aux forces qui le sollicitent. — On a reconnu, en étudiant les phénomènes généraux de la flexion, que les forces extérieures qui sollicitent un solide donné ont pour effet :

1° — D'allonger certaines fibres longitudinales et de refouler les autres sur elles-mêmes ;

2° — De tendre à produire des actions de cisaillement suivant les différentes sections transversales du solide.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

A ces causes de déformation, il faut ajouter les effets du glissement longitudinal des fibres les unes sur les autres, glissement qui résulte de ce que ces fibres sont plus ou moins allongées ou comprimées, puisque elles sont plus ou moins éloignées des fibres neutres. Or, si l'on veut qu'un solide résiste d'une manière permanente aux forces auxquelles il est soumis, il faut nécessairement que ses dimensions soient calculées en ayant égard à la condition que les différents efforts moléculaires qui s'opposent à sa déformation en qui en limitent les effets ne puissent dépasser certaines valeurs indiquées par l'expérience. On doit donc, dans le calcul des dimensions transversales d'un solide, faire intervenir successivement :

1°. — La résistance longitudinale.

2°. — La résistance au cisaillement.

3°. — La résistance au glissement longitudinal.

218. — Condition limite de la valeur du moment fléchissant.

Si, dans la formule générale

$$R = \frac{v\mu}{I} \pm \frac{N}{\omega},$$

on pose $N = 0$, il vient

$$R = \frac{v\mu}{I}, \qquad (1)$$

expression dans laquelle il faut admettre que :

μ est le maximum, en valeur absolue, du moment fléchissant pour le solide considéré.

R, la limite pratique qu'on ne doit pas dépasser pour la résistance par mètre carré.

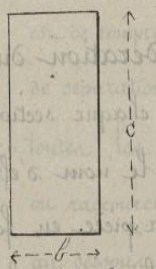
v, la distance de la fibre neutre à la fibre qui s'en éloigne le plus.

I, le moment d'inertie de la section.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Dans ces conditions la formule (1) peut servir au calcul des dimensions de la section transversale du solide, si l'on connaît la forme de cette section et si l'on s'arrange pour que la solution de la question ne dépende que d'une seule inconnue. Par exemple, s'il s'agit d'une section rectangulaire, on a

$$I = \frac{1}{12} bc^3;$$



et puisque l'on suppose N = 0, la ligne des fibres neutres coïncide avec la ligne des centres de gravité, d'où résulte $v = \frac{c}{2}$; par suite, la formule (1) devient

$$R = \frac{6\mu}{bc^2}$$

En admettant que le rapport des dimensions b et c soit connu et que l'on ait, par exemple, $b = nc$, il vient

$$R = \frac{6\mu}{nc^3}, \quad \text{d'où} \quad c = \sqrt[3]{\frac{6\mu}{nR}}.$$

Dans la pratique, et lorsqu'il s'agit de solives en bois, on fait souvent $b = \frac{5}{7}c$.

Si l'on reprend la formule $R = \frac{6\mu}{bc^2}$, et qu'on pose $bc = \omega$, ce qui donne

$$R = \frac{6\mu}{c\omega},$$

on voit que des sections très différentes peuvent également résister à un même effort donné et que la section ω est d'autant moindre que la hauteur c est plus grande.

Mais plusieurs considérations s'opposent à ce que l'on augmente indéfiniment la hauteur dans le but de diminuer la section.

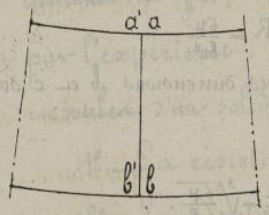
1°. La pièce, exagérée dans le sens de sa hauteur, a une plus grande tendance à se voiler.

2°. La stabilité est moindre, en ce sens que le solide pose par une moindre surface sur ses supports.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

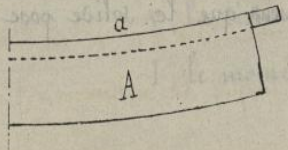
3°. Et enfin l'effort tranchant pourrait, dans certains cas, déterminer la rupture ou la déformation permanente du solide. On doit donc aussi faire intervenir la valeur de l'effort tranchant dans la détermination des dimensions de la section.

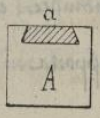
219. — **Condition tirée de la considération du glissement transversal.** — On a vu précédemment qu'en chaque section, telle que ab, agit une force verticale T, désignée sous le nom d'effort tranchant, qui tend à rompre la pièce en faisant glisser ab sur a'b', comme le montre la figure.



Cet effet de glissement transversal ne pourra toutefois se produire si la section n'est suffisante ou atteint au moins la valeur pour laquelle on a $\frac{T}{\omega} = R'$, T étant le plus grand des efforts tranchants, et R', la résistance par mètre carré que la pièce peut opposer au glissement transversal, c'est-à-dire au cisaillement.

220. — **Condition tirée de la considération du glissement longitudinal, lorsqu'il n'y a pas de composante longitudinale des forces extérieures.** — Il faut encore vérifier si la pièce peut résister à un autre effet des forces extérieures, celui qui tend à produire le glissement longitudinal d'une couche de fibres par rapport à la couche avec laquelle elle est en contact.



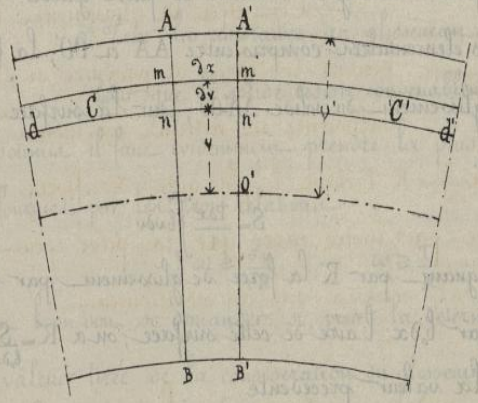


Dans l'expérience de M. Dupin citée au N°. 97 on voit la languette a dépasser la pièce A, en glissant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

longitudinalement dans la rainure. Cet effet est dû au manque de solidarité entre la languette et la poutre.

Une semblable tendance se manifeste dans toute poutre fléchie : des deux côtés d'une couche longitudinale de fibres, telle que cc' se développent des forces moléculaires d'intensités différentes, quelquefois même de sens contraires, dont l'effet est de rompre le solide suivant dd'. Il est même facile de voir que le danger de séparation est le plus grand dans la surface des fibres neutres puisque toutes les molécules placées au dessus sont en même temps allongées ou raccourcies et que l'effet inverse a lieu pour toutes les fibres placées au dessous.



Pour calculer l'effet du glissement longitudinal dans une poutre fléchie, il faut considérer deux sections normales très-voisines AB, A'B', et, entre ces deux sections, une couche horizontale de fibres dont la hauteur est dv, la largeur, b, et la longueur, dx. Si R est la résistance par mètre carré dans la section bdv projetée en mn, la résistance développée dans l'étendue de cette section, sous l'influence de la flexion, Rbdv; et comme on a $R = \frac{vp}{I}$ dans l'hypothèse où la tension longitudinale N est nulle, il en résulte

$$\frac{Rbdv}{} = \frac{vp}{I} bdv$$

Lorsqu'on passe de la section projetée en mn à celle projetée en m'n', le moment fléchissant p devient p + du et en désignant par R, la résistance par mètre carré dans la section m'n' l'expression pré-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cédente prend la forme

$$R_1 b\,dv = \frac{v(\mu+d\mu)}{I} b\,dv.$$

La résultante des actions $R b\,dv$ et $R_1 b\,dv$, c'est-à-dire $(R-R_1)\,b\,dv = \frac{v\,d\mu}{I} b\,dv$, est évidemment la force qui tend à faire glisser le solide $m\,n\,m'n'$ sur la face projetée en $n\,n'$, dans un sens qui dépend de la courbure de la pièce ; en désignant cette force par dS, on a

$$dS = \frac{v\,d\mu}{I} b\,dv ;$$

en outre, la seconde équation du N.° 122 étant de la forme générale $d\mu = T dx$ il vient

$$dS = \frac{v\,T\,dx}{I} b\,dv ;$$

et comme des forces analogues tendent à faire glisser l'un sur l'autre tous les prismes élémentaires compris entre AA' et OO', la force totale qui tend à produire le glissement du solide $AA'OO'$, sur la surface projetée en OO' a pour expression

$$S = \frac{T dx}{I} \int_0^{v'} b\,v\,dv.$$

En désignant par R' la force de glissement par mètre carré sur la surface OO' et par $b_0 dx$ l'aire de cette surface, on a $R' = \frac{S}{b_0 dx}$; ou, en remplaçant S par la valeur précédente,

$$R' = \frac{T}{I b_0} \int_0^{v'} b\,v\,dv.$$

ce qui montre que l'effort de glissement dépend des dimensions de la poutre qui sont implicitement comprises dans les valeurs de I et de v'.

Par exemple il s'agit d'une section rectangulaire dont la base est b et la hauteur c, on a

$$I = \frac{1}{12} b c^3 , \qquad v = \frac{c}{2} , \qquad b = b_0 = \text{constante},$$

et la formule précédente donne, tout calcul fait

$$R'' = \frac{3}{2} \frac{T}{bc} = \frac{3}{2} \frac{T}{\omega},$$

expression dans laquelle on doit supposer que R'' est la valeur de l'effort de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

glissement longitudinal applicable avec sécurité à la matière dont la poutre est formée.

La comparaison des valeurs R'' et R' donne $\frac{R''}{R'} = \frac{3}{2}$ et l'on voit, que dans le cas d'un profil rectangulaire, la force R'' est plus grande que la force R' qui tend à produire le cisaillement.

221. — Rapprochement entre les résultats précédents. — Les trois formules relatives aux divers genres d'efforts moléculaires qui interviennent dans la détermination des dimensions transversales d'un solide à section rectangulaire sont :

1° Pour la résistance longitudinale, ... $R = \frac{6\mu}{c\omega}$

2° Pour la résistance au glissement transversal, ... $R' = \frac{T}{\omega}$

3° Pour la résistance au glissement longitudinal, ... $R'' = \frac{3}{2}\frac{T}{\omega}$

Pour que le solide résiste convenablement aux efforts auxquels il est soumis, il faut évidemment prendre la plus grande des valeurs de ω fournies par les trois relations

$$\omega \geq \frac{6\mu}{cR}, \qquad \omega \geq \frac{T}{R'}, \qquad \omega \geq \frac{3}{2}\frac{T}{R''};$$

et l'on doit se demander, si, pour la détermination de la section ω la valeur tirée de la considération du glissement longitudinal est plus ou moins grande que la valeur tirée de la considération du glissement transversal. Il n'y a pas à cet égard de solution générale. Le glissement transversal prédominerait si l'on avait $R'' < R'$; mais ce cas est rare: une poutre est composée en effet de fibres longitudinales dont un faisceau de cordes peut donner l'idée, et la résistance au glissement transversal l'emporterait de beaucoup dans cette hypothèse. Il faudra donc s'assurer que la valeur de ω satisfait à la relation la plus défavorable, c'est-à-dire à la relation

$$\omega > \frac{3}{2}\frac{T}{R''}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

222. — Réduction du nombre des conditions lorsque le solide est homogène. — Si la matière qui forme le solide est homogène on a

$$R = R' = R'',$$

par suite, la première relation et la dernière du N° précédent deviennent

$$R = \frac{6\mu}{bc^2}, \qquad R = \frac{2}{3}\frac{T}{bc},$$

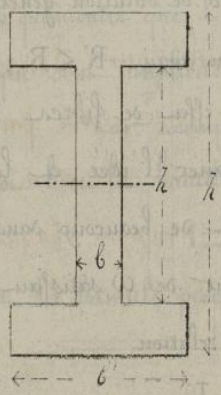
d'où l'on déduit alors

$$c = \frac{4\mu}{T}, \qquad b = \frac{3}{8}\frac{T''}{\mu R}$$

223. — Application des formules précédentes aux solides dont la section est en forme de double T. — Les formules générales qu'il faut considérer sont

$$R = \frac{v'\mu}{I}, \qquad R = \frac{T'}{\omega}, \qquad R = \frac{T}{Ib_0}\int_0^{v'} bv\,dv.$$

En admettant comme précédemment que la composante longitudinale des forces extérieures soit nulle, et qu'en outre, que la section transversale soit en forme de double T à semelles égales, on se propose de déterminer comme dans le cas d'une section rectangulaire, quelle est la plus grande des deux forces R' et R''.



1°. — Glissement longitudinal. — L'expression $R' = \frac{T}{Ib_0}\int_0^{v'} bv\,dv$, intégrée d'abord depuis $v = 0$ jusqu'à $v = \frac{h}{2}$, et ensuite, depuis $v = \frac{h}{2}$ jusqu'à $v = \frac{h'}{2}$, donne, pour la somme des deux intégrales,

$$R' = \frac{T}{8bI}\left(bh^2 + b'(h'^2 - h^2)\right);$$

et comme on a en outre $I = \frac{1}{12}\left(bh^3 + b'(h'^3 - h^3)\right)$, il en résulte

$$R' = \frac{3}{2}\frac{T}{b} \times \frac{bh^2 + b'(h'^2 - h^2)}{bh^3 + b'(h'^3 - h^3)} \qquad (1)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2°. — Glissement transversal. — Si, dans la formule $R \frac{T}{\omega}$, on remplace ω par sa valeur déduite de la figure, valeur qui est

$$\omega = bh + b'(b'-b),$$

il vient

$$R' = \frac{T}{bh + b'(b'-b)} \qquad (2).$$

Comparaison des valeurs (1) et (2). — En divisant R' par R on obtient une expression qui peut être mise sous la forme

$$\frac{R''}{R'} = \frac{3}{2}\left[1 + \frac{(b'^2 - bb')(b'+b)(b'-b)^2}{b^4 b'^3 + bb'(b'^3 - b^3)}\right]; \qquad (3)$$

et, à cause de $b' > b$, $h' > h$, la fraction qui entre dans le second membre est essentiellement positive, d'où l'on conclut $R'' > R'$; par conséquent R et R' sont les seules valeurs qu'il faut considérer dans le calcul des dimensions du profil, et il n'y a pas à s'occuper de R''.

Lorsque la matière dont le solide est formé est homogène on a R R', et dans ce cas, les dimensions du solide sont déterminées par les deux équations

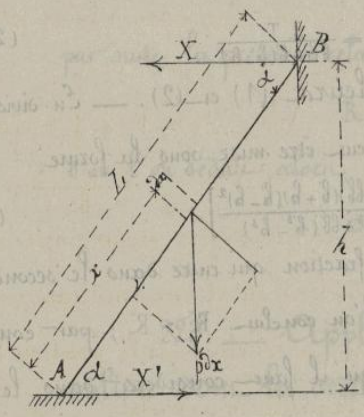
$$R = \frac{v'H}{I}, \qquad R = \frac{T}{Ib_0}\int_0^{v'} b\,dv.$$

On peut remarquer qu'en posant $b\ b'$ dans la formule (3), le profil devient rectangulaire et la formule se réduit à $\frac{R''}{R'} \frac{3}{2}$ ce qui est conforme au résultat qui termine le N°. 220.

224. — Poutre simple reposant sur deux appuis à deux niveaux différents. — Lorsqu'une poutre repose par ses extrémités sur deux appuis A et B, situés à des niveaux différents et qu'elle est chargée uniformément d'un poids p par mètre courant, chaque force élémentaire pdx peut être remplacée par deux composantes pdx cos α, pdx sin α, l'une normale à la distance BA, et l'autre suivant cette direction. La somme des composantes normales est p cos α par mètre courant, et pL cos α pour la longueur L; la somme des composantes longitudinales

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$px \sin\alpha$ pour la longueur x, et $pl \sin\alpha$ pour la longueur l. La poutre étant ainsi soumise à des forces transversales et à des forces longitudinales ; la formule $R = \frac{v\mu}{I} \pm \frac{N}{\omega}$ est celle qui servira au calcul des dimensions de cette poutre.



La charge pl à laquelle la poutre est soumise détermine des pressions aux points A et B, et par suite, des réactions égales et contraires dont les composantes horizontales sont X et X'. Pour qu'il y ait équilibre il faut que l'on ait, comme première condition

$$X = X'.$$

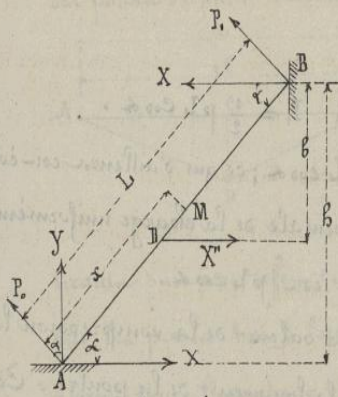
La seconde condition nécessaire s'obtient en prenant les moments de toutes les forces du système par rapport à un axe perpendiculaire au plan de la figure, par exemple, par rapport à l'axe projeté en A, ce qui donne $Xh - \frac{1}{2} pL^2 \cos\alpha = 0$, d'où $X = \frac{1}{2} \frac{pL^2 \cos.\alpha}{h}$.

225. — Emploi de la poutre inclinée dans les combles.

Une poutre inclinée, employée dans la construction d'un comble, se nomme un **Arbalétrier**, la partie supérieure est assemblée dans une poutre verticale appelée poinçon ou **Aiguille**, et la partie inférieure, dans une pièce horizontale nommée **tirant** ou **entrait** et dont l'effet est d'exercer sur la poutre la réaction horizontale X nécessaire pour empêcher la poussée au vide.

La force X', qui s'oppose au glissement horizontal du point A, peut être appliqué en tout autre point D de la poutre ; et comme X et X' sont alors les seules forces horizontales du système, l'équilibre exige que l'on

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



aux, dans ce cas, comme dans le cas du N° précédent, $X = X''$.

D'autre part, si l'on prend les moments par rapport à l'axe projeté en A, il vient

$$Xh = X''(h-b) + \frac{1}{2} pL^2 \cos\alpha ,$$

d'où $$X'' = \frac{1}{2} \frac{pL^2 \cos\alpha}{b} .$$

Cette formule montre que la force nécessaire pour empêcher le mouvement de l'arbalétrier dans le sens horizontal est d'autant moins grande que b est lui-même plus grand, d'où l'on conclut que la position la plus favorable du tirant est celle pour laquelle on a $b = h$

Maintenant il faut déterminer :

1°. — La réaction verticale y exercée par l'appui situé en A.

2°. — Les réactions P_0 et P_1 en A et en B, normales à la direction de la poutre.

3°. — La compression longitudinale N en un point quelconque de l'arbalétrier.

D'abord si l'on fait abstraction du poids du comble qui est toujours assez faible relativement au poids pL que doit supporter l'arbalétrier, on voit immédiatement que pL représente la somme de toutes les forces verticales du système ; par conséquent, pour qu'il y ait équilibre, il faut que l'on ait

$$y = pL .$$

Les trois forces qui déterminent l'équilibre au point A, sont X, y et P_0 ; si l'on projette ces forces sur la direction de P_0, il vient

$$y\cos\alpha - X\sin\alpha = P_0 ;$$

en substituant à X et à y, les valeurs trouvées précédemment, on obtient

$$P_0 = \frac{1}{2} pL\cos\alpha .$$

25,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On a de même au point B,

$$P_1 = X \sin\alpha, \qquad \text{d'où} \quad P_1 = \frac{1}{2} pL\cos\alpha.$$

On voit ainsi que $P_0 = P_1 = \frac{1}{2} pL\cos\alpha$; ce qui d'ailleurs est évident de soi-même, puisque la composante normale de la charge uniformément répartie sur la longueur de la poutre est $pL\cos\alpha$.

Il ne reste plus à trouver que la valeur de la compression longitudinale en un point quelconque M de la longueur de la poutre. Cette force est la somme de deux autres forces dont l'une est la composante de X dans la direction de BA, et l'autre, la composante de la charge $p(l-x)$, dans la même direction, de sorte qu'on a

$$N_x = X\cos\alpha + p(L-x)\sin\alpha;$$

c'est-à-dire

$$N_x = \frac{1}{2}\frac{pl\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + p(L-x)\sin\alpha.$$

Cette valeur augmente à mesure que x diminue; aux points extrêmes, c'est-à-dire pour $x = L$ et $x = 0$, il vient

$$N_1 = \frac{1}{2}\frac{pL\cos^2\alpha}{\sin\alpha}, \quad \text{et} \quad N_0 = \frac{1}{2}\frac{pL\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + pL\sin\alpha;$$

le minimum de N a donc lieu au point B, et le maximum, au point A.

La valeur N_0 peut d'ailleurs être obtenue directement en remarquant que les forces N_0, Y et X' doivent se faire équilibre au point A, ce qui donne

$$N_0 = Y\sin\alpha + X'\cos\alpha.$$

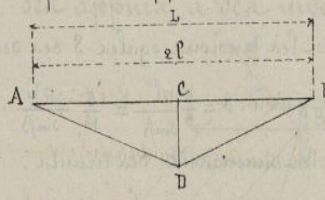
relation dans laquelle il suffit maintenant de remplacer Y et X' par leurs valeurs précédentes.

Poutre armée.

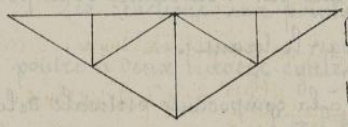
226. — Objet de cette disposition. — La poutre armée, dont l'idée appartient à Camille Polonceau, ancien élève de l'École Centrale, consiste en une disposition dont l'objet principal est de créer, dans une poutre donnée, des points d'appuis intermédiaires qui soient exclusivement dépendants

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des points d'appui extrêmes. A cet effet une pièce rigide et verticale CD, nommée bielle ou contre-fiche, est articulée en C au milieu de la poutre AB, et relevée à son extrémité inférieure par deux tirants AD et BD, fixés aux extrémités A et B. Ces tirants ont pour effet de maintenir le point C sur la ligne droite qui passe par les points A et B lorsque la poutre est en charge. On conçoit facilement tout l'avantage de cette disposition qui permet ainsi de réduire la portée de moitié par la transformation d'une poutre simple en une poutre à deux travées.

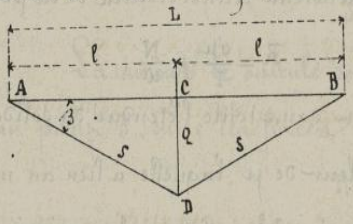


On peut aussi, lorsque les circonstances l'exigent, transformer une poutre à une seule travée, en une poutre à quatre travées par l'emploi de trois contrefiches et d'un nombre convenable de tirants.



227. — Poutre armée à une contre-fiche, posée horizontalement. — Pour simplifier les calculs on néglige le poids des bielles et des tirants et l'on fait abstraction des frottements aux articulations.

La poutre étant exactement dans les conditions d'une poutre à deux travées également chargées et reposant sur deux appuis situés à un même niveau, la réaction Q exercée par la contre-fiche sur la poutre est, d'après le tableau du N°. 185,



$$Q = \frac{5}{4} p l = \frac{5}{8} p L ;$$

mais il est évident que la contre-fiche détermine au point D une réaction

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

égale en contraire à la pression qu'elle produit au point C, et comme il y a équilibre, en D, entre la force Q et les tensions égales S des deux tirants, on a

$$Q = 2S\sin\beta \text{ , d'où } S = \frac{5}{8}\frac{pl}{\sin\beta} = \frac{5}{16}\frac{pL}{\sin\beta},$$

formule qui servira à déterminer les dimensions des tirants.

La compression longitudinale N, déterminée dans la poutre, est la composante horizontale de la seule force S, ce qui donne

$$N = S\cos\beta = \frac{5}{8}\frac{pl}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{5}{16}\frac{pL}{\operatorname{tg}\beta}$$

quantité constante dans toute l'étendue de la poutre.

Il est utile de remarquer ici que la pression exercée sur chacun des appuis extrêmes qui portent la poutre se compose de deux parties distinctes:

1°. — La pression produite par l'extrémité de la poutre indépendamment de l'action exercée par le tirant.

2°. — La pression due à la composante verticale de la tension du tirant.

La première de ces valeurs est, d'après le tableau du N° 186, égale à $\frac{3}{8}pl$, et la seconde, a $S\sin\beta$, c'est-à-dire à $\frac{5}{8}pl$; de sorte que la pression à chaque extrémité est

$$\frac{3}{8}pl + \frac{5}{8}pl = pl,$$

quantité égale à la moitié de la charge totale, comme cela doit être.

On détermine les dimensions transversales de la poutre à l'aide de la formule

$$R = \frac{v'\mu}{I} + \frac{N}{\omega};$$

et comme N est constant dans toute l'étendue du solide, il suffit de prendre la plus grande valeur de μ, laquelle a lieu au milieu de la poutre et est égale à $\frac{1}{8}pl^2$ ou $\frac{1}{32}pL^2$. Cette valeur ainsi que celle de N, mises dans la formule précédente, donnent

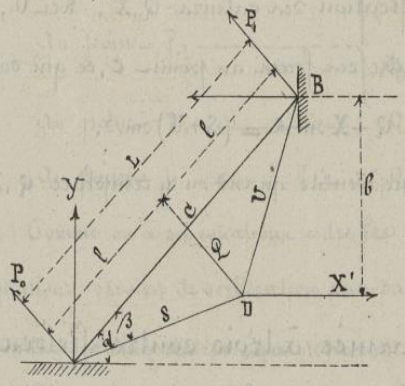
$$R = \frac{1}{32}\frac{v'}{I}pL^2 + \frac{5}{16}\frac{pL}{\omega\operatorname{tg}\beta};$$

expression d'où l'on déduit facilement ce lorsque la forme du profil est donnée et que l'on s'impose les relations qui doivent exister entre les dimensions de la section

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

228. — Poutre armée à une contre-fiche, reposant sur des appuis à des niveaux différents. — On a d'abord, comme dans le cas de la poutre inclinée, étudié au N° 224

$$Y = 2pl = pL .$$



L'ensemble des pièces qui constituent la poutre armée peut être considéré comme un système rigide, et les forces horizontales X et X' sont dans les mêmes conditions que pour la poutre simple, on a donc

$$X = X' = \frac{1}{2}\,\frac{pL^2 \cos\alpha}{b} .$$

Les réactions aux points A, C et B sont, comme dans le cas d'une poutre à deux travées égales,

$$P_0 = P_1 = \frac{3}{8}\,pl\cos\alpha = \frac{3}{16}\,pL\cos\alpha ,$$

$$Q = \frac{5}{8}\,pL\cos\alpha .$$

La tension S se détermine en écrivant qu'il y a équilibre au point A entre les forces P_0, Y et S, ce qui donne

$$P_0 = Y\cos\alpha - S\sin\beta .$$

d'où l'on tire, en remplaçant P_0 et Y par leurs valeurs,

$$S = \frac{13}{16}\,\frac{pL\cos\alpha}{\sin\beta} .$$

La tension V se calcule de même en posant l'équation d'équilibre au point B, entre les forces P_1, X et U, c'est-à-dire

$$P_1 = X\sin\alpha - V\sin\beta ,$$

ce qui donne, en mettant pour X et P_1 les valeurs trouvées précédemment

$$V = \frac{pL\cos\alpha}{16\,b\sin\beta}\,(8L\sin\alpha - 3b) .$$

On possède ainsi les éléments nécessaires au calcul des dimensions de la poutre et des tirants.

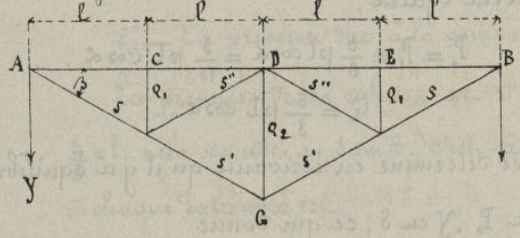
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si l'on veut une vérification des valeurs Q, X, S et U, il suffit d'écrire qu'il y a équilibre entre ces forces au point C, ce qui donne

$$Q + X \sin\alpha = (S+U)\sin\beta,$$

équation qui se réduit à une identité quand on y remplace Q, X, S et U par leurs valeurs.

229. — *Poutre armée à trois contre-fiches, reposant sur des appuis de niveau.* — Les trois contre-fiches qui agissent aux points C, D, E, et les maintiennent sur l'horizontale qui passe par les points A et B, permettent d'assimiler le système à une poutre à quatre travées égales; et, en admettant que les travées soient également chargées,



on a, d'après le N°. 186,

$$P_0 = P_4 = -\frac{11}{28}\,pl\,,$$

$$P_1 = P_3 = -\frac{22}{28}\,pl\,,$$

$$P_2 = -\frac{26}{28}\,pl\,.$$

Les appuis A et B supportent chacun la moitié de la charge totale, donc si Y exprime la pression sur l'appui A, on a

$$Y = 2pl$$

Comme tout est symétrique par rapport à la verticale DG, les valeurs des tensions S, S', S'' et de la pression Q_1 sont les mêmes deux à deux de part et d'autre de cette verticale; et pour que la poutre fonctionne comme une poutre à quatre travées égales, il faut qu'il y ait séparément équilibre entre toutes les forces qui agissent en chacune des articulations du système, ce qui permet d'écrire immédiatement les équations suivantes dans lesquelles l'axe de projection, pour chaque point, est suffisamment indiqué par la formule de l'équation correspondante,

Au point A, ... $Y + P_0 - S\sin\beta = 0\,,$ (1)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Au point C, ---------- $Q_1 + P_1 = 0$ ---------- (2)

Au point F, ---------- $\begin{cases} (S - S' - S'')\cos\beta = 0 \text{ ---------- (3)} \\ Q_1 + (S' - S - S'')\sin\beta = 0 \text{ ---- (4)} \end{cases}$

Au point D, ---------- $Q_2 + P_2 - 2S''\sin\beta = 0$ ----- (5)

Au point G ---------- $Q_2 - 2S'\sin\beta = 0$ ---------- (6)

Comme on a six équations entre les cinq inconnues S, S', S'', Q_1, Q_2, l'une de ces équations servira de vérification aux valeurs de quelques-unes des inconnues déduites des cinq autres équations.

L'équation (1) donne

$$S = \frac{Y + P_0}{\sin\beta} = \frac{2pl - \frac{11}{28}pl}{\sin\beta} = \frac{45}{28}\,\frac{pl}{\sin\beta}.$$

L'équation (2) donne $Q_1 = -P_1 = \frac{32}{28}pl$.

Les équations (3) et (4) donnent en y remplaçant S et Q par les valeurs précédentes,

$$S' = \frac{29}{28}\,\frac{pl}{\sin\beta}, \qquad S'' = \frac{16}{28}\,\frac{pl}{\sin\beta}.$$

Enfin, l'équation (5) donne

$$Q_2 = 2S''\sin\beta - P_2 = \frac{58}{28}\,pl,$$

et l'équation (6) sert de vérification aux valeurs de Q_2 et S'.

Il ne reste plus à déterminer que le maximum du moment fléchissant μ, ainsi que la compression longitudinale N. Or, le maximum de μ a lieu, comme on sait, aux points C et E, et sa valeur est

$$\mu_1 = \frac{3}{8}\,pl^2.$$

Quant à la valeur de N, on a, aux points A et B,

$$N_A = N_B = S\cos\beta = \frac{45}{28}\,\frac{pl}{\operatorname{tg}\beta};$$

et comme les composantes longitudinales des forces S'' qui agissent au point D se détruisent, il n'existe aucune force inclinée autre que S, qui puisse déterminer une compression longitudinale ; donc la force N_A est constante dans toute l'étendue de la poutre, et la formule $R = \frac{v\mu}{I} + \frac{N}{\omega}$, devient-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$R = \frac{\sigma'}{I} \times \frac{3}{28} pl^2 + \frac{45}{28} \times \frac{pl}{\omega \operatorname{tg}\beta},$$

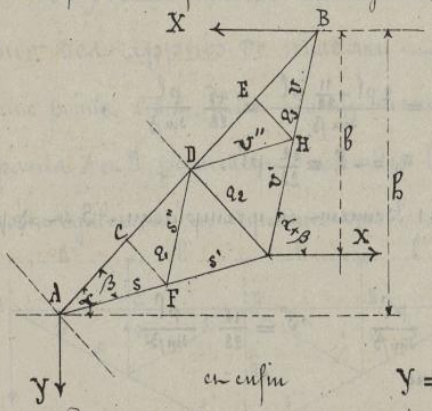
expression qui servira à calculer les dimensions transversales de la poutre.

230. — Poutre armée, à trois contrefiches, reposant sur deux appuis à des niveaux différents. — En ne considérant, comme précédemment, que la somme des composantes normales de la charge uniformément répartie, ou voit que le solide est encore dans les conditions d'une poutre à quatre travées égales, également chargées, avec appuis situés sur une même droite, et l'on a

$$P_0 = P_4 = -\frac{11}{28} pl \cos\alpha,$$

$$P_1 = P_3 = -\frac{32}{28} pl \cos\alpha,$$

$$P_2 = -\frac{26}{28} pl \cos\alpha;$$



on a, en outre,

$$\mu_0 = \mu_4 = 0, \quad \mu_1 = \mu_3 = \frac{3}{28} pl^2 \cos\alpha, \quad \mu_2 = \frac{2}{28} pl^2 \cos\alpha$$

et enfin $Y = 4pl$.

La tension horizontale X s'obtient en prenant les moments par rapport à l'axe projeté en A, ce qui donne

$$Xb - X(b - b) - 4pl \times 2l \cos\alpha = 0,$$

d'où

$$X = \frac{8pl^2 \cos\alpha}{b};$$

et à cause de $b = BG \sin(\alpha+\beta) = \frac{2l}{\cos\beta} \sin(\alpha+\beta)$, il vient,

$$X = \frac{4pl \cos\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

On détermine les forces S, S', S'', V, V', V'', Q_1, Q_2, Q_3, par les équations d'équilibre suivantes, dans lesquelles l'axe de projection est mis en évidence par la forme même des équations

Au point A, ... $P_0 + Y\cos\alpha - S\sin\beta = 0$.

Au point C ..... $Q_1 + P_1 = 0$.

Au point F ..... $\begin{cases} S - S' - S'' = 0, \\ Q_3 + (S' - S - S'')\sin\beta = 0. \end{cases}$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Au point B, ... $V \sin\beta - X \sin\alpha - P_0 = 0$.

Au point E, ... $Q_3 + P_3 = 0$.

Au point H, ... $\begin{cases} V - V' - V'' = 0 . \\ Q_3 + (V' - V - V'') \sin\beta = 0 . \end{cases}$

Au point D, ... $P_2 + Q_2 - (S'' + V'') \sin\beta = 0$.

Au point G, ... $Q_2 + X \sin\alpha - (S' + V') \sin\beta = 0$.

Les neuf premières équations donnent successivement

$$S = \frac{101}{28} \frac{pl\cos\alpha}{\sin\beta}, \quad S' = \frac{85}{28} \frac{pl\cos\alpha}{\sin\beta}, \quad S'' = \frac{16}{28} \frac{pl\cos\alpha}{\sin\beta},$$

$$V = \left(\frac{4\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} - \frac{11}{28}\right)\frac{pl\cos\alpha}{\sin\beta}, \quad V' = \left(\frac{4\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} - \frac{27}{28}\right)\frac{pl\cos\alpha}{\sin\beta}, \quad V'' = \frac{16}{28}\frac{pl\cos\alpha}{\sin\beta},$$

$$Q_1 = \frac{32}{28} pl\cos\alpha, \quad Q_2 = \frac{58}{28} pl\cos\alpha, \quad Q_3 = \frac{32}{28} pl\cos\alpha,$$

et la dernière équation sert de vérification aux valeurs de Q_2, X, S' et V'.

Il ne reste plus à déterminer que la valeur N de la compression longitudinale. Au point B cette valeur est

$$N_B = X\cos\alpha + V\cos\beta ;$$

Dans la première travée, la composante longitudinale du poids de la pièce s'ajoute à la valeur de N_B, et pour un point quelconque situé à la distance x du point E, on a

$$N_x = X\cos\alpha + V\cos\beta + p(l-x)\sin\alpha .$$

Au point E on a $x = 0$, d'où

$$N_E = X\cos\alpha + V\cos\beta + pl\sin\alpha .$$

Au point D les forces S'' et V'' se détruisent et l'on a

$$N_D = X\cos\alpha + V\cos\beta + 2pl\sin\alpha .$$

Enfin la valeur de N est, au point A,

$$N_A = X\cos\alpha + V\cos\beta + 4pl\sin\alpha ,$$

et l'on voit que c'est en ce point que N atteint sa plus grande valeur .

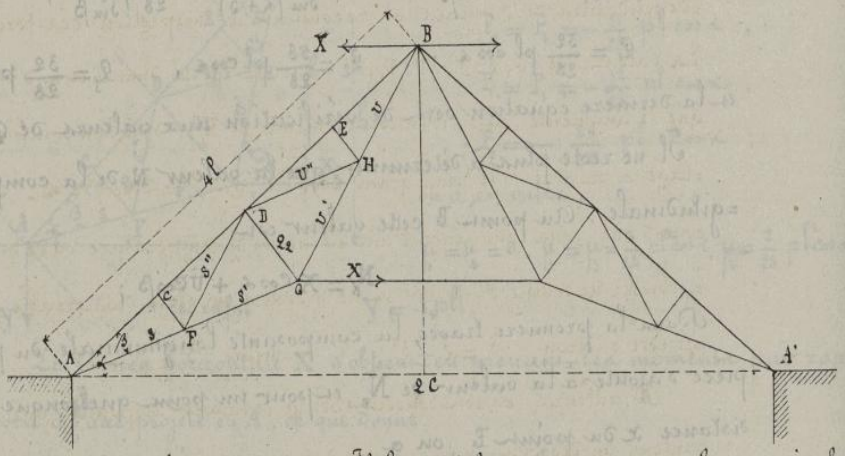
26/1

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En mettant dans l'expression de N_A, les valeurs de X et de V trouvées précédemment, il vient

$$N_A = 4pl \sin\alpha + \frac{101}{28}\,\frac{pl\cos\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

231. — *Ferme Polonceau à six contre-fiches.* — On suppose que la largeur de l'espace à reconvrir soit $2c$, et il s'agit d'examiner comment se comportent les forces qui ont été calculées au N° précédent, lorsqu'on fait varier les angles α et β.



1°. — *Variations de α.* — Il faut d'abord remarquer que le produit $l\cos\alpha$ est constant puisque l'on a $4l\cos\alpha = C$ et qu'ainsi l augmente en même temps que α.

Les valeurs de $S, S', S'', V'', K_1, Q_2, Q_3$ ne sont pas affectées par les variations de α parce que cet angle n'y entre que par le facteur constant $l\cos\alpha$.

La valeur X de la tension horizontale, peut se mettre sous la forme

$$X = \frac{4pc\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

ce qui montre que X diminue lorsque α augmente.

Le premier terme de la valeur de V, donne

$$\frac{\sin\alpha+\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} = \frac{1}{1+\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}},$$

ce qui prouve que V croît avec α.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La compression longitudinale N_A peut s'écrire

$$N_A = 4\,pl \sin\alpha + \frac{101}{28}\,\frac{pc}{\operatorname{tg}\beta},$$

et l'on voit immédiatement que N_A augmente avec α. Comme les arbalétriers jouent le rôle le plus important dans une ferme, on serait conduit, par des considérations de résistance, à diminuer α, afin de diminuer par cela même la valeur de N_A, ce qui permettrait de donner de plus faibles dimensions à l'arbalétrier; la pratique peut seule faire connaître la limite inférieure que l'on ne doit pas dépasser pour la valeur de α.

2°. — Variations de β. — Les valeurs de p, Q_1, Q_2, Q_3, sont indépendantes de β; mais on reconnaît à l'inspection des formules qui donnent les valeurs de S, S', S'', V, V', V'', que ces efforts diminuent d'intensité à mesure que β augmente et qu'il en est de même de N_A; d'où l'on conclut qu'il y a avantage à prendre β le plus grand possible, c'est-à-dire $\beta = \alpha$. Cependant, pour éviter que, sous l'influence d'une élévation de température ou de tassements produits, le comble ne semble s'infléchir et ne produise un effet désagréable à l'œil, on préfère prendre environ $\beta = \alpha - 2°$, ou même $\beta = \alpha - 5°$.

D'ailleurs on est souvent obligé de laisser disponible une assez grande hauteur au-dessous du tirant, surtout dans ce cas il faut que β soit notablement plus petit que α.

232. — Nature des efforts qui s'exercent sur un comble. —

On doit, dans le calcul des dimensions d'un comble considérer:

1°. — Le poids m par mètre carré de la couverture.

2°. — Le poids m' par mètre carré de la charpente.

3°. — La charge de sécurité m'' par mètre carré, par laquelle on tient compte du maximum de la pression du vent dominant dans la contrée et du maximum du poids accidentel de la neige.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

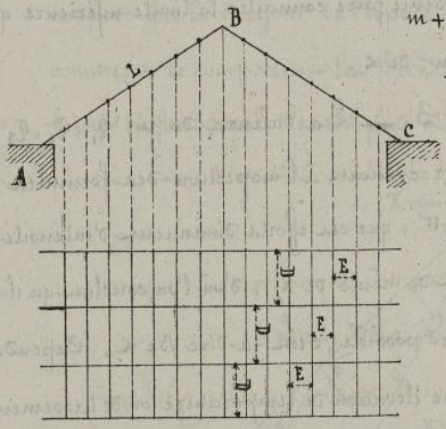
De sorte que le poids total M par mètre carré auquel le comble est soumis est

$$M = m + m' + m''.$$

Il faut d'ailleurs remarquer que le poids même de l'arbalétrier et de celui des pannes peuvent intervenir dans l'évaluation du poids total ; celui des bielles et de la tirante est généralement très faible et peut être négligé.

Les pannes ne doivent évidemment être calculées que pour résister à l'effort

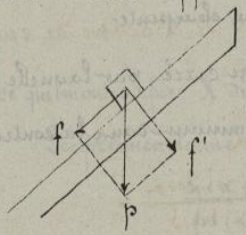
$$m + m' = M'.$$



La charge que supporte une ferme intermédiaire se compose de la moitié du poids réparti à droite sur la largeur D qui sépare deux fermes et de la moitié du poids réparti à gauche sur une même largeur ; de sorte que la charge totale sur une ferme est 2MDL.

De même, D étant la longueur d'une panne, et E l'écartement de deux pannes consécutives, la charge que supporte chaque panne, y compris son poids propre, est M'DE.

Les formules établies au N° 230 sont applicables à la ferme Polonceau, quand on considère l'arbalétrier comme une poutre à quatre travées égales et chargées d'un poids DM par mètre, uniformément réparti, ce qui n'est pas rigoureusement exact puisque le poids de la couverture n'est transmis que par l'intermédiaire des pannes ; mais cette hypothèse peut être admise sans aucun inconvénient dans les applications.



La charge exercée sur chaque panne peut se décomposer en deux forces, l'une normale à la direction de l'arbalétrier ; l'autre, parallèle à cette direction ; et sous l'influence de ces deux efforts, la panne tend à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

prendre une double courbure. Pour se soustraire à l'examen de ce cas de flexion, sur lequel il n'existe pas de renseignements précis, on néglige ordinairement les efforts f et l'on calcule la panne en ayant égard seulement aux forces normales f'. Enfin on doit d'après le mode d'assemblage employé dans la construction, considérer la panne comme un solide posé simplement sur des appuis, ou comme un solide encastré à ses extrémités.

233. — Calcul des dimensions des diverses pièces qui composent une ferme à dix contre-fiches. — La question comporte trois parties distinctes ;

1°. — Pièces soumises à la flexion ; arbalétriers et panne

2°. — Pièces soumises à l'extension ; tirants.

3°. — Pièces soumises à la compression : contre-fiches.

On suppose, dans ce qui suit, qu'il s'agit d'une ferme intermédiaire ; les dimensions que l'on obtiendra seront ensuite appliquées aux fermes de tête, bien que celles-ci ne supportent que la moitié de la charge à laquelle les autres fermes sont soumises.

234. — Calcul de l'arbalétrier. — La formule qu'il faut employer est, comme on l'a déjà vu

$$R = \frac{\sigma' \mu}{I} + \frac{N}{\omega},$$

et l'on obtient des conditions de sécurité convenables en remplaçant simultanément μ et N par le maximum de chacune de ces valeurs, c'est-à-dire, en prenant

$$\mu = \frac{3}{28} pl^2 \cos\alpha$$

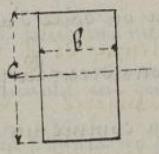
et

$$N_A = 4 pl \sin\alpha + \frac{101}{28} \frac{pl \cos\alpha}{tg\beta}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cas d'une section rectangulaire. — On a ici $v' = \frac{c}{2}$, $\omega = \frac{1}{12} bc^3$; si l'on pose en outre $b = mc$, la formule précédente devient

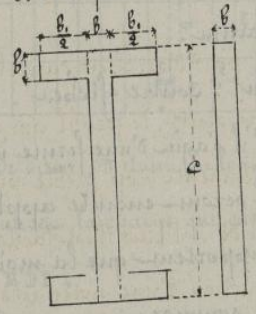
$$R = \frac{6\mu}{mc^3} + \frac{N}{mc^2}, \quad \text{d'où} \quad R\,mc^3 - Nc - 6\mu = 0;$$



après avoir calculé c au moyen de cette équation, on détermine b par la relation $b = mc$.

Pour un bois de grand équarrissage, on peut prendre pour m une valeur comprise entre $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{4}$. Pour le fer on peut aller jusqu'à $m = \frac{1}{5}$

Cas d'un fer à double T, à semelles égales. — On commence par supposer $N = 0$, et l'on calcule un fer à section rectangulaire capable de résister au maximum de μ, à l'aide de la relation $R = \frac{v\mu}{I}$; si l'on pose ensuite $b = mc$, m étant généralement compris entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{10}$



il vient

$$R\,mc^3 - 6\mu = 0,$$

ce qui donne, c et par suite b. On complète la pièce pour qu'elle résiste à l'effort longitudinal N, en ajoutant deux ailes d'épaisseur b. En désignant par $\frac{b_1}{2}$ la largeur de chaque aile, on a

$$\omega = bc + 2bb_1, \quad I = \frac{1}{12}\left((b+b_1)c^3 - b_1(c-2b)^3\right),$$

on par suite

$$R = \frac{6\mu c}{(b+b_1)c^3 - b_1(c-2b)^3} + \frac{N}{b(c+2b_1)}$$

expression d'où l'on déduit facilement la valeur de b_1.

Détermination des dimensions d'un fer à double T du commerce. — Emploi des tables. — La méthode que l'on vient de indiquer pour calculer un fer à double T dont toutes les parties sont exactement rectangulaires deviendrait un peu plus compliquée s'il s'agissait des fers à double T du commerce ; car, dans ce cas l'épaisseur de l'âme est ordinairement plus faible au milieu qu'aux extrémités

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les ailes sont amincies aux extrémités et les angles droits sont remplacés par des parties arrondies. Mais alors on peut simplifier beaucoup le calcul par l'emploi des tables qui ont été dressées par quelques constructeurs et qui contiennent les valeurs de $\frac{I}{v'}$ correspondantes à chacun des profils employés dans le commerce. Voici la méthode à suivre dans les deux cas qui peuvent se présenter

1°— Si l'on a $N = 0$, il en résulte $R = \frac{v'\mu}{I}$, qu'on peut mettre sous la forme $\frac{I}{v'} = \frac{\mu}{R}$; et puisque R est donné, $\frac{I}{v'}$ est connu ; il suffit donc de chercher dans la table le profil pour lequel la valeur $\frac{I}{v'}$ est égale au nombre donné $\frac{\mu}{R}$; si ce profil ne s'y trouve pas, il faut prendre, celui qui donne pour $\frac{I}{v'}$ la valeur la plus voisine de $\frac{\mu}{R}$, mais avec la condition $\frac{I}{v'} > \frac{\mu}{R}$.

2°— Si N n'est pas nul on commence par chercher dans la table, parmi les fers dont l'âme a une faible épaisseur, le profil qui satisfait à la condition $R = \frac{v'\mu}{I}$. Ce profil est évidemment trop faible puisque l'on n'a pas tenu compte de l'effort longitudinal N. Mais il est facile d'augmenter la section par l'adjonction d'une surépaisseur répartie uniformément sur toute la hauteur du profil, surépaisseur qu'on peut assimiler à un rectangle de hauteur h et d'épaisseur e.

Le moment d'inertie de ce rectangle étant $\frac{1}{12} eh^3$, si l'on désigne par I le moment d'inertie primitif, moment qui est donné par les tables, et par I' le moment d'inertie total, on a

$$I' = I + \frac{1}{12} eh^3 .$$

De même si ω est la section primitive et ω' la section nouvelle on a

$$\omega' = \omega + eh .$$

En mettant ces valeurs, mises dans la formule $R = \frac{v'\mu}{I} + \frac{N}{\omega}$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donnent, $$R = \frac{\frac{1}{2} b \mu}{1 + \frac{1}{12} c b^3} + \frac{N}{\omega + e b} .$$

Cette relation, du second degré en e, donne deux valeurs pour l'inconnue ; il faut, au point de vue de l'économie de la matière, prendre la plus petite des valeurs de e si elle est positive.

Il peut arriver que l'épaisseur totale ainsi obtenue soit en dehors des limites que permettent d'obtenir les laminoirs pour le même profil. Il faut alors considérer le calcul fait comme non avenu et le recommencer pour un fer de plus grand échantillon.

Calcul d'une panne.

Ce qui précède s'applique au calcul des dimensions d'une panne, avec cette différence toutefois que l'on a ici N = 0, et que la formule à employer se réduit à $$R = \frac{6' \mu}{I} .$$

Dimensions des tirants.

Les tirants étant des pièces exclusivement soumises à l'extension, si S est la tension totale développée, $\frac{S}{\omega}$ est la tension par mètre carré, et en désignant par R l'effort de traction par mètre carré qu'on ne doit pas dépasser dans la pratique on a

$$\frac{S}{\omega} = R .$$

Par exemple, s'il s'agit d'une section circulaire on a $\omega = \pi r^2$, ce qui donne $\frac{S}{\pi r^2} = R$, d'où $r = \sqrt{\frac{S}{\pi R}}$.

Il ne reste plus maintenant à déterminer que les dimensions transversales des bielles ou contre-fiches ; et pour cela il faut établir préalablement la théorie spéciale de la flexion qui se produit quand une pièce est chargée de bout.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Théorie de la flexion des pièces chargées parallèlement à la longueur.

235. — Prisme long fléchi par compression. — On a vu, dans la théorie de la compression des solides courts, que si la charge dépasse une certaine limite, même peu élevée, il se produit simultanément un phénomène de compression et de flexion des fibres qui composent le solide, de telle sorte que les raccourcissements apparents varient plus rapidement que ne l'indique l'équation $\frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{\Omega E}$.

Lorsqu'il s'agit de prismes longs chargés de la même manière, on constate qu'à partir d'une certaine limite de charge également peu élevée, la flexion se produit encore en même temps que la compression ; mais le phénomène diffère alors du précédent en ce que cette flexion se manifeste de la même manière sur toutes les fibres, et qu'ainsi elles restent à peu près parallèles entr'elles, de sorte que la pièce se courbe toute entière d'un même côté de l'axe.

Trois cas principaux peuvent être examinés.

1°. — Flexion d'un solide libre à ses deux extrémités.

2°. — Flexion d'un solide encastré à ses deux extrémités.

3°. — Flexion d'un solide encastré à l'une de ses extrémités seulement.

236. — 1er Cas. — Flexion d'un prisme chargé suivant la fibre moyenne d'un poids N, et libre de tourner à ses deux extrémités. — Soit AMB la courbe de la fibre moyenne après la flexion, et M un point quelconque de cette courbe. Si l'on prend pour axe des x, l'axe primitif du prisme, et pour axe des y, une perpendiculaire élevée en O, on a, en prenant comme sens des moments positifs celui qui est indiqué par la flèche

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$-Ny = \mu = \mathcal{E} f''(x) ,$$

d'où en multipliant par dx.

$$-Ny\,dx = \mathcal{E} f''(x)\,dx .$$

si l'on pose, pour faciliter l'intégration $f'(x) = z = \frac{dy}{dx}$,

ce qui donne $f''(x)\,dx = dz$, il vient

$$\mathcal{E} z\,dx = -Ny\,dy ,$$

d'où

$$\mathcal{E} z^2 = -Ny^2 - C . \qquad (1)$$

Or, si l'on représente par a l'ordonnée du point pour lequel on a $f'(x) = 0$, l'équation (1) donne, en y faisant $y = a$,

$$\mathcal{E} z^2 = -Na^2 + C .$$

Cette équation, retranchée de la précédente, donne

$$\mathcal{E} z^2 = N(a^2 - y^2) ,$$

d'où

$$z = \pm\sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}}\sqrt{a^2 - y^2} ; \qquad (2)$$

relation qui donnerait l'inclinaison de la tangente en chaque point de la ligne moyenne si la valeur de a était connue.

En remplaçant z par $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation (2) il vient

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}}\sqrt{a^2 - y^2} ,$$

ou encore

$$dx\sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}} = \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

qui est l'équation différentielle de la fibre moyenne. En intégrant cette équation on trouve

$$x\sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}} = \arcsin\frac{y}{a} + c ;$$

la constante est nulle, car, pour $x = 0$, on a $y = 0$, et il reste $c = 0$.

On peut aussi écrire cette équation sous la forme

$$\frac{y}{a} = \sin x\sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}} \quad \text{ou} \quad y = a\sin x\sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}}$$

et l'on a ainsi l'équation de la fibre moyenne.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Discussion de l'équation $y = a \sin x \sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}}$. Pour $x=0$ on a $y=0$. Pour $x=l$, on doit avoir

$$y=0 \quad \text{ou} \quad a \sin x \sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}} = 0.$$

Cette dernière équation exige que l'on ait $l\sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}} = n\pi$, n étant un nombre entier. En tirant de cette équation la valeur de N, il vient

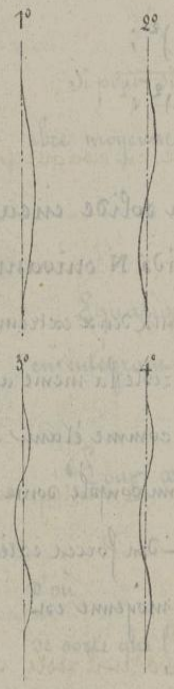
$$N = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \mathcal{E},$$

ce qui montre que la charge N peut être d'autant plus grande que n est soit lui-même plus grand.

L'équation (2) donne en y, remplaçant $\sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}}$ par $\frac{n\pi}{l}$,

$$y = a \sin \left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

et en faisant successivement $n=1, =2, =3, =4, \ldots\ldots$ on obtient des courbes ayant autant de maximums de y que n contient d'unités; le tableau suivant résume ces différents cas.



Valeurs de n	Valeurs de x pour $y=a$	Valeurs de x pour $y=0$
1° $n=1$	$x = \frac{1}{2} l$	$x=0$ $x=l$
2° $n=2$	$x = \frac{1}{4} l$, $x = \frac{3}{4} l$	$x=0$ $x = \frac{1}{2} l$ $x=l$
3° $n=3$	$x = \frac{1}{6} l$, $x = \frac{1}{2} l$, $x = \frac{5}{6} l$	$x=0$, $x = \frac{1}{3} l$, $x = \frac{2}{3} l$, $x=l$
4° $n=4$	$x = \frac{1}{8} l$, $x = \frac{3}{8} l$, $x = \frac{5}{8} l$, $x = \frac{7}{8} l$	$x=0$, $x = \frac{1}{4} l$, $x = \frac{1}{2} l$, $x = \frac{3}{4} l$ $x=l$

Le nombre des inflexions est toujours inférieur d'une unité à la valeur de n.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

237. — Applications.

1°. — Solide de longueur l, en sorte la section est un carré de côté c. — La formule $N = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \mathcal{E}$, trouvée précédemment, devient ici

$$N = \frac{n^2\pi^2}{l^2} EI = \frac{n^2\pi^2}{l^2} E \frac{1}{12} c^4,$$

et la charge par mètre carré est :

pour $n = 1$ $\qquad \frac{N}{c^2} = \frac{E\pi^2}{12} \left(\frac{c}{l}\right)^2$;

pour $n = 2$ $\qquad \frac{N}{c^2} = \frac{E\pi^2}{3} \left(\frac{c}{l}\right)^2$.

2°. — Solide de longueur l en sorte la section est un cercle de rayon r. — La formule $N = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \mathcal{E}$ donne

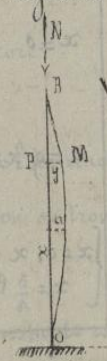
$$N = \frac{n^2\pi^2}{l^2} E \frac{\pi r^4}{4},$$

et la charge par mètre carré est :

pour $n = 1$ $\qquad \frac{N}{\pi r^2} = \frac{E\pi^2}{4} \left(\frac{r}{l}\right)^2$;

pour $n = 2$ $\qquad \frac{N}{\pi r^2} = E\pi^2 \left(\frac{r}{l}\right)^2$;

238. — 2e Cas. — Flexion d'un solide encastré à ses deux extrémités, et chargé d'un poids N suivant la fibre moyenne. — La condition d'encastrement aux deux extrémités implique que la tangente en ces points reste la même après la flexion et on peut considérer la pièce comme étant maintenue dans cette position fixe par l'action d'un couple dont le moment est μ. Il en résulte que le moment des forces extérieures, en un point quelconque M de la ligne moyenne est



$$\mu = \mu_1 - Ny,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\mathcal{E} f''(x) = \mu_1 - Ny.$$

En multipliant les deux membres par dx, et posant comme précédemment

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=dessous, $z = \frac{dy}{dx}$ d'où $dz = f''(x)\,dx$, il vient

$$\varepsilon z\,dz = \left(-Ny + \mu_1^2\right) dy,$$

d'où

$$\varepsilon z^2 = -Ny^2 + 2\mu_1^2 y + c.$$

Pour $y = 0$ on a $z = 0$ puisque la tangente au point o se confond avec l'axe des x; donc $c = 0$ et l'équation se réduit à

$$\varepsilon z^2 = -Ny^2 + 2\mu^2 y. \qquad (1)$$

Equation différentielle de la fibre moyenne.

En remplaçant, dans l'équation (1), z par sa valeur $\frac{dy}{dx}$ et prenant la racine carrée, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{N}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{2\mu^2}{N}y - y^2},$$

ou encore

$$dx\sqrt{\frac{N}{\varepsilon}} = \frac{dy}{\sqrt{\frac{2\mu^2}{N}y - y^2}}.$$

Si pour simplifier on pose $\frac{2\mu^2}{N} = b$, l'équation différentielle de la fibre moyenne prend la forme

$$dx\sqrt{\frac{N}{\varepsilon}} = \frac{dy}{\sqrt{by - y^2}}. \qquad (2)$$

Equation de la ligne moyenne après la flexion. On l'obtient en intégrant l'équation précédente, ce qui donne

$$x\sqrt{\frac{N}{\varepsilon}} = \text{arc sin}\left(\frac{2y}{b} - 1\right) + c.$$

Pour $x = 0$, on a $y = 0$, et par suite

$$0 = \text{arc sin}(-1) + c$$

d'où

$$c = -\text{arc sin}(-1) = -\frac{3\pi}{2};$$

de sorte que l'équation de la ligne moyenne est

$$x\sqrt{\frac{N}{\varepsilon}} = \text{arc sin}\left(\frac{2y}{b} - 1\right) - \frac{3\pi}{2},$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{2y}{b} - 1 = \sin\left(x\sqrt{\frac{N}{\varepsilon}} + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x\sqrt{\frac{N}{\varepsilon}};$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou encore, en remplaçant b par $\frac{2\mu^2}{N}$, $\frac{Ny}{\mu^2} - 1 = -\cos x\sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}}$; (2), et l'on a ainsi l'équation de la courbe de la fibre moyenne après la flexion.

Au point $x=l$, $y=0$ l'équation (2) devient

$$-1 = -\cos l\sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}}$$

ce qui exige que l'on ait, n étant un nombre entier,

$$l\sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}} = 2\pi n, \text{ d'où } N = \frac{4\pi n^2}{l^2}\mathcal{E}.$$

La plus petite valeur que l'on puisse donner à N est celle qui correspond à $n=1$, c'est-à-dire

$$N = \frac{4\pi^2}{l^2}\mathcal{E}.$$

Ce qui montre que lorsque il y a encastrement aux deux extrémités, l'effort nécessaire pour fléchir la pièce d'une certaine quantité est égal à 4 fois celui qu'il faudrait exercer pour fléchir la même pièce supposée non encastrée.

Si dans l'équation (2) on met à la place de $\sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}}$ sa valeur $\frac{2n\pi}{l}$, l'équation de la courbe devient

$$y = \frac{\mu^2}{N}\left[1 - \cos\frac{2n\pi}{l}\right],$$

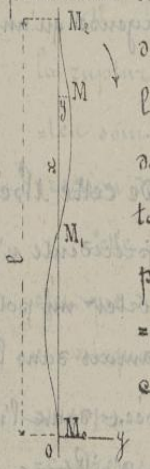
et l'on voit, comme dans le premier cas, que suivant que n a les valeurs 1, 2, 3, ... etc. y s'annule 1 fois, 2, 3 .... fois pour des valeurs de x qui ne dépassent pas l.

D'où l'on conclut que si le milieu de la pièce ne peut s'écarter de la direction AB, il faudra pour la maintenir fléchie, moitié à droite et moitié à gauche, une force N quadruple de celle qui suffit, si ce point était libre.

En effet, pour $n=2$, on a $N = 16\pi^2 \times \frac{\mathcal{E}}{l^2}$; et en posant $l' = \frac{l}{2}$ on obtient $N = 4\pi^2\frac{\mathcal{E}}{l'^2}$.

239. — 3ème Cas. — Pièce encastrée à l'une de ses extrémités. Si l'on pose $n=2$ dans les résultats du N°

précédent le point M_1 est situé au milieu de la hauteur l, et la demi-pièce $M_0 M_1$ peut être regardée comme représentant la flexion d'une poutre encastrée à sa partie inférieure, et dont l'extrémité supérieure serait assujettie à rester constamment sur l'axe des x. On peut alors exprimer le phénomène au moyen des équations précédentes en y faisant



dans $n = 2$, $l = 2l'$,

ce qui donne

$$N = \frac{4 \times 4}{4 l'^2} \mathcal{E} = \frac{4}{l'^2} \mathcal{E}.$$

Cette valeur montre que la même charge N convient à la pièce, soit qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas encastrement à la partie supérieure pourvu que cette extrémité du solide reste constamment sur l'axe des x.

— applications. —

— Poteau à section carrée. — Soit c le côté du carré ; on a

$$\mathcal{E} = EI = E \frac{1}{12} c^4,$$

et par suite

$$N = \frac{4 \times \pi^2}{l^2} E \frac{1}{12} c^4,$$

d'où, pour la charge par mètre carré,

$$\frac{N}{c^2} = \frac{4 \times \pi^2}{12 l^2} E c^2 = \frac{\pi^2}{3} E \left(\frac{c}{l}\right)^2. \qquad (1)$$

— Poteau à section circulaire. — Soit r le rayon de la section, on a

$$\mathcal{E} = EI = E \frac{\pi r^4}{4}, \text{ d'où } N = \frac{4 \times \pi^2}{l^2} E \frac{\pi r^4}{4},$$

et pour la charge par mètre carré,

$$\frac{N}{\pi r^2} = \pi^2 E \left(\frac{r}{l}\right)^2. \qquad (2)$$

Si la charge par mètre carré est la même dans le cas d'une section carrée et d'une section circulaire, il vient, en divisant (1) par (2),

$$1 = \frac{3 r^2}{c^2}, \text{ d'où } c = r\sqrt{3};$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en les sections sont dans le rapport de $3r^2$ à πr^2, ce qui montre que dans ce cas une section carrée est plus avantageuse qu'une section circulaire.

240. — Comparaison des résultats de cette théorie avec les résultats pratiques. — La théorie précédente n'est pas propre à déterminer la charge que peut supporter un poteau ou une colonne, parce qu'un tel support ne se trouve jamais dans les conditions mathématiques que nous avons supposées, dans l'un ou l'autre des trois cas précédents. En admettant d'ailleurs que la valeur de N que donnent ces formules soit, dans chaque cas particulier, la limite que la charge ne doit pas dépasser pour que la pièce pressée de bout ne fléchisse pas, cette condition peut être insuffisante, parce qu'il faut encore que le support ne s'écrase pas; et comme cette condition n'entre pas dans l'analyse précédente, les formules obtenues sont impropres à faire connaître la limite de la charge des supports de petite hauteur puisqu'elles donnent N aussi grand qu'on veut en faisant l assez petit.

Il a donc fallu recourir à l'expérience, et ce qu'il y a de remarquable, c'est que les formules empiriques auxquelles on est conduit pour la détermination de la charge minimum, par unité de section, que peuvent supporter les poteaux ou colonnes en bois ou en fonte, sont précisément de même forme que les formules trouvées; c'est-à-dire qu'elles sont fonction de $(\frac{c}{l})^2$ pour les sections carrées, et qu'elles sont fonction de $(\frac{r}{l})^2$ pour les sections circulaires.

M^r Hodgkinson résume ses expériences sur les poteaux carrés en bois par la formule

$$\frac{N}{c^2} = 2562 \left(\frac{c}{l}\right)^2.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il faut ensuite les remarques suivantes :

1°— Dans les piliers longs à dimensions égales, la résistance à la rupture est à peu près trois fois plus grande quand les extrémités sont plates et perpendiculaires à la longueur, ainsi qu'à la direction de l'effort, que lorsqu'elles sont arrondies.

Cette remarque concorde avec la théorie ; nous avons trouvé, en effet que dans le cas d'encastrement aux deux extrémités, la résistance est quadruple de celle qui aurait lieu en l'absence de tout encastrement. Si l'expérience ne donne que 3 pour rapport, c'est que l'encastrement n'est pas assez bien déterminé par les conditions précédentes.

2°— Un pilier long de dimension uniforme, dont les extrémités sont solidement fixées par des disques, ou des bases, ou par tel mode d'assemblage qui permette de considérer les deux extrémités comme parfaitement encastrées, présente la même résistance à la rupture par compression qu'un pilier de même section, mais de longueur moitié moindre, dont les extrémités seraient arrondies, même si l'effort était dirigé suivant l'axe.

De cette remarque que fait Hodgkinson résulte exactement à dire que, dans ce cas, la résistance à la rupture est 4 fois celle d'un pilier de même dimension libre de tourner autour de ces extrémités, condition que donne rigoureusement la théorie.

3°— Le renflement ou l'accroissement de diamètre des colonnes, vers le milieu de leur longueur, augmente seulement leur résistance dans le rapport de $\frac{1}{7}$ à $\frac{1}{8}$.

Il est inutile de donner ici les nombreuses formules empiriques servant à déterminer les dimensions des supports dans chaque cas particulier, ces renseignements pratiques faisant d'ailleurs partie d'un autre enseignement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

241. — Formules de Hodgkinson traduites en mesures métriques.

- Poteaux en bois. - Pour des poteaux en bois à section carrée Hodgkinson a indiqué la formule $P = 2562 \frac{c^4}{l^2}$. (1)

Dans laquelle P est la charge de rupture,

C est le côté de la section exprimé en centimètres,

l est la hauteur exprimée en décimètres,

Mais les valeurs que donne cette formule ne sont pas d'accord avec les résultats suivants de quelques expériences dues à M^r^ Morin.

Hauteur l.	Côté c.	Charge de rupture P.	$\frac{P}{c^2}$	$\left(\frac{l}{c}\right)^2$.	Rapport du 4^e^ nombre au 5^e^
dm.	c.m.	kg.	kg par c.mq.		
15,37	4.45	4360	220	0,0838	2625
11,70	3.81	3560	245	0,1060	2311
11,70	2,59	793	118	0,0490	2408

La pratique a indiqué qu'il faut faire supporter aux poteaux en bois le dixième, au plus de la charge de rupture calculée avec la formule (1). On peut donc prendre pour formule pratique

$$P' = 256{,}2 \frac{c^4}{l^2},$$

ou en exprimant tout en mètres

$$P' = 256{,}2 \frac{c^4 \times 10^8}{l^2 \times 10^2} = 25620000 \frac{c^4}{l^2}.$$

La formule théorique obtenue précédemment est

$$N = \frac{1}{12} E \pi^2 \frac{c^4}{l^2},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$N = 822\,500\,000 \frac{c^4}{l^2}$$

La valeur de ce dernier coefficient est plus de trois fois celle du premier, et elle conduirait à des dimensions beaucoup trop faibles en pratique.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

242.—Application aux colonnes en fonte.—

— Colonnes pleines.— La formule donnée par Hodgkinson est

$$P = 10676\ \frac{D^{3.6}}{l^{1.7}},$$

dans laquelle P est la charge de rupture, d le diamètre, et l la hauteur de la colonne. En exprimant l et d en mètres, la formule devient

$$P = 562\,885\,840\ \frac{D^{3.6}}{l^{1.7}}.$$

La formule théorique

$$N = \frac{4\pi^2 n^2}{l^2}\,\varepsilon$$

donnerait, tous calculs faits,

$$N = 4\,845\,000\,000\ \frac{D^4}{l^2},$$

expression dans laquelle la valeur du coefficient est de beaucoup supérieure à celle que la pratique a indiquée.

— Colonnes creuses.— La formule d'Hodgkinson, applicable aux colonnes creuses, peut être déduite de la précédente en considérant une colonne creuse comme la différence entre deux colonnes pleines dont les diamètres seraient d et d': on a ainsi

$$P' = a\frac{D^{3.6} - d^{3.6}}{l^{1.7}}.$$

L'épaisseur, $\frac{D-d}{2} = e$, de la fonte est déterminée par la condition que la coulée se fasse régulièrement; cette épaisseur varie de 20 à 25 millimètres suivant la dimension des pièces.

Soit D le diamètre moyen; on a

$$d = D + e \qquad d' = D - e,$$

et la formule de Hodgkinson peut être écrite

$$P = a\frac{(D+e)^{3.6} - (D-e)^{3.6}}{l^{1.7}}.$$

L'application de cette formule peut se faire de plusieurs manières

1°.— Méthode par tâtonnements.— Si l'on remplace dans la formule, les exposants 3.6 du numérateur par 3, ce qu'on déclop-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=pe, on a une équation en D qui peut être résolue directement et qui four=
=nit une première approximation de la valeur de D. Cette valeur gui=
=dera dans les tâtonnements à faire pour résoudre l'équation d'une ma=
=nière suffisamment approchée

2°. — Méthode directe. — La formule

$$\frac{P \times l^{1,7}}{a} = (D+e)^{3,6} - (D-e)^{3,6},$$

donne en développant le second membre,

$$\left.\begin{aligned} &D^{3,6} + \frac{3,6}{1} D^{2,6} e + \frac{3,6 \times 2,6}{1.2} D^{1,6} e^2 + \frac{3,6 \times 2,6 \times 1,6}{1.2.3} D^{0,6} e^3 + \dots \\ &-D^{3,6} + \frac{3,6}{1} D^{2,6} e - \quad + \quad - \dots \end{aligned}\right\} = \frac{P\, l^{1,7}}{a},$$

et, en effectuant et simplifiant,

$$\frac{P\, l^{1,7}}{a} = 7,2\, D^{2,6} e \left[1 + \frac{2,6 \times 1,6}{1.2.3} \frac{e^2}{D^2} - \frac{2,6 \times 1,6 \times 0,6 \times 0,4}{1.2.3.4.5} \frac{e^4}{D^4} + \dots \right]$$

La série comprise dans la parenthèse est très-convergente, et il suffit de prendre le premier terme, les autres pouvant être négligés par rapport à celui-ci, ce qui donne alors

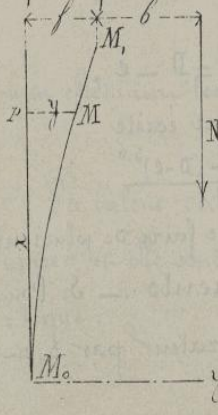
$$\frac{P\, l^{1,7}}{a} = 7,2\, D^{2,6} e ;$$

d'où

$$D^{2,6} = \frac{P\, l^{1,7}}{7,2\, a\, e},$$

expression qui peut être facilement calculée par logarithmes.

243. — Flexion d'une pièce soumise à l'action d'une force parallèle à son axe mais située en dehors de cet axe. —



Si $M_0 M_1$ représente la position de la pièce après qu'elle a été fléchie sous l'action de la force N, le moment fléchissant de cette force, par rapport à un point quelconque M, est

$$\mu = N(b + f - y) ;$$

mais on a

$$\mu = E f''(x) ; \quad \text{donc} \quad E f''(x) = N(b + f - y).$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En multipliant par dx et posant comme précédemment

$$z = \frac{dy}{dx}, \quad \text{d'où } dz = f''(x)\,dx,$$

puis intégrant, il vient pour l'équation de la fibre moyenne

$$x\sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}}} = \arccos\left(\frac{b+f-y}{b+f}\right).$$

244. — Valeur de R dans la section d'encastrement.

Considérons une pièce à section carrée de côté c ; la formule générale

$$R = \frac{\rho\mu}{I} + \frac{N}{\omega},$$

donne, en y remplaçant ρ, μ et I par leurs valeurs dans la section d'encastrement,

$$R = \frac{\rho \times N(b+f)}{\frac{1}{12}c^4} + \frac{N}{\omega} = \frac{N}{\omega}\left(1 + \frac{12(b+f)}{c^2}\right).$$

Si la hauteur est faible f est une quantité relativement très-petite et qui peut être négligée ; de plus si l'on veut obtenir le maximum de R il faut faire $\rho = \frac{c}{2}$ et l'on obtient

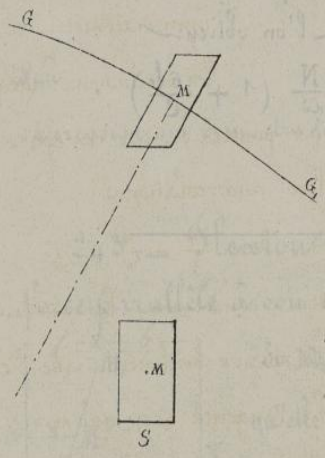
$$R = \frac{N}{\omega}\left(1 + \frac{6b}{c}\right).$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Poutre courbe.

245 .— Théorie de la flexion de la poutre courbe.— Les principes que nous avons utilisés pour déterminer les diverses conditions de la flexion d'une poutre prismatique, sont également applicables à une poutre courbe, mais les intégrations sont alors beaucoup plus complexes; quelquefois même elles ne peuvent s'obtenir que par approximation ou au moyen de tracés graphiques dont l'usage est presque obligatoire dans la plupart des circonstances.

246 .— Définition de la poutre courbe.— Le solide que nous allons étudier sous le nom de poutre courbe est celui qui est obtenu en faisant glisser un profil transversal S, de manière que son centre de gravité M parcourre les différents points d'une courbe plane GG, et que son plan, restant toujours perpendiculaire à celui de cette courbe, contienne dans chaque position le rayon de courbure de GG,.



Cette courbe GG, se nomme la ligne moyenne, et la théorie que nous allons exposer suppose que les dimensions du profil transversal sont toujours très petites par rapport aux rayons de courbure.

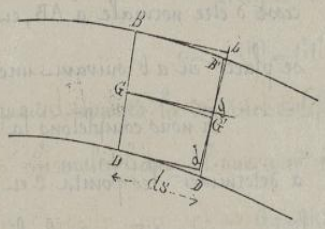
Enfin, pour simplifier la question, sans cela très complexe, nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

admettons que toutes les forces extérieures sont symétriques par rapport au plan de la ligne moyenne GG, plan qui reste dès lors invariable et dans lequel se produit la flexion de cette ligne.

Nous verrons ultérieurement que la théorie est encore applicable lorsque le profil varie peu d'un point à un autre, tout en restant symétrique par rapport au plan de la ligne moyenne, que l'on désigne aussi sous le nom de plan de flexion.

247. — Conditions d'équilibre d'une tranche de la poutre courbe. — Pour une tranche infiniment petite GG', je puis évidemment faire abstraction des courbures et remplacer par la pensée l'élément BB'DD' par l'élément prismatique équivalent BDbd.



On peut dès lors appliquer immédiatement à cet élément les conclusions auxquelles nous sommes arrivés dans la théorie des poutres droites en écrivant ainsi, qu'après la flexion, la section bd donne lieu aux relations :

$$N = Ei\omega, \quad \mu = \frac{EIi}{V}, \quad R = \frac{\nu\mu}{I} - \frac{N}{\omega},$$

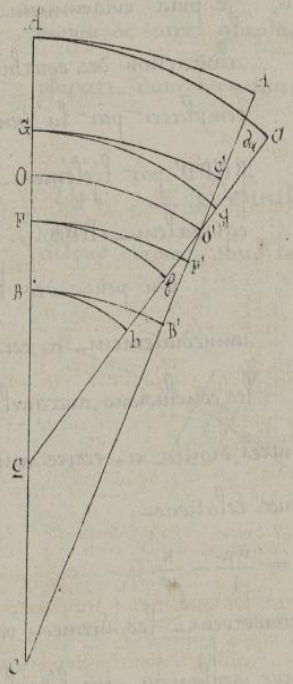
dans lesquelles les différentes lettres conservent les mêmes valeurs que dans les théories précédentes, sous cette réserve seulement que l'évaluation de ces valeurs a lieu par rapport à la tangente Gg, qui varie d'un point à un autre, et non pas par rapport à une direction constante qui était celle de la ligne moyenne de la poutre droite.

248. — Détermination directe des formules. — On peut aussi déterminer directement les relations précédentes entre les forces extérieures auxquelles est soumise chaque section de la poutre courbe et les réactions

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

élastiques qu'elle leur oppose. Considérons un élément de longueur d s de la poutre, compris entre deux sections normales AB, A'B' infiniment voisines; la longueur d s étant mesurée sur la ligne GG' des centres de gravité.

Lorsque la poutre aura été fléchie la section AA' se sera déplacée ainsi que la section BB' et l'élément de longueur d s se sera modifié dans sa forme de telle sorte que si on désigne sa section longitudinale par A,A', B,B, cette section ne pourra plus être exactement superposée à la figure AA'BB', mais AA' n'ayant pas changé de dimensions et n'ayant pas cessé d'être normale à la ligne des centres de gravité après sa déformation, on pourra porter A,B, sur AB, sans que la ligne Gg des centres de gravité cesse d'être normale à AB, et le côté A'B' viendra se placer en a b suivant une autre normale à Gg.



Si nous complétons la figure de manière à déterminer les points C et c de rencontre de la ligne primitive A'B', et de la ligne a b qui la représente après la flexion, avec la ligne AB, les rayons de courbure CG et cG pourront être respectivement désignés par r et par ρ avant et après la déformation.

La fibre FF', parallèle à GG', occupera dans les sections déformées les positions F f, normales aux rayons de courbure cf, et la force élastique développée dans cette fibre de section dw sera, d'après les formules de la compression ou de l'extension,

$$R\, dw \times \frac{FF' - Ff}{FF'},$$

la fraction $\frac{FF' - Ff}{FF}$ n'étant autre chose que le raccourcissement ou l'allongement élastique de la fibre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous évaluerons séparément les deux longueurs FF' et Ff qui entrent dans cette expression en fonction des rayons de courbure.

Les deux triangles CFF', CGG' donnent immédiatement

$$FF' = GG' \frac{cF}{cG} = GG' \frac{r - v}{r},$$

en désignant comme précédemment par v l'ordonnée de la fibre considérée par rapport à la ligne des centres de gravité.

Les deux triangles cFf, cGg donnent pareillement

$$Ff = Gg \frac{cF}{cG} = Gg \frac{f - v}{f},$$

et l'on évaluera facilement Gg par rapport à GG' par l'intermédiaire de la ligne OO' des fibres invariables, car on a simultanément

$$Gg = OO' \frac{cG}{cO} = OO' \frac{f}{f - V},$$

et $$OO' = GG' \frac{cO}{cG} = GG' \frac{r - V}{r},$$

V désignant toujours la distance de la fibre neutre à la fibre des centres de gravité.

En multipliant l'une par l'autre les deux dernières relations on trouve

$$Gg = GG' \times \frac{f}{r} \times \frac{r - V}{f - V},$$

et en substituant les valeurs de GG' et de Gg dans celles de FF' et de Ff on trouve

$$R\,d\omega \frac{FF' - Ff}{FF'} = R\,d\omega \times \frac{GG' \left[\frac{r - v}{r} - \frac{f}{r} \frac{r - V}{f - V} \times \frac{f - v}{f}\right]}{GG' \times \frac{r - v}{r}}$$

et après tous calculs faits,

$$R\,d\omega \frac{(f - r)(V - v)}{(f - V)(r - v)}.$$

Cette expression se simplifie beaucoup lorsque nous supposons que f et r sont très grands par rapport à V et v puisque alors nous pouvons écrire, pour la valeur approchée de la force élastique développée dans une fibre,

$$R\,d\omega \frac{(f - r)(V - v)}{rf} = R\,d\omega (v - V)\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{r}\right).$$

Ainsi la réaction élastique qui s'exerce suivant la fibre Ff est $E\,d\omega (v - V)\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{r}\right)$. La somme de toutes les réactions intérieures qui s'exercent dans le plan ab suivant les fibres ou du moins suivant les éléments prolongés en ligne droite de ces fibres, qui se trouvent dans la tranche ds considérée

29/10

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la poutre courbe sera dès lors :

$$\int E\, d\omega\, (v-V)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right).$$

Et si nous appelons N la somme des projections de toutes les forces extérieures sur la tangente au point g de la ligne des centres de gravité on aura pour l'équilibre.

$$N+\int E\, d\omega\, (v-V)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right)=0.$$

Mais en se reportant à la propriété fondamentale du centre de gravité on sait que

$$\int v\, d\omega\,(=0)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}=0\right.$$

Il reste alors, après intégration de $\int E\, d\omega\, (v-V)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right)$,

$$N-EV\omega\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right),$$

ω étant la section tout entière qui est projetée en ab.

Le moment par rapport au centre de gravité g de la force intérieure $E\, d\omega\, (v-V)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right)$ est :

$$E\, d\omega\, (v-V\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right) \times v.$$

La somme des moments de toutes les forces intérieures par rapport à l'axe horizontal qui passe par g et qui est perpendiculaire au plan de la figure sera donc :

$$\int E\, d\omega\, v\,(v-V)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right),$$

et l'on devra avoir encore pour l'équilibre, après la flexion :

$$\mu-\int E\, d\omega\, v\,(v-V)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right),$$

μ étant l'expression résumée des moments de toutes les forces extérieures par rapport au même axe horizontal g.

Le moment résultant des forces intérieures est pris de signe contraire au moment résultant des forces extérieures, car il faut nécessairement que ces moments soient non seulement égaux mais qu'ils s'exercent en sens inverse.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On a comme précédemment $\int v V d\omega = 0$, et par suite :

$$\mu = \int E\, d\omega\, v^2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\tau}\right) = EI\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\tau}\right),$$

I étant comme le moment d'inertie de la section BD par rapport à l'axe transversal qui passe par le point g .

On sait du reste que :

$$R\, d\omega = E\, d\omega\, (v - V)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\tau}\right).$$

D'où en divisant par $d\omega$, et par suite de la valeur de μ,

$$R = \frac{v\mu}{I} - \frac{N}{\omega}$$

Si nous ne trouvons pas dès à présent pour μ une valeur qui se présente sous une forme identique à celle qui a été précédemment donnée, c'est qu'il reste encore à faire subir aux équations précédentes des modifications que nous indiquerons un peu plus loin.

Nous remarquerons d'ailleurs que l'on a

$$\frac{Gg - GG'}{GG'} = i$$

en désignant par i l'allongement ou le raccourcissement élastique de la ligne des centres de gravité dans la longueur de l'élément ds et que la valeur précédente Gg donne immédiatement :

$$i = \frac{GG' \times \frac{\tau - V}{\tau} \times \frac{\rho}{\rho - V} - GG'}{GG'},$$

ou

$$i = \left(\frac{\tau - V}{\rho - V} \times \frac{\rho}{\tau} - 1\right) = V\frac{\tau - \rho}{\tau(\rho - V)},$$

ou en négligeant V par rapport à ρ et en divisant par le produit $\tau\rho$,

$$i = V\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\tau}\right).$$

Expression que l'on peut encore écrire en y introduisant la valeur de N

$$i = -\frac{N}{E\omega}.$$

249 . — Valeur du déplacement angulaire. — Nous pouvons en même temps calculer l'angle G'O'g $d\varphi$ dont a tourné le plan A'B' pendant la flexion. On sait en effet qu'un arc a pour mesure le produit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du rayon par l'angle correspondant ce qui donne

$$G'g = OG \times d\varphi$$

d'où $$d\varphi = \frac{G'g}{OG} = \frac{ids}{V},$$

ou en mettant pour i sa valeur,

$$d\varphi = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right) ds$$

ou en remarquant que

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{\mu}{EI}, \quad d\varphi = \frac{\mu}{EI} ds.$$

Nous aurons occasion de revenir plus tard sur cette équation, que nous laissons pour le moment sous la forme différentielle.

250. — **Identité des formules avec celles de la flexion d'une pièce droite.** — Nous terminerons en montrant que les équations du N° 248 reviennent à celles de la poutre droite. Cette vérification devient facile car nous venons de voir que:

$$ids = V\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right) ds.$$

Par suite il vient:

$$N = E\omega V\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right) = E\omega i; \quad \mu = EI\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right) = \frac{EIi}{V}.$$

251. — **Déplacement d'un point quelconque de la poutre** — Il s'agit maintenant, étant donnés, le déplacement de chacun des points d'une courbe, qui représentera pour nous la ligne des centres de gravité de la poutre courbe, d'évaluer le déplacement total éprouvé par son point extrême sous l'action de forces extérieures distribuées d'une manière quelconque.

Une courbe soumise aux conditions que nous supposons à notre ligne moyenne, considérée comme une fibre particulière de la poutre courbe, peut éprouver des déplacements de trois sortes:

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1° Un transport dans son plan sans aucune déformation.

2° Une dilatation ou une contraction sous l'influence de la température, c'est-à-dire une déformation due à la chaleur.

3° Une déformation due à l'action, sur chaque point de la courbe, des forces extérieures.

Le premier mouvement est le seul qui laisse la courbe identique à elle-même; il a seulement pour effet de changer sa position, sans altérer, en aucun point, son rayon de courbure. Nous rappellerons que l'on démontre en cinématique la proposition suivante: Lorsque deux figures identiques sont tracées dans un plan, quelle que soit leur position relative, l'une d'elles peut toujours être amenée à coincider avec l'autre par un mouvement de translation, et un mouvement de rotation autour d'un certain point, ces deux mouvements s'opérant dans le plan des deux figures.

Dès lors il est évident qu'au lieu de chercher à évaluer l'influence du transport sur les coordonnées du point de l'extrémité de la courbe, nous pourrons évaluer successivement les variations de coordonnées dues, en premier lieu au mouvement de translation, et en second lieu au mouvement de rotation dont le transport est le résultat final.

En faisant la somme algébrique des effets de ces deux mouvements, nous aurons l'évaluation de la variation totale éprouvée par chacune des coordonnées du point extrême.

Ainsi en résumé, nous avons à calculer les quantités dont varient les coordonnées du point extrême de la courbe.

1° Pour un mouvement général de translation;

2° Pour un mouvement général de rotation autour d'un point quelconque;

3° Sous l'influence de la dilatation;

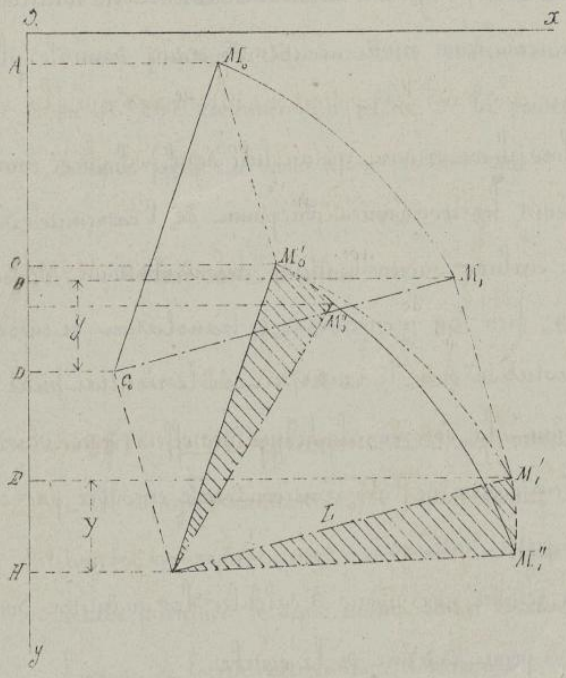
4° Sous l'influence de la déformation due aux forces extérieures.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

252 . — Mouvement de Translation. — Soient Δx_0 et Δy_0, les variations éprouvées par les coordonnées du point initial M_0 de la courbe; Δx_1 et Δy_1 les variations éprouvées, dans le même mouvement, par celles du point extrême M_1. — Puisque la courbe est transportée parallèlement à elle-même, chacun de ses points s'éloignera ou s'approchera des axes de coordonnées d'une même quantité; il en sera de même pour ses deux extrémités et l'on aura donc:

$$\Delta x_1 = \Delta x_0 , \qquad \Delta y_1 = \Delta y_0 .$$

253 . — Mouvement de rotation. — Soit C_0 le point autour duquel s'effectue cette rotation.



J'appelle X et Y, les projections respectives, sur les deux axes, de $C'_0 M_1 = C_0 M_1 = L$

On a:

$$X = L \cos \alpha ,$$

$$Y = L \sin \alpha$$

α étant l'angle que fait la droite $C'_0 M_1$ avec l'axe des x, supposé perpendiculaire à l'axe de y. Si nous faisons varier l'angle α, c'est-à-dire la direction de $C'_0 M_1$ comme la figure forme un système rigide, la la courbe tout entière tournera d'un angle égal à celui dont aura tourné la droite $C'_0 M_1$ et, dans ce mouvement, les coordonnées du point extrême M_1,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

auront subi des variations précisément égales à celles des projections X et Y de l. sur les axes.

Or les dernières équations donnent, si on les différentie par rapport à X, à Y et à α,

$$dX = -L \sin\alpha\, d\alpha, \qquad dY = L\cos\alpha\, d\alpha,$$

c'est-à-dire :

$$dX = -Y\, d\alpha, \qquad dY = X\, d\alpha.$$

Ces relations, qui donnent les variations des projections de $C'_0 M'_0$, pour une rotation infiniment petite, donnent donc en même temps celles des coordonnées du point M'_1.

Or $Y = F.H - CD$; Car $C_0 M_1$ est égal et parallèle à $C'_0 M'_1$, puisqu'on a supposé que toute la figure se transportait d'abord parallèlement à elle-même.

Nous verrons dans les applications ultérieures, que la rotation s'effectue en pratique, non pas autour d'un point quelconque du plan, mais autour du point initial M_0 ou après son déplacement M'_0.

Dans ce cas la droite $C_0 M_1$ se confond avec $M_0 M_1$ et CD devient AB. On a donc :

$$Y = AB, \quad \text{et} \quad dX = -AB.\, d\alpha.$$

En rappelant $y_1 = OB$ l'ordonnée primitive du point extrême et $y_0 = OA$ celle du point initial M_0, on voit que

$$AB = OB - OA = y_1 - y_0 \qquad \text{d'où} \qquad dX = -(y_1 - y_0)\, d\alpha$$

On trouverait de même que

$$dY = (x_1 - x_0)\, d\alpha$$

Expression dans laquelle x_0 et x, sont les abcisses primitives des points initial et extrême, M_0 et M_1 de la courbe.

Si ne considérons plus maintenant un angle de rotation infiniment

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

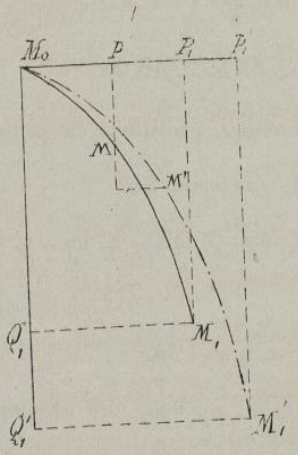
petit, mais, d'une manière générale, un angle fini φ_0, mesuré par l'angle dont aura tourné la tangente au point initial M_0 et en désignant par Δx_1 et Δy_1, les variations, également finies, des coordonnées du point extrême correspondant à cet angle, on aura par une intégration des deux dernières expressions :

$$\Delta x_1 = -(y_1 - y_0)\varphi_0 \qquad \Delta y_1 = (x_1 - x_0)\varphi_0 .$$

254 .— Translation et rotation simultanées. — Si l'on fait la somme algébrique des variations des coordonnées du point M_1 dans le cas d'une translation et d'une rotation simultanées, on voit que l'on a finalement les formules générales :

$$\Delta x_1 = \Delta x_0 - (y_1 - y_0)\varphi_0 , \quad \Delta y_1 = \Delta y_0 + (x_1 - x_0)\varphi_0 .$$

255 .— Déformation due à la température. — Pour évaluer les variations des coordonnées du point M_1 résultant de la déformation due à la chaleur, menons par le point initial M_0 des parallèles aux axes ; soit $M_0P_1M_1Q_1$ une plaque de métal ou de toute autre matière sur laquelle la courbe M_0MM_1 a été tracée ; lorsque la chaleur, produisant son effet, aura dilaté la plaque matérielle, la courbe sera devenue $M_0M'M'_1$.



On aura pour les variations de coordonnées du point M_1 devenu M'_1 :

$$\Delta x_1 = P_1P'_1 = M_0P'_1 - M_0P_1 = (1 + at)M_0P_1 - M_0P_1$$

t étant la température à laquelle la plaque et la courbe matérielles ont été élevées, et a le coefficient de dilatation linéaire de la matière considérée.

D'où :

$$\Delta x_1 = at \times M_0P_1 = at(x_1 - x_0)$$

et par abréviation, $\Delta x_1 = \tau(x_1 - x_0)$, x_1 et x_0

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

étant comme précédemment les abscisses des points extrême et initial de la courbe, on aurait de même :

$$\Delta y_1 - \tau (y_1 - y_0)$$

En résumé, si l'on tient compte simultanément du transport et de la rotation, d'une part et de la déformation due à la chaleur de l'autre, on trouve que les variations totales des coordonnées du point extrême M_1 sont :

$$\Delta x_1 = \Delta x_0 - (y_1 - y_0)\,\varphi_0 + \tau (x_1 - x_0)$$

$$\Delta y_1 = \Delta y_0 + (x_1 - x_0)\,\varphi_0 + \tau (y_1 - y_0)$$

Ces formules sont du reste applicables à une position quelconque des axes rectangulaires auxquels nous avons rapporté les points M_0 et M_1 dans leurs divers déplacements.

256. — Déformation due à l'action des forces extérieures. — Pour plus de généralité nous supposerons que les forces auxquelles est soumise la courbe sont variables d'un point à un autre. Le cas très simple d'une charge uniformément répartie se déduirait facilement des formules que nous allons établir.

Soit un point quelconque M de la courbe ou plutôt un élément ds de la courbe au point M ; N l'effort auquel est soumis cet élément, c'est-à-dire la composante tangentielle, particulière à ce point, des forces extérieures qui exercent leur action sur la poutre courbe.

D'après ce qui a été dit N° 251, on sait que cet effort aura pour effet de faire glisser le point M en M' suivant la tangente TT', en même temps que la trace M_0 du plan de profil qui contient cet élément aura tourné d'un angle MOM' autour d'un certain point de la fibre neutre et sera devenu OM'.

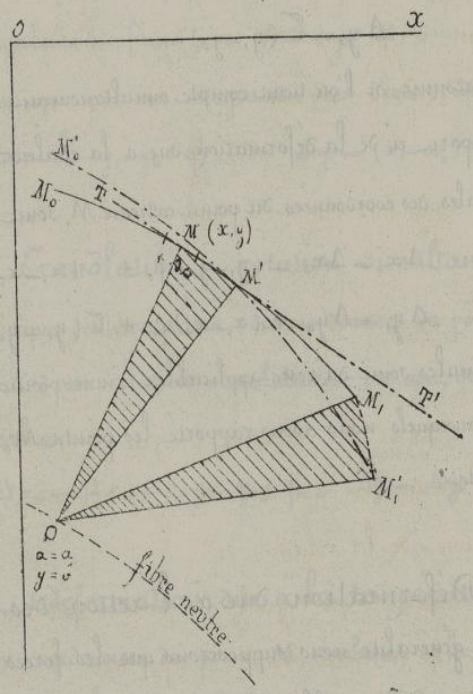
En supposant momentanément que toute la partie gauche de la

30/1

poutre courbe soit invariable et ne soit pas soumise à d'autre déformation, on voit que le point extrême M_1 sera entraîné dans ce mouvement et subira un changement de position qui l'amènera en M'_1, l'angle $M_1OM'_1$ étant égal à MOM'. On se rappelle du reste, N° 249, que l'expression de cet angle MOM' mesuré par le petit arc $MM' = d\varphi$ a été donnée par

$$d\varphi = \frac{\mu}{EI}\, ds,$$

μ étant l'expression résultante des moments de toutes les forces extérieures, pris par rapport à l'axe horizontal qui passe au point M, centre de gravité du profil tournant. Dans ce déplacement de M, ses coordonnées ont nécessairement subi des variations dx et dy.



Soient dx et dy celles qu'ont subi en même temps les coordonnées x et y du point considéré M.

On aura identiquement :

$$dx_1 = dx + e.$$

Si e est précisément égal à la différence $(dx_1 - dx)$ des variations dx_1 et dx, ou a $e = dx_1 - dx$.

De même :

$$dy_1 = dy + e', \quad \text{si } e' = dy_1 - dy.$$

Nous ne pouvons pas calculer directement, en fonction de quantités connues, les valeurs de dx_1 et dy_1. Mais nous pouvons le faire pour

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dx_1 dy_1, e en e', en ayant égard à ce fait que le glissement de M en M' est toujours accompagné, pour le profil en par suite pour M_1 de la rotation $d\varphi$.

On sait en effet que MM' sera égal à l'allongement proportionnel $i = \frac{N}{E\omega}$, multiplié par la longueur ds de l'élément considéré,

$$MM' = \frac{N}{E\omega}\, ds$$

Or en désignant par α l'angle que fait la tangente TT' avec l'axe des x, on a:

$$dx = MM' \cos\alpha \quad , \quad dy = MM' \sin\alpha \, ,$$

D'où

$$dx = \frac{N}{E\omega}\, ds \cos\alpha, \quad dy = \frac{N}{E\omega}\, .$$

Nous en aurions une seconde en considérant le transport de M en M' comme résultant de la rotation $d\varphi$.

En appelant $x=a$, $y=b$, les coordonnées du point fixe O autour duquel s'effectue cette rotation, en en se reportant au N.° 253, où l'on avait d'après la Figure:

$$dX = Y\, d\alpha - EH\, d\alpha \, ,$$

On voit que l'on aura ici, par suite des notations adoptées

$$dx = -(b-y)\, d\varphi \, ,$$

en d'après les mêmes principes:

$$dy = (x-a)\, d\varphi$$

Mais pour des raisons tout à fait identiques, en appliquant à la droite OM_1 les raisonnements faits sur la droite OM,

$$dx_1 = -(b-y_1)\, d\varphi \, , \quad dy_1 = (x_1 - a)\, d\varphi$$

D'où

$$dx_1 - dx = e - e' = -(y_1 - y)\, d\varphi \, ,$$

$$dy_1 - dy = e' - e = (x_1 - x)\, d\varphi \, .$$

Ces équations jointes à celles des pages 233 et 234 donnent donc

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

finalement :

$$dx_1 = \frac{N\cos\alpha}{E\omega}\,ds - (y_1 - y)\,d\varphi \;;$$

ou à cause de la relation de la page 233,

$$dx_1 = \frac{N\cos\alpha}{E\omega}\,ds - (y_1 - y)\,\frac{\mu\,ds}{EI}\,.$$

Les équations correspondantes en dy donneraient de même :

$$dy_1 = \frac{N\sin\alpha}{E\omega}\,ds + (x_1 - x)\,\frac{\mu\,ds}{EI}$$

Voilà donc les variations des coordonnées du point M, résultant de l'action des forces extérieures sur l'élément M qui est caractérisé par les coordonnées x et y.

Chaque point M', M'', M''' de la courbe étant de même soumis à un effort tangentiel N', N'', N''', donnera lieu au même résultat, et si l'on veut les variations totales Δx_1 et Δy_1 du point extrême M_1, résultant de toutes ces actions réunies, il faudra intégrer les seconds termes des équations précédentes depuis M_0 jusqu'à M_1. On a ainsi définitivement :

$$\Delta x_1 = \int_{M_0}^{M_1} \frac{N\cos\alpha\,ds}{E\omega} - \int_{M_0}^{M_1} (y_1 - y)\,\frac{\mu\,ds}{EI}\,,$$

$$\Delta y_1 = \int_{M_0}^{M_1} \frac{N\sin\alpha\,ds}{E\omega} + \int_{M_0}^{M_1} (x_1 - x)\,\frac{\mu\,ds}{EI}\,.$$

N, μ et α, aussi bien que x et y, variant d'un point à un autre.

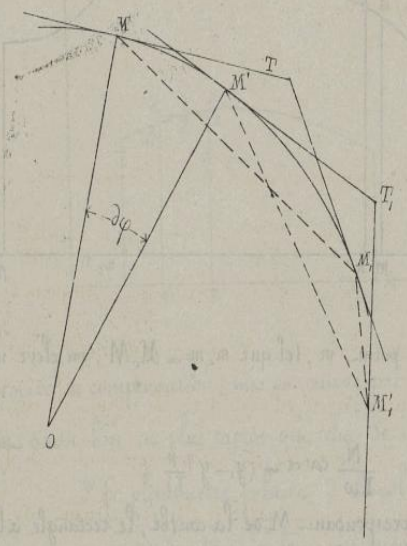
257. — Équations finales. — En résumé si l'on tient compte de toutes les influences qui peuvent faire varier les coordonnées du point extrême de la courbe, on aura pour expressions générales de ces variations :

$$(A)\qquad \Delta x_1 = \Delta x_0 - (y_1 - y_0)\,\varphi_0 + \tau\,(x_1 - x_0) + \int_{M_0}^{M_1} \frac{N\cos\alpha\,ds}{E\omega} - \int_{M_0}^{M_1} (y_1 - y)\,\frac{\mu\,ds}{EI}$$

$$(B)\qquad \Delta y_1 = \Delta y_0 + (x_1 - x_0)\,\varphi_0 + \tau\,(y_1 - y_0) + \int_{M_0}^{M_1} \frac{N\sin\alpha\,ds}{E\omega} + \int_{M_0}^{M_1} (x_1 - x)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous ferons, au sujet de la rotation $d\varphi$, une remarque qui nous servira dans la suite.



Lorsque M vient en M' la tangente M'T, a tourné naturellement du même angle $d\varphi$; soit T le point d'intersection de la tangente en M et de celle en M_1, toute la partie gauche de la figure étant entraînée, d'une manière invariable, dans ce mouvement de rotation, le point T viendra en T_1, tel que $M'T_1 = MT$, et la droite TM_1 tournant aussi de $d\varphi$ sera devenue $T_1M'_1$ on aura donc aussi pour cette tangente M_1T',

$$d\varphi = \frac{\mu ds}{EI}.$$

Si l'on intègre de M_0 à M_1 c'est-à-dire si l'on fait la somme des déplacements angulaires de tous les éléments de la courbe, on a:

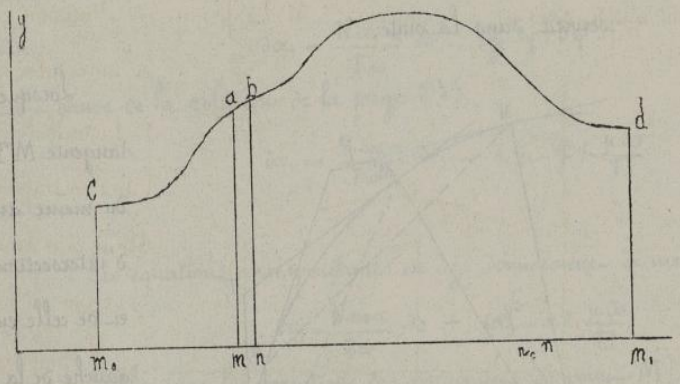
$$\varphi_1 - \varphi_0 = \int_{M_0}^{M_1} \frac{\mu ds}{EI}, \quad \text{ou} \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \int_{M_0}^{M_1} \frac{\mu ds}{EI},$$

pour l'angle total de rotation de la tangente au point extrême.

258. — Détermination graphique des intégrales qui entrent dans les équations (A) et (B). — Les équations générales (A) et (B) renferment des intégrales qui, la plupart du temps, ne peuvent se calculer que graphiquement. Avant de passer aux applications de la théorie que nous venons d'exposer, nous allons donner rapidement les méthodes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pratiquer au moyen desquelles on évalue ces intégrales. Sur l'axe des x on prend une longueur égale au développement de la



fibre moyenne M_0M_1. Si au point m, tel que $m_0m = M_0M$, on élève une perpendiculaire égale à

$$\frac{N}{E\omega}\cos\alpha - (y_1 - y)\frac{\mu}{EI},$$

calculée pour le point correspondant M de la courbe, le rectangle $abnm$, d'épaisseur $mn = ds$, pourra être considéré comme représentant la différentielle.

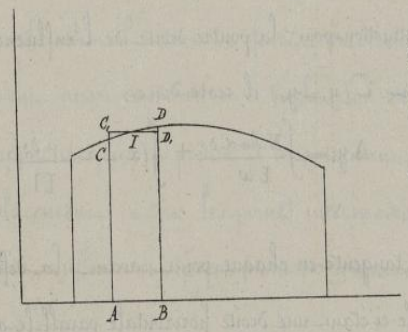
$$\left[\frac{N}{E\omega}\cos\alpha - (y_1 - y)\frac{\mu}{EI}\right]ds.$$

Dans ces expressions N est obtenu, comme nous l'avons déjà dit, en projetant sur la tangente au point M chacune des forces extérieures qui agit sur la poutre courbe et en faisant la somme des projections de toutes les forces extérieures agissant sur la poutre à la droite du point M; $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ se déduisent de l'équation de la fibre moyenne, ou à son défaut se mesure directement; enfin μ est la somme des moments de toutes les forces extérieures pris par rapport au même point M de la fibre moyenne.

En faisant la même construction pour chacun des points de la fibre moyenne, on aura une série d'ordonnées dont on réunira les sommets par une ligne continue. Il suffira pour connaître la valeur numérique de l'intégrale $\int_{M_0}^{M}\frac{N\cos\alpha}{E\omega}ds - \int_{M_1}^{M}(y_1 - y)\frac{\mu}{EI}ds$, de faire la quadrature de l'aire m_0cabdm_1nm. On calculerait d'une manière identique la valeur de $\int_{M_0}^{M}\frac{N\sin\alpha}{E\omega}ds + \int_{M_0}^{M_1}(x_1 - x)\frac{\mu}{EI}ds$

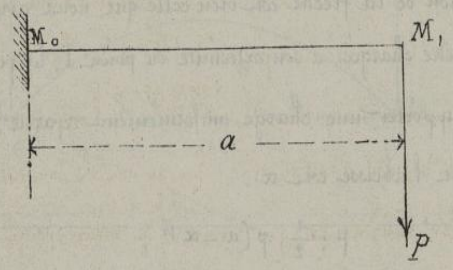
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

259. — Quadrature des Aires. — Pour la détermination de ces quadratures on peut employer : 1° La formule de Simpson, en décomposant la surface en un nombre pair de bandes égales ; 2° La méthode qui consiste à décomposer l'aire en trapèzes curvilignes, tels que ABCD, et à remplacer ensuite chacun d'eux par un rectangle équivalent ABC_1D_1. Il est facile d'obtenir que le triangle C_1IC soit égal à D_1ID et ce procédé de compensation, mis en œuvre par M. Bienvière pour les plans du cadastre, est aussi bon et plus rapide que celui de Simpson.



3° Le planimètre polaire d'Amsler, qui mesure mécaniquement les aires avec une exactitude tout à fait satisfaisante.

260. — Généralité des formules en application sommaire à la poutre droite encastrée. — La poutre droite n'étant autre chose qu'une poutre courbe dont le rayon de courbure est infini, tout ce que nous venons d'établir s'applique nécessairement à elle, puisque les formules (A) et (B) sont générales.



L'on devra donc trouver au moyen de (A) et (B) les résultats connus, si l'on y exprime les conditions spéciales de la poutre droite.

Soit donc une poutre droite $M_0M_1 = a$, encastrée en M_0 et chargée en M_1 d'un P. Proposons-nous de déterminer au moyen de la relation (B) la flèche en M_1 après l'application de ce poids. Nous avons ici, d'après les conditions

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de l'encastrement :

$$\Delta y_0 = 0.$$

et $(x_1 - x_0)\varphi_0 = 0$, la tangente au point d'encastrement M_0 restant horizontale. En continuant de faire abstraction pour la poutre droite de l'influence de la température, c'est-à-dire supprimant $\tau(y_1 - y_0)$ il reste donc :

$$\Delta y_1 = \int \frac{N \sin\alpha \, ds}{E\omega} + \int (x_1 - x) \frac{\mu \, ds}{EI}.$$

Mais ici la tangente en chaque point, avant la déformation, étant la courbe elle-même, à celle-ci étant une droite horizontale parallèle à Ox, on $\alpha = 0$. La première intégrale disparaît donc :

De plus $x_1 = a$ et $ds = dx$; d'où, $\Delta y_1 = \int (a - x) \frac{\mu \, dx}{EI}$.

La force P étant la seule force extérieure, on a, pour un point quelconque dont l'abscisse est x

$$\mu = (a - x) P,$$

d'où

$$\Delta y_1 = \int_0^a (a - x) \frac{P \, dx}{EI} = \frac{P}{EI} \frac{a^3}{3}.$$

Cette expression de la flèche est bien celle que nous avions déjà trouvée.

Si au lieu d'être chargée, à son extrémité, du poids P, la poutre droite encastrée avait à supporter une charge uniformément répartie, p par mètre, on aurait, pour le point dont l'abscisse est x :

$$\mu = \frac{1}{2} p (a - x)^2 ;$$

On aurait par suite :

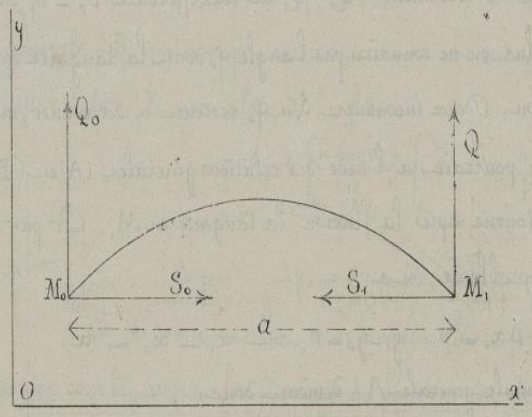
$$\Delta y_1 = \int_0^a \frac{1}{2} \frac{p}{EI} (a - x)^3 dx = \frac{1}{8} \frac{p a^4}{EI},$$

ce qui est conforme au résultat connu.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

261 . — Application aux cas principaux de la poutre courbe. — Les formules générales (A) et (B) se prêteraient de la même façon à la détermination de la flèche que prendrait un point quelconque d'une poutre courbe sous l'action de forces extérieures connues à l'avance, mais elles peuvent aussi conduire à l'évaluation des réactions exercées par les points d'appui ou par les points d'encastrement, de manière à obtenir ensuite celle du déplacement de tous les points intermédiaires de la poutre. Quelques applications suffiraient pour montrer comment ces déterminations doivent être faites.

262 . — Poutre courbe reposant sur deux appuis de niveau. — Supposons un arc posé sur deux appuis de niveau M_0 et M_1 et appelons Q_0, Q_1, S_0 et S_1 les composantes verticales et horizontales des réactions respectives que ces appuis opposent à la pression que leur font supporter la poutre courbe.



En projetant sur l'axe des x on a :

$$S_0 - S_1 + \Sigma P_x = 0 ,$$

P étant une des forces extérieures connues qui agissent sur la poutre.

La projection sur OY donne :

$$Q_0 + Q_1 - \Sigma P_y = 0 .$$

Dans ces expressions nous considérons les projections des forces comme

31/11

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

comme positions lorsqu'elles tendent à éloigner, dans le sens des coordonnées positives leur point d'application de l'origine en quant aux réactions à déterminer, nous leur donnons les signes correspondant aux sens qui sont indiqués par les flèches, sauf à trouver des valeurs négatives dans la suite des calculs si nous nous sommes trompés dans cette première appréciation.

En prenant les moments par rapport à l'axe horizontal projeté en M_0 on a :

$$\Sigma \mathcal{M}_{M_0} P - a Q_1 = 0 .$$

Dans cette nouvelle relation les moments sont pris positivement lorsque les forces individuelles que l'on aura à considérer tendront à faire tourner leur point d'application dans le même sens que si l'axe Oy était rabattu sur l'axe Ox.

Les trois équations précédentes qui expriment que l'équilibre est établi, pourront servir à déterminer Q_0, Q_1 et la différence $S_0 - S_1$, ou S_0 en fonction de S_1.

De plus on ne connaît pas l'angle φ_0 dont la tangente en M_0 a tourné après la flexion. Deux inconnues S_1 et φ_0 restent à déterminer ; mais si on les connaissait, on pourrait à l'aide des relations générales (A) et (B) calculer φ_1, angle dont a tourné, après la flexion, la tangente en M_1. Or par suite des conditions du problème, on a :

$$\Delta x_1 = 0 ; \quad \Delta \alpha_0 = 0 ; \quad y_1 - y_0 = 0 ; \text{ et } x_1 - x_0 = a .$$

La formule générale (A) devient donc :

$$0 = a\tau + \int \frac{N \alpha \alpha \, ds}{E\omega} - \int (y_1 - y) \frac{\mu \, ds}{EI} .$$

Soient N' et μ' les valeurs de N et μ, abstraction faite de la force inconnue S_1 que l'on va mettre en évidence ; Cette force particulière S_1 donnera les intégrales

$$- \int \frac{S_1 \alpha x^2 \alpha \, ds}{E\omega} \quad \text{et} \quad - \int (y_1 - y)^2 \frac{S_1 \, ds}{EI} .$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

N étant égal, pour cette force, considérée seule, à $-S_1 \cos\alpha$, et μ à $(y_1 - y) S_1$,

on devra évidemment avoir :

$$\int \frac{N \cos\alpha \, ds}{E\omega} - \int (y_1 - y) \frac{\mu \, ds}{EI} = \int \frac{N' \cos\alpha \, ds}{E\omega} - \int (y_1 - y) \frac{\mu' \, ds}{EI} -$$

$$- \int \frac{S_1 \cos^2\alpha \, ds}{E\omega} - \int (y_1 - y)^2 \frac{S_1 \, ds}{EI}.$$

En portant dans l'équation (A) simplifiée ces valeurs des intégrales de N et μ, on a :

$$0 = a\tau + \int \frac{N' \cos\alpha \, ds}{E\omega} - \int (y_1 - y) \frac{\mu' ds}{EI} - \int \frac{S_1 \cos^2\alpha \, ds}{E\omega} - \int (y_1 - y)^2 \frac{S_1 ds}{EI},$$

où tout est connu, à l'exception de S_1, que cette équation servira à déterminer.

Connaissant S_1 on pourra ensuite calculer N et μ pour l'ensemble de toutes les forces, y compris la force S_1, et en portant leur valeur dans l'équation générale (B) qui n'a pas encore servi, on obtiendra facilement la valeur de φ_0. Cette équation B sera alors de la forme

$$0 = a\varphi_0 + \int_{M_0}^{M_1} \frac{N' \sin\alpha \, ds}{E\omega} - \int_{M_0}^{M_1} (x_1 - x) \frac{\mu \, ds}{EI},$$

car $\qquad \Delta y_1 = 0, \quad \Delta y_0 = 0 \quad$ et $\quad \tau (y_1 - y_0) = 0.$

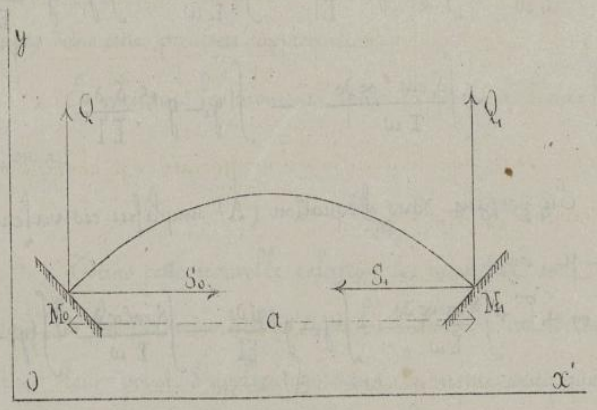
En donnant les coordonnées X et Y d'un point quelconque de la poutre courbe, avant la flexion, on pourra, au moyen des formules générales (A) et (B) calculer les variations ΔX et ΔY de ce point, après la déformation.

263. — Poutre courbe encastrée à ses deux extrémités, en deux points de niveau. — La condition d'encastrement suppose que la direction de la courbe moyenne est déterminée aux deux extrémités M_0 et M_1.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'équilibre étant établi après la déformation, en projetant toutes les forces sur les axes des coordonnées, on a nécessairement

$$(a)\quad S_0 - S_1 + \Sigma P_x = 0 \qquad (b)\quad Q_0 - Q_1 + \Sigma P_y = 0$$



les différentes lettres de ces relations ayant respectivement la même signification que dans l'exemple précédent.

Enfin les moments pris par rapport à l'axe horizontal M_1 doivent aussi former une somme égale à 0, ce qui donne la nouvelle relation

$$(c)\quad \Sigma \mathcal{M}_{M_0} P - Q_1 a + \mu_1 - \mu_0 = 0 ,$$

μ_1 et μ_0 étant les moments fléchissants que nous supposons résulter en M_0 et en M_1 de la condition d'encastrement.

Les forces extérieures sont toutes supposées connues; les quantités inconnues sont ici $S_0, Q_0, \mu_0, S_1, Q_1$ et μ_1. Elles sont au nombre de six et il nous faut donc trois autres relations entre ces quantités, pour pouvoir déterminer la valeur de chacune d'elles.

Deux de ces équations nous seront données en exprimant l'invariabilité du point M_1, et nous nous procurerons la dernière en appliquant à la poutre l'équation suivante, démontrée précédemment,

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \int \frac{\mu\, ds}{EI}$$

et dans laquelle φ_0 et φ_1 désignent respectivement les angles dont a tourné, après la flexion, les tangentes aux points M_0 et M_1.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Or ici, à cause de l'encastrement la différence $\varphi - \varphi_0$ est nécessairement nulle d'où $\varphi_1 - \varphi_0 = 0$, car les deux tangentes aux points M_0 et M_1 n'ont éprouvé, ni l'une ni l'autre aucun déplacement.

On a donc, en mettant en évidence les trois quantités inconnues S_1, Q_1 et μ_1 :

$$(D) \quad 0 = \int \frac{\mu\, ds}{EI} - \int \frac{\mu'\, ds}{EI} + \int \frac{S_1 (y_1 - y)\, ds}{EI} - \int \frac{Q_1 (a - x)\, ds}{EI} + \int \frac{\mu_1\, ds}{EI}$$

relation dans laquelle μ' est la valeur générale de μ, abstraction faite des forces S_1 et Q_1 et du moment μ_1.

On a du reste :

$$\Delta x_1 = 0 ; \quad \Delta x_0 = 0 \text{ et } \varphi_0 = 0 . \text{ Enfin } x_1 - x_0 = a.$$

L'équation générale (A) devient alors

$$0 = \alpha \tau + \int \frac{N \cos\alpha\, ds}{E\omega} - \int (y_1 - y) \frac{\mu\, ds}{EI} .$$

Parmi les forces que comprend N et μ_1 il y en a qui sont connues, leur ensemble donnera, je suppose :

$$(e) \qquad \int \frac{\bar{N} \cos\alpha\, ds}{E\omega} - \int (y_1 - y) \frac{\mu\, ds}{EI} ;$$

S_1 fournira les deux termes :

$$(f) \qquad - \int \frac{S \cos^2\alpha\, ds}{E\omega} - \int (y_1 - y)^2 \frac{S_1\, ds}{EI} ;$$

Q_1 donnera également :

$$(g) \qquad - \int \frac{Q_1 \sin\alpha \cos\alpha\, ds}{E\omega} + \int (a - x)(y_1 - y) \frac{Q_1\, ds}{EI} ;$$

et μ_1 sera représenté par l'expression :

$$(h) \qquad - \int \frac{\mu_1 (y_1 - y)\, ds}{E\omega} .$$

On aura donc entre toutes ces quantités la relation :

$$\int \frac{N \cos\alpha\, ds}{E\omega} - \int (y_1 - y) \frac{\mu\, ds}{EI} = (e) + (f) + (g) + (h).$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Expression dans laquelle S_1, Q_1 et μ_1 sont constants; et enfin

$$(i) \qquad 0 = x\,\Sigma + (e) + (f) + (g) + (h),$$

forme sous laquelle se présentera finalement la formule générale (A).

Pour l'équation générale (B), on a aussi :

$$\Delta y_1 = \Delta y_0 = y_1 - y_0 = 0 ; \quad \varphi_0 = 0 ;$$

D'où, en mettant en évidence les quantités inconnues, mais constantes, S_1, Q_1 et μ_1,

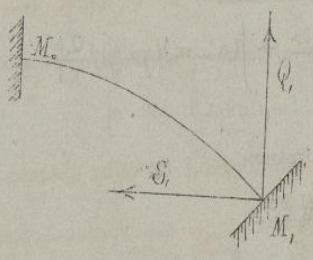
$$(j) \qquad 0 = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{N \sin\alpha\, ds}{E\omega} + \int (x_1 - x)\frac{\mu' ds}{EI} - \int \frac{S_1 \cos\alpha \sin\alpha\, ds}{E\omega} \\ \displaystyle + \int (x_1 - x)(y_1 - y)\frac{S_1 ds}{EI} - \int \frac{Q_1 \sin^2\alpha\, ds}{E\omega} - \int (x_1 - x)^2 \frac{Q_1 ds}{EI} + \int \frac{\mu_1 ds}{EI}(x, x') \end{array} \right.$$

où N et μ se rapportent à l'ensemble des forces connues.

Les relations (a), (b), (c), (d), (i) et (j) forment ainsi six équations du premier degré qui feront connaître $S, Q, \mu, S_0 Q_0$ et μ_0.

On pourra alors calculer les valeurs de N et de μ qui se rapportent à l'ensemble de toutes les forces auxquelles est soumise la poutre, porter ces valeurs dans les formules générales (A) et (B) et en déduire, après la flexion, les variations des coordonnées d'un point quelconque M que l'on se sera donné à priori.

264. — Poutre courbe symétrique. — Si tout est symétrique, par rapport au milieu de la poutre la tangente au sommet sera horizontale; on pourra alors considérer l'arc comme encastré en ce point milieu et ne plus s'occuper que de sa moitié.



D'abord si M_1 n'est pas encastré, on aura les 2 équations

$$Q_1 - \Sigma P y = 0$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En exprimant que :

$$y_1 - f, \quad \Delta x_1 = 0 \quad x_1 - x_0 = a \text{ et } \varphi_0 = 0$$

$$0 = a\,T + \int \frac{N' \cos\alpha\, ds}{E\omega} - \int (y_1 - y)\,\frac{\mu' ds}{EI} - \int \frac{S_1 \cos^2\alpha\, ds}{E\omega} - \int (f - y)^2 \frac{S_1 ds}{EI}.$$

De ces deux équations fondamentales on tirera Q_1 et S_1 et on aura par conséquent tous les éléments nécessaires pour qu'en se servant comme précédemment des formules générales (A) et (B) on puisse calculer Δx_1 et Δy_1 pour un point quelconque M.

Si M_1 est encastré, soit μ_1 le moment fléchissant en ce point résultant de l'encastrement : On aura pour l'équilibre :

$$\Sigma P y - Q_1 = 0$$

$$0 = \begin{cases} a\,T + \int \frac{N' \cos\alpha\, ds}{E\omega} - \int (y_1 - y)\frac{\mu' ds}{EI} \\ - \int \frac{S_1 \cos^2\alpha\, ds}{E\omega} - \int (f - y)^2 \frac{S_1 ds}{EI} - \int (y_1 - y)\frac{\mu_1 ds}{EI}. \end{cases}$$

Et enfin :

$$0 = \begin{cases} f\,T + \int \frac{N' \sin\alpha\, ds}{E\omega} + \int (x_1 - x)\frac{\mu' ds}{EI} - \int \frac{S_1 \sin\alpha \cos\alpha\, ds}{E\omega} \\ + \int (x_1 - x)(y_1 - y)\frac{S_1 ds}{EI} + \int (x_1 - x)\frac{\mu_1 ds}{EI}. \end{cases}$$

Ces trois équations permettent de calculer S_1, Q_1 et μ_1 et par conséquent les valeurs de Δx_1 et Δy_1 pour un point quelconque, au moyen des formules générales (A) et (B).

Nous rappellerons en terminant l'exposé de cette théorie qu'elle est applicable seulement dans le cas où les charges n'entraînent pas une déformation assez considérable pour mettre en défaut les hypothèses fondamentales sur lesquelles elle repose.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Solides d'égale résistance.

265 — Définition des solides d'égale résistance. — On a établi d'une manière générale que la formule

$$R = \frac{v\mu}{I} - \frac{N}{\omega}$$

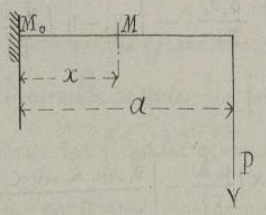
est applicable à la poutre courbe comme à la poutre droite, et que cette formule se réduit à

$$R = \frac{v\mu}{I}$$

lorsque la fibre neutre se confond avec la fibre moyenne.

Lorsque la poutre est encastrée à une extrémité et chargée à l'autre, on a, pour $N = 0$,

$$R = \frac{v\mu}{I} = \frac{P(a-x)v}{I},$$



ce qui montre que R varie comme μ d'un point à un autre si le profil est constant, en sorte qu'il y a, pour les diverses parties de la longueur du solide, des sections plus fatiguées que d'autres.

Cette condition est désavantageuse au point de vue de la meilleure utilisation de la matière, et l'on appelle **solides d'égale résistance** ceux pour lesquels la plus grande résultante des forces élastiques par unité de surface est la même pour toutes les sections.

266. — Solides d'égale résistance à section rectangulaire. — Si les dimensions de la section rectangulaire sont b et c, on a $I = \frac{1}{12} bc^3$, $v = \frac{c}{2}$ et la formule précédente devient :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$R = \frac{6P(a-x)}{bc^2}. \qquad (1)$$

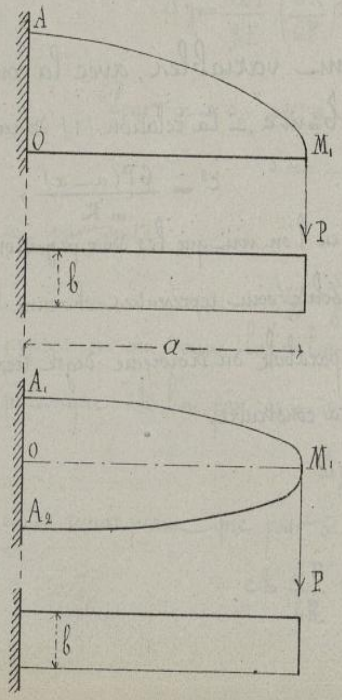
La valeur R peut rester constante pour tous les points de la longueur, à la condition que $\frac{a-x}{bc^2}$ soit constant, c'est-à-dire que le profil de la poutre soit variable. Or, un solide dont la section transversale est variable peut être considéré comme formé d'une suite de solides prismatiques de longueurs infiniment petites, et les formules ordinaires de la flexion plane sont encore applicables. Dans cette hypothèse, on peut admettre que l'une des deux dimensions soit constante, et l'on peut alors déduire de la formule générale les valeurs correspondantes de l'autre dimension à toute distance de la section d'encastrement. On peut d'ailleurs poser aussi $\frac{b}{c} = m$ et calculer les dimensions nécessaires pour satisfaire à la condition d'égale résistance.

1°. — Cas où c est variable et b constant. — La formule (1) donne

$$c^2 = \frac{6P(a-x)}{bR},$$

et l'on voit que la relation qui détermine le profil longitudinal de la poutre est une parabole ordinaire dont l'ordonnée, dans la section d'encastrement, a pour valeur

$$c = \sqrt{\frac{6Pa}{bR}}.$$



Au lieu de donner à la poutre un profil limité à sa partie inférieure par la droite OM_1, et à sa partie supérieure par la parabole AM_1, on peut, comme cela se fait ordinairement, adopter une disposition symétrique par rapport à la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

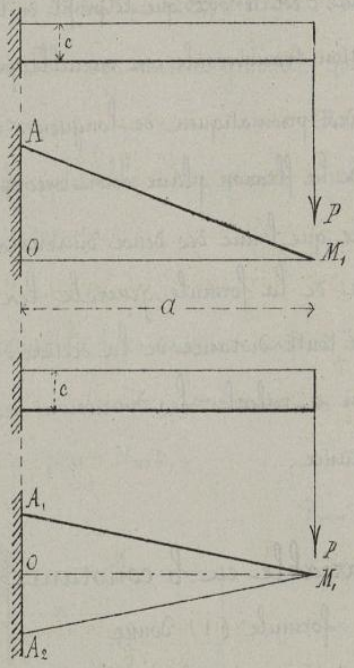
fibre moyenne ; dans ce cas on porte la moitié de l'ordonnée au dessus de la ligne OM_1, la moitié en dessous, et le profil, qui est alors donné pour la figure $A_1 M_1 A_2$, est encore une parabole.

2° — Cas où b est variable et c constant. — La relation (1), mise sous la forme

$$b = \frac{6P(a-x)}{Rc^2},$$

montre que, dans l'hypothèse admise, le profil du solide est limité à sa partie supérieure par une ligne droite dont l'ordonnée, dans la section d'encastrement, a pour valeur

$$b = \frac{6Pa}{c^2R}.$$



Si l'on veut que le profil soit symétrique par rapport à l'horizontale OM_1, il faut prendre

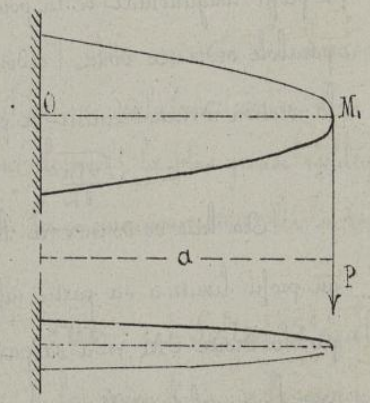
$$OA_1 = OA_2 = \frac{1}{2}OA,$$

et la projection horizontale du solide est alors représentée par le triangle isocèle $A_1 M_1 A_2$.

3° — Cas où b et c sont variables, avec la condition $b = mc$. — La relation (1) devient ici

$$c^3 = \frac{6P(a-x)}{mR},$$

et l'on voit que les deux projections du solide sont représentées chacune par une parabole du troisième degré très facile à construire.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

268. — Détermination de la flèche. — Un solide d'égale résistance doit être préféré à un solide prismatique au point de vue de l'économie de la matière, Mais, on peut montrer que dans le premier la flexion est double de ce qu'elle serait pour le second.

En effet si dans la formule générale de la poutre courbe on pose $\Delta x_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $x_1 = a$, si en outre on néglige le terme en T et si enfin l'on tient compte de ce que la force verticale T a une projection nulle sur chacun des éléments primitivement horizontaux, il vient, pour la flèche au point M_1.

$$\Delta y_1 = \int \frac{\mu ds}{EI} (a - x).$$

En remplaçant I et μ par leurs valeurs et posant $ds = dx$, on a

$$\Delta y_1 = \int \frac{12P}{Ebc^3} (a-x)^2 dx.$$

Si b est constant on a

$$c^3 = \frac{6P(a-x)^{\frac{3}{2}}}{bR},$$

et la valeur de Δy_1 devient, après les transformations convenables,

$$\Delta y_1 = \frac{12P}{bE} \left(\frac{bR}{6P}\right)^{\frac{5}{2}} \int (a-x)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{8P}{bE} \left(\frac{bR}{6P}\right)^{\frac{5}{2}} (a-x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Pour $x = 0$, on a $\Delta y_1 = 0$, d'où

$$0 = -\frac{8P}{bE} \left(\frac{bR}{6P}\right)^{\frac{5}{2}} a^{\frac{3}{2}} + C,$$

et par suite

$$\Delta y_1 = \frac{8P}{bE} \left(\frac{bR}{6P}\right)^{\frac{5}{2}} \left(a^{\frac{3}{2}} - (a-x)^{\frac{3}{2}}\right),$$

expression qui donne la valeur de la flèche correspondante à une abscisse quelconque. Si l'on pose $x = a$, il vient

$$\Delta y_1 = \frac{8P}{bE} \left(\frac{bR}{6P}\right)^{\frac{5}{2}} a^{\frac{3}{2}};$$

et en remarquant que pour $x = 0$, l'expression

$$c_0^2 = \frac{6P}{bR}(a-x) \quad \text{donne} \quad R = \frac{6Pa}{bc_0^2}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On trouve

$$\Delta y_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{P a^3}{E \times \frac{1}{12} b c_0^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{P a^3}{EI},$$

valeur double de celle qui donne une poutre à section rectangulaire ayant pour section constante la section même de la poutre d'égale résistance à l'encastrement.

269. — Solide d'égale résistance par rapport à une charge uniformément répartie. — Si, au lieu d'être chargée à son extrémité, la poutre supporte une charge uniformément répartie, on a $\mu = \frac{1}{2} p (a-x)^2$; et s'il s'agit d'une section rectangulaire, la formule $R = \frac{v\mu}{I}$ devient

$$R = \frac{3p(a-x)^2}{bc^2}$$

et, suivant qu'on regarde b ou c comme constant, cette relation donne

$$c^2 = \frac{3p(a-x)^2}{bR} \quad \text{ou} \quad b = \frac{3p(a-x)^2}{c^2 R}.$$

La première de ces équations représente une hyperbole et la seconde, une parabole, de sorte que dans chaque cas la forme du solide est facile à déterminer.

270. — Solide d'égale résistance à section circulaire. — On a ici $I = \frac{1}{4}\pi r^4$.

1°. — Si le solide est chargé d'un poids P à son extrémité, la formule $R = \frac{v\mu}{I}$ devient

$$R = \frac{4P(a-x)}{\pi r^3}, \quad \text{d'où} \quad r^3 = \frac{4P(a-x)}{\pi R},$$

ce qui représente une parabole du troisième degré.

2°. — Si la charge est uniformément répartie, on a

$$R = \frac{2p(a-x)^2}{\pi r^3}, \quad \text{d'où} \quad r^3 = \frac{2p(a-x)^2}{\pi R},$$

équation qui détermine la forme du profil.

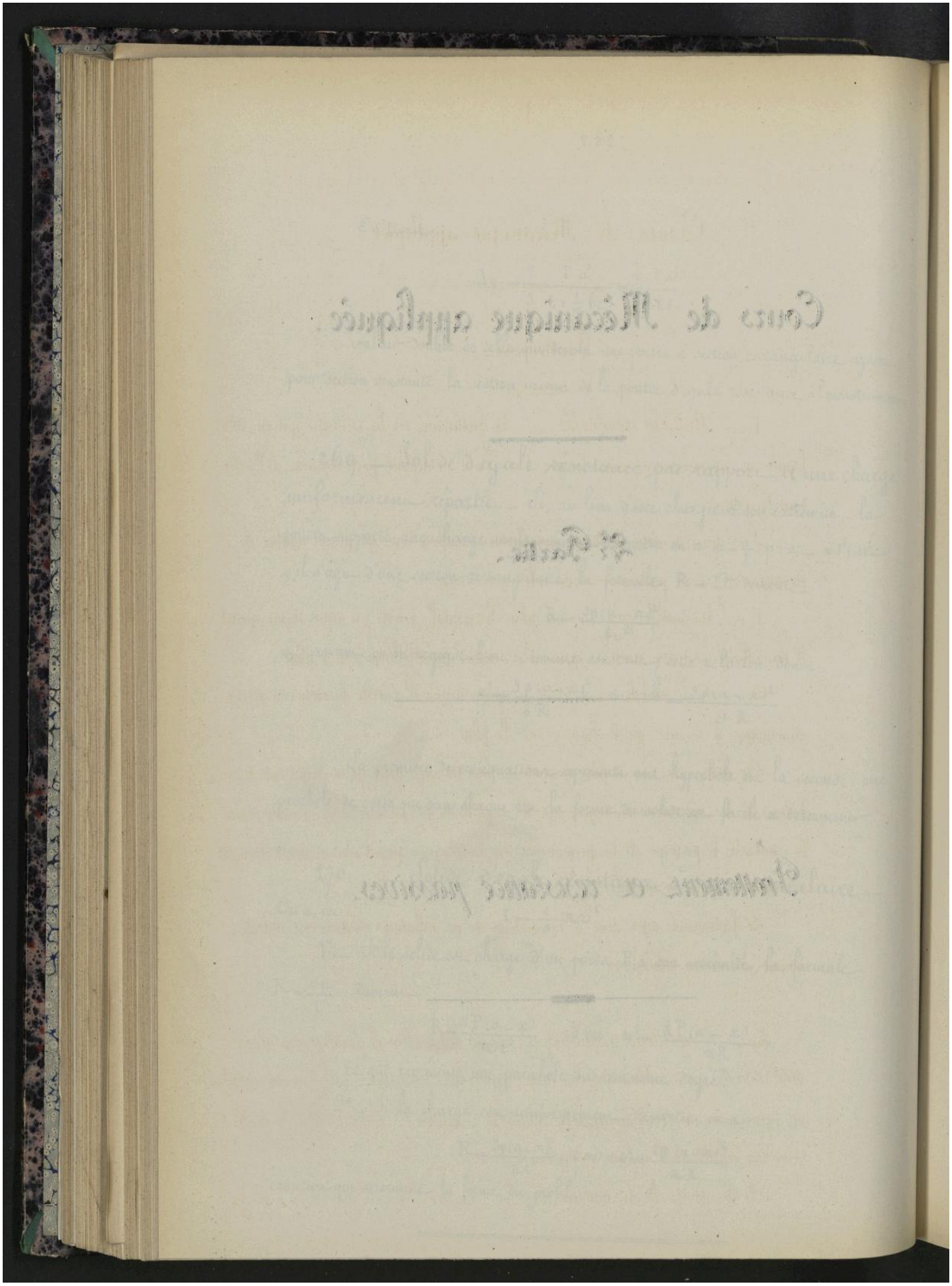
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cours de Mécanique appliquée.

2e Partie.

Frottement et résistance passives.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cours de Mécanique appliquée.

Frottement.

1. — *Notions générales.* — Le frottement est la résistance qui est développée au contact de deux corps, lorsque l'un d'eux se déplace par rapport à l'autre sans le quitter.

L'existence de cette résistance est rendue manifeste dans un grand nombre de circonstances, et en particulier dans celles qui suivent.

1° — Un mobile posé sur un plan horizontal y reste en repos même quand il est sollicité par une traction appréciable, exercée parallèlement à ce plan.

2° — Si le mobile est d'abord en mouvement il s'arrête bientôt, sa vitesse diminuant à mesure qu'il chemine sur le plan.

Cet arrêt est tout à fait général et tous les corps dont nous disposons sont soumis à des résistances analogues qui les empêchent de continuer à se mouvoir comme le voudrait le principe de la permanence du mouvement quand aucune cause étrangère n'intervient pour le modifier.

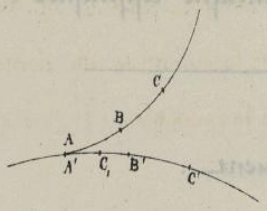
Le frottement agit donc à la manière de ces influences et doit être considéré comme une cause retardatrice.

2. — *Conditions géométriques dans lesquelles le frottement doit être considéré.* — Puisque les deux corps sont en contact, ils ont au moins un point commun, et l'on considère plusieurs circonstances spéciales dans le déplacement relatif de l'un par rapport à l'autre.

Si le point A de contact pris sur l'un des corps, et qui était d'abord

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en A', se déplace de manière à rencontrer successivement les points successifs A', B', C' de l'autre corps, situés dans une direction quelconque sur ce corps, on dit qu'il y a glissement.



Si le point A se déplace de manière que le point voisin B vienne en contact avec le point B' voisin de A' pour lequel on aurait A'B' = AB on dit qu'il y a roulement.

Ce phénomène de glissement peut être simultané du phénomène de roulement c'est ce qui aurait lieu si dans le déplacement, le point B venait rencontrer le point C' ou le point C_1, situés à droite et à gauche de B'.

3. — *Distinction entre les divers genres de frottement.* — Les résistances développées dans ces circonstances diverses ne sont pas les mêmes.

Dans le premier cas on dit qu'il y a frottement de glissement ou simplement glissement.

Dans le second, la résistance est dite de roulement.

Dans le troisième, la résistance est mixte et est désignée sous le nom de frottement mixte.

Ce que nous venons de dire pour un point pourrait se répéter pour toute ligne ou toute surface commune aux deux corps, en considérant les déplacements de chacun des points de cette ligne ou de cette surface commune sous le rapport du glissement ou du roulement.

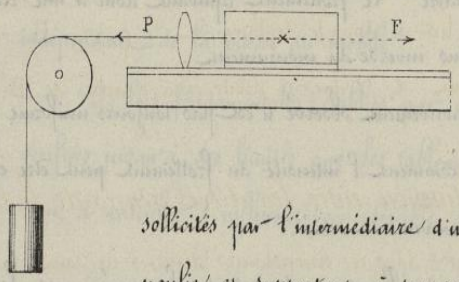
Dans tous les cas la résistance développée déterminant un retard dans les mouvements qui seraient produits si elle n'existait pas, dépensera une certaine quantité de travail mécanique que nous aurons à évaluer.

4. — *Frottement de glissement.* — Pour vaincre la résistance

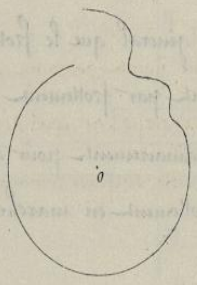
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

développée dans le premier exemple cité, il faut faire agir une force suffisante sur le mobile ; les expériences de Coulomb d'abord et celles de M.r Morin ensuite ont eu pour but de mesurer en kilogrammes, la valeur de cette résistance dans un grand nombre des circonstances principales de la pratique.

5. — *Expériences de M.r Morin.* — L'appareil dont M.r Morin s'est servi, se composait d'un banc horizontal sur lequel on plaçait à poste fixe des plates bandes de diverses matières. Ces corps dont on voulait déterminer le frottement reposaient sur ces plates bandes et étaient sollicités par l'intermédiaire d'une corde horizontale, guidée par une poulie, et supportant à son extrémité un contre-poids que l'on pouvait modifier à volonté.



Un ressort dynamométrique était disposé de manière à donner en chaque instant du mouvement, la tension de la corde, et la figure ci-jointe indique par les distances de chaque point du tracé au centre O, les efforts qui ont été successivement enregistrés dans l'une des expériences.



Ce mouvement était toujours moins rapide qu'il n'aurait dû l'être d'après les formules fondamentales de la mécanique, et la différence causée par le frottement, devait donner la mesure de ce frottement lui-même.

L'observation des diverses circonstances du mouvement était faite à l'aide d'un pinceau fixé sur la poulie de renvoi, et qui traçait une courbe sur un plateau parallèle, entretenu dans un mouvement de rotation uniforme par un

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

appareil d'horlogerie indépendant.

Les conditions de ces expériences étaient surtout simples lorsque le mouvement devenait uniforme, puisque cette uniformité n'est possible qu'à la condition qu'aucune force extérieure ne vienne changer la vitesse du mobile, ou, ce qui revient au même, que s'il y a équilibre exact entre les diverses forces qui le sollicitent.

Dans ce cas les forces étaient au nombre de deux seulement, la traction P et le frottement F ; il faut donc que ces deux forces soient égales et dirigées en sens contraire. Le frottement équivaut donc à une résistance F=P dirigée toujours en sens inverse du mouvement.

En fait, le mouvement observé n'est pas toujours uniforme et nous verrons, à l'aide des formules, comment l'intensité du frottement peut être également déterminée dans le cas du mouvement varié.

On reconnaît d'ailleurs que dans toutes les expériences, le poids qui entraîne le mobile, lui imprime dès la première période, un mouvement accéléré, et que la traction au départ est toujours plus grande que pendant la marche, bien que les différences soient quelquefois très-faibles.

Cette circonstance tient à ce que les corps contractent au contact une certaine adhérence qui est plus grande en général que le frottement pendant la marche et que l'on désigne improprement par frottement au départ.

Quelques ébranlements suffisent ordinairement pour déterminer le départ si la charge correspond à la valeur du frottement en marche.

6. — *Lois du frottement.* — Faisant d'abord abstraction de cette circonstance et de toutes les périodes pendant lesquelles le mouvement n'aurait pas été uniforme, on comprend comment les expériences de M^r^ Morin, ont établi d'une manière précise les lois du frottement de glissement.

1° Le frottement est proportionnel à la pression, c'est-à-dire à la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

réaction supposée normale à la surface du corps sur lequel le frottement a lieu.

2°. Dans chaque cas particulier on pourra représenter par une notation particulière f, le rapport constant pour chaque nature de substance, entre la résistance et la pression. f étant toujours une fraction que l'on désigne sous le nom de coefficient de frottement.

3°. Le frottement pendant la marche est indépendant de l'étendue de la surface de contact.

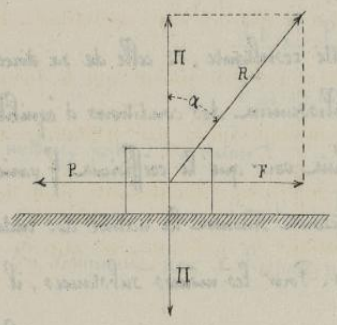
4°. Le frottement exprimé en kilogrammes comme toute autre force, est indépendant de la vitesse du mobile.

Ces lois fondamentales, établies par ces belles expériences, sont matériellement vérifiées jusqu'à des limites que les tableaux font connaître, et elles nous serviront à calculer l'influence considérable du frottement dans l'effet des machines.

7. — *Formules du frottement.* — Si Π est la réaction normale à la surface du corps, les lois précédentes se résument dans la formule simple

$$F = f\Pi,$$

et si l'on considère la résultante R de la réaction et du frottement qui agissent toujours dans deux sens perpendiculaires on a :



$$R^2 = F^2 + \Pi^2 = F^2 + \frac{F^2}{f^2}$$

d'où l'on tire

$$F = \frac{f R}{\sqrt{1+f^2}} = f_1 R,$$

le coefficient f_1 est employé comme abréviation dans un grand nombre de circonstances.

Si l'on désigne par α l'angle de la résultante R avec la normale

on a

$$\text{tang. } \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{F}{H} = f$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ce qui revient à dire que le coefficient de frottement est égal à la tangente de l'angle que la résistance R fait avec la normale, et que l'on appelle angle de frottement.

On déduit des formules précédentes

$$f_1 = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = \frac{\text{tang. } \alpha}{\sqrt{1+\text{tang}^2 \alpha}} = \text{sin. } \alpha$$

En général, f_1 diffère très-peu de f, ainsi qu'on peut le voir par les rapprochements suivants :

$f = 0.05$ $\qquad$ $f_1 = 0.04993$

$f = 0.10$ $\qquad$ $f_1 = 0.09993$

8. — *Observations sur le coëfficient de frottement.* — Le coëfficient f et par conséquent l'angle de frottement restent constamment les mêmes pour les mêmes substances en contact, lorsqu'elles sont dans le même état, et l'on peut considérer la résultante R, dont la direction est déterminée par l'angle α, pour lequel $\text{tang } \alpha = f$, comme représentant à la fois la réaction et le frottement au point de contact.

La considération de cette résultante, et celle de sa direction nous seront d'un continuel usage dans l'établissement des conditions d'équilibre des pièces frottantes.

L'examen des tables fait voir que le coëfficient f varie, suivant la nature des corps en contact et surtout suivant la nature des enduits qu'on y applique, dans de grandes proportions. Pour les mêmes substances, il diminue notablement à mesure que le graissage est mieux entretenu, et sa valeur dans le cas d'un graissage parfait, nous apparaît comme une limite pour laquelle on peut comprendre qu'il y a frottement de graisse sur graisse ou d'huile sur huile, auquel cas la valeur pratique de f peut être abaissée jusqu'à 0.05.

On voit ainsi toute l'importance d'un bon système de graissage, et l'on

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

s'explique comment un si grand nombre d'appareils ont été proposés dans le but de réduire au minimum les pertes de travail dans le frottement.

9.— *Influence du frottement sur le mouvement d'un mobile glissant sur un plan horizontal.*— Pour nous rendre compte des diverses questions que comporte l'étude des résistances de cette nature, nous examinerons d'abord l'influence du frottement sur le mouvement d'un corps glissant sur un plan horizontal

Soit Π le poids du mobile en mouvement sur ce plan horizontal.

S'il est soumis à l'action d'une force P parallèle au plan, cette force, en l'absence de tout frottement, lui imprimerait une accélération

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P}{\Pi} g$$

et l'on aurait au bout d'un temps t,

$$v = v_0 + \frac{P}{\Pi} gt$$

Cette formule est générale et applicable à toute force P dirigée dans le sens du mouvement ou en sens contraire, à la condition de donner dans ce dernier cas, un signe négatif à l'accélération; en opérant de cette façon à l'égard de la résistance F on aura d'une manière générale

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P-F}{\Pi} g$$

$$v = v_0 + \frac{P-F}{\Pi} gt$$

ou en mettant pour F sa valeur

$$v = v_0 + \frac{P-f\Pi}{\Pi} gt$$

En désignant par x l'espace parcouru, et sa différentielle par dx on aura

$$dx = v\,dt = v_0\,dt + \frac{P-f\Pi}{\Pi} gt\,dt$$

et par suite

$$x = v_0 t + \frac{P-f\Pi}{\Pi} \times \frac{gt^2}{2}$$

L'action du frottement est respectivement représentée dans ces formules par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$-f\Pi gt \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} f\Pi g t^2$$

Elle a toujours lieu en sens inverse du mouvement, et elle devient absolument nulle si le mouvement cesse ; elle naît et disparaît avec lui.

Les circonstances du mouvement dépendent de la valeur de $\frac{P-f\Pi}{\Pi}$.

Si $P-f\Pi=0$, le mouvement sera uniforme

Si $P-f\Pi>0$, le mouvement sera uniformément accéléré.

Si $P-f\Pi<0$, il sera uniformément retardé et l'on pourra déterminer les conditions de l'arrêt du mobile.

Il suffira de supposer que v est nul, ce qui donne

$$v_0 = -\frac{P-f\Pi}{\Pi} gt \quad \text{d'où} \quad t = v_0 \frac{\Pi}{(f\Pi-P)g},$$

et en substituant cette valeur de t dans celle de x

$$x = \left(v_0 + \frac{P-f\Pi}{\Pi} g \frac{t}{2}\right) t,$$

et en observant que le second terme de la parenthèse est égal à la moitié du premier

$$x = \frac{1}{2} v_0 t = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \frac{\Pi}{f\Pi-P}$$

10. — *Travail dépensé et utilisation.* — En général le travail dépensé par la force P dans chaque déplacement élémentaire dx, est $P\,dx$; le travail réellement utilisé est $(P-f\Pi)\,dx$; et le rapport entre ces deux quantités

$$\frac{P-f\Pi}{P} = 1-\frac{f\Pi}{P} = U$$

est le coefficient d'utilisation ou le rendement du travail de la force P ; nous le représenterons par la lettre U

Si f était nul, ce rendement serait égal à 1 ; il serait nul pour $f\Pi=P$, auquel cas le frottement absorberait tout le travail de la force P.

Entre ces extrêmes le rendement augmente quand P augmente et quand Π diminue.

On arriverait au même résultat par la considération des puissances vives.

Le travail utilisé est exprimé par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\frac{M}{2}v^2 - \frac{M}{2}v_0^2 = \frac{M}{2}\left[\left(v_0 + \frac{gt}{\Pi}\left(P - f\Pi\right)\right)^2 - v_0^2\right],$$

ou $$= \frac{M}{2}\left[2v_0\frac{gt}{\Pi}\left(P - f\Pi\right) + \frac{g^2t^2}{\Pi^2}\left(P - f\Pi\right)^2\right],$$

ou enfin $$= \frac{M}{2}\frac{2g}{\Pi}\left(P - f\Pi\right)x = \left(P - f\Pi\right)x,$$

parce que $M = \frac{\Pi}{g}$

Le rendement s'obtiendra par le rapport

$$\frac{\left(P - f\Pi\right)dx}{P\,dx} = 1 - \frac{f\Pi}{P}$$

11. — *Interprétation des expériences dans lesquelles le mouvement n'était pas uniforme.* — Nous pouvons maintenant revenir à celles des expériences de M.r Morin, dans lesquelles le mouvement ne s'est pas maintenu uniforme.

L'expérience a prouvé qu'il était alors uniformément accéléré ou retardé, la relation entre les chemins parcourus et les temps était toujours représentée par une parabole que l'on pouvait construire par points au moyen du relevé des diagrammes. En déduisant d'ailleurs f de la valeur générale de x, valeur dont l'expression est

$$x = v_0 t + \frac{P}{\Pi}\frac{g t^2}{2} - f g\frac{t^2}{2},$$

on a $$f = \frac{v_0 t + \frac{P}{\Pi}\frac{g t^2}{2} - x}{\frac{g t^2}{2}} = \frac{2v_0 t + \frac{P}{\Pi} g t^2 - 2x}{g t^2} = \frac{2\left(v_0 t - x\right)}{g t^2} + \frac{P}{\Pi}$$

Cette formule comprend le cas particulier dans lequel $v_0 t = x$; c'est précisément le cas du mouvement uniforme, et la relation revient alors à

$$f = \frac{P}{\Pi} \quad \text{ou} \quad P = f\Pi$$

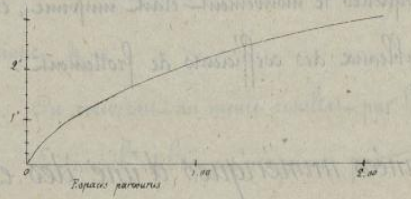
Les valeurs de f ainsi obtenues concordent avec celles qui ont été déduites des expériences dans lesquelles le mouvement était uniforme, et ces valeurs figurent ensemble dans les tableaux des coefficients de frottement.

12. — *Données numériques d'une des expériences.* — Voici

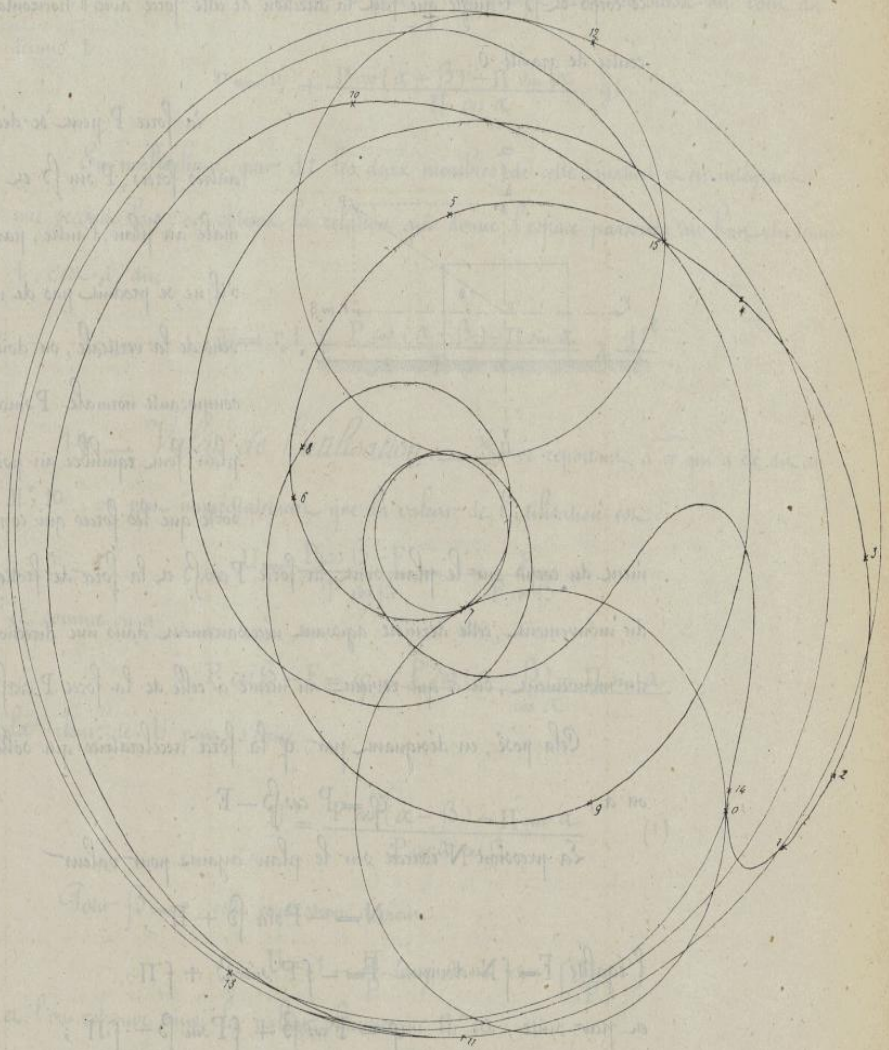
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

comme exemple de mouvement uniformément accéléré le relevé de l'observation de la loi du mouvement dans la 400e expérience relative au frottement du bois de chêne sur la fonte avec enduit d'huile d'olives.

Temps.	Chemins parcourus,	Rapport théorique des chemins parcourus	Rapports déduits des tracés.
0,00	0,0		
0",25	0,025		
0,50	0,080	0.25	0.31
0.75	0,156		
1,00	0,253	1,00	1.00
1,25	0.386		
1.50	0.550	2.25	2.16
1.75	0.795		
2.00	1.027	4.00	4.06
2.25	1.337		
2.50	1.666	6.25	6.58
2.75	2.083		
3.00	2.354	9.00	9.30
3.25	2.717		



La figure ci-jointe qui représente par rapport à deux axes rectangulaires, la loi de ce mouvement, affecte la forme générale d'une



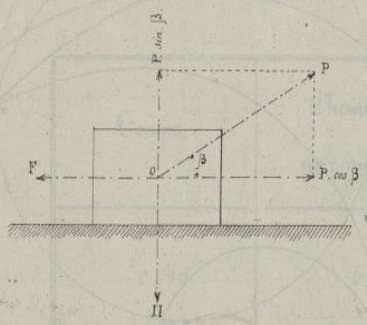
parabole.

Cet exemple montre comment on peut à l'aide de l'appareil à plateau tournant déterminer toutes les circonstances d'un mouvement et par là remonter à l'étude des forces qui le produisent.

13. — *Frottement sur un plan horizontal lorsque la force motrice a une direction inclinée par rapport à ce plan.* — Soit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Π le poids d'un corps qui repose sur un plan horizontal, P la force motrice qui agit sur ce corps et β l'angle que fait la direction de cette force avec l'horizontale qui passe par le centre de gravité O.



La force P peut se décomposer en deux autres forces, P sin β et P cos β, l'une, normale au plan, l'autre, parallèle à ce plan; et s'il ne se produit pas de mouvement dans le sens de la verticale, on doit en conclure que la composante normale P sin β et la réaction du plan font équilibre au poids Π du solide; de sorte que les forces qui concourent au mouvement du corps sur le plan sont la force P cos β et la force de frottement F résultant du mouvement, cette dernière agissant nécessairement dans une direction opposée à celle du mouvement, ou ce qui revient au même à celle de la force P cos β.

Cela posé, en désignant par φ la force accélératrice qui sollicite le mobile, on a,

$$\varphi = P\cos\beta - F .$$

La pression N exercée sur le plan ayant pour valeur

$$N = -P\sin\beta + \Pi ,$$

l'égalité $F = fN$ devient $F = -fP\sin\beta + f\Pi$,

et par suite, $$\varphi = P\cos\beta + fP\sin\beta - f\Pi ;$$

Si l'on pose, comme précédemment, $f = \operatorname{tang}\alpha$, α étant l'angle de frottement, il vient

$$\varphi = \frac{P\cos\alpha\cos\beta + P\sin\alpha\sin\beta - \Pi\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

ou, plus simplement

$$\varphi = \frac{P\cos(\alpha-\beta) - \Pi\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Cette valeur mise dans la formule $\frac{dv}{dt} = g\frac{\varphi}{\Pi}$ de l'accélération donne

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P\cos(\alpha-\beta) - \Pi\sin\alpha}{\Pi\cos\alpha}\, g$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si l'on prend l'intégrale, la constante étant ici la vitesse initiale v_0, vitesse que l'on suppose ici du même sens que la force φ, on obtient pour la vitesse au bout du temps t,

$$v = v_0 + \frac{P\cos(\alpha-\beta) - \Pi \sin\alpha}{\Pi\cos\alpha}\, gt .$$

En multipliant par dt les deux membres de cette équation et en intégrant une seconde fois, on obtient la relation qui donne l'espace parcouru au bout du temps t, c'est-à-dire

$$x = v_0 t + \frac{P\cos(\alpha-\beta) - \Pi\sin\alpha}{\Pi\cos\alpha} \times \frac{gt^2}{2} .$$

14. — *Valeur de l'utilisation.* — En se reportant à ce qui a été dit au N.° 10, on voit immédiatement que la valeur de l'utilisation est

$$U = \frac{P\cos\beta - F}{P\cos\beta} = 1 - \frac{F}{P\cos\beta} ;$$

et comme on a

$$P\cos\beta - F = \varphi = \frac{P\cos(\alpha-\beta) - \Pi\sin\alpha}{\cos\alpha} ,$$

la valeur de U peut s'écrire

$$U = \frac{P\cos(\alpha-\beta) - \Pi\sin\alpha}{P\cos\alpha\cos\beta} \qquad (1)$$

Pour $\beta = 0$, cette expression devient

$$U = 1 - \frac{\Pi}{P}\operatorname{tang}\alpha = 1 - f\frac{\Pi}{P} ,$$

et l'on retrouve ainsi la valeur obtenue au N° 10.

La formule (1) montre que l'utilisation U varie avec la valeur de l'angle β; et pour connaître la valeur de β qui correspond au maximum de U, c'est à dire $U = 1$, il faut poser

$$P\cos(\alpha-\beta) - \Pi\sin\alpha = P\cos\alpha\cos\beta ;$$

ou en développant et simplifiant,

$$P\sin\beta = \Pi ;$$

c'est à dire que dans ce cas, la composante verticale de la force P, fait équilibre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

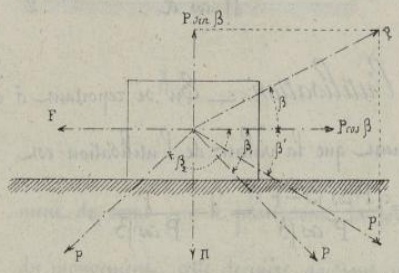
au poids du corps, et que par suite, le frottement disparaît.

Si la direction de la force P vient à changer, et que sa nouvelle position soit déterminée par un angle tel que $-\beta'$, la valeur de l'utilisation devient, dans cette hypothèse,

$$U = \frac{P\cos(\alpha+\beta') - \Pi\sin\alpha}{P\cos\alpha\cos\beta'},$$

ou encore,

$$U = 1 - \frac{P\sin\alpha\sin\beta' + \Pi\sin\alpha}{P\cos\alpha\cos\beta'}.$$



Cette formule montre que si β' augmente, l'utilisation diminue ; et comme cette quantité ne peut devenir négative, elle doit avoir un minimum dont la valeur est $U = 0$, d'où résulte pour déterminer la valeur correspondante β_1 de l'angle β', la relation

$$P\cos(\alpha+\beta_1) = \Pi\sin\alpha ;$$

ou, à cause de $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha = f$,

$$P\cos\beta_1 = f(P\sin\beta_1 + \Pi) \qquad (2)$$

équation d'où l'on tire la valeur de β_1 :

La direction de la force P est alors telle que cette force se trouve impuissante à faire mouvoir le corps, circonstance que caractérise bien l'équation (2) où l'on voit que la composante horizontale de la force P est précisément égale à la résistance développée par le frottement, et par conséquent si le corps n'est pas animé d'une vitesse initiale, il doit rester en repos sous l'influence de la force $P\cos\beta_1$.

Si β' continue à augmenter à partir de la valeur β_1 qui satisfait à l'équation (2), l'état de repos subsiste tant que l'on a

$$P\cos\beta' < f(P\sin\beta' + \Pi) ;$$

et enfin si l'angle atteint une valeur β_2 telle que l'on ait $\beta_2 = 180° - \beta_1$, d'où

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

résulte $\cos\beta_2 = -\cos\beta_1$ et $\sin\beta_2 = \sin\beta_1$, la valeur de la composante horizontale de P est de nouveau égale à la valeur numérique de la résistance due au frottement, résistance qui change de sens dès que le mouvement change de direction. Il suffit alors de donner à β' une valeur plus grande que β_2 pour que le mouvement puisse se produire sous l'action de la force P, mais cette fois en sens contraire de celui qui s'était produit d'abord.

15.—*Cas où le mouvement initial est de sens contraire au mouvement qui serait produit par la force.*— On a supposé, dans ce qui précède, que la vitesse initiale v_0 est de même sens que la composante horizontale $P\cos\beta$. Si ces deux quantités sont de signes contraires, les calculs à faire pour résoudre la question sont les mêmes que précédemment pourvu toutefois, qu'on ait égard au sens de la résistance du frottement. Ainsi on a d'abord pour l'expression de la force retardatrice

$$\varphi = P\cos\beta + F$$

ou

$$\varphi = \frac{P\cos(\alpha+\beta)+\Pi\sin\alpha}{\Pi\cos\alpha} ;$$

puis

$$v = -v_0 + \frac{P\cos(\alpha+\beta)+\Pi\sin\alpha}{\Pi\cos\alpha}\,gt \qquad (1)$$

et enfin

$$x = -v_0 t + \frac{P\cos(\alpha+\beta)+\Pi\sin\alpha}{\Pi\cos\alpha} \times \frac{gt^2}{2} \qquad (2)$$

A partir de $t=0$, et pour des valeurs de cette variable suffisamment petites, la valeur de v est évidemment négative, ce qui signifie que le corps se meut dans le sens de la vitesse initiale $-v_0$. A mesure que t augmente, la valeur numérique de v diminue et il arrive un instant où l'on a $v=0$, valeur pour laquelle l'équation (1) donne

$$t = \frac{v_0}{g} \times \frac{\Pi\cos\alpha}{P\cos(\alpha+\beta)+\Pi\sin\alpha} .$$

Cette valeur de t, mise dans l'équation (2) donne, pour l'espace parcouru par le mobile, jusqu'à ce que sa vitesse soit nulle,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

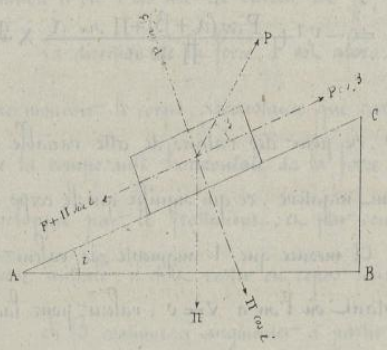
$$x = l\left(-v_0 + \frac{v_0}{2}\right) = -\frac{v_0 l}{2} = -\frac{v_0^2 \Pi \cos\alpha}{2g[P\cos(\alpha+\beta)+\Pi\sin\alpha]}$$

Pour des valeurs de l plus grandes que celle qui correspond à $v=0$, la vitesse est positive, et le corps se meut alors dans un sens contraire à celui qui avait lieu à l'instant initial, mais à partir de ce moment il faut recourir pour l'établissement des conditions du mouvement aux formules du N° 13.

Plan incliné.

16. — Nous distinguerons dans l'étude du frottement et du mouvement d'un mobile glissant sur un plan incliné, deux cas différents, suivant que la vitesse initiale et la force constante à laquelle nous supposerons que le mobile est soumis, auront pour effet de faire monter ce mobile sur le plan incliné ou de l'aider à descendre.

17. — *Cas où le mobile monte sur le plan incliné.* — Soit P la force constante appliquée au centre de gravité du mobile, ou ce qui revient au même, désignons par P la résultante unique de toutes les forces extérieures, en supposant que cette résultante est appliquée au centre de gravité du mobile, et soit AC la ligne de plus grande pente du plan incliné, ligne dans l'inclinaison est i.



Les forces à considérer dans cet exemple sont :

1° La force P qui fait un angle β avec la direction de la ligne de plus grande pente.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2°: Le poids Π du corps qui presse sur le plan incliné sous un angle qui dépend de l'inclinaison i.

3°: La réaction N, normale au plan incliné, et provenant des diverses pressions exercées sur le plan.

4°: La résistance fN, due au frottement, et dirigée parallèlement à AC en sens inverse du mouvement.

Si l'on désigne par φ la résultante de toutes ces actions, dirigée suivant une parallèle à la ligne de plus grande pente, on a, en projetant simultanément les forces du système suivant cette parallèle et suivant une normale,

$$\varphi = P\cos\beta - \Pi\sin i - fN,$$

$$N = P\sin\beta + \Pi\cos i.$$

Cette dernière relation montre que, pour qu'il y ait frottement, il faut que l'on ait $N > 0$ ou $P\sin\beta < \Pi\cos i$, et c'est seulement dans ces conditions que l'on pourra employer les équations qui suivent.

En substituant dans la 1re équation, la valeur qui résulte pour N de la seconde, on trouve,

$$\varphi = P\cos\beta + fP\sin\beta - \Pi\sin i - f\Pi\cos i$$

ou

$$\varphi = P\left(\cos\beta + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\beta\right) - \Pi\left(\sin i + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos i\right),$$

ou enfin

$$\varphi = \frac{P}{\cos\alpha}\cos(\alpha-\beta) - \frac{\Pi}{\cos\alpha}\sin(i+\alpha);$$

et l'on peut considérer le mobile comme entièrement libre d'obéir à l'action de la force unique qui l'entraîne dans sa direction.

18. — *Accélération et loi du mouvement.* — La formule générale $\frac{dv}{dt} = g\frac{\varphi}{\Pi}$ devient ici

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{\Pi}\left[\frac{P}{\cos\alpha}\cos(\alpha-\beta) - \frac{\Pi}{\cos\alpha}\sin(i+\alpha)\right]$$

L'accélération $\frac{dv}{dt}$ étant une quantité constante, le mouvement sera uniformément

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

accéléré ou retardé ; et en comptant les chemins parcourus dans le sens AC, suivant la ligne de plus grande pente, on aura

$$v = v_0 + g_1 t$$

$$x = v_0 t + g_1 \frac{t^2}{2}$$

Si l'on pose, pour plus de simplicité dans les expressions,

$$g_1 = \frac{g}{\Pi}\left[\frac{P}{\cos\alpha}\cos(\beta-\alpha) - \frac{\Pi}{\cos\alpha}\times\sin(i+\alpha)\right]$$

19. — *Valeur de l'utilisation* — Dans le mouvement sur le plan incliné, une partie du travail moteur est employée à vaincre le frottement, et la valeur de l'utilisation peut se mettre sous l'une des deux formes

$$U = \frac{P\cos\beta - F}{P\cos\beta - \Pi\sin i}, \quad \text{ou} \quad U = \frac{P\cos(\alpha-\beta) - \Pi\sin(i+\alpha)}{(P\cos\beta - \Pi\sin i)\cos\alpha}$$

qui nous permettent d'évaluer et de discuter la valeur de l'utilisation.

Cette valeur varie avec l'angle β, pour $\beta = 0$ on a

$$U = \frac{P\cos\alpha - \Pi\sin(i+\alpha)}{P\cos\alpha - \Pi\sin i\cos\alpha} = 1 - \frac{\Pi\,\mathrm{tang}\,\alpha\cos i}{P} = 1 - \frac{f\Pi\cos i}{P} ;$$

Si l'on supposait en outre $i = 0$, cette formule se réduirait à

$$U = 1 - \frac{f\Pi}{P}$$

comme nous l'avons vu déjà dans le cas de glissement sur un plan horizontal.

Si l'angle β augmente, la valeur de U augmente également, car le numérateur augmente en même temps que le dénominateur diminue, et l'on pourra même avoir $U = 1$ si l'on égale le numérateur au dénominateur ce qui donne, en développant,

$$P\cos\alpha\cos\beta + P\sin\alpha\sin\beta - \Pi\sin\alpha\cos i = P\cos\alpha\cos\beta ;$$

ou, en réduisant, $\qquad P\sin\beta = \Pi\cos i$;

On remarque alors que $N = 0$, c'est-à-dire que la pression sur le plan est nulle et que par conséquent le frottement n'a plus aucune influence.

Si β diminue à partir de $\beta = 0$, on peut remplacer la valeur de cet angle par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$-\beta'$, et la valeur de l'utilisation allant constamment en diminuant à mesure que β' augmente, on obtient une valeur nulle pour

$$P \cos\alpha \cos\beta' = \Pi \sin\alpha \cos i + P \sin\alpha \sin\beta',$$

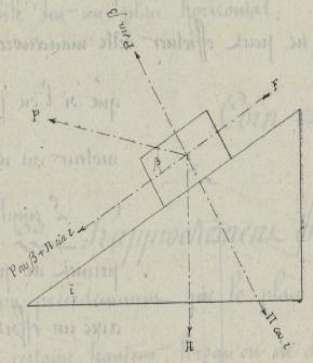
ou $$P \cos\beta' = f(\Pi \cos i + P \sin\beta').$$

La force motrice P est alors dans des conditions telles qu'elle détermine par elle même un frottement précisément égal à son influence dans la valeur de la force accélératrice.

2o. — *Cas où le mobile descend sur le plan incliné.* — Si l'on suppose que la force P ait une inclinaison telle qu'elle entraîne le mobile dans un mouvement de descente sur le plan incliné, la figure montre que la force accélératrice est donnée par la formule

$$\varphi = P \cos\beta + \Pi \sin i - F,$$

et au moyen des mêmes transformations que précédemment, on trouve successivement



$$\varphi = \frac{P \cos(\alpha-\beta) + \Pi \sin(i-\alpha)}{\Pi \cos\alpha} g,$$

$$v = v_0 + \frac{P \cos(\alpha-\beta) + \Pi \sin(i-\alpha)}{\Pi \cos\alpha} gt,$$

$$U = 1 - \frac{F}{P\cos\beta + \Pi \sin i} = \frac{P\cos(\alpha-\beta) + \Pi \sin(i-\alpha)}{(P\cos\beta + \Pi \sin i)\cos\alpha}.$$

La discussion de cette valeur de l'utilisation se ferait comme dans le cas précédent; et l'on se bornera à dire que pour $\beta = 0$, on aurait

$$U = \frac{P\cos\alpha + \Pi \sin(i-\alpha)}{(P + \Pi \sin i)\cos\alpha};$$

d'un autre coté si l'on supposait $\alpha = 0$, on aurait facilement

$$U = \frac{P\cos\beta + \Pi \sin i}{P\cos\beta + \Pi \sin i} = 1$$

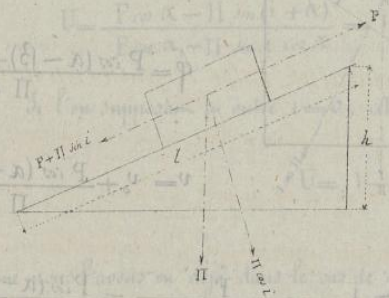
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

comme l'exige le principe de la conservation du travail dans toutes les circonstances où l'on fait abstraction des résistances passives.

Les formules précédentes se simplifieraient si l'on supposait $P=0$, c'est à dire si le corps ne tendait à descendre que par la seule action de son poids. On aurait alors $\frac{dv}{dt}=\frac{\sin(i-\alpha)}{\cos\alpha}g$, ce qui montre que l'accélération serait nulle si l'angle i était égal à l'angle α. Le mobile livré à lui-même ne descendrait plus sur le plan incliné ni pour cette inclinaison ni pour toute inclinaison moindre ; et cette circonstance explique pourquoi l'angle $\alpha=i$ a été désigné sous le nom d'angle de frottement.

21. — *Emploi du plan incliné pour l'élévation des fardeaux.*

Pour élever un poids Π à une hauteur h, il faut dépenser une quantité de travail exprimée par Πh, mais on ne peut effectuer cette manœuvre d'une manière directe que si l'on peut disposer d'un effort moteur au moins égal à Π.



L'emploi d'un plan incliné permet de produire cette élévation avec un effort moindre, si l'on fait glisser le mobile sur la ligne de plus grande pente de ce plan, et l'on a vu qu'il suffit pour cela de développer, dans le sens même du plan, un effort tel que l'on ait :

$$P=f\Pi\cos i+\Pi\sin i,$$

quantité toujours plus petite que Π. Le travail nécessaire pour élever le fardeau à une hauteur h, est alors

$$Pl=f\Pi\cos i\times l+\Pi h\quad;$$

et en remarquant que $h=l\sin i$,

$$Pl=\Pi h\left(i+\frac{f}{\operatorname{tang} i}\right)=\Pi h\left(1+\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang} i}\right),$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La dépense de travail est, dans ces conditions, beaucoup plus grande que si l'on avait élevé le fardeau directement, et l'utilisation est donnée par la formule

$$U = \frac{II\,h}{II\,h\left(1 + \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} i}\right)} = \frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} i}.$$

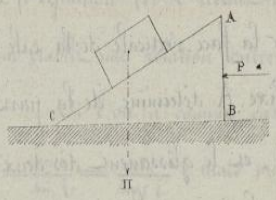
Il convient d'employer toujours le plus grand angle i qui permette d'utiliser la force disponible P, car on voit à l'inspection seule de la formule, que l'utilisation augmente à mesure que i augmente.

Si l'on suppose $i = 90°$, on a $U = 1$, mais alors le fardeau est directement soulevé sans qu'il frotte sur le plan vertical en lequel se trouve transformé le plan incliné.

Pour $i = 0$, on a $U = 0$; l'élévation est impossible lorsqu'on fait glisser le mobile sur un plan horizontal.

Coin et presse à coin.

22. — *Rapprochement entre le plan incliné et le coin.* — On a vu précédemment que le plan incliné peut être employé pour élever un corps à une certaine hauteur, lorsqu'on ne dispose que d'une force inférieure à celle du poids de ce corps, la force motrice agissant d'ailleurs directement sur le mobile qu'on veut déplacer pour lui imprimer un mouvement dans le sens de la ligne de plus grande pente du plan. Mais on conçoit aussi qu'il est possible d'élever un fardeau à une certaine hauteur, en le maintenant entre des guides pour empêcher tout mouvement latéral, et en faisant agir la force motrice sur la face verticale AB du plan incliné, lequel glisse alors sur le plan horizontal BC et soulève le fardeau d'une quantité plus ou moins grande; le plan incliné employé dans ces conditions, se

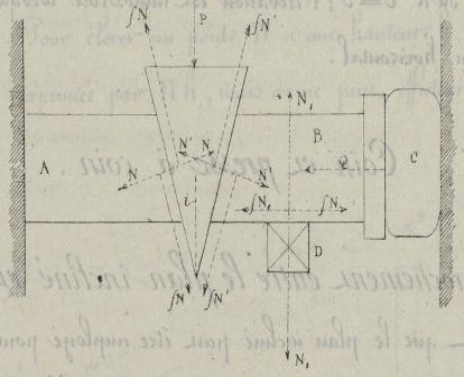


Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

nomme un coin.

Le plan incliné et le coin ne sont généralement pas employés dans les mêmes circonstances. Le premier sert surtout à élever des fardeaux ; le second est souvent employé à caler des objets pour les maintenir en place, ou à comprimer des matières qu'on veut réduire à un moindre volume, comme dans la presse à coin, par exemple, dont on donne ici la théorie.

23. — *Disposition générale de la presse à coin.* — Cette machine se compose principalement d'un coin en forme de triangle isocèle, dont une des faces est guidée dans son mouvement par une pièce fixe A ayant la même inclinaison que la face du coin ; l'autre face est en contact avec une cale mobile B de même inclinaison et qui doit comprimer la matière située en C. La cale est d'ailleurs guidée dans son mouvement de translation horizontale par un appui D qui l'empêche de se mouvoir dans le sens vertical sous l'influence des actions exercées par le coin.

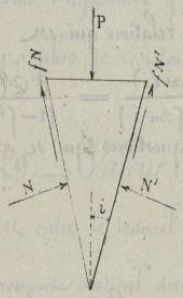


24. — *Conditions générales de l'équilibre du système.* — Si l'on exerce un effort P sur la tête du coin, la cale prend un mouvement dans le sens horizontal et vient comprimer la matière située en C. Cette compression détermine une réaction normale Q qui s'exerce sur la face verticale de la cale. La pression totale N exercée par le coin sur la pièce fixe A détermine de la part de celle-ci des réactions normales, dont la somme est aussi égale à N, et le glissement des deux faces l'une contre l'autre fait naître une force totale de frottement fN exercée par la pièce A sur le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

coin, force qui, dans l'état d'équilibre, donne lieu à une réaction égale et de sens contraire, exercée par le coin sur cette pièce. Il est évident que la pression N' du coin sur la face de la cale détermine pareillement une réaction normale et égale à N', ainsi que des forces tangentielles dont la somme est exprimée par fN', égales et de sens contraires. Enfin la pression N, exercée par la cale sur l'appui fixe D donne lieu à une réaction égale à N, et le glissement de l'une des pièces sur l'autre développerait deux forces fN, égales et de sens contraires. Pour exprimer les conditions d'équilibre du système, il suffit d'écrire que chaque partie est en équilibre sous l'influence des forces qui lui sont directement appliquées, et des réactions qu'elle éprouve de la part des autres parties du système.

25.— *Equilibre du coin.* — Si l'on projette suivant la direction de la force P, toutes les forces qui sollicitent le coin, on obtient comme première équation d'équilibre



$$P-(N+N')\sin i-f(N+N')\cos i=0 \qquad (1)\ .$$

En projetant les mêmes forces sur une direction perpendiculaire à celle de P, on a aussi

$$(N-N')\cos i-f(N-N')\sin i=0\ ,$$

ou $$(N-N')(\cos i-f\sin i)=0\ ;$$

et comme le facteur $\cos i-f\sin i$, dans lequel n'entrent que des quantités constantes, est généralement différent de zéro, il faut que l'on ait $N-N'=0$ d'où $N'=N$,

et l'équation (1) se réduit à $P=2N(\sin i+f\cos i)$

qui établit une relation entre P et N.

Si l'on a comme cas particulier $\cos i-f\sin i=0$, il en résulte $f=\frac{\cos i}{\sin i}=\frac{1}{\operatorname{tang} i}$; mais on a aussi d'après le N°. 7, $f=\operatorname{tang}\alpha$, donc $\operatorname{tang}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tang} i}$, d'où $\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang} i=1$ et $i=90^\circ-\alpha$;

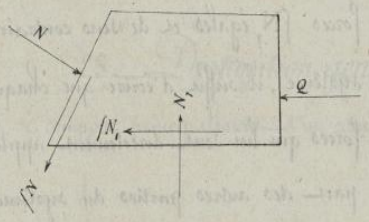
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cette relation exprime un cas particulier du fonctionnement de la machine.

26.— *Equilibre de la cale.* — En projetant les forces auxquelles la cale est soumise, d'abord sur une direction parallèle à la force Q, et ensuite sur une direction perpendiculaire, on obtient successivement

$$Q - N\cos i + fN\sin i + fN_1 = 0,$$

$$N_1 - N\sin i - fN\cos i = 0;$$



et en éliminant N_1 entre ces deux équations, il vient $Q = N\cos i\,(1-f^2) - 2fN\sin i$, équation à laquelle il faut joindre la relation $P = 2N(\sin i + f\cos i)$, obtenue au N° précédent.

27.— *Relation entre la force motrice et la résistance.* — L'élimination de N entre les deux dernières équations fournit une relation entre la force motrice P et la force résistante Q, relation qui est

$$P = \frac{2Q(\sin i + f\cos i)}{(1-f^2)\cos i - 2f\sin i} = \frac{2Q(f + \operatorname{tang} i)}{(1-f^2) - 2f\operatorname{tang} i}, \quad (2)$$

et qui permet de résoudre les diverses questions qui se rattachent à l'emploi de la presse à coin.

28.— *Discussion de la formule précédente.* — On voit d'abord que la force P est proportionnelle à la résistance Q, car, pour un même coin les quantités f et tang i sont constantes.

Pour $f = 0$ la formule (2) se réduit à

$$P_0 = 2Q\operatorname{tang} i;$$

c'est précisément l'équation d'équilibre que l'on obtiendrait immédiatement entre les forces P et Q dans le cas où les réactions dues au frottement pourraient être regardées comme négligeables.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si la nature des surfaces en contact vient à changer, et que cette modification produise une augmentation dans la valeur de f, le numérateur de la valeur de P augmente en même temps que le dénominateur diminue ; donc P augmente avec f.

La formule (2) montre aussi que P augmente avec i pour une valeur déterminée de Q ; donc pour obtenir un effet donné, il faut produire un effort plus grand à mesure que l'angle i augmente ; et par conséquent pour un effort donné P, on devrait employer des coins d'autant plus aigus que la compression à obtenir serait plus grande.

Dans le cas particulier où l'on a $i = 0$, la formule (2) se réduit à

$$P = \frac{2 f Q}{1 - f^2} \quad ;$$

mais alors la cale est réduite à une lame à faces parallèles, et la force P est employée exclusivement à vaincre les frottements. Enfin si à la condition $i = 0$, on ajoute l'hypothèse $f = 0$, il vient $P = 0$; puisqu'il n'y a plus de frottement, il n'y a plus de résistance à vaincre, la force motrice doit donc être nulle.

29.— *Valeur de l'utilisation.*— On sait que l'utilisation est le rapport entre le travail utilisé et le travail dépensé ; de sorte que si dy est le déplacement vertical du coin et dx le déplacement horizontal correspondant de la face de la cale, qui agit sur la matière à comprimer, on a

$$U = \frac{Q\,dx}{P\,dy} \quad ;$$

or, lorsque le coin passe de la position MNP à la position infiniment voisine $M_1N_1P_1$, le déplacement vertical dy est exprimé par la longueur NT, et le déplacement horizontal dx a pour valeur

$$dx = SN_1 = 2ST = 2\,dy\,\operatorname{tang} i \quad ;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de sorte que la valeur de l'utilisation devient

$$U = \frac{Q \times 2\,dy\,\text{tang}\,i}{P\,dy} = \frac{2Q\,\text{tang}.\,i}{P} \quad ;$$

et si l'on remplace P par sa valeur trouvée au N° 27, il vient

$$U = \frac{1 - f^2 - 2f\,\text{tang}.\,i}{f + \text{tang}.\,i} \times \text{tang}\,i \,.$$

30. — *Discussion de la valeur de* U. — Il est intéressant de discuter la valeur de l'utilisation dans la presse à coin, parce que cette machine composée d'un petit nombre d'organes, permet d'indiquer facilement les diverses causes de pertes de travail.

On voit d'abord que pour $f = 0$, la formule précédente se réduit à $U = 1$, ce qui est évident *a priori*; mais cette hypothèse est purement théorique, et dans les applications, le travail utile est toujours moindre que le travail moteur.

Si, dans la valeur de U, on met pour f des valeurs de plus en plus grandes, le numérateur diminue en même temps que le dénominateur augmente, d'où il résulte que U diminue très-rapidement à mesure que f augmente. Il est donc important d'entretenir les surfaces en contact dans un bon état de graissage pour obtenir tout l'effet utile désirable.

Discutons également l'influence de la valeur de i. Si l'on suppose d'abord $i = 0$, il en résulte $U = 0$, ce qui doit être, car le déplacement de la calé dans le sens horizontal est alors nul, et le travail moteur est absorbé par le travail de frottement. A mesure que i augmente, les deux termes du numérateur de U varient en sens contraires, et pour discuter l'influence des variations de i, il faut étudier la dérivée de U considérée comme une fonction de la variable tang i. Si l'on pose, pour simplifier, $\text{tang}\,i = z$, il vient

$$U = \frac{(1 - f^2)z - 2fz^2}{f + z} \,,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où l'on déduit facilement :

$$\frac{dU}{dz} = \frac{f - f^3 - 4f^2z - 2fz^2}{(f+z)^2} = \frac{f(1-f^2-4fz-2z^2)}{(f+z)^2}.$$

Or, il est facile de voir que pour des valeurs de z suffisamment petites, $\frac{dU}{dz}$ est positif, et que la fonction U est croissante ; si z augmente successivement, $\frac{dU}{dz}$ finit par devenir négatif et la fonction U est alors décroissante ; on conclut de là qu'il y a une valeur de z pour laquelle U est un maximum, et pour déterminer ce maximum, il faut égaler à 0 le numérateur de la valeur de $\frac{dU}{dz}$, c'est à dire poser $\quad 2z^2 + 4fz + f^2 - 1 = 0$,

d'où l'on tire $\quad z = \operatorname{tang} i = \frac{-2f \pm \sqrt{2(f+1)}}{2}$;

la valeur négative de z ne convient pas à la question, car elle donnerait un angle d'acuité $2i$ plus grand que $180°$. Si l'on prend la valeur positive, si on la substitue dans l'expression de U et si l'on opère les simplifications convenables, on obtient pour le maximum de l'utilisation

$$U_1 = 1 + 3f^2 - \frac{2f(1+f^2)}{\sqrt{\frac{f^2+1}{2}}} \text{ ou } U_1 = 1 + 3f^2 - 2f\sqrt{2(1+f^2)}.$$

Si z continue à augmenter à partir de la valeur qui correspond à U_1, l'utilisation

$$U = \frac{(1-f^2)z - 2fz^2}{f+z}$$

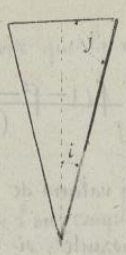
diminue de plus en plus, et elle devient nulle quand on a

$$1 - f^2 - 2fz = 0 \text{ , d'où } z = \frac{1-f^2}{2f}$$

c'est à dire $\quad \operatorname{tang} i = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \alpha}{2 \operatorname{tang} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tang} 2\alpha}$, ou enfin $2\alpha = 90° - i$.

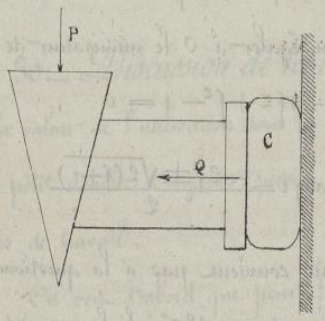
Si j est l'angle formé à la base du coin, on a aussi $j = 90° = i$, et par conséquent $j = 2\alpha$; donc l'angle à la base du coin, est double de l'angle de frottement, la machine ne produit plus aucun effet utile, quelle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



que soit l'intensité de la force motrice employée, parce qu'alors la résultante des actions développées par les frottements fait constamment équilibre à la force motrice P.

31. — *Desserrage du coin.* — Si les forces P et Q sont telles que le mouvement de la cale soit sur le point de se produire dans un sens contraire à celui qui détermine la compression du solide C, le coin tend à se desserrer sans que la force P cesse d'agir pour s'opposer à cette action ; et si le mouvement avait lieu en effet, le frottement changerait de sens, et la formule (2) du N.° 27 deviendrait



en changeant f en $-f$,

$$P = \frac{2Q(\operatorname{tang} i - f)}{1 - f^2 + 2f \operatorname{tang} i};$$

la force P étant toujours positive puisque le sens de son action est resté le même, on voit que le desserrage a lieu quand on a $\operatorname{tang} i > f$, et par conséquent qu'il est sur le point de se produire spontanément si l'on a $\operatorname{tang} i = f$. Donc pour que le desserrage ne puisse avoir lieu sous la seule réaction de l'obstacle C, il faut que l'on ait $\operatorname{tang} i < f$, et cette condition est importante à réaliser dans les applications.

Les conditions du bon fonctionnement de la machine devant être telles que le coin ne puisse se desserrer sous la réaction de la matière comprimée, on opère le desserrage à l'aide d'un choc donné en dessous du coin, en sens inverse de l'action de la force motrice.

L'étude qu'on vient de faire de la presse à coin met en évidence cette propriété du frottement de maintenir les organes en prise quand la force motrice

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cesse d'agir, ce qui permet, dans la pratique, d'opérer par intermittence en employant un pilon qu'on relève et qu'on laisse ensuite retomber sur la tête du coin.

Guides.

32.— *Notions générales sur leur emploi.*— Nous aurons rarement à calculer l'influence du frottement sur tous les organes d'une machine complète, mais chacun de ces organes donne lieu pendant le fonctionnement, à des pertes de travail qu'il faut savoir calculer, surtout pour ceux qui sont d'un emploi général, comme les guides au moyen desquels on assure les conditions géométriques du déplacement des différentes pièces.

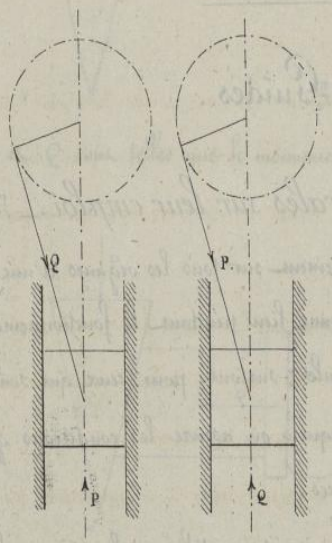
Lorsque le mouvement doit être rectiligne, la pièce mobile est guidée par une glissière ; le guide prend le nom de coussinet lorsqu'il sert à maintenir la fixité d'un axe pendant le mouvement de rotation.

33.— *Objet des glissières.*— Nous nous occuperons d'abord des guides employés dans le mouvement rectiligne en faisant remarquer que ce mouvement ne pouvant se prolonger indéfiniment dans le même sens, sur une machine dont les dimensions sont restreintes, la glissière doit être constituée de telle façon qu'elle puisse servir de guide à des déplacements rectilignes qui ont lieu successivement en sens contraire.

Nous considérerons la glissière comme un système de deux plans parallèles entre lesquels devra se mouvoir le patin rectangulaire ou coulisseau qui est lié à la pièce mobile et au centre duquel seront appliquées la force motrice P développée d'une manière quelconque et la résistance Q dont il faut déplacer le point d'application.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

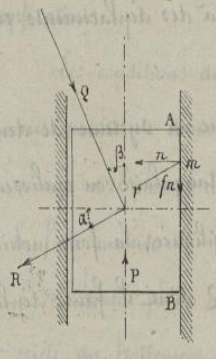
34. — *Divers cas à considérer.* — Les principaux cas à considérer sont ceux dans lesquels la force motrice P a pour direction constante, celle du déplacement à produire sur le coulisseau, et où la force Q peut prendre des inclinaisons variables par rapport au sens général du mouvement, et celui dans lequel les circonstances inverses se produisent.



On a un exemple du premier cas dans l'accouplement de la tige du piston et de la bielle d'une machine à vapeur; c'est celui que nous étudierons en premier lieu.

La transmission par bielle à la tige du piston d'une pompe, réalise les conditions qui définissent le deuxième cas, que nous étudierons ensuite d'une manière plus sommaire et en nous servant du même mode de calcul que celui que nous allons d'abord appliquer à la première disposition.

35. — *Mode de fonctionnement de la glissière.* — On ne peut compter sur le glissement facile du coulisseau qu'à la condition d'admettre l'existence d'un certain jeu entre cette pièce et les joues de la glissière. Ce jeu qui est très exagéré sur la figure ci-jointe, nous permet de nous rendre compte du fonctionnement des pièces.



Si l'origine des actions, la force Q étant seule inclinée par rapport à la direction du mouvement, est la seule aussi qui puisse déterminer un mouvement latéral du coulisseau, et dans les conditions indiquées sur la figure. Cette force Q doit avoir pour effet de forcer le coulisseau à s'appliquer par-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sa face AB sur la glissière de droite, et pour nous rendre compte de ce qui arrivera ensuite pendant le déplacement des organes, il faudra avoir égard aux réactions que cette application du coulisseau contre la glissière fera naître de la part de cette glissière sur la pièce mobile.

Nous supposerons d'abord que le contact ait lieu sur toute la longueur de la face AB, et nous aurons à considérer en chacun de ses points une réaction normale n et une réaction tangentielle fn dirigée en sens contraire du mouvement.

36. _ *Conditions d'équilibre.* _ Pour qu'il n'y ait point de variation dans la vitesse du coulisseau, il faudra que toutes les forces extérieures et toutes les réactions dont nous venons de parler se fassent équilibre.

Ces forces peuvent être considérées en trois groupes distincts :

1° La force motrice P, unique, agissant dans le sens du mouvement.

2° La résistance Q qu'il faut vaincre et qui fait un angle β avec la direction du mouvement.

3° Le groupe de toutes les réactions telles que n et fn. Or les deux forces correspondantes pour un même point de contact m, pourront toujours se combiner en une seule résultante r, pour laquelle nous savons seulement que sa direction fait l'angle α de frottement avec la normale à la surface de contact. Le groupe de toutes les forces telles que n et fn, pourra donc être remplacé par un groupe équivalent de forces r toutes parallèles à la direction définie par la valeur de l'angle α.

D'un autre côté toutes ces forces r étant parallèles, peuvent, au point de vue de l'équilibre, être remplacées par une force unique R de même direction et égale à leur somme.

Les conditions d'équilibre de toutes les forces du système se trouvent ainsi réduites à celles des trois forces P, Q et R, dont les directions sont connues. Puisque ces

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trois forces se font équilibre, nous avons même la certitude que la force R passe par le point O de rencontre des deux autres; et en projetant successivement ces trois forces, d'abord sur un axe parallèle à P, ensuite sur un axe perpendiculaire, on obtient immédiatement les deux relations

$$P - Q\cos\beta - R\sin\alpha = 0,$$

$$Q\sin\beta - R\cos\alpha = 0\ ;$$

et l'on en tire immédiatement par l'élimination de R la relation suivante entre P et Q ;

$$P = Q\cos\beta + Q\sin\beta\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = Q(\cos\beta + f\sin\beta)\ .$$

On serait arrivé au même résultat d'une manière aussi simple si l'on avait remplacé la résultante R par deux composantes N et fN, ce qui aurait permis d'écrire les équations de projection sous la forme

$$P = Q\cos\beta + fN, \qquad Q\sin\beta = N\ ;$$

et par suite

$$P = Q\cos\beta + fQ\sin\beta\ .$$

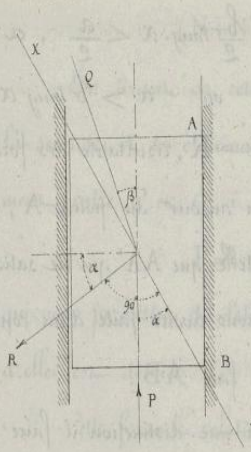
Cette relation indique que, toutes choses égales d'ailleurs, P est proportionnel à Q ; que Q et f restant les mêmes, P varie avec l'angle β, et il y aurait lieu de déterminer la valeur de cet angle pour laquelle P devrait être maximum ou minimum. Il suffirait pour cela de poser $\frac{dP}{d\beta} = 0$, mais nous arriverons au même résultat en nous occupant de la mesure de l'utilisation dans cet appareil. Disons toutefois que si l'on faisait abstraction du frottement f serait nul, et l'on aurait simplement $P = Q\cos\beta$.

37 — *Autre moyen d'obtenir la relation entre les forces motrice et résistante.*

— On arriverait encore à la relation précédente entre P et Q, en projetant toutes les forces du système sur un axe XX, perpendiculaire à la direction de la force R. Celle-ci n'entrerait pas dans l'équation d'équilibre et l'on n'aurait aucune élimination à faire.

Les notations des angles permettent d'écrire immédiatement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



$$P\cos\alpha = Q\cos(\alpha-\beta) = Q\cos\alpha\cos\beta + Q\sin\alpha\sin\beta ;$$

ou, en divisant par $\cos\alpha$,

$$P = Q\cos\beta + Q\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\beta ,$$

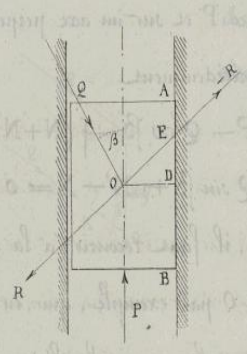
ou enfin

$$P = Q(\cos\beta + f\sin\beta) .$$

Ce procédé très-simple pourra être fréquemment employé dans tous les cas analogues.

38. — *Distinction entre les glissières longues et les glissières courtes.* — L'équilibre devant exister entre les trois forces P, Q et R, il est facile de reconnaître si dans tous les cas le contact aura réellement lieu sur toute la longueur de la face AB.

C'est ce qui arrivera évidemment si la direction de la force — R, que nous savons être égale à la résultante des forces extérieures P et Q, vient rencontrer la glissière entre le point A et le point B. Mais il en serait tout autrement si la direction de cette force ne rencontrait la glissière qu'en F, au delà du patin, car elle tendrait alors à faire tourner ce patin autour du point A et à lui faire prendre une position oblique dans laquelle les deux angles A et A', après être venus s'appuyer sur les glissières opposées, empêcheraient la continuation du mouvement de rotation.



Le contact n'aura donc lieu, d'une manière permanente sur toute la longueur de la face AB, que si le coulisseau est assez long pour que la direction de la résultante — R des forces P et Q passe en E entre le point A et le point D. Il faut donc que l'on ait

$$ED = OD\,\text{tang}\,\alpha < AD ;$$

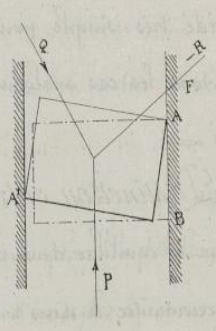
ou, en désignant respectivement par a et par b la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

longueur et la largeur du coulisseau $\frac{b}{2}\,\text{tang}.\,\alpha < \frac{a}{2}$, et par suite,

$$\text{tang}\,\alpha < \frac{a}{b}\ , \quad \text{ou} \quad a > b\,\text{tang}\,\alpha\ .$$

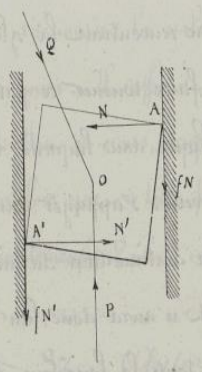
Dans le cas contraire la force $-R$, résultante des forces extérieures P et Q tendra à faire tourner le coulisseau autour du point A, et à l'amener dans une position telle que AA' qui ne satisfait plus à l'hypothèse que nous avons faite d'un contact continu tout le long de la face AB.



De là une distinction à faire entre les glissières longues qui satisfont à la condition $a > b\,\text{tang}\,\alpha$ et les glissières courtes pour lesquelles on aurait $a < b\,\text{tang}\,\alpha$ et que nous allons maintenant étudier.

39.— *Conditions d'équilibre dans les glissières courtes.*

Les mêmes raisonnements nous serviront à établir les conditions d'équilibre des glissières courtes en combinant avec les forces extérieures P et Q, les réactions N et fN exercées au point A par les glissières sur le coulisseau, et les réactions N' et fN' correspondantes au point A'.



En projetant toutes ces forces sur la direction de la force P et sur un axe perpendiculaire on trouve comme précédemment

$$P - Q\cos\beta - f(N+N') = 0$$

$$Q\sin\beta + N' - N = 0\ ;$$

mais pour pouvoir éliminer N et N', il faut recourir à la condition tirée de la somme des moments autour du point O par exemple, qui, en négligeant l'influence du petit déplacement angulaire du coulisseau sur les longueurs respectives du bras de levier, nous fournit une nouvelle relation

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$(N+N')\frac{a}{2}+(fN-fN')\frac{b}{2}=0 \ .$$

En tirant de cette relation la valeur de $N-N'$, en la substituant dans la seconde, et en éliminant $N+N'$ entre les équations restantes on arrive définitivement, entre P et Q, à l'équation

$$P=Q\cos\beta+f\frac{b}{a}Q\sin\beta \ ,$$

qui nous permettra de déterminer l'une ou l'autre des forces P et Q lorsque l'une d'elles est donnée.

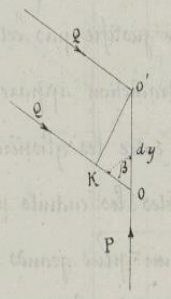
Cette formule relative aux glissières courtes est absolument de même forme que celle des glissières longues ; si l'on posait $f'=f\frac{b}{a}$, on pourrait l'écrire

$$P=Q\cos\beta+f'Q\sin\beta \ ,$$

et on la discuterait de la même façon que la précédente.

Nous ferons seulement remarquer que $f'=f\times f\frac{b}{a}$ est nécessairement plus petit que f, car le facteur f est une fraction, et la largeur b de la glissière ne sera jamais assez grande par rapport à sa longueur a, même dans les glissières courtes, pour que l'on ait $f\times\frac{b}{a}>1$

40. — *Utilisation.* — Pour un déplacement dy du point O dans la direction de la force P, le travail moteur dépensé sera exprimé par $P\,dy$; le travail utile correspondant pourra être aussi représenté par $Q\,dx$ si nous désignons par dx le déplacement correspondant dans la direction de la résistance Q ; la figure ci-jointe montre que



$$ok=dx=dy\cos\beta \ .$$

On aura donc, pour l'expression de l'utilisation,

$$U=\frac{Q\,dx}{P\,dy}=\frac{Q}{P}\cos\beta \ ;$$

et en mettant pour le rapport $P:Q$, sa valeur tirée de la relation générale,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$U = \frac{\cos\beta}{\cos\beta + f\sin\beta} = \frac{1}{1 + f\,\text{tang}\,\beta}$$

pour le cas des glissières longues, et

$$U' = \frac{\cos\beta}{\cos\beta + f^2\frac{b}{a}\sin\beta} = \frac{1}{1 + f^2\frac{b}{a}\,\text{tang}\,\beta}$$

pour le cas des glissières courtes.

Les valeurs de U et U' deviennent toutes deux égales à l'unité quand on suppose $f = 0$, c'est-à-dire quand on fait abstraction des frottements. On voit d'ailleurs que l'utilisation diminue quand f augmente.

Quand $\beta = 0$, $U = 1$ quelque soit f, parce que la pression est alors nulle contre les glissières et que par suite le frottement ne cause aucune résistance.

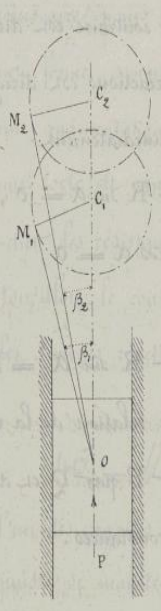
A mesure que β augmente, U et U' diminuent, ce qui montre l'inconvénient d'une grande inclinaison β, et si le dénominateur devient infini, l'utilisation peut même être réduite à Zéro.

C'est ce qui arrivera si $\beta = 90°$: tout le travail de la force motrice serait alors dépensé en frottement.

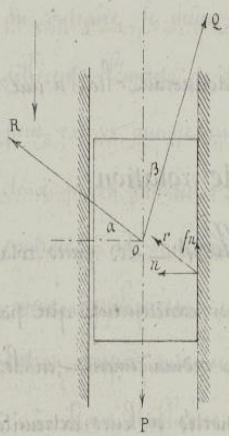
41. — *Comparaison entre les glissières longues et les glissières courtes.* — La théorie qui précède indiquerait que toutes choses égales d'ailleurs, la valeur de U' serait plus grande que la valeur de U, puisque le dénominateur de la formule de l'utilisation devient, pour le cas des glissières courtes, plus petit. La pratique ne justifie pas cette conséquence de la théorie, et l'on peut expliquer cette contradiction apparente en faisant remarquer que dans ce dernier cas, le contact entre les glissières planes et les coulisseaux n'ayant lieu que par deux arêtes, les enduits peuvent être expulsés par la pression, et les frottements devenir plus grands pour cette cause par suite de l'augmentation de la valeur de f. Les glissières courtes ne sont jamais préférées aux glissières longues.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

42.— *Avantages des longues bielles.*— Dans la transmission par la bielle oM_1, l'angle β passe successivement par tous les états de grandeur depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = \beta_0$. Si pour un même rayon de manivelle $M_2C_2 = M_1C_1$ on se servait d'une bielle $oM_2 > oM_1$, l'inclinaison de la bielle ne varierait que depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta_2 < \beta_1$; cette seconde transmission donnerait donc une utilisation plus favorable que la première, ce qui suffit pour démontrer l'avantage de l'emploi des bielles longues à l'aide desquelles les frottements sont maintenus entre des limites plus restreintes.



43.— *Mouvement de retour des coulisseaux.*— Dans les transmissions par bielles et manivelles, lorsque la glissière est arrivée à la fin de sa course, la force motrice et la résistance changent simultanément de sens, en même temps que la direction du mouvement. Il en résulte que la résistance due au frottement, qui est toujours de sens contraire à celui du déplacement que l'on effectue, doit aussi être prise dans un sens opposé à celui que nous avons considéré jusqu'à présent. Le contact est toujours déterminé en égard à l'inclinaison de la force Q sur la même face AB de la glissière, et l'on voit par la figure ci-jointe que l'on a encore



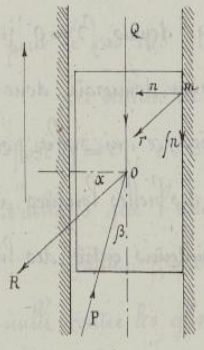
$$P = Q\cos\beta + R\sin\alpha \quad , \quad Q\sin\beta = R\cos.\alpha$$

et par suite, $$P = Q(\cos\beta + f\sin\beta).$$

On retrouverait aussi pour les glissières toutes les formules déjà indiquées.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

44. — *Glissières dans lesquelles la direction de la résistance est constante.* — Dans les glissières de la transmission à la tige du piston d'une pompe, la force motrice P fait un angle variable β avec l'axe de la glissière ; la force Q au contraire est dirigée suivant cet axe et la résultante R des réactions est dirigée comme l'indique la figure qui donne immédiatement



$$P\cos\beta - Q - R\sin\alpha = 0,$$

$$P\sin\beta - R\cos\alpha = 0,$$

d'où l'on tire

$$Q = P\cos\beta - R\sin\alpha = P\cos\beta - Pf\sin\beta.$$

On aurait déduit cette relation de la relation déjà établie en remarquant qu'il suffisait de remplacer P par Q et de changer le signe de f pour rendre compte des nouvelles circonstances.

La valeur de l'utilisation serait ici

$$U = \frac{Q\,dy}{P\,dx} = \frac{\cos\beta - f\sin\beta}{\cos\beta} = 1 - f\operatorname{tang}\beta\ ;$$

elle diminue quand f ou β augmente, et elle devient nulle pour $f\operatorname{tang}\beta = 1$, ou $\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tang}\beta} = \operatorname{cotg}\beta$, d'où $\beta = 90° - \alpha$. Le frottement absorbe la totalité du travail moteur quand β est égal au complément de l'angle de frottement.

L'examen des glissières courtes donnerait lieu à une discussion analogue.

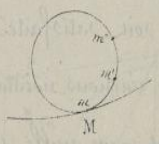
Guides de rotation.

45. — *Coussinets et tourillons.* — Les pièces rotatives dans les machines doivent être assujetties à tourner aussi exactement que possible autour d'axes déterminés, et c'est ce que l'on obtient ordinairement en les fixant sur des arbres d'une certaine longueur, supportés à leurs extrémités par des portées cylindriques que l'on appelle tourillons, et qui leur servent d'axes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si les coussinets dans lesquels reposent ces tourillons étaient exactement moulés sur eux, le mouvement de rotation serait contrarié et même empêché par l'adhérence qui se produirait au contact, et on est obligé de laisser entre les organes, le jeu nécessaire pour la liberté du mouvement. Il résulte de cette condition que le coussinet, formé, comme le tourillon, d'un métal dur, présente par rapport à celui-ci, une augmentation de diamètre, et que l'on doit considérer ce coussinet comme une sorte de canal cylindrique, de diamètre agrandi, dans lequel nous aurons à étudier les résistances dues au frottement. Entre la paroi du coussinet et celle du tourillon, le contact ne pourra avoir lieu que par un élément tangentiel auquel les diverses réactions devront être rapportées.

46. — *Nature du frottement.* — Comme dans les exemples déjà étudiés, l'un des organes est en mouvement par rapport à l'autre et bien que le contact puisse se maintenir sur le même élément longitudinal M du coussinet, le frottement est bien de glissement parce que c'est sur cette même génératrice M du support que viennent successivement au contact les génératrices m, m', m'', du tourillon mobile.



C'était l'inverse qui avait lieu dans tous les exemples précédents pour lesquels, au contraire, le même élément du mobile venait successivement au contact des différents éléments de la pièce fixe; cette différence, toute de position relative, ne peut exercer aucune influence sur la nature du frottement, puisque, entre les deux pièces frottantes, les réactions sont nécessairement égales et de signes contraires; ici seulement ces réactions, exercées sur le mobile, seront successivement appliquées à des points différents qui viennent les uns à la suite des autres occuper une même position.

Nous établirons d'abord un principe fondamental sur la position que le tourillon devra nécessairement occuper pendant la rotation.

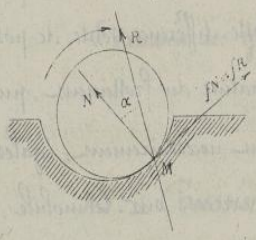
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

47.— *Détermination du point de contact d'un tourillon pressé contre un coussinet.* — Si un tourillon est en repos dans son coussinet, il se placera nécessairement, sous l'influence de son propre poids, de manière que la génératrice inférieure des deux surfaces soit commune, mais il est facile de voir qu'il ne saurait se maintenir dans cette position s'il est animé d'un mouvement de rotation.

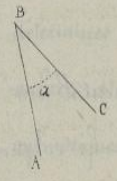
Supposons, en effet, que ce mouvement de rotation soit produit par une cause quelconque, le poids du tourillon forcera cet organe à se placer dans une situation déterminée, pour laquelle la résultante des réactions normale et tangentielle qui sont développées au contact, auront même direction que l'action de la pesanteur, ou, d'une manière générale, que la pression exercée, en raison des forces extérieures, par le tourillon sur le coussinet.

Le tourillon sera, dans son mouvement, retenu par le frottement, et, s'il occupait primitivement une position différente, il se déplacera dans le coussinet, jusqu'à ce que cette condition soit satisfaite.

Or, on sait que la résultante R des réactions normale et tangentielle doit toujours faire, en sens inverse du mouvement, un angle α avec la normale au point de contact.



Si donc AB est la direction de la pression exercée, il suffira de faire, en sens inverse de la rotation, un angle $ABC = \alpha$ pour connaître la direction de la normale au point M de contact, ce qui permettra de tracer, comme sur la figure ci-jointe, les positions respectives du tourillon et du coussinet.



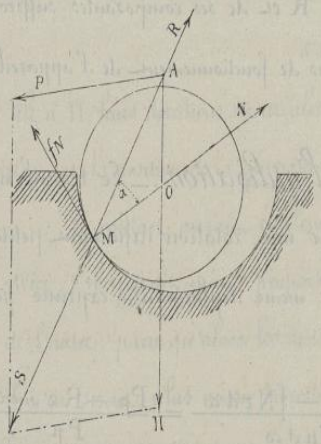
Dans le cas où la pression S serait déterminée par le seul poids du mobile, ou plus généralement par des forces verticales, le point de contact M serait toujours éloigné du même

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

angle α de la verticale passant par l'axe du tourillon.

Cette règle va nous servir pour l'établissement des conditions du frottement d'un arbre tournant dans ses coussinets. Nous distinguerons trois cas, suivant que l'arbre est soumis à des forces perpendiculaires à l'arbre, ou à des forces dirigées suivant l'axe, ou à des forces d'une direction quelconque, mais nous examinerons d'abord le cas où toutes les forces extérieures exercent leur action sur un seul tourillon, l'expression des conditions d'équilibre est nécessairement plus simple.

48.— *Cas d'un tourillon unique reposant sur son coussinet.* — Supposons que ce tourillon soit chargé en son centre de gravité de son poids Π, et soit soumis, dans le plan vertical, perpendiculaire à l'axe du tourillon et passant par ce centre de gravité, à une force motrice P agissant à l'extrémité d'un bras de levier p, les deux forces extérieures Π et P pourront se composer en une seule S, représentée par la diagonale construite sur les deux premières.



Nous savons que les réactions normale et tangentielle exercées de la part du coussinet sur le tourillon sont appliquées au point de contact, et si d'ailleurs nous voulons exprimer qu'elles font équilibre à la résultante S de toutes les forces extérieures, si l'on désigne par R la résultante des deux réactions, il faudra que les deux forces R et S se fassent exactement équilibre, ce qui exige que ces deux forces soient égales, de sens contraires, et appliquées au

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

même point M de contact.

On voit ainsi que R est égale et directement opposée à S, et comme on sait que R fait un angle α avec la normale au point de contact, on peut en conclure que la force S égale à R doit faire le même angle α avec cette normale.

La force S étant déterminée, nous mènerons comme au N° précédent le rayon OM faisant un angle α avec cette direction et le point M étant ainsi déterminé, les conditions d'équilibre s'exprimeront en disant que :

1° La résultante R des deux réactions doit être égale et de sens contraire à la résultante S des forces extérieures.

2° La réaction normale N est égale à la projection de R sur le rayon OM d'où $N = R \cos \alpha$.

3° La résistance fN du frottement est donnée par la projection de R sur la direction de la tangente au point M d'où $fN = R \sin \alpha$.

Ces valeurs de la force R et de ses composantes suffiront dans tous les cas pour déterminer les conditions de fonctionnement de l'appareil.

49.— *Valeur de l'utilisation.*— Le travail moteur pouvant être exprimé par $P\rho\, d\omega$ pour une rotation infiniment petite $d\omega$, et le travail de frottement étant pour le même déplacement exprimé par $-fNr\, d\omega$, on a immédiatement

$$U = \frac{P\rho\, d\omega - fNr\, d\omega}{P\rho\, d\omega} = \frac{P\rho - Rr \sin\alpha}{P\rho}$$

ou $U = 1 - \frac{R}{P}\frac{r}{\rho} \sin\alpha$.

« Cette formule montre que pour un même moment moteur $P\rho$, l'utilisation sera plus grande si R, r et $\sin\alpha$ sont plus petits.

La valeur de $\sin\alpha$ est donnée par la nature des surfaces en contact, mais on pourra toujours limiter la valeur de

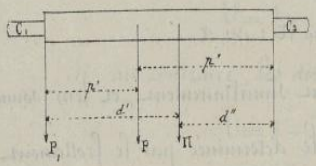
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

r, et nous verrons que l'on pourra ainsi donner à la force motrice P une direction telle que R soit amoindri autant que possible. C'est ce qui arriverait dans le cas où les deux forces P et Π étaient dirigées en sens contraires comme l'indique la figure, parce que l'on aurait alors

$$R = P - \Pi .$$

50.— *Force extérieure perpendiculaire à la direction d'un arbre supporté par deux tourillons.* — Si la rotation est produite par une force P perpendiculaire à l'arbre, cette force déterminera respectivement des pressions parallèles et d'intensités qui pourront être différentes, sur les coussinets, et en désignant ces pressions par P_1 et P_2 on aura en vertu des règles de la décomposition des forces parallèles, appliquées aux points c_1 et c_2 considérés comme points de contact de chacun des tourillons avec son coussinet,

$$P_1 - P_2 = P , \qquad P_1 p' = P_2 p'' .$$



Le poids Π de l'arbre, pourra de même être en deux forces verticales Π_1 et Π_2 agissant sur les bords, et les pressions exercées sur cette pièce seront mesurées respectivement par les résultantes de Π_1 et de P_1, de Π_2 et de P_2. Ces résultantes seront égales à $\Pi_1 + P_1$ et à $\Pi_2 + P_2$, dans le cas où la force P serait parallèle à Π; leurs directions seront alors verticales et détermineront, comme il a été dit précédemment la position de la génératrice de contact des deux tourillons.

Le contact aurait également lieu aux deux extrémités d'une même génératrice, s'il y avait même proportionnalité entre Π_1 et P_1 d'une part, et Π_2 et P_2 de l'autre, parce qu'alors les deux résultantes auraient une direction commune, mais il n'en serait plus ainsi si cette proportionnalité n'existait pas, et pour obéir à la condition géométrique que nous avons indiquée, il faudrait que les tourillons prissent une position oblique qui leur permît de ne toucher les coussinets que par deux points c'_1 et c'_2, situés sur des génératrices différentes.

On voit ainsi que la distribution des efforts et des charges en des points différents de la longueur de l'arbre, n'est pas indifférente, et sans doute bien des transmissions fonctionnent mal, parce que l'on a rarement égard à cette répartition.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Sans nous arrêter davantage à cette circonstance, nous supposerons que le contact a lieu avec les deux coussinets, suivant la même génératrice et que par conséquent toutes les réactions sont distribuées dans la longueur de cette génératrice de contact.

Soient alors R_1 et R_2 les résultantes des réactions dues aux composantes des forces P et Π, les résistances dues au frottement seront respectivement fN_1, fN_2 dans la direction de la tangente au point M, et en sens inverse du mouvement, N_1 et N_2 étant les composantes normales des forces R_1 et R_2 ; on a donc :

$$R_1 \cos\alpha = N_1 , \qquad R_2 \cos\alpha = N_2 ,$$

et par suite,

$$fN_1 = fR_1 \cos\alpha = R_1 \sin\alpha ,$$

$$fN_2 = fR_2 \cos\alpha = R_2 \sin\alpha ,$$

en mettant pour f sa valeur $\sin\alpha : \cos\alpha$.

Ces deux résistances agissent simultanément, et leur somme $(R_1+R_2)\sin\alpha$ constitue la force retardatrice totale déterminée par le frottement.

51. — *Travail dépensé et utilisation.* — Pour un déplacement angulaire $d\omega$, le chemin parcouru par le point d'application du frottement sera $r\,d\omega$ et par suite le travail dépensé se représentera par : $r\,d\omega\,(R_1+R_2)\sin\alpha$.

Le travail $P\rho\,d\omega$ de la force P sera donc diminué de cette quantité, et la valeur de l'utilisation, en divisant tous les termes par $d\omega$, deviendra,

$$U = \frac{P\rho - (R_1+R_2)\,r\sin\alpha}{P\rho} = 1 - \frac{R_1+R_2}{P}\,\frac{r}{\rho}\sin\alpha ,$$

dans le cas où P serait parallèle à Π on aurait,

$$U = 1 - \frac{P+\Pi}{P}\,\frac{r}{\rho}\sin\alpha .$$

On voit sous cette forme que le rendement augmente lorsque le rayon r du tourillon diminue, ce qui conduit à préférer les tourillons de petit diamètre, autant que le permet la condition à laquelle ils doivent satisfaire, de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

résister, en égard à la nature du métal, aux efforts exercés, et celle de la non-expulsion de l'huile entre les parties frottantes.

Le moment Pp restant le même, le terme soustractif de la valeur de U diminue en même temps que la force P, il y a donc intérêt à employer de grandes poulies de transmission, à l'aide desquelles on réduit les efforts et par suite les pressions exercées sur les supports.

Il faut toutefois remarquer que l'augmentation du diamètre des poulies, entraîne une surcharge pour les arbres, et que la valeur de Π se trouve par suite modifiée.

La direction de la force P peut exercer une influence notable sur le rendement. Si cette direction était contraire à celle de Π, la formule deviendrait

$$U = 1 - \frac{\Pi - P}{P} \frac{r}{p} \sin \alpha .$$

Si, au contraire, les deux directions coïncidaient on aurait :

$$U = 1 - \frac{\Pi + P}{P} \frac{r}{p} \sin \alpha ,$$

et le rendement serait réduit au minimum, et pour toute position intermédiaire on arriverait aussi à un rendement intermédiaire entre ces deux extrêmes.

52. — *Observation sur la formule pratique.* — En général Π est très-grand par rapport à P, et l'on a alors une valeur suffisamment approchée de l'utilisation, en écrivant simplement

$$U = 1 - \frac{\Pi}{P} \frac{r}{p} \sin \alpha$$

Pp était alors la somme de tous les moments des forces extérieures qui tendent à accélérer ou à retarder le mouvement de l'arbre.

M.r Morin a fait des expériences spéciales sur le frottement des tourillons, et la formule précédente a été vérifiée dans ses résultats par les indications de ses essais dynamométriques. Dans le cas où les surfaces étaient bien rodées et bien graissées, le coefficient f s'est abaissé jusqu'à 0.025, ce qui

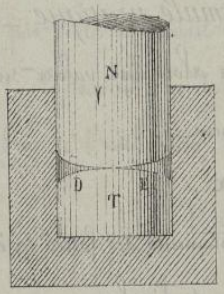
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tiens sans doute à la conservation de l'huile entre les surfaces en contact.

58. — *Application aux boutons de manivelle et aux colliers d'excentriques.* — Le bouton d'une manivelle et le plateau excentré de l'excentrique circulaire fonctionnent absolument à la manière d'un tourillon.

Les formules relatives au frottement d'un coussinet leur sont directement applicables, et l'on voit d'après celle de l'utilisation que le rayon r étant relativement très-grand, quand on a recours au second de ces organes, l'emploi de l'excentrique devra être autant que possible limité aux transmissions dans lesquelles les efforts ne sont pas très-considérables. Le bouton de manivelle est à ce point de vue préférable ; il donne lieu à un travail de frottement beaucoup moindre.

54. — *Pression dirigée suivant l'axe de l'arbre.* — Pour fixer les idées, nous supposerons d'abord que l'axe est vertical et que son extrémité inférieure repose dans une boîte munie d'un grain d'acier T. Dans cette disposition, que l'on désigne sous le nom de crapaudine, les surfaces ne sont pas primitivement planes, mais elles présentent chacune une convexité en goutte de suif, dans le but de diminuer l'étendue du contact. Bientôt cependant les deux courbures sont détruites par l'usé dans le voisinage du point central, et l'on peut admettre qu'il y a contact parfait en tous les points d'un cercle tel que DE, de rayon R.



La pression totale de l'arbre sur son support étant N, nous pourrons admettre que, par suite de ce contact, chaque élément de la surface πR^2 supportera sa part proportionnelle de cette pression, soit pour un élément $2\pi r dr$ formé d'un anneau concentrique

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\frac{N \times 2\Pi r\, dr}{\Pi R^2}$$

La résistance déterminée par le frottement sera donc

$$\frac{f N \times 2\Pi r\, dr}{\Pi R^2},$$

et le travail que ce frottement dépensera, pour un déplacement angulaire $d\omega$, sera

$$\frac{f N \times 2\Pi r\, dr \times r\, d\omega}{\Pi R^2}.$$

On aurait, pour chacun des anneaux qui composent la surface de contact, une expression analogue, et le travail total du frottement serait donné, par conséquent, par l'intégrale

$$\frac{2 f N\, d\omega}{R^2}\int_0^R r^2\, dr = \frac{2}{3} f N\, d\omega\, \frac{R^3}{R^2} = \frac{2}{3} R \times f N \times d\omega ;$$

pour un tour entier l'expression de ce travail serait

$$\frac{2}{3}\, 2\Pi R \times f N .$$

Il est donc le même que si la résistance tout entière du frottement avait été appliquée à l'extrémité d'un rayon $R' = \frac{2}{3} R$.

55. — *Valeur de l'utilisation.* — Si nous supposons que le mouvement soit produit par une force P dont le moment est $P p$, son travail $P p\, d\omega$ sera réduit, par le frottement, de : $\frac{2}{3} R\, d\omega \times f N$,

et le rendement sera seulement

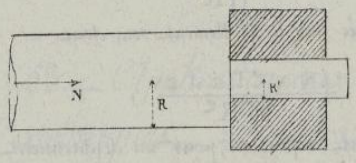
$$U = \frac{P p\, d\omega - \frac{2}{3} R\, d\omega \times f N}{P p\, d\omega} = 1 - \frac{2}{3}\, \frac{f N \times R}{P p} .$$

On voit par cette formule que le rendement diminue quand R augmente, et que par conséquent, l'on doit chercher à diminuer l'étendue du cercle de contact. Il importe cependant que ce cercle soit assez grand pour que les enduits ne soient pas expulsés, par ce qu'en se plaçant en deçà de cette limite, on augmenterait la valeur de f d'une manière fâcheuse.

56. — *Cas où l'arbre frotte sur un collet.* — Si la surface frottante était seulement formée d'un anneau circulaire de rayons R et R', comme dans le cas

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

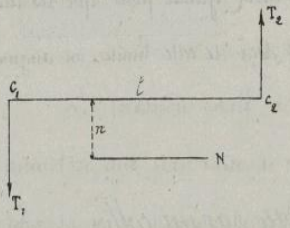
d'un arbre horizontal poussé sur la surface latérale d'un coussinet, il suffirait de limiter l'intégrale du N° 54 entre ces valeurs extrêmes de z, ce qui donnerait pour la mesure du travail dépensé



$$\frac{\varepsilon}{3} f N \times 2\pi \frac{R^3 - R'^3}{R^2 - R'^2} = \frac{\varepsilon}{3} f N \times 2\pi \frac{R^3 - R'^3}{(R-R')(R+R')} = \frac{\varepsilon}{3} f N \times 2\pi \left(R + R' - \frac{RR'}{R+R'}\right)$$

Cette formule, comme la précédente, montre encore que le travail dépensé par le frottement n'est pas, dans le cas des collets et des crapaudines, indépendant de l'étendue des surfaces frottantes, mais cela tient uniquement à l'inégalité dans les chemins parcourus simultanément par les divers points frottants.

57. — *Force extérieure dirigée d'une manière quelconque.* — Cette force, quelque soit son point d'application, pourra toujours être décomposée en une force P perpendiculaire à l'arbre et une force N parallèle à cet arbre. Nous avons indiqué les frottements qui résultent de l'action de la force P; nous avons aussi calculé l'influence de la force longitudinale N dans le cas où elle est dirigée suivant l'axe. Il suffira donc d'ajouter que, dans le cas où cette force longitudinale serait à la distance n de l'axe, son moment Nn par rapport à l'axe tendrait en outre, à faire prendre à l'arbre une position oblique dans ses coussinets. Il en résulterait une pression, et par conséquent un frottement supplémentaire; mais cette influence est toujours assez faible, en présence des autres résistances passives, pour qu'on n'ait pas besoin d'en tenir compte dans la pratique.



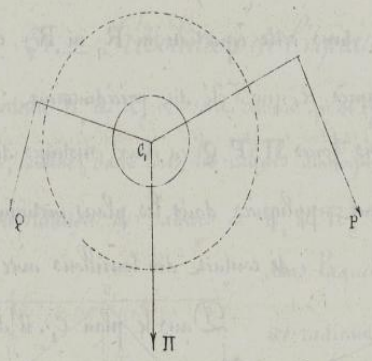
Si l'on voulait d'ailleurs calculer les valeurs des pressions T_1 et T_2 exercées sur les points de contact c_1 et c_2, par suite de la position que nous supposons à la force longitudinale N, il suffirait de faire remarquer que le moment $T_1 l$ de la pression T_1 pris par rapport au point fixe c_2 devrait être égal au moment Nn de la force N,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce qui donne $T_1 l = N n$ d'où $T_1 = \frac{N n}{l}$. On trouverait exactement la même valeur pour T_2, en prenant les moments par rapport au point C_1.

Treuil.

58. — *Objet du treuil.* — Le treuil se compose d'un arbre horizontal, reposant à ses extrémités dans des coussinets par des tourillons, et sur lequel se trouvent appliquées deux forces P et Q, agissant toutes deux dans un plan perpendiculaire à l'axe, l'une d'elles étant le plus ordinairement la charge Q, d'un fardeau à soulever au moyen d'une corde enroulée sur le treuil.



Pour plus de généralité, nous admettrons que cette résistance Q a une direction différente de la verticale.

Dans cette machine, il n'y a généralement aucun intérêt à produire une accélération dans le déplacement de la résistance, et la condition la plus favorable à l'effet utile de la force P sera évidemment que cette force fasse équilibre à la force Q et aux réactions déterminées par ces forces, et par le poids Π de l'arbre sur les tourillons.

59. — *Condition d'équilibre.* — Si nous connaissions en grandeur et en direction, les pressions résultantes R_1 et R_2 sur les coussinets, nous connaîtrions par cela même les résistances $f_1 R_1$ et $f_1 R_2$ du frottement, qui seraient dirigées respectivement suivant les tangentes aux points M_1 et M_2 de contact, points qui pourront être déterminés comme précédemment, et qui devront autant que possible être placés sur une même génératrice de la surface cylindrique qui forme les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

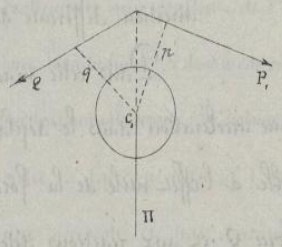
parois des deux coussinets.

Les moments de ces deux forces de frottement seront $f_1 R_1 \times R$, $f_1 R_2 \times r$, en désignant comme précédemment par r le rayon des tourillons.

Les moments des forces P et Q seront exprimés par Pp et Qq; ce dernier agira en sens contraire du premier, comme les moments des résistances du frottement et l'on aura pour exprimer la condition d'équilibre de rotation, l'équation :

$$Pp - Qq - f_1 R_1 r - f_1 R_2 r = 0.$$

60. — *Détermination des pressions sur les coussinets.* — Nous ne connaissons encore dans cette équation ni R_1 ni R_2, et pour déterminer ces quantités, il faut, d'après ce qui a été dit précédemment, décomposer parallèlement à elles-mêmes, les trois forces Π, P, Q en deux systèmes de forces Π_1, P_1, Q_1, et Π_2, P_2, Q_2 respectivement appliquées dans les plans verticaux passant par les points de contact des tourillons avec les coussinets.



Dans le plan C_1, il doit y avoir séparément équilibre entre les quatre forces R_1, Π_1, P_1, Q_1, et comme l'une d'elles Π_1 est dirigée suivant la verticale du centre C_1 de la section du tourillon par le plan C_1, il faudra que la résultante des trois autres, ou plutôt que les trois autres forces elles-mêmes viennent rencontrer cette verticale $C_1 D_1$ en un même point D_1.

Cette observation permet de déterminer R_1, résultante des forces P_1, Q_1 et Π_1 par la relation bien connue

$$R_1^2 = \Pi_1^2 + P_1^2 + Q_1^2 + 2 P_1 Q_1 \cos(PQ) + 2\Pi_1 P_1 \cos(\Pi P) + 2\Pi_1 Q_1 \cos(\Pi Q)$$

Remarquons d'ailleurs que les composantes Π_1, P_1 et Q_1, sont liées aux forces primitives par les relations $\Pi_1 = \Pi \frac{d''}{l}$; $P_1 = P \frac{p''}{l}$; $Q_1 = Q \frac{q''}{l}$ données par les règles de la décomposition des forces parallèles, en désignant par l, la distance $C_1 C_2$, et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par d'' la distance du point C_2 au centre de gravité de l'arbre et de ses accessoires.

La substitution de ces valeurs étant faite dans l'expression précédente, la valeur de R_1 devient :

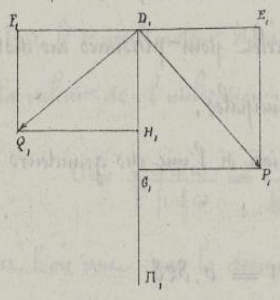
$$R_1 = \frac{1}{l}\sqrt{\Pi_1^2 d''^2 + P_1^2 p''^2 + Q_1^2 q''^2 + 2P_1Q_1 p''q'' \cos(PQ) + 2\Pi_1 P_1 d'' p'' \cos(\Pi P) + 2\Pi_1 Q_1 d'' q'' \cos(\Pi Q)}$$

on aurait de même :

$$R_2 = \frac{1}{l}\sqrt{\Pi_2^2 d'^2 + P_2^2 p'^2 + Q_2^2 q'^2 + 2P_2Q_2 p'q' \cos(PQ) + 2\Pi_2 P_2 d' p' \cos(\Pi P) + 2\Pi_2 Q_2 d' q' \cos(\Pi Q)}$$

et ce sont ces valeurs de R_1 et de R_2 qu'il faudra substituer dans les relations d'équilibre du treuil.

61.— *Résolution de l'équation d'équilibre.*— Dans l'équation précédente R_1 et R_2 ne sont connus qu'en fonction de P et de Q, et si l'on veut obtenir, comme dans tous les calculs analogues une relation entre ces deux forces P et Q, la substitution des valeurs de R_1 et R_2 donnera lieu à une équation irrationnelle, dans laquelle on ne parviendra en général à chasser les radicaux qu'au moyen de deux élévations au carré successives.



On peut éviter ces complications au moyen d'une méthode approximative due à M^r^ Poncelet et qui consiste à remplacer les valeurs de P_1 et de Q_1 par leurs composantes, suivant deux axes respectivement horizontaux et verticaux.

Les forces P_1, Q_1 et Π_1 pourront alors être représentées par la résultante de deux forces X_1 et Y_1

$$X_1 = D_1E_1 - F_1D_1$$

$$Y_1 = \Pi_1 + D_1G_1 + D_1H_1$$

dont les valeurs individuelles seraient données respectivement par la somme des composantes dont nous venons de parler, suivant les deux axes rectangulaires.

On aurait alors,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$R_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$$

Or M^r Poncelet a démontré qu'en choisissant convenablement les coefficients m_1 et n_1, on pourrait, avec une erreur dont la limite est connue remplacer $\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$ par l'expression rationnelle $R_1 = m_1 X_1 + n_1 Y_1$

On trouverait de même les coefficients m_2 et n_2 qui conviennent à la relation

$$R_2 = m_2 X_2 + n_2 Y_2$$

et ces valeurs de R_1 et de R_2 étant ainsi exprimées en fonction de la première puissance de P et de Q on arrivera à une équation générale entre ces forces extérieures, dans laquelle elles n'entreront l'une et l'autre qu'au premier degré.

62. — *Observation sur la formule de Poncelet* — Les coefficients de la formule approximative

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = mX + nY$$

ont été déterminés par M^r Poncelet pour plusieurs cas distincts, mais nous nous bornerons à indiquer les principales.

Lorsque l'on ne sait pas à priori si l'une des grandeurs X ou Y est la plus grande, il convient de faire

$$m = n = 0,828$$

et l'approximation est obtenue à un sixième près.

Si l'on sait seulement que l'une des quantités est plus grande que l'autre soit $X > Y$, il faut prendre $m = 0,960$, $n = 0,398$ et la valeur du radical est alors donnée par la formule approximative à moins de $\frac{1}{25^e}$ près.

M^r Horvath a dernièrement donné une méthode qui permet d'appliquer une simplification analogue à la résultante de trois forces dirigées respectivement suivant trois axes perpendiculaires au moyen de la formule approximative

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = mX + nY + pZ$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dont les coefficients n'avaient été donnés par M^r Poncelet que pour le cas où l'on aurait que $X^2 > Y^2 + Z^2$, $Y^2 > Z^2$, et où l'on a alors avec une approximation déterminée

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = 0.96\,X + 0.38\,Y + 0.16\,Z .$$

63.— *Cas particulier.*— On néglige souvent dans la pratique la valeur de Π, et si l'on suppose en outre que les deux forces P et Q sont dirigées l'une par rapport à l'autre à angle droit, il en sera de même des composantes P_1 et Q_1 et l'on aura plus simplement que précédemment

$$R_1 = \sqrt{P_1^2+Q_1^2} \qquad R_2 = \sqrt{P_2^2+Q_2^2}$$

Nous pourrons d'ailleurs discuter sous sa forme générale la valeur de l'utilisation dans le travail, sans faire les substitutions qui viennent d'être indiquées.

64.— *Valeur de l'utilisation.*— Pour un déplacement angulaire $d\omega$, le travail moteur étant $P\,p\,d\omega$ et le travail utile $Q\,q\,d\omega$, on peut mettre la valeur de l'utilisation sous l'une des deux formes suivantes,

$$U = \frac{Q\,q\,d\omega}{P\,p\,d\omega} = \frac{Q\,q}{Q\,q + f_1 R_1 r + f_1 R_2 r} = 1 - \frac{f_1 R_1 r + f_1 R_2 r}{P\,p}$$

et l'on voit par la dernière expression que l'utilisation diminue quand f_1 augmente, quand r augmente, et aussi quand $R_1 + R_2$ acquiert une plus grande valeur.

Il convient donc, pour améliorer le rendement de la machine, de lubréfier les surfaces de manière que $f_1 = \sin\alpha$ soit réduit au minimum; d'employer des tourillons dont les rayons soient aussi petits que le permettront les conditions de la résistance des matières, et de disposer les forces motrices et résistantes de manière que la résultante R des réactions et par conséquent les composantes R_1 et R_2 soient aussi amoindries que possible; cette dernière

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

condition pourra être réalisée dans bien des cas en changeant la direction de l'une des deux forces P ou Q sans en changer ni la grandeur ni le moment.

65.— *Influence d'une pression longitudinale* — Si en même temps, un effort N était exercé dans le sens longitudinal, il y aurait à tenir compte du travail de frottement contre les collets, travail qui serait, comme nous l'avons dit précédemment, exprimé par : $\frac{2}{3} f N d\omega \frac{r^3 - r'^3}{r^2 - r'^2}$ en désignant par f le coefficient particulier du frottement de l'arbre, en bois ou en fer, contre la paroi latérale de l'un des coussinets.

Il y aurait surtout à tenir compte de cette pression N, dans le cas d'un cabestan, qui n'est autre chose qu'un treuil dont l'arbre est placé dans une position verticale, et qui presse, par conséquent de tout son poids, sur la crapaudine qui soutient son pivot.

66.— *Rendement du treuil dans le cas général.*— La formule générale de l'utilisation se déduit facilement de la précédente, en tenant compte dans la valeur de Pp du terme additif correspondant au travail de frottement sur le collet ce qui donne immédiatement :

$$U = \frac{Qq}{Qq + f_1 r (R_1 + R_2) + \frac{2}{3} f N \frac{r^3 - r'^3}{r^2 - r'^2}},$$

et cette formule se discutera comme nous l'avons fait précédemment, sauf à faire N = 0, s'il n'y avait pas de frottement latéral dont il faille tenir compte.

67.— *Transmission de rotation par un arbre et des poulies.* — Au point de vue qui nous occupe, tous les arbres de transmission peuvent être considérés comme des treuils sur lesquels plusieurs résistances sont distribuées entre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les tourillons. On voit par les considérations qui précèdent que les grandeurs de ces résistances, et même leur distribution dans la longueur de l'arbre doivent être étudiées de manière à diminuer autant que possible les résistances R_1 et R_2 et par suite le travail du frottement, et à satisfaire en outre aux conditions nécessaires pour que le contact ait lieu sur les deux coussinets suivant une même génératrice.

La première de ces conditions sera surtout utile à considérer dans tous les cas où les efforts Q seraient considérables, par rapport au poids Π des organes. Elle sera d'un intérêt secondaire dans les roues hydrauliques, par exemple, pour lesquelles Π est toujours très-grand par rapport à P et à Q, si ce n'est dans le cas où la roue devrait être employée, à la manière d'un treuil, pour l'élévation de lourds fardeaux.

Nous verrons d'ailleurs que dans ces sortes de transmissions, il y a encore à tenir compte du travail dépensé par le frottement et par les déformations des courroies de transmissions.

De la Vis.

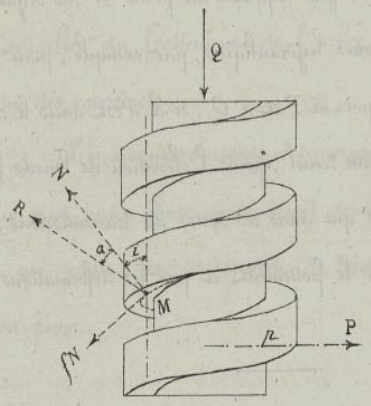
68. — *Objet de la vis.* — La vis a pour objet de vaincre des résistances considérables à l'aide d'une force relativement très-faible. Elle emprunte ses moyens d'action tout à la fois au treuil et au plan incliné. Sa surface est celle d'un hélicoïde gauche engendré par une génératrice faisant toujours un angle constant avec l'axe du cylindre qui sert de noyau, et s'appuyant constamment sur une hélice tracée à la surface de ce cylindre.

Le filet de la vis est dit carré ou triangulaire suivant que la coupe faite par l'axe affecte sur la saillie de la vis, la forme d'un carré ou d'un triangle. La vis peut toujours tourner par rapport à son écrou, qui présente des saillies et des creux correspondant exactement aux creux et aux saillies du filet.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

69. — *Vis à filet carré, chargée d'un poids et tournant dans son écrou.* — Une force P appliquée à une vis dont l'écrou est fixe, agit dans une direction perpendiculaire à l'axe de cette vis, à une distance p de l'axe, et elle doit vaincre une résistance Q appliquée sur la tête de la vis ; on demande de déterminer la relation qui doit exister entre les forces P et Q, en tenant compte du frottement.

La vis s'appuie sur son écrou par la surface hélicoïdale de son filet, et pour chaque point de contact m, les réactions se composent :



1°. — d'une résistance N, normale à la surface hélicoïde, et par conséquent à la génératrice du point que l'on considère,

2°. — d'une résistance tangentielle fN appliquée suivant la tangente à l'hélice qui passe par ce point.

Ces deux réactions donnent lieu à une certaine résultante ; et en considérant tous les points situés sur une même génératrice horizontale de la surface hélicoïde, nous pourrons supposer que toutes les résultantes analogues sont parallèles entr'elles, si la profondeur du pas est petite relativement au diamètre de la vis, et que leur somme est appliquée au milieu de la largeur du filet à une distance r de l'axe de la vis. Elles formeront alors une réaction unique R qui fera avec la génératrice du cylindre au point M, un angle $\alpha + i$, résultant 1°. — de l'inclinaison i de la normale N sur cette génératrice, 2°. — de l'angle de frottement α des forces N et R, angle que nous considérons comme constant.

70. — *Conditions d'équilibre.* — Si nous décomposons la surface toute entière d'un filet en éléments analogues, nous voyons que la projection de la résul-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tante de toutes ces réactions sur l'axe même de la vis, sera $\Sigma R \cos(\alpha+i)$, ce qui donne une première relation d'équilibre

$$Q - \Sigma R \cos(\alpha + i) = 0 .$$

D'un autre côté, toutes ces forces R qui tendent à empêcher la vis de tourner, donneront lieu, par rapport à l'axe de la vis, à un moment résultant

$$\Sigma R \sin(\alpha + i) r ;$$

et si l'on égale ce moment au moment de la seule force motrice F, on obtient, comme seconde condition d'équilibre,

$$Fp - \Sigma R r \sin(\alpha + i) = 0 .$$

En éliminant ΣR entre ces deux équations on trouve

$$Fp = Qr \frac{\sin(\alpha+i)}{\cos(\alpha+i)} = Qr \operatorname{tang}(\alpha+i) = Qr \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang} i}{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang} i} .$$

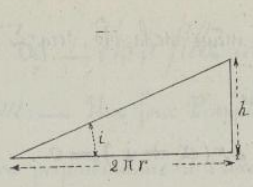
Si l'on fait dans cette formule $\operatorname{tang}\alpha = 0$, ce qui revient à supposer que l'angle de frottement, et par conséquent le frottement lui-même est nul, on trouve en remplaçant F par F',

$$F'p = Qr \operatorname{tang} i .$$

On voit par la comparaison entre les valeurs de F et de F' que l'influence du frottement exige, pour la même résistance à vaincre avec une vis d'inclinaison i, l'emploi d'une force motrice F égale à celle qu'il serait nécessaire d'appliquer à une vis d'inclinaison $\alpha + i$, supposée sans frottement.

71. — *Valeur de l'utilisation.* — On pourrait, comme dans les questions précédentes, considérer les chemins élémentaires parcourus simultanément par les points d'application des forces F et Q ; mais en remarquant que $2\pi p$ est le chemin parcouru par la force F pour un tour entier de la vis, et que ce chemin correspond à la hauteur $h = 2\pi r \operatorname{tang} i$ du pas, on a pour l'expression de l'utilisation,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



$$U = \frac{Q \times 2\pi r \operatorname{tang} i}{P \times 2\pi p} = \frac{Qr}{Pp} \operatorname{tang} i = \frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang}(\alpha + i)}$$

résultat que l'énoncé de la règle qui précède, permettait d'ailleurs d'obtenir sans autre calcul.

On peut encore écrire la valeur de U sous la forme suivante :

$$U = \frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang}(\alpha + i)} = \frac{\operatorname{tang} i\,(1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang} i)}{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang} i} = \frac{1 - f \operatorname{tang} i}{1 + f \operatorname{cotg} i}.$$

72. — *Discussion de la valeur de* U. — En faisant $\alpha = 0$, dans la formule précédente, on trouve nécessairement $U = 1$. Pour $i = 0$, on aurait $U = 0$, mais alors le filet formerait une surface plane perpendiculaire à l'axe et la vis tournerait sans monter. Enfin pour $\alpha + i = 90°$, on a $U = 0$, et le moment de la résultante R, des réactions normale et tangentielle, fait équilibre au moment de la force motrice.

73. — *Maximum de l'utilisation.* — On peut se proposer de chercher quelle est la valeur de l'angle i qui produirait le maximum de l'utilisation pour une valeur donnée de α. Si l'on pose, pour simplifier, $\operatorname{tang} i = z$ et $\operatorname{tang}\alpha = f$, il vient

$$U = \frac{z(1 - fz)}{f + z},$$

d'où l'on déduit facilement

$$\frac{dU}{dz} = \frac{f(1 - 2fz - z^2)}{(f + z)^2}.$$

En posant $1 - 2fz - z^2 = 0$, il vient $z = -f \pm \sqrt{f^2 + 1}$, valeur qu'on peut écrire $z = \operatorname{tang} i = -\operatorname{tang}\alpha \pm \frac{1}{\cos\alpha} = -\operatorname{tang}\alpha \pm \sec\alpha$.

La valeur $\operatorname{tang} i = -\operatorname{tang}\alpha - \sec\alpha$, n'est pas applicable au cas considéré, car pour $\operatorname{tang} i < 0$, on aurait $i > 90°$, et alors l'inclinaison des filets étant changée de sens, le poids Q, tendrait à descendre au lieu de monter, lors de la rotation de la vis.

La valeur positive $z = -f + \sqrt{1 + f^2}$, mise dans l'expression de U donne, pour

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le maximum

$$U_1 = \frac{-f+\sqrt{1+f^2}-f(-f+\sqrt{1+f^2})}{\sqrt{1+f^2}},$$

ou, en simplifiant, $U_1 = 1+2f^2-2f\sqrt{1+f^2}$;

et comme f^2 est ordinairement une quantité très-petite, on a très-approximativement

$$U_1 = 1-2f$$

On peut d'ailleurs ajouter que, pour les corps durs et bien graissés, le coefficient f étant petit, la valeur $z=-f+\sqrt{1+f^2}$ diffère alors très-peu de l'unité et le maximum de U se rapproche de $U=\frac{1-f}{1+f}$, valeur qui diffère peu de la précédente, et que l'on obtient immédiatement en remplaçant z par l'unité dans l'expression générale $U=\frac{z(1-fr)}{f+r}$.

Au delà du maximum le rendement diminue jusqu'à ce que $\text{tang.}(\alpha+i)=0$; il est alors nul, et la vis ne pourrait soulever la charge Q, quelle que fût l'intensité de la force motrice P. Il faut donc que l'on ait toujours $\alpha+i<90°$ ou $i<90°-\alpha$. L'expression analytique indique l'impossibilité du mouvement à partir de cette valeur maximum de i, en donnant alors pour U une valeur négative.

74. *Desserrage de la vis.* — La force P, agissant toujours dans une direction perpendiculaire à l'axe de la vis, on peut se demander de la déterminer de manière à faire desserrer la vis sous l'action de la force Q, qui devient alors une force motrice; la résultante R se trouve dirigée à l'inverse dans le plan tangent au cylindre, en faisant, avec la génératrice de ce cylindre, un angle égal à $i-\alpha$.

Pour tenir compte de ces conditions, il suffit de changer le signe de α dans les relations précédentes, et de prendre l'inverse de la valeur de U, on trouve ainsi

$$P=\frac{Qr}{p}\text{tang.}(i-\alpha), \qquad U=\frac{\text{tang}(i-\alpha)}{\text{tang}\,i}.$$

Les quantités P et Q, étant toujours considérées comme positives, on voit que le desserrage se produit si l'on a $i>\alpha$, et qu'il est sur le point de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

produire, si l'on a $i = \alpha$, relation qui correspond à $P = 0$. Enfin, pour $i < \alpha$, les valeurs précédentes de P et de U deviendraient négatives, ce qui ne peut pas être, donc cette condition est la seule qui assure le non-desserrage de la vis ; et par conséquent une bonne vis d'assemblage, destinée à maintenir la solidarité de certaines pièces de machines, doit avoir une inclinaison plus petite que la tangente de l'angle de frottement.

75.— Conditions diverses d'emploi.— Les conditions relatives au desserrage spontané de la vis déterminent les dispositions qu'il convient d'employer suivant l'usage que l'on veut faire de cet appareil.

Si le desserrage doit être difficile, l'angle i doit être tel que l'on ait $i < \alpha$, ou à la limite $i = \alpha$. Dans ce dernier cas l'utilisation devient

$$U = \frac{\text{tang } i}{\text{tang } 2i} = \frac{\text{tang } \alpha}{\text{tang } 2\alpha} = \frac{1 - f^2}{2},$$

et f^2 étant toujours très-petit, on a approximativement $U = \frac{1}{2}$ dans les conditions les plus favorables.

Pour un angle plus petit l'utilisation serait moindre et pour $I = 0$, elle deviendrait nulle.

Un pas très-rampant est donc celui qui convient lorsqu'on ne veut pas faciliter le desserrage ; les pas rapides devront être au contraire employés, lorsque, comme dans les balanciers, on désirerait que la marche en sens contraire fût rendue facile. Il faut alors que l'on fasse $i > \alpha$, et le maximum de l'utilisation sera atteint si l'on satisfait à la condition

$$\text{tang } i = \text{sécant } \alpha - \text{tang } \alpha$$

et approximativement $\text{tang } i = 1 - \text{tang } \alpha$.

Si l'on fait $z = 1$ dans la formule générale de l'utilisation, maximum qui correspond à cette valeur, on a

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$U' = \frac{1-f}{1+f} = \frac{1+f-2f}{1+f} = 1 - \frac{2f}{1+f}$$

ou approximativement

$$U' = 1 - 2f$$

ce qui donne dans ce cas une utilisation beaucoup plus grande avec ces sortes de vis, que l'on appelle vis de compression, par opposition aux vis à pas rampants que l'on désigne ordinairement sous le nom de vis de serrage.

On doit remarquer que pour les vis de compression pour lesquelles $\text{tang } i = \text{sécant } \alpha - \text{tang } \alpha$, l'utilisation pendant le desserrage est encore exprimée par la même relation à laquelle on arrive facilement par les développements suivants

$$U' = \frac{\text{tang.}(i-\alpha)}{\text{tang } i} = \frac{\text{tang } i - \text{tang } \alpha}{\text{tang } i\,(1 + \text{tang } i \text{ tang } \alpha)};$$

ou en substituant pour tang α sa valeur,

$$U' = \frac{\text{sécant. } \alpha - 2 \text{ tang. } \alpha}{(\text{sécant. } \alpha - \text{tang. } \alpha)[1 + (\text{séc. } \alpha - \text{tg. } \alpha)\text{ lang. } \alpha]} = \frac{\text{sécant. } \alpha - 2 \text{ tang. } \alpha}{\text{sécant. } \alpha - \text{tang. } \alpha + \text{tang. } \alpha\,(\text{sécant. } \alpha - \text{tang. } \alpha)^2}.$$

Il suffit maintenant de remarquer que sécant α diffère peu de 1, et que tang $\alpha = f$, ce qui donne

$U' = \frac{1-2f}{1-f+f(1-f)^2}$, ou plus simplement, $U' = 1-2f$, le dénominateur $1-2f^2+f^3$ différant très-peu de l'unité.

La vis de compression construite dans les conditions du maximum d'effet utile donne la même utilisation dans les deux sens.

76. — Vis d'assemblage ou de compression en tenant compte du frottement de la tête. — Si dans l'emploi des vis d'assemblage, on voulait tenir compte, au moment du rapprochement des pièces, qui exige un effort Q du frottement sur la tête de la vis, il faudrait compléter la formule qui exprime l'équilibre des moments en y introduisant l'influence du travail de ce frottement, développé sur un anneau dont les rayons extérieurs sont R et R'.

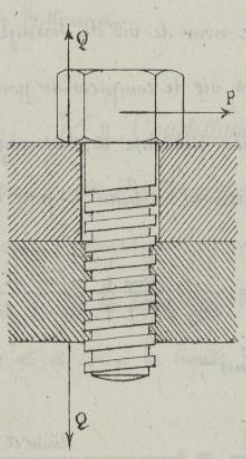
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On aurait alors

$$Pp = Qr \operatorname{tang}(\alpha + i) + \frac{2}{3} f Q \frac{R^3 - R'^3}{R^2 - R'^2} ;$$

et par suite,

$$U = \frac{r \operatorname{tang} i}{r \operatorname{tang}(\alpha + i) + \frac{2}{3} f \frac{R^3 - R'^3}{R^2 - R'^2}} .$$



Dans les pressoirs à vis mobiles les mêmes formules seront encore applicables en tenant compte de ce que le frottement supplémentaire se fait alors à l'extrémité de la vis, sur un cercle de contact de rayon r', ce qui donne

$$Pp = Qr \operatorname{tang}(\alpha + i) + \frac{2}{3} f Q r' ,$$

et

$$U = \frac{r \operatorname{tang} i}{r \operatorname{tang}(\alpha + i) + \frac{2}{3} f r'} .$$

Ces mêmes formules seraient encore applicables en changeant seulement les valeurs de R et de R' dans le cas où l'écrou tournerait autour de la vis maintenue fixe.

77. — Vis à écrou guidé servant à la manœuvre des vannages.

Lorsqu'on se sert d'une vis relevée sur un collet pour surmonter une résistance Q dont le point d'application doit, comme dans la manœuvre des vannages, s'élever sans participer au mouvement de rotation de la vis, parallèlement à l'axe, il faut garnir l'écrou de deux oreilles qui glissent dans des rainures et qui donnent lieu à un frottement supplémentaire pendant le soulèvement du vannage.

Dans ce cas, comme dans tous les autres, il y a lieu de considérer isolément l'équilibre de la vis et celui de l'écrou.

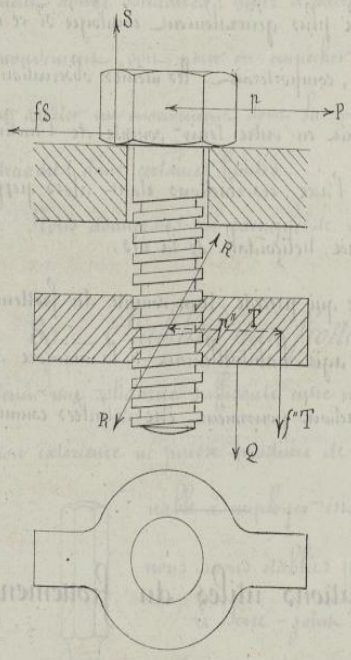
En ce qui concerne la vis, les notations inscrites sur la figure permettent d'écrire immédiatement

$$S = R \cos(\alpha + i) \quad , \quad Pp = R \sin(\alpha + i) + f' S \rho .$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en désignant par ρ le rayon de l'anneau de contact à l'extrémité duquel on peut supposer que le frottement a lieu, ou en d'autres termes en posant

$$\rho = \frac{2}{3}\,\frac{R^3 - R'^3}{R^2 - R'^2},$$



en éliminant ρ entre ces deux équations, on a de suite

$$Pp = R\sin(\alpha+i) + f'R\rho\cos(\alpha+i).$$

D'un autre côté, les conditions de l'équilibre de l'écrou, en tenant compte des résistances passives, sont les suivantes :

$$Q + f''T = R\cos(\alpha+i),$$
$$R\sin(\alpha+i)\,r = T\,r''.$$

En désignant par T la réaction normale de la coulisse sur l'écrou et par r'' la distance de cette réaction à l'axe de la vis, l'élimination de T entre les deux dernières équations, conduit à

$$Q = R\cos(\alpha+i) - f''R\frac{r}{r''}\sin(\alpha+i);$$

et si l'on élimine R entre les deux équations en P et Q, on arrive à la relation finale entre P et Q

$$Pp = Q\,\frac{r\sin(\alpha+i) + f'\rho\cos(\alpha+i)}{\cos(\alpha+i) - f''\frac{r}{r''}\sin(\alpha+i)} = Q\,\frac{r\,\mathrm{tang}(\alpha+i) + f'\rho}{1 - f''\frac{r}{r''}\,\mathrm{tang}(\alpha+i)}.$$

La formule de l'utilisation serait alors modifiée et deviendrait

$$U = \frac{Q\,dy}{P\,p\,d\omega} = \frac{Q}{P}\frac{r}{p}\,\mathrm{tang}\,i = \frac{r\,\mathrm{tang}\,i\left(1 - f''\frac{r}{r''}\,\mathrm{tang}(\alpha+i)\right)}{r\,\mathrm{tang}(\alpha+i) + f'\rho}.$$

Si l'on supposait $f' = 0$ et $f'' = 0$, on reviendrait aux conditions que nous avons étudiées en premier lieu et on retrouverait la formule fondamentale

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$U = \frac{\tang. i}{\tang (\alpha + i)}$$

78. — *Vis à filet triangulaire.* — La théorie du frottement de la vis triangulaire qui est le plus généralement employée si ce n'est pour les vis de pressoirs et de balanciers, comporterait les mêmes observations que celles de la vis à filet carré, mais il faudrait en outre tenir compte de l'inclinaison des réactions normales par rapport à l'axe, ces réactions étant alors perpendiculaires aux génératrices inclinées de la surface hélicoïdale de la vis.

On n'a pas, dans ce qui précède, tenu compte du frottement latéral de la vis, parce que la force motrice agit habituellement à la manière d'un couple, mais s'il en était autrement, les réactions pourraient être calculées comme nous l'avons indiqué pour le treuil.

Applications utiles du frottement.

79. — *Utilité du frottement.* — Le frottement qui cause les pertes de travail que nous avons calculées pour un certain nombre de circonstances, est cependant d'une utilité incontestable, et sans parler du rôle qu'il remplit en modérant tous les mouvements, en assurant la stabilité de tous les objets dont nous nous servons, il a été utilisé dans les applications plus directes de la mécanique pour résoudre, d'une manière simple, certains problèmes qui, à son défaut, auraient exigé des dispositions compliquées.

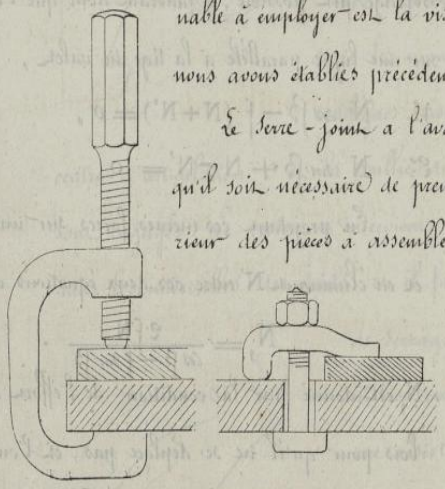
En parlant de la presse à coin et de la vis, nous avons déjà vu comment il servait à maintenir le serrage, malgré les plus grands efforts tendant à le détruire. Cette propriété précieuse qu'il donne à certains organes, de pouvoir fonctionner dans un sens, en s'opposant à tout mouvement en sens contraires, a reçu bien d'autres applications.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Dans quelques circonstances, on se sert simplement du frottement pour assurer à volonté, la liaison entre deux pièces indépendantes, et qu'il convient de rendre à un moment donné solidaires ; dans d'autres occasions on s'en sert soit pour transmettre le mouvement, soit pour en empêcher la transmission ; enfin on le met encore à profit pour arrêter un mouvement dont la continuation serait nuisible ou qu'il s'agirait de restreindre dans certaines limites.

Nous donnerons un exemple de chacune de ces applications.

80. — *Stabilité par frottement.* — Dans tous les cas où l'on veut obtenir une solidarité suffisante entre une pièce mobile et son support, pour qu'une action extérieure ne puisse produire de déplacement relatif, l'organe le plus convenable à employer est la vis de serrage dans les conditions que nous avons établies précédemment.



Le serre-joint a l'avantage de pouvoir s'appliquer sans qu'il soit nécessaire de prendre d'autre point d'appui qu'à l'extérieur des pièces à assembler.

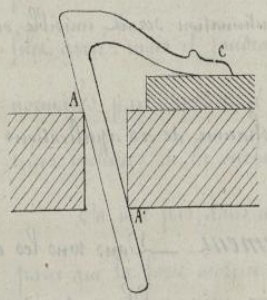
La griffe à écrou est plus solide, et est employée particulièrement pour la fixation des pièces sur les tables à rainures des machines outils ; elle exige que le bâne soit percé pour le passage de la vis. On peut aussi obtenir une solidarité assez grande à l'aide de dispositions dans lesquelles le serrage peut être assuré d'une façon plus simple et sans l'emploi de la vis.

81. — *Valet de Menuisier.* — Le valet du menuisier, qui est destiné à fixer solidement les pièces de bois sur un établi, par le simple frottement d'une tige de fer sur les angles d'un œillet percé dans la table, est un exemple très-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

simple de l'utilité du frottement dans les applications usuelles.

Cette pièce de fer en forme d'L, doit retenir le bois en maintenant une pression exercée par son bec en C, au moyen des réactions développées aux points de contact A et A' de sa tige avec les bords de l'œillet.



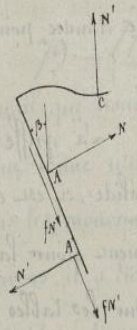
Nous avons ici cinq réactions en présence, en considérant pour chacun des points A et A' les composantes tangentielles et normales.

Pour que le valet, amené au serrage par des coups de maillet appliqués sur sa tête, fût sur le point de se déplacer, il faudrait que la réaction N_1, l'emportât sur la résultante des quatre autres.

Pour que le desserrage fût possible, il faudrait donc que l'on eût, en projetant toutes les forces sur une ligne parallèle à la tige du valet,

$$1^{\circ}: \quad N_1 \cos\beta - f\,(N+N') = 0\,,$$

$$2^{\circ}: \quad N_1 \sin\beta + N - N' = 0\,.$$



En projetant ces mêmes forces sur une perpendiculaire et en éliminant N' entre ces deux équations on trouve

$$N_1 = \frac{2fN}{\cos\beta - f\sin\beta}\,.$$

N_1 est donné par la condition de l'effort à exercer sur le bois pour qu'il ne se déplace pas, et l'on pourra toujours disposer de N de manière que $2fN > N_1$, auquel cas le desserrage serait absolument impossible, à moins que l'on ne frappât de bas en haut sur l'extrémité de la tige du valet pour la chasser.

La limite, que l'on pourra ainsi atteindre pour N_1, sera surtout grande quand le dénominateur $\cos\beta - f\sin\beta$ sera petit et il faut remarquer que ce dénominateur pourrait être nul si l'on posait

$$\cos\beta = f\sin\beta\,,$$

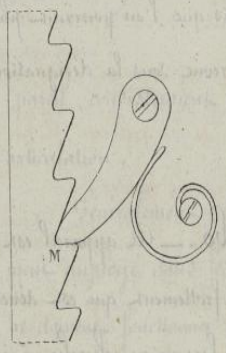
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce qui revient à

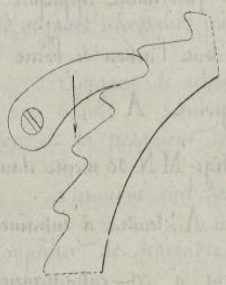
$$\tan\alpha \tan\beta = 1 \qquad \text{d'où} \quad \beta = 90^\circ - \alpha \ ;$$

la meilleure condition pour le valet serait donc que l'angle de la tige avec la verticale, fût le complément de l'angle de frottement.

82. — *Encliquetage.* — Lorsqu'une pièce de machine doit se mouvoir seulement dans un sens, on se sert habituellement d'un organe particulier qu'on appelle cliquet, et qui vient s'arc-bouter contre des saillies de la pièce mobile pour la retenir malgré tous les efforts qui seraient exercés pour la faire mouvoir en sens contraire.



Les cliquets qui sont souvent nécessaires, tout autant dans les mouvements circulaires que dans les mouvements rectilignes, résistent par arc-boutement entre leur centre d'articulation O et la saillie de la pièce mobile M dans laquelle ils sont engagés. Le ressort n'intervient que pour pousser légèrement le cliquet dans les intervalles des dents, et il faut même se garder de lui donner trop de serrage parce qu'il se déterminerait dans le sens où l'on veut conserver la liberté de mouvement une résistance de frottement inutile. On peut même supprimer ce ressort si le poids p du cliquet tend toujours à le faire tomber dans les entailles de la pièce mobile.

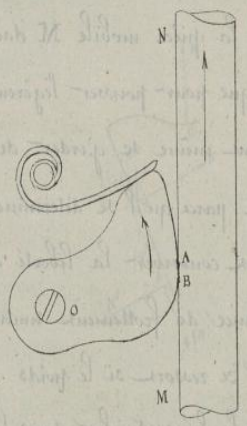


Les encliquetages à rochet ne sauraient agir en tous les points ; ils permettent le retour du mobile d'une fraction de dent plus ou moins grande, et nous allons voir que l'on peut éviter cet inconvénient par les encliquetages à frottement, au moyen desquels l'arc-boutement peut être produit sur un point quelconque sans permettre

aucun recul.

83. — *Encliquetage par arc-boutement.* — Dans les exemples suivants, le frottement n'agit pas seulement pour assurer, par lui-même, la stabilité des organes en présence, il fait intervenir entre ces organes des réactions provenant de leur résistance propre, en les faisant agir par véritable arc-boutement. C'est ce qui arrive dans tous les encliquetages à frottement, proposés pour remplacer les encliquetages à rochets, tandis que l'on pourrait plus convenablement désigner les circonstances déjà passées en revue sous la désignation générale de stabilité par frottement.

84. — *Encliquetage de Dobo.* — Cet appareil est fondé sur l'intervention d'une came qui, en obéissant au frottement qui est développé sur elle, tend à s'arc-bouter contre une tige mobile, lorsqu'on cherche à entraîner cette tige dans un sens, tout en permettant, sans y mettre obstacle, le mouvement de cette tige en sens contraire.



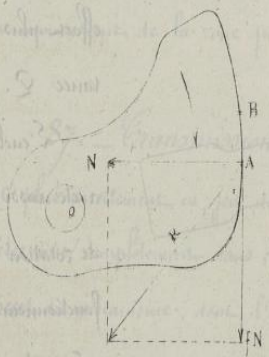
La came est excentrée comme l'indique la figure, et elle est très-faiblement appliquée contre la tige à l'aide d'un ressort, dont l'action se borne simplement à assurer le contact au point A.

Si la tige MN se meut dans le sens de la flèche, le frottement en A, tendra à entraîner la came dans le mouvement général, et rien ne s'opposera à cet entraînement, si le point B, voisin de A, est moins éloigné que lui de l'articulation O de la came.

Il en serait tout autrement, si le mouvement avait lieu en sens contraire. En effet, si nous considérons la came isolément, nous connaîtrons les conditions de son fonctionnement, en lui appliquant, en outre de l'effort p dû au ressort et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tout-à-fait négligeable, les deux réactions normale et tangentielle N et fN, exercées sur elle par la tige, et dont la résultante R est supposée telle qu'elle passe au-



dessous du centre de rotation O ; le moment de la force R tendra donc à faire tourner la came dans un sens tel, que le rayon OB' tendra à remplacer OA, ce qui ne pourra avoir lieu que si le point O se déplace, ou si la came se comprime. La résistance toute entière de cette came, est donc mise en jeu par le frottement, et les meilleures conditions de fonctionnement de l'appareil, consisteraient en ce que la came eût pleine liberté de tourner autour de son articulation.

Généralement, l'encliquetage de Dobo se fait double, et il est fréquemment employé dans les transmissions par poulies, ou autres organes de rotation qui ne doivent fonctionner que dans un sens. Il a été dans ces derniers temps employé avec avantage dans certaines pièces d'horlogerie.

85.— Encliquetage de M^r Saladin. — L'encliquetage de M^r Saladin est identiquement fondé sur le même principe, mais il est complété par les organes nécessaires pour produire l'entraînement dans le sens convenable.

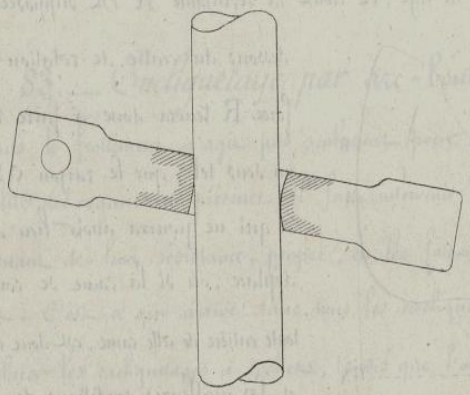
L'organe de retenue est une simple broche à anneau pour laquelle l'action de la pesanteur remplace celle du ressort de mise en prise de Dobo.

L'anneau embrasse la tige à conduire, et la maintient solidement pour l'empêcher de descendre, dans les mêmes conditions que précédemment, si ce n'est que le contact en A' sert à empêcher la tige de fléchir.

L'appareil de relevage agit avec un organe semblable que l'on manœuvre par un levier, et qu'il est inutile de représenter par une figure spéciale, puisque l'on voit parfaitement qu'en relevant parallèlement à elle-même la broche CD,

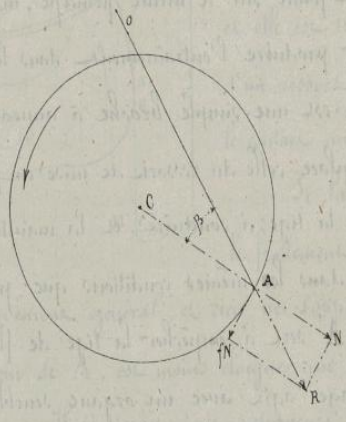
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou enlèverait avec elle la tige MN avec sa charge Q. Il suffirait pour cela de développer, en sens contraire, un effort plus grand que cette résistance Q.



L'encliquetage de Mr. Paladin a été aussi appliqué aux organes de rotation ; le principe de son fonctionnement est toujours le même et repose sur un arc-boutement produit par une pièce mise en prise par le frottement.

86._ *Arcanseur*, — La disposition qui détermine l'arc-boutement devient beaucoup plus simple, lorsqu'il s'agit seulement d'empêcher un organe de rotation de tourner dans un seul sens, et Mr. Blatin a fait une heureuse application du même principe dans son **arcanseur-cale**, à l'aide duquel il empêche les voitures de reculer sur une rampe, si le cheval cesse de faire un effort suffisant dans la marche

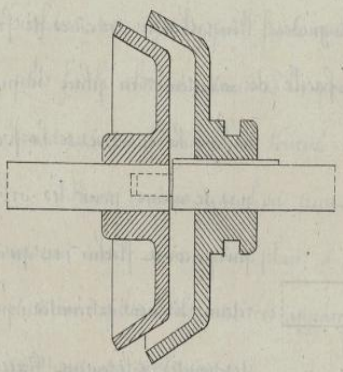


Le sabot de l'arcanseur, formé d'un simple crochet A, n'exerce aucune influence sur la marche directe, mais en cas de recul, les réactions N et fN qui s'exerceront sur lui, tendront à déterminer son entraînement dans le sens du mouvement en arrière de la roue, ou dans le sens de la résultante R de ces deux réactions, ce qui ne saurait avoir lieu que par suite de l'extension ou de la rupture de la tige OA de l'arcanseur qui devient ainsi la cause réelle de l'arc-boutement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il suffit pour que l'appareil fonctionne que α soit plus grand que β, par ce que le moment de R tend alors à faire tourner l'arcanseur dans le sens même du mouvement de la roue pendant le recul.

87. — *Transmission par cône de friction.* — Le frottement de glissement est plus directement en jeu dans la transmission par cônes de friction. C'est lui qui détermine complètement dans cette application, l'adhérence et la solidarité entre deux pièces du mécanisme, dont l'une entraîne l'autre dans son mouvement.



Si c'est le noyau conique intérieur qui doit entraîner le manchon conique dans lequel il pénètre, il faudra exercer sur ce noyau, parallèlement à son axe, un effort suffisant pour déterminer entre les deux surfaces coniques l'adhérence nécessaire pour vaincre les résistances auxquelles le manchon est attelé.

Soit Q la résultante de ces résistances agissant à une distance q de l'axe; r étant le rayon moyen du cône, la condition d'équilibre sera exprimée par $Q'r = Qq$, Q' étant la résistance rapportée à l'extrémité du rayon r, et pour la vaincre, il faudra développer entre les deux surfaces coniques une pression telle que la réaction tangentielle fasse équilibre à cet effort à transmettre. En rapportant également cette réaction tangentielle au rayon moyen, on devra donc avoir $fN \times r = Q'r = Qq$, et le problème est ramené à déterminer la réaction normale N.

Chacune des réactions individuelles qui la constitue donne lieu à une composante dirigée suivant l'axe; il en sera de même pour la réaction totale, et l'on aura $P = N \cos\beta$ ou en mettant, pour N, sa valeur $\frac{Qq}{fr}$, $P = \frac{Qq \cos\beta}{fr}$.

Telle est l'expression de l'effort à exercer, dans le sens de l'axe, pour établir une

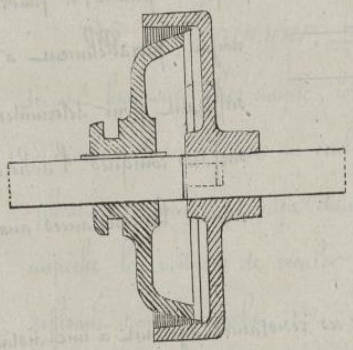
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

adhérence suffisante ; cet effort varie en raison inverse de $\tan\beta$, et en raison directe de $\sin\beta$, c'est-à-dire que si le cône est plus aigu, l'effort à exercer sera moindre, parce qu'alors β sera plus grand, et par conséquent $\sin\beta$ plus petit.

Cette même formule montre pourquoi il convient de proportionner les cônes de friction suivant le travail à transmettre.

88. — *Modification applicable aux arbres de transmission.* —

Dans les machines composées d'organes groupés les uns à côté des autres, dans les conditions d'une parfaite solidarité entre les guides, l'installation des cônes de friction ne présente aucune difficulté, parce qu'il est facile de maintenir en place le manchon et son arbre malgré la poussée de la force P. Il n'en est pas de même pour les arbres de transmission qui peuvent fléchir, et qu'il faudrait en outre retenir à leurs extrémités, par des butoirs ou des pointes solidement fixées.



Nous avons évité ce grave inconvénient dans les transmissions du Conservatoire des Arts et Métiers, en faisant agir les cônes en sens contraires, de manière que la poussée s'établisse de l'un des arbres vers l'autre. Les deux poussées s'équilibrent alors, et l'on ne saurait trop recommander cette disposition dans tous les cas analogues.

Le cône A glisse au moyen d'un prisonnier, et sous l'action d'une vis sur l'arbre a jusqu'à ce qu'il serre convenablement sur la paroi conique du manchon B qui est complétement calé sur l'arbre b auquel le mouvement doit être transmis.

89. — *Variation de la course du cône.* — Au point de vue pratique, il est nécessaire d'ajouter que les cônes aigus, bien que plus favorables sous le rapport des efforts à exercer, présentent l'inconvénient grave d'agir plus lentement, ce qui serait

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

un obstacle réel toutes les fois que l'on aurait recours au cône de friction ; dans le but d'opérer l'embrayage ou le débrayage en marche avec une grande rapidité. Si pour assurer l'indépendance des deux surfaces coniques, on veut que ces surfaces soient écartées d'une distance e pendant le non fonctionnement de l'appareil, il faudra, pour rétablir la solidarité, faire avancer le cône d'une quantité correspondante $\frac{e}{\cos \beta}$ mesurée suivant l'axe, et cette quantité augmente pour la même valeur de e, à mesure que $\cos \beta$ diminue ou que β augmente.

On observe, en général, que les cônes de friction fonctionnent mieux lorsque les surfaces des organes qu'il faut rendre solidaires, sont déjà en mouvement. Il est plus facile alors d'atteindre la pression suffisante P que l'on détermine progressivement pendant que le manchon tourne.

Nous verrons que l'on peut employer des moyens analogues pour la transmission entre deux arbres placés à angle droit l'un par rapport à l'autre ; mais nous étudierons plus utilement ces appareils de friction, lorsque nous nous serons occupé de la résistance au roulement.

90. — *Freins à friction* — Les freins sont des appareils destinés à dépenser en frottement des quantités de travail considérables, comme lorsqu'il s'agit d'arrêter rapidement un mouvement dont la continuation serait nuisible. On obtient ce résultat en pressant sur un des organes mobiles du système, et en déterminant ainsi une résistance supplémentaire.

La théorie de ces appareils est la même, soit qu'ils s'appliquent à une masse animée d'un mouvement de translation, tel que celui d'un train de chemin de fer, ou à un volant tournant avec une rapidité plus ou moins grande.

Dans les deux cas il s'agit d'éteindre la vitesse acquise, en dépensant par le frottement que l'on fait naître, le travail emmagasiné dans le corps en mouvement.

Tous les types de freins à friction peuvent se comparer à celui qui serait compose

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de deux mâchoires opposées que l'on appliquerait en sens contraires, et avec plus ou moins d'énergie contre l'une des pièces mobiles du système.

Le travail emmagasiné peut toujours être représenté par $\frac{\Sigma m v_o^2}{2}$ en tenant compte de la puissance vive de chacune des pièces en mouvement, ou simplement par $\frac{M v_o^2}{2}$, en exprimant toutes ces puissances vives en un seul terme qui serait égal à la somme précédente.

Le problème à résoudre pour un frein peut alors s'énoncer ainsi : Quel effort P faudra-t-il appliquer par l'intermédiaire des mâchoires pour détruire, pendant un parcours e de l'un des points de contact, la demi puissance vive $\frac{MV^2}{2}$ du système. Ainsi posé, le problème se résoudra dans tous les cas par la relation $\frac{\Sigma m v^2}{2} = T_f = fNe$, en désignant soit par T_f soit par $fN \times e$ le travail du frottement, et par N l'ensemble des réactions normales développées par suite du serrage ; fN exprime alors la résistance due au frottement développé par le contact du frein.

91.— *Frein appliqué à l'arrêt d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne.*— Dans le cas où la totalité des pièces en mouvement est animée d'un mouvement rectiligne commun, on arrive immédiatement à une formule qui rappelle celle que nous avons trouvée dans l'étude du mouvement d'un corps lancé sur un plan horizontal. Le frottement sur ce plan détermine alors les conditions de l'arrêt.

M étant la masse totale du mobile, et v_o sa vitesse, le travail à dépenser est $\frac{M v_o^2}{2} = fNe_1$, si l'on désigne par N la somme des réactions normales déterminées par le frein, et par e_1 le chemin correspondant à l'arrêt du mobile ; on tire de cette relation $e_1 = \frac{M v_o^2}{2 fN}$, mais si l'on voulait étudier toutes les circonstances de l'arrêt il faudrait considérer la force fN, comme une force retardatrice, et écrire pour valeur de l'accélération $\frac{dv}{dt} = -\frac{fN}{M}$, ce qui conduit, au moyen de deux intégrations successives à $v = v_o - \frac{fN}{M} t = \frac{de}{dt}$ et $e = v_o t - \frac{fN}{M} \frac{t^2}{2}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si l'on veut considérer le temps nécessaire pour que la vitesse initiale soit complétement annulée, il suffit d'écrire $v_o - \frac{fN}{M} t_1 = 0$ d'où $t_1 = \frac{M v_o}{fN}$; et en substituant dans la valeur de e .

$$e_1 = t_1 \left(v_o - \frac{fN}{M} \frac{t_1^2}{2} \right) = t_1 \left(v_o - \frac{v_o}{2} \right) = \frac{1}{2} v_o t_1 = \frac{M v_o^2}{2fN}$$

comme précédemment.

Dans la plupart des freins de chemins de fer, on arrive bien à arrêter le mouvement de rotation des roues, mais le train continuerait à se mouvoir, si par la cessation de la force motrice et par la substitution du frottement de glissement des roues calées à la résistance beaucoup plus faible opposée par le roulement, on ne modifiait les conditions mêmes de cette résistance. On ajoute souvent à l'effet de cette modification en introduisant sous les roues des sabots en bois, pour lesquels la valeur de f est plus grande ; ils agissent plus efficacement que les bandages sur les rails humides, et ils évitent d'ailleurs tout usé sur les cercles des roues.

L'emploi de ces sabots est également utilisé pour les roues des voitures ordinaires, et lorsque nous saurons calculer la résistance au roulement, nous pourrons plus complétement nous rendre compte de leur efficacité.

92. — *Frein appliqué à un volant ou à tout autre organe de rotation.* — La puissance vive $\Sigma m v_o^2$ de cet organe pourra, dans ce cas, être représentée par le seul terme $M \rho^2 \omega_o^2$, si on désigne sa masse par M, sa vitesse angulaire par ω et son rayon de giration par ρ, ce rayon ρ devant être déterminé de manière qu'on puisse considérer toute la masse comme réunie à la circonférence de rayon ρ.

Si nous supposons que le frottement fN, déterminé par le serrage, s'exerce à la circonférence extérieure de rayon r, la force fN pourra être considérée comme une cause retardatrice du mouvement, équivalente à une autre force $fN' = fN \frac{r}{\rho}$ appliquée à l'extrémité du rayon de giration ρ, et pourvu que sa valeur puisse

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

être considérée comme constante, on aura pour déterminer l'accélération, la relation

$$\rho \frac{d\omega}{dt} = -\frac{fN}{M}\frac{r}{\rho}$$

d'où l'on tire successivement

$$\rho\omega = \rho\omega_0 - \frac{fNr}{M\rho}\, t$$

et

$$e = \rho\omega_0 t - \frac{fNr}{M\rho}\frac{t^2}{2}$$

En faisant $\omega = 0$, on trouve pour le temps t_1, nécessaire à l'arrêt du volant

$$t_1 = \frac{M\rho^2\omega_0}{fNr}$$

et en substituant dans la valeur de e

$$e_1 = t_1\left(\rho\omega_0 - \frac{fNr}{M\rho}\frac{t_1}{2}\right) = t_1\left(\rho\omega_0 - \rho\frac{\omega_0}{2}\right) = \frac{1}{2}\rho\omega_0 t_1 = \frac{M\rho^2\omega^2}{2fN}\times\frac{\rho}{r}$$

Le chemin correspondant parcouru par l'extrémité du rayon r, serait d'ailleurs

$$E_1 = e_1\frac{r}{\rho} = \frac{M\rho^2\omega^2}{2fN}\,.$$

Cette valeur de e_1 serait obtenue d'une façon plus immédiate, en la tirant de l'équation fondamentale qui exprime l'égalité entre les quantités de travail

$$\frac{M\rho^2\omega^2}{2} = fN\times E_1$$

Si l'on désignait par v_0 la vitesse initiale à la circonférence, on pourrait encore écrire sous une forme plus facile à retenir

$$E_1 = \frac{1}{2}v_0 t \qquad \text{d'où} \qquad t_1 = \frac{2E_1}{v_0}$$

Cette relation pourrait servir à calculer directement t_1, quand on aurait déterminé e_1 par la formule qui précède.

Nous voyons qu'en disposant de la valeur de N, on peut rendre t_1 et par suite E_1 aussi petits que l'on voudra. Rien n'empêche de construire des freins d'une énergie extrême, mais leur emploi serait souvent plus nuisible qu'utile par suite des forces d'inertie que l'arrêt pourrait développer.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Dans le cas où certaines pièces, animées d'un mouvement rectiligne, seraient solidaires avec le volant, il suffirait de faire entrer, dans l'expression primitive de la puissance vive, un terme spécial $m'v'$ pour en tenir compte.

193. — *Frein dynamométrique de Prony.* — Nous avons supposé jusqu'ici que toute cause accélératrice était supprimée à partir du moment où le frein commence à agir, mais l'on comprend facilement que l'on puisse se placer dans des conditions telles que le frein soit exclusivement employé à dépenser en frottement l'action motrice exercée sur un arbre de rotation, de manière à maintenir le mouvement de cet arbre à l'état d'uniformité.

C'est ce qu'a proposé de Prony, dans le but de déterminer expérimentalement le travail fourni par un moteur à un arbre de transmission.

L'arbre sollicité par l'action de ce moteur est alors muni d'une poulie, dite poulie de frein, qui est complétement solidaire avec lui et dont la jante est serrée, pendant la marche entre deux machoires, de manière à empêcher autant que possible toute accélération ou retard dans le mouvement de l'arbre.

En chaque point des machoires, se développent des réactions normales et tangentielles N et fN, les réactions N s'annullent par suite des conditions de symétrie dans lesquelles fonctionne l'appareil, les réactions fN s'ajoutent au contraire, et donnent lieu à une force résultante fN, de moment fNr par rapport au centre de rotation, et qui doit, dans l'état d'équilibre dynamique, être exactement égal à celui de la force motrice.

On a donc $dT = fN r\, d\omega$, et le travail T serait connu si l'on pouvait mesurer fN. On arrive facilement à cette mesure, en rendant les machoires mobiles autour de l'axe, et en les retenant par une force dont le moment soit égal à celui du frottement et dirigé en sens contraire. Si P est cette force extérieure et l son bras de levier, on aura nécessairement pour l'équilibre entre les deux moments

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

considérés par rapport au collier de frein.

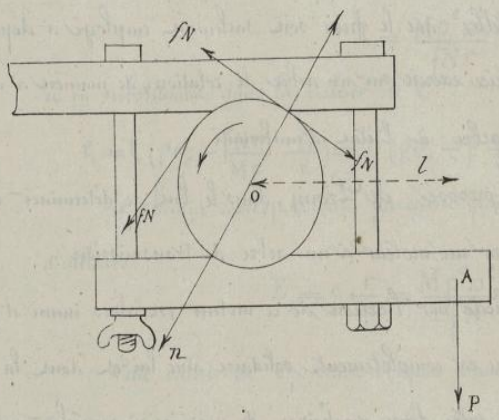
$$f N \times r = P l ,$$

et par suite, $\quad d T = f N d\omega \times r = P l d\omega ;$

et en désignant par T le travail par tour,

$$T = P \times 2\pi l ,$$

ce qui montre que ce travail par tour est égal au produit de la force P qui maintient le frein par la circonférence de rayon l.



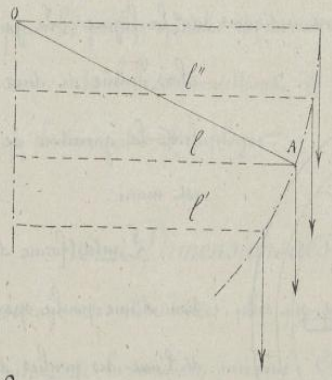
La difficulté ne consiste dans les expériences, qu'à obtenir un équilibre parfait entre les diverses actions engagées, et à maintenir dans une parfaite horizontalité le bras du frein, afin que le moment de la force P soit constant.

94. — Observations sur le meilleur mode de fonctionnement.

Si le travail moteur était constant, et si le frottement donnait toujours lieu à la même résistance, malgré l'échauffement qu'il détermine sur les parois en contact, il suffirait de régler avec soin le poids P et de livrer ensuite l'appareil à lui-même; mais ces conditions, éminemment favorables, ne sont jamais réalisées dans la pratique, et il faut constamment surveiller l'opération, en serrant ou en desserrant, au besoin, l'écrou N pour rétablir l'horizontalité du bras de levier. Il faut aussi aider à la régularité du frottement en lubréfiant d'une manière continue les surfaces en contact, soit avec de l'eau de savon, soit avec du suif en branches, dont les alvéoles s'ouvrent successivement sous l'action de la chaleur et assurent ainsi un graissage uniforme et incessamment renouvelé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Outre ces précautions, il en est une sur laquelle nous ne saurons trop insister, et qui consiste à toujours placer le bras de levier du poids P à la partie inférieure de la poulie de frein. En opérant de cette façon, le frein fonctionne automatiquement, et se règle de lui-même entre certaines limites. Si, en effet, la charge P devient à un instant prépondérante, son point d'application s'abaisse, et le résultat de cet abaissement a précisément pour effet de diminuer le moment Pl qui devient Pl'; en cas contraire le point A se relève et le bras de levier augmente en devenant l'', de manière qu'on peut livrer le frein à lui-même, quelquefois pendant des heures entières sans avoir à y toucher



Si, au contraire, le poids P était attaché à la barre supérieure, il serait facile de voir que le moment de ce poids diminuerait ou augmenterait dans les conditions mêmes où il serait désirable qu'il augmentât ou qu'il diminuât.

Il est, dans tous les cas, nécessaire de limiter les oscillations par des butoirs établis à peu de distance de la position moyenne. Ces butoirs, en limitant les oscillations, aident beaucoup au réglage, et ils mettent à l'abri des accidents que pourrait amener la chute des poids ou l'entraînement du levier.

Dans le cas où les poids des divers organes qui composent le frein ne se feraient pas équilibre autour du centre O de rotation, il serait d'ailleurs nécessaire de tenir compte de ce défaut d'équilibre dans l'évaluation de la force P, mesurée en général, par des poids placés dans un plateau.

95. — Formes diverses du frein de Prony dans les applications.

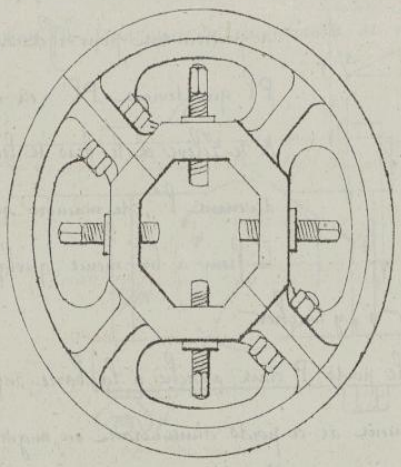
Le frein de Prony ainsi employé se prête merveilleusement à l'étude des machines. Il constitue l'appareil le plus simple, le plus sûr et le moins dispendieux pour

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

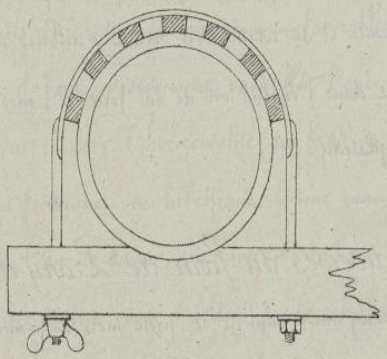
les essais des machines à vapeur et des moteurs hydrauliques de grande puissance.

On l'établit habituellement sous deux formes très différentes.

Lorsqu'il s'agit de mesurer un grand travail, on se sert d'une poulie en deux pièces dite poulie de frein, calée sur l'arbre moteur d'une manière parfaitement concentrique, à l'aide des vis de serrage qui y sont indiquées sur la figure. La jante de la poulie est alors munie de deux rebords entre lesquels frotte la garniture de bois dont le collier est muni.



L'autre forme dispense de la construction d'une poulie spéciale ; on se sert alors de l'une des poulies de la machine ou même du volant, s'il est parfaitement tourné, et il suffit de former le frein avec une bande de fer-feuillard aux extrémités de laquelle on soude des pattes filetées. De distance en distance, on fixe au feuillard, par des rivets, des cales en bois, garnies de rebords, qui embrassent la jante du volant et qui servent à maintenir en place le collier du frein, lorsqu'il est serré par ses boulons sur le levier. Ce levier est ordinairement formé d'un madrier ou pièce de bois de moindre échantillon.



Avec la poulie spéciale, on n'obtient en général l'équilibre qu'en serrant très-fortement les mâchoires du frein ; sur les volants, on dispose relativement d'une surface plus grande ; le frottement par mètre carré est moindre, et le frottement a lieu dans de meilleures conditions.

Nous avons calculé pour un

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

grand nombre d'expériences, le frottement par mètre carré de surface de contact. En désignant la surface de contact par S la valeur de ce frottement serait $\frac{fN}{S} = \frac{Pl}{rS}$ et nous avons trouvé que cette valeur avait varié, dans les meilleures expériences, de 500 à 1000 kilogrammes pour les freins en fouillard, et de 4000 à 6000 kilogrammes pour les poulies spéciales de moindre diamètre.

Ces chiffres permettront de calculer pour chaque essai, les dimensions des freins qu'il conviendra d'employer.

96. — *Dimensions des boulons.* — On donne toujours aux boulons de serrage des dimensions plus que suffisantes, que l'on peut déterminer approximativement de la manière suivante: Chacun des boulons de rayon ρ n'a jamais à résister à un effort plus grand que la moitié de N, car il faudrait pour cela que toutes les résistances N, distribuées symétriquement fussent parallèles; on sera donc assuré de donner à ρ une valeur trop grande si l'on fait $R \times \pi\rho^2 = \frac{N}{2}$, d'où $\rho^2 = \frac{N}{2\pi}$.

97. — *Exemple d'application.* — Voici tous les chiffres relatifs à un essai fait, avec une poulie spéciale, sur une machine à vapeur établie par M. Farcot à l'atelier de la manutention militaire du Quai de Billy.

Le graissage était entretenu avec de l'eau de savon versée à la main, et le frein s'est maintenu en parfait équilibre pendant 4 heures

Charge du frein	P =	120 kilog.
Longueur du bras de levier	l =	3 mètres
Travail par tour	$P \times 2\pi l$ =	2261.95 Km.
Nombre de tours par minute		50
Nombre de tours par seconde 50 : 60, ...		0.833
Travail par seconde	$2261 \times \frac{50}{60}$ =	1884.90 Km.

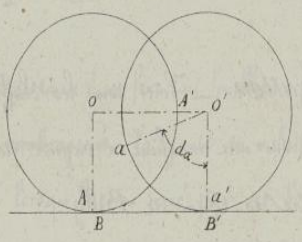
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le frein avait les dimensions suivantes :

Diamètre de la poulie du frein	$0^m,594$
Largeur de la poulie du frein	$0^m,144$
Surface de la poulie	$0^{mq},270$
Surface frottante couverte par les machoires	$0^{mq},234$
Frottement par mètre carré	$\frac{Pf}{rS} = 5180$ kilog.

Résistance au roulement.

98. — *Condition géométrique du roulement.* — Nous avons vu que la condition fondamentale du roulement consistait en ce que, si le contact entre les deux corps dont l'un doit rouler sur l'autre, avait lieu d'abord entre les points A et B, il fallait que dans une position suivante, il eût lieu en B' de telle manière que la longueur a a' développée sur l'un d'eux fût égale à la longueur B B' correspondante, entre les deux points successifs de contact sur la seconde surface.



Cette condition peut s'exprimer facilement par une formule. Si, désignant le déplacement BB' par de, on remarque que $AA' = a\,a' = BB' = OO'$, a pour valeur $r\,d\alpha$. On doit donc avoir $\frac{de}{dt} = r\,\frac{d\alpha}{dt}$; si l'on désigne par v la vitesse de translation du centre, et par $d\omega$ la vitesse angulaire du mobile pendant la rotation, de pourra être représenté par le produit $v\,dt$, de translation du mobile par l'élément de temps et en même temps $r\,\delta\alpha$ pourra être représenté par le produit $r\omega\,dt$; on aura donc $v\,dt = r\omega\,dt$ et par suite $v = r\omega$ ce qui exprime de la manière la plus simple que la vitesse de translation est égale à la vitesse de rotation du point de contact.

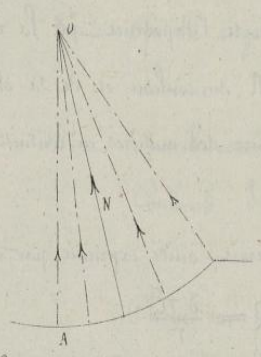
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cette condition fondamentale nous servira fréquemment dans l'étude de la résistance au roulement.

99. — *Mode d'action de la résistance au roulement.* — On attribue généralement le frottement de glissement aux aspérités des surfaces en contact, et l'on se rend, en effet, compte de cette résistance par l'existence d'un grand nombre de petits obstacles qui doivent être arrachés ou franchis pour que le mouvement s'opère. Si cette vue est exacte, on doit s'attendre à une grande diminution de résistance, lors que la surface du mobile roule seulement sur la surface fixe, sans qu'il y ait nécessité de détruire les aspérités qui viennent d'être indiquées.

En fait, la résistance au roulement est ordinairement beaucoup moindre que la résistance au glissement, et son influence se manifeste d'une manière différente.

Supposons qu'un corps de section circulaire, telle que OA, ait été par une cause quelconque mis en roulement sur le plan MN, ce corps continuerait à se mouvoir indéfiniment sur ce plan, si aucune résistance n'était développée au contact, c'est-à-dire qu'il conserverait indéfiniment la vitesse de translation v_0, appliquée à son centre de gravité O, qui est en même temps son centre de figure et sa vitesse de rotation ω_0, autour de ce centre.



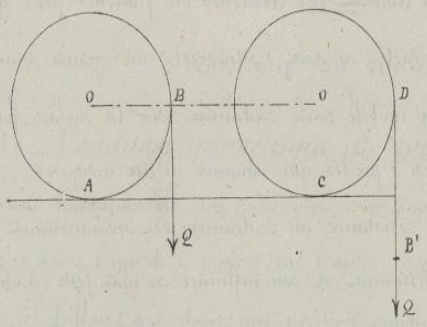
Les réactions développées au contact des deux corps peuvent varier beaucoup suivant l'étendue de la surface qui devient commune par suite de l'impression que l'un des corps détermine sur l'autre au moment du roulement.

On voit bien qu'en chacun des points de ce contact, il se produira une réaction normale passant par le centre de la section; on voit bien encore que toutes ces réactions donneront lieu à une résultante passant, comme elles, par ce centre, mais si l'on acquiert ainsi quelque donnée sur la nature du phénomène, c'est cependant à l'expérience qu'on a dû demander des indications exactes sur les résistances déter-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

minées par ces réactions.

100. — *Expériences de Coulomb.* — Coulomb, en suspendant des poids à un fil enroulé sur un rouleau plus ou moins chargé, a, le premier, déterminé les lois de la résistance au roulement.



Il a mesuré le poids Q nécessaire pour maintenir le rouleau O dans un état de mouvement lent, et sensiblement uniforme, et comme le seul travail de la force Q s'exerce dans sa direction propre et se mesure par le déroulement $B'D = OO'$ du fil, on doit conclure de ses expériences que le travail de la résistance au roulement, pour un déplacement x du centre, doit se mesurer par $Q \times x$, la force Q étant appliquée à l'extrémité du rayon correspondant à la section du mobile et perpendiculairement au plan de roulement.

C'est en ce sens que doit être entendue la loi de Coulomb, qui a cru pouvoir conclure, d'après les valeurs déduites de l'expérience, que la résistance au roulement est proportionnelle au poids total Π du rouleau et de sa charge, à un certain coefficient δ, dépendant de la nature des matières en contact et inversement proportionnelle au rayon du rouleau.

La résistance au roulement serait ainsi exprimée par une équation de la forme

$$Q = \frac{\delta \Pi}{r}.$$

Coulomb a même déterminé les valeurs de δ pour des rouleaux en gaïac et en orme roulant sur des semelles en chêne.

Cette formule a été depuis lors vérifiée par M^r^ Morin, dans des expériences

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

spéciales, et peut-être mieux vérifiée encore par ses importantes recherches sur le tirage des voitures, dont nous aurons bientôt à nous occuper.

101.— *Expériences de M^r. Morin.*— Les expériences peu nombreuses de Coulomb, avaient été faites accessoirement pour servir à ses études sur la raideur des cordes, mais M^r Morin entreprit vers 1833 une série d'expériences spéciales, sur un plus grand nombre de substances, et avec les ressources que lui donnaient ses moyens d'observation de la loi d'un mouvement, qu'il avait déjà appliqués à la recherche des coefficients de frottement.

Il a ainsi reconnu l'exactitude de la loi de Coulomb, tout en mettant en outre en évidence l'influence de la largeur du contact, particulièrement dans les corps mous. Lorsque la longueur du contact est moindre, l'impression produite par le rouleau sur le support est plus marquée, et la résistance du roulement augmente.

Nous admettrons d'après ces expériences que la résistance au roulement, telle que nous l'avons définie varie :

1°:— Proportionnellement à la pression.

2°:— En raison inverse du diamètre du rouleau.

3°:— Qu'elle augmente quand la longueur de la zone de contact diminue.

4°:— Qu'elle est caractérisée par le coëfficient δ de la formule de Coulomb, δ ayant, suivant le cas, les valeurs suivantes :

Chêne sur peuplier . . . . . largeur totale du contact 0^m200
$\delta = 0.000876.$

Chêne sur peuplier . . . . . largeur totale du contact 0.100
$\delta = 0.00109$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chêne sur peuplier . . . . . largeur totale du contact 0.050

$\delta = 0,00189$.

Chêne sur cuir . . . . . largeur totale du contact 0.216

$\delta = 0,00121$

Chêne sur plâtre . . . . . largeur totale du contact 0.120

$\delta = 0,00082$

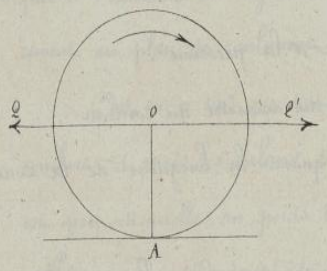
Chêne sur sapin . . . . . largeur totale du contact 0.080

$\delta = 0,00242$

Coulomb avait trouvé pour le gaïac $\delta = 0,00048$, et pour les tourteaux d'orme $\delta = 0.00081$.

Nous trouverons des chiffres beaucoup plus grands lorsque nous nous occuperons des roues fonctionnant sur des sols inégaux.

102. — *Travail de la résistance au roulement.* — Les résultats des expériences qui précèdent permettent de calculer dans chaque cas, la résistance au roulement pour un parcours élémentaire ds, puis que ce travail résistant serait nécessairement égal au travail $Q' ds$.



La résistance au roulement devra être dirigée en sens inverse de l'effort moteur Q', et son travail $Q ds$ sera un travail résistant.

103. — *Valeur de l'utilisation.* — Si un corps roulant est sollicité par une traction P appliquée sur son axe et dirigée parallèlement au chemin à parcourir, $P dx$ sera le travail moteur, $Q dx$ le travail résistant, et le rendement sera donné par le rapport

$$U = \frac{P dx - Q dx}{P dx} = 1 - \frac{Q}{P} .$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si le déplacement a lieu sur un plan horizontal avec une vitesse uniforme, Q est égal à P; tout le travail de la force motrice est dépensé par la résistance, et l'utilisation se trouve alors absolument nulle. Il n'en serait plus de même dans le cas où le mobile cheminerait en montant sur un plan incliné. En désignant par i l'inclinaison de ce plan, la pression due au poids Π sur le plan sera $\Pi \cos i$, et il faudra que l'on ait pour l'équilibre

$$P = \Pi \cos i \times \frac{\delta}{r} + \Pi \sin i ,$$

et par suite,

$$U = \frac{\Pi \sin i}{\frac{\Pi \delta \cos i}{r} + \Pi \sin i} = 1 - \frac{\Pi \delta \cos i}{\Pi \delta \cos i + \Pi r \sin i}$$

ou

$$U = 1 - \frac{\delta}{\delta + r \operatorname{tang} i}$$

Pour le cas du frottement de glissement on aurait eu dans les mêmes conditions

$$U = 1 - \frac{f}{f + \operatorname{tang} i}$$

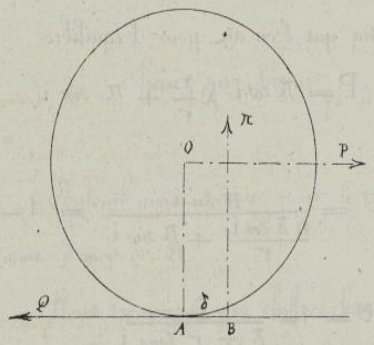
et l'on voit ainsi combien les formules correspondantes doivent être modifiées pour passer d'un cas à l'autre.

104. — *Des diverses manières de présenter la résistance au roulement.* — Il n'est pas aussi facile de considérer en elles-mêmes les influences des diverses causes qui déterminent la résistance au roulement, et l'on peut dire que la disposition des forces qu'elle met en jeu est encore inconnue. Nous pouvons bien comme nous l'avons déjà fait, représenter la résistance Q par une nue force verticale appliquée en B, ou par une force horizontale appliquée en O, mais ce sont là des moyens de représenter la perte de travail qui résulte du roulement, plutôt que des indications certaines sur le mode d'action de la résistance.

L'expression $Q = \frac{\delta \Pi}{r}$ nous montre bien que le moment Qr de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

résistance doit être égal à $\delta\pi$, et que sous ce rapport l'on peut dire que si on transportait la réaction π du sol à une distance δ en avant du point de contact A, l'équilibre serait assuré entre les deux moments que l'on considère, c'est-à-dire quand à la rotation du mobile.



Mais dans ce mode d'évaluation qui est d'un emploi très commode dans le calcul, il ne faut point oublier que l'équilibre doit être également assuré en ce qui concerne les projections des différentes forces, motrices et résistantes, qui sollicitent le système. C'est ainsi que dans les circonstances représentées sur la figure, il faut que l'on ait tout à la fois les deux relations

$$Pr = \delta\pi \qquad \text{et} \qquad Q = -P,$$

ce qui montre que la résistance au roulement est alors représentée par un système composé simultanément de la force π appliquée en B et de la force $Q = P$ appliquée en A.

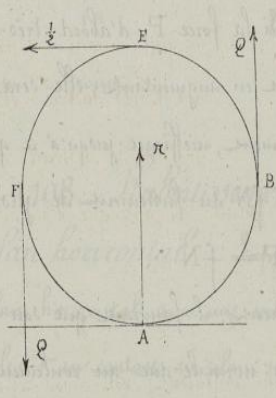
La valeur de cette force complémentaire Q varierait avec le mode d'action de la force motrice; elle serait nulle si P était dirigée perpendiculairement au sol, et son expression générale serait $Q = P\cos\beta$, si l'on désignait par β l'angle que fait la direction du tirage avec le sol.

105. — *Observations sur les forces tangentielles que l'on peut considérer.* — On pourrait cependant représenter le moment de la résistance au frottement par celui d'une force tangentielle appliquée en un point quelconque de la circonférence du rouleau, à l'exception seulement du point A.

Cette force varierait d'après la longueur de son bras de levier, elle serait

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

égale à Q, en F comme en B, mais dirigée en sens contraire ; en E, elle serait égale à $\frac{1}{2} Q$ parce que le bras de levier EA est égal à $2r$, et il est facile de voir d'ailleurs que le point E se déplace dans la direction opposée à celle de la force $\frac{1}{2} Q$, d'un chemin double de celui du point A ou de celui du point B, dans le sens des tangentes en ces points. Au point A de rotation, aucune force ne pourrait représenter à elle seule la résistance au roulement, et si l'on voulait introduire une pareille force dans le système, il faudrait qu'elle fût combinée avec d'autres forces pour représenter l'action de celles que nous avons successivement appliquées aux différents points de la circonférence OA.



Il faut toutefois remarquer que l'équivalence entre ces différents moments, n'existe que quant aux mouvements de rotation, mais qu'il faut aussi tenir compte des observations faites dans le précédent numéro.

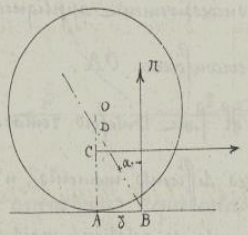
106.— *La résistance au roulement est généralement petite par rapport à la résistance au glissement.* — La résistance au roulement étant exprimée par $Q = \frac{\delta \pi}{r}$, nous pouvons la comparer, pour les mêmes matières en contact, avec la résistance au glissement $F = f \pi$. La première sera plus petite que la seconde toutes les fois que l'on aura $Q < F$ ou $\frac{\delta}{r} < f$.

On voit par cette comparaison qu'il y aurait toujours une valeur de r, $r_1 = \frac{\delta}{f}$, qui établirait l'égalité entre les deux résistances, mais quand on introduit dans cette égalité les valeurs de δ et de f, données par les tables, on voit que r_1 est presque toujours plus petit que dans toute application à faire des règles relatives au frottement de roulement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On peut donc en conclure que cette résistance est généralement fort petite par rapport à la résistance au glissement ; elle est même négligeable par rapport à celle-ci dans la plupart des circonstances.

107. — *Conditions pour qu'un corps glisse ou qu'il roule.* — Si un corps rond est placé sur un plan, il y a lieu de se demander tout d'abord, s'il glissera ou s'il roulera sur le plan, lorsqu'il sera sollicité par une force F appliquée à une certaine hauteur p au-dessus du plan.



Si la force F, d'abord très-petite, va successivement en augmentant, elle sera, par rapport au glissement, inefficace jusqu'à ce qu'elle atteigne la limite fN du frottement de glissement,

$$P = fN$$

Si elle détermine le roulement, il faudrait que son moment Pp, fût au moment $\delta\pi$ de la réaction normale due au roulement, d'où $P = \frac{\delta\pi}{p}$.

Sitôt que la plus petite de ces valeurs sera atteinte, le mouvement correspondant se produira. Il y aura donc glissement si $f\pi < \frac{\delta\pi}{p}$, condition qui revient à $p < \delta \operatorname{cotg}\alpha$.

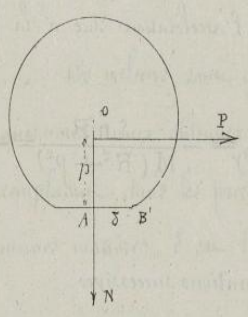
Dans le cas contraire, le roulement se produira, et il est facile de voir quelles sont les positions du point C d'application de la force extérieure, qui correspondent à l'une ou à l'autre condition. Si par le point B, pied de la réaction π due au roulement, on mène une droite BD qui fasse un angle α avec la normale, le point D de cette droite pris sur la verticale du point de contact, satisfera à la condition $AD = \delta \operatorname{cotg}\alpha$, et les conditions précédentes reviendront dès lors à celle-ci :

Il y aura glissement ou roulement suivant que le point d'application de la force motrice sera au-dessous ou au-dessus du point D. La question se

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trouve ainsi résolue par un procédé géométrique très-simple.

On remarquera qu'un raisonnement analogue serait encore applicable, si le cercle O était, à la partie inférieure, usé de manière à former un méplat $AB' = \delta' > \delta$; $\underline{P}$ pourrait alors être beaucoup plus grand sans que le glissement cessât de se produire avant le roulement, pourvu que le moment Pp de la force motrice, supposée horizontale, par rapport au point B' fût moindre que le moment $\pi\delta'$ de la charge π par rapport à ce même point.



108. — *Ralentissement et arrêt d'un mobile roulant sur un plan horizontal.* — Supposons maintenant que le mobile roule sur le plan horizontal avec une vitesse angulaire ω_0, son mouvement devra se ralentir au contact du plan sur lequel le roulement a lieu, et nous nous proposons de déterminer les conditions de son mouvement, pendant cette période de ralentissement.

Remarquons d'abord que, quelles que soient les conditions de ce ralentissement, il devra toujours satisfaire à la relation fondamentale $V = R\omega$ du roulement sur une circonférence de rayon R.

La demi-puissance vive du mobile serait à chaque instant représentée par

$$\frac{MV^2 + M\rho^2\omega^2}{2};$$

et par suite de la condition précédente $V = R\omega$, par $\frac{M}{2}\left(1 + \frac{\rho^2}{R^2}\right)$, ρ désignant la grandeur du rayon de giration du mobile.

Si ce mobile était seulement animé d'un mouvement de translation la demi-puissance vive serait exprimée plus simplement par $\frac{M}{2}V^2$. On voit donc que pour tenir compte du double mouvement, il suffira de ne considérer que le mou-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

vement de translation, en supposant que la masse a été augmentée dans le rapport des puissances vives, c'est-à-dire en la représentant par

$$M' = M\left(1 + \frac{\rho^2}{R^2}\right).$$

On aura dès lors pour calculer l'accélération due à la force retardatrice $Q = \frac{\delta \omega}{R}$,

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{Q}{M'} = \frac{-QR^2}{M(R^2+\rho^2)} = -\frac{\delta \pi R}{M(R^2+\rho^2)} = -\frac{g\delta R}{R^2+\rho^2},$$

en remarquant que $\pi = Mg$.

On obtient alors par deux intégrations successives

$$V = R\omega = V_0 - \frac{g\delta R\, t}{R^2+\rho^2}$$

$$e = V_0 t - \frac{g\,\delta R\, t^2}{2(R^2+\rho^2)}.$$

En désignant par t_1 et par e_1 le temps, et le chemin parcourus qui correspondent à l'arrêt, on fera $V = 0$, ce qui donnera

$$t_1 = \frac{V_0(R^2+\rho^2)}{g\,\delta R},$$

et en substituant dans la valeur de e,

$$e_1 = \frac{1}{2}\frac{V_0^2(R^2+\rho^2)}{g\,\delta R} = \frac{1}{2} V_0 t_1.$$

Nous remarquerons d'ailleurs que l'on pourrait, comme nous l'avons fait déjà pour les applications analogues du frottement de glissement, écrire directement que le travail de la résistance pour un chemin e_1, est précisément égal à la demi-puissance vive totale du mobile, ce qui donne,

$$Q e_1 = \frac{\delta \pi e_1}{R} = \frac{M\pi^2(R^2+\rho^2)}{2},$$

d'où l'on obtient immédiatement

$$e_1 = \frac{MR\pi^2(R^2+\rho^2)}{2\delta\pi} = \frac{1}{2}\frac{R^2\pi^2(R^2+\rho^2)}{g\delta R} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2(R^2+\rho^2)}{g\delta R}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La valeur de t_1 pourrait se déduire de celle de e_1 par la relation

$$e_1 = \frac{1}{2} V_0 t_1$$

d'où l'on tire

$$t_1 \pi = \frac{g e_1}{V_0} = \frac{V_0 (R^2 + \rho^2)}{g \delta R} .$$

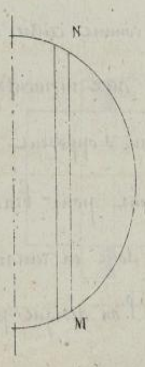
Ces valeurs sont généralement plus grandes que les valeurs correspondantes que nous avons obtenues dans le cas du glissement, puisqu'elles s'obtiennent en remplaçant dans les précédentes expressions $\frac{1}{f}$ par $\frac{R^2 + \rho^2}{\delta R}$ et que, entre les mêmes matières, δ est beaucoup plus petit que f.

109. — *Application au cylindre.* — En remarquant que pour un rouleau cylindrique, on a $\rho^2 = \frac{1}{2} R^2$, on obtient pour e et pour t les valeurs suivantes :

$$e_1 = \frac{3}{4} \frac{V_0^2 R}{g \delta} \quad , \quad t_1 = \frac{3}{2} \frac{V_0 r}{g \delta} .$$

Le temps de l'arrêt augmente proportionnellement au rayon et en raison inverse du coefficient δ. Le chemin parcouru pendant ce temps varie de la même manière, mais il est en outre proportionnel au carré de la vitesse initiale V_0 de translation.

110. — *Application à une boule sphérique.* — Les calculs sont identiquement les mêmes que pour le cylindre, si ce n'est qu'il faut introduire dans les relations générales qui donnent les valeurs de t_1 et de e_1 une nouvelle valeur de ρ.



Pour déterminer ce rayon de gyration, nous pourrons nous appuyer, en désignant par ρ' le rayon de giration d'une tranche cylindrique MN, d'épaisseur dx et de rayon r, sur ce que $\rho'^2 = \frac{1}{2} r^2$.

On aura alors pour la $\frac{1}{2}$ sphère représentée sur la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

figure

$$\frac{2}{3}\pi R^3 \times \rho^2 = \int_0^R \pi r^2 dx \times \frac{1}{2} r^2$$

ou en remarquant que $r^2 + x^2 = R^2$, et que par conséquent $r^4 = (R^2 - x^2)^2$.

$$\frac{2}{3}\pi R^3 \times \rho^2 = \frac{1}{2}\pi \int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx$$
$$= \frac{1}{2}\pi \rho^5 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)$$
$$= \frac{4}{15}\pi R^5,$$

d'où l'on tire immédiatement $\rho^2 = \frac{2}{5} R^2$.

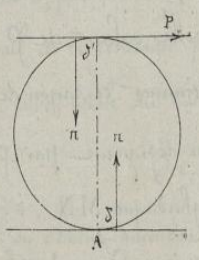
Substituant cette valeur de ρ^2 dans les formules en e_1 et en t_1, on a directement

$$e_1 = \frac{7}{10}\frac{V_0^2 z}{g\delta}, \qquad t_1 = \frac{7}{5}\frac{V_0 r}{g\delta}.$$

L'arrêt serait plus rapide parce qu'à égalité de rayon extérieur, le rayon de giration est plus petit.

111. — *Transports des fardeaux sur rouleaux.* — Pour l'homme habitué aux manœuvres, le transport sur rouleaux, qui constitue une application immédiate des avantages de la résistance au roulement par rapport au frottement de glissement, est de tous les procédés que l'on peut employer, le plus sûr et le plus commode pour les pièces très-lourdes.

Si une charge Π est placée sur un rouleau, et si on applique à cette charge un effort de traction horizontal P, il faudra pour entretenir le mouvement que la force P, par rapport au point A de contact avec le sol, considéré comme centre instantané de rotation, fasse équilibre aux moments des deux réactions normales Π qui s'opposent à son action, et qui ont respectivement pour bras de levier δ et δ'.



On aura donc en remarquant que la réaction entre le rouleau et le sol devient $\Pi + p$, si l'on désigne par cette dernière lettre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le poids du rouleau,

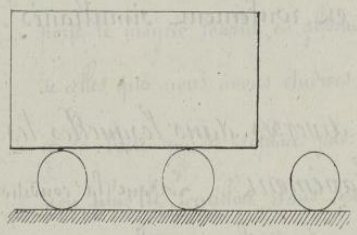
$$P \times 2r = (\pi + p)\,\delta + \omega\,\delta' = \pi(\delta + \delta') + p\,\delta,$$

ou en négligeant le dernier terme qui est toujours très petit,

$$\frac{P}{\pi} = \frac{\delta + \delta'}{2r},$$

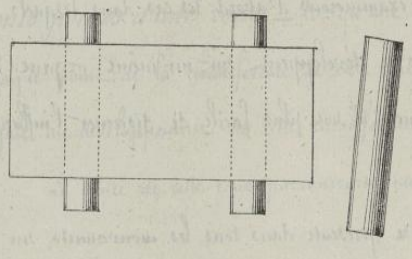
relation dans laquelle on a négligé le poids propre du rouleau.

Il y aura avantage à employer ce procédé, lorsque $\frac{\delta+\delta'}{2r}$ sera plus petit que f, et, c'est ce qui résulte numériquement des valeurs comparées de f, de δ et de δ'; on peut d'ailleurs rendre l'avantage plus sensible, en employant des rouleaux de grand rayon, puisque la formule montre que le rapport $\frac{P}{\pi}$ varie en raison inverse de ce rayon.



Dans les applications, on emploie simultanément deux rouleaux afin d'éviter toute chance de déversement; mais la théorie reste la même, chacun des rouleaux portant une part variable du poids π, et donnant lieu à une résistance proportionnelle, dont la somme est égale à la résistance due à la charge π.

Un rouleau de rechange est même nécessaire, pour éviter que le centre de gravité de la charge ne soit jamais en porte-à-faux; on le place en avant de la pièce afin qu'elle s'y appuie un peu avant de quitter le rouleau d'arrière qui avance moitié moins rapidement qu'elle, et qui devient ainsi disponible pour être reporté à l'avant aussitôt qu'il est dégagé.



En obliquant successivement les rouleaux avant de les mettre en prise, on arrive facilement à changer de direction

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et à faire suivre au fardeau un déplacement en ligne courbe de très-petit rayon.

Les pièces qui n'auraient pas une longueur suffisante pour se prêter facilement à cette manœuvre, peuvent être placées sur des madriers parallèles qui s'appuient individuellement sur les rouleaux, ce qu'il n'est pas même nécessaire de réunir en forme de plancher.

Il serait facile, par un exemple numérique sur l'emploi des rouleaux, de montrer l'importance de ce procédé dans les transports sur le sol à petite distance.

Glissement et roulement simultanés.

112. — *Circonstances diverses dans lesquelles les deux résistances ont lieu simultanément.* Lorsque la condition $V = R\omega$, n'est pas satisfaite, et que cependant il y a déplacement angulaire du mobile, le phénomène de roulement se trouve accompagné d'un phénomène de glissement et l'on dit alors qu'il y a frottement mixte, lorsque les deux déplacements ont lieu au même point de contact, comme par exemple, lorsqu'une dent d'engrenage frotte sur le flanc de la roue sur laquelle elle agit.

Nous verrons que dans cette circonstance, la résistance au roulement peut être négligée vis-à-vis du frottement de glissement, et pour arriver plus sûrement à cette conclusion, nous examinerons d'abord les cas dans lesquels le glissement et le roulement simultanés se développent sur un même organe mécanique en des points différents, et sur lesquels il soit plus facile de discerner l'influence propre de chacune des deux résistances.

C'est ce qui se présente dans tous les mouvements sur galets, qui développent à la circonférence extérieure une résistance au roulement, pendant que les fusées en

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les boîtes de leurs essieux déterminent sur un autre point, un frottement de glissement plus ou moins considérable.

113. — *Roues de voitures.* — Les roues des voitures ne sont, à ce point de vue, que des galets de grandes dimensions, frottant par roulement sur le sol et par glissement sur leurs fusées.

Ces galets permettent de transporter les fardeaux à bien moindres frais que s'il fallait traîner ces fardeaux en les faisant glisser sur le sol; et la généralité de cette application nous oblige à en étudier les conditions fondamentales.

La voiture est ordinairement portée sur deux ou quatre roues, au moyen d'essieux autour desquels les roues sont libres de tourner, et il résulte de cette disposition, que pendant que la jante de la roue se développe sur le sol, la boîte qui porte le moyeu tourne en glissant autour de la fusée, dans des conditions inverses de celles que nous avons étudiées en parlant des tourillons et des coussinets. C'est ici la boîte qui se déplace par glissement autour du tourillon ou de la fusée, et non plus le tourillon dans son coussinet.

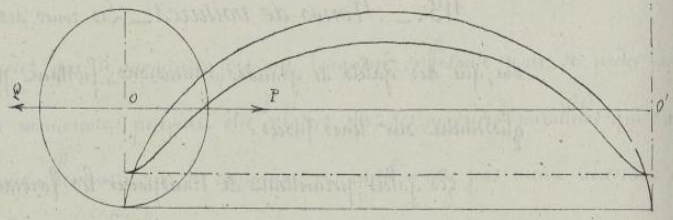
Les roues des véhicules de chemins de fer fonctionnent dans des conditions différentes; elles sont solidaires avec leurs essieux qui tournent dans des coussinets ou boîtes à graisse, et cette solidarité qui force chaque roue à tourner exactement du même mouvement égal que celle avec laquelle elle est considérée, est très-favorable sous le rapport de la sécurité dans les parcours en ligne droite.

114. — *Conditions géométriques sur les déplacements des différents points d'une roue.* — Lorsqu'une roue se meut sans glissement sur le sol, chaque point de la circonférence de cette roue décrit une cycloïde dont la base est égale au développement de cette circonférence.

Le centre de cette roue parcourrait une ligne droite parallèle au sol. Enfin

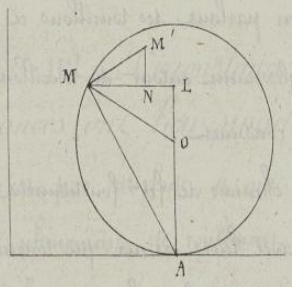
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tout point intermédiaire décrit également une cycloïde raccourcie, de même base et de hauteur égale au diamètre de la circonférence concentrique à laquelle ce point appartient.



La droite décrite par le centre est un cas particulier de cette courbe cycloïdale.

L'équation différentielle de la cycloïde est la plus commode pour les applications, et l'on obtient immédiatement, par la considération de la figure ci-jointe, dans laquelle M est un point de la courbe, A le centre instantané de rotation et M' la position voisine du point M, lorsqu'il tourne autour du point A,



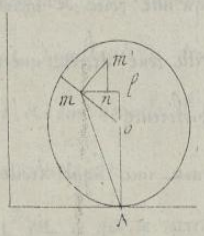
$$MN : M'N :: AL : ML ,$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{R^2 - (y+R)^2}} ,$$

d'où se déduit l'équation générale de la cycloïde :

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2Ry - y^2}} .$$

Les raisonnements seraient identiquement les mêmes pour obtenir l'équation différentielle de la cycloïde raccourcie décrite par le point m, qui appartient à une circonférence intérieure de rayon $r < R$,



$$\frac{mn}{m'n} = \frac{Al}{ml'} ,$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{r^2 - (y-R)^2}} .$$

Cette équation différentielle est :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{r^2-(R-y)^2}},$$

et on la ramène à la précédente en faisant $r = R$.

Pour $r = o$, on trouve $dx = \frac{y\,dy}{R-y}$, qui par suite de $y = R$ donne $\frac{dy}{dx} = o$.

Au point de vue de la résistance au roulement, la propriété caractéristique est celle qui se rapporte aux chemins respectivement parcourus par la puissance et par la résistance Q, considérée, ainsi qu'elle l'a été précédemment, comme appliquée également au centre O.

Il résulte de cette indication que l'étude des résistances pourra être faite sans qu'il soit nécessaire de considérer le mouvement cycloïdal de chacun des points de la roue, et qu'il suffira de déterminer l'influence, sur la dépense du travail, des déplacements relatifs produits par la jante, par rapport au sol et par la boîte par rapport à la fusée.

115. — *Voiture traînée par une action extérieure.* — Si une voiture était tirée par une corde horizontale fixée à son essieu, cette action la mettrait en marche aussitôt que l'effort exercé serait supérieur aux résistances déterminées par le double frottement dont il vient d'être question, et l'on établirait facilement la relation nécessaire entre le tirage et la charge pour que le déplacement se produise.

En fait, les voitures ne sont pas ordinairement remorquées de cette façon et ce sont les chevaux, qui, attelés à la voiture, sont chargés de la maintenir en mouvement, au moyen d'efforts successifs qu'ils exercent en prenant leur point d'appui sur le sol.

Les chevaux développent ainsi une certaine quantité de travail, en dehors de celle qu'ils sont encore obligés de dépenser pour se mouvoir eux-mêmes, et ce qu'on

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

appelle le tirage dans ces conditions, c'est l'effort moyen qui correspond, eu égard au parcours effectué, à une action constante par laquelle on remplacerait l'action variable qui est réellement dépensée pour entretenir le mouvement de la voiture chargée.

116.— *Expériences sur le tirage des voitures.*— Les expériences fondamentales sur le tirage des voitures ont été faites par Mr Morin, à Metz et à Paris, en interposant entre le crochet d'attelage et les chevaux, un dynamomètre de traction.

Les premières déterminations ont été faites au moyen d'un dynamomètre à disque tournant; les autres, beaucoup plus nombreuses, avec des dynamomètres à styles, ou des dynamomètres totalisateurs.

Ces appareils avaient pour objet de déterminer aussi exactement que la nature du sujet le comporte, l'effort moyen développé par un attelage pour transporter une voiture donnée, chargée d'un poids plus ou moins considérable, sur une route dont l'état était chaque fois constaté. En répétant ces sortes de déterminations dans un grand nombre de circonstances différentes, Mr Morin a pu faire connaître individuellement l'influence sur le tirage, de la charge, des diamètres des roues, des diamètres des fusées, de la largeur des jantes, et, à un autre point de vue, celle de l'état de la route. Nous nous proposons d'indiquer les résultats principaux de ce grand travail.

117.— *Résultats généraux des expériences sur le tirage des voitures.*— En comparant, pour les diverses natures de routes, les résultats des expériences aux éléments variables de la question, Mr Morin a prouvé que la résistance à la traction satisfait très-approximativement aux conséquences qui suivent:

1°. Sur les routes en empierrement solide et sur les routes pavées, la résistance est:

Proportionnelle au poids transporté, et inversement proportionnelle au diamètre des roues; à très-peu près indépendante de la largeur de la jante, elle croît

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

avec la vitesse d'autant moins que la voiture est mieux suspendue.

La formule $Q = \frac{\delta \Pi}{R}$ qui résume cette première conclusion n'est pas conforme aux conséquences que Mr Dupuit avait déduites d'expériences auxquelles il s'était livré particulièrement, en laissant descendre des véhicules sous l'action seule de leur charge sur des pentes plus ou moins prolongées.

La formule correspondante de Mr Dupuit serait $Q = \frac{\delta \Pi}{R^n}$; n étant une quantité plus petite que 1, mais Mr Morin fait voir que la première formule rend mieux compte de l'ensemble des faits, et Mr Piobert a montré que l'exposant n se rapprochait d'autant plus d'être égal à 1, à mesure que la route devenait plus dure.

On reste les coefficients de traction donnés par Mr Morin étant déduits de la formule simple $Q = \frac{\delta \Pi}{R}$, c'est évidemment celle-là qu'il conviendra d'appliquer dans la plupart des circonstances de la pratique en adoptant chaque fois, le coefficient fourni, dans les conditions les plus rapprochées de celles que l'on a en vue.

2°: Sur les terrains compressibles tels que les terres, le sable, le gravier, la résistance diminue à mesure que la largeur de la jante augmente.

3°: Sur les terrains mous, la résistance est indépendante de la vitesse,

La première de ces lois est la plus importante, et l'on doit remarquer que l'influence du poids est celle du diamètre ressortaient immédiatement de la formule fondamentale de Coulomb, dont les éléments donneront lieu d'ailleurs à d'autres vérifications.

Mr Morin a donné des tables très-complètes de la traction mesurée dans un grand nombre de cas. Les nombres qui expriment dans les cas les plus extrêmes le rapport entre le tirage et la charge, et que l'on peut appeler les coefficients de traction, sont respectivement $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{60}$, ou en fractions décimales 0,143 et 0,017.

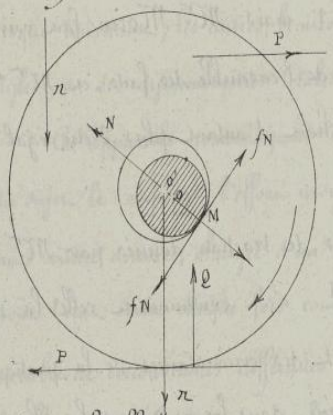
Sur une bonne route pavée ou macadamisée, la traction varie en général de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\frac{1}{20}$ ou $\frac{1}{30}$ de la charge ou de 0.050 à 0,033.

118. — *Théorie du tirage des voitures.* — Nous donnerons successivement la théorie du tirage des voitures, telle qu'elle résulte de la loi de Coulomb, pour les voitures à un ou deux essieux et pour les machines locomotives.

119. — *Voitures ordinaires à un seul essieu.* — Dans le cas des voitures ordinaires, nous avons vu que la fusée est solidaire avec la caisse et que cette fusée est supportée par la roue, le poids de la voiture fera que la fusée touchera la voiture en un point M plus bas que le centre O' et situé à droite de la verticale du centre, si l'on suppose que la roue tourne dans le sens indiqué par la flèche.



Nous supposerons que le frottement de roulement est représenté par une force Q agissant avec un bras de levier δ, et nous aurons pour compléter l'équilibre à considérer en outre une réaction P' dirigée suivant l'horizontale du point A de contact.

La voiture a un poids π, la roue ayant un poids π', Nous aurons à tenir compte au point M d', d'une réaction N de la roue sur la fusée et d'une réaction N de la fusée sur la roue. Puis de deux forces égales fN et de sens contraires, relatives aux deux parties du système et dont nous déterminerons le sens en établissant les conditions d'équilibre.

A priori, on voit que les forces extérieures sont Q, P', π' appliquées à la roue, et π et P appliquées à la fusée; et à considérer les conditions d'équilibre du système complet, on aura immédiatement en projetant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

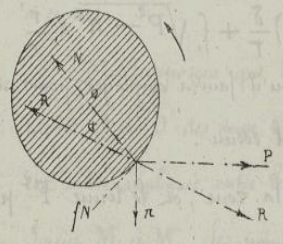
toutes les forces sur la direction horizontale et sur la direction verticale :

$$P = P'$$

$$\pi + \pi' = Q .$$

Supposons que la voiture roule d'un mouvement uniforme, et établissons séparément les conditions d'équilibre de la fusée, et ensuite celles de la roue :

En ce qui concerne la fusée on sait que π et P agissent au point M de contact et on peut les composer en une seule force R. De plus en M la fusée éprouve une réaction de la part de la roue égale à N. Puis une force fN tangentielle de frottement, dirigée comme on l'a indiqué ; car si nous supposions la roue en repos et la fusée en mouvement, la fusée tournerait dans le sens de la flèche et fN est dirigée en sens inverse du mouvement.



En composant fN et N on obtient une résultante R qui doit être égale et directement opposée à la résultante de P et de π, on aura donc

$$R^2 = N^2 + f^2N^2 = P^2 + \pi^2$$

et désignant par α l'angle de frottement :

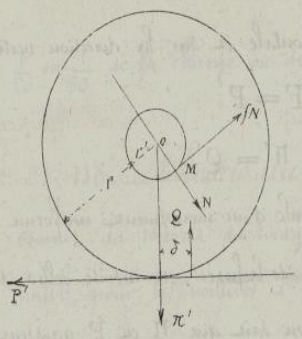
$$N = R \cos\alpha = \cos\alpha \sqrt{P^2 + \pi^2},$$

$$fN = R \sin\alpha = f \sqrt{P^2 + \pi^2} .$$

Quant à la roue considérée à part, les forces extérieures qui agissent sur elle sont P', Q et π', il faut y ajouter la réaction N de la fusée sur la roue et la force fN de frottement, qui tend à entraîner le point M dans le sens même du mouvement.

Nous prendrons les moments de ces forces par rapport à l'axe passant par le centre de la roue, r étant le rayon de la roue, r' le rayon de la boîte, nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



aurons ainsi $$Pr = Q\delta + fNr'$$

L'élimination de N et de Q entre cette équation et les précédentes, conduit aux relations finales,

$$Pr = (\pi+\pi')\delta + f_1 r\sqrt{P^2-\pi^2}$$

et

$$\delta = \frac{Pr - f_1 r'\sqrt{P^2-\pi^2}}{\pi-\pi'}.$$

C'est au moyen de cette formule que M^r Morin a trouvé la valeur du coëfficient de traction dans chaque cas particulier.

Quant à la formule du tirage d'où elle est déduite, nous l'écrirons :

$$P = (\pi-\pi')\frac{\delta}{r} + f_1\sqrt{P^2-\pi^2}\times\frac{r'}{r}$$

et c'est cette formule fondamentale qu'il faudra employer pour calculer la résistance à la traction d'une voiture à un seul essieu.

En négligeant π' poids de la roue, et le terme P^2 par rapport à π^2 on aurait plus simplement

$$P = \pi\frac{\delta}{r} + f_1\,\pi\,\frac{r'}{r}$$

et c'est dans cette hypothèse que l'on peut admettre que la résistance à la traction varie proportionnellement au poids π, et en raison inverse du rayon r.

120.— *Comparaison entre l'influence de la résistance au roulement et de la résistance au glissement.* — Dans l'expression du numéro précédent, le premier terme représente l'influence du frottement de roulement, le second, celle du frottement de glissement. En mettant $\frac{\pi}{r}$ en facteur commun, on a

$$P = \frac{\pi}{r}(\delta + f_1 r');$$

suivant qu'on aura $\delta \lessgtr f_1 r'$, le frottement de glissement ou celui de roulement aura l'influence prépondérante.

Sur les routes ordinaires δ l'emporte ; sur les chemins de fer on a

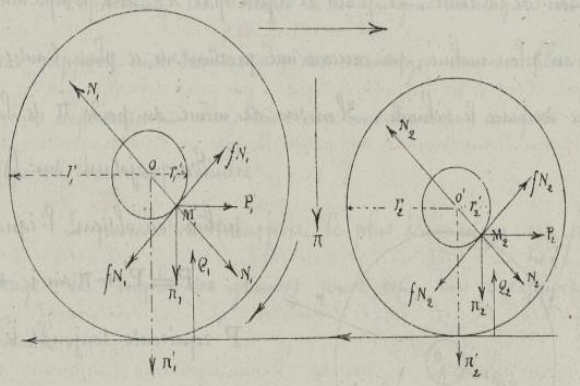
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sensiblement $\delta = f_1 r'$.

Si r' augmentait beaucoup, $f_1 r'$ deviendrait prépondérant et serait presque seul à considérer; c'est ce qui aurait lieu dans tous les cas où le point d'application de la résistance au glissement serait aussi éloigné que l'axe du centre de rotation.

121. — *Voitures ordinaires à deux essieux.* — Toutes les considérations qu'on a présentées pour une voiture à un seul essieu, sont applicables à ce cas.

On supposera que la force Π est appliquée en un point qui tombe entre les centres O et O' des deux roues. On supposera de même que la force de traction P est aussi appliquée entre les horizontales passant par les centres de ces deux roues. Soient M_1 et M_2, les points de contact de la fusée avec la boîte, on décomposera le poids Π du véhicule en deux composantes Π_1 et Π_2 appliquées en M_1 et M_2; on sait comme pour le treuil que $\Pi_1 + \Pi_2 = \Pi$.



On décomposera P en deux autres forces qui seront encore appliquées en M_1 et en M_2, et qui seront P_1 et P_2 et on aura encore $P_1 + P_2 = P$.

Sur la roue O on aura encore à considérer les forces N_1 et fN_1 normale et tangentielle et la force P'_1 horizontale, la résistance Q_1 agissant à l'extrémité d'un bras de levier δ et enfin Π'_1, poids de la roue.

Sur la roue O' on aura les forces analogues : N_2, fN_2, Π'_2, P'_2 et Q_2.

On remarquera que δ est le même pour la roue O et la roue O', et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'on pourra écrire immédiatement

$$P = P_1 + P_2 \quad ;$$

remplaçant P_1 et P_2 par leur valeur, on obtient

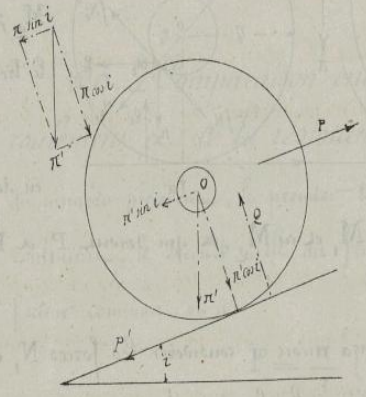
$$P = (\pi_1 + \pi'_1)\frac{\delta}{r'_1} + \int_1 \pi_1 \frac{r'_1}{r_1} + (\pi_2 + \pi'_2)\frac{\delta}{r'_2} + \int_1 \pi_2 \frac{r'_2}{r_2}.$$

ou

$$P = \delta\left(\frac{\pi_1 + \pi'_1}{r'_1} + \frac{\pi_2 + \pi'_2}{r'_2}\right) + \int_1 \left(\frac{\pi_1 r'_1}{r_1} + \frac{\pi_2 r'_2}{r_2}\right)$$

Les deux termes du second membre montrent comme précédemment l'influence séparée des deux genres de frottement. Toutefois le poids du véhicule entre dans la formule d'une manière différente, et on voit que plus les rayons des roues seront grands, plus elles seront avantageuses.

122. — *Traction sur une route inclinée.* — Ici nous pourrons appliquer la même théorie, pourvu qu'on considère les éléments nouveaux introduits par l'inclinaison de la route. Le poids π agira par ses deux composantes, l'une perpendiculaire au plan incliné, qui exercera une pression sur ce plan, l'autre, parallèle, qui tendra à faire descendre le véhicule. Il en sera de même du poids π de la roue.



En projetant sur la direction du plan incliné on obtient l'équation :

$$P = P' + \pi \sin i + \pi' \sin i .$$

P' représente toujours le frottement de glissement.

Prenons les moments par rapport au centre O de la roue, on a :

$$P' r = Q\delta + \int N r' ,$$

r' étant le rayon de la boîte.

En remplaçant P' par sa valeur tirée de la première équation, on obtient

$$Pr = (\pi + \pi')\, r \sin i = (\pi + \pi')\,\delta \cos i + \int r' \pi \cos i$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où $$Pr = (\pi + \pi')\, r \sin i + (\pi + \pi')\, \delta \cos i + \int_1 r' \pi \cos i .$$

ou $$P = (\pi + \pi') \sin i + (\pi + \pi') \frac{\delta}{r} \cos i + \int_1 \frac{r'}{r} \pi \cos i .$$

On voit qu'il y a trois termes dans le second membre de cette équation. Le premier représente l'effort qu'il faudrait faire pour faire monter le véhicule sur le plan incliné en supposant qu'il n'y ait pas de frottement.

Les deux derniers termes tiennent compte, l'un du frottement de roulement, l'autre du frottement de glissement.

123. — *Rendement et comparaison avec le traîneau.* — Dans le rapport horizontal des fardeaux, il n'y a pas lieu de calculer le rendement puisque l'on sait à l'avance que tout le travail est dépensé à vaincre les résistances passives, et qu'en fait il n'y a qu'un déplacement de fardeau dont l'évaluation ne peut s'exprimer par aucun effet utile mesuré en kilogrammètres.

Cependant les voitures et les moyens analogues de transport présentent, par rapport aux traîneaux, des avantages considérables résultant de ce que le même déplacement est obtenu avec une traction, et par conséquent avec une dépense beaucoup moindre.

Le procédé de transport le plus économique est celui qui exige le moindre tirage, et l'emploi des grandes roues est, sous ce rapport, le moyen le plus favorable.

124. — *Influence des inclinaisons.* — Les observations qui précèdent ne sont plus exactes lorsqu'il s'agit d'un transport sur un plan incliné, puisque l'élévation d'un poids quelconque, à une hauteur déterminée, représente toujours un certain nombre de kilogrammètres qui seraient en partie restitués par la chûte de ce même poids.

La formule, qui exprime l'égalité entre les quantités de travail, devient

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

alors, ainsi que nous l'avons vu, en suivant que le véhicule monte ou descend,

$$P = f\Pi \frac{r}{R} \cos i + \frac{\delta \Pi}{R} \cos i \pm \Pi \sin i .$$

Si $\sin i$ est assez grand, il pourra se faire que l'effort dont dispose l'attelage soit insuffisant pour gravir la rampe sans addition de chevaux de renfort.

Dans les pentes au contraire, le dernier terme deviendrait soustractif, et il pourrait se faire, par suite de cette circonstance, que l'équilibre exigeât pour P une valeur négative. Il faudrait alors retenir la voiture pour l'empêcher de descendre, mais on obvie à cette difficulté en serrant les roues avec des freins, ou en les faisant porter sur un sabot. Le surcroît de résistance, qui résulte de l'emploi de ce dernier moyen, démontre directement que le roulement est plus favorable que le glissement sous le rapport de la traction.

Les rampes fatiguent donc les chevaux, sans qu'on trouve à la descente une compensation du surcroît de dépense qu'il a fallu faire pendant l'ascension. Dans un parcours accidenté il faudra donc ajouter au travail calculé d'après la traction en plaine, tout le travail d'élévation correspondant à chacune des rampes.

125. — *Vérification de la loi de Coulomb dans le tirage des voitures.* — Il était intéressant de rechercher si la formule $Q = \frac{\delta \Pi}{r}$ de Coulomb, était encore vérifiée, non plus pour des corps plus ou moins polis et à surfaces régulières comme ceux qu'il avait employés, mais pour des matériaux simplement juxtaposés et réunis, tels que ceux qui forment le sol de nos routes.

En calculant, d'après la formule, la valeur de δ dans trois expériences faites sur une route empierrée, et dans 7 expériences faites sur une route pavée,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

avec des voitures dont les diamètres des roues variaient pour la première série, de 0m.872 à 2m.029, pour la seconde de 0m.420 et 0m.597, jusqu'à 2m,029 également, M.r Morin a trouvé respectivement $\delta = 0,0145$ et $\delta = 0,0090$, avec des différences qui ne portaient que sur le 4e chiffre décimal.

Ces valeurs de δ, eu égard à la nature des surfaces en contact, sont beaucoup plus grandes que celles qui ont été indiquées précédemment, mais le rapprochement qui vient d'être fait, nous permet maintenant de faire usage de cette loi bien au delà des limites pour lesquelles, elle avait été vérifiée pour les expériences directes.

Les valeurs de δ seraient beaucoup plus grandes encore pour un sol plus inégal ou plus facilement compressible.

126.— *Expériences diverses.*— Nous pourrions ajouter aux indications qui précèdent, les résultats de nombreuses expériences que nous avons successivement faites pour déterminer la résistance de divers véhicules à la traction.

Nous dirons seulement que dans la comparaison faite, à l'occasion d'un système d'omnibus à quatre roues égales, proposé par M.r Sauvage, entre ce véhicule et un omnibus ordinaire, nous avons reconnu que le tirage était exactement diminué dans le rapport indiqué par la loi de la résistance, inversement proportionnelle au diamètre des roues.

Si, dans la pratique, on diminue les diamètres du train d'avant, c'est uniquement pour pouvoir tourner dans une courbe de moindre rayon en engageant l'une de ses roues sous la caisse.

Les expériences faites sur le bitume comprimé de la place du Palais-Royal, présentent un certain intérêt en ce qu'elles montrent l'influence de la température extérieure sur les chaussées fabriquées avec des matières bitumineuses.

La première série de ces expériences avait été faite avec un omnibus chargé,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en Août 1859 à 6 heures du matin, et l'on peut voir, en comparant les chiffres de traction à ceux du mois de Janvier suivant, l'influence de ces éléments sur le tirage.

Nature de la voie	Août 1859.	Janvier 1860.
Pavé	0.0062	0.0064
Macadam	0.0107	0.0150
Bitume	0.0300	0.0096.

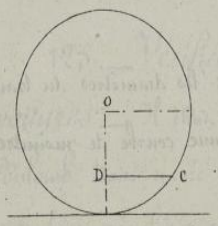
Dans la seconde série, le coefficient de traction sur le bitume a été réduit au tiers de sa valeur en été, mais le tirage sur le macadam a augmenté de près de la moitié de sa valeur primitive par suite d'un moins bon état d'entretien.

La grande traction sur le bitume s'explique d'ailleurs par la profondeur de l'impression produite par la roue, lorsque la matière est un peu ramollie pendant la saison chaude.

127.— *Condition du roulement en cas d'obstacle accidentel.* — Les obstacles accidentels qu'une roue rencontre peuvent quelquefois déterminer son glissement, et dans tous les cas augmenter la traction d'une manière notable.

Dans le parcours sur une route horizontale, on a, ainsi que nous l'avons vu,

$$P = \frac{\delta \pi}{R} + f \pi \frac{r}{R} .$$



Mais dans le cas où la roue rencontre un obstacle C, de hauteur h, l'effet de la force P, que nous désignerons alors par P', sera de faire tourner le véhicule et sa charge autour du point C

Le moment de la charge π autour du point C sera alors,

$$\pi \times CD = \pi \sqrt{h(2R-h)},$$

tandis que celui de la traction P' sera devenu,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si nous comparons le premier terme du second membre à $\frac{\delta \pi}{h}$, nous voyons que pour l'obtenir il faut multiplier cette expression de la résistance au roulement par $\frac{\delta}{\sqrt{2h}}$, quantité qui pourra toujours devenir plus grande que 1 pour une certaine valeur de h.

128. — *Conséquences relatives à la détérioration des routes.* — Dans une autre série d'expériences, M^r^ Morin s'est proposé d'étudier, suivant le mode de construction et suivant l'usage que l'on fait des divers genres de véhicules, l'influence qu'ils exercent sur la détérioration des routes, en notant avec soin toutes les réparations que le parcours sur une même piste exigeait pour un poids total, successivement transporté, de 5 à 6 millions de Kilogrammes.

Il a montré de cette manière que, quant à la proportionnalité des chargements aux largeurs de jante, elle est trop favorable aux jantes larges qui se trouvent ainsi trop peu chargées; que quant aux voitures portant des charges égales, l'augmentation de la largeur des jantes avait peu d'influence au delà d'une largeur de 0.^m^12, mais que les dégradations, à égalité de nombre de parcours, étaient notablement plus grandes pour des largeurs plus petites. Quant aux diamètres des roues, que leur agrandissement est tout aussi favorable à la conservation des routes qu'à la diminution de la traction. Enfin quant à l'influence de la vitesse, que les voitures suspendues allant au trot, ne fatiguent pas les routes davantage que les voitures non suspendues allant au pas.

Toutes ces indications sont, en quelque sorte, la contrepartie de celles que nous avons données quant à la traction, de sorte qu'on pourrait dire d'une manière générale que les circonstances qui détériorent le plus les routes, sont aussi celles qui fatiguent le plus les chevaux.

Un cas de détérioration, le travail de traction est employé en partie à déplacer et à désunir les matériaux dont la route est formée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

129.— *Tirage des véhicules sur les voies de fer.*— Des expériences analogues ont été faites sur la traction opérée par des chevaux sur les voitures des voies de fer.

Nous citerons en particulier les diverses séries que nous avons personnellement exécutées sur les omnibus dits américains. Le tirage est diminué dans une grande proportion, par suite de l'état plus favorable de la surface frottante de la voie, bien que les boudins rencontrent, dans la rigole du rail, des causes de résistance supplémentaires.

La résistance au roulement n'a plus alors une influence aussi prépondérante, et l'on reconnaît que le rapport entre le travail de la résistance au roulement, et celui de la résistance au glissement descend toujours au dessous de 2.

Ces expériences ont démontré que la résistance n'était pas la même selon que les rails étaient placés sur une route pavée ou macadamisée, le coefficient de traction variant dans ces circonstances de 0.0085 à 0.0105. Cette différence provient sans doute de ce que la fréquentation de la chaussée en empierrement, rejette sur les rails de petits fragments de pierre que les roues doivent écraser au passage.

Dans une autre série d'expériences comparatives, on a reconnu qu'en remplaçant les boîtes ordinaires par des boîtes à galets, le coefficient de traction avait, pour les mêmes roues et sur les mêmes rails, diminué de 0.0068 à 0.0055. Cette circonstance fait voir, sous une autre forme, que le roulement n'a plus sur la traction totale l'influence prépondérante que nous avons signalée dans la traction sur les voies ordinaires.

Sur le chemin auxiliaire de Moyeuvre, M^r^ Lapointe a trouvé 0,0032 sur les rails propres et 0.0102 sur les mêmes rails couverts de poussière.

Sur les rails saillants ordinaires, le rapport du tirage à la charge est souvent réduit à 1/200, dans les alignements, et nous retrouverons un chiffre analogue en nous occupant des chemins de grande exploitation.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il faut remarquer d'ailleurs que le coëfficient de traction est plus grand dans les courbes par suite du calage des roues de wagons qui doivent nécessairement glisser sur le rail extérieur, puisqu'elles sont solidaires à ce point que l'une d'elles ne peut tourner sans que l'autre tourne.

130. _ *Expériences sur la résistance des trains des grandes voies de fer.* _ On a fait un certain nombre d'expériences sur la résistance des trains de chemins de fer en service courant. Les plus nombreuses ont été exécutées avec des dynamomètres, mais dans quelques autres déterminations on s'est contenté d'observer la vitesse que prenait un train chargé, pendant sa descente sur une pente comme, sous la seule action de son poids.

On est ainsi arrivé à des résultats assez concordants, parmi lesquels on a été les suivants :

Expérience de M^r^ Morin, sur le chemin de Paris à St Germain (18 à 25 kilomètres à l'heure) 0.00505.

Expérience de M^r^ Morin sur la pente d'Asnières. (16,8 K^mes^ à l'heure) 0.005.

Expériences de MM^rs^ Gonin et Sechaleliez (48 K^mètres^ à l'heure) 0.00631.

Pente d'Etampes (30 kilomètres à l'heure); 0.008,

Expériences de M^r^ Lorrée sur le Chemin de fer de Lyon 45 Kil^mètres^ à l'heure, 0.11.

Ces expériences ont d'ailleurs constaté que la résistance variait avec la vitesse et avec la direction du vent dans des proportions assez considérables.

Nous avons fait avec M^r^ Bricogne en 1859, des expériences de traction à grande vitesse sur un train de service courant, fractionné en diverses parties au moyen de trucs spéciaux sur lesquels des dynamomètres avaient été installés. Chaque fraction du train était composée de wagons identiques dont les boîtes de fusées étaient constituées pour chacune d'elles, d'une manière différente.

En observant avec soin les vitesses au moyen de pointages faits à chaque

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

passage devant un poteau télégraphique, en tenant compte de la puissance vive du train à l'entrée et à la sortie du parcours dans lequel l'expérience devait être limitée, les relevés des diagrammes nous ont fourni les résultats suivants, pour une vitesse de 11m 48 par seconde ou de 41 kilomètres à l'heure par un temps calme.

Boîtes à graisse ordinaires,	0.00722
Boîtes à huile ordinaires,	0.00525
Boîtes à huile avec galets,	0.00368

Ces chiffres font voir que le frottement de glissement dans les boîtes, a une grande influence sur la valeur du coefficient de traction, encore bien que la résistance totale soit affectée d'influences multiples résultant de l'état de la voie, de ses inégalités et des pertes de puissance vive qui en résultent, et surtout de la résistance de l'air sur les wagons lorsque le transport se fait avec une grande rapidité.

131. — *Expression générale de la résistance.* — D'autres expériences ont été faites en Angleterre, et M^r^ Gochi en a conclu que la formule proposée d'abord par M^r^ Scott Russell, pour exprimer la résistance à la traction sur chemins de fer, représentait les résultats de ces expériences avec une exactitude suffisante pour les besoins de la pratique.

Cette formule, transformée en mesures françaises, est la suivante :

$$R = 2^{k}.72 + 0.34\,V + 0.0085\,SV^{2}.$$

R est le coefficient de traction pour une tonne, V la vitesse en mètres par seconde, et S la plus grande surface transversale exposée à la résistance de l'air.

M^r^ Gochi considère le premier terme de cette formule pratique comme représentant l'ensemble des résistances dues au frottement de roulement et au frottement de glissement, la seconde exprimant les pertes résultant des chocs, des secousses et des vibrations de toute nature, et la troisième, la résistance de l'air.

Pour en vérifier l'exactitude approchée de cette formule prise dans son

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ensemble, il est difficile d'admettre que les frottements ne comptent dans la résistance totale que pour 2k.72 par tonne, ou pour un coefficient de traction de 0.00272 seulement. Ce calcul individuel de chacune de ces résistances, conduit pour l'une et pour l'autre à un chiffre plus élevé.

132. — *Calcul direct des résistances de frottement.* — Si nous cherchons à appliquer à un train de chemin de fer, les considérations qui ont été présentées sur le tirage des voitures, il faudra employer la formule

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{\delta}{R} + f\frac{r}{R},$$

On admet que le coefficient δ pour un cercle en fonte roulant sur un rail de fer, varie de $\delta = 0.0035$ à $\delta = 0.0012$, suivant que les surfaces sont rugueuses ou polies, sèches ou légèrement graissées.

D'après ces indications, on devrait croire que la valeur $\delta = 0,0025$, doit convenir au cas de la traction sur chemin de fer, ce qui, pour une valeur de $R = 0,50$, donnerait pour le premier terme de la formule générale

$$\frac{\delta}{R} = \frac{0.0025}{0.50} = 0.005$$

valeur qui est déjà supérieure à celle du premier terme de la formule anglaise.

On arrive à la même conclusion pour le second terme en faisant $f = 0.05$ et $\frac{r}{R} = 0.10$, ce qui donne également $f\frac{r}{R} = 0.005$.

Le calcul donnerait donc $P : \Pi = 0.010$, et à supposer que les deux éléments de cette évaluation présentent de l'incertitude, on doit cependant reconnaître que celle de la résistance due au glissement ne saurait être fort erronée, et qu'ainsi nous serions conduits à admettre que c'est le frottement sur les tourillons qui détermine la plus grande résistance à la traction sur les rails, tandis que le rôle de la résistance au roulement paraîtrait beaucoup plus secondaire.

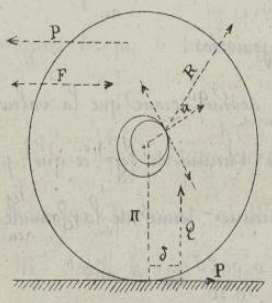
Ces considérations nous conduiront à négliger cette résistance par rapport à celle du glissement, toutes les fois que les corps en contact seront durs et polis,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et que les chemins afférents à chacune de ces résistances ne seront pas d'ailleurs plus disproportionnés que dans les roues de wagons.

133. *Machines locomotives.* — La locomotive est placée sur un essieu complètement solidaire avec les roues, et mobile dans une boîte fixée à la voiture. Si l'on vient placer la voiture sur cet essieu, le contact aura lieu au repos entre l'essieu et le tourillon à la partie supérieure de celui ci, par suite du mouvement le contact n'aura pas lieu tout à fait à la partie supérieure, mais en un point que nous savons parfaitement déterminer.

Voyons quelles sont les forces qui sont en jeu dans un tel appareil. Il y a d'abord à considérer comme forces extérieures une résistance P, qui provient de ce que les locomotives sont destinées à traîner après elles un certain nombre de wagons plus ou moins chargés. La force Π, représente le poids de la voiture ; la force Π', exprime le poids de la roue, et la résistance au roulement peut être représentée par une force verticale Q, agissant avec un bras de levier δ et une réaction horizontale P' égale et contraire à P. La force motrice F développée par la vapeur doit être considérée comme une force intérieure, qui donne lieu à une réaction égale et contraire. Nous supposerons que la direction commune de ces forces est horizontale. Enfin le système comprend les réactions normales et tangentielles N et f au point de contact N.



Pour nous procurer les équations d'équilibre convenables, nous considérerons successivement l'ensemble de la locomotive et de l'essieu moteur, puis chacune des parties isolément.

Équilibre de l'ensemble. — Si nous considérons l'ensemble, on voit que les forces extérieures entre lesquelles l'équilibre doit avoir lieu, sont P, Π, Π', Q, P'.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ces forces sont au nombre de cinq, et les conditions d'équilibre sont très-faciles à établir en remarquant que ces forces se divisent en deux groupes :

1° — Forces verticales Π, Π' et Q

2° — Forces horizontales P et P'.

Nous écrirons donc que la somme des projections verticales est nulle ainsi que celle des projections horizontales, ce qui donne les deux conditions suivantes,

$$P = P',$$

$$\Pi + \Pi' = Q,$$

Examinons maintenant l'équilibre de la voiture seule et celui de la roue.

Équilibre de la voiture. — Les forces en jeu peuvent être groupées de la manière suivante :

1° — Forces extérieures P, Π et F,

2° — Réactions sur les boîtes N et fN.

Puisque les deux forces N et fN sont rectangulaires leur résultante est la diagonale du rectangle et est donnée par l'expression

$$R^2 = N^2 + f^2 N^2 = N^2 (1 + f^2).$$

L'ensemble des trois autres forces donnera aussi lieu à une résultante R' telle que

$$R'^2 = (P \pm F)^2 + \Pi^2.$$

Nous avons ramené le système à deux forces et pour qu'il soit en équilibre il faut que ces deux forces soient égales et directement opposées, ce qui donne

$$R = R'$$

ce qui nous donne une nouvelle expression de la force R

$$R^2 = (P \pm F)^2 + \Pi^2.$$

D'après ce que nous avons vu précédemment, on sait d'ailleurs, que

$$N = R \cos A = \cos \alpha \sqrt{(P \pm F)^2 + \Pi^2},$$

$$fN = f_1 \sqrt{(P + F)^2 + \Pi^2}.$$

Équilibre de la roue. — Les forces qui agissent sur la roue sont

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1° Forces extérieures : Π', Q et P, et la force motrice F,

2° Réactions : (N et fN) ayant pour résultante R.

Pour établir les conditions d'équilibre entre ces forces, nous prendrons les moments par rapport au centre de la roue, ce qui donne l'expression suivante :

$$P'r + Q\delta + fNr' = F\rho .$$

Nous avons vu précédemment que $P = P'$,

$$\Pi + \Pi' = Q ;$$

remplaçant ces quantités par leurs valeurs, il vient :

$$F\rho = Pr + (\Pi + \Pi')\delta + f\,\Pi r'$$

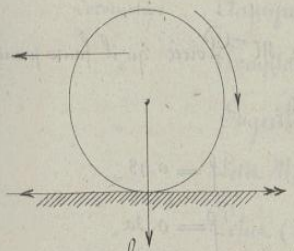
en négligeant le facteur P qui est petit par rapport au poids considérable Π de la locomotive). La valeur de P sera déterminée lorsque l'on connaîtra tous les éléments qui font partie du train que la locomotive sera chargée de traîner et la formule précédente permettra de calculer dans chaque cas la valeur de F.

On voit facilement comment cette formule devrait être modifiée, si la charge était supportée sur plusieurs essieux moteurs dont les roues ont alors le même diamètre.

1314. — *Détermination du poids adhérent.* — Les roues de locomotives prennent leur point d'appui sur le sol ; il pourrait arriver que la traction F fût assez forte pour que les roues, bien que calées sur l'essieu pussent tourner sur elles-mêmes en glissant sur les rails, et sans déterminer l'avancement du véhicule. Pour que les roues deviennent motrices, il faut qu'elles éprouvent de la part des rails une difficulté à tourner en place, et que ceux-ci agissent relativement sur elles à la manière des dents d'une crémaillère, dans laquelle la résistance au glissement jouerait le même rôle qu'un denticr. Aussi est-il convenable de faire porter par les roues motrices des locomotives un poids très-considérable auquel on a donné le nom de poids adhérent.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Désignons par Π_a, le poids adhérent et par P la traction à remarquer, c'est-à-dire la résistance provenant de l'entraînement des voitures. Supposons pour un moment que la roue de la locomotive tourne sur elle-même sans pouvoir avancer; par suite de ce mouvement de la locomotive sur le rail, naîtront deux réactions contraires, $f\Pi_a$. « La seule de ces deux réactions qui intervient pour empêcher la roue de tourner, est la réaction de droite $f\Pi_a$ ». Pour que le patinage ne puisse pas avoir lieu, il faut que l'on ait



$$P < f\Pi_a .$$

et à la limite

$$P = f'\Pi_a .$$

Mais

$$P = \frac{(\Pi+\Pi')\,\delta + f_1\,\Pi\,r'}{r}$$

donc

$$f'\Pi_a = \frac{(\Pi+\Pi')\,\delta + f_1\,\Pi\,r'}{r} .$$

Le poids Π' de la roue parallèle est une quantité négligeable par rapport à Π et nous aurons alors plus simplement

$$\frac{\Pi_a}{\Pi} = \frac{\delta + f_1\,\Pi\,r'}{f'r} .$$

Les deux valeurs de f_1 et de f' ne correspondent pas à un même coëfficient et comme f' représente le frottement du bandage sur le rail, ce nombre est généralement très-grand par rapport à l'autre.

Si nous supposons que δ est négligeable par rapport au coëfficient f_1, l'expression précédente devient

$$\frac{\Pi_a}{\Pi} = \frac{f_1}{f'} \times \frac{r'}{r} ,$$

et dans le cas où l'on admettrait l'hypothèse que les coëfficients de glissement sont les mêmes, on aurait

$$\frac{\Pi_a}{\Pi} = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} \times \frac{r'}{r} = \frac{r''}{r} \cos\alpha$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il faudrait que le rapport entre ces deux poids fût plus petit que le rapport des rayons.

Il résulte des expériences spéciales de Mr Loiseau qu'il faut prendre pour le coefficient de frottement les nombres suivants :

rails humides $f = 0.13$,

rails très-secs $f = 0.30$,

ce qui permet d'adopter en pratique comme coefficient moyen

$$f = 0.20.$$

135. — *Proportion entre le poids adhérent et le poids remorqué*

Les considérations qui précèdent suffisent pour faire comprendre qu'il doit exister un certain rapport entre la charge qui produit l'adhérence, et que l'on appelle par abréviation le poids adhérent et la charge totale remorquée.

Nous nous sommes procuré l'état de la composition de quelques trains de grande ou de petite vitesse du Chemin de fer du Nord ; nous avons indiqué cette composition dans le tableau suivant, en désignant par Π_a le poids adhérent, par Π_m le poids total de l'appareil moteur, locomotive et tender, et par Π_u le poids utile remorqué.

Le poids total remorqué, à la faveur de l'adhérence, est alors

$$\Pi_r = \Pi_u + \Pi_m - \Pi_a$$

on a calculé à la suite de ce tableau les valeurs de $\Pi_a : \Pi_2$

(Voir le tableau à la page suivante.)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

	Locomotives à voyageurs.		Vitesse en kilomètres par heure	Diamètres des roues motrices	Valeurs de $\pi_a : \pi_z$
Locomotive	Clapeyron	$\pi_a = 10^{\text{tonnes}}$. $\pi_m = 40^{\text{t.}}$ $\pi_u = 80^{\text{t.}}$	72	1.80	0.091
"	Crampton	$\pi_a = 12.6$ $\pi_m = 50$ $\pi_u = 96^{\text{t}}$	72	2.10	0.094
"	Engerth	$\pi_a = 23$. $\pi_m = 48$ $\pi_u = 192^{\text{t}}$	45	1.80	0.106
"	Petit Mamouth	$\pi_a = 26.5$ $\pi_m = 46$ $\pi_u = 192^{\text{t}}$	45	1.42	0.125
"	Pétiet (4 cyl.)	$\pi_a = 21$. $\pi_m = 45$ $\pi_u = 192^{\text{t}}$	45	1.60	0.097
			Moyenne		0.1026
	Locomotives à marchandises.				
Locomotive	Mamouth	$\pi_a = 26.5$ $\pi_m = 46$ $\pi_u = 300$	25	1.60	0.085
"	du Creuzot	$\pi_a = 32$. $\pi_m = 55$ $\pi_u = 450$	25	1.40	0.067
"	Engerth	$\pi_a = 44$. $\pi_m = 66$ $\pi_u = 670$	25	1.25	0.064
"	forte rampe	$\pi_a = 45$. $\pi_m = 45$ $\pi_u = 550$	25	1.06	0.082
			Moyenne		0.074

136. — *Application aux machines de traction sur routes ordinaires.* — La condition de l'adhérence est beaucoup moins gênante sur les routes de terre, parce que le coëfficient f est alors beaucoup plus grand, mais la dépense relative à un même transport, est alors augmentée dans une proportion considérable.

Les dernières expériences que nous avons faites sur la locomotive de M^r^ Lotz, qui a fonctionné récemment à Paris, nous ont donné un coëfficient de traction de 0.050 à 0.055. Il faut d'ailleurs remarquer que la vitesse de ces locomotives est nécessairement très-limitée.

A supposer que sur une route bien entretenue, le coëfficient de traction puisse être réduit à 0.04, on doit remarquer que chaque cheval vapeur devra dépenser pour se remorquer lui même une partie de son travail. La machine qui pèse 9000 Kilog^mes^ est de 30 chevaux; chaque cheval vapeur pèse donc $9000^{K.} : 30 = 300$ Kilog. et l'effort de traction correspondant serait de $300 \times 0.004 = 12$ Kilogrammètres.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

A la vitesse de 1 mètre par seconde, chaque cheval vapeur se trouverait ainsi réduit à 75 − 12 = 63 kilogrammètres. A une vitesse de 3 mètres, la moitié du travail transmis aux roues motrices, serait employée à la traction de la locomotive, et à une vitesse de 6 mètres, la machine en serait réduite à se transporter toute seule.

On peut estimer que chaque cheval vapeur, dans une locomotive de grande exploitation sur voie de fer, pèse 250 kilogrammes, et à raison d'un coëfficient de 0.004, sa traction ne coûterait que 1 kilogramme au lieu de 12.

Cette énorme disproportion montre bien que la traction à la vapeur sur les routes de terre ne peut être avantageuse, que pour les exploitations temporaires, dans lesquelles l'économie de la traction sur voie de fer ne compenserait pas les charges résultant des frais de premier établissement.

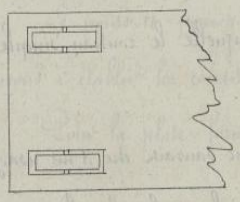
137.— *Observation sur l'emploi des galets.*— Les galets sont de petites roues montées sur des essieux fixes ou mobiles, que l'on interpose entre deux corps qui doivent se déplacer l'un par rapport à l'autre, pour amoindrir les résistances. Ils peuvent être fixés ou au mobile ou au support, et donnent lieu dans tous les cas à des résistances de roulement et de glissement. Il sont sous ce rapport moins favorables que les rouleaux, mais ils offrent l'avantage de se maintenir toujours dans une position déterminée, les uns par rapport aux autres, et sont à ce point de vue plus commodes pour les manœuvres qui doivent souvent se répéter dans les mêmes conditions.

138.— *Chariot à galets.*— Nous aurons une idée complète des avantages et des inconvénients de l'emploi des galets, en étudiant l'appareil que l'on peut appeler chariot à galets, et qui se compose d'une plate-forme percée de fenêtres dans lesquelles se placent de petites roues armées de tourillons, et qui sont d'un-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

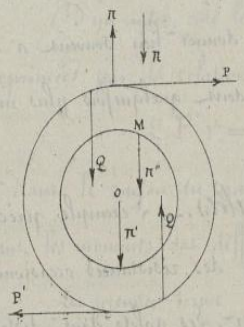
diamètre un peu plus grand que l'épaisseur de la plate-forme. Le corps à transporter repose sur les galets qui reposent ainsi sur le sol, et la plate forme ne joue d'autre rôle que de maintenir dans les mêmes positions relatives les axes des galets.

Nous examinerons pour l'un d'eux en particulier, que nous supposerons chargé d'un poids π, sur lequel on exercera un effort de traction P, les conditions d'équilibre résultant soit de l'ensemble de cet appareil considéré avec sa part de chariot, soit des deux parties isolément. Les indications de la figure sur laquelle le tourillon est représenté au dessein à une échelle très-exagérée, nous permettent d'établir immédiatement ces conditions d'équilibre.



Pour l'ensemble il suffit de considérer les forces extérieures, ce qui donne

$$P - P' = 0 ,$$



$$\pi + \pi' + \pi'' - Q = 0 ;$$

la nouvelle notation π'' représentant le poids de la portion de la plate-forme qui agit au point M de contact entre la fusée et la boîte.

La considération de la réaction exercée sur le mobile donne également $\pi - Q' = 0$.

Enfin, le galet lui-même conduit à la relation des moments

$$Pr + P'r = Q\delta + Q'\delta + fNr' ,$$

ou en substituant les valeurs tirées des premières relations,

$$2Pr = (2\pi + \pi' + \pi'')\delta + fNr' ,$$

et en remarquant que la réaction fN ne dépend que du poids de la plate forme,

$$P = \frac{(2\pi + \pi' + \pi'')\delta + f.\pi''r'}{2r}$$

Cette formule resterait la même si l'on voulait considérer l'ensemble des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

galets, à la condition de désigner par Π, Π' et Π'', les charges totales au lieu des charges partielles.

Si l'on faisait dans cette formule $\Pi'' = 0$; on retrouverait, comme pour la théorie du rouleau,

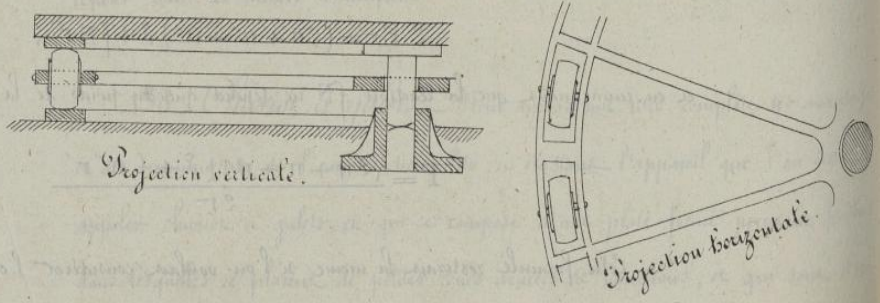
$$P = \frac{(2\Pi + \Pi')\,\delta}{2r},$$

ce qui montre la proportion dans laquelle le rouleau simple serait plus avantageux.

Au reste le chariot à galets ne saurait être d'un usage commode : le déplacement du fardeau étant double de celui de la plate-forme, il faudrait en disposer plusieurs les uns à la suite des autres, pour effectuer un parcours un peu grand; mais cet inconvénient n'existe plus lorsque la plate forme tourne autour d'un axe vertical, comme dans les plaques tournantes des chemins de fer.

Les galets ont d'ailleurs l'inconvénient, comme les roulettes de nos meubles, lorsqu'ils sont de petits diamètres, de donner bien souvent à des méplats qui les empêchent de tourner et qui les rendent quelquefois plus nuisibles qu'utiles.

139.— *Plate-forme à galets.*— L'exemple précédent n'a été indiqué que comme une introduction à l'examen des résistances occasionnées par l'emploi des plaques tournantes des chemins de fer. Les galets étant distribués autour de l'axe vertical de la plaque, il est absolument nécessaire de les maintenir individuellement dans leurs positions relatives au moyen d'axes et de tourillons, tels que ceux que représente la figure.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Soit Π le poids chargé sur la plate-forme, ce poids pourra être décomposé en deux autres, l'un Π_1 appliqué respectivement en un point de la circonférence des points de contact des galets avec la plate-bande fixée au sol, l'autre Π_2 étant appliqué suivant l'axe de rotation générale, et supporté par une crapaudine.

Le poids Π_1 pourra être considéré comme appliqué sur un seul galet, et nous aurons à établir les conditions d'équilibre de chacune des parties du système.

Pour la plate-forme nous aurons d'abord :

$$P p = P' R + \frac{2}{3} f \Pi_2 r_2 .$$

Si nous désignons par $P p$, le moment moteur, par $P' r$ le moment résistant dû à la réaction du galet unique, qui remplacerait au point de vue du calcul tous les galets, et qui agit à une distance R de l'axe vertical, et enfin par r_2 le rayon de la surface de contact entre le pivot et son support fixe.

D'un autre côté les conditions d'équilibre de notre galet unique seront exprimées par la relation

$$2 P' r = \Pi_1 \delta + (\Pi_1 + \Pi' + \Pi'') \delta + f_1 \Pi'' r' ,$$

r' étant le rayon du galet, et les différents termes du second membre représentant les moments des différentes résistances par rapport à l'axe du galet.

Le premier terme $\Pi_1 \delta$ est le moment résistant au contact de la plate-forme. Le produit $(\Pi_1 + \Pi' + \Pi'') \delta$ est le moment correspondant de la résistance développée sur la plate-bande inférieure ; Π' y représente le poids du galet unique et Π'' celui du cadre qui porte tous les galets. Enfin le dernier terme exprime le moment du frottement sur l'axe du galet, r' étant le rayon de cet axe.

Par l'élimination de P' entre ces deux équations on arrive immédiatement à la relation finale

$$P p = P' R + \frac{2}{3} f \Pi_2 r_2 = (2 \Pi_1 + \Pi' + \Pi'') \frac{\delta R}{2 r} + f_1 \frac{\Pi'' R r'}{2 r} + \frac{2}{3} f \Pi_2 r_2$$

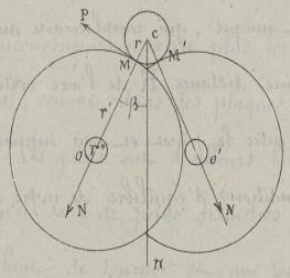
Si f, f_1 et Π'' étaient nuls, cette relation se réduirait à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$P\rho = \frac{(2\Pi_1 + \Pi'_1)\,\delta R}{2r}$$

qui rappelle encore la relation à laquelle nous avons été conduits dans l'étude des tonneaux.

140. — *Tourillons à galets.* — Dans le but de diminuer les frottements dans les appareils de précision, on fait quelquefois reposer les tourillons d'un arbre horizontal sur les jantes de deux galets symétriques, mobiles autour de deux axes O et O'. Chacun des tourillons principaux de rayon r, touchera les jantes des deux galets en deux points M et M' pour lesquelles les normales aux surfaces en contact seront CO et CO'.



Lors de la rotation de l'arbre C, il se produira en M et M' des résistances de roulement et en O et O' des résistances de frottement. Le poli des surfaces permettant de négliger δ par rapport à f, malgré la différence des parcours respectifs en ces deux points, nous pourrons, en désignant par N la réaction normale en M et par P la réaction tangentielle du tourillon sur le galet, écrire la relation,

$$Pr' = fNr''.$$

Mais les deux forces N pouvant être considérées comme les deux composantes égales de la charge Π du tourillon, on a aussi

$$2N\cos\beta = \Pi,$$

et par suite

$$P = fN\frac{r''}{r'} = \frac{1}{2}\frac{f\Pi}{\cos\beta}\frac{r''}{r'};$$

on en remarquant qu'une force motrice 2P est nécessaire pour assurer l'équilibre du tourillon, sollicité par une réaction égale à P en chacun des points M

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et M'

$$2P = \frac{f\,\pi}{\cos\beta}\,\frac{r''}{r'}$$

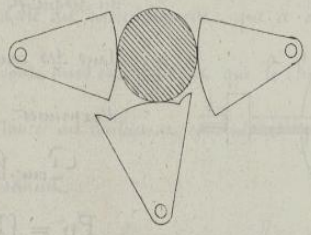
Pour comparer cette force $2P$ appliquée à l'extrémité du rayon r' à celle qu'il faudrait appliquer dans le cas où le tourillon reposerait dans un coussinet, on devrait avoir

$$P'r = f\pi r$$

de sorte que les deux forces motrices $2P$ et P' seraient dans le rapport

$$\frac{2P}{P'} = \frac{r''}{r'}\,\frac{1}{\cos\beta}$$

Ce rapport serait le plus favorable si l'on avait $\cos\beta = 1$, ou $\beta = 90°$ et la résistance serait alors réduite dans la proportion des rayons du tourillon du galet et du tourillon de l'arbre.



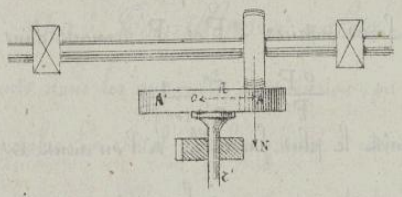
Cette condition la plus avantageuse a été utilisée pour la suspension des cloches au moyen d'un galet principal dont le centre est placé sur la même verticale que le centre du tourillon, et de deux galets latéraux destinés seulement à maintenir la stabilité du système. Ce système ne peut être appliqué toutefois qu'à un mouvement de rotation alternatif.

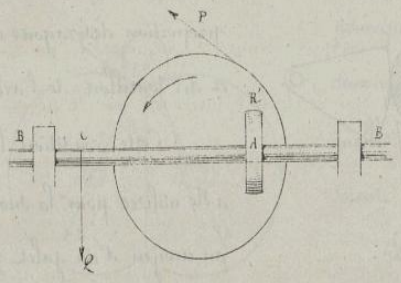
On remarquera d'ailleurs, qu'au point de vue de la résistance aux efforts exercés sur l'arbre de chaque galet, le rayon r'' pourra être très-petit, si les coussinets dans lesquels roulent les tourillons sont très-rapprochés l'un de l'autre, et cet écartement pourra être réduit à peu près à la seule épaisseur des galets.

142. — *Transmission par galets de friction.* — La résistance au roulement, peut, comme le frottement de glissement, être utilisée dans les transmissions mécaniques pour déterminer la solidarité entre deux organes de rotation. Elle offre même cette particularité remarquable que le rapport des vitesses et le sens du mouvement de l'organe conduit peuvent varier pendant la marche avec une extrême facilité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Soit un disque de rayon p, sollicité par une force P. Ce disque, en tournant sur lui même, pourra entraîner le galet R' destiné à vaincre une résistance Q appliquée à une distance q de l'arbre, si l'on détermine entre les deux organes une pression suffisante pour qu'il n'y ait pas glissement. Si nous désignons par N cette pression suffisante, elle déterminera une réaction tangentielle fN qui entrera dans les conditions d'équilibre du disque et de l'arbre du galet dans des conditions qu'il est facile d'exprimer.





Pour le disque on aura,

$$Pp = fNR + \tfrac{2}{3} fNr'$$

en adoptant les notations indiquées sur la figure, et pour l'arbre à galets

$$fNR' = Qq + fNr + N\delta$$

relation dans laquelle se trouvent impliqués sous leur forme ordinaire, les moments du frottement dans les coussinets et du roulement du galet sur le disque.

En éliminant N par la division de la première équation par la seconde dans l'un des membres de laquelle on aura réuni tous les termes en N on trouve

$$\frac{Pp}{Qq} = \frac{fR + \frac{2}{3} fr'}{fR' - fr - \delta}$$

relation par laquelle on voit que pour un même effet à produire le moteur moteur doit augmenter quand R, r et r' augmentent, et quand R' diminue.

L'inverse de cette quantité donnera

$$U = \frac{Qq}{Pp} = \frac{fR' - fr - \delta}{fR + \frac{2}{3} fr'},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

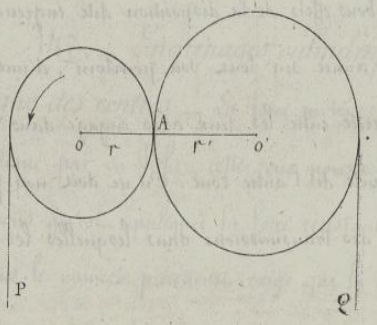
et cette valeur de U montre combien l'utilisation diminue par suite des différentes résistances développées entre les différents points en contact.

143.— *Frottement mixte dans les engrenages.*— Tous les engrenages, à l'exception de celui de White, dit engrenage hélicoïde, donnent lieu à des frottements mixtes, résultant de ce que le point de contact ne reste pas sur les circonférences primitives, condition qui serait nécessaire pour qu'il n'y eût pas de glissement.

Il y aurait donc lieu de rechercher pour les engrenages, l'influence du frottement de glissement et celui du frottement de roulement, mais il résulte de ce qui a été dit précédemment, que ce dernier est négligeable, parce que les corps en contact sont durs et polis, et que le chemin parcouru par le point d'application de la résistance au roulement est moins grand que celui qui est parcouru dans le sens du glissement.

Nous ferons donc abstraction du roulement, et nous calculerons le frottement des engrenages au seul point de vue du glissement entre les dents en contact et du frottement sur les axes. Mais nous examinerons d'abord certains modes de transmissions plus ou moins analogues aux précédents et dans lesquels on évite l'emploi des dents d'engrenage.

144.— *Emploi de roues non dentées.*— On se sert, dans certaines circonstances et même dans plusieurs machines de précision, de galets pressés l'un contre l'autre de manière qu'il n'y ait pas de glissement au point de contact.



A supposer que la puissance F doive entraîner la résistance Q, on pourra toujours exercer entre les centres OO', une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

réaction normale N, suffisamment grande pour établir la solidarité entre les deux roues, et pour qu'elles ne puissent glisser l'une par rapport à l'autre, il faudra que le moment fNr' du frottement, qui résulterait, en cas de glissement du point A, de l'action de la force N, soit plus grand que le moment de la force Q.

On aura donc une limite de la valeur de N par la relation

$$fNr' = Qr'$$

d'où l'on tire

$$N = \frac{Q}{f}$$

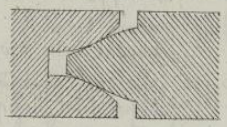
On voit ainsi que N doit être beaucoup plus grand que Q, et que cette pression nécessaire entre les deux roues doit déterminer des frottements considérables sur les tourillons.

On ne doit donc se servir de ces roues de friction que pour transmettre de petits efforts, ce qui ne peut être réalisé, quand la quantité de travail à transmettre est donnée, qu'en employant des poulies de grands rayons, fonctionnant à de grandes vitesses.

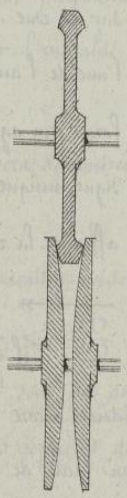
Ces conditions sont à peu près réalisées dans les transmissions par poulies et courroies, mais alors le coëfficient f se trouve remplacé par un coëfficient plus favorable, résultant de la nature des matières en contact et de la flexibilité du cuir qui permet à la courroie d'embrasser, sur les circonférences, de grands arcs.

145. — *Engrenage à coin.* — Lorsqu'on a recours aux transmissions par friction, on peut obtenir de bons effets de la disposition dite engrenage à coin dans laquelle l'une des roues est armée sur tout son pourtour, d'une saillie à double biseau que la pression exercée entre les deux axes engage dans une rainure de même forme, pratiquée dans la jante de l'autre roue. On ne doit non plus se servir de cette disposition que pour des transmissions dans lesquelles les efforts ne sont pas très grands.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



M.r Sellers de Philadelphie a fait une application très-heureuse du même principe dans les transmissions à vitesses variables de différents organes de ses tours. La roue à rainure est remplacée par deux plateaux légèrement convexes qui sont rapprochés par un ressort et qui embrassent la nervure ménagée à la circonférence de l'autre roue. En rapprochant ou en éloignant l'un des axes, on modifie la longueur du rayon de la circonférence de contact de manière à satisfaire à une variation très-grande dans le rapport des vitesses.



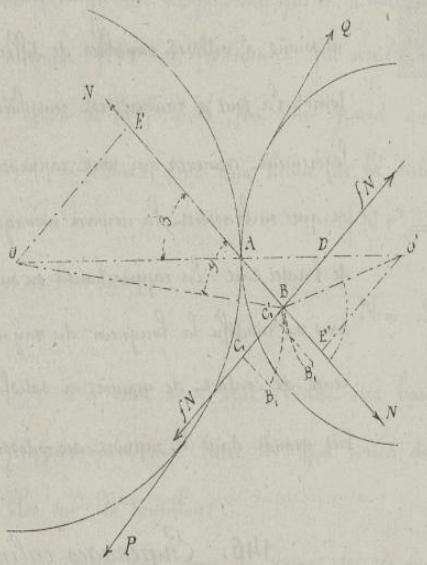
146. *Engrenages cylindriques.* Nous n'avons à rappeler au sujet de l'étude du frottement des engrenages, que le seul principe fondamental en vertu duquel les profils des dents doivent avoir au point de contact pour normale commune la droite qui passe par le point de contact des deux circonférences primitives.

Nous devrons examiner séparément le cas des engrenages extérieurs et celui des engrenages intérieurs, en distinguant pour chacun d'eux si la conduite a lieu avant ou après la ligne des centres, bien que cette dernière condition n'exerce aucune influence sur les formules définitives.

147. — *Engrenages cylindriques extérieurs — Conduite après la ligne des centres.* — La force motrice P entraînant la roue O dans le sens indiqué par sa flèche, cette roue pousse en B la roue O' à laquelle nous supposerons qu'est appliquée la force résistante Q. La condition fondamentale rappelée dans le numéro précédent exige que la droite AB soit normale au profil des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

deux dents. La réaction normale qui se développe à ce contact, est donc dirigée suivant cette droite et les conditions mêmes du problème indiquent nettement le sens de la réaction de la roue O' sur la roue O, et le sens de la réaction de la roue O sur la roue O'. Nous les distinguerons l'une de l'autre, en affectant toutes les forces qui agissent sur la roue O par le signe unique ⟶, et celles qui affectent la roue O' par le double signe ⟶⟶.



S'il y a glissement entre les deux dents au point B, il y aura lieu de considérer encore en ce point deux réactions tangentielles fN et fN dont il n'est pas aussi facile de distinguer le sens.

Pour discerner les sens des forces respectivement appliquées aux roues O et O', la méthode la plus sûre est la suivante :

Si les roues tournent d'un petit angle $d\alpha$, le point B de la roue O viendra en B_1, à une distance ds du point B, mesurée sur la circonférence décrite du point O comme centre avec le rayon OB. Pendant ce déplacement, le même point B appartenant à la roue O', sera venu en B_1 sur une circonférence décrite du point O', avec le rayon O'B.

Si nous désignons par ds, le déplacement commun effectué par un point des deux circonférences primitives, on aura

$$BB_1 = ds\,\frac{OB}{r}, \qquad BB'_1 = ds\,\frac{O'B}{r'}.$$

Si nous projetions ces deux longueurs sur la tangente commune au point B, nous aurions,

$$BC_1 = ds\,\frac{OB}{r}\cos\gamma = ds\,\frac{BE}{r}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$BC'_1 = ds\,\frac{OB'}{r'}\cos\gamma' = ds\,\frac{BE'}{r'}$$

Si nous savions quelle est la plus grande de ces deux quantités, nous connaîtrions par cela même le sens du glissement, et si comme semble l'indiquer la figure, BC'_1 est plus petit que BC_1, nous pourrons affirmer que la force retardatrice qui provient du frottement, et qui agit sur la zone O en sens inverse du glissement sera dirigée dans le sens de la flèche unique.

Or l'inégalité précédente revient à

$$BC_1 > BC'_1$$

et elle sera démontrée si

$$\frac{BE}{r} > \frac{BE'}{r'} \quad \text{ou si} \quad \frac{r}{r'} < \left(\frac{BE}{BE'} = \frac{OD}{O'D}\right)$$

ce qui paraîtra évident si l'on remarque que par suite de la position du point D, $\frac{r}{r'} < \frac{OD}{O'D}$.

Les sens des deux forces fN, étant ainsi déterminés, nous aurons pour équations séparées de l'équilibre des deux zones :

$$Pr = Nr\sin\beta + fN(r\cos\beta + p),$$
$$Qr' = Nr'\sin\beta + fN(r\cos\beta - p),$$

en désignant par β, l'angle de la perpendiculaire OE, à la normale commune AB avec la ligne OO' des centres, et par p la longueur particulière AB qui dépend de la position actuelle du point de contact.

En éliminant l'inconnue N entre ces deux équations, on trouve par une simple division membre à membre

$$\frac{Q}{P} = \frac{r'\sin\beta + f(r'\cos\beta - p)}{r\sin\beta + f(r\cos\beta + p)}$$
$$= \frac{\sin\beta + f\left(\cos\beta - \frac{p}{r'}\right)}{\sin\beta + f\left(\cos\beta + \frac{p}{r}\right)}$$
$$= 1 - \frac{f\left(\frac{p}{r} + \frac{p}{r'}\right)}{\sin\beta + f\left(\cos\beta + \frac{p}{r}\right)}$$

Nous verrons bientôt comment cette relation nous conduira à la valeur

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de l'utilisation dans ces sortes d'engrenages. Mais il nous faut avant tout remarquer que si le point D se trouve à la droite du point O', les deux longueurs BC, et BC', étant de sens contraires à partir du point B, il est manifeste que le glissement relatif a lieu de B à C, ce qui implique la même disposition des flèches que dans le cas de la figure.

148. — *Valeur de l'utilisation.* — La valeur de $\frac{Q}{P}$ est celle de l'utilisation au moment où la normale AB est égale à ρ, et cette utilisation variable pour chaque position du point B peut s'exprimer d'une manière plus simple si l'on remarque que l'angle β est toujours fort petit, ce qui permet de considérer $\cos\beta$ comme négligeable et de remplacer $\sin\beta$ par 1, ce qui donne pour valeur individuelle de l'utilisation au point B

$$U = 1 - f\rho\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$$

Pour passer de cette valeur individuelle à la valeur moyenne de l'utilisation, il suffit de remarquer que si l'on désigne par a le pas de l'engrenage ρ varie de 0 en a, et par conséquent on peut admettre pour U la valeur moyenne que l'on obtiendrait en remplaçant ρ par $\frac{1}{2}a$, ce qui donne

$$U = 1 - \frac{1}{2}fa\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$$

Cette expression peut encore se mettre sous une autre forme, si, représentant respectivement par n et par n', les rayons des deux roues, on remarque que

$$a = \frac{2\pi r}{n} = \frac{2\pi r'}{n'}$$

ce qui en remplaçant $\frac{a}{2r}$ par $\frac{\pi}{n}$ et $\frac{a}{2r'}$ par $\frac{\pi}{n'}$, conduit définitivement à la formule

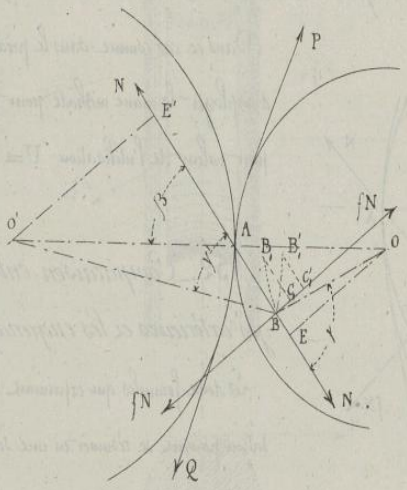
$$U = 1 - f\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)$$

on voit ainsi que l'utilisation des engrenages cylindriques extérieurs sera plus favorable à mesure que n et n' seront plus grands. C'est pour cela que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'on augmente en général le nombre des dents, jusqu'à la limite imposée par les règles de la résistance des matériaux.

149. *Engrenages cylindriques intérieurs. Conduite avant la ligne des centres.*



La figure ci-jointe a été tracée dans l'hypothèse où la tangente au point de contact passe en deçà du centre de la zone motrice parce que c'est le seul cas dans lequel le sens de la force tangentielle fN puisse être douteux. Les mêmes raisonnements établiraient que $BC'_1 > BC_1$, par suite de l'inégalité $\frac{r}{r'} > \frac{OD}{OD'}$, et les équations d'équilibre pourraient s'écrire

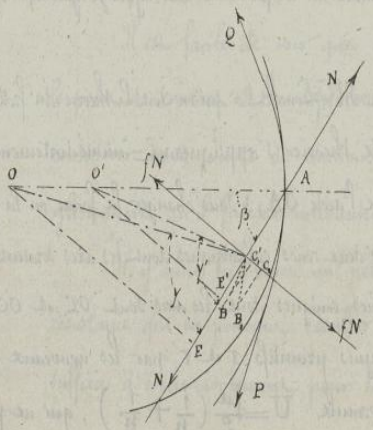
$$Pr = Nr\sin\beta - fN(r\cos\beta - p)$$

$$Qr' = Nr'\sin\beta - fN(r\cos\beta + p)$$

ce qui conduirait à la même formule que précédemment et à la même valeur de l'utilisation.

$$U = 1 - f\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)$$

Il importe toutefois que la conduite avant la ligne des centres, peut donner lieu à des arcs-boutements que l'on peut éviter en diminuant autant que possible l'angle de la tangente extrême avec la ligne des centres.



150. *Engrenages cylindriques intérieurs ; conduite après la ligne des centres.* — La figure ci-jointe dans laquelle sont reproduites les mêmes lettres que précédemment suffit pour faire reconnaître le sens des réactions tangentielles et conduire facilement aux deux relations

$$Pr = Nr\sin\beta + fN(r\cos\beta - p)$$

$$Qr' = Nr'\sin\beta + fN(r'\cos\beta - p)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

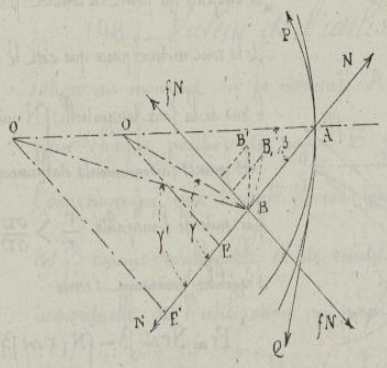
d'où l'on tire

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin\beta + f\left(\cos\beta - \frac{r}{r'}\right)}{\sin\beta - f\left(\cos\beta - \frac{r}{r}\right)} = 1 - f\rho\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$$

et

$$U = 1 - f\pi\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$$

151. *Engrenages cylindriques extérieurs; conduite avant la ligne des centres.* Dans ce cas comme dans le précédent, il suffira d'employer la même méthode pour déduire du tracé pour valeur de l'utilisation $U = 1 - f\pi\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$



152. *Comparaison entre les engrenages extérieurs et les engrenages intérieurs.* Les deux formules qui expriment la valeur de l'utilisation peuvent se réduire en une seule

$$U = 1 - f\pi\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$$

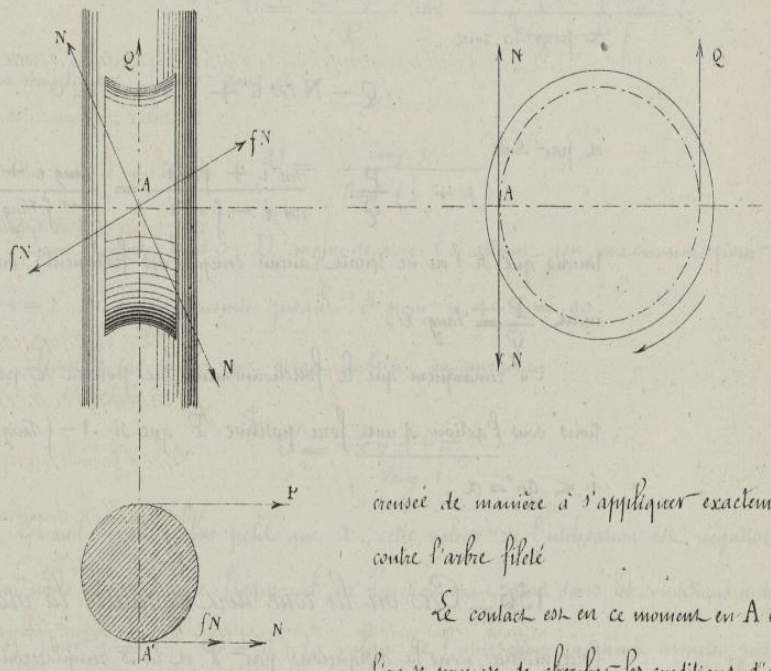
le signe inférieur correspondant aux engrenages intérieurs, la théorie indiquerait qu'au point de vue des frottements, ces engrenages sont plus favorables que les autres, mais les difficultés de l'exécution limitent beaucoup les emplois que l'on en fait, et ils ne sont en réalité que très rarement utilisés dans les machines.

153. *Crémaillères.* Si dans la formule précédente on fait $r' = \infty$, ce qui revient à supposer que la roue conduite devient une ligne droite, on trouve pour les deux cas: $U = 1 - \frac{f\pi}{n}$. La crémaillère doit être à ce point de vue considérée comme un cas particulier de l'engrenage cylindrique, intérieur ou extérieur.

154. *Engrenages coniques.* M^r^ Poncelet, à qui on doit la théorie du frottement dans les engrenages, a fait remarquer que cette théorie s'appliquerait immédiatement aux engrenages coniques en contact le long de l'arête OA, si sans changer la forme ou la position des dents, on les considérait comme appartenant à deux roues cylindriques dont les axes seraient en BD et BD', au lieu de les rapporter aux deux roues coniques dont les axes sont OC et OC'. Il suffira donc de remplacer les rayons moyens primitifs r et r' par les nouveaux rayons AC ρ A'C' ρ', ce qui conduit à la formule $U = \frac{fa}{2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)$, qui ne peut plus être exprimé en fonction des nombres de dents des deux roues.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

155._ *Engrenages à vis sans fin.*_ Un arbre que nous supposerons vertical, est denté suivant une hélice telle que MN qui engrène avec une denture de la roue A, dont l'axe est perpendiculaire à celui de l'arbre, et dont la jante est



creusée de manière à s'appliquer exactement contre l'arbre fileté

Le contact est en ce moment en A et l'on se propose de chercher les conditions d'équilibre de cette vis que l'on désigne sous le nom de vis sans fin, sous l'action d'une force motrice P, appliquée à la circonférence de la vis, et d'une résistance Q appliquée à la circonférence de la roue.

Il est facile de voir que si l'arbre tourne dans le sens indiqué par la flèche, le point de contact A se déplacera sous l'action de la vis, et qu'il y aura lieu de considérer en ce point des réactions normales N et des réactions tangentielles fN de glissement qu'il faudra introduire dans l'expression des conditions d'équilibre.

Il y aura bien aussi un petit déplacement de roulement de la roue, mais la résistance qui en pourrait résulter serait négligeable par rapport à l'autre, et il suffira d'écrire isolément pour la vis et pour la roue les conditions d'équilibre autour

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de leurs axes.

On a ainsi pour la vis, en désignant par i son inclinaison

$$P - N \sin i - fN \cos i = 0$$

et pour la roue,

$$Q - N \cos i + fN \sin i = 0$$

et par suite

$$\frac{P}{Q} \quad \frac{\sin i + f \cos i}{\cos i - f \sin i} = \frac{\operatorname{tang} i + f}{1 - f \operatorname{tang} i}$$

tandis que si l'on ne tenait aucun compte des frottements, on aurait plus simplement $\frac{P}{Q} = \operatorname{tang} i$.

On remarquera que le fonctionnement ne pourra se produire dans ces conditions sous l'action d'une force positive P que si $1 - f \operatorname{tang} i > 0$ ou si $i < 90° - \alpha$.

156. — *Cas où la roue doit conduire la vis.* — Si la force Q devenue force motrice, nous la désignerons par P' et nous remplacerons, en même temps, P par Q'. L'équation précédente sera encore applicable à ces nouvelles données, si l'on change le signe de f, ce qui donnera,

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{1 + f \operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} i - f}$$

Le fonctionnement sera possible dans ce sens pour toute valeur de $\operatorname{tang} i$ qui rendra le dénominateur positif, ce qui conduit à :

$$\operatorname{tang} i > \operatorname{tang} \alpha \quad \text{ou} \quad i > \alpha$$

Pour que la vis puisse fonctionner dans les deux sens, il faudra donc que i soit compris entre α et $90° - \alpha$, condition analogue à celle que nous avons rencontrée pour la vis à écrou, dont l'engrenage actuel ne diffère guère que par l'écrou, qu'en ce que le déplacement du point de contact détermine la rotation de la roue autour de son axe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

157. — *Utilisation.* — Dans le cas où, comme nous l'avons supposé sur la figure, les forces P et Q sont respectivement appliquées aux circonférences du point de contact, on a

$$U = \frac{Q \operatorname{tang} i}{P} = \frac{\operatorname{tang} i\,(1 - f \operatorname{tang} i)}{\operatorname{tang} i + f}$$

ou en remplaçant f par $\operatorname{tang} \alpha$,

$$U = \frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang}(i + \alpha)}$$

Pour $i = 0$, $U = 0$; U augmente avec i, atteint son maximum pour $\operatorname{tang} i = 1$, puis décroît ensuite jusqu'à 0 pour $i + \alpha = 90°$.

Dans le cas où la roue serait motrice, on aurait

$$U' = \frac{\operatorname{tang}(i - \alpha)}{\operatorname{tang} i}$$

Quand i est plus petit que α, cette valeur de l'utilisation est négative, ce qui nous apprend que l'appareil ne fonctionnerait pas dans les conditions indiquées ; pour $i = \alpha$, $U' = 0$; la valeur de l'utilisation augmente ensuite, jusqu'à ce que l'on ait $\operatorname{tang} i = 1$, et l'on a alors pour la valeur approximative du maximum

$$U'_1 = \frac{1 - f}{1 + f} = 1 - 2f$$

Enfin U diminue et redevient nul à la limite $i = 90°$.

Roideur et frottement des cordes.

158. — *Des cordes et des courroies dans les machines.* — Les cordes et les courroies sont fréquemment employées dans les opérations mécaniques, en raison de leur flexibilité et de leur légèreté pour transmettre des actions à distance. Elles ont, sous ce rapport, l'avantage de pouvoir être obtenues sous de grandes longueurs, et leur forme se prête très-bien à l'application directe de la force

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

musculaire d'un grand nombre d'hommes agissant à la fois sur le même brin.

Les cordes sont formées de fils de chanvre, dits fils de carret, qui, réunis par torsion, constituent les torons dont la réunion fait la corde elle-même.

Ces diverses torsions ont pour but de rendre les fils solidaires, lorsqu'on exerce sur la corde un effort dans le sens de la longueur.

La constitution même des cordes doit être considérée au point de vue qui nous occupe, comme une application heureuse du frottement, application que l'on étend encore aux nœuds que l'on fait avec les cordes, et qui résistent par suite du frottement mutuel des différents brins, aux plus grands efforts.

Les courroies sont généralement en cuir, quelquefois en caoutchouc ou en Gutta-percha, et elles sont exclusivement employées à transmettre le mouvement d'une poulie à une autre. Depuis quelque temps, on se sert pour cet objet, de cordes en chanvre et en fil de fer, lorsqu'il s'agit d'établir des transmissions en plein air, quelquefois jusqu'à des distances de plusieurs Kilomètres.

On désigne en général les cordages par le nombre de fils de carret, mais pour l'étude que nous devons faire de leur application aux machines, il nous suffira d'indiquer leurs propriétés principales, en rapportant toutes nos indications aux diamètres.

Le poids des cordages est généralement calculé par une formule

$$K = 0,00826\ c'^2,$$

dans laquelle K est le poids en kilogramme du mètre de longueur, et c' représente le nombre des centimètres de la circonférence. En remplaçant les centimètres par des mètres, et en substituant à c^2 sa valeur $4\pi^2 r^2$, on arrive facilement à la formule

$$K = 1138\ \pi r^2 l$$

ce qui revient à dire que la densité apparente d'une corde neuve doit être estimée en moyenne à 1.138.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La charge de rupture des cordages est évaluée par la relation $R = 400\,d^2$, d'étant aussi le diamètre exprimé en centimètres ; cette évaluation revient à une charge K de 5.09 kilog par millimètre carré, car en exprimant le diamètre en millimètres, on a simultanément $R = 4\,d^2$

et

$$K = \frac{R}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{16}{\pi} = 5.09$$

D'après cette base, qui est relative aux cordes ordinaires ou blanches, il conviendrait de réduire les charges qu'on peut faire supporter en service courant à 3 kilog pour les cordes blanches, à 2 K 50 pour les cordes goudronnées et à 2 K pour les cordes mouillées.

159. — *Roideur des cordes.* — La roideur est la propriété qu'ont les cordes de résister à l'action que l'on est obligé d'exercer sur elles pour leur faire prendre une courbure déterminée.

Sa mesure s'exprime par la quantité de travail nécessaire pour appliquer un mètre de corde sur un tambour ou sur un rouleau cylindrique, et pour en redresser une égale longueur. Cette double circonstance se présente dans les transmissions par cordes ou courroies, mais l'opération du redressement n'entre évidemment que pour une part à peine appréciable dans le travail total.

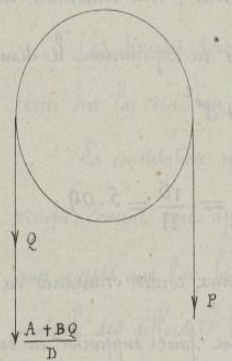
Coulomb a reconnu par des expériences spéciales, que ce travail varie, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse du diamètre du rouleau, et que pour un rouleau de un mètre de diamètre, il peut être exprimé par un binôme A + BQ dans lequel A et B sont des coefficients numériques, et Q la charge du brin qui s'enroule.

On peut donc, d'une manière générale, représenter la raideur d'un mètre de corde, lors de l'enroulement sur un rouleau dont le diamètre est D par la formule

$$\tau = \frac{A + BQ}{D}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On peut encore interpréter cette relation sous une autre forme en disant que si la corde est tendue par un poids Q, il faudra exercer, pour l'enrouler, un effort P à son autre extrémité, la valeur de P satisfaisant à la relation $P \times 1^m - Q \times 1^m = \frac{A+BQ}{D}$.



Si en effet le travail de la force P a déterminé le déroulement d'un mètre de corde, il s'en sera enroulé une égale longueur du côté de la résistance Q, et l'on pourra écrire plus simplement,

$$P = Q + J .$$

Coulomb appelle A le coefficient de la raideur naturelle de la corde, et il désigne B sous le nom de coefficient de raideur due à la charge.

Cela revient à remarquer que le terme en A est indépendant de Q, et ne paraît dépendre que des qualités propres de la corde, d'après son mode de fabrication.

Les valeurs de A et de B sont données dans les tables de M^r Morin, qui a discuté les nombres de Coulomb et déterminé ainsi des coefficients préférables à ceux qui avaient été indiqués par Navier.

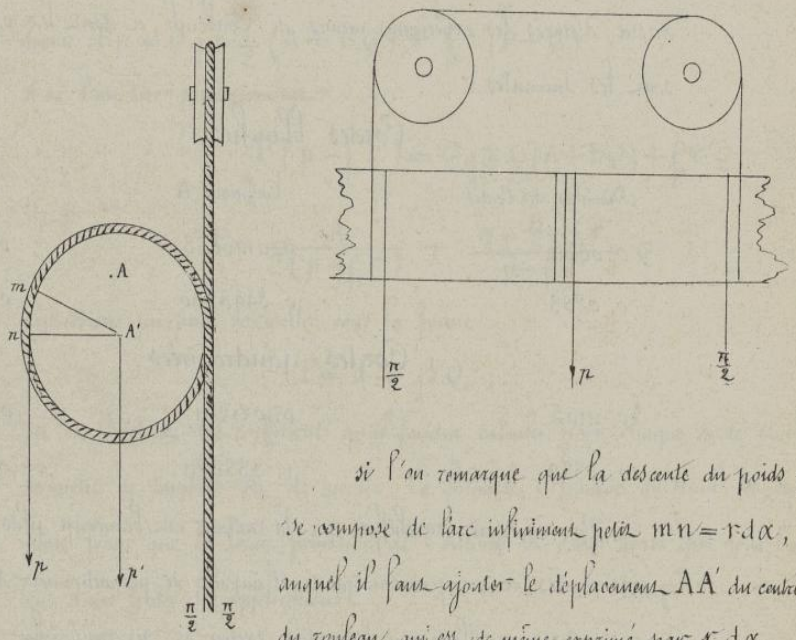
Pour établir les conditions d'équilibre d'une corde enroulée sur un tambour, nous pourrons considérer la raideur comme une réaction exercée à la circonférence du tambour en sens inverse de la puissance P, et ayant pour mesure $\frac{A+BQ}{D}$.

160._*Expériences de Coulomb.*_Les principales expériences de Coulomb ont été faites en enroulant, d'une manière symétrique, les deux brins d'une même corde sur un rouleau horizontal A, en suspendant un poids π aux deux extrémités de cette double corde et en déterminant la descente du rouleau à l'aide d'un poids supplémentaire p suspendu à un fil fin enroulé en sens contraire sur le même rouleau.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En désignant par $\tau r d\alpha$, le travail d'enroulement et de déroulement de la corde, on doit avoir

$$\tau r d\alpha = 2 p r d\alpha \quad \text{ou} \quad \tau = 2p,$$



si l'on remarque que la descente du poids p se compose de l'arc infiniment petit $mn = r.d\alpha$, auquel il faut ajouter le déplacement AA' du centre du tonneau, qui est de même exprimé par $r\,d\alpha$.

Dans cette expérience, chacun des brins de la corde supportait un poids $\frac{\pi}{2}$, et Coulomb a trouvé $2p = \frac{A + B\pi}{D}$, D étant le diamètre du tonneau augmenté du diamètre de la corde, c'est-à-dire le diamètre du cylindre qui passerait par l'axe de la corde enroulée, ce qui conduit à la formule déjà indiquée :

$$\tau = \frac{A + B\pi}{D},$$

Il en aurait été de même pour une seule corde chargée d'un poids π, et la disposition qui précède n'a été employée par Coulomb que pour assurer la stabilité de l'appareil pendant l'expérience.

161. — *Valeurs des coefficients.* — Les valeurs de A et de B, déduites

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des expériences de Coulomb, ont été rapportées, au moyen d'exposants variables, aux diamètres et au nombre des fils de carets, mais M^r^ Morin a fait voir qu'il valait mieux les déduire, pour chaque cas particulier, d'une table qu'il a dressée d'après les expériences mêmes de Coulomb, et dont les valeurs extrêmes sont les suivantes :

Cordes blanches,

Diamètres des Cordes	Coefficient A	Coefficient B
0.0089	0.0106038	0.002178
0.0283	0.8998880	0.021780

Cordes goudronnées.

0.0105	0.021201	0.002513
0.0334	1.333050	0.025130

On voit par ces chiffres que la raideur est beaucoup plus grande pour les grosses cordes, et que par conséquent, il importe de proportionner dans la pratique, leur diamètre aux efforts que l'on doit exercer et se rapprocher autant que possible, de la limite de 3^K^ d'effort par millimètre carré de section transversale.

162. — *Equilibre du treuil et de la poulie en tenant compte de la raideur des cordages.* — Dans l'étude de ces appareils, nous supposerons que le déroulement de la corde a lieu sans glissement, nous réservant d'établir ultérieurement les conditions nécessaires pour que ce glissement ne puisse avoir lieu.

Si nous voulons, tout à la fois, tenir compte de la raideur de la corde et du frottement sur l'axe d'un treuil, il nous suffira de faire entrer dans la formule qui exprime l'égalité entre les moments, l'influence de la résistance due à la raideur de la corde.

On obtient ainsi, d'une manière directe, en désignant par p et q les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rayons de la puissance et de la résistance, par r' celui de l'axe, et en remarquant que le diamètre D du tambour se trouve alors représenté par $2q$,

$$Pp = Qq + \frac{1}{2q}(A + BQ)q + f_1 r' R,$$

en désignant par R la pression supportée par les tourillons.

Si P est parallèle à Q, on sait que $R = P + Q$ approximativement, ce qui donne $Pp = Qq + \frac{1}{2}(A + BQ) + f_1 r'(P + Q)$,

d'où l'on tire successivement

$$P(p - f_1 r') = Qq + \frac{1}{2}(A + BQ) + f_1 r' Q,$$

et

$$P = \frac{A}{2(p - f_1 r')} + \frac{q + \frac{B}{2} + f_1 r'}{p - f_1 r'} Q ;$$

expression qui peut se mettre sous la forme

$$P = \alpha + \beta Q ,$$

α et β étant des coefficients qu'il faudra calculer pour chaque corde et chaque décimètre de tambour ou de poulie. La formule définitive du treuil est donc de même forme que la forme primitive de Coulomb et c'est ainsi que nous l'emploierons dans toutes les applications.

Si l'on remplace p et q par le rayon r, cette formule

$$P = \alpha + \beta Q$$

sera celle de la poulie, à la condition de calculer pour chaque cas particulier, les deux constantes α et β, qui varient entre des limites très-étendues avec r, r' et f_1.

163. *Valeur de l'utilisation.* — La valeur de l'utilisation est donnée comme à l'ordinaire par la relation

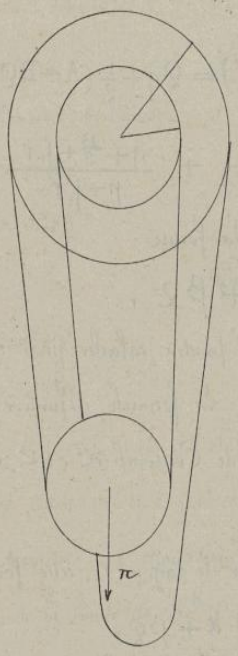
$$U = \frac{Qq}{Pp} = \frac{Qq}{p(\alpha + \beta Q)} ,$$

expression dans laquelle il suffira de supprimer le facteur $\frac{q}{p} = 1$, pour

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'appliquer à la poulie ordinaire.

164. — *Poulie différentielle de Weston.* — L'examen des palans à poulies inégales nous conduit naturellement à parler de la poulie différentielle de Weston, qui est une forme particulière du treuil de Lombard ou treuil chinois, et qui est devenu dans ces derniers temps un appareil d'usage général.



La poulie supérieure de cet appareil a deux gorges de diamètres différents, et une chaîne sans fin, fixée à la poulie mobile inférieure, s'enroule lors du fonctionnement sur la gorge du plus grand diamètre en même temps qu'elle se déroule sur la petite. Si l'on désigne les deux rayons par r et r', toute rotation $d\alpha$ se traduit par un déplacement $r\,d\alpha$ du brin moteur, qui correspond, pour la poulie mobile, à un déplacement moitié moindre, de sorte que, abstraction faite des frottements, on a

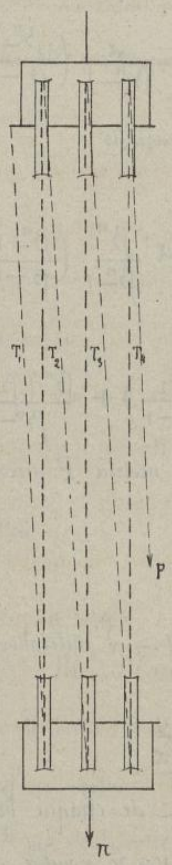
$$Pr = \frac{1}{2}\pi\,(r - r')\,.$$

Les résistances passives jouent, dans cet appareil, un rôle considérable; au moyen d'empreintes pratiquées dans les deux gorges de la poulie supérieure, elles sont suffisamment augmentées pour qu'un fardeau, soulevé à une certaine hauteur, reste suspendu à la poulie inférieure dans un état de complète stabilité.

On arriverait au même résultat avec une corde sans fin, en employant des gorges triangulaires, rendues plus efficaces au moyen de petites saillies transversales, dont l'emploi a cependant pour effet d'user rapidement les cordes. C'est pour cela qu'on leur préfère, dans cette application, une chaîne avec poulies à empreintes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

165. — *Théorie des mouffles.* — Les mouffles sont formés par des poulies de même diamètre, montées sur un même axe. Une corde fixée à un point de la chape supérieure, entoure toutes ces poulies successivement et se termine par un dernier brin descendant sur lequel agit la force motrice.



Pour trouver les tensions des divers brins de la corde, il suffit d'appliquer en passant de l'un à l'autre la formule

$$P = \alpha + \beta Q$$

qui devient successivement.

T_1 qui peut s'écrire $T_1 = \alpha \frac{\beta^0 - 1}{\beta - 1} + \beta^0 T_1$

$T_2 = \alpha + \beta T_1$ ou $T_2 = \alpha \frac{\beta^1 - 1}{\beta - 1} + \beta^1 T_1$

$T_3 = \alpha + \beta T_2 = \alpha + \alpha\beta + \beta^2 T_1$ ou $T_3 = \alpha \frac{\beta^2 - 1}{\beta - 1} + \beta^2 T_1$

et ainsi de suite .....

$$T_n = \alpha \frac{\beta^{n-1} - 1}{\beta - 1} + \beta^{n-1} T_1$$

et enfin

$$P = \alpha \frac{\beta^{n-1} - 1}{\beta - 1} + \beta^{n-1} T_1$$

en remarquant d'ailleurs que les coefficients A et B peuvent être calculés par les relations

$$\alpha = \frac{A}{2(\mu + f_1 r')} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{r + \frac{B}{2} + f_1 r'}{\mu + f_1 r'}$$

Pour éliminer T_1, nous avons une dernière équation résultant de ce qu'il y a nécessairement équilibre entre la somme de toutes les tensions, et le poids π, ce qui donne

$$\pi = \Sigma T \ ,$$

ou effectuant les calculs

$$\pi = \frac{\alpha}{\beta - 1} \left\{ \left[(\beta^0 - 1) + (\beta^1 - 1) + (\beta^2 - 1) + (\beta^3 - 1) + \ldots\ldots + \beta^{n-1} - 1 \right] \right.$$
$$\left. + T_1 \left(\beta^0 + \beta^1 + \beta^2 + \beta^3 + \ldots\ldots\ldots + \beta^{n-1} \right) . \right\}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\Pi = \frac{\alpha}{\beta-1}\left[\frac{\beta^n-1}{\beta-1} - n\right] + T_1 \frac{\beta^n-1}{\beta-1},$$

d'où nous pouvons tirer

$$T_1 = \frac{\Pi(\beta-1)}{\beta^n-1} - \frac{\alpha}{\beta^n-1}\left(\frac{\beta^n-1}{\beta-1} - n\right).$$

Il est ainsi facile de calculer toutes les tensions.

La dernière donnera

$$P = \alpha\left(\frac{\beta^n-1}{\beta-1}\right) + \beta^n \frac{\Pi(\beta-1)}{\beta^n-1} - \alpha\frac{\beta^n}{\beta^n-1}\left(\frac{\beta^n-1}{\beta-1} - n\right)$$

ou bien

$$P = \alpha\left(\frac{\beta^n}{\beta^n-1}n - \frac{1}{\beta-1}\right) + \frac{\beta^n(\beta-1)}{\beta^n-1}\Pi,$$

et elle nous permet de calculer la force motrice P nécessaire pour soulever le fardeau Π.

166. *Valeur de l'utilisation.* — L'utilisation serait donnée par la formule

$$U = \frac{\Pi\, dy}{P\, dx}$$

mais nous savons que le raccourcissement de chaque brin est égal au chemin parcouru par la force motrice P, divisé par le nombre des brins, ce qui donne $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}$ et par suite

$$U = \frac{\Pi}{nP}.$$

M^r Poncelet a trouvé pour le palan des pontonniers, que l'on avait ordinairement U = 0.60, et ce faible rendement fait connaître l'importance des pertes du travail résultant de l'emploi des poulies et des mouffles.

167. *Palans à poulies inégales.* — On désigne plus ordinairement sous le nom de palans des appareils dans lesquels des poulies de rayons diffé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

reuls sont montés sur des axes parallèles dans une même chape.

Le calcul est fondé sur les mêmes principes, et l'on peut toujours exprimer chacune des tensions en fonction de la tension T_1 du premier brin, ce qui donne

$$T_2 = \alpha_2 + \beta_2 T_1$$
$$T_3 = \alpha_3 + \beta_3 T_2 = \alpha'_3 + \beta'_3 T_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$T_n = \alpha'_n + \beta'_n T_1$$

et enfin $$P = m + n T_1$$

On a d'ailleurs comme précédemment

$$\pi = \Sigma T = \Sigma \alpha + \Sigma \beta T_1$$

d'où $$T_1 = \frac{(\pi - \Sigma \alpha)}{\Sigma \beta}$$

et par suite $$P = m + n \left(\pi - \Sigma \alpha\right) \frac{1}{\Sigma \beta} .$$

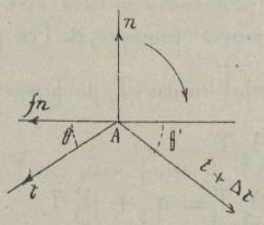
M^r^ Morin a constaté par une expérience directe que pour un palan à 4 brins, chargé de 532 kilogrammes, les résistances passives exigeaient un effort moteur $T_4 = 154$ kilogrammes, alors que le calcul indiquerait 160 kilog. Il y a donc entre les résultats de l'expérience, et les résultats calculés une concordance suffisante pour que l'on puisse appliquer avec toute confiance les formules précédentes des mouffles et des palans.

168. — *Conditions relatives à l'adhérence des courroies* — Dans les études précédentes sur les courroies, on a admis qu'il se développait entre la courroie et la poulie un frottement suffisant pour que celle-ci soit entraînée par la première et vice versa, sans que l'un des corps glisse sur l'autre. Nous allons maintenant chercher les conditions pour que cette hypothèse soit réalisée.

Considérons pour cela, un tambour que nous supposerons d'abord polygonal, et sur lequel s'enroule une courroie. Si c'est la courroie qui conduit, et que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le mouvement tend à se produire dans le sens de la flèche ; la poulie exerce sur la courroie une réaction n, et par suite un frottement fn ; c'est ce frottement fn qui tend à s'opposer évidemment à ce que la courroie glisse sur le tambour sans l'entraîner, et qui fait que la tension t de la courroie avant le point A, ne peut être équilibrée que par une tension $t+\Delta t$ après ce point.



Si nous exprimons qu'il y a équilibre entre les quatre forces qui agissent au point A ; n, fn, t et $t+dt$, nous obtiendrons une relation qui nous donnera la quantité dont varie la tension de la courroie d'un point à un autre de la poulie, quelles que soient d'ailleurs ces quantités n et fn. En projetant successivement sur les directions n et fn, nous obtenons les 2 équations

$$(t+\Delta t)\cos\theta' = t\cos\theta + fn,$$
$$(t+\Delta t)\sin\theta' + t\sin\theta = n.$$

Dans les cas ordinaires, où le tambour est cylindrique, ces équations se simplifient ; l'angle de t avec $t+\Delta t$ devient égal à $180°$, $\cos\theta$ et $\cos\theta'$ tendent tous deux vers l'unité, et Δt devenant une variation infinimentpetite, devient dt, de sorte que la première équation se trouve remplacée par celle-ci

$$t + dt = t + fn$$

c'est-à-dire

$$dt = fn.$$

Quant à la seconde équation ; l'angle θ devenant infiniment petit, on aura $\sin\theta = \theta$, de même que $\sin\theta = \theta'$, par suite notre seconde équation devient

$$(t+dt)\theta' + t\theta = n,$$
$$t(\theta+\theta') + dt\,\theta' = n,$$

et θ' comme dt étant infinimentpetit, le produit $\theta' dt$ est un infinimentpetit du second ordre, qui est nul à côté des autres quantités qui entrent dans l'équation précédente, laquelle se réduit donc à

$$t(\theta+\theta') = n.$$

Entre ces deux équations

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

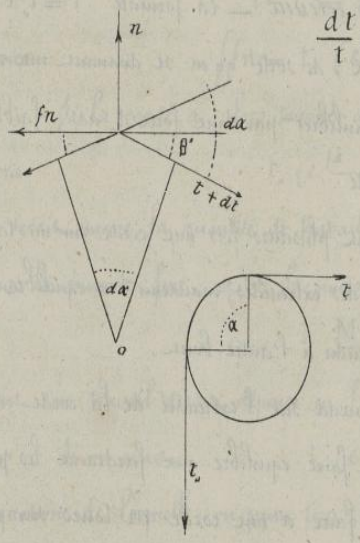
$$t(\theta+\theta') = n$$

$$dt = fn$$

si l'on élimine n, il vient

$$\frac{dt}{t} = f(\theta+\theta').$$

Or $\theta+\theta'$, c'est l'angle que font entr'elles les deux tangentes successives à la poulie $\theta+\theta' = d\alpha$, donc



$$\frac{dt}{t} = f\,d\alpha.$$

d'où en intégrant

$$\log t = f\alpha + c$$

relation qui donne t en un point quelconque situé à une distance angulaire α de la tension initiale.

Si $pr\,\alpha = 0$, nous supposons $t = t_0$

on a $t_0 = 0 + c$

donc $\log \frac{t}{t_0} = f\alpha$.

Ainsi la tension en un point quelconque est connue ; elle ne dépend que de f (α et t_0).

Cette formule peut encore s'écrire

$$t = t_0\, e^{f\alpha}$$

ou

$$f = \frac{1}{\alpha}\log\frac{t}{t_0}.$$

Sous la première forme M^r Morin en a vérifié l'exactitude en plaçant un poids $p = t_0$ sur le brin vertical descendant d'une poulie, et en cherchant la force t nécessaire pour le faire glisser sur ce rouleau. Sous la seconde forme elle a servi à déterminer les coefficients de frottements f des cordes et courroies employées dans les machines.

Ainsi par exemple, d'après M^r Morin

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Courroie ordinaire sur bois	$f = 0.47$
neuve	$f = 0.50$
ordinaire sur fer ou fonte	$f = 0.28$
humide	$f = 0.38$
Cordes (d'après M^r Lebas)	$f = 0.22$

169. — *Cordes de retenue.* — La formule $t = t_0 e^{fa}$ montre que t augmente rapidement avec α ; de sorte qu'en se donnant une résistance considérable t à vaincre, on pourra l'équilibrer par une force t_0 assez faible à condition de donner à α une valeur suffisante.

Ainsi, en enroulant plusieurs fois une corde sur un tambour, un homme seul peut en agissant à l'une des extrémités, maintenir en équilibre un poids fort considérable, qui serait suspendu à l'autre bout.

En faisant un nœud sur l'extrémité de la corde on développe un frottement si considérable qu'il peut faire équilibre aux fardeaux les plus lourds.

Quand on fait faire à une corde m tours sur un tambour, l'arc α devient égal à $2\pi m$, et on aura

$$t = t_0 e^{2\pi f m} ;$$

ou

$$t_0 = t e^{-2\pi f m} ;$$

m seul ici est variable, et comme pour des cordes sur bois, on a

$$2\pi f = 1.38$$

on a

$$t_0 = t e^{-1.38\, m} .$$

En faisant m suffisamment grand, t_0 deviendra aussi petit que l'on voudra, quelle que soit d'ailleurs la grandeur de t.

170. — *Freins flexibles.* — Par le fait de ce frottement, il y a une certaine quantité de travail qui se trouve anéantie, et il est facile d'en trouver

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'expression. La force tangentielle est

$$fn = dt ;$$

$$\int fn = t - t_0$$

sera donc la somme des frottements ou le frottement total s'exerçant sur tout l'arc embrassé, or

$$t - t_0 = (e^{f\alpha} - 1)\, t_0$$

donc $$\int fn = t_0 (e^{f\alpha} - 1)$$

Si la corde a alors tourné d'un angle β, le travail dépensé en frottement sera $$t_0 (e^{f\alpha} - 1) r\beta :$$

ce serait encore la quantité de travail dépensée en frottement, si la poulie tournait sous la courroie fixe ; et si la puissance vive de la poulie et de son arbre est

$$\frac{M \rho^2 \omega^2}{2},$$

tout son travail serait dépensé en frottement.

Si on avait $$t_0 (e^{f\alpha} - 1) r\beta = M \frac{\rho^2 \omega^2}{2},$$

équation de laquelle on peut tirer la valeur β de l'angle dont on aura tourné la poulie quand elle aura perdu toute sa puissance vive.

Cette annihilation complète du travail est réalisée dans les poulies de frein : seulement dans ce cas la courroie est remplacée par un fer-feuillard, ou même dans certains cas, par des pièces de bois juxtaposées sur un fer-feuillard.

171. — *Transmissions par courroies.* — Dans les transmissions par courroies, on a ordinairement deux poulies, qui sont enveloppées par une même courroie : si cette courroie n'avait aucune tension au moment du repos, l'une des poulies ne saurait entraîner l'autre, car sans tension, il n'y a pas d'adhérence, par suite pas de frottement.

Il s'agit donc de déterminer la valeur que devra avoir cette tension initiale pour que l'une des poulies en tournant, puisse entraîner l'autre, en vaincre une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

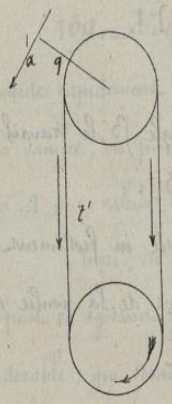
résistance Q appliquée à celle-ci, avec un bras de levier q.

Le moment résistant Q q est alors équilibré par la différence des deux tensions t et t' : donc $Qq = (t - t')r$;

t et t' sont de plus liés par la relation $t = t' e^{f\alpha}$.

Quant à l'équation qui introduira la tension initiale t_0, elle est fournie par un fait d'expérience qui dit que la somme des tensions des deux courroies est la même pendant le repos et pendant le mouvement : or, au repos, les deux brins ont la même tension t_0 ; donc on a

$$2t_0 = t + t'.$$



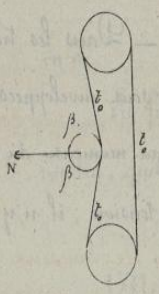
De ces 3 équations nous allons éliminer t et t' ; on a d'abord $t_0 = \frac{t+t'}{2} = \frac{t'}{2}(1 + e^{f\alpha})$.

or $(t - t')r = Qq$,

$t'(e^{f\alpha} - 1)r = Qq$,

et en substituant, $t_0 = \frac{Qq(1 + e^{f\alpha})}{2r(e^{f\alpha} - 1)}$;

t_0 est donc donné par une formule simple : on voit qu'elle varie avec f et α. Cette tension initiale est facile à produire avec de longues courroies, que l'on raccourcit à la mesure convenable ; si la tension n'est pas suffisante, on se sert d'une galet tendeur, que l'on pousse contre la courroie, ce qui revient à exercer un effort normal N sur celle-ci ;



on a alors $N = 2t_0 \cos\beta$

et en augmentant N, on arrive à donner à t_0 une valeur assez grande pour qu'il n'y ait pas de glissement.

(Voir les tableaux d'autre part.)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

172. — Tableaux des coefficients à employer dans les applications.

I. — Coefficients de frottement de glissement entre surfaces planes.

			au départ	pendant le mouvement
Chêne sur chêne	Fibres parallèles	Surfaces sans enduit	0.62	0.48
" "	" "	" frottées de savon sec	0.44	0.16
" "	Fibres perpendiculaires	Surfaces sans enduit	0.54	0.34
" "	" "	" mouillées d'eau	0.71	0.25
" "	Bois debout	" sans enduit	0.43	0.19
Fer sur chêne	Fibres parallèles au mouvement	Surfaces sans enduit	0.62	0.26
" "	" "	" mouillées d'eau	0.65	0.21
Fonte sur fonte	Surfaces un peu onctueuses		0.16	
Fer sur fonte	" "		0.19	0.18
Fonte sur bronze	"		"	0.15
Métal sur bois et Métal sur Métal	Surfaces graissées à l'huile et saindoux		0.15	0.07 à 0.08
	" enduit sans cesse renouvelé		"	0.04 à 0.05
Cuir tanné sur chêne	sans enduit		0.43	0.35
"	Surfaces mouillées d'eau		0.79	0.29
Pierre calcaire sur pierre calcaire	sans enduit		0.75	0.67
Brique sur pierre calcaire	"		0.67	0.65

II. — Coefficients de frottement de glissement pour les tourillons.

Métal sur métal	Surfaces très-peu onctueuses et commençant à se roder	0.25
" "	Surfaces onctueuses	0.14 à 0.16
" "	Graissage ordinaire, à l'huile ou au savon doux	0.07 à 0.08
" "	Graissage continu	0.04 à 0.05
Fer sur Gaïac	Surfaces onctueuses	0.19
	Surfaces enduites d'huile ou de saindoux	0.11

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

III_ Coefficients de la formule de la résistance au roulement_.

Fer sur sapin	Largeur de contact	0.020	$\delta = 0.00242$
Chêne sur peuplier	"	0.200	$\delta = 0.000876$
		0.100	$\delta = 0.00119$
		0.050	$\delta = 0.00189$
Chêne sur cuir	Largeur de contact	0.216	$\delta = 0.00121$
Chêne sur plâtre	id	0.120	$\delta = 0.00082$
Fonte sur fer	Surfaces brutes		$\delta = 0.0035$
id	Surfaces polies		$\delta = 0.0012$
Roue en fer sur route empierrée			$\delta = 0.0145$
Roue en fer sur route pavée			$\delta = 0.0090$

IV_ Rapport du tirage à la charge dans la traction des véhicules.

	Chariots au pas	Charrettes au pas	Voitures suspendues au trot
Accotements en terre en très-bon état	0.031	0.024	0.038
Accotements solide recouvert de gravier	0.094	0.080	0.116
Sol en terre ferme recouvert de gravier	0.091	0.080	0.073
Sol en terre ferme recouvert de sable	0.110	0.085	0.138
Route en empierrement en très-bon état	0.014	0.014	0.024
Route en empierrement, humide	0.024	0.019	0.037
Route en empierrement, dégradée	0.059	0.024	0.044
Route en empierrement, très mauvaise,	0.066	0.052	0.082
Route pavée ordinaire	0.014	0.011	0.026
Route pavée couverte de boue	0.018	0.013	0.020
Tablier de pont en madriers	0.020	0.014	0.024
Bitume comprimé. Omnibus chargé en été		0.0300	
" " " en hiver		0.0096	
Rails en fer-plat, couverts de poussière		0.0102	
" sans poussière		0.0032	
" mouillés d'eau		0.0033	
Rails américains, fermant sillon		0.0085	

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Rails à champignons, boîtes à graisse, train à grande vitesse . 0.0072
" boîtes à huile " 0.0052
" boîtes à galets " 0.0087

V – Coefficients A et B de la formule de la raideur des cordes.

Cordes Blanches — Cordes Goudronnées

Diamètres	Valeur de la raideur naturelle A	Valeur de la raideur proportionnelle B	Diamètres	Valeur de la raideur naturelle A	Valeur de la raideur proportionnelle B
0.m089	0.K0106038	0.002678	0.m0105	0.K 021201	0.00251299 2
0.0110	0.0225207	0.003267	0.0129	0.041143	0.003769488
0.0127	0.0388476	0.004356	0.0149	0.067314	0.005025984
0.0141	0.0595845	0.005445	0.0167	0.097712	0.006282480
0.0155	0.0847314	0.006534	0.0183	0.138339	0.007538976
0.0168	0.1142883	0.007623	0.0198	0.183193	0.008795472
0.0179	0.1482552	0.008712	0.0211	0.234276	0.010051968
0.0190	0.1866321	0.009801	0.0224	0.291586	0.011308464
0.0200	0.2294190	0.010890	0.0236	0.355125	0.012564963
0.0210	0.2766159	0.011979	0.0247	0.424891	0.013821456
0.0220	0.3282228	0.013068	0.0258	0.500886	0.015077952
0.0228	0.4842397	0.014157	0.0268	0.534108	0.016334448
0.0237	0.5446666	0.015246	0.0279	0.671559	0.017590944
0.0246	0.6095035	0.016335	0.0289	0.766237	0.018847440
0.0254	0.6787504	0.017424	0.0298	0.867144	0.020103936
0.0261	0.7524075	0.018513	0.0308	0.974278	0.021360432
0.0268	0.7304742	0.019602	0.0316	1.078641	0.022616928
0.0276	0.8129511	0.020691	0.0326	1.207231	0.023873424
0.0283	0.8998380	0.021780	0.0334	1.333050	0.025129920

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

VI. — Coefficients de frottement des courroies et des cordes sur des tambours.

Courroies ordinaires sur tambour en bois	$f = 0.47$
Courroies neuves sur tambour en bois	$f = 0.50$
Courroies ordinaires sur poulie en fonte	$f = 0.28$
Courroies humide sur poulie en fonte	$f = 0.38$
Corde blanche sur poulie en bois	$f = 0.22$

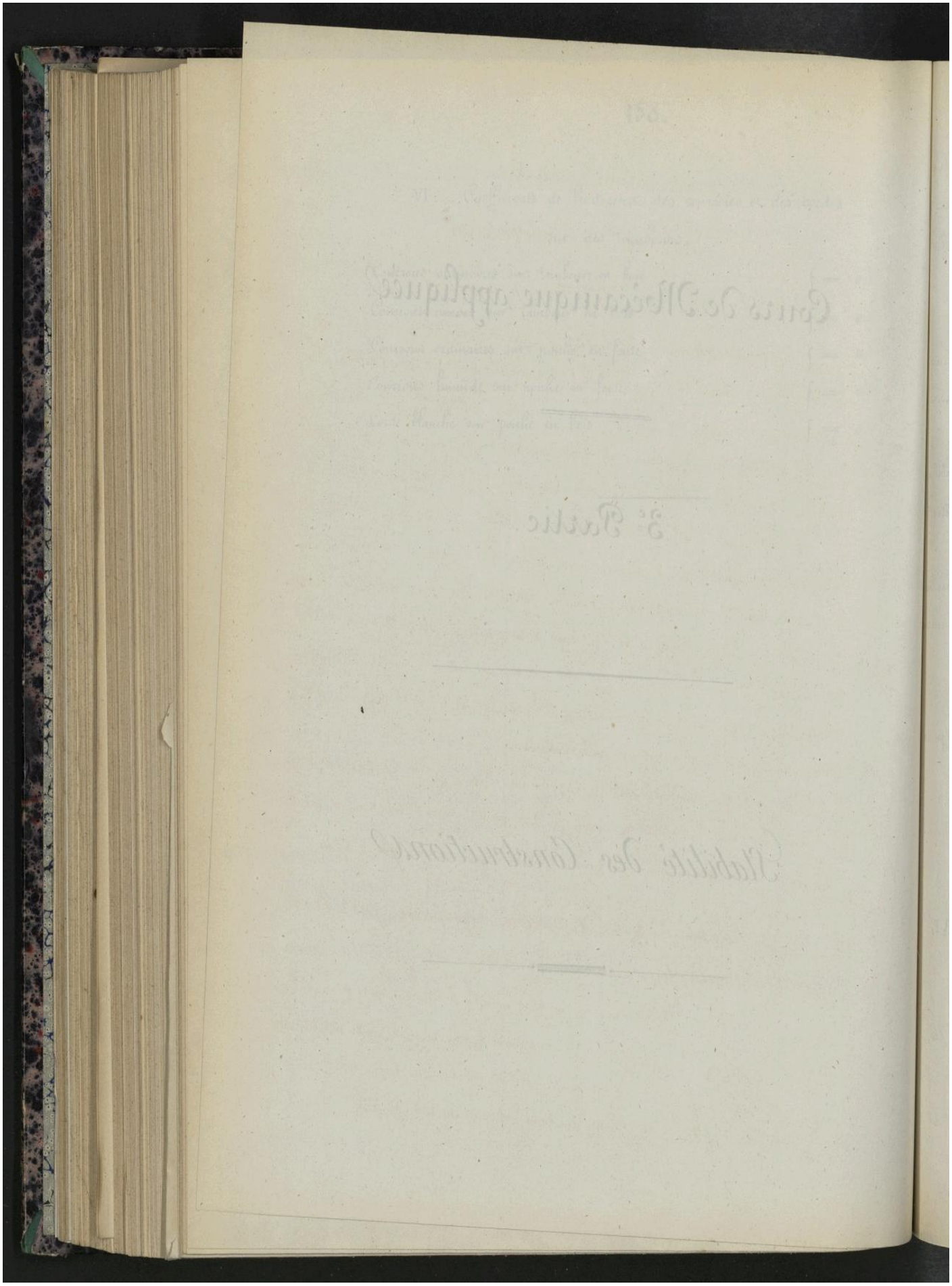
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cours de Mécanique appliquée

3e Partie.

Stabilité des Constructions

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Troisième partie.

Stabilité des Constructions

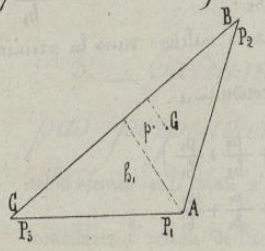
---

1. — *Considérations générales.* — Les principes généraux de la mécanique d'un système matériel permettent de résoudre le problème de la stabilité des constructions. On comprend, en effet, que pour assurer cette stabilité il suffit que toutes les forces qui sollicitent le système se fassent équilibre, en tenant compte, toutefois, des conditions de liaison ou d'indépendance de toutes les parties de la construction entr'elles.

En ce qui concerne les constructions, le mot **stabilité** doit être compris dans toute la rigueur grammaticale, et il convient de remarquer que l'on ne pourrait se contenter, dans les applications, des conditions de l'équilibre stable que l'on considère quelquefois, et qui consiste dans la certitude du retour d'un corps à sa première position dont on l'aurait d'abord écarté ; il faut, au contraire, que cette position soit assurée d'une manière invariable, malgré l'action des forces extérieures que l'on peut prévoir et qu'il faut ainsi faire entrer dans les conditions de premier établissement.

Le cas le plus simple de **stabilité** est celui dans lequel on a à considérer un solide pesant, reposant sur un plan horizontal par trois points. Après avoir traité ce premier cas nous examinerons l'influence du nombre et de la disposition des points d'appui.

2. — *Stabilité d'un solide pesant reposant par trois points sur un plan.* — Soient ABC ces trois points que nous supposerons situés sur un plan horizontal, et soit G le point en lequel la verticale du centre de gravité du solide vient rencontrer ce même plan ; nous supposerons, en premier lieu, que ce point est dans l'intérieur du triangle ABC.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il est d'abord évident que le poids P du corps devra, pour la stabilité, être équilibré par l'ensemble des trois réactions normales au plan de repos en développés successivement aux points ABG ; Si nous désignons par P_1, P_2, P_3 ces réactions il faudra donc pour l'équilibre que l'on ait :

$$P = P_1 + P_2 + P_3 .$$

et si nous pouvons déterminer individuellement chacune des forces qui figurent dans le second membre de la précédente relation nous connaîtrons par cela même les pressions déterminées par le corps sur le plan de repos

Pour arriver à cette détermination il suffit de remarquer que la condition de stabilité ou d'équilibre exige aussi que le corps ne puisse tourner autour d'aucune des trois arêtes formées par les côtés du triangle ABG

En ce qui concerne la rotation autour du côté BG il faudra donc que la somme des moments des quatre forces soit nulle autour de BG ; mais comme les forces P_2 et P_3 rencontrent cette droite, cette condition se réduit à

$$P_1 h_1 = P p_1 .$$

si on désigne par h_1 la hauteur du sommet A par rapport au côté BG, et par p_1 la perpendiculaire abaissée du point G sur ce même côté

On aurait de même, en employant des notations analogues

$$P_2 h_2 = P p_2$$

$$P_3 h_3 = P p_3$$

ce qui donne quatre équations entre le poids donné P et les trois réactions inconnues P_1, P_2, P_3.

Les trois dernières équations donnent individuellement :

$$P_1 = P \frac{p_1}{h_1} \qquad P_2 = P \frac{p_2}{h_2} \qquad P_3 = P \frac{p_3}{h_3}$$

et il est facile de voir que la substitution de ces trois valeurs dans la première relation la satisfait complètement . Cette substitution conduit à

$$P = P \left(\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} \right)$$

ou

$$1 = \frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

condition qui se vérifie si l'on remarque que l'on peut écrire successivement

$$2T = ab_1 = bb_2 = cb_3$$

et

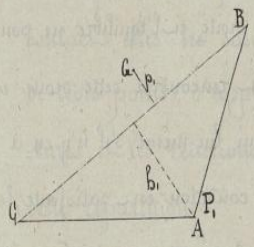
$$2T = ap_1 + bp_2 + cp_3$$

Les valeurs de a, b et c tirées des premières relations et substituées dans la dernière donnent en effet :

$$2T = 2T\left(\frac{p_1}{b_1} + \frac{p_2}{b_2} + \frac{p_3}{b_3}\right)$$

Notre identité se trouve ainsi vérifiée, et nous pouvons en conclure que nos quatre conditions d'équilibre conduisent bien réellement aux valeurs des trois réactions P_1 P_2 P_3, et qu'ainsi le problème est parfaitement déterminé.

Dans ce qui précède nous avons supposé que la verticale du centre de gravité du solide venait rencontrer le plan d'appui à l'intérieur du triangle ABG ; s'il n'en était pas ainsi la même méthode conduirait à reconnaître que le corps sollicité seulement par l'action de la pesanteur, ne saurait être dans une position stable, car le poids P du solide ne saurait être équilibré par P_1, quant à la rotation autour du côté BG, que si P_1 était négatif c'est-à-dire si l'on pouvait, par un moyen quelconque, retenir le point A sur le plan d'appui.



Nous sommes ainsi conduits, pour le cas de non adhérence entre le solide et le plan, à reconnaître qu'il n'y a de stabilité possible qu'à la condition que le point G vienne percer le plan à l'intérieur, et non à l'extérieur, du contour ABG formé en joignant les points d'appui par des lignes droites.

3. — *Extension au cas où la force motrice n'est pas perpendiculaire au plan.* — Les conditions de stabilité resteraient les mêmes si le plan n'était pas horizontal, et si en même temps, au lieu d'avoir à considérer l'action de la pesanteur, le corps dont on veut assurer la stabilité était

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pressé contre ce plan, par une force normale à sa direction et dirigée vers lui.

Si cette force avait une autre inclinaison par rapport au plan on remarquera que la même méthode sera encore applicable et qu'elle conduira toujours à ce résultat qu'il est indispensable que la direction prolongée de la force extérieure vienne rencontrer le plan dans l'intérieur du contour formé par les points d'appui.

Mais l'inclinaison de la force P, qui se décompose toujours en trois forces P, P, P, parallèles à sa direction, pourrait alors être telle, que la composante tangentielle de cette force fut plus grande que les résistances de frottement, que le déplacement du corps pourrait faire naître, sur le plan, et nous voyons ainsi que nous aurons à examiner quelques conditions de stabilité relative à cette inclinaison.

Dans le cas où plusieurs forces extérieures, au nombre desquelles l'action de la pesanteur, viendraient solliciter le solide, nous pourrions toujours concevoir que ces forces soient représentées par une force unique à laquelle toutes les observations précédentes seront immédiatement applicables.

11. — *Cas où le nombre des points d'appuis est moindre que trois.* — Si le nombre des points d'appui est moindre, le triangle ABC considéré au numéro précédent, se réduit à une droite, et l'équilibre ne pourrait exister si la résultante des forces extérieures ne venait rencontrer cette droite entre les points d'appui, s'il y en a deux, ou au point d'appui lui-même, s'il n'y en a qu'un seul.

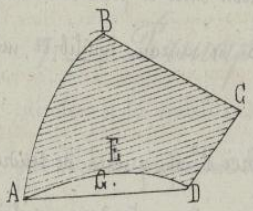
On ne saurait même dire, que si cette condition est satisfaite, le solide est dans une position vraiment stable, puisque le moindre mouvement, même accidentel, déterminé par un tassement, un simple ébranlement ou toute autre circonstance, aurait évidemment pour effet de placer le solide dans une position d'instabilité manifeste.

C'est pour obvier à ce danger d'instabilité que, même dans le cas où le corps repose sur son appui par un plus grand nombre de points ou même par une surface continue il est convenable de se tenir un peu éloigné de la limite de stabilité correspon-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans un cas où la résultante des forces extérieures passerait par l'un des points du contour précédemment indiqué.

5.— *Cas où le nombre des points d'appui est plus grand que trois.* — Quand il y a plus de trois points on peut toujours construire un polygone convexe comprenant tous les points d'appui, et les considérations déjà présentées exigent, que pour assurer la stabilité, au point de vue de la rotation autour de l'un quelconque des côtés du polygone, il est nécessaire que la résultante de toutes les forces qui sollicitent le solide rencontre, comme précédemment, le plan de repos dans l'intérieur du polygone.



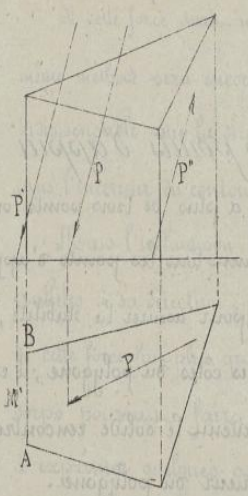
Si la surface de contact était, par exemple, représentée par l'intérieur du contour ABCD, sur lequel nous avons mis des hachures, la condition précédente serait encore satisfaite si cette résultante passait par le point G, compris entre la limite GED de cette surface de contact et la droite AD, qui joint les deux extrémités de cette partie concave AED.

Quant aux pressions exercées sur les différents éléments de la surface de contact, elles ne sauraient être calculées avec certitude dès qu'il y a plus de trois points d'appui des seules conditions d'équilibre entre les forces extérieures et les réactions, et il faudra rechercher spécialement les règles de cette répartition.

6.— *Règles générales de la stabilité d'un solide reposant sur un plan.* — Ces considérations préliminaires nous permettent déjà d'envisager les diverses conditions nécessaires pour que la stabilité d'un corps qui repose sur un plan soit complètement assurée.

S'il s'agit, par exemple, d'un prisme quadrangulaire, tel que celui qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



est représenté par ses deux projections sur la figure, et si nous considérons une force P d'inclinaison constante, mais de position variée, il résulte de ce qui vient d'être dit, que le prisme ne pourra tourner autour de son arête inférieure lorsqu'il sera sollicité par une seule force P rencontrant le plan de support dans l'intérieur du périmètre de la surface de contact en un point désigné par M. Il y aura certainement rotation si la force P est remplacée par une autre force P', égale et parallèle, mais dont le pied tomberait en M' en dehors du périmètre de contact; car, si nous supposons qu'il n'y a aucune liaison entre le plan et le solide soumis à l'action de la force P', aucune des réactions normales ne saurait équilibrer, même partiellement, cette force P'.

Il en serait encore de même pour la force P'' si, au lieu de tendre à presser le corps sur le plan, cette force unique agissait en sens contraire tendant à éloigner ce corps du plan sur lequel il faut le maintenir.

La condition relative à la position du point M n'exprime toutefois rien autre chose que la condition suffisante pour que le corps livré à l'action de la force P ne tourne autour d'aucun des points du périmètre, c'est-à-dire pour qu'il ne puisse faire aucun mouvement de rotation.

Les considérations relatives au frottement conduisent à d'autres conditions de stabilité. On sait, en effet, qu'il doit se développer en chaque point de contact des réactions normales et des réactions tangentielles qui bien qu'inconnues, quant à leurs intensités, n'en sont pas moins liées par la relation

$$F = fN$$

déduite des lois du frottement. Les réactions N ne s'opposeraient pas au déplacement du corps par glissement, mais il en est autrement des réactions tangentielles F; les unes et les autres sont déterminées par les résultantes des forces extérieures qui pressent le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

corps contre le plan, et nous savons même que le glissement est impossible si cette résultante fait avec la normale au plan un angle plus petit que l'angle de frottement que nous continuerons à désigner par α. Nous devons donc admettre que sous le rapport du glissement le corps est dans une situation stable, lorsque la résultante de tous les efforts extérieurs fait un angle plus petit que α avec la normale au point de contact.

Enfin, il sera encore nécessaire, pour que la construction se maintienne dans un état permanent, que la pression par centimètre carré ne dépasse en aucun point n kilogrammes, le nombre n étant donné pour chaque nature des matériaux par les tables des coëfficients de résistance.

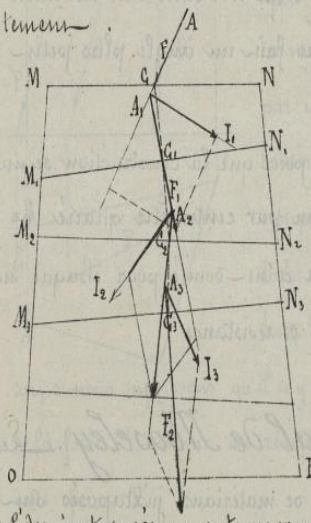
7. — *Principe général de Moseley.* — Les conditions générales de la stabilité d'un système de matériaux juxtaposés ont été exprimées par M^r le professeur Moseley, sous la forme la plus complète, de la manière suivante.

Considérons un massif de maçonnerie quelconque MNPQ ; supposons-le décomposé en parties distinctes et indépendantes 1 2 3 4 5 .... par des plans également quelconques formant comme une série de plans de joints consécutifs, indiqués par les lignes M_1N_1, M_2N_2, ... et proposons-nous de déterminer la loi générale à laquelle doivent obéir les forces qui sollicitent ce massif, pour qu'il soit dans des conditions suffisantes de stabilité.

Soit F la résultante des forces extérieures transmises à sa surface en G son point d'application. Ce solide, sollicité par la force F, est en outre, soumis à des forces extérieures particulières, et soit I, la résultante de ces dernières forces. Si la stabilité de la maçonnerie existe, MNM$_1$N$_1$ sera en équilibre ; par conséquent F et I$_1$ se rencontreront en un point A$_1$ tel que leur résultante F$_1$ soit égale, de même direction et de sens opposé à la résultante des réactions exercées par la partie M$_1$N$_1$ M$_2$N$_2$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

F_1 coupera par conséquent le joint M_1N_1 en un certain point G_1 qui devra être situé à l'intérieur du joint M_1N_1 ; il faudra de plus, pour que tout effet de glissement soit évité, que F_1 fasse avec la normale en G_1 un angle plus petit que l'angle α du frottement.



Pareillement, si nous composons F_1 qui exerce son action sur le solide N° 2, avec I_1 pour résultante des autres forces extérieures qui agissent sur cette portion, la résultante F_2 devra rencontrer le joint M_2N_2 à l'intérieur de la maçonnerie pour que $M_1N_1M_2N_2$ soit en équilibre ; en outre l'angle de F_2 avec la normale devra être plus petit que l'angle de frottement. En continuant de la sorte pour tous les solides juxtaposés, nous trouverons des résultantes successives $F_3 F_4 F_5$ .... qui devront remplir les conditions indiquées.

C'est en cela que consiste le principe de Moseley que nous pourrons énoncer d'une manière plus claire et plus concise, à l'aide des définitions suivantes.

8.___ *Ligne des pressions*.___ Si l'on joint successivement les points $GG_1G_2G_3$ d'intersection des résultantes partielles FF_1F_2 avec les joints, on forme une ligne, appelée par Moseley, *ligne des résistances*, mais désignée maintenant sous le nom de *ligne* ou de *courbe des pressions*.

Outre cette ligne on en considère encore une autre.

9.___ *Courbe des directions*.___ Les portions AA_1, A_1A_2, A_2A_3 .... des résultantes partielles FF_1F_2, ... qui rencontrent les joints aux points $G_1G_2G_3$; forment une ligne appelée *ligne des directions*

Lorsque la ligne des pressions devient une courbe continue, celle des directions

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

devient elle-même continue, et nous aurons à les considérer l'une et l'autre dans un certain nombre d'applications.

9. — Enoncé du principe général. — D'après la nature des deux lignes que nous venons de définir il est facile de voir que le principe général de Moseley peut s'énoncer de la manière suivante.

Pour qu'un système de matériaux juxtaposés et sans liaison entr'eux soit dans la condition d'une complète stabilité :

1° La courbe des pressions doit couper tous les joints de l'intérieur de la masse sans en éviter aucun ;

2° La ligne des directions doit former avec la normale en chaque point d'intersection avec les joints, un angle plus petit que l'angle de frottement.

Nous ajouterons à ces deux conditions, qui seraient suffisantes, si la résistance de la matière était indéfinie, la règle suivante tirée de la considération de la répartition des pressions.

3° Il faut encore que la pression en chaque point ne dépasse pas les limites indiquées par la théorie de la résistance des matériaux

Dans l'étude des conditions de stabilité des maçonneries on applique directement ces règles en faisant abstraction des liaisons produites par les mortiers, et cette hypothèse rend la stabilité encore plus efficace.

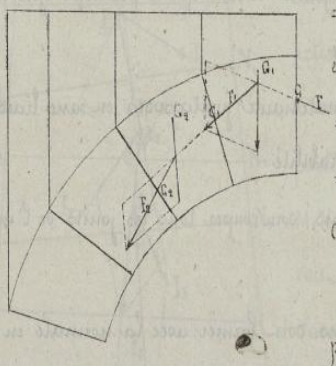
10. — Application à une série de voussoirs formant voute.

Soit un certain nombre de voussoirs formant voute et voyons si les conditions de stabilité sont remplies. Nous supposerons que nous connaissons le point d'application G de la force F, qui sollicite le premier voussoir, sa direction et son intensité. Le voussoir est en outre soumis à son poids et à celui de la maçonnerie supérieure ; et pour tenir compte de cette surcharge on admet généralement qu'elle agit comme

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

si chaque voussoir supportait le poids de la partie qui est placée au-dessus de sa face extérieure.

Soit G_1 le centre de gravité de l'ensemble du premier voussoir et de sa surcharge; prolongeons la force F, et composons cette force avec le poids appliqué en G_1; nous aurons une résultante F_1 qui rencontrera le joint M,N, en un point G_1 de la courbe des pressions. En opérant de même pour le voussoir suivant, F se trouvant remplacé par F_1, nous aurons un second point G_2 de la courbe des pressions.

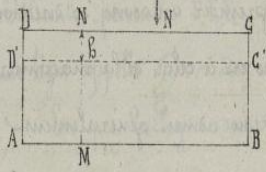


Cette ligne se déterminera ainsi de proche en proche et on verra si elle satisfait aux règles de Mosely

11. — Mode de répartition des pressions. — Pour qu'il fut possible de reconnaître si une construction donnée est bien établie sous le rapport de la résistance des matériaux, il serait nécessaire d'être fixé sur la loi de la répartition des pressions entre deux corps pressés l'un sur l'autre et sous ce rapport nous sommes encore réduits à faire une hypothèse que l'on désigne sous le nom de loi du trapèze.

Bien que cette hypothèse n'ait pu être encore vérifiée que dans ses conséquences, c'est-à-dire par l'observation de la stabilité des constructions pour lesquelles la loi du trapèze indiquerait que cette stabilité doit exister, nous verrons cependant qu'elle n'est pas entièrement gratuite et qu'on peut la déduire d'une manière très simple de la théorie de la flexion d'un prisme chargé dans le sens de sa longueur.

12. — Enoncé de la loi dite du trapèze. — Si nous considérons un solide rectangulaire ABCD, dont la figure indique le profil et auquel nous supposons un mètre de profondeur; si ce solide est pressé par une charge N uniformément répartie



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans toute cette profondeur la loi dite de trapèze consiste à admettre que la section ABCD tendra à se déformer de manière que la face CD tout en restant plane vienne s'incliner par rapport à sa position primitive et prendre une position telle que C'D.

Cette hypothèse revient à admettre que chacune des hauteurs primitives telle que MN se réduit d'une hauteur h qui, dans les limites d'élasticité de la matière est nécessairement proportionnelle à la pression exercée sur la file de molécules MN

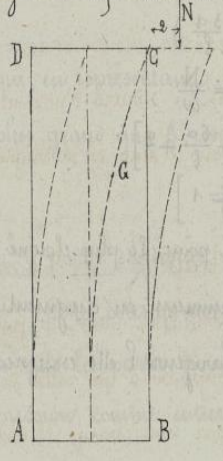
Cette conséquence de la première hypothèse à conduit à désigner la loi de la répartition des pressions sous le nom de loi du trapèze, parce que la pression en chaque point doit ainsi être proportionnelle à la hauteur correspondante, mesurée dans le trapèze CDC'D'.

13. ___ Déduction tirée de la théorie de la flexion. ___ La loi dite de trapèze peut être regardée comme une déduction de la théorie de la flexion d'un prisme rectangulaire ABCD, simplement posé sur un plan AB, et sollicité par une force N, parallèle à son axe.

Nous avons vu, en effet, que l'on était conduit pour ce prisme à la formule

$$R = \frac{vy}{I} + \frac{N}{\omega} = \frac{v}{I} \times N\,(b + f - y) + \frac{N}{\omega}.$$

dans laquelle v. I. N et ω ont la signification ordinaire, et dans laquelle y, f et b représentent respectivement l'ordonnée quelconque d'un point o de l'axe



après la déformation, f la flèche au sommet correspondante, et b la distance de l'axe au point d'application de la force normale N.

Lorsque le solide est très court f et y peuvent être considérés comme négligeables par rapport à b, et la formule se réduit à

$$R = \frac{vNb}{I} + \frac{N}{\omega}$$

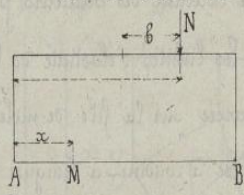
Pour appliquer cette formule à la recherche de la répartition

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des pressions R par mètre quarré sur un point quelconque M de la base AB définie par son abcisse x, nous ferons :

$$b = a - \frac{l}{2} \qquad v = x - \frac{l}{2}$$

en en observant que le solide a une profondeur de un mètre nous



aurons :

$$I = \frac{1}{12} l^3 \times 1 = \frac{1}{12} \omega l^2$$

La substitution de ces diverses valeurs donne :

$$R = \frac{N}{\omega}\left[\frac{12\left(x-\frac{l}{2}\right)\left(a-\frac{l}{2}\right)}{l^2} + 1\right] =$$

$$= \frac{N}{\omega}\left[\frac{12ax}{l^2} - \frac{6(x+a)}{l} + 4\right] =$$

$$= \frac{2N}{\omega}\left[\frac{6ax}{l^2} - \frac{3(x+a)}{l} + 2\right]$$

Cette formule est celle de la loi de trapèze, puisque l'on voit immédiatement que la pression R par mètre carré varie comme une fonction du premier degré de la variable x ; la fonction en R en x serait représentée par une ligne droite inclinée par rapport à l'axe AB des abcisses.

11. — Discussion de la formule. — Si l'on donne à x différentes valeurs parmi lesquelles nous choisirons les plus importantes, on trouve pour R les valeurs correspondantes qui seront :

$$x = 0 \qquad R = \frac{2N}{\omega}\left(2 - \frac{3a}{l}\right)$$

$$x = \frac{1}{2} l \qquad R = \frac{2N}{\omega} \times \frac{1}{2} = \frac{N}{\omega}$$

$$x = a \qquad R = \frac{2N}{\omega}\left[\frac{6a^2}{l^2} - \frac{6a}{l} + 2\right]$$

$$x = l \qquad R = \frac{2N}{\omega}\left[\frac{3a}{l} - 1\right]$$

L'origine des coordonnées étant prise au point le plus éloigné de la direction de la force normale N, la valeur de R va constamment en augmentant, en il convient de remarquer qu'au milieu de la largeur l elle est précisément égale à la pression moyenne $\frac{N}{\omega}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La dernière valeur de R qui correspond à $x = l$, est celle qui nous servira le plus dans les applications aux constructions en maçonnerie.

La formule générale se modifie quant à ses coefficients quand la valeur de a varie, et nous devons à ce point de vue, faire encore quelques remarques.

Les valeurs de R sont toujours positives quand $a > \frac{2}{3} l$, et elles vont nécessairement en augmentant depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$.

Pour $a = \frac{2}{3} l$, la valeur de R correspondant à $x = 0$, devient $R = 0$; celle qui correspond à $x = l$ est $R = \frac{2N}{\omega}$; c'est-à-dire que la pression est nulle sur le bord le plus éloigné de la direction de la force N, et qu'elle est sur l'autre bord double de la pression moyenne.

La répartition des pressions sera évidemment symétrique pour $a = \frac{1}{3} l$, et les conditions précédentes suffisent pour calculer toute pression individuelle dans le cas où la valeur de a est comprise entre $\frac{1}{3} l$ et $\frac{2}{3} l$, c'est-à-dire dans le deuxième tiers de la largeur du solide.

15. ___ Cas où le point d'application de la force n'est pas placé dans le second tiers de la largeur. ___ Si $a < \frac{1}{3} l$, les considérations précédentes annuleraient les valeurs de p, pour un point donné par la relation :

$$a - \frac{3a}{l} + \frac{3x}{l}\left(\frac{2a}{l} - 1\right) = 0$$

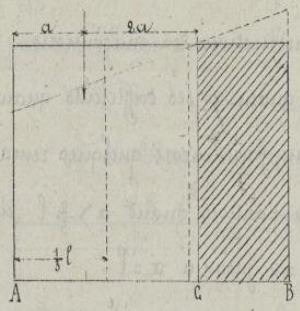
qui, en représentant a par $a = \frac{l}{3} - \frac{l}{m}$, m devant être un nombre positif plus grand que 3, devient

$$\frac{x}{l} = \frac{\frac{3a}{l} - 2}{3\left(\frac{2a}{l} - 1\right)} = \frac{1 - \frac{3}{m} - 2}{2 - \frac{6}{m} - 3} = \frac{m + 3}{m + 6}$$

et à partir du point x ainsi déterminé les pressions deviendraient négatives.

Cette conséquence ne pouvant être admise, on fait dans ce cas, abstraction de toute la partie du solide située au delà de la largeur 3a, et l'on considère la pression comme entièrement répartie sur la partie restante, dans les conditions

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



mêmes qu'indiquent les formules qui viennent d'être calculées.

On a ainsi

$$p' = \frac{2P}{\Pi'} \qquad p'' = 0$$

en cette pression p' est la plus grande qui puisse s'exercer entre les deux surfaces en contact.

Dans cette dernière valeur, Π' représente la surface rectangulaire qui se projette en AC, en désignant par b sa largeur dans le sens perpendiculaire au tableau, on a :

$$\Pi' = AC \times b = 3ab.$$

et par suite

$$p' = \frac{2P}{\Pi'} = \frac{2P}{3ab}.$$

Dans la plupart des applications, on fait $b = 1$ mètre, et la pression maximum p' est alors donnée par

$$p' = \frac{2P}{3a}$$

Nous aurons ultérieurement à indiquer comment on s'assure que cette pression p', par mètre carré est toujours inférieure à une pression donnée R, dépendant de la nature des matériaux en contact.

16. ___ **Stabilité des voutes.** ___ Les règles si générales de Mr Moseley sembleraient devoir résoudre avec facilité les questions qui se rattachent à la stabilité des voutes, mais il faut remarquer qu'elles supposent la connaissance complète des forces qui agissent sur l'un des plans de joint et c'est précisément cette connaissance qui nous fait complétement défaut dans une voute fermée dont aucune des faces de joint n'est soumise exclusivement à l'action de forces extérieures parfaitement déterminées.

Aucune question n'a davantage occupé l'attention des géomètres et elle a été

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

soumise au calcul par plusieurs procédés différents dans lesquels on est obligé de faire presque toujours abstraction de quelques-unes des conditions matérielles de la construction.

Avant Coulomb, on avait déterminé les dimensions des maçonneries d'après l'observation des constructions existantes, et en considérant la clef ou les voussoirs voisins comme pouvant glisser entre les plans de joint adjacents, à la manière d'un coin.

Dans cette première théorie on comprenait déjà que la voute devait, dans le plan de naissance, tourner autour d'une arête de l'extrados pour que le coin puisse se déplacer.

Plus tard on a considéré les voutes comme présentant trois sections dangereuses au sommet, à la naissance et sur l'un des joints intermédiaires, et en les assimilant alors à des polygones articulés, on a cherché à déterminer les conditions d'équilibre des diverses parties en lesquelles on estimait qu'elles pouvaient se fractionner.

Enfin, on pourrait encore étudier les voutes, en tenant compte des forces moléculaires développées par la déformation, si on les assimilait à une poutre courbe soumise à une charge qui tendrait à la faire fléchir.

Chacun de ces procédés fait abstraction des défauts d'exécution des plans de joint et des défauts d'homogénéité de la pierre; les uns négligent le frottement, les autres l'adhérence ou le défaut d'adhérence des matières, ou les conditions de la répartition des pressions, et les seules notions d'un emploi usuel sont, à cet égard, celles que l'on a déduites des principes de Mr Mosseley.

Beaucoup de travaux analytiques ont été publiés sur cette même question: les plus importants sont ceux de Mrs Lamé et Clapeyron (1823), de Mr Jean Villarceau (1851), de Mr Carvallo (1852); ils peuvent tous être consultés avec intérêt mais les méthodes pratiques de la vérification de la stabilité des voutes sont les méthodes graphiques parmi lesquelles celle de Mr Méry était restée jusque dans ces derniers temps, la plus importante.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

17. — Vérification de la stabilité d'une voute. — Pendant la construction d'une voute, les voussoirs reposent sur un cintre et c'est seulement au moment où le décintrement a lieu que ces voussoirs se trouvent pressés les uns contre les autres de manière à déterminer des réactions plus ou moins grandes, en donnant les intensités comme les directions varient d'un instant à l'autre pendant cette période décisive du travail.

Si les maçonneries ont été bien exécutées, si le décintrement a lieu au moment convenable et avec toutes les précautions nécessaires, ce jeu variable des réactions qui se produisent successivement au moment où la voute est livrée à elle-même se produit sans qu'il y ait extérieurement de variations notables dans la forme et la disposition des voussoirs, et ce jeu des réactions sera arrêté aussitôt que toutes les conditions d'une entière stabilité seront satisfaites.

Il résulte de ces considérations que la construction sera stable, si pendant que les réactions se modifient il se rencontre une combinaison pour laquelle toutes les conditions de stabilité seront réalisées, à savoir :

1°— Qu'une courbe de pression pourra exister de manière à être entièrement comprise dans l'intérieur de la masse de la maçonnerie.

2°— Que sur aucun joint la résultante des forces extérieures ne fera avec la normale un angle plus grand que l'angle de frottement.

3°— Qu'aucune pression normale sur un point quelconque ne sera supérieure à n kilogrammes par centimètre carré.

Puisque la voute sera stable si ces trois conditions sont satisfaites nous nous trouvons conduits à rechercher si réellement de pareilles conditions pourront se produire pendant le jeu des réactions.

La voute sera de fait instable jusqu'au moment où l'on rencontre cette solution. A partir de ce moment elle sera stable au contraire et la question de la stabilité des voutes se trouve ainsi ramenée à une vérification : elle est ramenée à la recherche des réactions

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

compatibles avec les conditions precedentes. S'il n'etait possible de satisfaire à la premiere condition qu'à l'aide de réactions trop grandes pour satisfaire à la troisième, par exemple, la voute se trouverait dans une position éminemment dangereuse et l'exécution n'en devrait pas être tentée

18. — Centres et courbes de pression. — Aux indications que nous avons données, dans le sens général, sur les propriétés de la courbe de pression, nous ajouterons ici que le centre de pression est le point en lequel la réaction qui s'exerce entre deux corps, ou, ce qui revient au même, la résultante de toutes les autres actions exercées sur l'un d'eux, vient percer la face de contact.

Si l'on imagine des faces de joint très-rapprochées, il y aura, pour chacune d'elles, un centre de pression, et la courbe qui est le lieu de tous ces centres, est ce que l'on appelle la courbe de pression

La question de la stabilité des voutes se trouve, par la considération de cette courbe, ramenée à la question de savoir si l'on peut tracer une courbe de pression compatible avec la condition d'équilibre, c'est-à-dire, une courbe de pression, rencontrant toutes les lignes de joint dans l'intérieur même de la masse.

Peu d'années après le travail de Mr Moseley, Mr Méry a été conduit par des considérations analogues, à étudier la forme que pouvait prendre la courbe des pressions dans un grand nombre de voutes existantes, et il en a déduit une méthode générale de vérification qui a été adoptée d'une manière générale.

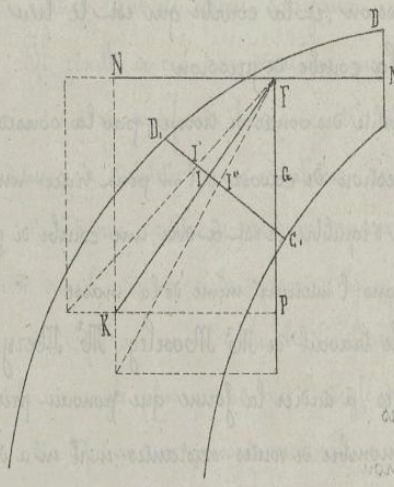
Avant de nous occuper de cette méthode, nous devons remarquer qu'on pourra, en général, construire un grand nombre de courbes de pression en faisant à priori une hypothèse sur l'intensité la direction et le point d'application de la force qui exerce son action sur l'une quelconque des faces de joint, ou en faisant une autre hypothèse équivalente.

Si l'on fait varier ces quantités, choisies arbitrairement, autant que le permet

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans les données de la construction, on obtiendra autant de courbes de pression que l'on voudra, et l'on pourra reconnaître s'il en est parmi elles quelques-unes qui soient entièrement comprises dans le massif de maçonnerie ; mais il ne sera pas inutile de voir comment la forme de ces courbes variera en même temps qu'on fera varier les principaux éléments de la question.

19. — Influence de la poussée et de la charge sur la forme de la courbe de pression. — Etant donnés les profils d'une voute à l'intrados et à l'extrados, si nous faisons varier la poussée ou la charge sur le joint de clef qui diviserait la voute en deux parties symétriques, il est facile de voir quelles seront les modifications des courbes de pression correspondantes.



Si la force normale N est donnée, ainsi que son point d'application M, pour obtenir un point de la courbe de pression il faudra considérer en GD un second plan de joint, déterminer le centre de gravité G de la portion de voute comprise entre le nouveau plan de joint et la clef, mener la verticale GΓ de ce point, puis chercher la résultante des deux forces N et P appliquées au point Γ par la construction du rectangle des forces ; le point I où cette résultante coupe la face de joint est le point cherché de la courbe de pression sur le joint GD.

Si P restant constant, la réaction N augmentait, sans que sa direction cessât de passer par le point M, le côté NΓ du rectangle deviendrait plus long, tandis que le côté ΓP reste constant, le point I serait transporté en I';

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce qui revient à dire, en égard à la forme de la voute, que la courbe de pression se relève en tend à s'éloigner de la surface d'intrados.

C'est ainsi que Mr Méry a été conduit à examiner spécialement pour chaque point tel que M, la courbe de plus grande poussée, c'est-à-dire celle qui se rapproche le plus de l'extrados, et la courbe de moindre poussée, c'est-à-dire celle qui se rapproche le plus de l'intrados.

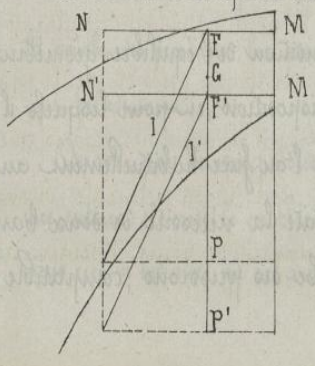
Si l'on pouvait supposer que, sans aucune modification dans le profil, ni dans la position du centre de gravité, le poids P de la partie considérée, vint à augmenter, le point I se transporterait en I', et cette modification apporterait dans la forme de la courbe un changement analogue à celui de la diminution de la poussée.

Si le poids et la poussée augmentaient ou diminuaient dans un même rapport, la courbe de pression ne serait nullement affectée par ce double changement parce que les côtés de chacun des rectangles, tels que NTK, conserveraient alors le même rapport entr'eux.

20.— Influence de la position du point d'application de la poussée sur la forme de la courbe de pression.

— Le déplacement du point M d'application de la poussée N sur le joint de clef, détermine aussi une modification dans la forme de la courbe.

Si M est transporté en M', le rectangle NIP, sans changer de grandeur, sera transporté en N'I'P', et l'on voit sur la figure, que ce déplacement porte le point I en I', beaucoup plus près de la surface d'intrados, et quelquefois même en dehors.



Ces indications sont très-importantes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

au point de vue des diverses courbes de pression que l'on voudra étudier successivement.

Lorsque une première courbe couperait l'intrados, par exemple, il suffirait d'augmenter la réaction N ou de relever son point d'application M, pour faire rentrer la courbe dans le massif, et la vérification pourrait alors consister à s'assurer que la nouvelle courbe pourrait être tracée sans rencontrer nulle part le profil extérieur de la voute.

21. — Méthode de Mr Méry. — Mr Méry, dans son travail sur l'équilibre des voutes en berceau, (annales des ponts et chaussée 1840) n'a pas eu la prétention de traiter la question d'une manière complète et définitive ; il s'est proposé seulement de vérifier la stabilité des voutes par une construction géométrique dispensant de tout calcul, et dont il a pris soin de constater la sûreté par de nombreuses applications.

Son principe est fondé, sur la considération des courbes des pressions, qu'il construit au moyen de deux points, pris arbitrairement sur le joint de la clef et sur le joint de naissance, dans deux positions extrêmes, correspondant au maximum et au minimum de la poussée de la voute.

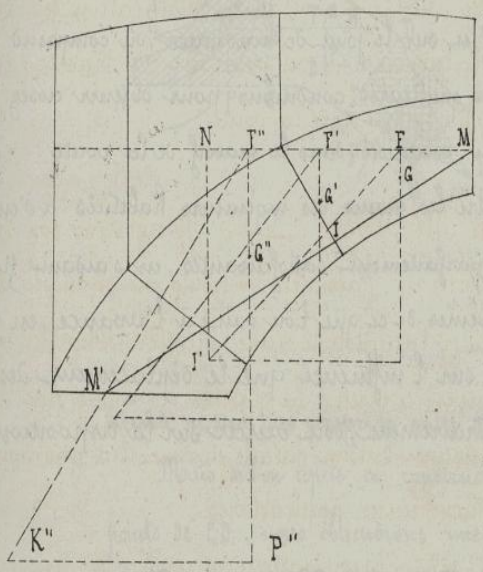
Il fait d'abord l'hypothèse de matériaux qui auraient une résistance infinie, et il fixe ensuite la moindre épaisseur à donner aux voussoirs par la nécessité de maintenir la courbe de pression dans l'intérieur même de la construction.

Pour appliquer cette première condition de l'équilibre géométrique aux matériaux que le constructeur a à sa disposition, et pour lesquels il ne peut dépasser la limite de résistance R, que l'on fixe habituellement au dixième du coëfficient de rupture, Mr Méry constate la nécessité de deux bandes d'élargissement, des deux côtés de la courbe des pressions, compatible avec la con-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

:dition d'équilibre : ces bandes doivent avoir, dans chaque plan de joint, une largeur telle, qu'en tenant compte du mode de répartition de la pression, les points les plus chargés soient encore placés dans des conditions de sécurité convenables.

La figure ci-jointe, montre pour trois plans de joint, les constructions qu'il faut faire, pour déterminer les points correspondants de la courbe de pression. Les centres de gravité G, G', G", sont déterminés en tenant compte de la surcharge de la voute, surcharge que l'on suppose divisée par des plans verticaux passant par les arêtes de l'extrados, ce qui revient à l'hypothèse d'une indépendance abs:olue entre les différentes parties de la surcha:rge, supposées sans cohésion dans le sens horizontal.



Les points M et M' étant choisis à priori respectivement vers l'extrados et l'intrados, la valeur de N se trouve dé:terminée par le côté P'K" du rectangle F"P"K", dont la diagonale passe par le point M' et dont le côté F"P" limité à l'horizontale du point M d'application de la réaction in:connue N, a une longueur F"P", proportionnelle au poids tout entier de la voute et de sa surcharge, le côté F"P" passant d'ailleurs par le centre de gravité G" de la ma:sse totale.

La valeur de N ayant été ainsi déterminée quant aux points extrêmes M, M' de la courbe des pressions, les points intermédiaires I, I' se construisent comme il a été indi:qué précédemment.

On voit, par ce qui précède, que la méthode de Mr. Mery, permet de résoudre avec une entière sécurité le problème de la vérification d'une voute absolument stable, mais rien n'indique qu'on arrive, par son procédé, aux dimensions les plus éco:

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=nomiques, ce qui d'ailleurs n'a une réelle importance, que pour les voutes isolées, dans lesquelles on tient à ne pas dépasser le cube de maçonnerie strictement nécessaire.

En considérant successivement les courbes de pression compatibles avec l'équilibre géométrique, qui passent respectivement par deux points choisis arbitrairement sur le joint de clef et sur le joint de naissance, on comprend que Mr Méry s'est placé dans les meilleures conditions pour obtenir assez rapidement des courbes de pression, comprises dans le massif de la voute.

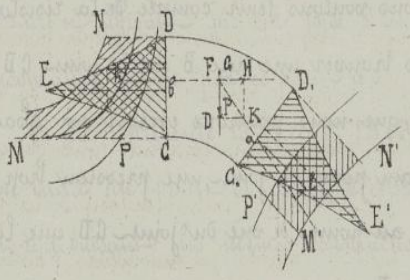
Ce procédé suffit d'ailleurs entre les mains des ingénieurs habitués à s'en servir, pour obtenir des solutions parfaitement satisfaisantes, en s'aidant pour rechercher les conditions extrêmes de ce que l'on sait à l'avance, en vertu des paragraphes précédents, sur l'influence que le déplacement des points M et M' choisis d'abord arbitrairement, doit exercer sur la disposition de la courbe de pression.

22. — Méthode de Mr Durand Claye. — Tout récemment Mr Durand Claye a exposé une méthode qui a le même point de départ que la méthode précédente, mais qui a l'avantage d'éviter les tâtonnements, et de conduire nécessairement à toutes les solutions du problème.

Considérons un voussoir, au centre de gravité G duquel, se trouve appliqué le poids du voussoir en celui de la surcharge. La pression normale inconnue qui s'exerce sur la face CD est plus ou moins grande, et son point d'application plus ou moins éloigné du point G. Parmi toutes les pressions possibles, la méthode de Mr Méry avait pour but de chercher celles qui donnaient une résultante rencontrant le joint suivant, dans l'intérieur même du massif de maçonnerie. Dans la méthode de Mr Durand Claye, au contraire, on élimine successivement toutes les combinaisons qui ne pourraient convenir à la stabilité de la construction.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Voici, d'une manière générale, comment on procède. Prenons un point a sur G.D. et cherchons la pression qui, exercée en un point b de GD, donne avec P, une résultante passant par a. Nous trouvons FH, et nous voyons que toute force plus grande que FH ne donne pas de résultante passant par a. Toutes ces forces seront donc à rejeter. Voyons comment on peut les éliminer. Portons FH. FK et répétons la même construction pour tous les points de GD, en conservant le même point a, nous obtiendrons un certain lieu des points b. Toute force dont l'extrémité ne sera pas comprise entre cette courbe et GD devra être rejetée.



Mais si l'on répète ces constructions, en prenant successivement tous les points de G.D., nous obtiendrons une certaine aire limitée par deux courbes MN et PQ, dont nous aurons à faire connaître les propriétés, mais nous pouvons déjà affirmer, que les ordonnées de l'une, correspondent aux forces maximum qui sont compatibles avec l'existence d'une courbe de pression, passant à l'intérieur du joint G.D. ou, comme nous le dirons fréquemment, compatible avec la condition de l'équilibre géométrique de la voute, celles de l'autre courbe aux forces minimums. Ces pressions ne doivent d'ailleurs être considérées que dans les portions limitées par les horizontales des joints G et D.

Les seules forces compatibles avec la condition d'équilibre géométrique sur le joint GD, sont aussi comprises dans une aire parfaitement définie, que nous désignerons, dans tout ce qui va suivre, par A.

En menant la normale au point a, conjuguée de f, nous pourrons déterminer sur cette normale les extrémités des composantes normales en a, en par-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=mi ces composantes, l'une sera maximum, l'autre sera minimum ; pour ces extrêmités maximum ou minimum, on pourra obtenir des lieux géométriques en, comme précédemment, une aire A, correspondante par rapport au joint C,D,.

Ajoutons que, si nous voulons tenir compte de la résistance limitée des matériaux, nous pourrons trouver une aire B sur le joint GD, limitée par le lieu des poussées maximum, que nous pourrons exercer sur chacun des joints GD, sans déterminer sur aucun point du joint, une pression trop grande. On n'aura donc à considérer, au point de vue du joint GD, que la portion commune aux deux aires A et B.

En déterminant une aire B, semblable à B,, pour le joint C,D,, C, étant la partie commune à A, et B,, on examinera s'il n'y a pas d'élimination à faire entre C et C,; On opérera de même pour tous les joints consécutifs de la voute, par rapport au joint GD à la clef, et on aura finalement une aire résidu, qui devra contenir les sommets de toutes les pressions compatibles avec les diverses conditions de la stabilité de la voute. Cette aire résidu pourra être nulle, se réduire à un point, ou avoir une certaine étendue, et nous apprendra, dans tous les cas, si la voute est stable ou instable.

Cet exposé sommaire de la méthode sera plus facilement compris, lorsque nous aurons examiné séparément chacune des opérations à effectuer.

23. — Tracé de la courbe figurative comprenant toutes les pressions normales à la clef, compatibles avec l'existence d'une courbe de pression à l'intérieur du voussoir. — Pour tracer la courbe qui est le lieu des sommets des pressions exercées sur un point quelconque du joint de la clef GD, et qui correspondent au centre de pression a, sur le joint C,D, nous commencerons par déterminer le poids P du voussoir GD,C,D, et de sa surcharge, ainsi que le centre de gravité G, de cette partie de la construction ; nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

menerons par le point A une droite aF, rencontrant la verticale du point G en F, nous mènerons l'horizontale Ff, et pour qu'une poussée N, normale au joint GD en f, puisse donner lieu à une courbe de pression passant par le point a, il sera nécessaire et suffisant que cette force N soit telle que la résultante des forces N et P concourant, passe par ce point a.

Si FP représente la force P, FH=PK donnera la mesure de la force N, et l'on aura un point de la courbe représentative cherchée, en prenant fh:FH. En reproduisant les mêmes constructions pour toutes les directions telles que aF, rencontrant la verticale du point G à une hauteur comprise entre celles du point C et du point D, nous aurons autant de points que nous voudrons tels que h, et la ligne qui joindra tous ces points sera la ligne cherchée.

Nous pourrons remarquer, dès à présent, que si l'on prolonge FK à partir du point a d'une longueur aK = FK, cette droite aK, nous donnera à son tour la mesure de l'action exercée par l'intermédiaire du voussoir supérieur sur le joint G.D, et l'on connaîtra la force normale correspondante en projetant aK en al sur une perpendiculaire à G.D. Le lieu des points l, représentant les sommets des pressions normales conjuguées avec les pressions correspondantes ah du lieu géométrique que nous venons de construire, sera tout entier sur les perpendiculaires al, et comprendra seulement une partie de la longueur de cette perpendiculaire

24.— Equation en propriétés de la courbe.— Si l'on veut avoir la courbe des points tels que h, il suffira de rapporter les coordonnées à deux axes rectangulaires ox et oy, respectivement pour la face GD, et par le point a. Les constructions indiquées au numéro précédent se traduiront alors par les relations

$$y = fh = FH = PK = FP \operatorname{tang} \alpha = P \operatorname{tang} \alpha ;$$

4/3

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

D'un autre côté, l'angle α, variable avec la position du point F, est toujours donné par la relation,

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{aM}{FM} = \frac{aM}{x} = \frac{m}{x},$$

Si l'on désigne par m la longueur aM qui reste constante pour toutes les courbes de pression passant par le point a

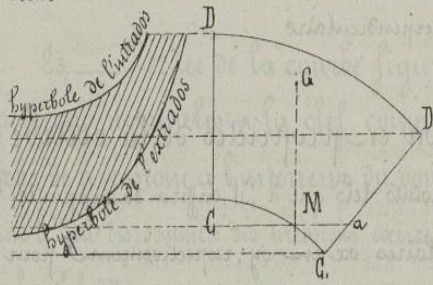
Substituant cette expression de tangente α dans la valeur de y, il vient enfin pour l'équation de notre courbe :

$$y = \frac{Pm}{x} \text{ ou } x = Pm.$$

Les courbes des points h conjugués avec le point a, est une hyperbole équilatère dont les deux assymptotes sont OD et Oa'

La connaissance de ces assymptotes permettra de construire cette hyperbole à l'aide d'un très-petit nombre de points.

25. Limite de l'aire des pressions sur le joint de clef compatibles avec l'équilibre géométrique. Si au lieu d'opérer en partant du point a nous avions effectué les mêmes constructions à partir des points extrêmes $C_1 D_1$, du joint $C_1 D_1$, nous aurions obtenu deux autres hyperboles équilatères, dont les équations seraient obtenues en changeant seulement la valeur de m.



Ces nouvelles hyperboles auraient toutes deux pour assymptotes verticale la ligne de joint CD, et pour assymptotes horizontales, les horizontales des points C_1 et D_1, et si l'on remarque que par suite de l'inclinaison de $C_1 D_1$ par rapport à CD, m augmente constamment en passant du point C_1 au point D_1, on voit que pour une même valeur de x, l'ordonnée y de l'une des hyperboles,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$y = \frac{P m}{x}$$

va en augmentant avec m, en que par conséquent les deux hyperboles extrêmes correspondant l'une au point C_1 de l'intrados, l'autre au point C_2 de l'extrados comprenant entr'elles toutes les autres

L'aire comprise entre ces deux hyperboles extrêmes, en que nous avons désignée par A est donc le lieu de tous les sommets des pressions qui peuvent être exercées sur le joint CD, en qui sont compatibles avec l'existence d'une courbe de pression rencontrant le joint C_1D_1, entre le point C_1 et le point D_1, c'est-à-dire dans l'intérieur même du massif de maçonnerie.

26.— Equation en propriétés de la courbe correspondante sur le deuxième joint.— Nous avons indiqué, précédemment le mode de construction applicable au point l de la courbe figurative des pressions normales exercées au point a, en nous avons vu que pour toutes les poussées qui pourraient être exercées en a, cette courbe figurative est la perpendiculaire à l, au joint C_1D_1.

Mais si l'on cherche le lieu de tous les points, tels que l, qui correspondent aux pressions passant par un même point f du joint de clef, on trouve encore une courbe hyperbolique, dont l'équation est facile à déterminer.

Si l'on prend pour axes de coordonnées la droite C_1D_1 et la perpendiculaire O'N à cette droite élevée par le point O', en lequel elle rencontre la verticale du centre de gravité G, on trouve immédiatement, pour la force, dont la direction passe par le point a,

$$y' = al = aK \cos i = FK \cos i$$

D'après les notations de la figure on a d'ailleurs :

$$\cos i = \sin(\alpha + \gamma)$$

et,
$$FK = \frac{EF}{\cos\alpha} = \frac{P}{\cos\alpha}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où $y' = P\,\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha} = P\,(\operatorname{tang}\alpha\cos\gamma + \sin\gamma)$

La valeur de y' est variable avec α, et pour éliminer cet angle nous ferons remarquer que,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{aM}{FM} = \frac{aM}{FO'-MO'}$$

Or l'abscisse O'a, du point a étant exprimée par x', on a,

$$aM = x'\sin\gamma$$

$$MO' = x\cos\gamma$$

et par suite, en désignant la constante FO' par n

$$y' = P\left[\left(\frac{x'\sin\gamma}{n - x'\cos\gamma}\right)\cos\gamma + \sin\gamma\right]$$

ou, après réduction

$$y' = \frac{nP\sin\gamma}{n - x'\cos\gamma}$$

équation d'une hyperbole équilatère qu'il serait facile de construire.

Pour $x' = 0$ $\qquad y = P\sin\gamma$

cette valeur de y' étant indépendante de la variable n qui définit la position du point f montre que toutes les courbes représentatives passent par le même point N, dont l'ordonnée O'N est égale à la projection de la force P, sur l'axe des y'

Pour $x' = \infty$, $\qquad x' = \frac{n}{\cos\gamma}$.

la seconde hyperbole est parallèle à l'axe des y, et passe par le point R de rencontre de l'horizontale Ff avec la ligne de joint G.D.

Enfin, si l'on cherche, pour toutes les hyperboles, les valeurs de y' qui correspondent à une même valeur de x', l'équation de la courbe, mise sous la forme

$$y' = \frac{n\sin\gamma}{1 - \frac{x'}{n}\cos\gamma}.$$

montre que y' augmente quand n diminue, c'est-à-dire quand le point F se rapproche de l'horizontale de G. Il résulte de là, que l'hypothèse correspondant à l'extrados, est celle qui se rapproche le plus de l'axe des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

abcisses C_1D_1, que l'hyperbole correspondant à l'intrados est celle qui s'éloigne le plus de cet axe, et que toutes les autres hyperboles correspondant aux points intermédiaires du joint CD sont comprises entre ces deux hyperboles extrêmes.

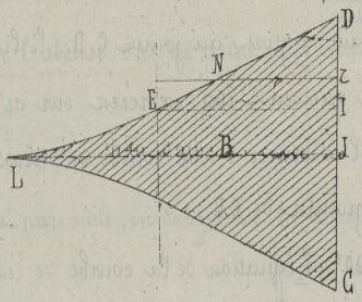
L'aire A_1 représente, par rapport au joint C_1D_1, le lieu de tous les sommets des pressions qui peuvent être exercées sur ce joint, et qui seraient compatibles avec l'existence d'une courbe de pression passant par l'un quelconque des points de CD.

Si l'angle γ était de 90°, l'équation de la courbe se réduirait à $y = P$, et l'aire A_1 se réduit à la droite horizontale représentée par cette équation. P, représente alors le poids de la demi-voute, et l'on aurait pu dire, à priori que, quelle que soit la forme de la courbe des pressions, la réaction verticale du joint horizontal à la culée ne pouvait manquer d'être égale à P.

28.— Concordance des résultats fournis par les deux tracés précédents.— Les aires A et A_1, n'ont réellement qu'une seule et même signification, car toute pression limitée à l'un quelconque des points de l'aire A, sur le joint CD, a son homologue en un point de l'aire A_1, et réciproquement. C'est pour cela que l'on peut négliger dans la suite des constructions, l'une ou l'autre de ces aires conjuguées et, en partant de cette observation, M. Durand Claye, a été conduit, dans ces derniers temps, à ne tenir aucun compte de l'aire A, dont la signification se trouve complètement exprimée par la construction de l'aire A_1, dont nous aurons à nous servir dans la suite de nos opérations.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

29.— Equation de la courbe figurative comprenant toutes les pressions normales, compatibles avec la résistance des matériaux de la voute.— Nous avons maintenant à déterminer une courbe dont chaque ordonnée partant d'un point quelconque r du joint CD représente la poussée normale en vertu de laquelle la plus grande pression R par mètre carré sur l'élément le plus chargé du joint ne dépasse pas, ou en d'autres termes atteigne n kilogrammes.



Nous déterminerons cette courbe dans deux cas distincts.

1°.— La distance Dr est moindre que $\frac{1}{3}$ l, l représentant la longueur de CD

Soient N l'intensité et Nr la direction de la force normale qui par l'intermédiaire de la maçonnerie placée à gauche de CD, agit sur ce plan de joint; l'étude du mode de répartition des pressions nous a appris que le point le plus chargé serait le point D, et nous sommes ainsi conduits à rechercher la force N, correspondant à une pression R = n par mètre carré au point D. Or nous savons que dans ce cas il suffit de considérer la force N, comme appliquée à l'extrémité r du premier tiers d'une surface de contact de largeur $3x = 3Dr$, et qu'en vertu de la loi de la répartition, on aura alors pour le point D

$$R = n = \frac{2N}{3x}$$

d'où

$$N = \frac{2}{3} Mx.$$

Ainsi la force N, pour chaque point tel que r, sera donnée par une fonction du premier degré de l'abcisse x, et l'équation

$$N = \frac{3}{2} nx$$

sera représentée par une droite DE, dont le coëfficient angulaire est $\frac{3}{2}$ n.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La partie de notre courbe representative correspondant au premier tiers de la hauteur DC, est une ligne droite telle que, nous $x = \frac{1}{3} l$, on a,

$$N = EI = \frac{3}{2} n \times \frac{1}{3} l = \frac{1}{2} nl.$$

2°. — La distance Dr, est comprise entre $\frac{1}{3} l$ et $\frac{1}{2} l$.

Nous pouvons ici appliquer directement la formule déduite de la loi de répartition dite du trapèze, pour le bord le plus rapproché du point d'application de la force

$$R = \frac{2N}{\omega} \left(\frac{3a}{l} - 1 \right).$$

en y remplaçant R par n, ω par $l \times 1$ ou l, et a par $l - x$, ce qui donne,

$$n = \frac{2N}{l} \left(3 - \frac{3x}{l} - \right) = \frac{2N}{l} \left(2 - \frac{3x}{l} \right)$$

ce qui donne entre les variables N et x à l'équation d'une hyperbole qui rencontre la perpendiculaire élevée au milieu de CD, en un point dont nous obtiendrons l'ordonnée, en faisant $x = \frac{1}{2} l$, ce qui donne,

$$n = \frac{2N}{l} \left(2 - \frac{3}{2} \right) = \frac{N}{l}$$

et par conséquent $N = ln$. Cette ordonnée est JL, double de celle du point E.

3°. — Tout point placé entre C et J a son symétrique par rapport au point J, entre J et D, et comme les observations précédentes pourraient être reproduites, quant à la répartition des pressions en D, nous pouvons en conclure que la courbe représentative des pressions compatibles avec la résistance des matériaux, a une autre branche CL symétrique de DL, et qu'ainsi l'aire B, sur laquelle nous avons appliqué des hachures, représente le lieu des sommets de toutes les pressions qui peuvent être appliquées aux divers points de CD en égard à la résistance des matériaux employés.

30. — Tracé en propriété de cette courbe. — Il est facile

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de voir que la droite DE se raccorde au point E avec la portion CE d'hyperbole, car, les deux équations,

$$N = \frac{3}{2} nx \quad \text{et} \quad N = \frac{1}{2} \frac{lw}{\left(2 - \frac{3x}{l}\right)}$$

donnent, pour $x = \frac{1}{3} l$, la même valeur,

$$N = \frac{1}{2} lw .$$

et d'un autre côté, si l'on cherche le coefficient angulaire de la tangente à l'hyperbole en ce point, on trouve :

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{2} ln \frac{3}{l\left(2 - \frac{3x}{l}\right)^2}$$

et pour $x = \frac{1}{3} l$,

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{3}{2} \frac{ln}{1} = \frac{3}{2} l .$$

ce qui est précisément le coefficient angulaire de la portion de droite DE.

Pour $x = \frac{1}{2} l$, le coefficient angulaire devient quadruple, car on a alors

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{3}{2} \frac{ln}{\frac{1}{4}} = 6 lw$$

D'après ces indications, le contour de l'aire B est très facile à tracer et l'on pourra même, dans la plupart des circonstances, simplifier les opérations, en joignant approximativement, par une ligne droite, le point E au point L.

L'hyperbole équilatère L a d'ailleurs, pour assymptotes, la droite GD et une perpendiculaire à cette droite ayant pour équation

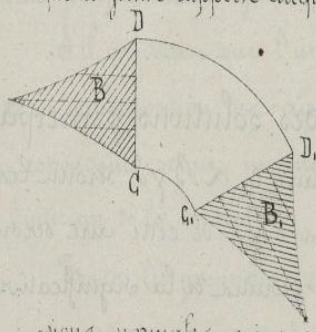
$$x = \frac{2}{3} l ,$$

c'est-à-dire la symétrie de EL, qui est, par suite, l'assymptote de la branche LE'.

31.— Indépendance des courbes relatives à la limite des résistance pour le joint de clef et le deuxième joint. — On déterminerait identiquement de la même façon la courbe B_1 par rapport au joint $G_1 D_1$, mais il faut remarquer que ces

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

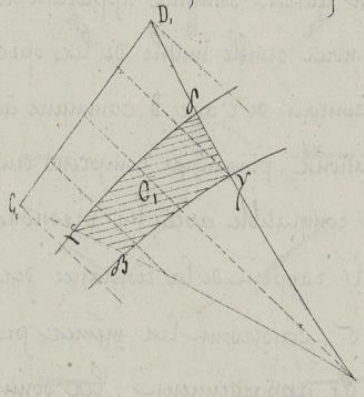
aires ont chacune une signification différente puisqu'elles ont été obtenues indépendamment l'une de l'autre, chacune d'elles ne concernant exclusivement que le joint rapporté auquel elle a été tracée.



Nous n'avons par ici, entre les aires B et B_1, la même solidarité qu'entre les aires A et A_1, et il faudra par conséquent, dans la suite des opérations, nous servir de ces aires B et B_1, qui sont respectivement les lieux des pressions normales qui pourraient être exercées sur chacun de ces joints sans qu'aucune pression ne dépasse les limites en par mètre carré que comporte la matière des matériaux employés.

31.— Nécessité de satisfaire aux conditions indiquées par les deux tracés effectués sur la base C_1D_1. — L'aire A_1 construite sur la ligne de joint C.D. est le lieu de toutes les pressions compatibles avec l'existence d'une ligne de pression rencontrant les deux joints CD et C_1D_1 dans l'intérieur de la masse.

L'aire B_1, construite sur cette même ligne, est le lieu de toutes les pressions sur ce point, compatibles avec la résistance des matériaux



On peut donc affirmer que l'on n'aura de solution compatible à la fois avec ces deux conditions nécessaires de stabilité que pour des pressions limitées à l'aire C_1, déterminée par la superposition des deux aires A_1 et B_1, et qui en est la partie commune

Nous remarquerons que les quatre côtés des polygones enveloppes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

-ligne qui limitent cette aire correspondent~ savoir :

$\alpha_1 B_1$ et $\delta_1 \gamma_1$ à une pression limite répartie en G_1 ou D_1,

$\alpha_1 \delta_1$ et $B_1 \gamma_1$ respectivement à des courbes de pression qui passeraient~ en D ou en G

Les sommets du même polygone correspondent~ deux à deux à des pres-:sions qui participent~ des propriétés des côtés auxquels ils appartiennent.

La pression, pour le sommet~ est en α_1, par exemple, correspond à la limite de pression pour le point~ G_1 et à une courbe de pression pas-:sant~ par le point~ D. Les autres sommets pourraient~ être caractérisés de la même façon.

33.___Exposé général de la méthode et~ nomenclatu-:re des aires.___Ces opérations préliminaires étant~ bien compri-:ses il est~ devenu facile d'expliquer ce qui reste à faire.

L'aire G_1 étant~ déterminée comme nous venons de le dire, chacune des pressions normales comprises dans cette aire provient~ d'une pression correspondante sur le joint~ CD et~ nous pouvons désigner par G l'aire qui comprendra toutes ces nouvelles pressions, en faisant~ remarquer que les courbes $\alpha_1 \delta_1$ et $B_1 \gamma_1$ correspondent~ aux deux horizontales des points C et D.

Nous sommes ainsi conduits à considérer, par rapport~ au joint~ CD deux aires limitatives des pressions, savoir : l'aire B des pressions compatibles avec la limite de résistance des matériaux sur le joint~ CD, et l'aire G conjuguée de l'aire G_1.

Il n'y aura donc d'autres pressions de stabilité sur le joint~ CD que celles qui seront~ comprises à la fois dans l'aire B et dans l'aire G, et si nous désignons par D leur partie commune, nous pourrons dire que cette

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aires résidu D est, par rapport au voussoir CDC₁D₁, le lieu de toutes les pressions compatibles avec les deux conditions de stabilité déjà invoquées. Nous avons omis en D une solution complète de la question de stabilité, pour le premier voussoir considéré isolément.

Si nous considérons ensuite le premier joint CD avec une autre ligne de joint C_2D_2 nous pourrons construire de la même façon l'aire D_1, comprise toujours dans l'aire A, qui conviendra à toutes les solutions de stabilité relatives au solide CDC_2D_2, considéré comme un voussoir unique.

On opérera de la même façon pour toutes les autres lignes de joints et l'aire commune à toutes les aires résidus $DD_1 \ldots D_n$, contiendra en définitive les sommets de toutes les pressions compatibles avec les conditions de stabilité sur toutes les lignes de joints. Cette aire finale donnera donc intégralement l'ensemble de toutes les solutions.

3/11.—Interprétation des résultats de l'application de la méthode.—Si nous désignons par E l'aire finale commune à toutes les aires résidu $DD_1 \ldots D_n$, la considération de cette aire va nous donner des indications précieuses sur la stabilité de la voute.

1°—Si cette aire E est nulle nous sommes en droit d'en conclure qu'il n'y a aucune solution compatible avec la stabilité de la voute. Une voute construite dans ces conditions ne rencontrerait aucune position stable pendant le décintrement. Elle tomberait inévitablement.

2°—Si l'aire E se réduit à un point il n'y aura qu'un seul mode de répartition possible des pressions qui assurerait la stabilité

3°—Si l'aire E est limitée par un triangle ou par un quadrilatère curviligne, chacun des points de cette aire correspondra à une position d'équilibre, et si l'aire n'est pas trop grande on aura la preuve que la

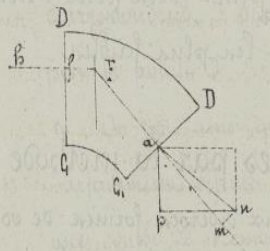
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

voute est dans de bonnes conditions.

4° Si enfin cette aire E est trop grande on aura la preuve que l'on pourrait employer les matériaux d'une manière plus favorable et l'on cherchera à réduire cette aire soit en diminuant l'épaisseur de la voute, soit en employant des materiaux moins résistants.

5° Enfin la considération de l'aire E permet de résoudre une question d'une grande importance pratique, puisque dans tous les cas, en augmentant ou en diminuant la valeur de w, on modifiera facilement l'aire finale de manière à la ramener à des dimensions simplement suffisantes, que l'on pourra avant indiquer la pression limite en kilog par mètre carré pour laquelle une construction projetée seraient encore stable

35.— Observation sur les aires G et G₁.— Pour mieux interpréter plus sûrement toutes les particularités de l'aire finale nous reviendrons sur les constructions à effectuer pour passer de l'aire G₁ à l'aire G



Pour trouver sur le joint de clef une pression conjuguée de la pression am, par exemple, comprise dans l'aire G₁, il faut mener par le point a une verticale ap égale au poids du voussoir considéré, mener par le point p une horizontale, mener en m une parallèle à G₁D₁ qui rencontre la droite précédente au point n. pn donne alors la mesure de la force correspondante fh appliquée sur le joint GD, suivant l'horizontale du point F, déterminée par la rencontre de an avec la verticale du centre de gravité.

Les constructions sont justifiées par les règles de la composition des forces et, bien effectuées dans un autre ordre, elles ne sont en définitive que les constructions inverses de celles qu'il faudrait faire pour passer

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la force normale fb à la force am.

Remarquons, en passant, que dans le cas où l'aire C, se limite à une ligne horizontale le point m peut être un point quelconque de la ligne pm, ce qui par conséquent on doit alors trouver pour chaque pression am, une courbe conjuguée sur le joint CD.

Pour les différents points d'une même normale am nous savons, d'ailleurs que la courbe conjuguée ou le lieu des points b, serait une hyperbole équilatère comprise entre les hyperboles extrêmes de l'aire A.

Il en résulte que si l'aire C, était limitée par les perpendiculaires abaissées respectivement des points extrêmes α_1 et δ_1 de cette aire, l'aire C correspondante sur le joint CD, serait formée de deux hyperboles plus ou moins éloignées des deux hyperboles limites de l'aire A et plus rapprochées l'une de l'autre.

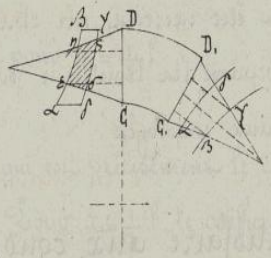
En général les côtés $\alpha_1 B_1$ et $\gamma_1 \delta_1$ étant très-inclinés sur $C_1 D_1$, donneront lieu à une très-petite modification dans la forme des limites correspondantes de l'aire C, qui se trouvera ainsi formée par l'espace compris entre deux courbes transversales très-peu différentes des hyperboles dont nous venons de parler. Ces courbes doivent être, d'ailleurs, entièrement comprises d'une part entre les hyperboles conjuguées des points α_1 et B_1, d'autre part entre les hyperboles conjuguées des points γ_1 et δ_1.

Nous pouvons conclure de ces observations que l'aire C sera limitée, d'une part, par les deux courbes transversales différant peu des hyperboles que nous venons d'indiquer et qui seront les conjuguées des côtés $\alpha_1 B_1$ et $\gamma_1 \delta_1$, d'autre part, par les horizontales des points C et D ; mais en combinant cette aire C avec l'aire B, nous voyons que les extrémités de l'aire résidu D seront fermées latéralement par des portions de courbes provenant des limites de B.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ces remarques nous permettent, dès à présent, d'indiquer la signification des pressions correspondantes soit à l'un des côtés soit à l'un des sommets de l'aire résidu D.

36.— Signification des solutions principales.— $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, étant les sommets de l'aire G_1, $\alpha\beta\gamma\delta$ seront les sommets correspondants de l'aire G, et les côtés de cette aire seront caractérisés par les conditions suivantes déduites de la signification des côtés correspondants de G_1



$\alpha\beta$ est le lieu des pressions sur CD qui correspondent à $\alpha_1 \beta_1$, c'est-à-dire à la pression limite de n Kilogrammes au point G_1 de l'intrados

$\delta\gamma$ est le lieu des pressions sur CD qui correspondent à des courbes de pression qui passent par le point C ou par le point D.

On voit ainsi que les quatre sommets ont chacun une signification parfaitement définie. Le point α, par exemple, correspond à la fois à une courbe de pression passant au point C, et à une pression limite au point D. Les significations des autres sommets apparaîtraient d'ailleurs avec la même évidence, et il nous semble inutile de les spécifier.

Les propriétés du contour de l'aire D, commune à B et G, se déduisent facilement de ces observations, puisqu'elle comprend seulement la partie de l'aire précédente qui est compatible avec les pressions limites au point C et au point D, sous le rapport de la résistance des matériaux

Les côtés $E\eta$ et $\eta\sigma$, conservent les mêmes propriétés que les côtés $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ auxquels ils appartiennent; les sommets E et σ signifient en outre que la pression limite est atteinte au point D de l'intrados

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les sommets η et ζ que cette même pression limite est atteinte au point de l'intrados.

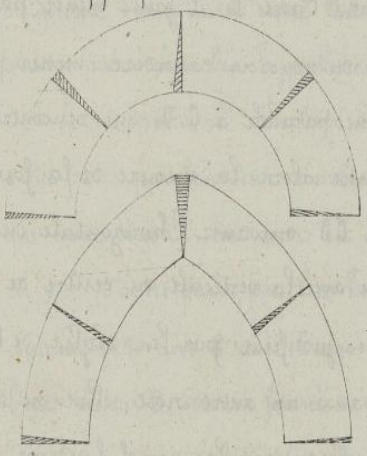
Ainsi, chacun des sommets Eηζ correspond à deux pressions limites parfaitement définies, à deux des extrémités des joints C D C,D.

S'il arrivait que l'un ou l'autre de ces sommets disparut, par suite de la superposition des aires, on serait averti que la pression limite correspondante serait incompatible avec l'existence d'une courbe de pression à l'intérieur de la masse

Toutes les propriétés de l'aire résidu D, pour le premier voussoir, étant ainsi indiquées, chacune des aires résidu, pourra être discutée de la même façon, et l'on reconnaîtra, en définitive, que chacun des sommets de l'aire limite correspond à deux points déterminés des faces de joint, pour lesquels la pression limite est atteinte. Cette reconnaissance permettrait, au besoin, de modifier avec certitude, le profil de manière, soit à rapprocher des mêmes limites pour les autres joints, soit pour s'éloigner de ces limites dans les parties reconnues les plus faibles.

37. — Vérifications fournies par la méthode précédente.

En appliquant cette méthode aux diverses formes de voûtes, ainsi que le montre l'épure que nous joignons à cet exposé, M^r Durand Claye a construit pour chacune d'elles les courbes de pression correspondant aux sommets de l'aire limite, et il a ainsi reconnu les points dangereux de chaque mode de construction



Dans les voûtes en plein cintre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le joint dangereux est placé à une inclinaison de 30m environ par rapport au plan de naissance, et les rotations tendent à se produire comme l'indique la figure ci-jointe. Dans les voutes ogivales la position des joints dangereux est toute différente, et les rotations tendent à se produire en sens contraire.

La connaissance que l'on a acquise sur la position des sections dangereuses de chaque genre de voute permet, dans la plupart des cas, de diminuer le nombre des opérations, en limitant la recherche de l'axe résidu E aux portions de la voute qui se terminent par les seuls joints voisins de ces sections dangereuses.

L'emploi de la méthode permet, d'ailleurs, de poursuivre les constructions par les divers joints des piedroits et de compléter par conséquent l'étude de toutes les conditions de stabilité que comporte la construction tout entière.

35.— Observation sur le glissement des voussoirs.— Le joint CD à la clef n'est pas, en général, réalisé dans la pratique des constructions ; car on préfère, au contraire, employer une clef symétrique à faces inclinées, et M. Durand Claye, n'a eu recours à ce joint vertical CD, sur lequel les réactions, quelles qu'elles soient, doivent être normales, par raison de symétrie, que pour n'avoir pas à faire d'autre hypothèse quant à la direction des poussées. C'est un simple moyen de simplification qui n'oblige, en aucune façon, à s'éloigner, dans la réalisation de la voute, du mode de construction habituel.

Les pressions étant normales sur ce joint de tête, il n'y pas lieu de craindre de glissement ; en quant aux autres joints, il suffira, après le tracé des courbes de pression, de vérifier que les tangentes ne font nulle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par, avec la normale au joint considéré, un angle plus grand que l'angle de frottement. La disposition des joints par rapport aux surfaces d'intrados et d'extrados, laisse d'ailleurs peu de place à cette possibilité.

39.— La courbe de pression ne peut passer au milieu de chaque joint.— Nous compléterons nos études sur la stabilité des voutes en empruntant à un travail récent de Mr Droulets la démonstration d'un principe qui est de nature à restreindre, en la spécialisant, la recherche de la voute la plus favorable.

Pour qu'une voute fut placée dans les conditions les plus désirables elle devrait évidemment satisfaire aux conditions suivantes:

1°— Les pressions devraient être normales aux plans de joint, parce que alors aucun glissement ne serait possible.

2°— La courbe des pressions devrait passer par le milieu de chaque joint, parce qu'en vertu de la loi du trapèze, la pression serait alors uniformément répartie dans chacun de ces joints.

3°— La résistance des matériaux serait le mieux utilisée, si la pression élémentaire était elle-même sur tous les joints.

Mais ces conditions désirables ne sont pas d'une réalisation possible, et Mr Droulets démontre que les deux premières, considérées isolément et indépendamment de la troisième, ne peuvent même être satisfaites pour deux joints voisins.

Voici la démonstration très-simple qu'il a donnée de cette proposition: Soit P le poids de la matière limitée par le joint C.D.; si l'on considère un plan C'D' infiniment voisin et coupant par hypothèse, à angle droit, comme le joint C.D., la courbe de pression qui passe par les milieux M. et M des deux plans C.D. et C'D', en désignant par dP' et dP"

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les augmentations de poids relatives au prolongement de la voute elle-même, et à celui de sa surcharge d'un plan à l'autre, on pourra écrire:

$$\partial P = \partial P' + \partial P''$$

Soit X l'abcisse du centre de gravité de la partie de la voute de poids P, limitée au joint G.D.; on aurait de même, en considérant le petit prolongement infinitésimal de la voute, l'équation des moments:

$$\partial(P \times X) = (x + m')\partial P' + (x + m'')\partial P''$$

x désignant l'abcisse du point milieu M, et m', m'', les quantités essentiellement positives qu'il faut ajouter à x, pour avoir l'abcisse $x+m'$ du centre de gravité g' de la section élémentaire $\partial P'$ de la voute, et l'abcisse $x+m''$ du centre de gravité de la section élémentaire $\partial P''$, de la surcharge.

Or, si nous admettons que la courbe de pression passe au point M, du joint G.D., la résultante des deux forces P et N, passera par ce point, et l'on aura:

$$P \times FH = N \times M_1 H .$$

ou, en adoptant les axes indiqués sur la figure:

$$P(x - X) = N y .$$

et, en différentiant,

$$\partial(P \times X) = P\partial x + x\partial P - N\partial y$$

Egalant cette deuxième valeur de ∂PX à la précédente, on devrait donc avoir:

$$P\partial x + x\partial P - N\partial y = x\partial P' + m\partial P' + x\partial P'' + m''\partial P'' ,$$

ou, en observant que dans le triangle FHM_1, pour le côté FM_1 est parallèle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=pothèse tangent en M, à la courbe de pression,

$$P = N \operatorname{tang}\omega = N\frac{dy}{dx}$$

d'où

$$N dy = P dx$$

en en mettant pour dP sa valeur $dP' + dP''$

$$N dy - N dy + x(dP' + dP'') = x(dP' + dP'') + m dP' + m'' dP''$$

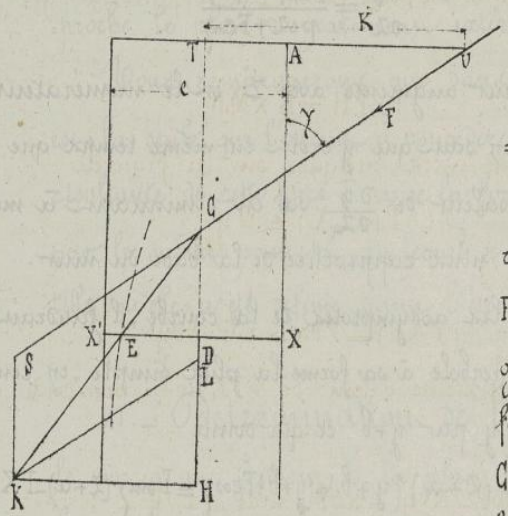
ou

$$m dP' + m'' dP'' = 0 .$$

Ce qui est impossible puisque m', m'', dP', dP'', sont individuellement des quantités essentiellement positives.

La courbe de pression ne peut donc passer par la suite des points M, M', milieux des faces de joints, et il serait inutile de chercher une courbe de pression qui satisfît à cette condition.

110. — **Stabilité d'un mur soumis à l'action d'une force extérieure.** — Les mêmes principes sont applicables, avec plus de simplicité encore, au cas où un mur reçoit une poussée conique tendant à produire le renversement.



C'est ce qui arrive, par exemple, dans la poussée des charpentes.

En formant au point G de rencontre de la force extérieure F avec la verticale du centre de gravité, le parallélogramme des forces GLKS, dans lequel GS = F, GL = P, le triangle GDE donne la proportion $\frac{DE}{GD} = \frac{KH}{GH}$.

En désignant DE par y, et en exprimant les autres longueurs

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en fonction des données de la question, on trouve :

$$CD = DT - CT = Z - TU \operatorname{cotang} \gamma = Z - K \operatorname{cotg} \gamma .$$

$$KH = F \sin \gamma$$

$$GH = GL + HL = P + F \cos \gamma = pcZ + F \cos \gamma .$$

On tire, par substitution de ces valeurs dans la proportion ci-dessus

$$y = \frac{(Z - K \cot \gamma) F \sin \gamma}{pcZ + F \cos \gamma} = \frac{F (Z \sin \gamma - K \cos \gamma)}{pcZ + F \cos \gamma}$$

La courbe des centres E de pression est ici une hyperbole équilatère dont la partie inférieure se rapproche du parement extérieur du mur

On peut écrire, en divisant haut en bas par Z :

$$y = \left(1 - \frac{K}{Z} \cot \gamma\right) \frac{F \sin \gamma}{pc + \frac{F \cos \gamma}{Z}} .$$

en sous cette forme, on voit plus facilement que le numérateur augmente en que le dénominateur diminue quand on fait croître Z.

Ce sera le contraire pour $\frac{dy}{dZ}$, car en différentiant l'équation en y, on a :

$$dy (pcZ + F \cos \gamma) + y \times pc\, dZ = F \sin \gamma\, dZ .$$

d'où

$$\frac{dy}{dZ} = \frac{F \sin \gamma - pcy}{pcZ + F \cos \gamma}$$

Le dénominateur augmente avec Z, et le numérateur diminue alors, puisque l'on sait que y croît en même temps que Z ; pour cette double raison, la valeur de $\frac{dy}{dZ}$ va en diminuant à mesure que l'on considère une assise plus rapprochée de la base du mur.

Pour trouver les asymptotes de la courbe, il faudrait ramener l'équation de l'hyperbole à sa forme la plus simple, en remplaçant Z par $Z + a$, et y par $y + b$, ce qui donne :

$$pc (Z + a)(y + b) + (y + b) F \cos \gamma = F \sin \gamma (Z + a) - FK \cos \gamma$$

Pour rendre nul le coefficient de y, il faut poser

$$pca - F \cos \gamma = 0$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en pour annuler le coefficient de z,

$$peb - F\sin\gamma = 0$$

On tire de cette dernière relation : $b = \frac{F\sin\gamma}{pe}$, ce qui donne l'abcis-
-se de l'assymptote verticale.

Pour un mur de hauteur infinie, il faudrait que b fut plus petit que $\frac{1}{2}$ e, ce qui conduit, pour cette limite, à la condition

$$\frac{1}{2}e > \frac{F\sin\gamma}{pe} \quad \text{ou} \quad e^2 > \frac{2F\sin\gamma}{p}$$

La formule précédente ne peut s'appliquer lorsque $\gamma = 90°$, parce qu'alors on ne connait pas la valeur de K cosγ, qui devient le pro-
-duit d'une quantité infinie par une quantité nulle, mais si l'on exprime simplement cette quantité par oc = c, la valeur de y, devient, par la considération du triangle CDE,

$$y = \frac{F(z-c)}{pez}$$

en sous cette forme, c'est encore l'équation d'une hyperbole équila-
-tère qui a pour assymptote une parallèle à l'axe des Z en c'est aussi à la base du mur que le joint d'application de la résultante ap-
-proche le plus du parement extérieur

Nous remarquerons que, dans le cas où la force extérieure F est la seule que l'on ait à considérer pour chacune des assises, la résultante de cette force F, avec la force variable P, passera toujours par le même point C, en lequel se réduit la ligne des directions telle qu'elle a été définie dans l'énoncé du principe de Moseley.

41. — Détermination de l'épaisseur du mur. — Lorsque le mur a une hauteur b, la plus grande valeur de y est donnée par la relation du numéro précédent, qui devient alors.

$$y = \frac{F(b\sin\gamma - K\cos\gamma)}{peb + F\cos\gamma}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en si l'on posait $y = \frac{1}{2} e$ on aurait pour déterminer l'épaisseur strictement nécessaire pour la stabilité :

$$\frac{1}{2} e = \frac{F(b \sin\gamma - K\cos\gamma)}{pcb + F\cos\gamma}$$

d'où

$$pbe^2 + Fe\cos\gamma = 2F(b\sin\gamma - K\cos\gamma)$$

La valeur de e serait ainsi donnée par une équation du second degré en il en serait encore de même si l'on voulait assurer davantage la stabilité en faisant $\frac{1}{2} e = y + m$, m étant une surépaisseur de sécurité dont la valeur est fournie par l'observation des bonnes constructions.

La valeur de e serait obtenue dans ce cas par l'équation du second degré

$$y = \frac{1}{2} e - m = \frac{F(b\sin\gamma - K\cos\gamma)}{pcb + F\cos\gamma}$$

Dans le cas où la force F est horizontale cette formule se réduit à

$$\frac{1}{2} e - m = \frac{Fb}{pcb} = \frac{E}{pc}$$

ce qui donnerait plus simplement la valeur de l'épaisseur e.

42.— Emploi des moments pour l'établissement des conditions de stabilité. — On peut arriver aussi rapidement à l'équation précédente en remarquant que la résultante des deux forces P et F doivent passer par le point E, la somme des moments de ces deux forces par rapport à ce point doit être nulle ; mais pour utiliser cette relation il faut mieux remplacer la force F par ses deux composantes horizontale et verticale, $F\sin\gamma$ et $F\cos\gamma$.

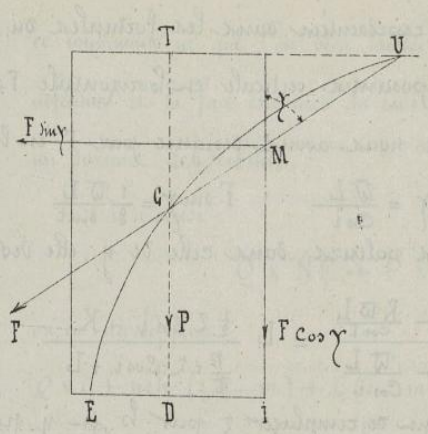
On obtient ainsi, en tenant compte des directions des diverses forces

$$P \times DE + F\cos\gamma \times EI - F\sin\gamma \times MI = 0$$

ce qui se traduit par :

$$Py + F\cos\gamma\left(\frac{1}{2} e + y\right) - F\sin\gamma\left(z - \frac{K}{\tan\gamma}\,\frac{K - \frac{1}{2} e}{K}\right) = 0$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



en l'on en tire immédiatement

$$y = \frac{-\frac{1}{2} F e \cos\gamma + F z \sin\gamma - F K \cos\gamma + \frac{1}{2} F e \cos\gamma}{P + F\cos\gamma}$$

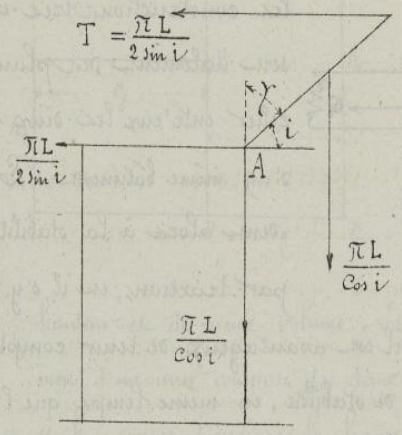
ou, en supprimant les termes semblables et en remplaçant P par sa valeur, par

$$y = \frac{F(z\sin\gamma - K\cos\gamma)}{\pi z + F\cos\gamma}$$

comme précédemment.

Cette méthode des moments, qui est équivalente à celle que nous avons utilisée précédemment, est celle que nous emploierons pour calculer l'épaisseur des murs que nous aurons à considérer dans les paragraphes suivants.

43. — Stabilité d'un mur supportant une toiture. — Pour



appliquer les relations précédentes à un mur qui supporte la poussée d'une demi-ferme sans tirant, il suffit de rappeler que L étant la demi portée, π la charge par mètre courant d'arbalétrier, i l'inclinaison de cet arbalétrier, la charge totale est exprimée par $\frac{\pi L}{\cos i}$, et la poussée horizontale par $\frac{\pi L}{2 \sin i}$.

On retrouve, d'ailleurs, cette dernière expression, en prenant les moments des forces T et $\frac{\pi L}{\cos i}$ par rapport au point d'appui A, ce qui donne,

$$\frac{\pi L}{\cos i} \times \frac{1}{2} L = T \times \frac{L \sin i}{\cos i}$$

d'où,

$$T = \frac{\pi L}{2 \sin i}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ces valeurs sont représentées dans les formules du paragraphe précédent, par les composantes verticale et horizontale $F\cos\gamma$ et $F\sin\gamma$ de la force extérieure que nous avons désignée par F, et l'on a, par suite

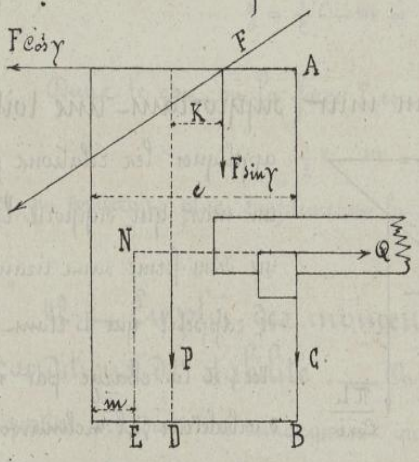
$$F\cos\gamma = \frac{\varpi L}{\cos i} \qquad F\sin\gamma = \frac{1}{2}\frac{\varpi L}{\sin i}$$

En substituant ces valeurs dans celle de y, elle devient,

$$y = \frac{\frac{1}{2}z\frac{\varpi L}{\sin i} - \frac{K\varpi L}{\cos i}}{pez + \frac{\varpi L}{\cos i}} = L\,\frac{\frac{1}{2}z\cos i - K}{\frac{p}{\pi}ez\cos i + L}$$

Il suffira maintenant de remplacer z par h, et y par $\frac{1}{2}e - m$ pour trouver la valeur convenable de l'épaisseur e à donner au mur.

III. — Mur portant un plancher. — Dans un grand nombre de cas, particulièrement dans les constructions légères, ou dans les constructions très élevées on se sert utilement des planchers pour relier entr'eux les deux murs de face d'un même bâtiment. Les solives aident alors à la stabilité en agissant par traction, et il s'y développe une réaction élastique Q, dont il est avantageux de tenir compte dans l'établissement des conditions de stabilité, en même temps que l'on doit faire entrer dans la relation des moments la charge c que le plancher fait porter sur le mur.



Les diverses parties sont alors assemblées sur un cours de sablières ou agrafées au mur, et nous assureront la stabilité de la construction, si nous exprimons la condition de l'égalité entre les moments des forces F, Q, P, C du système, par rapport au point E déjà défini, la distan-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce minimum m que l'on veut laisser entre le centre de pression de l'assise inférieure et la face extérieure du mur servant comme précédemment à donner un surcroît de stabilité.

On a ainsi

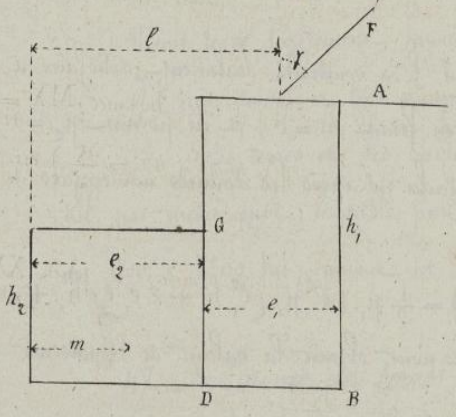
$$Q \times NE + P \times DE + C \times BE = M_0 F;$$

ou, en développant,

$$Q \times C + p e h \left(\tfrac{1}{2} e - m\right) + C(e - m) = E\left[h \sin \gamma - \left(K + \tfrac{1}{2} e - m\right) \cos \gamma\right];$$

d'où l'on tirerait facilement la valeur de l'épaisseur e.

45. *Mur avec contreforts.* — On ajoute quelquefois à la stabilité d'un mur en le renforçant sur une partie de sa hauteur, par des saillies, nommées contreforts, placées à des distances régulières les unes des autres.



Pour étudier la stabilité d'une pareille construction, on admet que ces contreforts produisent le même effet qu'un contre-mur continu, de même hauteur et de même volume. La question est ainsi ramenée à celle de l'examen d'un mur composé de deux épaisseurs e_1 et e_2, sur des hauteurs h_1 et h_2 comme l'indique la figure.

Soient P_1 et P_2 les poids respectifs de chacun de ces murs par mètre courant, nous exprimerons qu'il y a stabilité si nous nous assurons que la résultante de toutes les forces passe, à l'intérieur de la masse, par un point E de la base, qui est le centre de pression sur cette base, et qui doit être situé à une distance m de la paroi extérieure du mur.

Pour cela nous prendrons les moments des trois forces F, P_1, P_2 par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rapport au point E, et nous écrirons :

$$F \sin\gamma \times h_1 - F\cos\gamma\,(l-m) = P_1\left(\tfrac{1}{2}e_1 + e_2 - m\right) + P_2\left(\tfrac{1}{2}e_2 - m\right).$$

Si nous désignons respectivement par p_1 et par p_2 les poids du mètre cube de chacun des murs en maçonnerie, nous aurons :

$$P_1 = p_1 e_1 h_1 \quad , \quad P_2 = p_2 e_2 h_2 ;$$

et par suite, en groupant ensemble tous les termes en m,

$$F\left(h_1 \sin\gamma - l\cos\gamma\right) = \tfrac{1}{2} p_1 l_1 h_1 \left(e_1 + 2e_2\right) + \tfrac{1}{2} p_2 h_2 e_2^2 - m\left(F\cos\gamma + p_1 e_1 h_1 + p_2 e_2 h_2\right)$$

équation dont on pourra déduire, suivant les circonstances, la valeur de e_2 ou celle de e_1.

Dans le cas où l'on voudrait seulement satisfaire à la condition stricte de stabilité, on ferait $m = 0$, et en posant $p_2 = n\,p_1$, n étant toujours facile à calculer d'après les données numériques de la question, on aurait simplement

$$F\left(h_1 \sin\gamma - l\cos\gamma\right) = \tfrac{1}{2} p_1 \left(e_1^2 h_1 + 2e_1 e_2 h_1 + n e_2^2 h_2\right)$$

équation qui suffit pour obtenir la valeur de l'épaisseur e_2 du contrefort.

46. — *Talus naturel des terres.* — Les murs sont fréquemment employés pour soutenir les terres au-dessus d'un niveau déterminé. Ils prennent alors la désignation de murs de soutènement, et avant d'en rechercher les dimensions nécessaires pour la stabilité, il est indispensable de donner quelques indications sur le talus naturel des terres.

Les terres exposées aux influences atmosphériques sont sujettes à s'ameublir et à rouler sur les pentes trop escarpées, jusqu'à ce que, par l'agglomération des débris, la surface extérieure ait pris une inclinaison définie que l'on appelle le talus naturel des terres, et qui se mesure par l'angle que fait la ligne de plus grande pente avec le plan horizontal.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ce talus des terres est celui que l'on doit nécessairement leur donner dans les travaux de terrassements, si l'on veut être assuré contre tous les éboulements ultérieurs, et en désignant par t l'angle du talus naturel, nous pourrons, d'après l'observation, former le tableau suivant :

Sable fin et sec	$t = 21°$.
Sable très fin	30 à 33.
Sable de rivière	33.
Sable fin bien sec et grès pulvérisé	34.
Sable léger	39.
Terre incohérente et parfaitement sèche	39.
Terre ordinaire bien sèche et pulvérisée	47.
Même terre légèrement humectée	54.
Sol très-dense et très-compact	55.

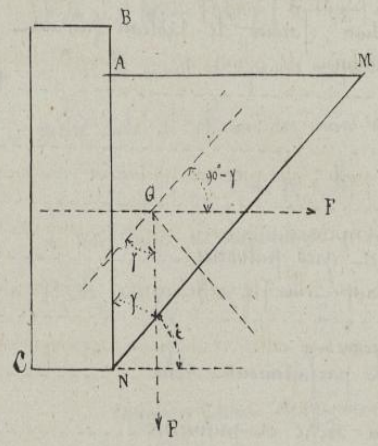
Les terres et les sables pèsent ordinairement de 1400 à 1700 Kil. par mètre cube ; le sable pur, 1900 Kil. ; les maçonneries de moëllons, de 1700 à 2300 Kil, suivant la nature des matériaux.

47. — *Poussée des terres.* — Lorsqu'on veut maintenir les terres sous un angle plus grand que celui du talus naturel, il faut nécessairement les retenir par un obstacle sur lequel elles exercent une poussée plus ou moins grande. Nous appliquerons les principes généraux de la stabilité au cas dans lequel la terre est retenue par un mur de revêtement. Dans toutes les applications de ce genre, on admet que la masse de terre tend à se diviser suivant un plan incliné, de telle manière que le prisme supérieur puisse glisser en bloc sur un plan incliné formé par le massif inférieur.

Cette hypothèse, justifiée par ses conséquences, servira de base à tous nos calculs.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

48. — *Poussée d'un terre plein sur un mur vertical de revêtement.* — Soit un mur vertical A B C sur lequel presse un bloc indéfini de terre A M, si nous supposons que ce bloc soit prêt à se détacher suivant le plan incliné MN, on peut voir facilement quelle est la réaction horizontale F que le mur devrait développer pour s'opposer à cet effet.



Puisque la force F doit être telle que le prisme reste en équilibre lorsqu'il est détaché de la masse environnante, nous exprimerons cette condition en recherchant les composantes normales et parallèles au plan M de cette force F et du poids P du prisme:

Ces composantes normales sont :

$$P \sin i \quad \text{et} \quad F \cos i .$$

Ces composantes parallèles sont :

$$P \cos i \quad \text{et} \quad F \cos i .$$

et en tenant compte du frottement il faudra que l'on ait, à la limite à laquelle le mouvement du prisme pourrait se produire,

$$P \cos i - F \sin i = f (P \sin i + F \cos i),$$

d'où l'on tire

$$F = P \frac{\cos i - \sin i}{\sin i + f \cos i} = P \operatorname{cotg} (\alpha + i),$$

en remarquant que $f = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Pour obtenir l'expression complète de P en fonction des dimensions du prisme, il suffit de remarquer que pour un mètre de profondeur on aura nécessairement

$$P = \pi \times AN \times AM = \pi \times z \times z \operatorname{tang} \gamma = \pi z^2 \operatorname{tang} \gamma.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en désignant par π le poids du mètre cube de terre.

En substituant cette valeur de P dans celle de F on obtient définitivement $F = \frac{1}{2}\pi x^2 \operatorname{tang} \gamma . \operatorname{cotg}(\alpha + \gamma)$,

γ étant ici l'angle complémentaire de celui que nous avons désigné par i dans la théorie du plan incliné.

Si l'on connaissait pour chaque cas particulier cet angle γ, on aurait l'évaluation de la force F égale et contraire à la poussée du prisme sur le mur, dont la mesure est aussi celle de cette poussée. Les conditions de stabilité du mur seraient alors ramenées à celles d'un mur de soutènement résistant à une poussée horizontale.

49. – Détermination du prisme de plus grande poussée. –

La formule précédente ne donne pas la mesure de l'angle γ, avec lequel varie la poussée. Si cet angle augmente, le volume et par conséquent le poids de la terre qui exerce la pression, va aussi en augmentant, et l'on serait conduit à admettre que la poussée devient alors plus grande, si l'on n'avait à tenir compte en même temps de ce que l'augmentation de l'angle γ tend à diminuer la facilité avec laquelle le bloc de terre peut glisser dans le plan de séparation.

De Prony a introduit dans la question la considération du prisme de plus grande poussée, c'est à dire du prisme correspondant à l'angle γ pour lequel F serait maximum.

Pour obtenir la valeur de cet angle, nous chercherons le maximum de la fonction $\operatorname{tang} \gamma \times \operatorname{cot}(\alpha + \gamma)$.

En désignant $\operatorname{tang} \gamma$ par x et $\operatorname{tang} \alpha$ par a, cette fonction devient

$$\operatorname{tang} \gamma \times \operatorname{cotg}(\alpha + \gamma) = \frac{x}{\frac{x+a}{1-ax}} = \frac{x(1-ax)}{x+a}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Sous cette forme nous pouvons calculer sa dérivée et égaler cette dérivée à 0, ce qui donne

$$\frac{(x+a)(1-2ax)-x(1-ax)}{(x+a)^2} = 0 ,$$

d'où l'on tire successivement

$$x + a - 2ax^2 - 2a^2x - x + ax^2 = 0 ,$$

$$x^2 + 2ax - 1 = 0 ,$$

d'où

$$x = a \pm \sqrt{a^2+1} .$$

Il est facile de voir que cette valeur de x correspond à un angle $\gamma = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, car on trouverait $\operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha)$

et

$$\operatorname{tang}(90^\circ - \alpha) = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha)} .$$

Or $\operatorname{tang}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\alpha}$, et par suite la valeur de $\operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ serait précisément donnée par notre précédente équation en x.

Il en résulte que pour la pression de plus grande poussée, la valeur de l'angle γ est

$$\gamma = 45^\circ - \frac{\alpha}{2} ,$$

et l'on en déduit

$$\operatorname{cotg}(\alpha + \gamma) = \operatorname{cotang}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Les deux facteurs $\operatorname{tang} \gamma$ et $\operatorname{cotg}.(\alpha + \gamma)$ sont donc égaux entr'eux pour le prisme de plus grande poussée, et en substituant leur valeur commune dans l'expression de la poussée F, on trouve

$$F = \frac{1}{2} \pi x^2 \operatorname{tang} \gamma \left(\operatorname{cotg}(\alpha + \gamma)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \pi x^2 \operatorname{tang}^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) .$$

Cette formule nous servira pour l'évaluation de la poussée des terres dans tous les cas où leur surface supérieure sera horizontale.

50. — *Assimilation entre la poussée des terres et celle d'un liquide.* — La valeur de F est proportionnelle au carré de x^2, comme nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

J'avons déjà reconnu pour la poussée d'un liquide sur la paroi verticale d'un bâtardeau. Le point d'application de la force F est d'ailleurs placé aux deux tiers de la hauteur du prisme mesuré à partir du plan supérieur, comme nous l'avons aussi reconnu dans le cas du liquide. C'est ce dont il est facile de se rendre compte par les considérations suivantes : la poussée F relative à un prisme de hauteur h étant donnée par l'expression

$$F = \frac{1}{2}\,\pi\, h^2 \operatorname{tang}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right),$$

on peut considérer la poussée totale comme la résultante de forces parallèles et infiniment petites, dont l'expression individuelle est donnée par la différentielle

$$dF = \pi \operatorname{tang}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) dh \times h,$$

chacune de ces forces étant appliquée à la distance h de la surface du terre-plein. En désignant par m la distance de leur résultante à ce même plan on aura nécessairement pour l'égalité des moments

$$F \times m = \int \pi \operatorname{tang}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) dh \times h^2 = \pi \operatorname{tang}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \times \frac{1}{3} h^3 ;$$

et par suite,

$$m = \frac{\pi \operatorname{tang}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \times \frac{1}{3} h^3}{\frac{1}{2}\pi h^2 \operatorname{tang}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2}{3} h ;$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

On peut donc assimiler la poussée de la terre à celle d'un liquide, à la condition de remplacer le poids π' du mètre cube d'eau par la valeur déduite de l'équation précédente, c'est-à-dire par $\pi \operatorname{tang}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Dans l'un des cas, on a

$$F = \frac{1}{2}\,\pi\, x^2 \operatorname{tang}^2\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) ;$$

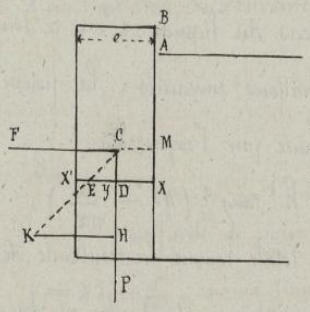
dans l'autre, plus simplement,

$$F' = \frac{1}{2}\,\pi'\, x^2 .$$

51. — *Centre de pression sur un joint du mur de revêtement.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La plus grande poussée des terres ayant été ainsi calculée, nous pouvons déterminer les conditions auxquelles le mur qui les retient doit satisfaire, pour que l'on soit assuré de sa parfaite stabilité. A cet effet, nous chercherons,



conformément à la première règle de Moseley, le centre de pression sur une assise quelconque XX' du mur de revêtement, située à une distance BX = z de la crête du mur, celle-ci dépassant d'une distance AB = n, le niveau du terre-plein.

Le prisme de maçonnerie BXX', dont le poids est P = p e z, si nous représentons par p celui du mètre cube, est soumis à la poussée de toute la portion de terre située au dessus du point X.

Cette poussée s'exerce au point M, à une distance $MX = \frac{1}{3}(z-n)$ et son intensité est $F = \frac{1}{2}\pi(z-n)^2 \operatorname{tang}^2\left(45 - \frac{a}{2}\right)$ en remplaçant dans la formule primitive X par z − n.

La résultante de ces deux forces vient couper le joint XX', en un point E, tel, que l'on a

$$\frac{DE}{CD} = \frac{KH}{CH},$$

ou en désignant DE par y

$$y = CD \times \frac{F}{P} = \frac{1}{3}(z-n)\,\frac{\frac{1}{2}\pi(z-n)^2 \operatorname{tang}^2\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)}{p\,e\,z}$$
$$= \frac{1}{6}\,\frac{\pi \operatorname{tang}^2\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)}{p\,e\,z}(z-n)^3$$

Cette équation en y et en z n'est autre chose que l'équation de la courbe que nous avons désignée jusqu'ici sous le nom de courbe de pression puisque z, y exprime, par rapport au plan de la crête du mur, la hauteur d'une assise quelconque XX', et que y est l'ordonnée DE du centre de pression correspondant à cette assise.

Il est facile de voir que la valeur de y augmente en même temps

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que z, car on peut écrire $y = \frac{1}{6} \frac{\pi \operatorname{tang}^2\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)}{p e} \left(1 - \frac{n}{z}\right) z^2$; et les deux seuls facteurs qui contiennent z, augmentent en même temps que lui.

Le centre de pression E se rapproche donc de la paroi extérieure du mur à mesure que l'on considère une assise plus inférieure, et le danger de rotation est plus grand pour l'assise de fondation que pour toute autre.

Pour cette assise chargée d'une hauteur H de maçonnerie, on trouve immédiatement $y = \frac{1}{6} \frac{\pi \operatorname{tang}^2\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)}{p e} \times \frac{(H-n)^3}{H}$.

Si la crête du mur affleure le plan supérieur du terrassement, il suffit de faire $n = 0$, ce qui conduit à

$$y = \frac{1}{6} \frac{\pi \operatorname{tang}^2\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) H^2}{p e}.$$

52. *Calcul de l'épaisseur à donner au mur.* — Le principe de Moseley exige que la plus grande valeur de y ne dépasse pas le plan de la face extérieure du mur; cette valeur-limite est donc $y = \frac{1}{2} e$, et en la substituant dans l'équation précédente, on trouve

$$e = H \operatorname{tang}\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\pi}{p}};$$

et, dans le cas d'une surélévation à la crête,

$$e = \operatorname{tang}\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\pi}{p} \frac{(H-n)^3}{H}}.$$

Si nous faisions comme précédemment

$$\frac{1}{2} e = y + m \quad \text{ou} \quad y = \frac{e}{2} - m,$$

l'équation en e deviendrait

$$e^2 - 2me = \frac{\frac{1}{3} \pi \operatorname{tang}^2\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)(H-n)^3}{p H},$$

et la valeur de e serait alors

$$e = m \pm \sqrt{m^2 + \frac{1}{3} \frac{\pi}{p} \operatorname{tang}^2\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{(H-n)^3}{H}}.$$

Remarquons que nous avons désigné par α l'angle de frottement de la terre sur la terre, c'est-à-dire l'angle que fait la résultante R des réactions normale et tangentielle avec la perpendiculaire au plan de glissement; on voit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ainsi que cet angle α n'est autre que celui que nous avons désigné sous le nom d'angle du talus naturel des terres.

Dans les applications de la formule, cet angle devra, autant que possible, être déterminé par expérience directe, et il ne faudra se servir des chiffres indiqués dans la table que quand on ne pourra recueillir aucune donnée sur la valeur réelle de l'angle de talus. L'examen des localités voisines permettra souvent d'en trouver la valeur par observation.

53. _Condition relative au glissement._ Jusqu'ici nous n'avons encore exprimé que la condition relative à la rotation d'une assise autour de son arête extérieure, et il faut encore voir si le glissement n'est possible dans aucun des plans de joint.

Le glissement ne sera possible que si l'angle DCE de la figure précédente est plus petit que l'angle α' de frottement, relatif aux matériaux dont le mur est formé.

La tangente de cet angle ou le coefficient de ce frottement étant désigné par f', il faudra donc que $f' > \text{tang DCE}$, ou

$$f' > \frac{KH}{CH} ; \quad f' > \frac{1}{2}\frac{\pi}{pez}\,\text{tang}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)(z-n)^2.$$

Le second membre de cette expression augmente en même temps que z, la tendance au glissement devient donc plus grande, quand le revêtement a plus de hauteur.

L'épaisseur e' de ce revêtement, considérée par rapport à la plus grande hauteur H doit donc satisfaire à la condition

$$e' > \frac{1}{2}\frac{\pi\,\text{tang}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)(H-n)^2}{pf'H};$$

et l'on peut remarquer qu'il n'y aurait lieu d'appliquer cette règle, que quand on aurait $e' > e$; on, en supprimant les termes semblables dans cette inégalité,

$$\frac{1}{2}\frac{\pi\,\text{tang}\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)(H-n)^2}{pf'H} > \sqrt{\frac{1}{3}\frac{n}{p}\frac{(H-n)^3}{H}}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

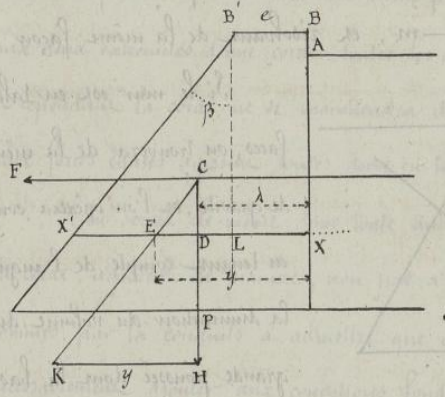
on arrive, par l'élévation au carré, à la relation plus simple,

$$\frac{H-n}{H} > \frac{4}{3}\,\frac{n}{\pi} \times \frac{1}{\operatorname{tang}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Si $n = 0$, cette relation revient à

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) > \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

54. *Mur de revêtement en talus.* — Il est avantageux de donner aux murs de revêtement un talus extérieur qui permet, avec une moindre largeur à la crête, de résister plus efficacement à la rotation. Les équations d'équilibre sont alors très-peu modifiées, et s'obtiennent en suivant absolument la même marche que précédemment.



La poussée de la terre reste soumise aux mêmes évaluations. Le poids du mur, au-dessus d'une assise XX', de hauteur z au dessous de la crête, devient

$$P' = p \times \text{volume } BB'XX' = p\left(cz + \frac{1}{2}z^2 \operatorname{tang}\beta\right)$$

et si l'on désigne par λ l'ordonnée DX du centre de gravité, le triangle CDE nous donnera encore la relation

$$DE = CD\,\frac{KH}{CH} \quad \text{ou} \quad y - \lambda = \frac{1}{3}(z-n)\,\frac{F'}{P'}.$$

En mettant pour F sa valeur générale, et pour P', celle que nous venons d'indiquer, on trouve :

$$y - \lambda = \frac{\pi}{3p}\,\frac{\operatorname{tang}^2\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)(z-n)^3}{2cz + z^2 \operatorname{tang}\beta}$$

La valeur de λ s'obtiendra en remarquant que cette quantité doit satisfaire à l'équation par laquelle on exprime que le point C est sur la verticale du centre de gravité des deux solides BB'LX, B'LX', ce qui donne

$$P' \times \lambda = \frac{1}{2}c \times pez + p\left(c + \frac{1}{3}z \operatorname{tang}\beta\right) \times \frac{1}{2}z \operatorname{tang}\beta.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où l'on tire

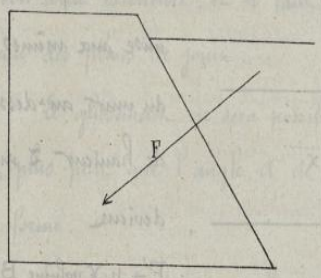
$$\lambda = \frac{e^2 z + e z^2 \operatorname{tang}\beta + \frac{1}{3} z^3 \operatorname{tang}^2\beta}{2ez + z^2 \operatorname{tang}\beta}.$$

En substituant cette valeur de λ dans celle de y, il vient enfin

$$y = \frac{\frac{\Pi}{\Delta'}(z-n)^3 \operatorname{tang}^2(45 - \frac{\alpha}{2}) + \frac{1}{3} z^3 \operatorname{tang}^2\beta + e z^2 \operatorname{tang}\beta + e^2 z}{2ez + z^2 \operatorname{tang}\beta}.$$

On obtiendra l'épaisseur nécessaire à la base, en remplaçant z par H et y par $y = e + H \operatorname{tang}\beta$.

La valeur de e résultant de l'équation du second degré ainsi calculée, répondra à la condition stricte de stabilité, et l'on obtiendra, comme précédemment, la valeur pratique E de l'épaisseur la plus convenable, en faisant $y = e + H \operatorname{tang}\beta - m$, et résolvant de la même façon.



Si le mur est en talus sur les deux faces, on trouvera de la même façon son centre de gravité, et l'on opérera comme précédemment en tenant compte de l'augmentation ou de la diminution du volume du prisme de plus grande poussée dont la base ne sera plus alors un triangle équilatéral.

Les murs en retraite du côté de la poussée sont avantageux en ce que le bras de levier de la poussée F qui s'exerce normalement à leur talus est moins efficace au point de vue de la rotation, et cette disposition est surtout favorable pour l'établissement des batardeaux.

55. *Emploi des chaînes et cordages.* — Nous avons déjà vu que les chaînes et les cordes sont surtout d'un emploi commode lorsqu'il s'agit de transmettre à distance des efforts plus ou moins considérables ; elles sont aussi employées d'une manière permanente dans certains genres de constructions, mais elles doivent alors satisfaire à certaines conditions de stabilité que nous étudierons

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sous le titre de stabilité des polygones funiculaires.

56. *Stabilité des polygones funiculaires.* — Les équations générales d'équilibre s'appliquant à tout système de points matériels sollicités par des forces, il est clair que la stabilité ne saurait être assurée si ces six conditions d'équilibre n'étaient pas satisfaites. Mais il est facile de voir que si elles sont absolument nécessaires, elles ne sont néanmoins pas suffisantes pour assurer la stabilité d'une construction, même dans les cas les plus simples.

Si par exemple on considère deux forces égales appliquées en sens contraire aux deux extrémités d'une corde, toutes les conditions d'équilibre seront réalisées et cependant la corde ne se maintiendra dans une position stable que si ces deux forces égales agissent toutes deux en tirant.

Il en serait de même dans toute autre condition si les forces qui sollicitent la corde, agissent de manière, non pas à la tendre, mais à la plier et nous sommes par là conduits à admettre que dans les systèmes funiculaires, il faut nécessairement ajouter aux conditions fondamentales, la condition spéciale de maintenir toutes les portions du système dans un état de tension et non dans un état de compression.

57. *Parallèle entre les constructions en maçonnerie et les systèmes funiculaires.* Il y a entre les conditions de stabilité des constructions en maçonnerie et de celle des systèmes funiculaires, un rapprochement très important qu'il convient de mettre en évidence. Les maçonneries ne peuvent résister qu'à des efforts de compression, et les règles de Moseley indiquent nettement que les forces qui déterminent ces efforts de compression doivent toujours exercer leur action de manière à appuyer les différents éléments de la construction les uns sur les autres. C'est l'inverse qui a lieu pour les systèmes funiculaires, et nous devons dès lors nous attendre à ce que leur stabilité exige des conditions différentes qui seront un peu plus tard résumées dans la règle de Varignon, qui se trouve dès lors l'analogue de la règle de Mozeley, pour les maçonneries.

Nous examinerons en premier lieu les cas les plus simples avant de chercher à exprimer les conditions générales

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

58. *Cas d'une corde tirée par les deux bouts.* — Il y a pour les systèmes funiculaires comme pour les maçonneries à considérer, pour la stabilité, des conditions spéciales, relatives à la résistance des matériaux.

Ainsi la corde de notre première hypothèse, n'est en équilibre lorsqu'elle est tirée par les deux bouts, que si les deux forces F et $-F$ qui la sollicitent sont égales, de signes contraires, et agissent par traction, mais cette corde ne sera dans des conditions stables que si elle peut résister en toutes ses sections à l'effort de traction F auquel elle est soumise, et la considération de la résistance des éléments matériels dont elle se compose conduit à la détermination de la section transversale.

Le poids de la corde peut aussi jouer un rôle secondaire dans les conditions de stabilité, mais lorsque les efforts exercés sur les cordes, sont un peu grands, comme cela a lieu dans la manœuvre des fardeaux, on néglige toujours cette influence du poids propre de la corde, et c'est ce que nous supposerons, en général, pour l'établissement des conditions de stabilité.

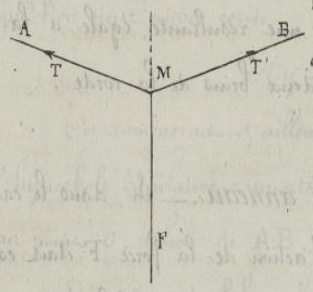
59. *Cas d'une force intermédiaire.* — Si la corde est soumise à l'action d'une troisième force en un point quelconque de sa longueur, les deux premières ne pourront plus être égales et opposées, et les trois forces agissant par traction, on pourra considérer le système comme s'il était solidifié après l'établissement de l'équilibre, ce qui fait voir que les conditions auxquelles elles devront satisfaire, sont celles de l'équilibre de trois forces appliquées à un même point, c'est-à-dire que ces trois forces devraient être dans un même plan, et que l'une quelconque d'entr'elles devrait être égale à la résultante des deux autres ce qui donne en projetant successivement ces forces sur la direction de l'une d'elles, ou sur une direction perpendiculaire,

$$F + T\cos(T,F) + T'\cos(T',F) = 0\ ,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou bien encore $T \sin(F,T) - T' \sin(F,T') = 0$,

$T \sin(T,T') - F \sin(F,T') = 0$

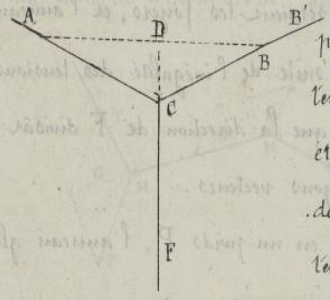


d'où $\frac{T}{F} = \frac{\sin(F,T')}{\sin(T,T')}$.

Si les deux tensions T et T' étaient égales il faudrait que la direction de la force F divisât en deux parties égales l'angle AMB et que l'on eût en outre

$$F = 2T \cos ACD = 2T \frac{CD}{AC}$$

si la ligne AD est menée par le point A perpendiculairement à la bissectrice qui indique la direction de la force F.



On voit par cette relation que F étant aussi petit que l'on voudra pourrait équilibrer les deux tensions T, si le rapport CD : AC, ou si CD était très petit. C'est ainsi que l'on peut exercer de très grands efforts longitudinaux avec une corde tendue ACB' sur laquelle on exerce des efforts latéraux relativement très faibles, en un point intermédiaire tel que C.

Si la corde ACB' était extensible, et que sous l'action de la force F, AD put devenir $AC = AD \times m$, la formule précédente serait encore applicable et donnerait

$$F = 2T \sqrt{\frac{m^2 - 1}{m^2}} = 2T \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}} ,$$

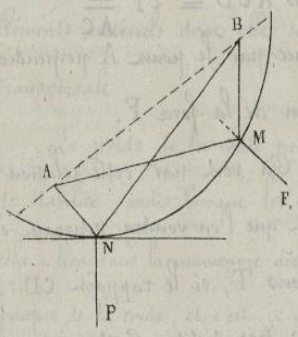
ce qui pour $m = 1$ donnerait à la limite et pour une corde absolument inextensible $F = 0$, comme dans le calcul précédent.

6o. *Équilibre d'un plus grand nombre de forces concourantes.* L'équilibre subsisterait encore si la force F était remplacée par-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

deux ou un plus grand nombre de forces appliquées sur le même nœud, et les conditions mêmes de cette substitution détermineront les conditions d'équilibre; toutes ces forces devront avoir une résultante égale à la force F, et dirigée, comme elle, dans le plan des deux brins de la corde.

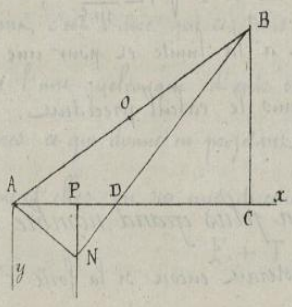
61 – *Assemblage à anneau.* — Si, dans le cas de trois forces appliquées à un même cordon, l'action de la force F était exercée par l'intermédiaire d'une corde terminée par un anneau mobile N, on pourrait suivant la direction de la force F, obtenir autant de positions d'équilibre que l'on voudrait. Le point M décrirait alors une ellipse dont les points A et B seraient les foyers, et l'anneau se déplacerait, par suite de l'inégalité des tensions T et T' jusqu'à ce que la direction de F divisât en deux parties égales l'angle AMB des deux rayons vecteurs.



Si la force F consiste en un poids P, l'anneau glissera jusqu'au point le plus bas N de l'ellipse.

Si d'ailleurs on faisait varier la longueur du cordon, il est facile de voir que le lieu des points tels que N serait une hyperbole équilatère dont nous pouvons trouver l'équation.

Prenons pour origine des coordonnées le point fixe A et pour axes l'horizontale et la verticale de ce point. Si nous posons AC = 2a, et BC = 2b, les 2 triangles PND, BCD donnent



$$\frac{PN}{PD} = \frac{BC}{CD} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x} = \frac{2b}{2a-2x} = \frac{b}{a-x}$$

en remarquant que AP = PD parce que la verticale PN divise l'angle AND en deux parties égales.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'équation du lieu est donc

$$y(a-x) = bx ,$$

que l'on peut encore écrire

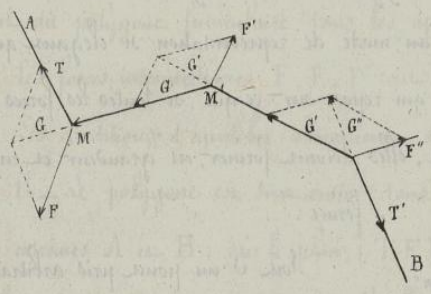
$$(y+b)(a-x) = ab .$$

On ramènerait d'ailleurs cette équation à la forme ordinaire de celle de l'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes, si l'on transportait l'origine au point O, milieu de AB, pour lequel on a : $x_1 = a$, $y_1 = b$.

L'équation de l'hyperbole serait alors ramenée à

$$x'y' = ab$$

62. *Polygone funiculaire* — Le polygone funiculaire se compose d'une suite de cordons AM , MM' , M'M'', M''B , dont les tensions extrêmes sont représentées par T et T', et aux diverses articulations desquels s'exercent des forces F, F', F'' ....



Les six conditions générales de l'équilibre sont ici nécessaires comme dans tout autre système, mais, par suite de la flexibilité des cordons, elles ne seraient pas, à elles seules suffisantes.

On arrive d'ailleurs à la détermination de ces conditions, en partant de celles qui sont relatives à l'équilibre de trois cordons concourants.

La tension G du brin MM' doit être égale et opposée à la résultante G des deux forces T et F appliquées à l'articulation M, et par suite le cordon MM' doit être dans le plan (F T).

Ce même cordon MM' exerce la tension G sur le point M', et cette traction G doit faire équilibre, tout à la fois, à la force F' et à la tension G'

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

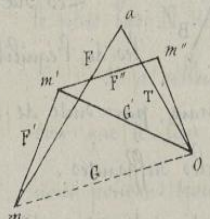
du cordon M'M", qui doit dès lors être situé dans le plan (G F').

En raisonnant ainsi de proche en proche, on arrivera à un dernier groupe de forces F_n, G_{n-1}, qui devra faire équilibre à la tension T', dont le plan et la direction se trouveront être ainsi déterminés.

En considérant un cordon intermédiaire tel que M' M", on pourrait dire que ce cordon devant résister par ses deux extrémités à deux actions contraires, il faudra que la résultante de toutes les forces agissant à gauche du point M' fasse équilibre à la résultante de toutes les forces à droite du point M".

Nous avons déjà employé des raisonnements analogues dans les calculs relatifs à la résistance des matériaux.

63. *Polygone de Varignon.* — Ce sont ces conditions qui ont donné naissance au mode de représentation si élégant qui constitue le théorème de Varignon, et qui repose sur ce que, si toutes les forces qui composent le système sont en équilibre, elles doivent former, en grandeur et en direction un polygone fermé.



Soit o un point pris arbitrairement, à partir duquel nous mènerons la ligne oa, égale et parallèle à T; à partir du point a nous mènerons la ligne am égale et parallèle à F; puis m m', m' m", m" o, respectivement égales et parallèles aux autres forces F', F" et T' du système.

Nous savons que pour que la résultante de translation de toutes les forces considérées soit nulle, il faut que le polygone ainsi construit soit fermé, et c'est là la première condition de l'équilibre.

Si l'on joint tous les sommets du polygone au point o, on remarquera que chacune des diagonales om, om', om", représente, en grandeur et en direction, l'une des tensions G, G', G", et ainsi ces diagonales représentent les directions

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

successives en même temps que les tensions de ces divers cordons.

Le polygone de Varignon présente donc cette double particularité que ses côtés représentent les forces extérieures, et les diagonales les forces intérieures ou tensions des divers cordons du polygone funiculaire.

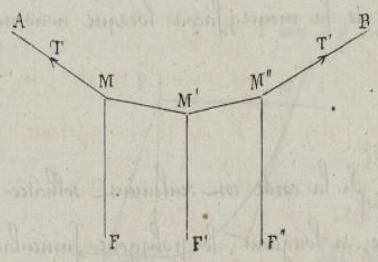
Enfin comme dernière condition de stabilité, il sera nécessaire que la tension T ou G de chaque cordon ne soit pas supérieure à celle qu'il peut supporter sans détérioration, en raison de sa section transversale.

Les règles tirées du polygone de Varignon sont pour la stabilité des systèmes funiculaires, du même ordre que celles de Moseley par rapport aux matériaux juxtaposés.

64. *Cas où toutes les forces sont verticales.* — Le cas le plus important du polygone funiculaire dans les applications, est celui dans lequel toutes les forces intermédiaires F, F', F'' sont verticales.

Les conditions d'équilibre s'énoncent alors d'une manière un peu différente.

1°. — Le polygone est tout entier dans le plan vertical qui passe par les points extrêmes A et B; car le plan (T F) qui est le même que (F G) doit, pour les mêmes raisons, contenir toutes les forces parallèles F', F'' etc.



2°. — Les projections horizontales de toutes les tensions sont égales; car une telle projection pour un point quelconque M' d'articulation, ne peut être autre que la projection de la seule force oblique T' sur l'horizontale du point M.

3°. — La somme des projections verticales de deux tensions quelconques des cordons, est égale à la somme des forces parallèles intermédiaires; car il doit y avoir équilibre entre toutes ces forces verticales parce que les tensions obliques forment évidemment avec elles un système

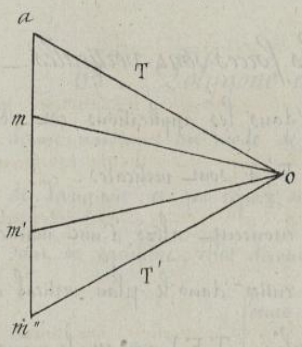
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui est individuellement en équilibre.

4° — Deux cordons quelconques se rencontreraient sur la verticale du centre de gravité de toutes les forces intermédiaires ; car toutes ces forces intermédiaires ont pour résultante une force parallèle passant par ce centre de gravité, et cette résultante doit faire équilibre aux deux tensions des cordons entre lesquels elles sont comprises.

Cette propriété très-importante est celle sur laquelle repose toute la théorie de la chaînette.

65. *Application du polygone de Varignon dans ce cas.*



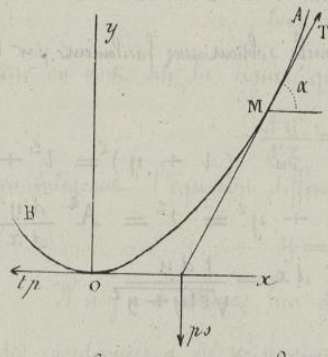
Si nous répétons sur la figure ci-jointe la construction du polygone de Varignon, nous voyons que les côtés extérieurs a m, m m', m' m''..... qui doivent représenter les forces extérieures sont tous sur une même verticale a m''. Les tensions T et T' aux points A et B sont alors représentées par les côtés a o et m'' o, et les conditions d'équilibre se déduisent immédiatement de la considération de ce seul polygone que nous pourrons construire de la même façon lorsque nous nous occuperons des ponts suspendus.

66. *Chaînette* — Si la corde est seulement sollicitée par son poids uniformément réparti sur toute sa longueur, le polygone funiculaire devient une courbe continue qui porte le nom de chaînette, et dont l'équation se déduit de considérations analogues aux précédentes.

En exprimant les tensions en chaque point par un multiple du poids p du mètre courant de la corde, la tension, au point le plus bas, sera repré-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

soutée par tp, celle d'un point quelconque par Tp, et le poids de la corde elle-même par ps.



La projection horizontale de la tension Tp étant la même en tous les points et égale à tp, on a pour première relation $\quad Tp \cos\alpha = tp$.

La projection verticale de cette tension est égale au poids ps de la corde de O en M, et l'on a par conséquent

$$Tp \sin\alpha = ps$$

En divisant tous les termes par p, on arrive aux équations plus simples

$$T = \frac{t}{\cos\alpha} = t \sec\alpha \text{ ou } T = \frac{s}{\sin\alpha}, \quad \text{et}$$

$$s = \frac{t \sin\alpha}{\cos\alpha} = t \operatorname{tang}\alpha = t\,\frac{dy}{dx}.$$

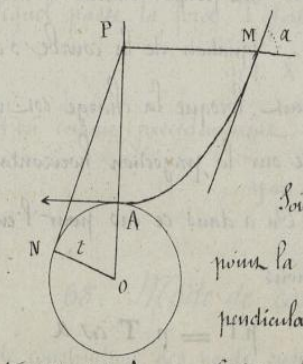
On voit ainsi que dans la chaînette, les tensions sont proportionnelles aux sécantes de l'inclinaison, ou aux rapports entre la longueur de l'arc et le sinus. Les arcs comptés à partir du bas de la courbe sont proportionnels à la tangente du même angle.

En différentiant les deux dernières équations, on trouve très-simplement

$$ds = \frac{t\,da}{\cos^2\alpha} \quad \text{et} \quad dT = \frac{t \sin\alpha\, d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

ce qui conduit à la relation

$$dT = ds \sin\alpha = dy \qquad \text{d'où} \qquad T = y + t$$



Cette relation donne lieu à une construction géométrique remarquable de la tangente en un point donné de la courbe.

Soit M un point quelconque de la courbe, conduisons par ce point la parallèle PM à l'axe des x, et par le pied P de cette perpendiculaire menons la tangente PN au cercle de rayon $OA = t$, et tangente en A. Le triangle OPN nous donne en vraie grandeur plusieurs des éléments de la question ;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ainsi $ON = t$; $OP = OA + AP = t + y = T$,

$$\text{angle } PON = \text{angle cos } \frac{ON}{OP} = \text{angle cos } \frac{t}{T} = \alpha ;$$

$$NP = OP \sin \alpha = T \sin \alpha = s$$

L'équation finale de la courbe s'obtient assez facilement par la considération seule de ce triangle qui donne

$$T^2 = t^2 + s^2 \quad \text{ou} \quad (t + y)^2 = t^2 + s^2$$

qui se réduit à $\qquad 2ty + y^2 = s^2 = A^2 \frac{dy^2}{dx^2}$.

on tire de là $\qquad dx = \frac{t\,dy}{\sqrt{2ty + y^2}}$

ce en remarquant que

$$d(t + y + \sqrt{2ty + y^2}) = dy\left(1 + \frac{t+y}{\sqrt{2ty+y^2}}\right) = \frac{dy(t+y+\sqrt{2ty+y^2})}{\sqrt{2ty+y^2}}$$

$$dx = \frac{t\,d(t + y + \sqrt{2ty + y^2})}{t + y + \sqrt{2ty + y^2}}$$

d'où en intégrant

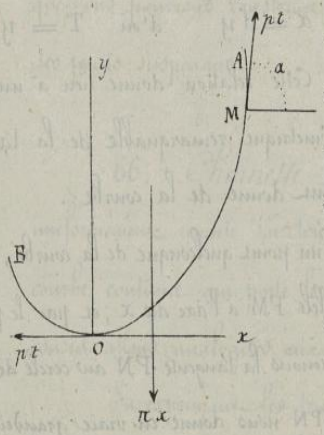
$$x = t \text{ log. hyp. } (t + y + \sqrt{2ty + y^2}) + t \text{ log. hyp. } c$$

$$= t \text{ log hyp } \frac{t + y + \sqrt{2ty + y^2}}{t} = t \text{ log hyp } \frac{t + y + s}{t}$$

On arriverait à la même équation en partant directement des équations primitives.

67. *Chaîne chargée d'un poids uniformément réparti.*

Dans les calculs relatifs à la chaînette nous avons supposé que la charge supportée était proportionnelle à la longueur de la corde. L'équation de la courbe s'obtient plus simplement, lorsque la charge est uniformément répartie sur la projection horizontale de la corde.



On a dans ce cas pour l'emploi des mêmes notations

$$pt = p\,T \cos \alpha$$

$$\pi x = p\,T \sin \alpha$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

π étant le poids uniformément réparti sur chaque mètre de projection, on a par suite

$$\text{tang } \alpha = \frac{\pi x}{p t} = \frac{dy}{dx}$$

car on voit sur la figure que d'après le choix des axes on a nécessairement

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang } \alpha$$

en intégrant l'équation différentielle en x et en y, on trouve immédiatement

$$y = \frac{1}{2} \frac{\pi x^2}{p t}$$

Il n'y a d'ailleurs lieu d'introduire aucune constante puisque l'origine des coordonnées a été prise sur la courbe, au point le plus bas.

Pour éliminer l'inconnue t, il suffit de remarquer que la chaîne est attachée en A, point pour lequel on a $y = h$, $x = l$, ce qui donne

$$h = \frac{1}{2} \frac{\pi l^2}{p t}$$

et en divisant l'équation générale par cette dernière relation

$$y = \frac{h}{l^2} x^2$$

L'équation de cette parabole s'obtiendrait encore plus facilement en remarquant que le centre de gravité de la charge uniformément répartie πx, comprise depuis le point O jusqu'au point M a son centre de gravité sur la verticale dont l'abscisse est $\frac{x}{2}$. Or les trois forces pt, pT, et πx devant se faire équilibre, la somme des moments des forces t et πx par rapport au point M par lequel passe la force T doit être nulle, ce qui fournit directement la relation

$$pt \times y = \pi x \times \frac{x}{2}$$

d'où comme précédemment

$$y = \frac{1}{2} \frac{\pi x^2}{2}$$

68. *Mode de construction des ponts suspendus.* Le mode de construction des ponts suspendus consiste à relier par des tiges verticales également espacées, un tablier horizontal ou légèrement courbe à une chaîne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

flexible solidement attachés à deux points fixes.

Si les points d'attache offrent une stabilité suffisante, si la chaîne elle-même est convenablement calculée ainsi que les tiges de suspension, ce mode de construction permet, avec une moindre dépense de soutenir des tabliers d'une grande longueur, et c'est cette diminution de la dépense, qui a pendant quelque temps conduit les constructeurs à l'établissement des nombreux ponts suspendus, que l'on remplace aujourd'hui, dans un grand nombre de cas, par des dispositions offrant un plus grand caractère de solidité.

Pour calculer les conditions d'équilibre d'un pareil système, on fait ordinairement abstraction du poids de la chaîne, de celui des tiges, et l'on suppose que chacune de ces tiges supporte individuellement la moitié du poids de chacune des parties du tablier comprises entre elle et les deux tiges voisines.

Chacune des tiges agissant dans cette hypothèse sur une fraction du tablier, que l'on suppose entièrement isolée, se trouve ainsi chargée d'un poids déterminé, et l'étude des conditions de stabilité, est alors ramenée à celle des conditions d'équilibre d'un polygone funiculaire au sommets duquel viennent agir des forces toutes parallèles entr'elles et situées dans un même plan vertical.

En ce qui concerne le pont suspendu, la question est même plus simple puisque toutes ces forces parallèles sont équidistantes ; et qu'en supposant le tablier horizontal et de même construction dans toute sa longueur, chacune d'elles a la même valeur, mesurée par le poids d'une travée isolée du tablier.

L'hypothèse ainsi faite de l'indépendance absolue des différentes travées du tablier, étant d'ailleurs défavorable à la stabilité du système, les règles que l'on en pourra déduire pour la construction ne sauraient être inexactes que dans le sens d'un excès de sécurité.

69. Application des règles de stabilité du polygone

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

funiculaire aux ponts suspendus. L'application de la théorie du polygone funiculaire est tellement simple dans ce cas que nous nous bornerons à énoncer les théorèmes principaux qui en dérivent immédiatement pour le cas particulier des ponts suspendus, si l'on considère isolément telle ou telle partie du système.

I — La somme des projections horizontales de toutes les tensions doit être nulle, et celle des tensions extrêmes sont égales entr'elles.

II — La composante horizontale de la tension d'un côté quelconque est constante et égale à t, tension du côté horizontal s'il en existe.

III — La somme des composantes verticales doit être égale au poids total $2\pi l$ du tablier.

IV — La composante verticale de la tension, en un sommet quelconque est égale à la somme des poids suspendus depuis le point le plus bas du polygone jusqu'au sommet considéré.

V — La tension va en augmentant à mesure que l'on s'éloigne de cette horizontale, et elle serait proportionnelle à la sécante de l'inclinaison du côté que l'on considère sur l'horizontale.

Cette dernière proposition se déduit immédiatement de la relation

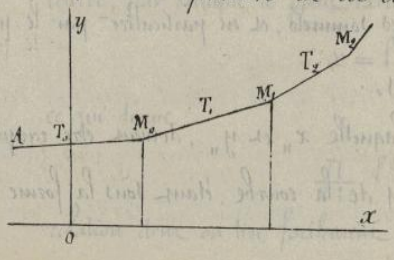
$$T_n \cos \alpha_n = T_0 \cos \alpha_0 = t$$

d'où

$$T_n = t \sec \alpha_n$$

Ces propositions suffisent pour caractériser toutes les conditions de l'équilibre des ponts suspendus.

70. — Équation de la courbe qui passe par les sommets.



Soit A le point le plus bas du polygone $AM_0, M_1, M_2 \ldots\ldots$ formé par les côtés successifs de la chaîne, il est facile de voir que tous les sommets M_0, M_1, M_2

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sont sur une courbe dont nous pouvons trouver l'équation.

Si nous rapportons cette courbe à deux axes Ox et Oy, l'un horizontal et l'autre vertical, passant par le milieu du côté inférieur AM_o, nous pourrons obtenir une autre évaluation de la tension T_n, en remarquant que sa projection verticale $T_n \sin \alpha_n$ est nécessairement égale à la projection verticale $T_o \sin \alpha_o$ de la tension de AM_o, augmentée du poids de la portion de tablier comprise entre le point O, et la verticale qui passe par le milieu de la travée qui suit le sommet considéré

On a ainsi :

$$T_n \sin \alpha_n = T_o \sin \alpha_o + \pi \left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2} \right)$$

en divisant cette équation par la précédente ou $T_n \cos \alpha_n$, et en remarquant que $\frac{T_n \sin \alpha_n}{T_n \cos \alpha_n} = \operatorname{tang} \alpha$, $\operatorname{tang} \alpha_n = \operatorname{tang} \alpha_o + \frac{\pi}{2t} (x_n + x_{n-1})$

mais on a aussi pour un côté quelconque, $\operatorname{tang} \alpha_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

et en égalant entr'eux les deux seconds membres, on trouve :

$$\frac{\pi}{2t} (x_n + x_{n-1}) + \operatorname{tang} \alpha_o = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

et en chassant le dénominateur

$$\frac{\pi}{2t} (x_n^2 - x_{n-1}^2) + \operatorname{tang} \alpha_o (x_n - x_{n-1}) = y_n - y_{n-1}$$

On aurait une pareille équation pour chaque valeur de n, la première équation de cette série étant la suivante :

$$\frac{\pi}{2t} (x_1^2 - x_o^2) + \operatorname{tang} \alpha_o (x_1 - x_o) = y_1 - y_o .$$

et en additionnant toutes ces équations terme à terme pour éliminer les quantités x_{n-1} et y_{n-1}, on arrive à l'équation générale

$$\frac{\pi}{2t} (x_n^2 - x_o^2) + \operatorname{tang} \alpha_o (x_n - x_o) = y_n - y_o$$

qui ne contient plus d'autre variable que x_n et y_n, et qui est l'équation d'une parabole passant par tous les sommets, et en particulier par le point M_o dont les coordonnées sont x_o et y_o.

Cette équation, dans laquelle x_n et y_n, doivent être remplacés par les coordonnées courantes x et y de la courbe, étant sous la forme $ax^2 + bx + c = y$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on peut en conclure que son axe principale est parallèle à l'axe des y, et pour ramener l'équation à sa forme la plus simple on pourra toujours transporter les axes parallèlement à eux-mêmes, en prenant pour origine le sommet de la parabole.

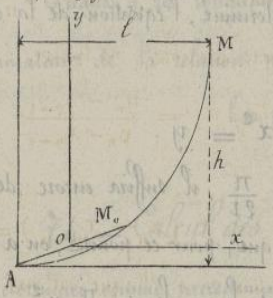
Le point A, en particulier est sur cette courbe, car ses coordonnées sont $-x_0$ et $-y_0$, et elles satisfont simultanément à l'équation qui se réduit alors à la relation

$$2x_0 \operatorname{tang} \alpha_0 = 2y_0$$

qui indique que la ligne AM est une corde de la courbe

71. *Distinction relative à la position de la corde inférieure du polygone.*

— Nous considérerons dans cette discussion deux cas distincts



1° — Si l'angle α_0 n'est pas nul et alors le point A de AM_0 est le sommet de la parabole, car si l'on calcule la valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation,

on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\pi}{2t}\, x + \operatorname{tang} \alpha_0$$

et cette quantité devient nulle pour

$$x = -\operatorname{tang} \alpha_0 \frac{t}{\pi};$$

ce qui est précisément la valeur de l'abscisse du point A.

En choisissant ce sommet pour origine des coordonnées, l'équation deviendra

$$\frac{\pi}{2t}\, x^2 = y.$$

et pour en déterminer le paramètre, il suffira de connaître un seul point de la courbe, par exemple le point extrême N, dont les coordonnées sont connues :

$$x = l \quad , \quad y = h$$

ce qui donne

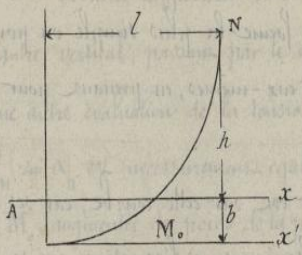
$$\frac{\pi}{2t}\, l^2 = h$$

relation dont on tire facilement la valeur de $\frac{\pi}{2t} = \frac{h}{l^2}$ et celle de $t = \frac{\pi l^2}{2h}$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2° — Si l'angle α_0 est nul, il faut alors faire dans l'équation de la parabole, rapportée à l'axe Ax, $\tang \alpha_0 = 0$, $y = 0$, ce qui réduit cette équation à

$$\frac{\pi}{2l}(x^2 - x_0^2) = y.$$



Le sommet de la courbe est alors placé sur l'axe des y, à une certaine distance au dessous de l'origine des coordonnées.

Pour y transporter les axes, il suffira de faire $y = y' - b$, ce qui donne par substitution

$$\frac{\pi}{2l} x^2 = y' - b + \frac{\pi}{2l} x_0^2$$

et cette équation se réduira à la forme la plus simple pour

$$b = \frac{\pi}{2l} x_0^2.$$

Soit O le point ainsi déterminé, l'équation de la courbe rapportée aux axes OX' et OY sera encore

$$\frac{\pi}{2l} x^2 = y.$$

et pour déterminer le paramètre $\frac{\pi}{2l}$, il suffira encore de remarquer que la courbe passe par le point N, et que, pour ce point, on a

$$y = h_1 + b = h + \frac{\pi}{2l} x_0^2$$

ce qui donne

$$\frac{\pi}{2l} l^2 = h + \frac{\pi}{2l} x_0^2$$

et par suite

$$\frac{\pi}{2l} = \frac{h}{l^2 - x_0^2}.$$

On pourra donc, dans les deux cas considérés, déduire la valeur du paramètre de la connaissance de la portée à franchir $2l$, et de la hauteur h du dernier sommet au-dessus du sommet le plus bas de la courbe.

72. — *Équation directe de la courbe dans le cas où les tiges sont infiniment rapprochées.* — On arriverait plus facilement à cette équation d'une parabole, si l'on supposait que les tiges sont infiniment —

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rapprochées. C'est précisément cette courbe que nous avons calculée à la suite de la chaînette elle a pour équation $y = \frac{1}{2}\frac{\pi}{t}x^2$, et l'on déduirait, comme précédemment, de cette équation la valeur de t en fonction des coordonnées du point M, $t = \frac{\pi l^2}{2h}$ et l'on calculerait ensuite T par la relation.

$$T = \sqrt{t^2 + \pi^2 x^2} = \pi\sqrt{x^2 + \left(\frac{l^2}{2h}\right)^2}$$

73.— *Inclinaison et longueur d'un côté quelconque.*— En partant de l'équation générale de la courbe, on pourra calculer les valeurs de y qui correspondent aux deux abscisses x_{n-1} et x_n, et l'on aura immédiatement la valeur de l'inclinaison par la formule

$$\cos\alpha_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{(y_n - y_{n-1})^2 + (x_n - x_{n-1})^2}}$$

Quant à la longueur du côté correspondant, elle sera donnée par le dénominateur de la relation précédente

$$l_n = \sqrt{(y_n - y_{n-1})^2 + (x_n - x_{n-1})^2}$$

74.— *Calcul des tensions.*— La valeur du paramètre $\frac{\pi}{2t}$ ayant été déterminée comme précédemment, on trouve pour le cas où l'inclinaison de l'élément inférieur de la courbe n'est pas nulle

$$t = \frac{\pi l^2}{2h}$$

et pour le cas du côté inférieur horizontal

$$t = \frac{\pi(l^2 - x_o^2)}{2h}.$$

On connaît donc, dans les deux hypothèses, la valeur de la tension horizontale, et pour avoir la tension même t_n d'un côté quelconque, il suffit d'écrire.

$$T_n \cos\alpha_n = t$$

d'où

$$T_n = \frac{t}{\cos\alpha_n} = \frac{t\sqrt{(y_n - y_{n-1})^2 + (x_n - x_{n-1})^2}}{x_n - x_{n-1}}.$$

75.— *Longueur de la chaîne.*— Pour déterminer la longueur totale

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la chaîne, il suffirait d'additionner les longueurs de tous les côtés, mais cette longueur totale diffère peu de la longueur de l'arc de parabole correspondant, on il vaut mieux dès lors chercher approximativement la mesure de ce dernier arc.

S'équation de la courbe étant ramenée à la forme $ax^2 = y$, on a entre les éléments dx et dy la relation

$$2axdx = dy$$

en substituant cette valeur de dy dans l'expression générale de ds, on obtient immédiatement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx(1+4a^2x^2)^{\frac{1}{2}}$$

et en développant suivant la règle du binôme le facteur affecté de l'exposant $\frac{1}{2}$

$$ds = dx\left(1 + \frac{1}{2}4a^2x^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}16a^4x^4 \ldots\ldots\right)$$

ainsi amenée sous la forme d'une série convergente dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, on peut se contenter des deux premiers termes et écrire approximativement

$$ds = dx(1 + 2a^2x^2)$$

qui donne par intégration

$$S = x + \frac{2}{3}a^2x^3$$

On a, suivant les cas, entre le paramètre et les coordonnées extrêmes de la courbe $a = \frac{h}{l^2}$ ou $a = \frac{h}{l^2 - x_0^2} = \frac{h}{l^2 - \frac{d^2}{4}}$

en désignant par d la distance entre deux tiges successives. Sous cette dernière forme, on voit que même dans le second cas, on a approximativement $a = \frac{h}{l^2}$, en négligeant $\frac{d^2}{4}$ par rapport à l^2, et en portant cette valeur de a dans celle de S on trouve encore plus simplement

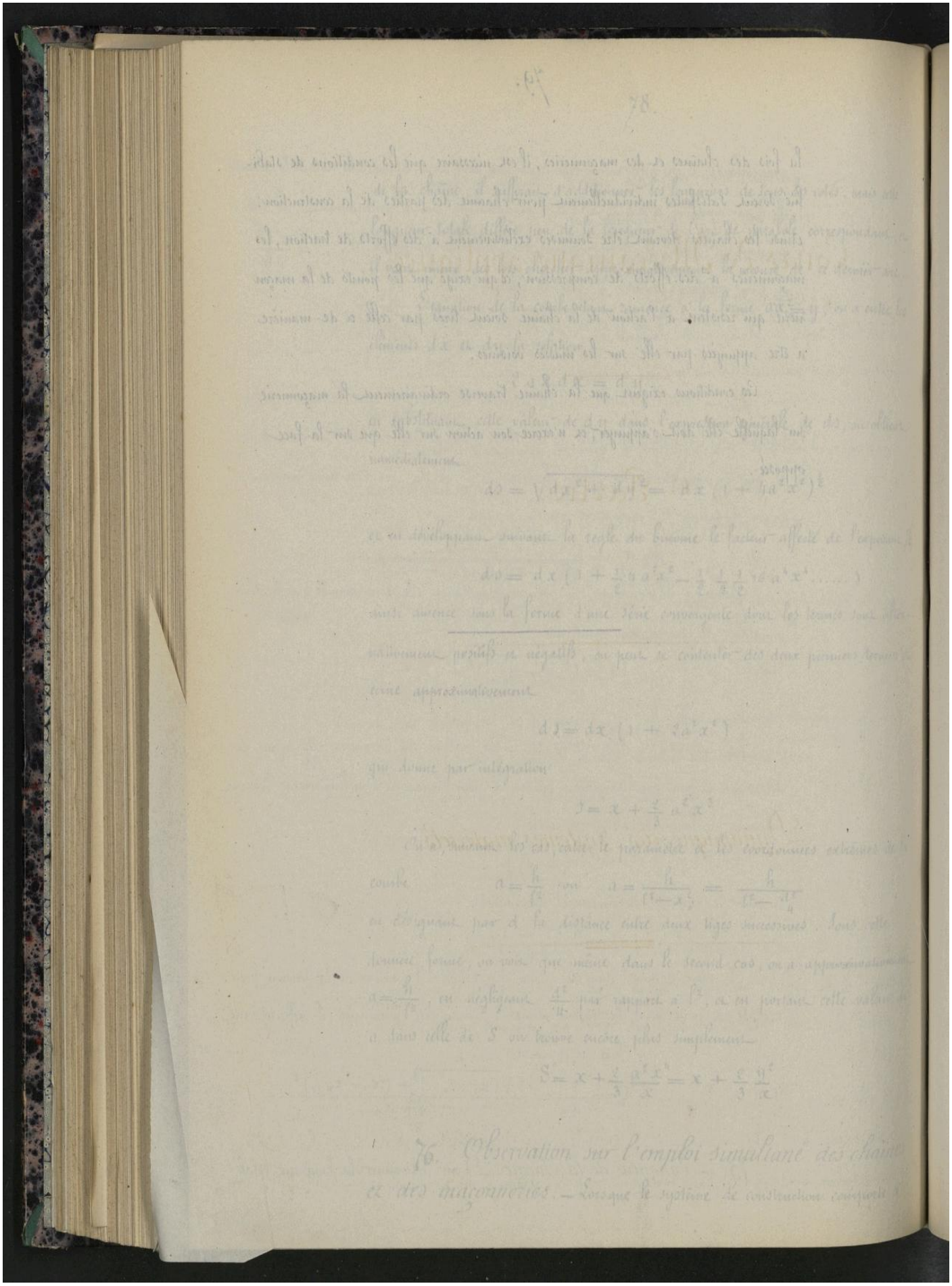
$$S = x + \frac{2}{3}\frac{a^2x^4}{x} = x + \frac{2}{3}\frac{y^2}{x}$$

76. Observation sur l'emploi simultané des chaînes et des maçonneries. — Lorsque le système de construction comporte à

Au fois des chaînes et des maçonneries, il est nécessaire que les conditions de stabilité soient satisfaites individuellement pour chacune des parties de la construction. Ainsi les chaînes devront être soumises exclusivement à des efforts de traction, les maçonneries à des efforts de compression, ce qui exige que les points de la maçonnerie qui résistent à l'action de la chaîne soient tirés par celle-ci de manière à être appuyées par elle sur les masses voisines.

Ces conditions exigent que la chaîne traverse ordinairement la maçonnerie sur laquelle elle doit s'appuyer, et n'exerce son action sur elle que sur la face opposée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



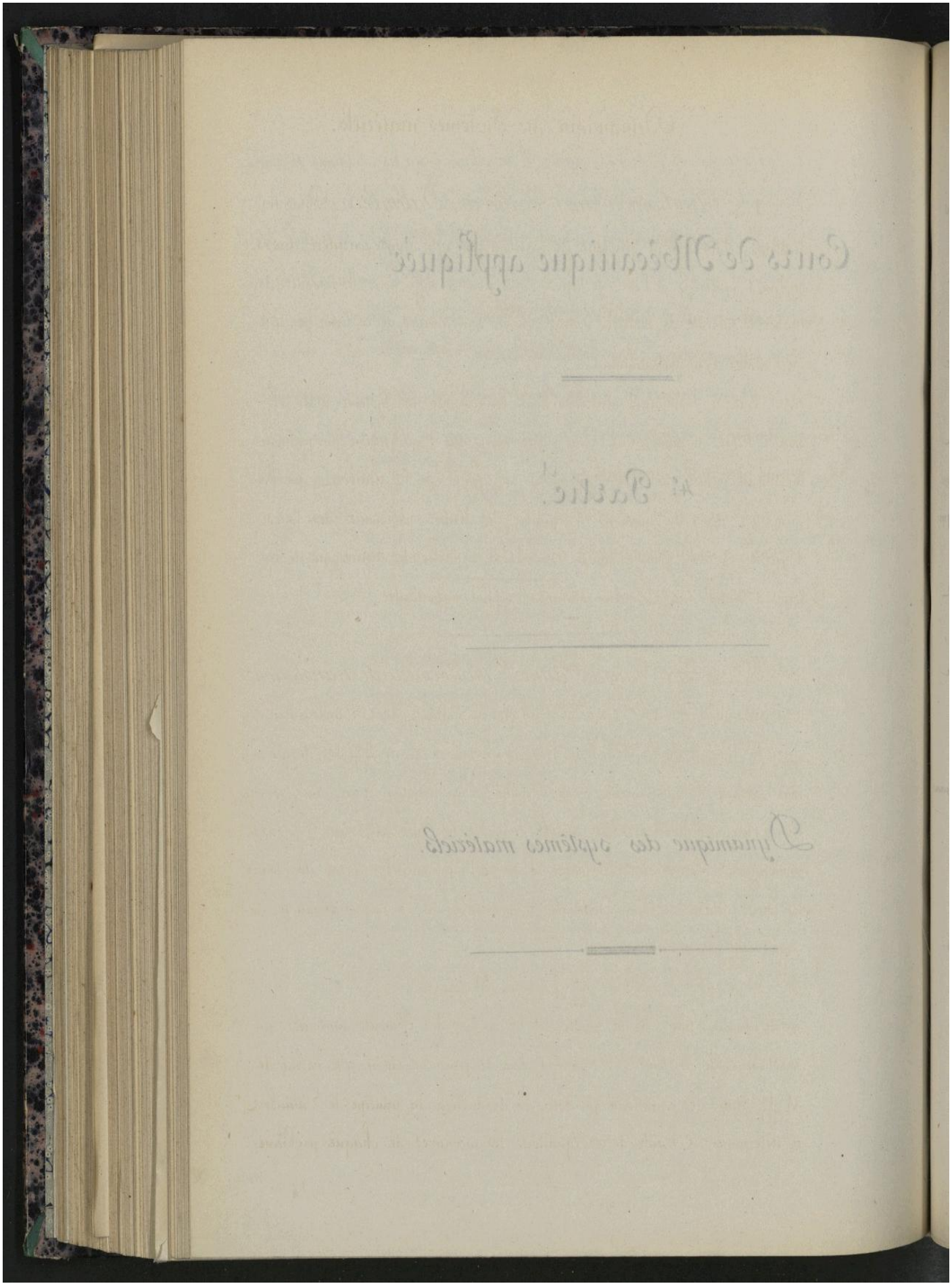
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cours de Mécanique appliquée

4e Partie.

Dynamique des systèmes matériels.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Dynamique des Systèmes matériels.

1. — *Application du principe de Dalembert.* Dans les questions relatives à la stabilité des constructions, nous avons considéré divers systèmes matériels à l'état de repos, et il nous a suffi, pour les résoudre, d'invoquer le principe du travail virtuel ou les conséquences de ce principe, que nous avons établi précédemment.

Lorsque les points matériels dont se compose un système matériel sont à l'état de mouvement varié, nous savons que l'application du principe du travail virtuel exige, conformément au principe de Dalembert, que l'on introduise dans les équations d'équilibre, les termes provenant des forces d'inertie, et nous sommes ainsi conduits à rappeler les expressions de ces forces d'inertie dans les circonstances les plus importantes.

2. — *Forces d'inertie dans le mouvement de translation.* On sait que si m est la masse d'un point matériel dont l'accélération est $\frac{dv}{dt}$, la force d'inertie i, dont l'expression est $i = m\frac{dv}{dt}$, est dirigée en sens contraire du mouvement ; son intensité et sa direction étant ainsi connues, il sera toujours facile de tenir compte de toutes les forces telles que i, dans le mouvement commun de translation d'un système matériel, puisqu'alors toutes les forces i étant de même direction et correspondant à une accélération commune $\frac{dv}{dt}$, on a nécessairement

$$\Sigma i = \frac{dv}{dt}\Sigma m = M\frac{dv}{dt}$$

en désignant par M la masse totale de tous les éléments matériels qui constituent le système. On pourra donc toujours introduire cette valeur de $M\frac{dv}{dt}$ dans les équations qui sont la traduction du principe de Dalembert, et déterminer à l'aide de ces équations les inconnues de chaque problème

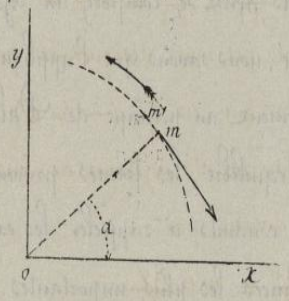
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

spécial.

Il est moins facile d'introduire dans ces mêmes équations les forces d'inertie développées dans le mouvement varié de rotation.

3. — *Rappel des notions relatives aux forces d'inertie d'un point matériel tournant autour d'un axe.*

Soit m ce point matériel, tournant autour de l'axe O ; nous rapporterons toutes les conditions de son mouvement aux deux axes rectangulaires Ox et Oy, choisis arbitrairement dans le plan qui passe par le point m, et qui est perpendiculaire à l'axe de rotation.



Dans le déplacement infiniment petit du point m au point m', on a $v = r\frac{d\alpha}{dt}$, pour la vitesse effective du point m et $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ pour la vitesse angulaire de ce même point. La force d'inertie totale φ est alors donnée par la relation

$$\varphi = -m\frac{dv}{dt}$$

Si nous désignons par φ_x sa projection sur l'axe des x, nous aurons

$$\varphi_x = -m\frac{dv_x}{dt}.$$

et pour connaître φ_x il suffirait de connaître la projection dv_x de la différentielle dv, de la vitesse.

De $v_x = v\sin\alpha$ on tire immédiatement par une simple différentiation

$$d\varphi_x = v\cos\alpha\, d\alpha + \sin\alpha\, dv.$$

et par suite

$$\varphi_x = -v\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} - m\sin\alpha\frac{dv}{dt}.$$

On trouverait de la même façon

$$\varphi_y = -m\frac{dv_y}{dt}, \quad v_y = v\cos\alpha,$$
$$\varphi_y = +mv\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} - m\cos\alpha\frac{dv}{dt}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En examinant ces deux valeurs de φ_x et de φ_y, on voit facilement que les premiers termes représentent respectivement les projections d'une même force $mv\frac{d\alpha}{dt}$, dans de telles conditions, que sa projection sur l'axe des x s'obtient en multipliant sa valeur par $-\cos\alpha$, et que sa projection sur l'axe des y s'obtient de même en multipliant sa valeur par $\sin\alpha$. Cette force est dirigée suivant le prolongement du rayon OM et a pour valeur

$$mv\frac{d\alpha}{dt} = m\rho\frac{d\alpha}{dt}\times\frac{d\alpha}{dt} = m\rho\omega^2$$

et elle constitue la force centrifuge que nous désignerons par X.

On peut de même remarquer que $m\frac{dv}{dt}(-\sin\alpha)$ et $m\frac{dv}{dt}(-\cos\alpha)$ sont les projections d'une force tangentielle agissant en sens contraire du mouvement, dont la valeur φ est donnée par

$$w = m\frac{dv}{dt} = m\rho\frac{d\omega}{dt}$$

On peut donc remplacer la force totale d'inertie φ par deux forces normales et tangentielles telles que

$$\varphi = X + \psi = m\rho\omega^2 + m\rho\frac{d\omega}{dt}$$

X et ψ se trouvant complétement déterminés par cette relation.

4.— *Du mouvement varié d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe.*— On a vu, que dans la théorie du mouvement de rotation d'un point matériel, la force d'inertie totale pouvait toujours être représentée par deux composantes ; l'une, centrifuge, représentée par $X = m\rho\omega^2$, en désignant par m la masse du point matériel considéré, par ρ sa distance à l'axe de rotation, et par ω sa vitesse angulaire, l'autre, tangentielle, désignée par ψ, et dont la valeur est donnée en fonction de l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$, par la relation $\psi = m\rho\frac{d\omega}{dt}$.

Ces valeurs des forces d'inertie centrifuge et tangentielle se développant en chacun des points d'un corps solide, composé de points matériels reliés

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les uns aux autres d'une manière invariable, constituent, en chaque instant du mouvement d'un corps solide, l'ensemble de toutes les forces qui devront satisfaire au principe général de Dalembert, tel qu'il a été précédemment énoncé.

L'étude des questions relatives au mouvement de rotation sera ainsi ramenée à celle des conditions d'équilibre entre les forces extérieures et les forces d'inertie, et ces conditions seront données par l'application du principe du travail virtuel, ou des équations qui en sont la conséquence.

5. — *Equations générales du mouvement de rotation.* — Pour déduire du principe de Dalembert les équations générales du mouvement de rotation, il suffit d'introduire au nombre des forces à considérer les composantes normale et tangentielle des forces d'inertie, ce qui donne en particulier des équations de projection et en choisissant pour axes l'axe de rotation que nous prenons pour axe des z, et deux autres axes perpendiculaires.

$$\Sigma F_x + \Sigma \psi_x + \Sigma X_x = 0$$
$$\Sigma F_y + \Sigma \psi_y + \Sigma X_y = 0$$
$$\Sigma F_z = 0$$

Chacune des forces ψ et X étant perpendiculaire à l'axe des z a nécessairement sa projection nulle sur cet axe.

Les trois équations de moments conduiraient également aux trois équations

$$\Sigma M_x F + \Sigma M_x \psi + \Sigma M_x X = 0$$
$$\Sigma M_y F + \Sigma M_y \psi + \Sigma M_y X = 0$$
$$\Sigma M_z F + \Sigma \psi \rho = 0$$

Dans cette dernière relation, il n'y a pas lieu de tenir compte des forces centrifuges qui rencontrent l'axe de rotation et dont les moments sont par conséquent nuls. Quant au moment de l'une des forces tangentielles ψ

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

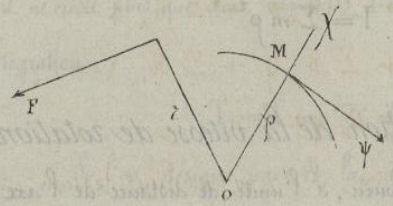
cette force a évidemment pour bras de levier sa distance ρ à l'axe de rotation et la somme des moments semblables a pu s'écrire d'une manière plus simple sous les formes abrégées $\Sigma \psi \rho$.

Ces six équations précédentes peuvent être considérées comme les équations du mouvement de rotation, car déduites des six équations fondamentales d'équilibre, elles forment comme elles les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les forces qui y entrent, et qui comprennent toutes les forces d'inertie, satisfassent au principe fondamental de D'Alembert.

Ces équations serviront de base à tous les calculs que nous aurons à faire sur l'étude des mouvements de rotation d'un système matériel, ou d'un organe de marche.

6.— *Expression de l'accélération angulaire.*— Pour employer les expressions des forces d'inertie à la recherche directe de l'accélération angulaire d'un mobile tournant autour d'un axe, nous désignerons comme précédemment par F, chacune des forces extérieures, et par r la distance de sa direction à l'axe de rotation. Le moment de chacune de ces forces extérieures sera ainsi donné par le produit Fr, et la somme de ces moments, pour toutes les forces qui exercent leur action sur le système par

$$\Sigma Fr = F'r' + F''r'' + \ldots\ldots$$



Pour chacun des points du système, on devra considérer les deux forces d'inertie ψ et χ; chacune des premières a pour moment $\psi\rho$, par rapport à l'axe de rotation; quant aux forces centrifuges, elles passent toutes par l'axe de rotation, et leur moment par conséquent est nul par rapport à cet axe.

Si donc on veut exprimer qu'il y a équilibre entre toutes les forces

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

F, ψ et X ; on aura simplement, pour la condition de l'égalité des moments,
$\Sigma F r = \Sigma \psi \rho = \Sigma m \rho \frac{dW}{dt} \times \rho = \frac{dW}{dt} \Sigma m \rho^2$, en remarquant que la vitesse angulaire W est la même à un instant donné, pour tous les points du système, et qu'il en est de même pour l'accélération angulaire $\frac{dW}{dt}$.

On tire, de la relation qui précède

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\Sigma F r}{\Sigma m \rho^2}$$

expression tout-à-fait générale, qui peut s'énoncer en disant que, dans le mouvement de rotation d'un corps autour d'un axe, l'accélération angulaire est mesurée par le quotient que l'on obtient en divisant la somme des moments des forces extérieures par le moment d'inertie du solide pris par rapport à l'axe de rotation.

Dans cette expression, les moments Fr sont pris chacun avec son signe, suivant le sens dans lequel chaque force individuelle tend à faire tourner le solide, mais les forces tangentielles d'inertie entrent toutes avec le même signe parce qu'elles sont toutes de sens contraire au mouvement général de rotation; le facteur absolument positif ρ^2 entre d'ailleurs dans chacun des produits partiels.

Si l'on compare cette formule, à celle du mouvement rectiligne $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{M}$, on voit que pour passer de celle-ci à celle-là, il suffit de remplacer F par le moment Fr, et la masse M par le moment d'inertie

$$I = \Sigma m \rho^2$$

7. — *Détermination de la vitesse de rotation.* — Si l'on désigne par $d\alpha$ le chemin parcouru, à l'unité de distance de l'axe, pendant le temps dt, avec la vitesse acquise ω, on a nécessairement

$$d\alpha = \omega dt \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

En multipliant cette expression par la précédente, et en supprimant le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

facteur commun $\frac{1}{dt}$, on obtient immédiatement,

$$w\,dw = d\alpha\,\frac{\Sigma Fr}{\Sigma m\rho^2}$$

et cette formule permettra d'obtenir par intégration au moins approximative, la valeur de W, lorsqu'on pourra exprimer les diverses valeurs de F en fonction de α.

Nous aurons occasion de donner de fréquents exemples de cette détermination.

8.— *Travail et puissance vive de rotation.*— Chaque point matériel, qui fait partie du mobile animé d'un mouvement de rotation, parcourt, dans le temps dt, un chemin $ds = rw\,dt$

Si nous considérons seulement les points en lesquels les forces extérieures telles que F sont rencontrées par les perpendiculaires abaissées sur leurs directions respectives, le travail de chacune de ces forces, dans le temps dt, doit être calculé par le produit Fds, et l'on a par conséquent pour l'évaluation du travail élémentaire dT de toutes ces forces

$$dT = \Sigma Fds = \Sigma Frw\,dt = w\,dt\,\Sigma Fr$$

Les relations qui précèdent nous donnent en fonction de l'accélération

$$\Sigma Fr = \frac{dw}{dt}\,\Sigma m\rho^2$$

et l'on trouve en substituant

$$dT = w\,dt \times \frac{dw}{dt}\,\Sigma m\rho^2,$$

après avoir fait disparaître le facteur commun au numérateur et au dénominateur, il ne reste plus que deux variables T et W entre lesquelles on obtient par voie d'intégration

$$T = \Sigma m\rho^2 \times \frac{W^2}{2} + C$$

Si l'on désigne par W_0 la vitesse initiale, au moment où commence la dépense de travail, on a

$$C = -\Sigma m\rho^2\,\frac{W_0^2}{2}$$

et par suite $$T = \Sigma m\rho^2\,\frac{W^2 - W_0^2}{2}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ce qu'on exprime de la manière suivante, en observant que $\frac{1}{2}\Sigma m\rho^2 w^2$ est la puissance vive de rotation d'un point matériel de masse m, animé d'une vitesse ρw.

Dans tout mouvement de rotation, le travail dépensé se mesure par l'accroissement de la puissance vive du mobile.

Si l'on considérait une période de ralentissement, $w^2 - w_0^2$ serait négatif, et la valeur négative de T représenterait le travail dépensé par le mobile pendant ce ralentissement.

9.— *Détermination de l'accélération angulaire en tenant compte du frottement.* — Dans les calculs relatifs à l'accélération angulaire, les frottements, lorsqu'on veut les considérer doivent entrer au nombre des forces extérieures, et il est souvent nécessaire de tenir compte des forces d'inertie dans l'évaluation des pressions exercées sur les axes, et qui doivent servir de base à la détermination des résistances dues au frottement.

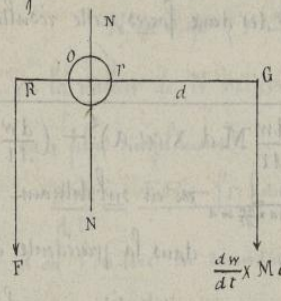
Dans la plupart des machines cependant les forces centrifuges sont souvent assez petites pour que leur influence sur la pression exercée sur l'axe puisse être négligée. On prend soin d'ailleurs de disposer les organes de rotation, de manière qu'ils soient autant que possible équilibrés autour de l'axe, et c'est pour cette raison que nous pourrons nous borner à considérer seulement les forces d'inertie tangentielles au point de vue du frottement.

Dans le cas où la force unique d'inertie Ψ que l'on peut avoir à considérer est parallèle à la force motrice F, supposée unique, la pression sur l'axe se détermine, à la manière ordinaire, par la somme ou par la différence de ces deux forces, mais le calcul n'est plus aussi simple, lorsque ce parallélisme n'a pas lieu.

Soient, dans le premier cas, F la force motrice $\frac{dw}{dt} \times Md$ la force d'inertie

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tangentielle du mobile dont le centre de gravité est en G, la pression sur le tourillon O, de rayon r, sera



$$F \pm \frac{dw}{dt} \times Md,$$

et par suite la résistance due au frottement sera exprimée par

$$N = f\left(F \pm \frac{dw}{dt} \times Md\right)$$

et cette résistance devra entrer dans l'expression générale de l'accélération angulaire avec son bras de levier r.

On aura donc pour la détermination de cette accélération angulaire,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\Sigma Fr}{\Sigma m\rho^2} = \frac{FR - f\left(F \pm \frac{dw}{dt} \times Md\right) r}{\Sigma m\rho^2}$$

La force de frottement doit toujours être prise avec le signe — puisqu'elle constitue une résistance, et l'on prendra le signe supérieur dans la parenthèse, quand les deux forces qui déterminent la pression et que nous avons supposé parallèles, agissent dans le même sens.

L'équation précédente contient $\frac{dw}{dt}$ dans les deux membres, et en résolvant l'équation par rapport à cette quantité, on trouve en définitive pour la valeur de l'accélération angulaire

$$\frac{dw}{dt} = \frac{F(R - fr)}{\Sigma m\rho^2 \pm fz \times Md}$$

Cette valeur ne se présente pas sous une forme aussi simple que dans les expressions que nous avions obtenues précédemment sans tenir compte du frottement.

10.— *Cas où la force d'inertie n'est pas parallèle à la résultante des forces extérieures.*— En désignant comme précédemment par N la pression sur l'axe, on aura toujours :

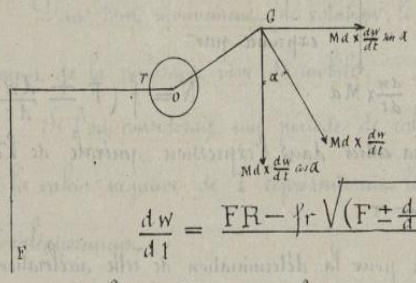
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\Sigma FR}{\Sigma m\rho^2} = \frac{FR - fNr}{\Sigma m\rho^2}$$

Mais la valeur de N elle-même ne peut plus s'obtenir aussi directement, si l'on veut tenir compte des deux forces qui concourent à déterminer la pression

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

N, car en désignant par α l'angle des deux forces, cette résultante N est donnée par le radical

$$N = \sqrt{\left(F \pm \frac{dw}{dt} M d \times \cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} M d \times \sin\alpha\right)^2}$$



en en substituant cette valeur de N dans la précédente équation, on aurait pour déterminer l'accélération angulaire,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{FR - fr\sqrt{\left(F \pm \frac{dw}{dt} M d \times \cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} M d \times \sin\alpha\right)^2}}{\sum m\rho^2}$$

En élevant les deux membres au carré, on obtiendrait une équation complète du second degré en $\frac{dw}{dt}$, mais on arriverait ainsi à une expression très-compliquée, qui ne pourrait guères être employée dans un cas particulier que pour calculer une valeur numérique.

11. — *Simplification de la valeur de l'accélération.* — M.r Poncelet dans son cours lithographié de l'école de Metz a donné le moyen de calculer approximativement la valeur des radicaux de la forme

$$\sqrt{X^2 + Y^2}$$

Il a démontré que sans faire aucune hypothèse sur les grandeurs relatives des valeurs de X et de Y, on avait, à un sixième près,

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = 0.828\,(X + Y)$$

Quand on sait à l'avance que X est la plus grande des deux quantités comprises sous le radical, il a fait voir que l'on obtenait également à un vingt cinquième près, la valeur du radical par la formule

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = 0.96\,X + 0.4\,Y$$

Si nous appliquons cette dernière relation à la recherche de la valeur de N, nous aurons, en admettant que le premier terme est plus grand que le second,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$N = 0.96\left(F \pm \frac{dw}{dt} M d \times \cos\alpha\right) + 0.4\,\frac{dw}{dt} M d \times \sin\alpha$$

en la valeur de N ne contenant plus $\frac{dw}{dt}$ que comme facteur du premier degré; on a plus simplement

$$\frac{dw}{dt} = \frac{FR - fr\left[0.96\left(F \pm \frac{dw}{dt} M d \times \cos.\alpha\right) + 0.4\,\frac{dw}{dt} M d \times \sin\alpha\right]}{\sum m\rho^2}$$

d'où l'on tire en réunissant tous les termes qui contiennent l'accélération

$$\frac{dw}{dt} = \frac{FR - 0.96\,F \times fr}{\sum m\rho^2 \pm 0.96\,fr \times M d \times \cos\alpha + 0.4\,fr \times M d \times \sin\alpha}$$

Cette valeur beaucoup plus facile à introduire dans les calculs, est d'un usage général dans toutes les questions du mouvement de rotation, dans lesquelles on veut tenir compte des frottements.

Nous nous en servirons, bien qu'indirectement, dans l'étude que nous nous proposons de faire de la théorie générale des marteaux comme application complexe des formules relatives au mouvement varié de rotation.

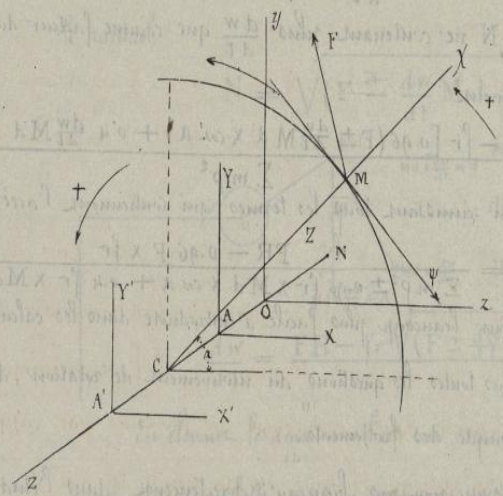
12.— *Réactions des points d'appui dans les mouvements variés de rotation.* Nous n'avons jusqu'ici fait usage que d'une seule des six relations qui expriment en général l'équilibre entre les forces extérieures et les forces d'inertie d'un corps solide assujéti à se mouvoir autour d'un axe. Les cinq autres relations sont utiles pour déterminer les réactions exercées par les points d'appui qui sont, dans la plupart des circonstances, nécessaires pour maintenir l'axe de rotation dans une position invariable.

Or un déplacement quelconque de l'axe peut être représenté par un déplacement longitudinal, et par la rotation de cet axe autour de l'un de ses points.

Pour éviter le déplacement longitudinal, il suffit d'admettre l'existence d'une réaction Z, exercée dans le sens de l'axe de rotation oz par un obstacle formant appui placé en N; on évitera le second déplacement au moyen de deux coussinets placés en deux points quelconques de l'axe, par exemple en A et en A', dont nous fixerons la position par rapport à l'origine O des coor-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

données, en faisant $OA = a$, et $OA' = a'$.



Quant aux réactions exercées en A et A' par ces coussinets hypothétiques, nous les exprimerons par leurs composantes X et Y, X' et Y', respectivement parallèles aux axes des coordonnées Ox et Oy que nous supposerons perpendiculaires à Oz, et nous rapporterons toutes les forces et tous les déplacements du système à ces trois axes de coordonnées rectangulaires.

Nous considérerons comme positives les projections des forces qui agiront de manière à tirer sur le point O, dans le sens des axes, et nous affecterons le signe + aux moments de ces composantes, savoir: parallèlement au plan xOy, lorsqu'ils tendront à rabattre l'axe des x vers l'axe des y, parallèlement au plan yOz, lorsqu'ils tendront à rabattre l'axe des y sur l'axe des z; parallèlement au plan zOx, lorsqu'ils tendront à rabattre l'axe des z sur celui des x.

Ces conventions pourraient dès à présent s'exprimer pour toutes les forces d'inertie, dont le sens est déterminé par le sens même du mouvement; elles seront applicables aux forces extérieures chaque fois que l'une d'elles sera connue en direction; enfin, elles serviront à déterminer les signes des réactions et de leurs moments par la résolution même des équations destinées à en déterminer les valeurs.

Il est facile maintenant d'écrire les six équations fondamentales de l'équilibre entre toutes les forces F, ψ, X, X, X', Y, Y' et Z.

Ces équations de projection sont, en désignant par α l'angle de l'axe

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ox, avec le rayon CM, mené du point particulier M, à l'axe oz, parallèlement au plan de projection $x\,o\,y$

$$\Sigma F x + X + X' + \Sigma \psi \sin\alpha + \Sigma \chi \cos\alpha = 0$$

$$\Sigma F y + Y + Y' - \Sigma \psi \cos\alpha + \Sigma \chi \sin\alpha = 0$$

$$\Sigma F z + Z = 0$$

Les forces ψ, χ, X, X', Y, Y', n'entrent pas dans cette dernière équation, comme étant toutes de directions perpendiculaires à l'axe des z.

Pour établir les équations de moments, il faut remarquer: que les forces χ ne sauraient entrer dans l'évaluation des moments par rapport à l'axe des z, qu'elles rencontrent chacune en un point tel que C; que chacune des forces ψ a pour bras de levier, par rapport à l'axe oz, une longueur telle que $CM = \rho$; que les moments des forces ψ et χ, par rapport aux axes ox et oy, sont données par l'ordonnée $oc = z$ de chaque point M; qu'enfin les bras de levier des réactions X, Y, X', Y', par rapport aux mêmes axes sont mesurés respectivement par les longueurs $oA = a$, $oA' = a'$, des ordonnées des points A et A' d'application de ces forces.

En tenant compte de ces observations, les trois équations des moments deviennent

$$\Sigma M_x F - Ya - Y'a' + \Sigma \psi \cos\alpha \times Z - \Sigma \chi \sin\alpha \times Z = 0$$

$$\Sigma M_y F + Xa + X'a' + \Sigma \psi \sin\alpha \times Z + \Sigma \chi \cos\alpha \times Z = 0$$

$$\Sigma M_z F - \Sigma \psi \times \rho = 0$$

De ces six équations qui pourront servir à déterminer les valeurs des inconnues de chaque problème en particulier, deux peuvent déjà être interprétées

1°. — La troisième exprime que la réaction longitudinale Z doit être égale à la somme des projections, de toutes les forces extérieures sur l'axe de rotation. Elle est nulle, si toutes ces forces sont perpendiculaires à l'axe.

2°. — La sixième équation montre que la somme des moments des forces

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tangentielles d'inertie, est égale, en chaque instant, à la somme des moments des projections des forces extérieures, perpendiculaires à l'axe de rotation.

On peut d'ailleurs transformer toutes ces équations en remarquant

1° — qu'en désignant par x et y les coordonnées d'un point quelconque M, on a

$$\cos\alpha = \frac{x}{\rho}, \qquad \sin\alpha = \frac{y}{\rho}$$

2° — qu'on peut remplacer les forces d'inertie ψ et χ par leurs valeurs individuelles

$$\psi = m\rho\frac{dw}{dt}, \qquad \chi = mw^2$$

et considérer les quantités $\frac{dw}{dt}$ et w^2 comme ayant une même valeur pour tous les points du système, que nous supposons animé d'un mouvement commun de rotation, ce qui permet d'écrire les six nouvelles équations ;

$$\Sigma Fx + X + X' + \frac{dw}{dt}\Sigma my + w^2\Sigma mx = 0$$

$$\Sigma Fy + Y' + Y'' - \frac{dw}{dt}\Sigma mx + w^2\Sigma my = 0$$

$$\Sigma Fz + Z = 0$$

$$\Sigma M_x F - Ya - Y'a' + \frac{dw}{dt}\Sigma mxz - w^2\Sigma myz = 0$$

$$\Sigma M_y F + Xa + X'a' + \frac{dw}{dt}\Sigma myz + w^2\Sigma mxz = 0$$

$$\Sigma M_z F - \frac{dw}{dt}\Sigma m\rho^2 = 0$$

Sous cette nouvelle forme la sixième équation donne

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\Sigma M_z F}{\Sigma m\rho^2}.$$

L'accélération angulaire s'obtient, d'une manière générale, en ne considérant que les composantes des forces extérieures, prises perpendiculairement à l'axe, et en divisant la somme de leurs moments par la somme des moments d'inertie du solide, par rapport à l'axe de rotation considéré. Cet énoncé remplace d'une manière plus générale celui que nous avons donné au N°.

L'accélération et la réaction longitudinale, étant fournies par les équations 3 et 6, les quatre autres équations suffiront en général pour calculer

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les quatre autres réactions X, Y, X', Y'.

13. — Simplifications des formules générales. — Les formules précédentes se simplifient dans les applications, toutes les fois que les sommes telles que Σmx ou Σmxz sont nulles.

En ce qui concerne le terme Σmx considéré en particulier, il sera nul toutes les fois que l'abscisse x du centre de gravité du système sera nulle ou, ce qui revient au même, toutes les fois que ce centre de gravité sera situé dans le plan de yz. La considération de la quantité Σmy, donnerait lieu à une observation analogue.

En ce qui concerne les termes Σmxz, Σmyz, lorsqu'ils seront nuls, on dit que le système est rapporté à ses axes principaux d'inertie; l'une ou l'autre de ces circonstances est souvent réalisée quelque fois même toutes deux, si le système est symétrique par rapport à l'un ou à l'autre plan de projection. Si par exemple tout point M dont les coordonnées sont x, y et z est accompagné d'un point symétrique M de même masse et dont les coordonnées sont x, $-y$ et z, il est évident que pour tous ces points on aura $\Sigma myz = 0$ et l'on pourra se servir de cette condition pour simplifier les formules générales.

Nous nous bornerons, pour le moment, à ces indications principales qui seront complétées plus tard en ce qui concerne la théorie du centre de percussion.

14. — Théorie du pendule simple. — On suppose, dans le pendule simple que toute la masse est réunie en un point M, qui doit osciller autour d'un centre de suspension O, sous l'influence de la pesanteur.

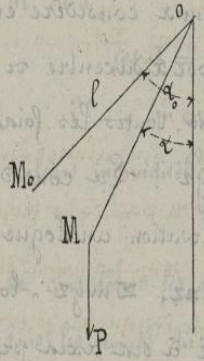
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La formule générale de l'accélération devient alors

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma mz^2} = \frac{P l \sin\alpha}{M l^2} = \frac{g \sin\alpha}{l}$$

Cette valeur de l'accélération est indépendante du poids P, mais elle varie pour celles de l en fonction de α.

Pour obtenir la valeur de la vitesse angulaire w, il suffit de remarquer que



$$w\,dt = -d\alpha$$

l'angle α diminuant lorsque t augmente dans la période de descente de la masse du pendule. En multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on élimine dt, et l'on trouve

$$w\,dw = -\frac{g \sin\alpha\, d\alpha}{l}$$

et par une simple intégration

$$w^2 = \frac{2g\cos\alpha}{l} + C$$

La constante C sera déterminée en remarquant que $\alpha = \alpha_0$ pour $w = 0$ au commencement de l'oscillation, ce qui donne

$$w^2 = \frac{2g}{l}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

et par suite

$$w = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$$

Nous comparerons ultérieurement cette expression de la vitesse angulaire avec celle que nous fournira l'étude du pendule composé.

15. **Théorie du pendule composé.** — Dans le pendule composé les parties qui composent la masse oscillante sont généralement distribuées symétriquement par rapport au plan d'oscillation et par rapport au plan perpendiculaire qui passe par l'axe d'oscillation et nous serons ainsi conduit à faire

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

subir encore quelques simplifications à la formule générale.

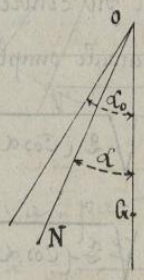
16.— Détermination de la vitesse angulaire.— L'accélération angulaire est donnée d'une manière générale par la formule générale

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\Sigma P x}{\Sigma m \rho^2},$$

et en remplaçant x par $l \sin \alpha$ et ΣP par $\Sigma \frac{m}{g}$ on trouve directement

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g \sin \alpha}{\Sigma m \rho^2} \Sigma m l.$$

On voit encore que cette accélération angulaire est par conséquent indépendante du poids du mobile, mais non pas de la disposition des masses élémentaires qui le constituent. Σml peut toujours être remplacé par $\Sigma ml = Mb$, si nous désignons par M la masse totale, et par b la distance de son centre de gravité au centre de suspension O.



Nous pourrons donc écrire, d'une manière plus simple

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g M b \times \sin \alpha}{\Sigma m \rho^2}$$

Chacun des points du mobile est animé d'une vitesse angulaire w qui lui fait parcourir un chemin $\int w dt$, en un temps dt, et ce chemin pouvant aussi s'exprimer par $\int d\alpha$, il y a égalité entre les valeurs absolues de $w dt$ et $d\alpha$.

Dans le pendule composé, si nous désignons par α_0 l'angle d'écart primitif, à partir de la verticale, et par α le même angle, dans des variations successives, pendant la période descendante α diminue quand t augmente et la relation entre $w dt$ et $d\alpha$ devient, par conséquent,

$$w dt = - d\alpha$$

En multipliant membre à membre cette équation par la précé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=dule, et se trouve éliminé, en il vient

$$w\,dw = \frac{gMD \times \sin\alpha\, d\alpha}{\Sigma m \rho^2}$$

Cette relation ne contient que les deux variables w et α, exige une simple integration, dans laquelle il faut observer que pour $w=0$, on a $\alpha=\alpha_0$, on trouve

$$\frac{w^2}{2} = \frac{gMD}{\Sigma m \rho^2}\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

d'où

$$w = \sqrt{\frac{gMD}{\Sigma m \rho^2}}\,\sqrt{2\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$$

Si la masse perpendiculaire se réunissait à un point matériel de masse M, situé à une distance l du centre de suspension, cette formule se réduirait à celle du pendule simple

$$w = \sqrt{\frac{gMl}{M l^2}}\,\sqrt{2\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{l}}\,\sqrt{2\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$$

Le pendule composé oscille donc comme un pendule simple qui aurait une longueur

$$l' = \frac{\Sigma m \rho^2}{MD}$$

On voit par l'expression générale de w que la vitesse augmente à partir de $w=0$ pour α_0, à mesure que $\cos\alpha$ augmente, jusqu'à ce que l'on ait $\cos\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$

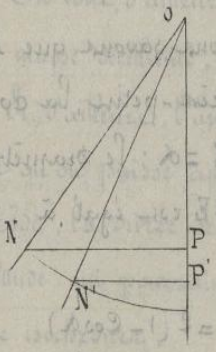
A partir de ce moment l'angle α devient négatif, $\cos\alpha$ diminue et la vitesse angulaire w va aussi en diminuant jusqu'à ce que $\alpha = -\alpha_0$. La vitesse w est alors nulle, ce qui montre que le pendule vient occuper, à la fin de sa course ascendante la position symétrique de celle qu'il occuperait au départ.

La vitesse angulaire que nous venons de calculer pourrait être

déduite tout aussi facilement du principe général des forces vives.

Si en effet, chaque poids mg de la masse totale, située à une distance ζ de l'axe, descend d'une hauteur que nous pouvons désigner par ζh, le travail dépensé par la pesanteur sur le mobile pourra être représenté par $\Sigma mg\zeta h$, et ce travail devra être égal à la puissance vive de rotation

$$\frac{\Sigma m\zeta^2\omega^2}{2}$$



De l'égalité entre ces deux expressions, on tire immédiatement

$$\omega^2 = \frac{2\Sigma mg\zeta h}{\Sigma m\zeta^2}$$

La hauteur ζh est, pour chaque point tel que N, égale à

$$PP' = \zeta(\cos\alpha - \cos\alpha_0);$$

on a, par conséquent

$$\omega = \frac{2\Sigma mg\zeta(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}{\Sigma m\zeta^2} = \frac{2gMD(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}{\Sigma m\zeta^2}$$

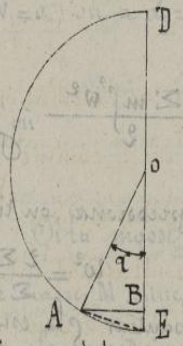
comme précédemment, car les seules variables des numérateurs sont m et ζ, et l'on a, par définition $\Sigma m\zeta = M$ puisque la distance D est celle du centre de gravité au point O. [On pourra se servir indifféremment soit de l'expression de l'accélération, soit du principe des puissances vives dans les calculs analogues destinés à la détermination de la vitesse angulaire d'un mobile.]

17. — *Durée d'une oscillation.* — Connaissant la valeur de v on peut obtenir la valeur du temps t d'une portion quelconque de la chute, par la relation

$$dt = \frac{-d\alpha}{\omega} = \sqrt{\frac{\Sigma m\zeta^2}{gMD}} \frac{-d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mais la formule différentielle comprise dans le second membre, n'est pas une de celles qui peuvent s'intégrer exactement. Il faut donc se borner à chercher une valeur approximative de cette intégrale, soit au moyen d'un développement en série soit au moyen de l'approximation suivante, qui n'est applicable qu'au cas où l'angle α_0 est fort petit.



Si nous représentons l'angle α par AOE, nous savons que $AE^2 = BE \times DE$; si α est très-petit, la corde AE diffère peu de l'arc $AE = \alpha$; le diamètre DE étant égal à 2 BE est égal à $2(1-\cos\alpha)$ et la relation précédente revient à

$$\alpha^2 = 2(1-\cos\alpha)$$

d'où

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

On aurait de même

$$\cos\alpha_0 = 1 - \frac{\alpha_0^2}{2}$$

et par suite

$$\cos\alpha - \cos\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha_0^2 - \alpha^2).$$

La substitution de cette valeur dans l'équation en dt, conduit à

$$dt = \sqrt{\frac{\Sigma m\zeta^2}{gMd}}\,\frac{-d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}} = \sqrt{\frac{\Sigma m\zeta^2}{gMd}}\,d\arccos\frac{\alpha}{\alpha_0}$$

En intégrant depuis $t=0$, jusqu'à $t=T$ temps d'une demi-oscillation, et dans le second membre, depuis α_0 jusqu'à $\alpha=0$, on trouve alors

$$T = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{\Sigma m\zeta^2}{gMd}}$$

étendu que la constante est nulle et que $\arccos 0 = \frac{1}{2}\pi$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si l'on voulait appliquer cette formule au pendule simple de longueur l, on aurait immédiatement

$$T = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{Ml^2}{gMl}} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Le pendule composé oscille comme un pendule simple qui aurait une longueur $l = \frac{\Sigma m\rho^2}{Md}$.

On voit, d'ailleurs, que la durée de l'oscillation est indépendante de la masse oscillante, mais qu'elle varie comme $\frac{1}{\sqrt{g}}$.

Si, d'ailleurs, l'amplitude de l'oscillation était suffisamment petite pour qu'on puisse appliquer le résultat du calcul approximatif qui précède, la durée de chaque oscillation serait indépendante de cette amplitude, qui pourrait diminuer sans que les oscillations cessassent d'être isochrones.

L'intégration par l'emploi des séries conduit d'ailleurs à la formule suivante, dans laquelle f représente la flèche de l'arc $2\alpha_0$, ou le sinus de α_0,

$$T = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{\Sigma m\rho^2}{Md}}\left[1 + \frac{1}{8}f + \frac{9}{256}f^2 \ldots\ldots\ldots\right]$$

Cette série est très-convergente, et la formule approximative que nous avons donnée pour la durée de l'oscillation du pendule n'en représente que le premier terme

18. — Centre d'oscillation. — C, étant le centre de suspension d'un pendule, et G le centre de gravité de la masse qui le constitue, le point C de la droite OG, qui satisfait à la condition

$$OC = l = \frac{\Sigma m\rho^2}{Md}$$

s'appelle le centre d'oscillation du pendule ; ce point,

considéré comme faisant partie d'un pendule composé, se mouvoir comme il le ferait s'il appartenait à un pendule simple de même longueur l.

Ce centre d'oscillation, dont la position fait connaître la marche du pendule jouit d'ailleurs de plusieurs propriétés qu'il importe de faire connaître.

1°. — Le centre d'oscillation est plus éloigné du centre de suspension que le centre de gravité.

En effet, si l'on désigne par R le rayon de giration par rapport au centre de suspension, c'est-à-dire si l'on détermine R par la condition $\Sigma m s^2 = MR^2$, et si l'on désigne par A le rayon de giration par rapport au centre de gravité, on connaît d'une manière générale la relation

$$MR^2 = Md^2 + MA^2$$

ou

$$R^2 = d^2 + A^2.$$

Cette valeur de R^2, nous conduit à la valeur de l, car

$$l = \frac{\Sigma m s^2}{Md} = \frac{MR^2}{Md} = \frac{R^2}{d} =$$

et l'on voit par la relation précédente que

$$l = \frac{R^2}{d} = \frac{d^2 + A^2}{d} = d + \frac{A^2}{d},$$

A^2 étant une quantité essentiellement positive, le rayon d'oscillation $\frac{R^2}{d}$ est donc plus grand que d, le point C est au dessous du point G.

2°. — La distance du centre de gravité G au centre d'oscillation est mesurée par $\frac{A^2}{d}$

$$CG = \frac{R^2}{d} - d = \frac{A^2}{d}.$$

3°. — Le produit des deux distances OC et CG du centre de gravité aux centres de suspension et d'oscillation O et C, est constamment égal au carré du rayon de giration, pris par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rapport au centre de gravité. On a en effet

$$oG \times CG = o \times \frac{A^2}{o} = A^2.$$

Cette relation démontre la réciprocité des centres de suspension et d'oscillation, placés respectivement aux distances o et o' du centre de gravité, car si l'on prend l'un ou l'autre de ces points pour centre de suspension, la distance du centre d'oscillation au centre de gravité sera donnée par la relation $oo' = A^2$.

4° On peut d'ailleurs calculer directement la longueur Co' qui, pour le même pendule suspendu au point C donnerait les mêmes durées d'oscillations que le pendule primitif, de longueur l, suspendu en o.

On aurait, dans ce cas, en désignant par R' le rayon de giration par rapport au point C, et par o' la distance CG du centre de gravité au nouveau centre de suspension

$$Co' = \frac{R'^2}{o'}$$

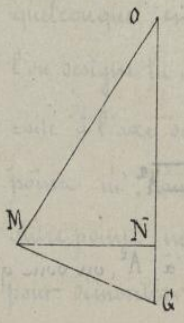
mais

$$R'^2 = o'^2 + A^2$$

et par suite

$$Co' = \frac{\frac{A^4}{o^2} + A^2}{\frac{A^2}{o}} = \frac{A^2}{o} + o = Co.$$

19. — **Relation entre les rayons de giration.** — Il ne sera peut-être pas inutile de démontrer directement la relation sur laquelle nous nous sommes appuyé dans la démonstration précédente. Soit o le centre de rotation quelconque d'un mobile dont le centre de gravité est en G, on aura pour tout point M, de masse m.



$$\Sigma m \times oM^2 = \Sigma m (oN^2 + MN^2)$$

$$\Sigma m \times MG^2 = \Sigma m (GN^2 + MN^2)$$

et par voie de soustraction

$$\Sigma m \times oM^2 - \Sigma m \times MG^2 = \Sigma m \times oN^2 - \Sigma m \times GN^2$$

$$= \Sigma m \times (o - GN)^2 - \Sigma m \times GN^2 = \Sigma m o^2 - 2 \Sigma m o \times GN$$

ou simplement

4/4

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\Sigma m \times OM^2 - \Sigma m \times MG^2 = \Sigma m d^2$$

parce que le dernier terme s'annule par suite de $\Sigma m \times GN = 0$, puisque la distance GN est prise par rapport au centre de gravité G.

On a donc enfin

$$\Sigma m \times OM^2 = \Sigma m \times MG^2 + \Sigma m d^2 .$$

Le moment d'inertie pris par rapport à un centre quelconque O est donc égal à la somme du moment d'inertie pris par rapport au centre de gravité, et du produit Md^2. C'est ce qui nous a permis d'écrire, en nous servant des rayons de giration

$$MR^2 = MA^2 + Md^2 \quad \text{ou} \quad R^2 = A^2 + d^2 .$$

20. — Détermination de l'axe de suspension correspondant à une durée donnée d'oscillation. — On peut, avec un corps quelconque, déterminer un axe de suspension tel que les oscillations autour de cet axe se fassent dans un temps donné.

Il suffit, pour cela d'appliquer la formule

$$l = \frac{R^2}{d} = \frac{A^2 + d^2}{d}$$

dans laquelle l est déterminé par la connaissance de la durée de l'oscillation cherchée, A étant le rayon de giration par rapport au centre de gravité (ce rayon qui est également connu, dès lors que le corps qui doit former le pendule est donné).

La seule inconnue de cette équation est donc d. En en résolvant par rapport à elle, on a

$$d^2 - dl + A^2 = 0$$

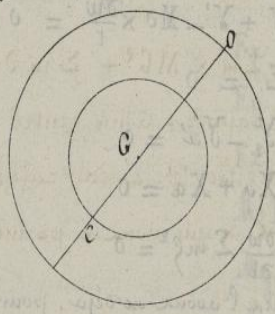
d'où

$$d = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - A^2} .$$

Le produit des deux racines étant égal à A^2, on voit que l'on obtient

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à la fois, pour racines, les valeurs des distances réciproques des centres de suspension et d'oscillation au centre de gravité. Il suffit, pour résoudre le problème, de décrire du centre G, deux circonférences ayant respectivement pour rayons les valeurs données par les racines de l'équation précédente et de prendre pour axe de suspension l'une quelconque des points o ou C de l'une de ces circonférences; lorsque l'un d'eux o, aura été choisi comme axe de suspension, le centre d'oscillation se trouvera à l'extrémité c du même diamètre, terminé à la seconde circonférence, et de l'autre côté du centre de gravité; en un mot C et o seront les centres réciproques de suspension et d'oscillation satisfaisant à la condition proposée.



21. — Détermination des réactions exercées par les points de suspension. — Pour déterminer dans le fonctionnement du pendule, les réactions des points de suspension, il faut y appliquer les formules générales établies précédemment.

Si d'abord nous supposons que le pendule est soumis, en chaque instant, à l'action d'une seule force quelconque F, nous aurons à faire remarquer que, par raison de symétrie, $\Sigma mz = 0$ dans une position quelconque, et que Σmx doit être remplacé par $\Sigma mx = Mo$ si l'on désigne la masse totale, par M, et par o la distance de son centre de gravité à l'axe de suspension. On doit aussi remarquer que, pour tout point m', dont les coordonnées seraient $x'y'z'$, il y a toujours un autre point m'', dont les coordonnées sont $x'y'$ et $-z'$, ce qui suffit pour démontrer que l'on doit avoir séparément $\Sigma mxz = 0$ et $\Sigma mxy = 0$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les équations fondamentales deviennent alors,

$$F_x + X + X' + M\delta\omega^2 = 0 .$$

$$F_y + Y + Y' - M\delta \frac{\partial w}{t} = 0 .$$

$$F_z + Z = 0$$

$$M_x F - Y_z - Y'a' = 0$$

$$M_y F + X_z + X'a' = 0$$

$$M_z F - \frac{\partial w}{\partial t} \Sigma m\rho^2 = 0$$

en elles suffisent, ainsi que nous l'avons vu déjà, pour déterminer, dans toutes les positions la valeur de l'accélération angulaire $\frac{\partial w}{\partial t}$ en celle des cinq réactions $X X' Y Y' Z$, lorsque la force unique F est connue.

22.— Application au cas où le pendule est seul soumis à l'action de la pesanteur. — Les formules se simplifient alors parceque l'on doit y faire simultanément $F_x = P, F_y = 0$ $F_z = 0$, $M_x F = 0$, $M_y F = 0$, ce qui donne

$$P + X + X' + M\delta\omega^2 = 0$$

$$Y + Y' - M\delta \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

$$Z = 0$$

$$-Y_a - Y'a' = 0$$

$$X_a + X'a' = 0$$

$$P l \sin. \alpha - \frac{\partial w}{\partial t} \Sigma m\rho^2 = 0$$

Après avoir déterminé $\frac{\partial w}{\partial t}$ en w comme précédemment on trouvera séparément les valeurs de X et X' par les équations (1) et (4) et celles de Y Y' par les équations (2) et (3).

Quant à la réaction Z, parallèle à l'axe de rotation elle est toujours nulle dans ce cas.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

23.— Cas où le pendule est en repos.— Dans le cas où le pendule est considéré à l'état de repos initial on a, quelle que soit la force extérieure F,

$$\begin{aligned}
&F_x + X + X' = 0\\
&F_y + Y + Y' - M\delta \frac{\partial w}{\partial t} = 0\\
&F_z + Z = 0\\
&M_x F - Ya - Y'a' = 0\\
&M_y F + Xa + X'a' = 0\\
&M_z F - \frac{\partial w}{\partial t} \Sigma m\zeta^2 = 0
\end{aligned}$$

et si l'on suppose que la force F n'est autre que le poids P qui agit toujours verticalement

$$\begin{aligned}
&P + X + X' = 0\\
&Y + Y' - M\delta \frac{\partial w}{\partial t} = 0\\
&Z = 0\\
&-Ya - Y'a' = 0\\
&Xa + X'a' = 0\\
&-\frac{\partial w}{\partial t} \Sigma m\zeta^2 = 0
\end{aligned}$$

et par suite,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial t} = 0\\
&X + X' = -P\\
&Y + Y' = 0.
\end{aligned}$$

24.— Conditions nécessaires pour que les réactions restent les mêmes quand une autre force vient agir sur le pendule au repos.— Si nous avions voulu, dans les mêmes conditions, tenir compte de l'action d'une force extérieure F, les équations auraient été plus complexes, en auraient dû s'écrire,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$Fx + P + X + X' = 0$$
$$Fy + Y + Y' - Md\frac{dw}{dt} = 0$$
$$Fz + Z = 0$$
$$M_x F - Ya - Y'a' = 0$$
$$M_y F + Xa + X'a' = 0$$
$$M_z F - \frac{dw}{dt}\Sigma m\zeta^2 = 0$$

On peut se demander s'il serait possible de déterminer cette force F de telle façon que les réactions calculées au N° précédent ne fussent pas modifiées par son action. A l'inspection des équations on voit immédiatement qu'il faudrait pour cela que Fx = 0 et Fz = 0, c'est-à-dire que la force fût parallèle à l'axe des y et que son moment fût nul tant par rapport à l'axe Ox que par rapport à l'axe Oy.

Ces équations (2) et (5), donnerons alors, en désignant par λ la distance de la force F à l'origine des coordonnées et en remplaçant la notation Fy par F

$$F = Md\frac{dw}{dt} = 0$$
$$F\lambda = \frac{dw}{dt}\Sigma m\zeta^2$$

d'où, par simple division $$\lambda = \frac{\Sigma m\zeta^2}{Md}.$$

Cette seule condition étant remplie les six équations seront satisfaites et l'on est ainsi conduit à reconnaître que les réactions ne sont pas modifiées par l'intervention de la force F, si cette force agit dans le plan d'oscillation, si elle est en outre horizontale et si enfin elle est appliquée sur la verticale du centre de suspension à une distance de ce centre égale à $\lambda = \frac{\Sigma m\zeta^2}{Md}$.

25. — **Définition du centre de percussion.** — Le point D dont nous venons de déterminer la position est désigné sous le nom de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

centre de percussion, en il jouit, en vertu de la théorie qui précède, de cette propriété, que toute force horizontale en comprise dans le plan d'oscillation qui y serait appliquée ne déterminerait aucune réaction sur les points d'appui, différente de celles qui nous auraient au pendule suspendu à l'état de repos.

On remarquera, d'ailleurs, que la valeur de λ est la même que celle de la longueur l du pendule simple qui oscillerait dans les mêmes conditions que notre pendule composé, ce que nous pouvons exprimer d'une autre manière en disant, que dans le pendule, le centre de percussion se confond avec le centre d'oscillation.

26.—Pendule balistique.— C'est sur la propriété du centre de percussion qu'est fondée la théorie du pendule balistique de Robins, à l'aide duquel on détermine la vitesse d'un projectile qui vient choquer un lourd pendule en son centre de percussion dans les conditions définies par la théorie qui précède.

Soit μ la masse du corps choquant, ce corps a une vitesse v au moment du choc; il agit sur le pendule en se mouvant avec lui de manière à prendre à la fin du choc une vitesse égale à celle qui a été communiquée au point choqué, et qui sera exprimée par $u = lw$.

Si F est l'effort variable développé au contact, on sait, par la théorie du choc que l'on a, par la considération des quantités de mouvement

$$\mu v - \mu u = \int_0^\theta F\,dt .$$

Si l'on désigne par l' la distance entre le point choqué et le centre de suspension, on sait aussi que l'accélération angulaire du pendule sera donnée par l'expression

$$\frac{dw}{dt} = \frac{Fl'}{\Sigma m s^2}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où $$d w = \frac{l \times F\,dt}{\sum m\zeta^2}$$

et, en intégrant

$$w = \frac{l}{\sum m\zeta^2} \int F\,dt = \frac{l}{\sum m\zeta^2} (\mu v - \mu u) .$$

La vitesse angulaire du pendule à la fin du choc est égale à la quantité de mouvement du corps choquant avant le choc, par rapport à l'axe de suspension, divisée par le moment d'inertie total après le choc.

On peut, dans cette expression remplacer u par lw, et l'on en tire facilement la valeur de v

$$v = w \left(\frac{\sum m\zeta^2}{\mu l} + l \right) = \frac{w}{\mu l} \left(\sum m\zeta^2 + \mu l^2 \right)$$

expression à l'aide de laquelle il sera facile de calculer la vitesse initiale v du projectile si la vitesse angulaire w du pendule était connue à la fin du choc.

27.— Application du pendule balistique.— Le pendule balistique était employé pour mesurer la vitesse du projectile, on déduit de la relation précédente

$$v = \frac{w}{l\mu} \left(\sum m\zeta^2 + \mu l^2 \right)$$

et il faut remplacer w par une quantité qui puisse être mesurée pendant le fonctionnement de l'appareil

P étant le poids total du système, sa puissance vive se dépensera par une certaine élévation H du centre de gravité ; on aura donc :

$$PH = \frac{1}{2} w^2 \left(\sum m\zeta^2 + \mu l^2 \right) ;$$

et par suite,

$$w^2 = \frac{2PH}{\sum m\zeta^2 + \mu l^2} .$$

En substituant cette valeur de w dans celle de v, on trouve

$$v = \frac{1}{l\mu} \sqrt{2PH \left(\sum m\zeta^2 + \mu l^2 \right)} .$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de telle manière qu'on connaîtra v par l'observation de H et par la détermination de l et de $\Sigma m\zeta^2 + \mu l^2$.

Ces deux quantités seront fournies par une expérience directe faisant osciller le pendule chargé de la masse supplémentaire u, et en déterminant la durée T d'une oscillation

$$T = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{\Sigma m\zeta^2 + \mu l^2}{gMD}}$$

ce qui donne,

$$\Sigma m\zeta^2 + \mu l^2 = \frac{4T^2(gMD)}{\pi^2}$$

et,

$$l = \frac{4T^2 g}{\pi^2}.$$

En se ménageant les moyens de faire varier le centre de percussion, à l'aide de poids supplémentaires, placés au-dessous du récepteur M^r Morin est parvenu à construire les pendules balistiques actuels, dans lesquels les couteaux se conservent très bien malgré l'intensité des chocs, et qui ne donnent lieu à aucune réaction appréciable sur les appuis.

Le même principe a été appliqué au canon pendule dans lequel on cherche à apprécier l'action du recul, et dans lequel on doit aussi faire agir l'action des gaz aussi près que possible du centre de percussion.

28. — **Des marteaux.** — Aucune application des formules qui précèdent ne saurait présenter plus d'intérêt que la théorie des marteaux telle qu'elle a été donnée par M^r Poncelet. L'étude des marteaux sera, en effet, pour nous, une occasion de tenir compte des frottements et des chocs qui peuvent se produire dans les pièces solides, et la théorie de ces appareils a reçu maintenant une consécration suffisante résultant de ce que l'on s'est maintes fois assuré que les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

déductions de la théorie sont en tous conformes aux résultats observés.

M.r Poncelet distingue trois sortes de marteaux :

1.o — Les marteaux frontaux qui sont soulevés par les cames en avant du marteau proprement dit : ce sont de beaucoup les plus lourds, car ils pèsent de 2500 à 5000 kilogrammes ; ils battent de 50 à 100 coups par minute.

2.o — Les marteaux à soulèvement ou à l'allemande qui sont soulevés entre l'axe et la tête ; ils pèsent de 300 à 400 kilogrammes, et battent de 70 à 200 coups par minute.

3.o — Les martinets ou marteaux à bascule du poids de 40 à 80 kilog., auxquels on fait frapper 200 et jusqu'à 400 coups par minute. La queue de ces martinets se prolonge au-delà du centre de l'articulation et c'est en faisant agir l'action motrice à l'extrémité de la tige que le soulèvement a lieu.

La théorie de ces trois sortes de marteaux est, à quelques légères près, la même, et après l'avoir établie pour un marteau du dernier genre, nous dirons quelles sont les modifications à apporter, pour que l'on puisse appliquer immédiatement la même méthode aux deux autres.

Remarquons, d'ailleurs, que c'est surtout pour les gros marteaux que le soulèvement a lieu près de la tête et par conséquent dans le voisinage du centre de percussion.

Dans tous les cas le soulèvement s'effectue au moyen de cames disposées symétriquement autour d'un arbre que nous désignerons sous le nom d'arbre à cames, en comprenant sous cette désignation comme l'arbre lui-même et tout son attirail la roue à cames et les cames elles-mêmes, qui sont disposées de telle façon que, dans tous les cas, le plan tangent suivant l'arête de contact entre la came et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le manche du marteau passe par le centre d'articulation.

29.— Périodes successives du fonctionnement. — Lors de la rotation de l'arbre à cames, l'une de ces cames vient choquer le manche du marteau, et il se produit aussitôt des compressions et des réactions moléculaires qui cessent au bout de très peu de temps.

Nous ne connaissons pas l'intensité des forces qui sont ainsi développées pendant le choc, mais nous savons qu'elles cessent de se produire au bout d'un temps très court, et nous admettrons qu'à ce moment le marteau ne s'est pas encore soulevé d'un angle appréciable.

1°.— M. Tuncker a examiné à part cette période importante du fonctionnement du marteau. Il l'a désignée sous le nom de période de choc et de compression et il a ensuite considéré deux autres périodes également distinctes :

2°.— Celle pendant laquelle le marteau est soulevé par l'action de la came, et où par conséquent les deux points de contacts se déplacent simultanément, la came continuant à agir sur la braie ou sur le manche sans mettre en jeu de nouvelles forces d'inertie. C'est la période d'élévation proprement dite.

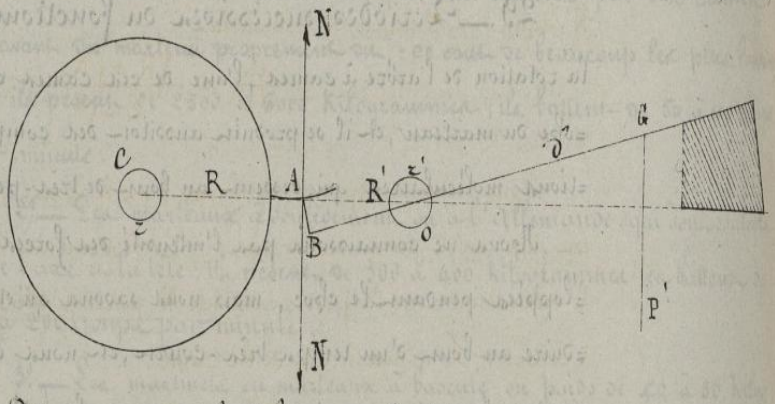
3°.— La période pendant laquelle, après avoir abandonné le marteau, qui retombe, la came continue à se mouvoir sans autre résistance que celles développées sur ses tourillons, jusqu'à ce que la came suivante reproduise par rapport au manche les mêmes phases.

Nous examinerons successivement le fonctionnement du marteau pendant ces trois périodes, et nous chercherons à déterminer les quantités de travail qui sont dépensées dans chacune d'elles. Nous verrons ensuite dans quelle proportion ce travail est utilisé pour produire

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'effet mécanique que l'on se propose de réaliser avec cet appareil.

30. — Travail dépensé pendant le choc (première période)



Au moment du choc, la came A vient rencontrer la queue du marteau que nous avons indiquée seulement par la ligne brisée ABO pour ne pas compliquer inutilement la figure, et nous avons tout d'abord à faire remarquer que la came est construite de telle manière que la réaction N variable pendant toute la durée du choc, soit perpendiculaire au rayon OA.

L'accélération angulaire $\frac{dw'}{dt}$ du marteau sera donnée par la formule du N° 2, en prenant pour mesure de la pression sur le tourillon, de rayon r', la seule force N, qui est, pendant toute la durée du choc, très-grande par rapport aux autres forces du système.

On aura donc

$$\frac{dw'}{dt} = \frac{NR' - fNr'}{\Sigma m'\rho'^2 + fr' \times M'd'}$$

en désignant le rayon OA par R', et par M' la masse du marteau, dont le centre de gravité G est à une distance d' du centre de rotation O, les masses élémentaires m' qui constituent cette masse M', étant d'ailleurs distribuées à des distances respectives ρ' de cet axe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les mêmes notations étant employées, sans indice, pour représenter les quantités correspondantes, par rapport à l'arbre à cames et à ses accessoires, on aura de même, en considérant la seule pression due à l'effort N, dans l'évaluation du frottement

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{NR + fNz}{\Sigma m\rho^2}.$$

Cette relation suppose, d'ailleurs, que le centre de gravité de cet arbre est situé en C, au centre de figure. Le frottement fN a dû être pris avec le même signe que la force résistante N, parcequ'elle concourt, avec celle-ci, à retarder le mouvement de la came.

Ces deux relations doivent avoir lieu simultanément, et en divisant membre à membre la seconde par la première, on arrive immédiatement à la relation

$$d\omega \Sigma m\rho^2 = \frac{R + fz}{R' - fz'} \left(\Sigma m'\rho'^2 + f'z \times M'd' \right) d\omega'.$$

Pour simplifier cette relation, on représente les moments d'inertie $\Sigma m\rho^2$, $\Sigma m'\rho'^2$, par des quantités égales μR^2, $\mu' R'^2$, dans lesquelles les masses primitives sont remplacées par les masses fictives μ et μ', calculées de manière que

$$\Sigma m\rho^2 = \mu R^2, \quad \Sigma m'\rho'^2 = \mu' R'^2.$$

On a, alors

$$d\omega \times \mu R^2 = \frac{1 + \frac{fz}{R}}{1 - \frac{fz'}{R'}} \left(1 + \frac{fz' \times M'd'}{\mu' R'^2} \right) \frac{R}{R'} \mu' R'^2 d\omega'$$

ou, en remplaçant les deux premiers facteurs du second membre, dont la valeur est constante pour un même mécanisme, par un coefficient constant K,

$$\mu R^2 \times d\omega = K \frac{R}{R'} \mu' R'^2 d\omega'$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et $$\mu\, d\omega = K\frac{R}{R'}\mu'\, d\omega'.$$

Cette équation nous permettra d'obtenir par intégration une relation entre les vitesses.

En désignant par Ω la vitesse angulaire de l'arbre à cames avant le choc, et par ω la vitesse commune au point de contact, lorsque le choc est terminé, on trouve

$$\mu(\Omega - \omega) = K\frac{R'}{R}\mu'\omega' = K\mu'\omega$$

si l'on observe que l'égalité des deux vitesses des points en contact, se traduit par

$$R\omega = R'\omega'.$$

On tire de cette relation $\omega = \dfrac{\mu\Omega}{\mu + K\mu'}$.

En désignant par Ω' la vitesse moyenne $\Omega' = \dfrac{\Omega+\omega}{2}$ pendant le choc, on a une seconde équation qui permet d'exprimer en fonction de cette vitesse moyenne Ω', les deux vitesses extrêmes Ω et ω.

Les équations précédentes deviennent :

$$2\Omega' = \Omega + \omega \qquad \omega(\mu + K\mu') = \mu\Omega$$

et en éliminant successivement Ω et ω

$$2\Omega' = \omega\left(1 + \frac{\mu + K\mu'}{\mu} - 1\right) = \frac{\omega}{\mu}(2\mu + K\mu')$$

$$2\Omega' = \Omega\left(1 + \frac{\mu}{\mu + K\mu'}\right) = \frac{\Omega(2\mu + K\mu')}{\mu + K\mu'}$$

d'où l'on tire respectivement

$$\omega = \frac{2\mu - \Omega'}{2\mu + K\mu'} \qquad \Omega = \frac{(\mu + K\mu')2\Omega'}{2\mu + K\mu'}$$

Le travail dépensé par l'arbre à cames à chaque choc peut maintenant se calculer facilement en fonction de la vitesse moyenne Ω',

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

puisque ce travail a pour expression :

$$\frac{\mu R^2}{2}\left(\Omega^2 - \omega^2\right) = \frac{+\mu R^2 \Omega'^2}{2(2\mu + K\mu')^2}\left[(\mu + K\mu')^2 - \mu^2\right]$$

$$= \frac{2\mu R^2 \Omega'^2}{(2\mu + K\mu')^2}\left[K\mu'(2\mu + K\mu')\right]$$

$$= \frac{2K\mu\mu' R^2 \Omega'^2}{2\mu + K\mu'}.$$

Pour passer de l'estimation de ce travail dépensé à chaque choc, à celle du travail dépensé par seconde, il suffit de multiplier l'expression précédente par le nombre n des cames de la roue, et par le nombre $\frac{t}{60}$ des tours que fait l'arbre par seconde, ce qui donne en définitive

$$T = \frac{nt}{60} \times \frac{2K\mu\mu' R^2 \Omega'^2}{2\mu + K\mu'}.$$

M. Poncelet fait remarquer que le coefficient

$$K = \frac{1 + \frac{f z}{R}}{1 - \frac{f z'}{R'}}\left(1 + \frac{f z' \times M' d'}{\mu' R'^2}\right)$$

diffère très-peu, en général de 1.

Pour un marteau frontal qu'il cite on a $K = 1.006$ et pour un marteau à soulèvement $K = 1.004$.

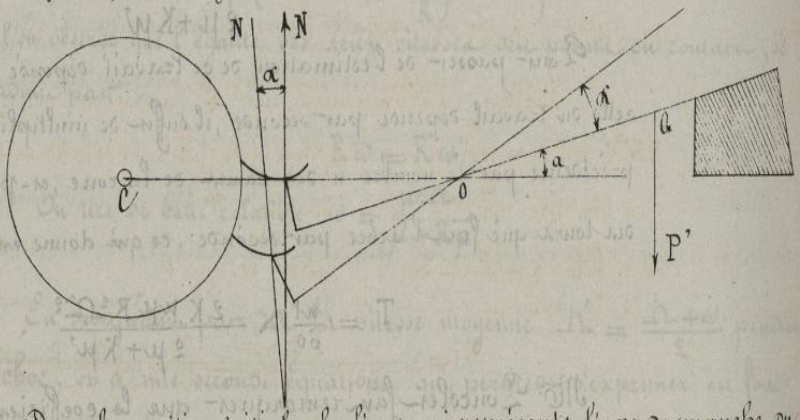
Cette remarque nous permettra ultérieurement de simplifier l'expression précédente et de porter une estimation sur la perte de travail pendant le choc, et sur l'utilisation des marteaux.

31. — Levée du marteau. — (deuxième période) — La durée du choc est toujours très-courte et bientôt la came entraîne le marteau dans son mouvement, dans de telles conditions que la vitesse reste commune au point de contact. À partir de ce moment, le marteau tourne en même

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

temps que l'arbre à cames, et les forces d'inertie cessent d'être en jeu. Il nous suffira donc de déterminer dans la seconde période la somme des travaux dépensés pour vaincre le poids du marteau pendant son élévation, et les frottements sur les différents points de contact.

Considérons d'abord le marteau dont le poids est P', en continuant de désigner par N l'effort exercé par la came



Dans la position initiale, la ligne qui représente l'axe du manche du marteau fait avec l'horizontale un angle a, et cet angle augmente successivement pendant la levée, d'un angle variable que nous désignerons par α.

La pression sur l'axe du marteau sera toujours donnée par la résultante des deux forces P' et N, transportées au centre de rotation. Si l'arbre a tourné d'un angle α, la force N, qui est toujours perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact, sera inclinée d'un angle α par rapport à la verticale de sa position primitive, et la pression sera donnée par

$$\sqrt{(P' + N\cos\alpha)^2 + (N\sin\alpha)^2} = 0.96\,(P' + N\cos\alpha) + 0.4\,N\sin.\alpha$$

en opérant comme il a été dit au numéro précédent.

Pendant cette période du mouvement il y aura égalité entre les travaux virtuels ou égalité entre les moments des forces extérieures,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce qui donne

$$NR'd\alpha = P'\times d\times\cos(\alpha+\alpha)\,d\alpha + fr'\left[0{,}96\,(P'+N\cos\alpha)+0{,}4N\sin\alpha\right]d\alpha.$$

La force variable N devant toujours satisfaire à cette relation on pourrait intégrer tous les termes de l'équation précédente si l'on connaissait la loi de ses variations, mais on arrivera à un résultat suffisamment approximatif, si on considère cette force comme conservant constamment une valeur moyenne N' que l'on obtiendra en effectuant tous les calculs dans l'hypothèse où N serait une quantité constante.

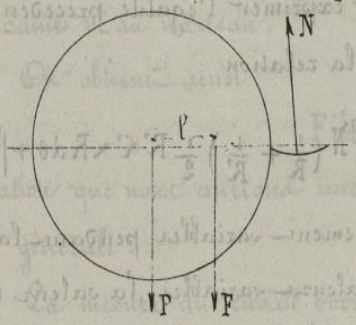
On a alors, en désignant par α' la valeur maximum de α

$$NR'\alpha' = P'd\times\left[\sin(\alpha'+a)-\sin a\right]+0{,}96\,fr'P'\alpha'+0{,}96\,fr'N'\sin\alpha'+0{,}4\,fr'N'(1-\cos\alpha')$$

d'où l'on tire pour la valeur moyenne N', en désignant la hauteur $d\times\left[\sin(\alpha'+a)-\sin a\right]$ par h

$$N' = \frac{P'd'\times h+0{,}96\,fr'P'\alpha'}{R'\alpha'-0{,}96\,fr'\sin\alpha'-0{,}4\,fr'(1-\cos\alpha')}.$$

Cette valeur de N' nous servira à déterminer la pression sur le tourillon de l'arbre à cames pendant la période que nous étudions.



Soit F l'effort moteur exercé à une distance l du centre de l'arbre à cames, P le poids de cet arbre et de tout son attirail, les trois forces qui déterminent la pression sur les tourillons sont à chaque instant F, P et la réaction N, qui agit, dans le cas de la figure, en sens contraire des deux autres.

En égard au petit angle que font entr'elles ces trois forces, et à la grandeur de N pendant la levée, nous admettrons comme nous l'avons fait dans la théorie du treuil que la pression est égale à la somme

6/4

$F+P-N$ de ces trois forces prises avec leurs signes.

Il y aura à chaque instant égalité entre les travaux virtuels de la force motrice F d'une part, et d'autre part ceux des résistances suivantes :

1° L'effort résistant N du marteau agissant à une distance R du centre de rotation.

2° La résistance du frottement exercé au contact de la came et du marteau, et nous savons que ce frottement doit être représenté par

$$f^{N}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\frac{1}{2}R'\alpha'$$

en le considérant comme ayant lieu entre deux dents d'engrenages dont le pas est $R'\alpha'$, et dont les circonférences primitives ont respectivement R et R' pour rayons.

3° La résistance de frottement $f(F+P-N)$ développée sur le tourillon de l'arbre à cames à une distance r du centre de rotation.

On aura donc pour exprimer l'égalité précédente, pour un déplacement angulaire $d\theta$, la relation

$$Fl\,d\theta = NR\,d\theta + f^{N}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\frac{1}{2}R'\alpha' \times R\,d\theta + f^{r}(F+P-N)\,d\theta.$$

N et F sont nécessairement variables pendant la levée, mais si nous substituons à ces valeurs variables, la valeur moyenne N', déduite de la relation précédente, et la valeur moyenne F' qu'il s'agit de déterminer, nous trouvons par intégration, entre la limite 0 et l'angle maximum θ'.

$$F'l\theta' = N'R\theta' + f^{N'}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\frac{1}{2}\left(R\theta'\right)^{2} + f^{r}\theta'\left(F'+P'-N'\right),$$

en observant que dans le second terme du second membre $R'\alpha' = R\theta'$;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on obtient ainsi, pour la valeur de F'.

$$F' = \frac{N' R\theta' + \frac{1}{2}(R\theta')^2 f'N'\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + f'z\theta'(P' - N')}{l\theta' - f'z\theta'}$$

Cette valeur moyenne de F' ayant été ainsi déterminée, le travail dépensé pendant la levée sera pour chaque came

$$F l \theta$$

et le travail par seconde sera estimé par

$$T_2 = \frac{nt}{60} F' l \theta' .$$

θ' étant l'angle total de déplacement de la came pendant toute la durée de la levée du marteau à chaque fonctionnement.

33. — Chûte du marteau. — (Troisième période). — Le marteau étant abandonné par la came, l'arbre continue à se mouvoir seul, sous l'action d'une force F'', différente de la précédente, et dont on obtiendra facilement la valeur en supprimant dans l'expression de celle-ci, l'influence de l'effort N qui était développé au contact de la came et du marteau.

On obtient ainsi :

$$F'' = \frac{f'z\theta'' P}{l\theta'' - f'z\theta''}$$

relation que nous aurions aussi pu déduire directement de la formule générale.

La mesure du travail correspondant serait alors

$$F'' l \theta''$$

θ'' dépendant de θ' puisque $\theta' + \theta''$ représente l'angle compris entre deux cames successives, distribuées au nombre de n, autour de l'arbre à cames.

On a donc $\quad 2\pi = (\theta' + \theta'')\, n$

d'où $\quad \theta'' = \frac{2\pi}{n} - \theta' .$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous pouvons dès lors estimer le travail total total dépensé, en moyenne, pendant chaque seconde, pour la troisième période, par l'expression

$$T_3 = \frac{nt}{60} F''l \left(\frac{2\pi}{n} - \theta' \right).$$

34. — Travail total dépensé par le marteau. — Il ne nous reste plus qu'à additionner les trois quantités T_1, T_2, T_3, pour connaître la dépense totale du travail

$$T = \frac{nt}{60} \left[\frac{2K\mu\mu' R^2 \Omega'^2}{2\mu + K\mu'} + F'l\theta' + F''l \left(\frac{2\pi}{n} - \theta' \right) \right]$$

Le premier terme est de beaucoup le plus important, et l'on voit qu'il dépend des masses μ et μ', par lesquelles nous avons remplacé les masses réelles M et M', en les concentrant respectivement aux extrémités des rayons R et R'.

La masse μ' est toujours beaucoup plus petite que la masse μ, et M. Lonceler a reconnu que dans les marteaux frontaux μ' était en général peu différent de $\frac{1}{30}\mu$; le rapport correspondant pour les marteaux à soulèvement est $\mu' = \frac{1}{12}\mu$. D'après cette indication, on doit conclure, en ce qui concerne le premier terme compris dans la parenthèse, que l'influence de μ' dans la valeur du dénominateur est très-petite.

On peut, d'ailleurs, en divisant par μ, écrire ce terme sous la forme

$$\frac{2K\mu' R^2 \Omega'^2}{2 + \frac{K\mu'}{\mu}}$$

et en négligeant le second terme du dénominateur qui est toujours très-petit, on obtient approximativement pour l'évaluation du travail dépensé à chacun des chocs

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$K\mu' R^2 \Omega'^2,$$

ou, si l'on admet que K est peu différent de 1

$$\mu' R^2 \Omega'^2.$$

Cette valeur est précisément égale au double de celle qui représente le travail emmagasiné dans le marteau après le choc, et l'on voit ainsi que la perte de travail pendant le choc est peu différente de la moitié du travail dépensé pour le produire.

35. — Utilisation. — Ce travail utilisé pour effectuer l'opération industrielle à laquelle le marteau est employé, est celui que peut développer le marteau en retombant. Nous avons déjà désigné par h la hauteur à laquelle il est élevé pendant la période de soulèvement, mais il doit encore s'élever ensuite, en vertu de la vitesse acquise, d'une hauteur h' à partir du moment où il est abandonné par la came.

A ce moment, le point en contact est animé d'une vitesse peu différente de Ω, ce qui correspond à une vitesse angulaire du marteau mesurée par $\frac{R\Omega'}{R'}$ et à un travail emmagasiné dont l'expression est celle de la puissance vive

$$\frac{1}{2}\mu' R'^2 \left(\frac{R\Omega'}{R'}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu' R^2 \Omega'^2.$$

Ce travail va être dépensé à élever le poids P' du marteau à une hauteur h' ; on aura donc

$$\frac{1}{2}\mu' R^2 \Omega'^2 = P' h' \quad \text{d'où} \quad h' = \frac{\mu' R^2 \Omega'^2}{2P'}$$

La valeur de h' ayant été ainsi calculée, le travail que fournira la chute du marteau est donné par $P'(h+h')$; et en comparant ce travail utile au travail total dépensé, on a, pour expression de l'utilisation

$$U = \frac{P'(h+h')}{T}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cette utilisation doit être, en général considérée comme étant peu différente de $\frac{1}{2}$, si l'on tient compte des observations présentées à la fin du N° précédent.

36.— Mesure du travail nécessaire pour produire un effet déterminé.— Si l'on examinait dans la fabrication du fer, par exemple, l'effet produit par chaque chute du marteau, on pourrait recueillir des coëfficients très-utiles pour l'établissement des marteaux destinés au même usage.

Si nous désignons par a et b les dimensions transversales de la panne du marteau, et par e la profondeur de l'impression produite sur un fer déterminé, et chauffé à une température approximativement connue, le volume de l'impression $a \times b \times e$, et en appliquant à ce volume un coëficient m, nous pourrons écrire

$$m \times abe = P'(h + h')$$

d'où

$$m = \frac{P'(h+h')}{abe}$$

La valeur de m, ainsi déterminée, nous fera connaître le travail nécessaire pour faire une impression de 1m cul sur un fer de même nature et chauffé dans les mêmes conditions.

La considération du coëficient m fournirait une notion exacte et fort utile de la résistance opposée par les différents genres de fabrication.

37.— Application aux autres genres de marteaux.— La formule finale à laquelle nous sommes arrivés dans l'étude d'un marteau, met en évidence aucun des signes relatifs aux sens dans

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

lesquelles agissent les résistances passives ; elle est, sous sa forme définitive, applicable à tous les genres de marteaux, à la condition, toutefois que les quantités K, F' et F'' qui y entrent soient calculées d'une manière convenable en faisant attention aux éléments qui entrent dans leur évaluation.

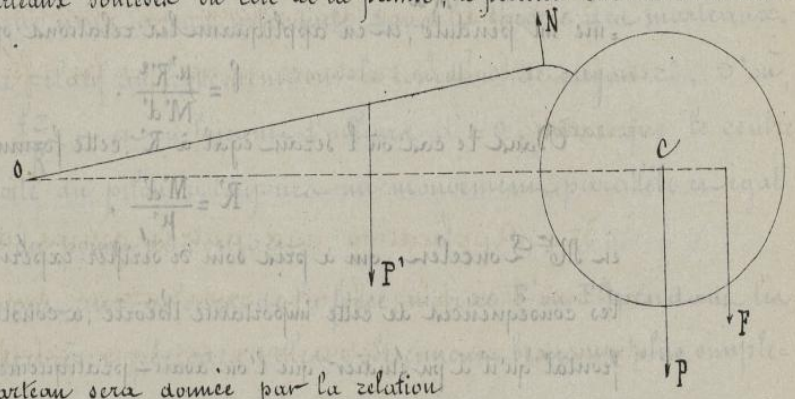
La valeur de K qui, ainsi que nous l'avons vu, diffère très-peu de 1, a peu d'importance sous ce rapport. Il est toutefois bon d'indiquer que dans la détermination de la valeur de l'accélération du marteau pendant le choc, la force motrice N, et la force d'inertie $M'd'\frac{dw'}{dt}$ agissent en sens contraires par rapport au centre d'articulation, il faudrait, dans le cas des marteaux frontaux ou des marteaux à soulèvement prendre le signe — au dénominateur de la formule du N° 30, en écrire, par conséquent

$$\frac{dw'}{dt} = \frac{NR' - fNz'}{\Sigma m'\zeta'^2 - fz' \times M'd'}.$$

Ce qui dans la suite des calculs aurait conduit à

$$K = \frac{1+\frac{fz}{R}}{1-\frac{fz'}{R'}}\left(1 - \frac{fz' \times M'd'}{\mu' R'^2}\right).$$

Dans la seconde période, la figure ci-jointe, montre que pour tous les marteaux soulevés du côté de la panne, la pression sur les tourillons



du marteau sera donnée par la relation

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$0{,}96\,(P' - N\cos\alpha) + 0{,}4\,N\sin\alpha\,;$$

et la pression correspondante sur les tourillons de l'arbre à cames serait $P + F + N$ au lieu de $P + F - N$.

Ces changements de signes donneraient des valeurs différentes pour F' et pour F'', qui devraient entrer, dès lors, dans l'expression du travail avec ces nouvelles valeurs.

38. — **Observation sur le centre de percussion des marteaux.** — Au point de vue de l'action de la came, il serait désirable que le choc se produisit sur le manche du marteau, à son centre de percussion, mais cette condition ne pourrait être satisfaite que dans les marteaux frontaux et dans les marteaux à soulèvement dont le point d'attache a toujours lieu, par rapport au centre d'articulation, du même côté que le centre de gravité.

Mais ce choc n'est pas le plus important au point de vue des ébranlements déterminés par le fonctionnement, et celui qui a lieu lors du frappage est surtout à considérer, et l'on doit remarquer que, par l'enseignement même de la pratique, on est arrivé à faire que la distance R' soit très-peu différente de la longueur l, donnée par la formule $l = \frac{\Sigma m f^2}{M d}$, qui devient ici, en considérant le marteau comme un pendule, et en appliquant les relations spéciales de la question,

$$l = \frac{\mu' R'^2}{M' d'}.$$

Dans le cas où l serait égal à R', cette formule se réduirait à

$$R' = \frac{M' d'}{\mu'},$$

et M^r^ Lonceler, qui a pris soin de vérifier expérimentalement toutes les conséquences de cette importante théorie, a constaté sur un marteau frontal qu'il a pu étudier que l'on avait pratiquement donné à R' la valeur

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$R' = 1^m.62$, alors que le calcul précédent aurait conduit à $R' = 1.80$.

Il n'est pas nécessaire d'insister sur l'importance de cette vérification.

39. — Application aux pilons mus par des cames. — La même succession d'actions se produit dans le fonctionnement des pilons mus par des cames, et pour calculer les différentes quantités de travail dépensées dans l'emploi de ce genre d'appareil, il faut également considérer la période de choc, la période de soulèvement, et la période d'abandon de la came. Ce simple rapprochement suffit pour faire comprendre le mode de calcul à employer dans ce cas, en ayant soin de remarquer que la puissance vive du pilon est représentée par $M'v'^2$ au lieu de l'être par $\mu' R'^2 \omega'^2$.

On arrive par la même suite de raisonnements à la formule

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{n l}{60} \left[\frac{2K'\mu\, M' R^2 \Omega'^2}{2\mu + K M'} + F' l\theta + F'' l \left(\frac{2\pi}{n} - \theta \right) \right].$$

Dans cette formule, M' représente la masse tout entière du pilon, augmentée dans la proportion nécessaire pour tenir compte des frottements dans les guides.

La valeur de K' s'obtient d'ailleurs en négligeant dans celle de K que nous avons introduite dans la théorie des marteaux, le terme relatif au frottement sur le tourillon de rayon z', d'où, $K = 1 + \frac{fz}{R}$, et en faisant d'ailleurs $d' = 0$, parce que le centre de gravité du pilon a toujours un mouvement parallèle et égal à celui du point de contact.

Quant aux valeurs de la force motrice F' ou F'' pendant les deux dernières périodes, elles s'obtiennent beaucoup plus simple-

7/+

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=mens en tenant compte seulement des frottements relatifs aux points de contact de la came et aux tourillons de l'arbre.

40. — Généralités sur les organes de rotation employés dans les machines. — Les machines en usage dans les ateliers renferment toujours des organes de rotation, quand elles doivent fonctionner d'une manière continue, parce qu'il serait impossible de soumettre aucun de leurs organes à l'obligation de la continuité d'un mouvement rectiligne.

Lorsque le fonctionnement en ligne droite est nécessaire, il est alternatif, et ce sont encore des organes rotatifs qui sont encore chargés d'en opérer le changement aux moments convenables. On voit donc que, considérés dans leur rôle général, les organes de rotation ont une importance prépondérante dans les machines, où ils existent presque toujours en nombre plus ou moins grand. L'étude de leurs relations mutuelles et de leurs propriétés, celle aussi de la régularité qu'ils imposent au mouvement de tous les autres organes, seront de notre part l'objet d'un examen particulier.

N.B.

41. — Réactions mutuelles des organes rotatifs. — Lorsque deux corps animés de mouvements de rotation sont liés l'un à l'autre, soit par les dents d'un engrenage, soit par une courroie, toute variation de la vitesse de l'un d'eux doit nécessairement amener des réactions analogues à celles que nous avons reconnues dans la première période du fonctionnement des marteaux.

Pour étudier ces réactions, il convient toujours de les considérer par rapport à chacun des mobiles isolément, et d'exprir

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=mer ensuite que les deux réactions exercées réciproquement par les deux mobiles, l'un sur l'autre, sont égales et de signes contraires.

Il importe, d'ailleurs de limiter ces réactions de manière qu'elles ne puissent altérer ni les dents en contact, s'il s'agit d'engrenages ou de cames, ni les courroies ou les cordes s'il s'agit de transmission à distance ; dans ce dernier cas, il faut même que les réactions ne dépassent pas les efforts au-delà desquels la courroie pourrait glisser sur le tambour ou sur la surface de la poulie de transmission.

42. — Transmission entre deux organes de rotation. —

Soient A et A' deux corps tournants réunis par une courroie ; l'un de ces corps est soumis à l'action d'une force motrice P agissant à la distance p de l'axe de rotation ; l'autre doit vaincre une résistance Q agissant à la distance q de l'autre axe ; si l'on désigne par T la tension de la courroie intermédiaire à un instant donné, les accélérations angulaires, à ce moment, seront exprimées d'après la formule générale, par

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\Sigma FR}{\Sigma m\rho^2} = \frac{Pp - TR}{\Sigma m\rho^2}$$

pour la poulie motrice A, et par

$$\frac{dw'}{dt} = \frac{\Sigma FR}{\Sigma m\rho^2} = \frac{TR' - Qq}{\Sigma m'\rho'^2}$$

pour la poulie conduite A'.

On a tenu compte dans ces formules de ce que la tension T, résistante pour la poulie A, est au contraire motrice pour la poulie conduite A'.

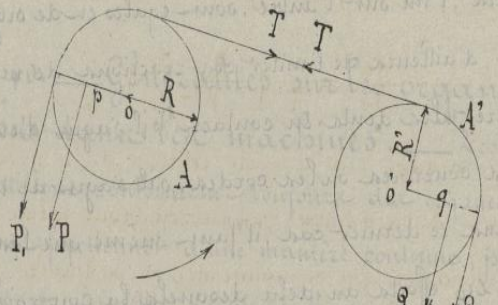
Si la courroie est supposée inextensible, la vitesse de l'un des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

points de contact sera indifféremment représentée par $Rw = R'w'$, et par suite on a :

$$R\,dw = R'\,dw'$$

Ce qui permet d'éliminer dw et dw' entre les deux premières équations, et d'écrire



$$R\,\frac{Pp - TR}{\Sigma m\zeta^2} = R'\,\frac{TR' - Qq}{\Sigma m'\zeta'^2}.$$

d'où l'on tire

$$T = \frac{Pp\,R\,\Sigma m\zeta'^2 + Qq\,R'\,\Sigma m\zeta^2}{R^2\,\Sigma m'\zeta'^2 + R^2\,\Sigma m\zeta^2}.$$

En remplaçant les sommes $\Sigma m\zeta^2$ et $\Sigma m'\zeta'^2$ par les produits équivalents μR^2 et $\mu' R'^2$, ce qui revient à substituer aux masses réelles M et M' les masses hypothétiques μ et μ' de rayons de giration R et R' et ayant respectivement les mêmes moments d'inertie ; et en faisant $Pp = P_1 R$, $Qq = Q_1 R'$, ce qui revient à faire agir les forces motrice et résistante aux extrémités des rayons des poulies, les formules précédentes se ramènent à une formule beaucoup plus simple

$$T = \frac{P_1 R^2 \mu' R'^2 + Q_1 R'^2 \mu R^2}{R^2 \mu' R'^2 + R'^2 \mu R^2} = \frac{P_1 \mu' + Q_1 \mu}{\mu + \mu'}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{P_1 R - TR}{\mu R^2} = \frac{P_1 - T}{\mu R}, \qquad \frac{dw'}{dt} = \frac{T - Q_1}{\mu' R'}.$$

La tension T est variable avec les valeurs de P_1 et Q_1 ; Nous aurons à discuter sa valeur, et pour faciliter cette discussion, nous porterons dès à présent l'expression générale de la tension T, dans celles des accélérations qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

deviennent ainsi :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{\mu R}\left[P_1 - \frac{P_1\mu' + Q_1\mu}{\mu'+\mu}\right] = \frac{1}{R}\left(\frac{P_1 - Q_1}{\mu'+\mu}\right)$$

$$\frac{dw'}{dt} = \frac{1}{R'}\left(\frac{P_1 - Q_1}{\mu'-\mu}\right)$$

On aurait pu déduire cette dernière relation de la précédente en observant que l'on a $R\,dw = R'\,dw'$, et l'on remarque même que si l'on désigne par $\frac{dv}{dt}$ l'accélération commune de l'un ou l'autre des points de contact avec la courroie, on a nécessairement

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{dw}{dt} = R'\frac{dw'}{dt} = \frac{P_1 - Q_1}{\mu'+\mu}$$

Si la courroie qui relie les deux mobiles A et A' était une courroie sans fin, la tension T serait alors la différence entre les tensions des deux brins.

Les valeurs précédentes des accélérations angulaires seraient d'ailleurs les mêmes, soit dans ce cas, soit dans celui d'une transmission par engrenages. T représentant alors la réaction exercée sur chacune des deux en contact.

Si nous supposons $P_1 = Q_1$, on voit, par la formule précédente que T_1 est aussi égal à chacune de ces quantités, et les valeurs des accélérations se réduisent alors à

$$\frac{dw}{dt} = 0 \qquad \frac{dw'}{dt} = 0$$

L'accélération doit être nulle, en effet, lorsque le travail de la force motrice est égal au travail de la résistance.

Si P_1 est plus grand ou plus petit que Q_1, on pourra poser $P_1 = Q_1 + P_2$, ce qui donnera pour les valeurs correspondantes de T et des accélérations

$$T = Q_1 + \frac{P_2\mu'}{\mu'+\mu} = Q_1 + P_2\,\frac{1}{1+\frac{\mu}{\mu'}}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{R}\left(\frac{P_2}{\mu'+\mu}\right), \qquad \frac{dw'}{dt} = \frac{1}{R'}\left(\frac{P_2}{\mu'+\mu}\right)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

P_2 étant une quantité positive ou négative suivant le cas.

Lorsque P_2 est positif, les valeurs de T, de $\frac{dw}{dt}$ et de $\frac{dw'}{dt}$ sont positives, ce qui montre que le mouvement s'accélère dans le sens du mouvement primitif. Dans le cas contraire les accélérations angulaires deviennent négatives ce qui revient à dire que les vitesses primitives, allant successivement en diminuant, finiront par devenir nulles, mais il convient de remarquer que la tension T ne devient négative que si la fonction $\varphi_1 + P_2 \frac{\mu'}{\mu+\mu'}$ qui est alors plus petite que P_1 devient elle-même négative.

On voit ainsi que pour que T soit maintenu entre des limites peu étendues, il faut que $\frac{\mu}{\mu'}$ soit relativement très-grand, c'est-à-dire que la masse sur laquelle agit la puissance variable soit très-grande par rapport à celle du solide sur lequel la résistance est appliquée.

On satisfait à cette condition par l'emploi des volants, qui ne sont autre chose que des anneaux d'un grand poids placés dans les transmissions aux points où les plus grandes variations de vitesse sont à craindre.

43. — **Cas d'un plus grand nombre de mobiles.** — Pour déterminer les réactions qui se produisent entre les différents organes de rotation, s'il y en a plus de deux, il vaut mieux recourir à la formule qui donne directement la valeur de $\frac{dv}{dt}$, puisque cette accélération est nécessairement la même pour les points correspondants de deux mobiles reliés par un engrenage ou une courroie.

Si l'un des rouages ou l'une des poulies est soumis à un effort moteur P, ou à une action résistante T, on a pour cet organe, en adoptant les mêmes notations,

$$\frac{dv}{dt} = R \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{P_1 - T}{\mu}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si la zone conduite par la réaction motrice T est soumise à une force résistante Q_1', ou à une réaction résistante T', on a ainsi,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{T - Q_1' - T'}{\mu'}$$

et de même pour les zones suivantes

$$\frac{dv}{dt} = \frac{T' - Q_1'' - T''}{\mu''}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{T'' - Q_1''' - T'''}{\mu'''}$$

Seulement il n'y aura pas à considérer de tension résistante, pour la dernière zone du système.

Si par exemple il n'y a que quatre zones la dernière équation deviendra

$$\frac{dv}{dt} = \frac{T'' - Q_1'''}{\mu'''}$$

Or toutes ces valeurs de $\frac{dv}{dt}$ étant égales, en formant de nouvelles fractions dont les numérateurs et les dénominateurs seraient respectivement formés par l'addition des numérateurs et des dénominateurs des premières on aura encore des quantités égales.

On obtiendra ainsi

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P_1 - T}{\mu} \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{P_1 - Q_1' - Q_1'' + T''}{\mu + \mu' + \mu''},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P_1 - Q_1' - T'}{\mu + \mu'} \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{P_1 - Q_1' - Q''}{\mu + \mu' + \mu'' + \mu'''}.$$

La dernière de ces expressions permettra de déterminer $\frac{dv}{dt}$, et cette quantité étant connue les autres équations conduiront aux valeurs des tensions successives T, T', T''.

On pourra donc, dans tous les cas, trouver les valeurs des tensions successives ou des réactions exercées entre deux mobiles voisins, toutes les fois que l'on connaîtra la force motrice, et toutes les résistances agissant sur chacun des mobiles.

Des calculs ne présenteraient non plus aucune difficulté, s'il y avait plusieurs

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

forces motrices, que l'on introduirait dans les équations individuelles avant de les additionner en pour arriver à la valeur de l'accélération commune.

44.— Expression générale de la puissance vive en un seul terme. — Il est souvent commode de ramener à une expression en un seul terme celle de toutes les puissances vives de rotation d'un certain nombre de mobiles, et l'on y arrive facilement au moyen d'une masse hypothétique M, concentrée en un anneau de rayon R, en disposant d'ailleurs arbitrairement de l'une de ces deux quantités.

Nous venons de voir que tous les mouvements de rotation d'un système composé de treuils ou de poulies, réunis par des dents d'engrenage ou des courroies restent constamment proportionnels. Si donc on désigne par w la vitesse angulaire de l'un quelconque des mobiles, les vitesses de tous les autres pourront être représentées par $K'w$, $K''w$, ... les coefficients K', K'', ... puisés dans les conditions géométriques du système pouvant d'ailleurs être plus grands ou plus petits que 1. Si l'on désigne par m, m' ..... les masses élémentaires de chacun des mobiles, placées à des distances $\zeta\zeta'$ des axes de rotation respectifs, la puissance vive de l'un d'eux sera exprimée d'une manière générale par

$$\frac{1}{2}\Sigma m'\zeta'^2 w'^2 = \frac{1}{2}\Sigma m'\zeta'^2 K'^2 w^2 = \frac{1}{2}K'^2 w^2 \Sigma m'\zeta'^2.$$

Il en serait de même pour chacun des autres mobiles, et si l'on fait la somme de toutes ces puissances vives on trouvera

$$\frac{1}{2}w^2\left[K'^2\Sigma m'\zeta'^2 + K''^2\Sigma m''\zeta''^2 + \ldots\right].$$

Quantité que l'on peut toujours égaler à un produit $\frac{1}{2}w^2 \times M^2R^2$, le second facteur étant d'ailleurs une quantité constante sur laquelle la vitesse n'a aucune influence, et qui dépend uniquement des conditions matérielles de chacun des mobiles et des relations géométriques de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de leur mode de liaison.

45. — Expression générale de toutes les résistances en fonction d'une résistance unique. — La composition de toutes résistances en une seule peut s'effectuer par un procédé analogue, à la condition de tenir compte, pour chacune d'elles, de la relation entre la vitesse de son point d'application par rapport au mobile auquel toutes les résistances sont rapportées.

Si, par exemple le mobile désigné par l'indice (') doit vaincre une résistance S' appliquée à une distance s' de son centre de rotation, et si ω' est la vitesse de rotation de cet axe, le travail élémentaire de cette résistance sera $S' \times s' \times d\omega' = S' \times s' \times K' \times d\omega$, et la somme de tous les travaux correspondants pourra s'exprimer par

$$d\omega \left[K' \times S's' + K'' \times S''s'' + \dots \right] = d\omega \times Qq \ ;$$

d'où, en divisant par $d\omega$

$$K' \times S's' + K'' \times S''s'' \dots = Qq \ .$$

Les coefficients K', K''..., représentent les rapports des diverses vitesses angulaires avec la vitesse angulaire du mobile auquel on suppose qu'est appliquée la seule résistance Q.

A l'aide de ces simplifications, l'étude complète du mouvement d'un corps tournant pourra se faire sur un mobile unique par rapport auquel toutes les puissances vives et toutes les résistances sont évaluées

46. — Condition pour que la vitesse soit périodique. — Le principe général des puissances vives peut s'écrire d'une manière extrêmement simple sous la forme

$$\Sigma \frac{1}{2} m \int^2 \omega^2 - \Sigma \frac{1}{2} m \int^2 \omega_0^2 = T_m - T_2$$

8/4

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en considérant la vitesse w et les travaux moteur et résistant T_m et T_r comme des variables dépendant du temps.

On voit sous cette forme que w augmente pendant toute période dans laquelle le travail moteur est plus grand que le travail résistant, et que l'influence inverse se traduit par une diminution de vitesse. Les valeurs maximum de la vitesse auront donc lieu quand $T_m - T_r$ cessera de croître, et la minimum, quand $T_m - T_r$ cessera de diminuer, de sorte que ces maxima et ces minima correspondront les uns aux autres aux instants pour lesquels la différentielle de $T_m - T_r$ sera nulle. On les distinguera les uns des autres en examinant le signe de cette différence avant le moment où la différentielle est nulle.

La même égalité nous apprend que la vitesse w redeviendra la même toutes les fois que pour une certaine période on aura eu $T_m = T_r$, ce qui nous permettra de reconnaître dans les corps tournants les positions pour lesquelles la vitesse repassera par les mêmes états de grandeur que précédemment, et à partir desquelles, si les travaux moteurs et résistants se développent dans le même ordre et dans les mêmes conditions le mouvement sera nécessairement périodique.

Il suffira dans ce cas d'étudier une des périodes comprenant toutes les variations et la condition de périodicité s'exprimera d'une manière générale par l'équation $T_m - T_r = 0$ qui se traduira par une relation nécessaire entre les intensités des forces en jeu, en égard à leur influence sur le travail moteur dépensé ou sur le travail résistant qui lui correspond.

Cette condition de la périodicité dans les mouvements est en quelque sorte la condition fondamentale de la plupart des machines à organes rotatifs. Si elle n'était pas satisfaite, le mouvement cou-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=timerait indéfiniment à s'accélérer ou le mouvement cesserait d'exister ce qui ne doit évidemment avoir lieu que lors de la mise en train ou lors de l'arrêt de la machine.

Volants.

47. — Objet des volants dans les machines. — Nous avons vu dans les paragraphes précédents que, dans la rotation des or=ganes de machines, les écarts de vitesse variaient, pour une période donnée, suivant les excès du travail moteur ou du travail résistant par rapport au travail résistant ou au travail moteur.

Ces écarts de la vitesse peuvent toujours être calculés par la for=mule générale de la puissance vive

$$\frac{1}{2} M R^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = T_m - T_r$$

en en divisant les deux membres de cette égalité par $\frac{1}{2} M R^2$, on trouve

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \frac{2 (T_m - T_r)}{M R^2}$$

On voit ainsi que pour les mêmes variations de travail, la dif=férence $\omega^2 - \omega_0^2$ sera d'autant plus petite que MR^2 sera plus grand.

De là l'utilité de placer sur l'un des arbres de rotation un or=gane spécial, nommé volant, dont le moment d'inertie doit être calcu=lé de manière à restreindre les variations de la vitesse, dans le mouve=ment périodique de rotation.

Le volant d'une machine à vapeur par exemple, n'a donc pas pour objet unique de déterminer le passage des points morts en lesquels l'action motrice est nulle, il a encore en outre pour objet de régulariser la vitesse et par une augmentation convenable du moment d'inertie MR^2, il satisfait effectivement à la condition que la différence de la plus grande vitesse angulaire Ω, à la petite vitesse angulaire ω, soit toujours inférieure à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la fraction $\frac{1}{n}$ de la vitesse moyenne w.

Le nombre n de la relation

$$\Omega - w = \frac{1}{n} w$$

est appelé coefficient de régularisation, et nous nous proposons dans les paragraphes suivants de déterminer les dimensions des volants qui correspondent à un coefficient de régularisation donné n.

Les dimensions des volants dépendront nécessairement des circonstances que présenteront les variations des efforts moteurs et résistants, et nous ne pourrons résoudre le problème qu'à la condition de connaître les conditions de ces variations.

Le plus souvent, le mouvement de rotation est déterminé dans les machines par l'intermédiaire d'une ou de plusieurs manivelles qui peuvent varier dans leur mode d'action : Nous nous occuperons surtout des volants à appliquer aux arbres mis en mouvement par des manivelles.

48. — **Problème général du calcul des volants.** — Pour chercher à restreindre les écarts de vitesse, il faut, ainsi que nous l'avons vu, admettre que le mouvement est périodique, c'est-à-dire que pour toute une période le travail moteur soit égal au travail résistant. Cette relation nécessaire pour la périodicité nous fera connaître les rapports nécessaires entre les forces motrices et les forces résistantes.

Les valeurs extrêmes de la vitesse angulaire correspondant aux positions pour lesquelles le travail élémentaire moteur est égal au travail résistant, nous aurons à rechercher dans chaque combinaison les positions correspondantes à cette égalité, et cette détermination faite, nous pourrons calculer l'excès de l'un des travaux sur l'autre pendant toute la période comprise depuis le maximum ou le minimum précédent, ce qui nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

permettra de déterminer la variation de vitesse correspondante, au moyen de la relation

$$\frac{1}{2} MR^2 (\Omega^2 - \omega^2) = T_m - T_r .$$

Dans cette relation MR^2 est encore indéterminé, mais après avoir obtenu toutes les données précédentes, il nous sera toujours facile d'en fixer la valeur de manière à satisfaire à la condition fondamentale

$$\Omega - \omega = \frac{1}{n} \omega .$$

Chaque détermination exigera donc que nous résolvions successivement les quatre questions suivantes :

1°. — Condition de périodicité

2°. — Position des organes pour les vitesses extrêmes

3°. — Expression des plus grandes variations de vitesse en fonction du moment d'inertie.

4°. — Détermination du moment d'inertie convenable, pour satisfaire à la condition de régularité fixée par le coefficient n.

49. — **Volant de la manivelle à simple effet.** — Une force d'intensité et de direction constante, agissant seulement pendant la moitié de la rotation du bouton de manivelle auquel elle est appliquée, doit vaincre une résistance constante Q appliquée à une distance q de l'axe de rotation, on demande d'établir les conditions du mouvement de cette manivelle, c'est-à-dire :

1°. — La condition nécessaire pour que le travail moteur fourni à chaque tour, soit égal au travail dépensé, ou ce qui revient au même, pour que le mouvement se reproduise toujours le même à chaque rotation.

2°. — Les positions du rayon de la manivelle qui correspondent au maximum et au minimum de la vitesse angulaire de l'arbre

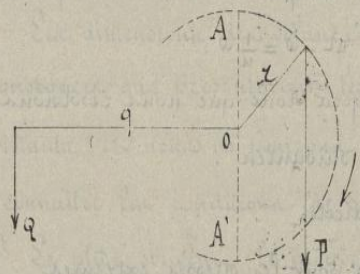
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la manivelle.

3°.— La relation entre ces vitesses extrêmes

4°.— Les dimensions à donner au volant que l'on placerait sur cet arbre, pour que l'écart entre les vitesses extrêmes soit maintenu entre des limites données.

1°.— Condition de périodicité. — Pour que le mouvement soit le même à deux périodes séparées par un certain temps il faut et il suffit que pendant ce temps le travail moteur ait été égal au travail résistant.



Si nous voulons que cette périodicité ait lieu après une révolution entière, il faut donc estimer séparément les deux travaux correspondants à cette révolution, et les égaler entre eux. Or le travail total de la force motrice P, se mesure par l'intégrale du produit de cette force supposée constante, par la somme des projections des chemins parcourus par le point auquel elle est appliquée, c'est-à-dire par $2z$, en désignant par z le rayon de la circonférence décrite par le bouton de la manivelle attendu que cette force P n'agit, par hypothèse, que pendant le déplacement de A en A', et non pas pendant le déplacement de A' en A.

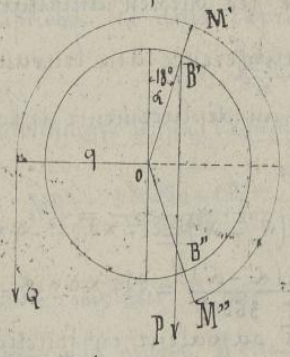
Quant à la résistance Q, dont le point d'application se meut constamment dans la direction même de la tangente à la circonférence de rayon q, le travail par tour sera mesuré par $Q \times 2\pi q$, et la condition du retour régulier des mêmes vitesses, aux mêmes positions, se trouve exprimée par

$$P \times 2z = Q \times 2\pi q .$$

ce qui établit une relation nécessaire entre les deux forces P et Q.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2°_ Position de la manivelle correspondant aux limites inférieures et supérieures de la vitesse. — Nous avons vu que ces limites correspondaient aux positions pour lesquelles il y a équilibre momentané entre les forces extérieures qui sont ici P et Q. Ces deux forces sont d'ailleurs parallèles, il suffira par conséquent d'écrire que leurs moments sont égaux ce qui donne, en représentant par α l'angle de la position cherchée avec la verticale



$$P p \sin\alpha = Q q .$$

En divisant membre à membre cette équation par la précédente on trouve immédiatement

$$\sin\alpha = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{3.1415} = 0,3183$$

l'angle α cherché dans les tables, d'après cette valeur du sinus, est $\alpha' = 18°\,33'$ et l'on satisfait encore à l'équation précédente avec l'angle $\alpha'' = 180° - \alpha' = 161°\,27$.

On obtient ainsi les positions B' et B", du bouton de manivelle, qui satisfont à la condition proposée, et l'on reconnait que le maximum de vitesse a lieu en B", lorsque la force P a agi sur la manivelle depuis B' jusqu'en B", en dépensant sur elle une quantité de travail .

$$P \times B'B'' = P \times 2r \cos.\alpha = 2Pr \times 0,948 .$$

3°_ Relation entre les vitesses extrêmes. — Si nous désignons par MR^2 le moment d'inertie de toutes les pièces rotatives autour du centre de rotation, que nous considérerons comme étant en même temps le centre de gravité du système, nous pourrons

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

exprimer la variation maximum de la puissance vive par

$$\frac{1}{2} MR^2 (\omega''^2 - \omega'^2)$$

en désignant par ω'' et ω' les vitesses angulaires extrêmes ; cette valeur devra être égale à la différence des travaux moteurs et résistants, correspondant au déplacement de la manivelle depuis B' jusqu'en B'', ce qui donne

$$\frac{1}{2} MR^2 (\omega''^2 - \omega'^2) = 2Pz \times 0{,}948 - Q \times \text{arc}\,M'M''$$

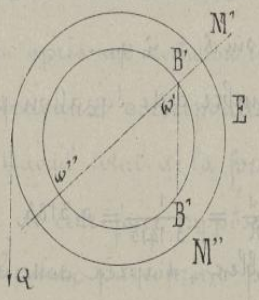
$$= 2Pz \times 0{,}948 - Q \times 2\pi q \frac{2(\alpha'' - \alpha')}{360^\circ} = 2Pz \times 0{,}948 - 2Qq\pi \times 0{,}3969 :$$

et en mettant pour $2Qq\pi$ sa valeur en fonction de Pz,

$$\frac{1}{2} MR^2 (\omega''^2 - \omega'^2) = 2Pz \times 0{,}948 - 2Pp \times 0{,}3969 = 2Pp \times 0{,}5511 ,$$

d'où l'on tire

$$MR^2 = 2\,\frac{0{,}5511 \times 2Pp}{\omega''^2 - \omega'^2} .$$



On voit ainsi qu'on pourra toujours donner au moment d'inertie MR^2 une valeur suffisante pour que $\omega''^2 - \omega'^2$ n'excède pas une quantité donnée.

On peut encore écrire cette expression sous la forme

$$MR^2 = 2\,\frac{0{,}5511 \times 2Pz}{(\omega'' + \omega')(\omega'' - \omega')}$$

ce qui montre que pour une même différence $\omega'' - \omega'$, le moment d'inertie pourra être plus petit à mesure que $\omega'' + \omega'$, ou à mesure que la vitesse moyenne $\frac{\omega'' + \omega'}{2}$ sera plus grande.

4°. — Détermination des dimensions du volant. — On peut, dans tous les cas, exprimer la valeur de MR^2 en fonction de la vitesse moyenne, si l'on se donne le plus grand écart par rapport à elle. En la désignant par ω, on peut poser simultanément

$$2\omega = \omega'' + \omega' \qquad \frac{1}{n}\omega = \omega'' - \omega'$$

en désignant par $\frac{\omega}{n}$ le plus grand écart de vitesse ; n étant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

alors un coefficient qui dépend du degré de régularité que l'on veut obtenir et que l'on appelle le coefficient de régularisation.

Multipliant les deux expressions l'une par l'autre, on a

$$\frac{2\omega^2}{n} = \omega''^2 - \omega'^2$$

d'où, en substituant dans l'équation générale de la puissance vive

$$MR^2 = \frac{2'(0.5511 \times 2Pz)}{\frac{2\omega^2}{n}} = (0.5511 \times 2Pz)\frac{n}{\omega^2}.$$

On peut remplacer M par $\frac{\pi}{g}$, en désignant par π le poids correspondant à la masse M et mettre à la place du travail moteur par tour, 2Pz, la valeur équivalente $\frac{4500N}{N'}$, en désignant par N le travail en chevaux de 75 kilogrammètres par seconde, et par N' le nombre de tours par minute de l'arbre qui porte le volant. Il vient alors comme formule définitive.

$$\pi R^2 \omega^2 = gn\left[0.5511 \times \frac{4500N}{N'}\right] = \frac{nN}{N'} \times 24321.$$

Ce nombre 24321, peut en quelque sorte, servir à caractériser les propriétés de la manivelle à simple effet, sollicitée par une force constante, et lorsque nous aurons obtenu des coefficients semblables pour les autres cas, nous pourrons reconnaître les avantages et les inconvénients des diverses dispositions auxquelles nous voudrions appliquer des volants satisfaisant au même coefficient de régularisation.

50.— Volant de la manivelle à double effet — La manivelle à double effet ne diffère de la précédente qu'en ce que l'effort moteur P exerce son action, que nous supposons encore constante, successivement dans deux sens opposés. La période de cessation de travail moteur se trouve alors supprimée; les écarts de vitesse sont

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

beaucoup moindres, et l'on arriverait, en suivant absolument la même marche à reconnaître que

$$\sin \alpha = \frac{2}{\pi}$$

d'où $\alpha' = 39°, 32', 4''$ et $\alpha'' = 140°, 27', 56''$

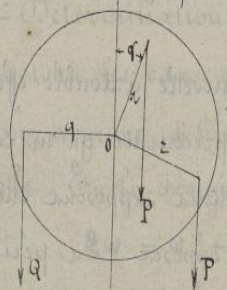
La période d'accélération est alors restreinte entre ces deux angles, et les mêmes variations se reproduisent pendant la course ascendante de la manivelle.

En observant que le travail par tour, qui est ici égal à $4Pr$, peut être représenté également par $\frac{4500N}{N'}$, on arrive à la formule finale

$$\pi R^2 \omega^2 = 4645 \frac{uN}{N'}.$$

On voit combien cette manivelle est plus avantageuse que la manivelle à simple effet, au point de vue de la régularité du mouvement. Pour un même rayon R du volant, le poids π de cet organe peut être réduit, tout en déterminant la même régularité, dans la proportion de 4321 à 4645, par rapport au poids du volant de la manivelle à simple effet. Le nouveau volant ne pèsera que le cinquième du poids du premier.

51. — **Volant de la manivelle à double effet.** — Lorsque deux machines à vapeur sont accouplées sur un même arbre moteur on fait agir leurs manivelles à angle droit l'une par rapport à l'autre afin que les temps morts de l'une correspondent toujours à la période de plus grande action de l'autre.



Cette combinaison produit une assez grande régularité dans le mouvement, surtout si l'on suppose l'effet

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

moteur P constam- en de direction constante, sur chacun des deux boutons de manivelle.

Nous examinerons l'action simultanée de ces deux manivel- -les placées à angle droit dans le cas du double effet, et nous résoudrons pour ce système les quatre questions qui ont été déjà résolues pour les manivelles simples.

1°— Le travail moteur par tour T est égal à $8Pz$, soit $4Pz$ sur chaque manivelle, comme dans le cas précédent; le travail résistant est toujours mesuré par $Q \times 2\pi q$, de sorte que la condi- -tion de périodicité est exprimée par l'égalité

$$8Pp = Q \times 2\pi q \quad \text{d'où} \quad Qq = \frac{4Pz}{\pi}.$$

2°— Pour déterminer l'angle α que fait la seconde manivelle, c'est-à-dire celle qui marche derrière l'autre, avec la direction des deux forces P, dans les positions de la plus grande et de la plus petite vi- -tesse, il suffit de remarquer que le travail élémentaire de cette manivelle sera $Pz \sin\alpha\, d\alpha$, et celui de la première manivelle, $Pz \cos\alpha\, d\alpha$.

On aura donc, pour la position cherchée

$$Qq\, d\alpha = Pz \sin\alpha\, d\alpha + Pz \cos\alpha\, d\alpha$$

d'où
$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{Qq}{Pz} = \frac{4}{\pi}.$$

On pourrait déterminer la valeur de l'angle α en résolvant cette équation par les opérations suivantes :

$$\sin\alpha - \frac{4}{\pi} = -\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha - \frac{8}{\pi}\sin\alpha + \frac{16}{\pi^2} = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha - \frac{4}{\pi}\sin\alpha + \frac{16 - \pi^2}{2\pi^2} = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi} \pm \sqrt{\frac{4}{\pi^2} - \frac{16 - \pi^2}{2\pi^2}} = \frac{2}{\pi} \pm \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}}$$

Cette double valeur de $\sin\alpha$, montre qu'il y a dans le premier

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

quadrans deux angles α' et α'' qui satisfont à la condition du maximum ou du minimum.

Ces valeurs correspondent d'après les tables, à $\alpha' = 19^\circ\ 12'$, et $\alpha'' = 70^\circ\ 48'$, en la première de ces valeurs est celle qui correspond au signe $-$ du radical.

On arrive plus élégamment à ces mêmes valeurs, par l'emploi d'un angle auxiliaire β tel que $\alpha = 45 - \beta$, car on a alors

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\cos\beta + \sin\beta)$$

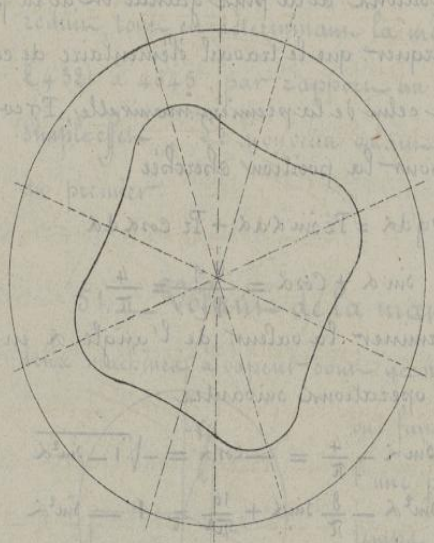
et en ajoutant ces équations

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}\times 2\cos\beta = \frac{4}{\pi}$$

d'où $$\cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

ce qui donne $\beta' = 25^\circ,48'$ et $\alpha' = 19^\circ,12'$

$\beta'' = 25^\circ,48'$ $\alpha'' = 70^\circ 48'$.



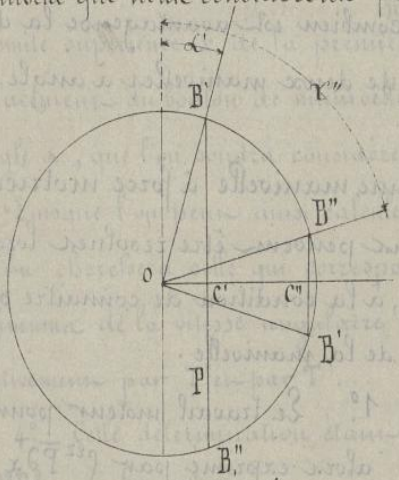
On obtient ainsi les mêmes valeurs que précédemment, et, en partant de ces limites, la loi des variations de la vitesse pourrait être exprimée en coordonnées polaires, au moyen de l'équation générale de la puissance vive

$$\frac{1}{2}MR^2(\omega^2 - \omega_0^2) = T_m - T_2$$

par la courbe indiquée sur la figure, et formée en joignant les extrémités des rayons vecteurs successifs, partant du point O, et sur chacun desquels on aurait porté la valeur de la vitesse correspondant à l'angle α considéré.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3°.— Calculons maintenant la différence $T_m - T_z$, quand la manivelle que nous considérons passe du point B' au point B_1'.



On a pour le travail des deux manivelles dans cet intervalle

$$T_m = P(B'C' - B''C'') + P(B''C' - B_1'C')$$
$$= 2Pz(\cos\alpha' - \sin\alpha')$$

parce que le rayon OB_1' étant perpendiculaire à OB', l'angle $B_1'OC' = \alpha'$

Dans passer par l'intermédiaire de la valeur calculée de l'angle α', nous pourrons écrire, par suite de la relation $\cos\alpha' + \sin\alpha' = \frac{4}{\pi}$

$$T_m = 2Pz\left(\frac{4}{\pi} - 2\sin\alpha'\right)$$

ou en mettant pour $\sin\alpha'$ sa valeur précédemment calculée, avec le signe inférieur, qui correspond au plus petit angle

$$T_m = 2Pz\left(\frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi} + 2\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi}}\right) = 2Pz \times 0{,}6155.$$

On a en même temps

$$T_z = Q \times 2\pi q \frac{\alpha'' - \alpha'}{360} = Q \times 2\pi q \frac{51° 36'}{360} = 2Qq \times \pi \times 0{,}1433.$$

On aura donc pour cette période

$$\frac{1}{2}MR^2(\omega''^2 - \omega'^2) = 2Pz \times 0{,}6155 - 2Qq \times \pi \times 0{,}1433 = 2Pz(0{,}6155 - 4 \times 0{,}1409)$$
$$= 2Pz \times 0{,}0423$$

4°.— En faisant subir à cette expression les mêmes transformations que dans les questions précédentes, et en remarquant que $8Pz$ est égal au travail $\frac{+500N}{N'}$ par tour

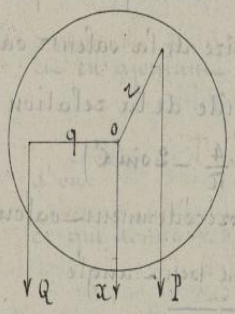
$$\pi R^2\omega^2 = gn \times 2Pz \times 0{,}0408 = \frac{nN}{N'} \times \frac{+500g \times 0{,}0423}{+}$$
$$= 407\,\frac{nN}{N'}.$$

Le coefficient de la valeur du moment d'inertie est ainsi réduit au dixième de la valeur que nous avons trouvée dans le cas de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la manivelle simple, à double effet, du numéro précédent. Ce rapprochement montre combien est avantageuse la disposition généralement adoptée de deux manivelles à angle droit.

52. — Volant d'une manivelle à force motrice variable. — Les mêmes questions peuvent être résolues lorsque la force motrice P est variable, à la condition de connaître sa valeur pour chacune des positions de la manivelle.



1°. Le travail moteur pour un tour sera alors exprimé par $\int_0^{2\pi} P\,dx = Q \times 2\pi q$

d'où $$Qq = \frac{\int_0^{2\pi} P\,dx}{2\pi}.$$

2°. — Les travaux élémentaires, moteur et résistant, sont pour une position de la manivelle correspondant à l'angle α, $P\,dx$ et $Qq\,d\alpha$, et la position de la vitesse maximum sera donnée par la relation

$$P\,dx = Qq\,d\alpha = \frac{d\alpha \int_0^{2\pi} P\,dx}{2\pi}.$$

Il suffira d'exprimer, d'après les données du problème, dx en fonction dx, et l'équation qui en résultera, après substitution, fera connaître la valeur particulière α' de α pour la position du maximum ou du minimum.

3°. — L'équation générale $\frac{1}{2} MR^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = T_m - T_z$, fera connaître la vitesse angulaire ω^2 pour toutes les positions de la manivelle, et il suffit de faire remarquer, à cet égard, que les deux termes T_m et T_z résulteront des intégrales des travaux élémentaires que nous venons de considérer

$$\frac{1}{2} MR^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = \int_0^{x} P\,dx - \int_0^{\alpha} Qq\,d\alpha$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$= \int_0^x P\,dx - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\pi} P\,dx$$

la limite supérieure x de la première intégrale étant donnée par le déplacement du bouton de manivelle correspondant à la valeur de l'angle α, que l'on voudra considérer en particulier.

Lorsque l'on aura ainsi calculé toutes les valeurs de T_m et de T_z, on cherchera celle qui correspond aux maximums ou aux minimums de la vitesse angulaire ω, et que nous désignerons respectivement par T'' et par T'.

4°.— Cette détermination étant faite, on obtiendra enfin la valeur de MR^2 par la relation

$$MR^2 \frac{\omega^2}{n} = T'' - T',$$

ce qui permettra de résoudre la question d'une manière complète.

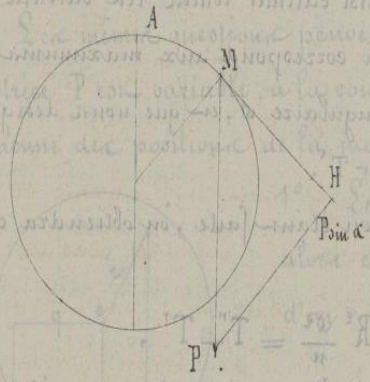
53.— **Méthode graphique.**— Le mode de calcul qui vient d'être indiqué exige souvent la détermination sur une épure des intégrales qui ne peuvent être calculées directement.

Rappelons que pour déterminer à l'aide d'une quadrature la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$, il suffit de considérer, comme nous l'avons vu déjà, la courbe qui a pour abscisse x et y; il est toujours facile d'estimer, quelles qu'en soient les variations, le travail moteur et le travail résistant correspondant à un parcours donné, quelles que soient aussi les inclinaisons, qui pourraient être variables, des forces motrice et résistante.

La complète généralité de cette méthode et la facilité de son application nous engagent à en exposer complètement les résultats pour une manivelle de machine à vapeur commandée par une bielle.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

54. — Application de la méthode graphique à la détermination du volant d'une machine à vapeur. — Nous supposerons d'abord que la force motrice est d'intensité et de direction constantes afin d'apprécier plus sûrement les modifications déterminées par l'obliquité de la bielle.



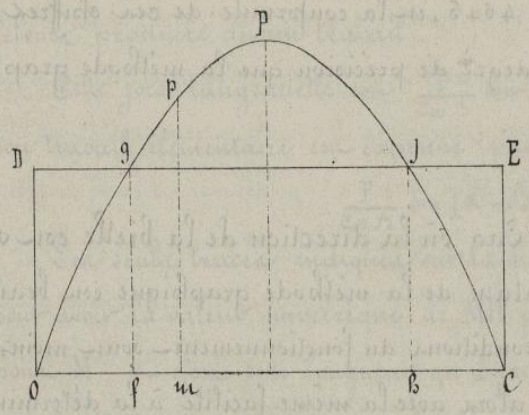
La force P agissant d'une manière continue sur la manivelle à double effet de la machine à vapeur, le travail élémentaire moteur sera P dx en nous contentant représenter l'intégrale de ce travail pour un demi-tour seulement, puisque nous savons que les mêmes circonstances se reproduiront identiquement dans le mouvement de retour.

Le travail élémentaire P dx peut être représenté, en projetant la force P sur la tangente en M par P sin α da, en désignant par da la longueur de l'arc élémentaire correspondant à un déplacement angulaire dx de la manivelle.

Pour déterminer graphiquement le travail total, on divisera la ligne OB = πr, considérée comme axe des abscisses, en parties égales chacune à une fraction de la demi-circonférence. On élèvera en chaque point tel que m, déterminé de manière que om = arc Am, une ordonnée mp égale à P sin α, on joindra toutes les points tels que p, par une courbe continue opc, qui est dans ce cas une portion de sinusoïde ; l'aire du triangle omp terminé par cette courbe donnera la mesure du travail fourni par la force P, depuis A jusqu'en B.

Ce travail, compté à partir de l'origine, croît de O en P, puis

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



de P en C, et l'aire OPC représente de même le travail $\int P \sin\alpha \, da$, pour une demi-révolution toute entière.

Si nous menons une droite DE parallèle à OC, de telle manière que le rectangle OCED = OPC, la surface de ce rectangle représentera le travail résistant, et l'ordonnée OD mesurera, à l'échelle du dessin, l'intensité de la résistance constante Q qui doit être opposée à la force P, pour satisfaire à la condition de périodicité ; la figure montre aussi les positions pour lesquelles le travail moteur, développé depuis l'origine du mouvement, est plus grand ou plus petit que le travail résistant.

L'égalité entre les travaux élémentaires aura lieu pour les positions fg et hj, qui correspondent aux intersections des lignes OPC et DE. De O en f, le travail moteur est plus petit que le travail résistant, de sorte que le point f correspond à un minimum de la vitesse. De f en h, au contraire, le travail moteur est toujours plus grand que le travail résistant, en sorte que le point h correspond au maximum suivant de la vitesse de rotation. Enfin, l'aire gpj exprime l'excès $T'' - T'$ du travail moteur sur le travail résistant dans cette période d'accélération, et sa mesure, obtenue par une quadrature, permettra immédiatement de calculer le volant par la relation

$$MR^2 = \frac{n(T'' - T')}{w^2}.$$

En opérant de cette façon, on a trouvé

$$MR^2 = \frac{n}{N} \times 4620$$

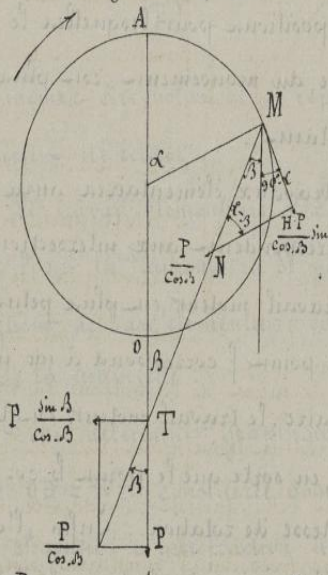
10/3

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

au lieu de 4645, en la conformité de ces chiffres nous fait connaître le degré de précision que la méthode graphique peut comporter.

55.— Cas où la direction de la bielle est variable.—

L'avantage de la méthode graphique est beaucoup plus grand lorsque les conditions du fonctionnement sont moins régulières, car elle se prête alors avec la même facilité à la détermination du moment d'inertie dans les cas les plus complexes, pour lesquels les procédés ordinaires du calcul présenteraient des difficultés ou des longueurs presque insurmontables.



Prenons, comme exemple, le cas de la bielle à inclinaison variable, qui se prête fort peu au calcul direct. La bielle TM transmet l'action P du piston sous une inclinaison variable δ, qui correspond au déplacement angulaire α, du bouton de manivelle, lorsqu'il passe de A en M.

La force P, appliquée en T, peut se décomposer en deux autres, l'une $\frac{P}{Cos.\delta}$ dirigée suivant le prolongement TM, l'autre composante étant horizontale, exprimée par $P\frac{\sin.\delta}{Cos.\delta}$, et détruite par la réaction des guides, qui empêche la tige du piston de se déplacer latéralement.

Pour évaluer le travail de la force $\frac{P}{Cos.\delta}$, il faut la transporter en M, en chercher la composante suivant la direction de la tangente à la circonférence, la composante suivant le rayon ne pouvant donner d'élé-

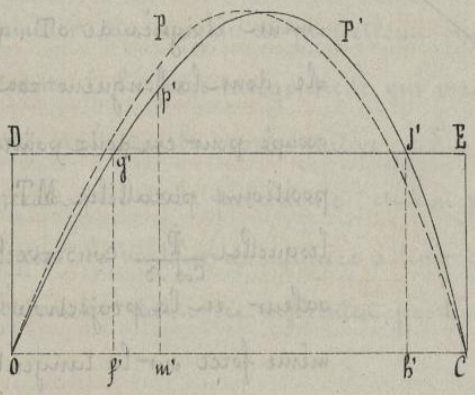
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=leur C produire aucun travail.

Cette force tangentielle est $\frac{P}{\cos.\beta} \sin MNH = \frac{P}{\cos.\beta} \sin(\alpha-\beta.)$ et son travail élémentaire est exprimé par

$$\frac{P}{\cos.\beta} \sin(\alpha-\beta)\,d\alpha$$

Un double tracé indiquera sur la figure suffisamment d'ailleurs pour avoir la valeur numérique de MH pour chaque position du point M, et c'est cette longueur qu'il faut substituer à la longueur de même nom dans la figure précédente, comme ordonnée de la courbe du travail.



On obtiendra ainsi une nouvelle courbe OP'C, passant par les points O et C, et comprenant comme précédemment une surface OP'C que l'on pourra limiter à une verticale quelconque m'p', pour obtenir, par la quadrature de Omp', la mesure du travail moteur développé depuis le commencement de la course du piston.

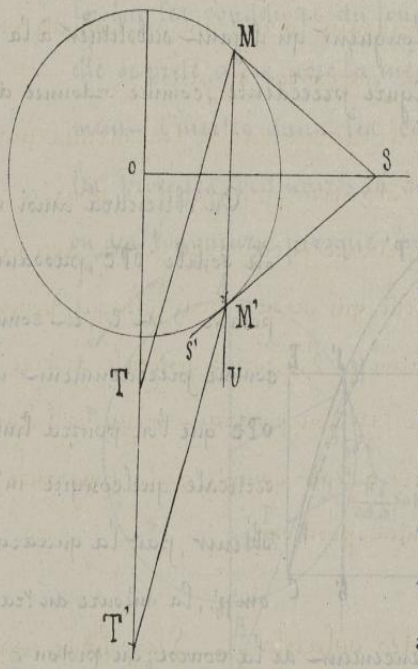
Cette courbe variera suivant le rapport entre la longueur de la bielle et celle de la manivelle, et celle qui est reproduite dans la figure ci-jointe correspond à une pression P constante pendant toute la durée de la course, et à une bielle dont la longueur est égale à quatre fois celle de la manivelle.

L'aire totale doit être nécessairement la même que celle de la figure précédente, si la course est la même, mais elle est répartie d'une manière différente. L'effort tangentiel maximum a lieu, lorsque la composante suivant TM est tangente à la circonférence décrite par le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

bouton de manivelle, en en désignant par β' la valeur particulière de β pour cette position, on a pour expression de cette composante $\frac{P}{\cos \beta'}$ qui est plus grand que P, si β' n'est pas nul.

Si l'on considère deux positions symétriques M et M' du bouton de manivelle par rapport à l'horizontale qui passe par le centre de la rotation, il est facile de voir que l'ordonnée correspondant au point inférieur M' est nécessairement plus grande que celle qui correspond au point M. Il résulte, en effet, de ce que les points M et M' sont également éloignés de oT, que la bielle, dont la longueur est constante occupe pour ces deux points des positions parallèles MT, M'T', pour lesquelles $\frac{P}{\cos \beta}$ conserve la même valeur, et la projection de cette même force sur la tangente MS ou sur la tangente symétrique M'S sera plus grande pour celui des deux angles TMS, T'M'S' qui sera le plus petit ; c'est ce que l'on voit immédiatement sur la figure, en remarquant que $T'M'S' < U'M'S'$, alors que $TMS > UMS$, et que par raison de symétrie, les deux derniers membres de ces inégalités sont égaux entre eux.



Pour déterminer à l'aide du tracé le moment d'inertie du volant, il faudra tracer la droite DE qui comprend une aire égale à celle qui est renfermée dans la courbe, ce qui fera connaître, comme précédemment, les positions en lesquelles se produiront le minimum et le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

maximum de la vitesse angulaire. L'aire de la partie excédante g'P'j' représentera la valeur de T''−T', en l'on complètera la détermination comme dans le cas précédent dans lequel la bielle avait une direction constante.

Dans le cas où la force motrice serait variable, comme dans toutes les machines à détente, la même méthode s'appliquerait sans plus de difficulté, lorsque l'on connaîtrait la loi suivant laquelle varierait la pression P dans les positions successives du piston.

Il serait d'ailleurs inutile de reproduire les mêmes indications pour la machine à balancier, puisque l'on pourra toujours déterminer, au moyen de projections successives faites avec l'équerre, l'intensité de la force tangentielle qui mesure pour chaque point l'ordonnée de la courbe représentative. La forme générale de cette courbe différerait peu de la précédente, en l'on pourrait même, s'il était nécessaire, la modifier de manière à tenir compte de la puissance vive du balancier dans ses différentes positions.

56. — **Inconvénients des volants.** — Les volants sont presque toujours d'un grand poids, en pour diminuer ce poids autant que possible, il faut en répartir la plus grande partie à la circonférence. Le poids π étant déterminé par les formules précédentes en r' étant le rayon des coussinets, le travail dépensé par le frottement pour chaque tour, sera $f\pi \times 2\pi r'$, en cette dépense ne laisse parfois que d'être considérable, en de diminuer, dans une proportion notable, l'effet utile du travail moteur.

D'ailleurs les bras du volant devront être calculés de manière à résister à la force centrifuge de chacun des fragments de

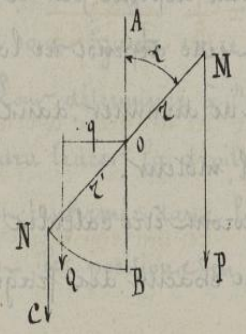
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la couronne, qui est, en général, formée de portions de circonférences assemblées entr'elles par des clavettes en correspondance chacune à un ou deux bras du volant.

57. — Objet des contrepoids. — Dans le but de diminuer le poids des volants et par conséquent d'éviter en partie le travail de frottement qui en est la conséquence, on peut disposer, sur certains points de la circonférence, des contrepoids qui agissent tantôt comme résistance, pendant qu'ils s'élèvent en obéissant au mouvement général de rotation du système, tantôt comme force motrice, lorsqu'ils redescendent. On doit, en général, chercher, à combiner ces périodes successives d'élévation et de descente, de manière à régulariser l'action de la force motrice; il faut alors que le contrepoids soit soulevé pendant les périodes de plus grand travail, et que il retombe au moment où il serait utile que son action vint s'ajouter à l'action de la force motrice pour aider à la régularité.

Nous étudierons l'influence de ces contrepoids pour quelques-uns des cas les plus simples.

58. — Manivelle à simple effet avec contrepoids.



Si l'on cherche à appliquer ce principe à une manivelle à simple effet, on voit immédiatement que le contrepoids sera surtout utile s'il descend pendant la période de non action de la force motrice, et s'il remonte, au contraire, pendant la période de prépondé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=rance de cette force.

Cette observation nous conduit à placer le contrepoids C à l'ex=
=trémité d'un rayon r' opposé au rayon r de la manivelle. Les
forces en présence seront alors au nombre de trois; la force motrice
P, la résistance constante Q, et le contrepoids C, dont l'action al=
=gira tantôt dans un sens tantôt dans l'autre.

L'étude du volant à appliquer à cette manivelle à contrepoids
pourra se faire d'après les mêmes principes que pour la mani=
=velle sans contrepoids, en tenant compte de la nouvelle force C.

1°— La condition relative à la périodicité restera la même parce=
que la rotation complète du poids C, comprenant à la fois une élé=
=vation du contrepoids à une hauteur 2r', et une chûte précisé=
=ment égale, donne lieu à deux travaux successifs qui se compen=
=sent au point de vue du travail par tour.

On a donc pour seule condition:

$$P \times 2r = Q \times 2\pi q. \text{ d'où } q = \frac{Pr}{\pi}.$$

2°— Quand le bouton de manivelle passe de A en M, défini par
l'angle α, le point d'application du poids C passe de B en N, et
comme son action est résistante dans la position de la figure, on aura
pour condition d'équilibre correspondant à celle de l'égalité entre les
travaux élémentaires

$$Pr \sin\alpha = Qq + Cr' \sin\alpha :$$

d'où
$$\sin\alpha = \frac{Qq}{Pr - Cr'} = \frac{1}{\pi} \frac{Pr}{Pr - Cr'}.$$

Nous pouvons disposer de Cr', de manière à rendre la régula=
=rité très-grande.

Si nous posons $Cr' = \frac{1}{2} Pr$, ce qui conduira à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\sin\alpha = \frac{1}{\pi}\,\frac{2Pr}{Pr} = \frac{2}{\pi}\,.$$

comme dans le cas de la manivelle à double effet.

3°— Le moment d'inertie du volant sera donné par la formule

$$(\pi R^2 + Cr'^2)\omega^2 = 4645\,\frac{nN}{N'}$$

dans laquelle le second membre n'a pas besoin d'être calculé à nouveau.

L'emploi du contrepoids C ramène donc la condition de régularité de la manivelle à simple effet à celle de la manivelle à double effet. Nous aurions pu d'ailleurs prévoir cette conclusion, car la condition $Cr' = \frac{1}{2}Pr$ revient à supposer que, pendant la période descendante du bouton de manivelle, la moitié du travail moteur dépensée par l'élévation du contrepoids qui restituera, pendant la demi révolution suivante, tout le travail dépensé pour son élévation, dans les mêmes conditions que celle de l'action de la force $\frac{P}{2}$ appliquée, dans cette même période, sur le bouton même de la manivelle simple. Le travail emprunté pendant la période d'excès de travail de la force motrice, est intégralement rendu pendant la période où la force P cesse d'agir.

59. — Manivelle à double effet avec contrepoids. —

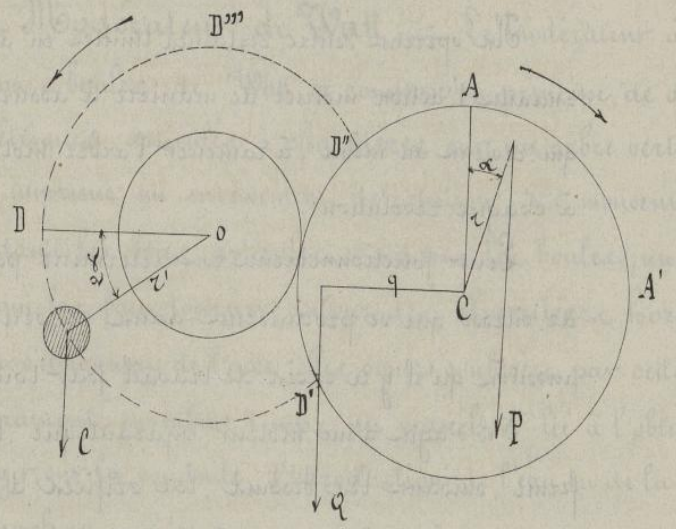
Pour que le contrepoids agisse sur une manivelle à double effet au meilleur instant, il ne convient plus qu'il soit appliqué dans le prolongement de la manivelle, car il descendrait alors pendant que l'effort moteur P, changeant de signe, ferait remonter cette manivelle, et l'on aurait alors un trop grand excès de travail moteur.

On est ainsi obligé de mettre le contrepoids sur un arbre de vitesse angulaire double, et pour que chaque descente de ce contrepoids

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ain lieu lorsque le bouton de manivelle est en A ou en A', c'est-à-dire dans les positions pour lesquelles le travail moteur de la force P est un minimum, il convient de placer le contrepoids de manière qu'il ait, aux mêmes moments, sa plus grande action motrice. C'est pour cette raison qu'il convient de le placer en D. (voir la figure ci-dessous).

Les conditions de régularité exigeraient dans ce cas des calculs plus compliqués, et il nous suffira d'avoir indiqué le principe de compensation qui en résulte ; il n'est d'ailleurs pas utilisé dans les applications.



6o — Inconvénients des contrepoids. — Après avoir reconnu l'influence favorable des contrepoids, au point de vue de la régularité qu'ils produisent, et qui permet de réduire dans une proportion considérable, le poids des volants, il est nécessaire de faire remarquer que la force centrifuge développée par la rotation sur ces parties d'une machine, non équilibrées autour de l'axe de rotation, exerce des efforts variables, dans des directions variables

11/3

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aussi, auxquels les arbres doivent résister. Cette influence doit être prise en sérieuse considération dans les machines dont les bâtis n'offrent pas toute la rigidité nécessaire, ou qui ne seraient pas pourvues de fondations suffisantes.

61. — Objet des modérateurs. — Les modérateurs sont destinés dans les diverses machines motrices, à satisfaire à la condition fondamentale de l'égalité de durée entre chacun des tours de l'arbre moteur.

Ils opèrent, entre certaines limites en augmentant ou en diminuant l'action motrice de manière à assurer cette égalité, ou, ce qui revient au même, à ramener l'arbre moteur à la même vitesse à chaque révolution.

Leur fonctionnement est déterminé par les changements de vitesse qui se produisent dans un sens ou dans l'autre, aussitôt qu'il y a excès de travail par tour.

S'il s'agit d'un moteur hydraulique, le modérateur ouvre ou ferme, suivant les besoins, les orifices d'amenée; et s'il s'agit d'une machine à vapeur, il peut opérer de la même façon, en produisant un étranglement permanent dans la conduite, ou même encore en arrêtant tout passage à la vapeur au moment où la quantité déjà admise est suffisante pour développer la totalité du travail nécessaire à un coup de piston.

Le modérateur est l'accessoire obligé du volant dans toutes les conditions où l'on veut obtenir une grande régularité de marche. Il peut, à lui seul, établir la condition de périodicité dans les machines qui ne sont pas munies de volants.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les rôles des deux organes sont très-distincts ; le volant régularise la marche de la machine pendant la durée d'une révolution ; il est le vrai régulateur de la vitesse pendant cette période en suivant sa durée ; le modérateur fixe cette durée en limitant l'action motrice à celle qui est nécessaire.

Malgré cette distinction entre l'objet des deux appareils, on désigne encore très-souvent les modérateurs sous le nom de régulateurs.

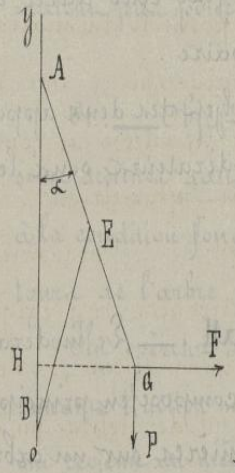
62. — **Modérateur de Watt.** — Le modérateur à force centrifuge ou à boules, de Watt, se compose, en principe, de deux bras symétriques, articulés à charnières sur un arbre vertical, auquel on imprime un mouvement de rotation. Ce mouvement développe, dans les bras articulés et dans les boules, une force centrifuge qui les fait tourner autour des charnières horizontales ; en s'éloignant de l'axe, elles sont soulevées par cette action, et elles entraînent en même temps un manchon lié à l'obturateur qui doit agir sur la conduite d'introduction de l'eau ou de la vapeur dans la machine motrice.

Si les boules sont ainsi parvenues à une position d'équilibre, pour une vitesse angulaire ω de l'arbre, on voit alors comment l'augmentation ou la diminution momentanée de cette vitesse fera varier la position du manchon, et par suite, celle de l'obturateur que ce manchon conduit.

63. — **Equation d'équilibre du modérateur.** — Pour mettre en évidence les conditions d'équilibre entre la force centrifuge

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et le poids des boules nous ferons d'abord abstraction de cette distance auxquelles nous supposerons que les tiges sont simultanément articulées autour d'un axe horizontal passant par l'axe vertical du modérateur.



Le poids de chaque boule est la force centrifuge $F = M\rho\omega^2$ de cette boule, sont tous deux appliqués au centre de gravité G, et en prenant les moments par rapport au centre d'articulation A, situé à la distance $AG = b$ du point G, on a immédiatement

$$M r \omega^2 \times b\cos\alpha = P b \sin\alpha$$

On a d'ailleurs $M = \frac{P}{g}$, $r = b\sin\alpha$, et par suite

$$\frac{\omega^2}{g} \times b\cos\alpha = 1$$

et par suite

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{b\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

Si on désigne au moment de l'équilibre par h la longueur AH de la projection verticale de la tige AG cette équation montre immédiatement que la valeur de ω ne peut rester constante que si h reste constant.

Il en résulte donc que si, pendant le fonctionnement de la machine motrice, son mouvement venait à s'accélérer par suite de la prépondérance du travail moteur sur le travail résistant les boules se soulèveraient, qu'elles fermeraient en partie l'orifice d'introduction par le soulèvement du manchon, mais que dans ces nouvelles conditions la vitesse de régime ω ne pourrait plus être la même que précédemment dès lors que la hauteur h ne serait pas

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

restée la même.

Le modérateur de Watt réduit à ces conditions ne peut donc pas fournir une vitesse de régime absolument constante : chaque vitesse correspond à une certaine position du manchon et l'appareil tout en apportant un remède efficace aux inconvénients que présentent les grands écarts de vitesse, ne remplit pas son office d'une manière absolument géométrique. Il répond suffisamment bien à la plupart des nécessités de l'industrie, mais à mesure que les machines ont été perfectionnées on a exigé du modérateur des conditions de plus en plus précises, et c'est ce qui a donné lieu aux diverses classes de modérateurs qui ont été appliquées dans ces dernières temps, sans que l'on se soit toujours maintenu dans des dispositions assez simples pour être véritablement pratiques et efficaces.

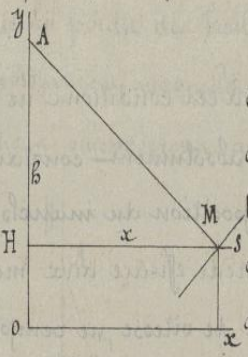
§ 64. — **Modérateur parabolique.** — Pour que ω soit invariable, on a vu qu'il suffisait que h fut constant, et l'on satisfera à cette condition en forçant les boules à se mouvoir sur une courbe telle que pour toute position la hauteur verticale AH restât invariable.

Cette courbe est une parabole, et c'est ce qui a fait donner à ce genre de modérateur, imaginé par M^r^ Frank, le nom de modérateurs paraboliques.

En effet, si nous prenons la verticale Ay pour axe des ordonnées et une horizontale Ax pour axe des abscisses, et si M est un point de la courbe qui jouirait de la propriété que nous venons d'indiquer, nous aurons à exprimer que AH = constante, et que la normale AM,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui passe par le point A, est perpendiculaire à la tangente au point M



Or $\operatorname{tang} AMS = -\frac{AH}{MH} = -\frac{b}{x}$

et la courbe étant représentée par une fonction de x et de y, il suffira que l'inclinaison de la tangente en M ou $\frac{dy}{dx}$ satisfasse, par rapport à AM, à la condition fondamentale $aa' = -1$ de la perpendicularité de deux droites, ce qui donne

$$\frac{dy}{dx} \times \left(-\frac{b}{x}\right) = -1$$

d'où

$$b\,dy = x\,dx$$

et, en intégrant

$$by = \frac{x^2}{2} + \text{constante}.$$

Cette équation est celle d'une parabole qui aurait son sommet sur l'axe des y, et l'on annulera la constante en prenant ce sommet pour origine.

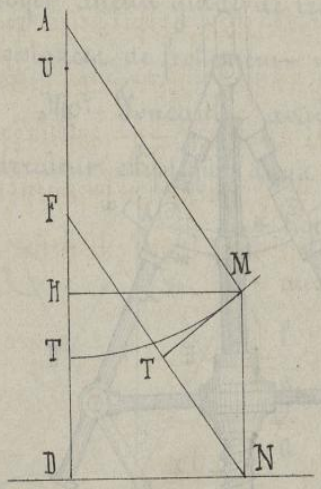
Le problème des modérateurs à vitesse constante est donc ramené à la recherche des dispositions à l'aide desquelles on pourrait obliger les boules à se mouvoir, non plus suivant un arc de cercle dont le centre est fixe, mais suivant un arc de parabole dont les normales rencontrent successivement l'axe vertical en des points différents, mais tels que la hauteur AH soit toujours la même.

65. — **Vérification géométrique.** — Cette propriété de la parabole se vérifie d'ailleurs d'une manière très-simple, et donne en même temps la manière de la construire.

Soit TU la hauteur constante b; prenons $TF = TD = \frac{TU}{2}$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en menant la perpendiculaire DN à la droite TU au point D. Le point F sera le foyer de la parabole ; le point T sera le sommet ; la droite DN sa directrice



En effet les différents points de cette parabole pourront s'obtenir en menant une droite quelconque FN, allant du foyer à la directrice, et en élevant en N la perpendiculaire NM = DH = MH, ce qui constitue la propriété caractéristique de tous les points de la parabole.

De plus, la tangente MT s'obtiendra en abaissant la perpendiculaire MT sur FN, et la normale MA est parallèle à FN.

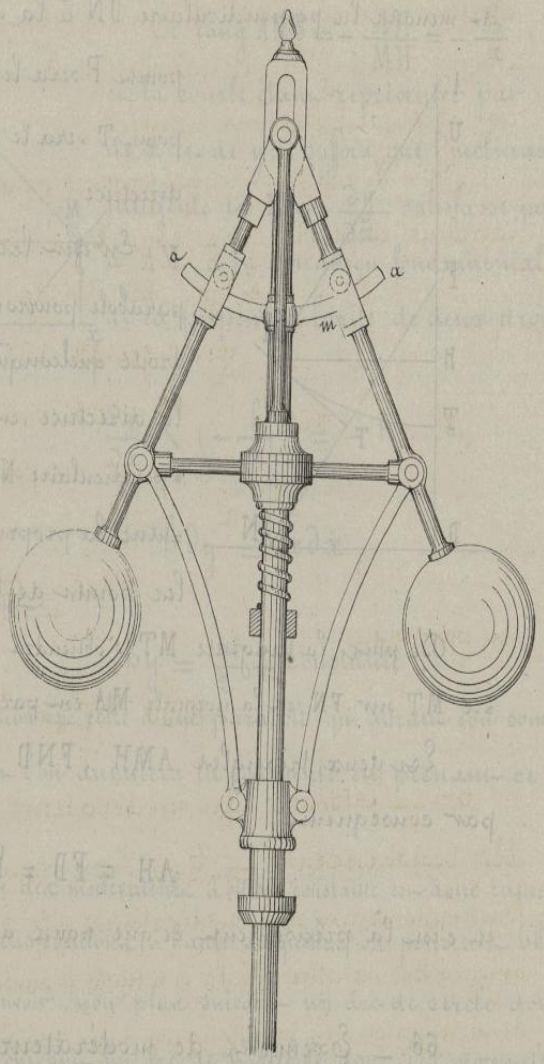
Les deux triangles AMH, FND sont égaux entre eux, et par conséquent

$$AH = FD = b,$$

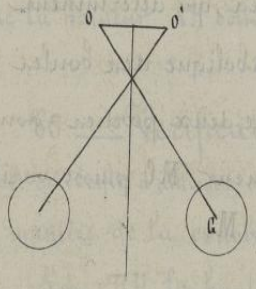
et c'est là précisément ce que nous avions à démontrer.

66. — Exemples de modérateurs paraboliques. — On réalise la condition précédente entre autres dispositions, au moyen de deux guides paraboliques aa, qui déterminent, par raison de similitude, le déplacement parabolique des boules. De M en C, les tiges sont alors composées de deux parties, dont l'une forme douille, de manière que la longueur MC puisse varier librement suivant la position du point M.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



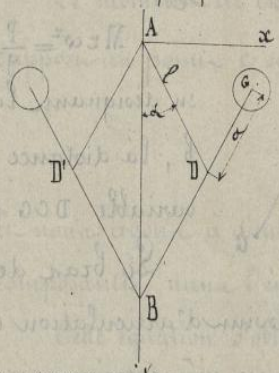
Beaucoup d'autres dispositions conduisent au même résultat et nous citerons en particulier le modérateur à bras croisés, système Farcot, dans lequel au moyen de centres d'articulations 00' placés respectivement du côté opposé à celui de la boule qui y est suspendue, on obtient approximati-



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=vement= en dans les limites de la course que les boules peuvent effectuer, la réalisation du mouvement parabolique, sans employer aucun guide de translation donnant toujours lieu à des résistances de frottement notables.

M^r Foucault avait proposé dans le même but un modérateur elliptique dans lequel les boules étaient placées sur les tiges BD, BD' du manchon, d'ailleurs égales aux tiges AD, AD'. En désignant AD par l, DG par a, on voit immédiatement que l'on a pour une position quelconque du point G, $x=(l+a)\sin\alpha$, $y=(l-a)\cos\alpha$, d'où



$$\sin\alpha=\frac{x}{l+a}\ ,\quad \cos\alpha=\frac{y}{l-a}$$

en par suite

$$\frac{x^2}{(l+a)^2}+\frac{y^2}{(l-a)^2}=1\ .$$

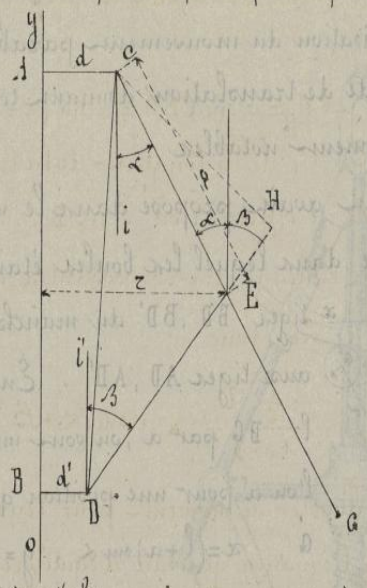
67. — Théorie du modérateur, en tenant compte des résistances. — Pour faire comprendre les conditions de fonctionnement des modérateurs dits à contrepoids qui doivent aujourd'hui satisfaire à la condition d'ouvrir et de fermer les organes de distribution, en maintenant dans toutes les positions des boules une vitesse constante, il est nécessaire de tenir compte, dans l'équation générale d'équilibre de la résistance du manchon et des frottements auxquels donne lieu son déplacement sur la tige centrale.

Pour établir ces conditions d'équilibre nous indiquerons seulement sur la figure ci-jointe, les lignes principales et les points C et D d'articulation, en supposant que ces points C et D sont respectivement placés à des distances d et d' de la tige centrale.

12/4

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les forces qui se font équilibre à un instant donné, sont au nombre de trois.



1°— La force centrifuge développée dans chacune des boules par la rotation ; cette force est horizontale et a pour expression

$$M r \omega^2 = \frac{P}{g} \omega^2 (b \sin \alpha + d)$$

en désignant la distance CG par b, la distance AC par d, et l'angle variable DCG par α.

Le bras de levier de cette force horizontale par rapport au point d'articulation C, est $b \cos \alpha$ et son moment par rapport au même point est ainsi

$$\frac{P}{g} \omega^2 (b \sin \alpha + d) b \cos \alpha$$

et si nous voulons considérer l'ensemble des deux boules, nous aurons pour l'expression des deux moments

$$\frac{2P}{g} \omega^2 (b \sin \alpha + d) b \cos \alpha .$$

2°— Le poids P de chacune des boules :

Pour chacune d'elles, le bras de levier, par rapport au point C, est $b \sin \alpha$; et le moment total pour les deux boules est donné par l'expression $2P b \sin \alpha$.

3°— La résistance Q due au manchon et aux pièces qui y sont attelées :

Cette résistance Q étant supportée pour moitié par chacune des tringles DE, la composante suivant chacune de ces tringles, sera

$$\frac{\frac{1}{2} Q}{\cos \beta}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en désignant par β l'angle de ce tringle avec la verticale.

Si au point C, nous abaissons la perpendiculaire CH, ce bras de levier CH est

$$CH = a \sin CEH = a \sin(\alpha + \beta)$$

a représentant la partie de la longueur de la tige CG, comprise entre les deux points d'articulation C et E.

Le moment de chacune des composantes de la force Q par rapport au point C sera donc

$$\frac{\frac{1}{2} Q}{\cos \beta} \times a \sin(\alpha + \beta)$$

en nous avons à doubler ce moment pour tenir compte des deux composantes, dans l'équation générale d'équilibre.

Cette équation s'obtient d'ailleurs en égalant le moment de la force centrifuge, à la somme des moments des deux autres forces, dont l'action s'exerce en sens contraire

On aura donc

$$\frac{2P}{g} \omega^2 (b \sin \alpha + d) b \cos \alpha = 2P \times b \sin \alpha + \frac{Q}{\cos \beta} \times a \sin(\alpha + \beta),$$

ce qui nous permettra d'établir la théorie des modérateurs à force centrifuge.

68. — Expression générale de la vitesse du modérateur.

En désignant par n le nombre de tours que fait l'arbre du modérateur en une minute, nous pourrons écrire

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \qquad \text{d'où} \quad \omega^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{3600} = \frac{\pi^2 n^2}{900}$$

et en représentant par une nouvelle lettre B la fraction $B = \frac{\pi^2}{900g}$, on peut ramener la formule précédente à celle-ci

$$2PBn^2 (b \sin \alpha + d) b \cos \alpha \cos \beta = 2Pb \sin \alpha \cos \beta + Q \times \sin(\alpha + \beta)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où l'on tire pour l'expression du nombre de tours par minute,

$$n^2 = \frac{2Pb \sin\alpha \cos\beta + Qa \sin(\alpha+\beta)}{2PB(b\sin\alpha + d)\, b \cos\alpha \cos\beta}.$$

Ainsi le nombre de tours varie avec α et β, et varie aussi avec b ; il reste le même si P et Q conservent le même rapport.

On peut voir d'ailleurs dans quel sens ont lieu les variations.

En divisant haut et bas par b, on voit immédiatement que le numérateur seul diminue quand b augmente ; le nombre des tours augmente donc quand la longueur du pendule diminue, et l'on peut se servir de cette propriété pour que le pendule se maintienne, avec une vitesse déterminée, ouvert sous un angle donné.

Pour voir comment n varie avec α, nous écrirons

$$n^2 = \frac{2Pb + Qa\left(1 + \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}\right)}{2PBb\left(1+\frac{d}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha} = \frac{2Pb + Qa}{2PBb\left(1+\frac{d}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha}$$

$$+ \frac{Qa}{2PBb\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{d\cos\beta}{\sin\beta}\right)} = \frac{2Pb+Qa}{2PBb\left(1+\frac{d}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha} + \frac{Qa\ \mathrm{tang}\beta}{2PBb(b\sin\alpha+d)}.$$

On voit sous cette forme que quand α augmente, le premier terme du second membre augmente par cette double raison que $\cos\alpha$ diminue et que $\sin\alpha$ augmente. Quant au second terme, si comme cela a lieu dans la pratique, β diffère peu de α, le numérateur augmente plus rapidement que le dénominateur, en sorte que la fonction tout entière augmente. C'est, d'ailleurs, ce que l'on pouvait affirmer, à priori, par suite de l'augmen-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

=lation de la force centrifuge avec la vitesse.

Il en résulte donc que la valeur de n ne pourrait rester la même pour diverses positions des boules, à moins de faire varier respectivement les quantités P ou Q dans des proportions différentes.

69.— Détermination du poids des boules d'après le degré de sensibilité.— Jusqu'à présent nous n'avons pas tenu compte du frottement du manchon sur la tige, et l'on comprend cependant que suivant la valeur de ce frottement, la sensibilité du modérateur serait différente.

En représentant le frottement par F, nous avons à faire remarquer que cette force verticale s'oppose toujours au déplacement du manchon, dans le sens où il tendrait à se produire, et qu'elle retardera, dans chaque changement d'ouverture du pendule, le fonctionnement de l'appareil. Elle entre d'ailleurs dans l'équation générale d'équilibre de la même manière que la force verticale Q, et pour tenir compte de son influence il suffira d'introduire dans les expressions précédentes un nouveau terme

$$\pm \frac{F \times a}{\cos \alpha} \sin (\alpha + \beta).$$

en ayant soin de considérer toujours ce terme avec le signe convenable.

Pour déterminer le nombre de tours n', pour lequel le pendule s'ouvrirait, on écrira

$$2 P B n'^2 (b \sin \alpha + d) b \cos \alpha = 2 P b \sin \alpha + \left(\frac{q + F}{\cos \beta}\right) a \sin (\alpha + \beta)$$

parceque alors le frottement F résiste dans le même sens que le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

poids q du manchon.

Le nombre de tours n'', correspondant à la fermeture de l'appareil, sera de même donné par la relation

$$2PB\,n''^2\left(b\sin\alpha+d\right)b\cos\alpha = 2Pb\sin\alpha+\left(\frac{q-F}{\cos\beta}\right)\times a\sin(\alpha+\beta)$$

qui exprime que le frottement agit en sens contraire du poids q.

Entre ces deux limites n' et n'', le frottement rendra le modérateur indifférent, et l'on obtiendra une évaluation de cette période d'indifférence, si l'on retranche la dernière expression de la précédente, ce qui donne

$$2PB\left(n'^2-n''^2\right)\left(b\sin\alpha+d\right)b\cos\alpha = \frac{2F}{\cos\beta}a\sin\left(\alpha+\beta\right)$$

En représentant la vitesse moyenne $\frac{n'+n''}{2}$ par n, et le plus grand écart $n'-n''$ par $\frac{n}{m}$, m étant un coefficient analogue à celui que nous avons introduit dans l'étude des volants, l'expression précédente devient alors

$$2PB\,\frac{2n^2}{m}\left(b\sin\alpha+d\right)b\cos\alpha = \frac{2F}{\cos\beta}a\sin\left(\alpha+\beta\right)$$

d'où l'on tire

$$P=\frac{Fma\sin(\alpha+\beta)}{2Bn^2\left(b\sin\alpha+d\right)b\cos\alpha\cos\beta}.$$

On pourra donc déterminer P de manière que l'appareil agisse aussitôt qu'une variation $\frac{1}{n}$ sera produite dans la vitesse moyenne de la machine.

Observons toutefois que le nombre m n'est pas arbitraire, et qu'il importe même que le modérateur ne soit pas affecté

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par les variations de vitesse que le volant ne peut corriger, sous peine de produire des perturbations fâcheuses. Le modérateur ne doit agir que sur la durée d'un tour, mais il ne doit pas se substituer à l'action régulatrice du volant pendant les périodes comprises dans chaque révolution de l'arbre.

C'est pour être à cet égard trop sensibles, que beaucoup de de modérateurs, très-bons d'ailleurs, ont donné dans les applications de mauvais résultats.

On voit par la formule précédente que le poids convenable pour les boules, augmente proportionnellement au coefficient m, et aussi en raison inverse du carré des nombres de tours. Il augmente aussi avec α mais Q n'entrant pas dans la formule, on voit qu'il est indépendant du poids du manchon.

70. — Détermination du poids du manchon. —

Pour déterminer le poids convenable des boules nous avons opéré par soustraction sur les deux équations d'équilibre correspondant à l'entraînement du manchon, de manière à éliminer la résistance Q. Si nous additionnons maintenant ces deux équations nous mettrons la valeur de Q en évidence et nous trouverons,

$$2PB(n'^2+n''^2)(b\sin\alpha+D)\,b\cos\alpha = 4Pb\sin\alpha + 2Qa\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}.$$

d'où l'on tire

$$Q = \frac{PB(n'^2+n''^2)(b\sin\alpha+D)\,b\cos\alpha\cos\beta - 2Pb\sin\alpha\cos\beta}{a\sin(\alpha+\beta)}.$$

On pourra simplifier cette valeur en remarquant que n' et n'' n'étant jamais très-différents l'un de l'autre, on ne commettra

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par une grande erreur en remplaçant $n'^2+n''^2$ par $2n^2$, ce qui donne

$$Q=\frac{2PBn^2(b\sin\alpha+D)\,b\cos\alpha\cos\beta-2Pb\sin\alpha\cos\beta}{a\sin(\alpha+\beta)}$$

Et si l'on veut avoir la valeur de Q en fonction de F, il suffira de remplacer dans cette expression P par sa valeur précédente, ce qui donne

$$Q=Fm\left(1-\frac{\sin\alpha}{2Bn^2(b\sin\alpha+D)\cos\alpha}\right)$$

Le poids Q du manchon doit varier proportionnellement à Fm à n, et si l'on voulait que n restât constant, il faudrait qu'il diminuât quand α augmente, car la fonction

$$\frac{-\sin\alpha}{2Bn^2(b\sin\alpha+D)\cos\alpha}=\frac{-1}{2Bn^2\left(b+\frac{D}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha}$$

diminue la valeur du premier terme de l'expression précédente à mesure que α est plus grand, parce qu'alors le dénominateur diminue.

71. — Modérateurs à contrepoids variable. —

C'est cette propriété qui a permis à Mr Charbonnier de construire les modérateurs à contrepoids variable dont il importe de bien définir la propriété caractéristique.

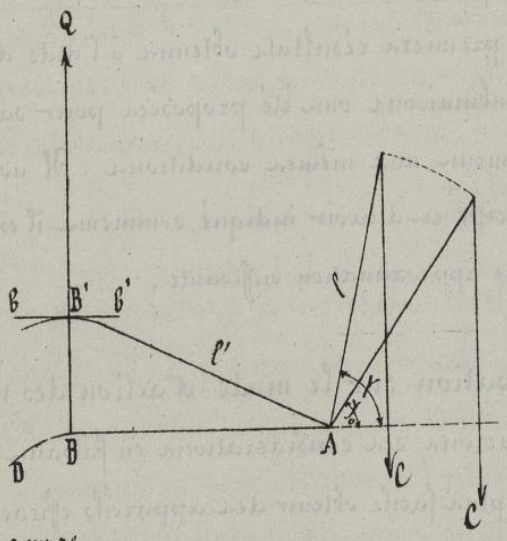
Le modérateur ordinaire, quand il s'ouvre par suite d'une augmentation de vitesse, étrangle l'orifice d'admission, et il ne maintient cet étranglement qu'à la condition qu'une certaine augmentation de vitesse deviendra permanente. Il ne saurait régler à vitesse constante, pour une dépense variable de travail,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en c'est cette propriété fort importante que la variabilité du contrepoids permet de faire acquérir au modérateur, comme nous avons déjà cherché à le faire au moyen des modérateurs paraboliques.

Il faudrait théoriquement que Q variât comme l'indique la formule précédente, pour qu'aucune variation de l'angle α n'influât sur la valeur de n.

Pour approcher de ce résultat, Mr. Charbonnier donne au manchon un poids surabondant, et au moyen d'un contrepoids à action variable, il cherche à ramener le modérateur aux conditions exigées par la théorie qui précède



Le contrepoids C est suspendu à l'extrémité d'un levier de longueur l, articulé en A, en faisant un angle variable γ avec l'horizontale. Ce levier se continue au delà du point A par une partie droite AB qui est horizontale quand le manchon est en B à la partie inférieure de la course.

Au delà du point B, cette branche AB du levier à contrepoids est prolongée suivant une courbe BD, qui est un arc de développante de cercle de rayon AB. On sait que cette courbe jouit de la propriété que la tangente horizontale bb' aura toujours son point de contact avec elle sur la même verticale BB' qui passe par la naissance de la courbe.

13/4

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La condition d'équilibre du levier ainsi constitué sera donc, en désignant par Q' l'effort exercé sur la face inférieure bb' du manchon

$$Q' \times AB = Cl \cos\gamma$$

ce qui donne $Q' = \frac{Cl\cos\gamma}{l'}$.

On peut disposer des quantités C, β, γ pour que, dans les positions extrêmes ou dans la position moyenne du manchon on ait précisément pour Q' les valeurs indiquées par la théorie précédente, valeurs qui doivent aller en augmentant à mesure que γ diminue. On arrive ainsi à construire des modérateurs parfaitement satisfaisants, encore bien que, pour les positions intermédiaires, la compensation ne se fasse pas exactement suivant les conditions théoriques.

Depuis les premiers résultats obtenus à l'aide des contrepoids beaucoup de combinaisons ont été proposées pour satisfaire plus ou moins exactement aux mêmes conditions. Il nous suffit d'avoir posé le principe et d'avoir indiqué comment il est possible d'y satisfaire avec une approximation suffisante.

72. — Observation sur le mode d'action des modérateurs.

Nous terminerons ces considérations en faisant remarquer qu'il est d'autant plus facile obtenir des appareils efficaces qu'on leur demande moins de travail pour effectuer les déplacements des organes de distribution. Pour réaliser cette condition on a tout avantage à ne faire agir le manchon que sur un organe de débrayage, en laissant à la machine motrice le rôle de déplacer ensuite les organes de distribution. La théorie démontre alors que les modérateurs paraboliques sont parfaitement satisfaisants. Les modérateurs à contrepoids sont, au contraire, mieux

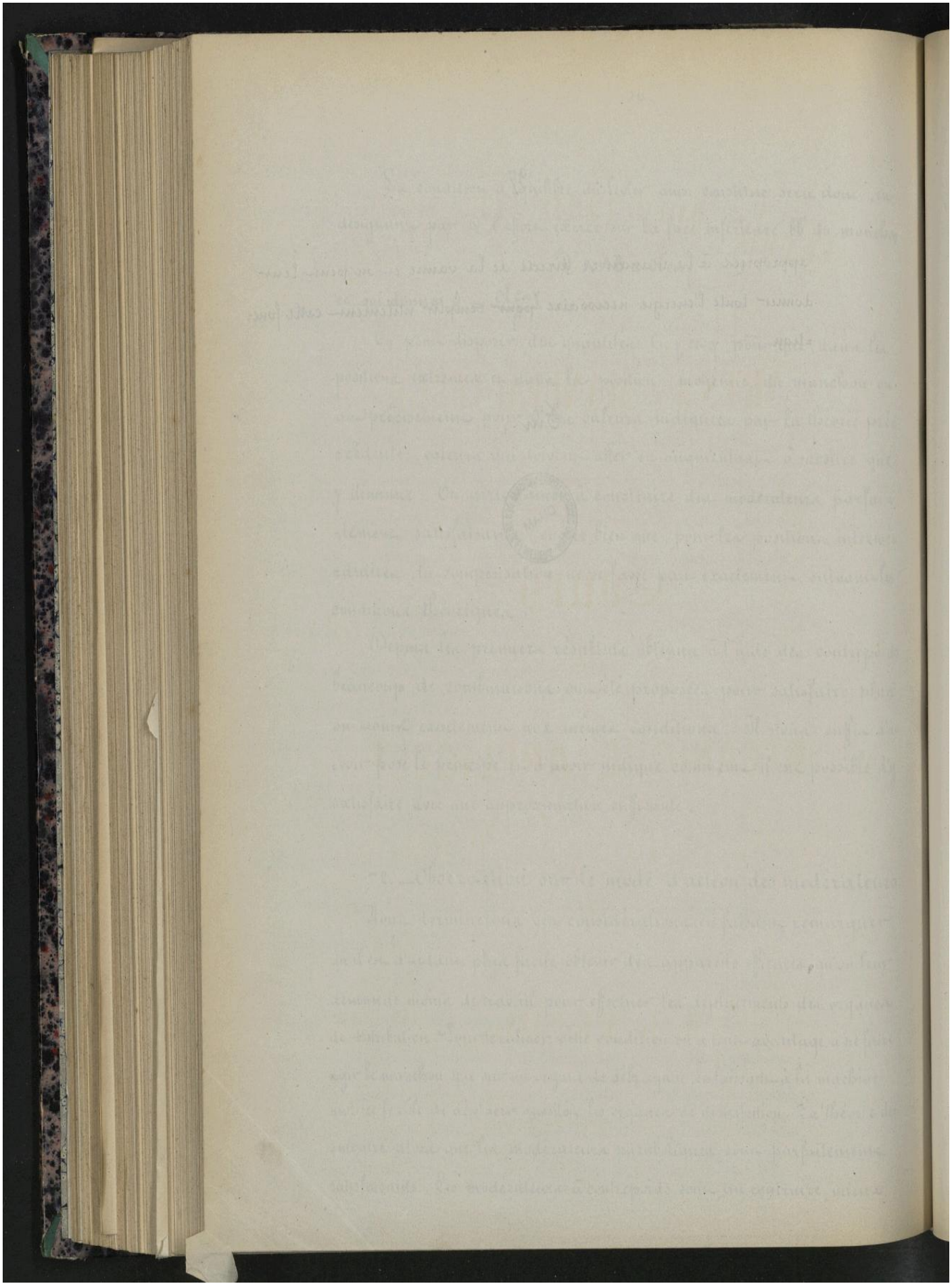
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

appropriés à la manœuvre directe de la vanne et on peut leur donner toute l'energie necessaire pour remplir utilement cette fonction.

Fin.

BIBLIOTHÈQUE CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS CNAM

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires