Conditions d’utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- Le Conservatoire numérique communément appelé le Cnum constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d’œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s’inscrit dans le cadre de la loi nº 78-753 du 17 juillet 1978 :

- **la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue (Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - http://cnum.cnam.fr)**
- **la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l’objet d’une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.**

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- **les reproductions de documents protégés par le droit d’auteur, uniquement consultables dans l’enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l’autorisation préalable du titulaire des droits.**

4- Pour obtenir la reproduction numérique d’un document du Cnum en haute définition, contacter cnum(at)cnam.fr

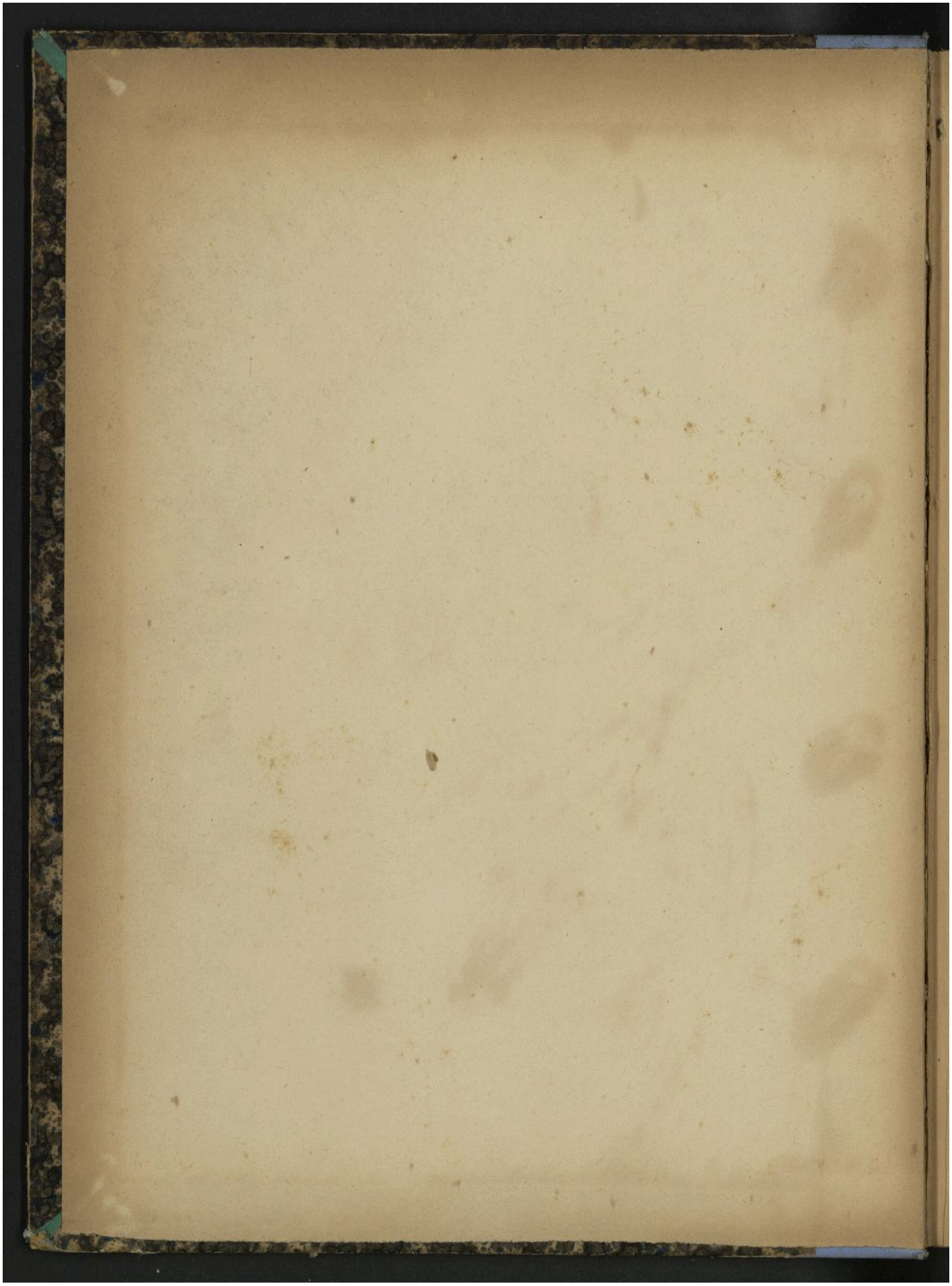
5- L’utilisateur s’engage à respecter les présentes conditions d’utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d’une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d’utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

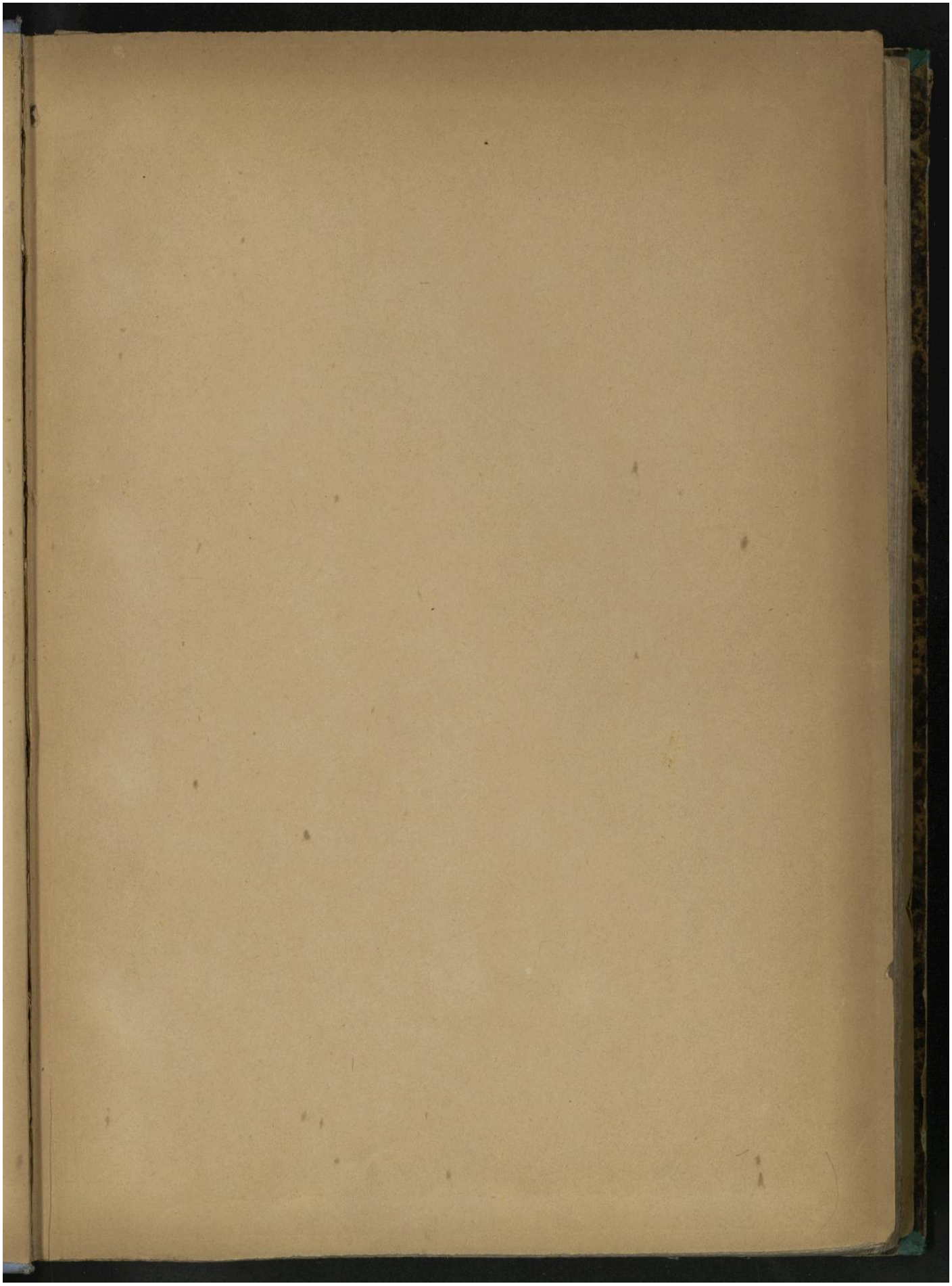
NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

NOTICE DE LA GRANDE MONOGRAPHIE	
Auteur(s) ou collectivité(s)	Tresca, Henri-Édouard
Auteur(s)	Tresca, Henri-Édouard (1814-1885)
Auteur(s) secondaire(s)	École centrale Paris
Titre	Cours de mécanique appliquée
Collation	4 vol.
Nombre de volumes	4
Sujet(s)	Mécanique appliquée -- Manuels d'enseignement supérieur
Permalien	http://cnum.cnam.fr/redir?4DY35
LISTE DES VOLUMES	Cours de mécanique appliquée : [2ème année] : année scolaire 1865-66
	Cours de mécanique appliquée : 2e division : 1867-1868
	Cours de mécanique appliquée : 2me division : 1872-1873
	Cours de mécanique appliquée : 1re division : 1882-1883

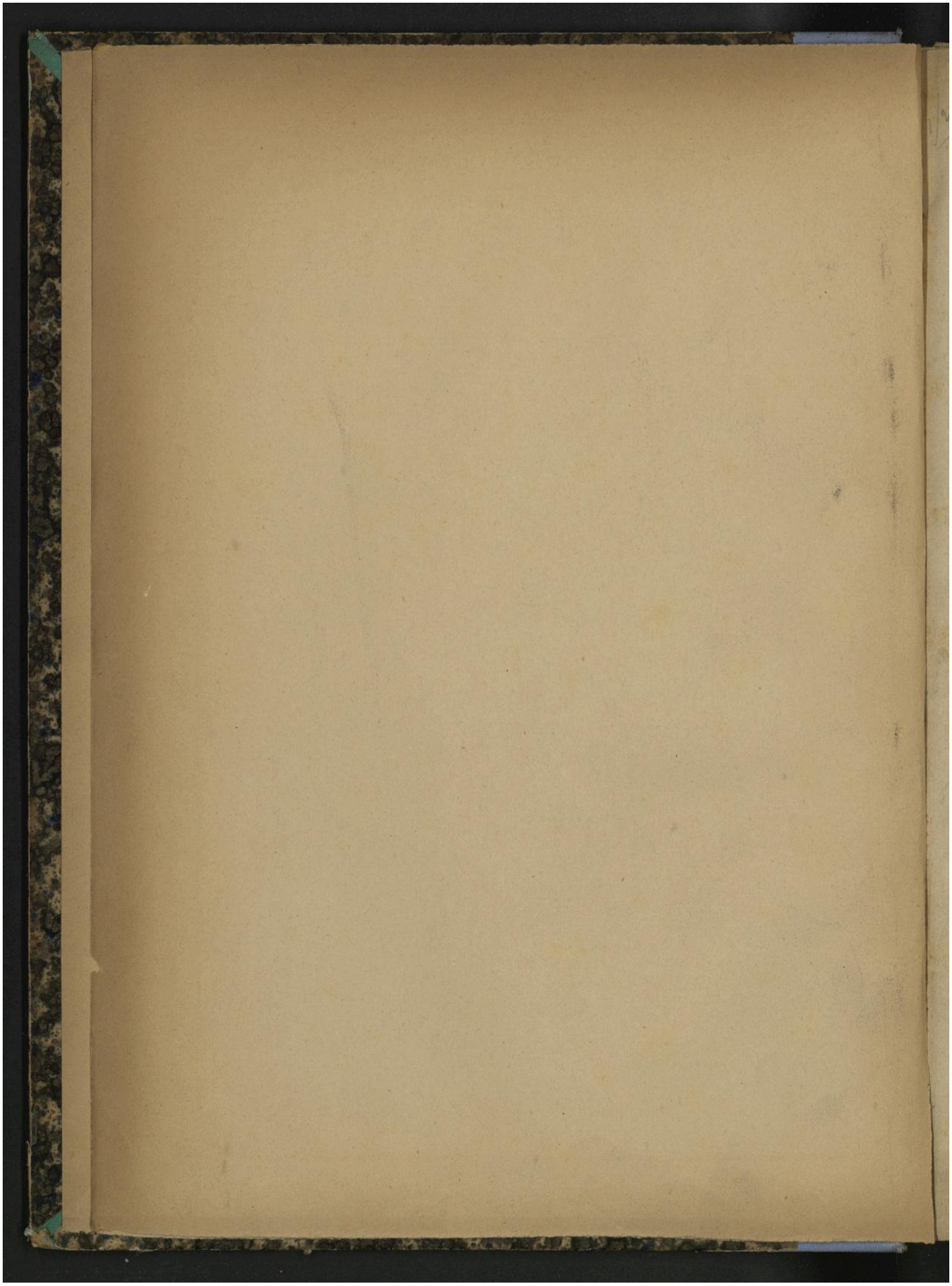
NOTICE DU VOLUME	
Auteur(s) volume	Tresca, Henri-Édouard (1814-1885)
Auteur(s) secondaire(s) volume	École centrale Paris
Titre	Cours de mécanique appliquée
Volume	Cours de mécanique appliquée : 1re division : 1882-1883
Adresse	[Paris] : Imp. de l'Ecole Centrale, [1883]
Collation	1 vol. (323 p.) : ill., tabl. ; 28 cm
Nombre de vues	334
Cote	CNAM-BIB 4 Dy 35 (3)
Sujet(s)	Hydrodynamique -- Manuels d'enseignement supérieur Mécanique appliquée -- Manuels d'enseignement supérieur Thermodynamique -- Manuels d'enseignement supérieur
Thématique(s)	Machines & instrumentation scientifique
Typologie	Ouvrage
Langue	Français
Date de mise en ligne	20/05/2021
Date de génération du PDF	24/02/2022
Permalien	http://cnum.cnam.fr/redir?4DY35.3



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4° Dy 35 (3)

ECOLE CENTRALE

DES

ARTS & MANUFACTURES

Ire Division

COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE

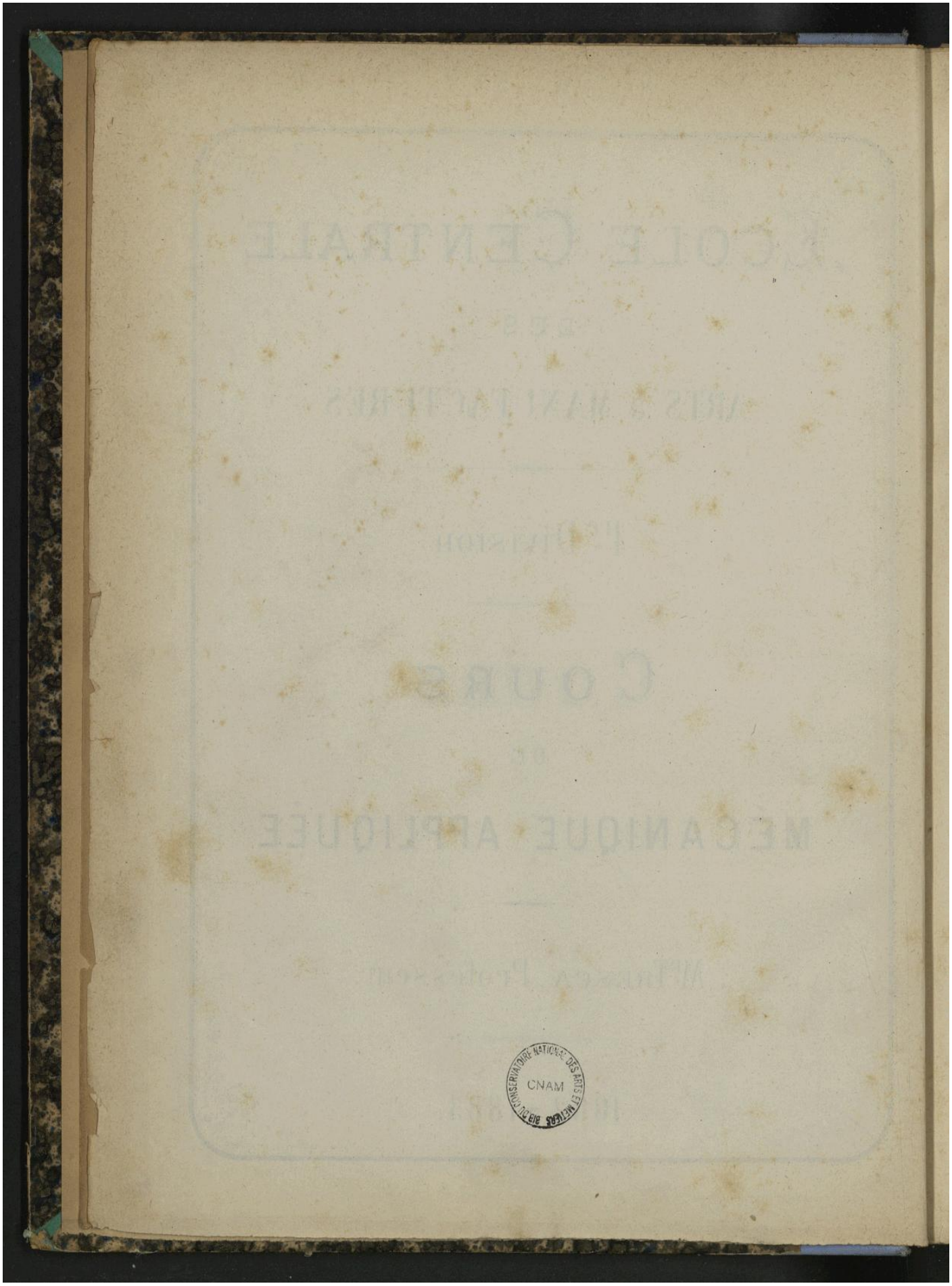
Mr TRESCA, Professeur.

Voir 1872-73 Même Cours.

1882 - 1883.

Imp. de l'Ecole Centrale 18 Rue de la Perle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



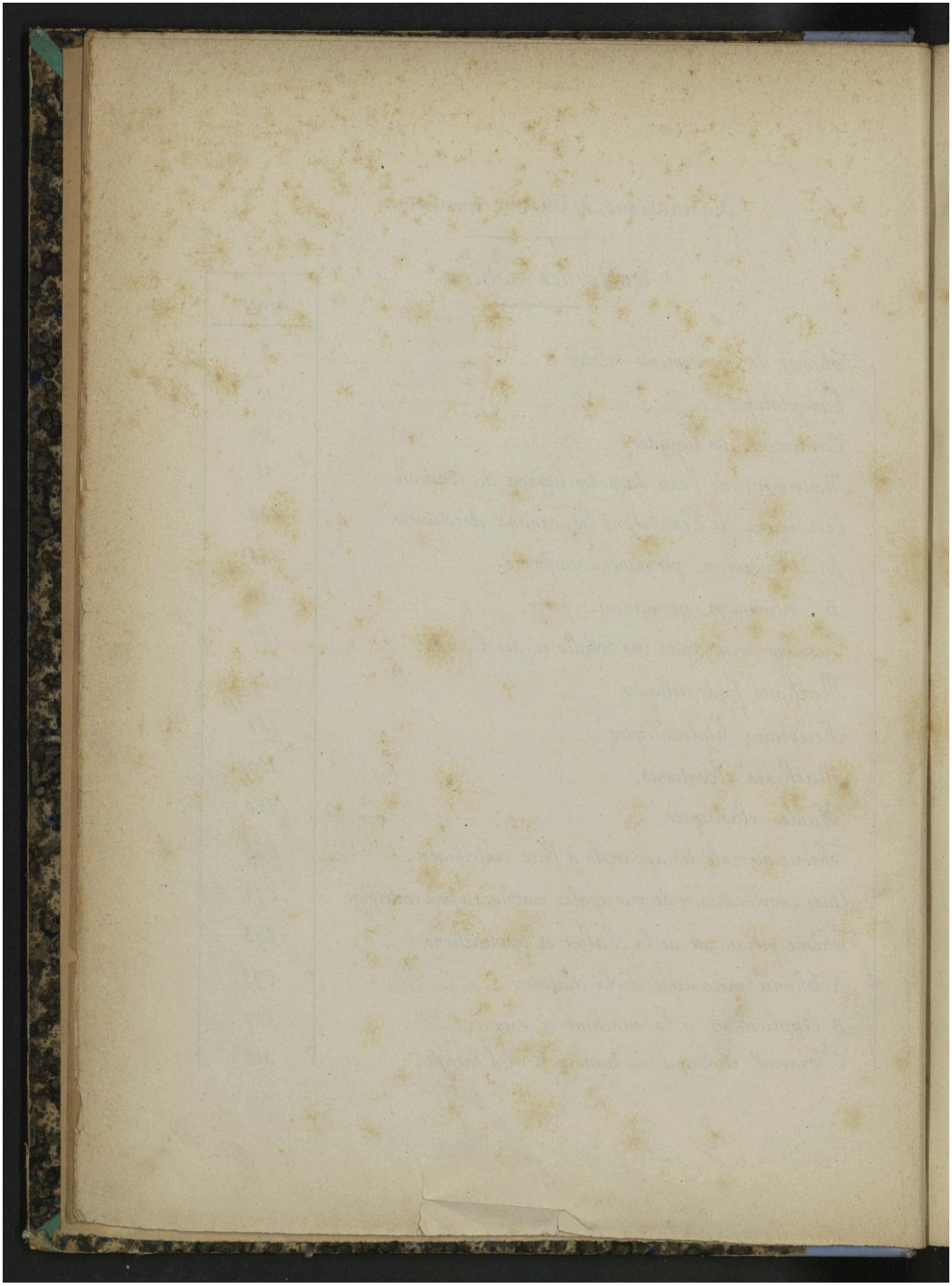
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Hydraulique et Thermo-dynamique.

Table des matières.

	Pages.
Théorie des mouvements relatifs.	1
hydrostatique.	15
Ecoulement des liquides.	39
Mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite.	72
Ecoulement de l'eau dans les canaux découverts.	106
A. Mouvement permanent uniforme.	108
B. Mouvement permanent varié.	114
Pressions réciproques des solides et des liquides.	127
Machines hydrauliques.	143
Récepteurs hydrauliques	151
Machines élévatoires.	190
Fluides élastiques.	220
Théorie générale des appareils à force centrifuge.	233
Etude complémentaire des principales machines à force centrifuge.	274
Théorie mécanique de la chaleur et applications.	293
A. Théorie mécanique de la chaleur.	293
B. Application à la machine à vapeur.	307
C. Travail électrique et transport de l'énergie.	318

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Mécanique appliquée — Troisième Année.

Théorie des Mouvements relatifs.

1 — But proposé. Nous verrons qu'il est souvent utile de rapprocher l'étude du mouvement d'un mobile de celui d'un autre mobile qui l'entraîne avec lui, et par rapport auquel il se déplace en même temps. L'étude du mouvement relatif facilitera, dans bien des cas, l'examen des principales parties des théories de l'hydraulique.

2. — Du mouvement absolu et des éléments qui le caractérisent.

La distinction qu'il est nécessaire de faire maintenant, en désignant, sous le nom de mouvement absolu, le mouvement que nous avons considéré jusqu'ici sans cette qualification, ne modifie en rien la connaissance déjà acquise des relations qui existent entre les différentes quantités que l'on a eu à examiner relativement au mouvement d'un point matériel.

Nous les rappellerons succinctement :

En ce qui concerne la cinématique de ce mouvement, e étant l'espace parcouru pendant l'unité de temps, la dérivée $\frac{de}{dt} = v$ est la vitesse; on en tire $de = v\,dt$, et la dérivée seconde $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2e}{dt^2} = J$ est l'accélération.

La force qui détermine, sur une masse m, l'accélération J est $F = mJ = m\frac{dv}{dt}$ et cette force, prise en sens contraire, donne la mesure de la force d'inertie qu'il y a lieu de considérer lorsqu'on imprime, à la masse m, cette accélération J.

Le travail d'une force F se mesure par le produit de cette force et du chemin parcouru dans sa direction; le travail élémentaire $F\,de$ a pour mesure, en mettant respectivement pour F et pour de leurs valeurs, $F\,de = m\frac{dv}{dt} \times v\,dt = mv\,dv = \frac{1}{2}\,m\,dv^2$, d'où,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en intégrant et représentant le travail par TF :

$$\frac{1}{2} m \left(V_1^2 - V_0^2 \right) = TF$$

et pour un nombre de points matériels quelconque :

$$\frac{1}{2} \lesseqgtr m \left(V_1^2 - V_0^2 \right) = \lesseqgtr TF$$

Cette relation donne la démonstration générale du principe de l'accroissement de la puissance vive ou du travail.

Lorsque la force n'agit pas dans la direction du chemin parcouru, le travail élémentaire de la force a pour mesure le produit de trois facteurs :

$$F\, ds \cos \alpha$$

α étant l'angle que font entr'elles la direction de la force F et celle du chemin parcouru ds.

La relation $F = m \frac{dv}{dt}$ revient à $m\, dv = F\, dt$, et le produit $F\, dt$ est ce que l'on appelle l'impulsion élémentaire.

L'égalité précédente n'est pas altérée si l'on projette en même temps la vitesse v ou sa différentielle dv, et la force F sur une même direction Ox, ce qui donne :

$$m\, dv_x = F_x\, dt .$$

En additionnant tous les termes semblables pour un certain nombre de masses m différentes :

$$\lesseqgtr m\, dv_x = \lesseqgtr F_x\, dt$$

et en intégrant :

$$\int \lesseqgtr m\, dv_x = \int \lesseqgtr F_x\, dt$$

ce qui constitue le principe des quantités de mouvement ; l'accroissement total de la quantité de mouvement, projetée sur un axe quelconque, est égal à la somme des impulsions élémentaires, projetées sur le même axe.

3 — Distinction à faire par rapport aux forces intérieures dans l'emploi des deux principes fondamentaux. Les forces mutuelles exercées à l'intérieur d'une masse donnée sont toujours égales

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

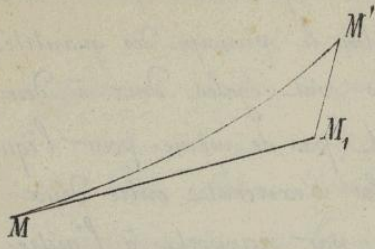
deux à deux et de sens contraires ; elles disparaissent pour cette raison dans les équations auxquelles donne lieu le principe des quantités de mouvement parce que leurs impulsions sont égales deux à deux, et de signes opposés. Mais il n'en est pas de même pour l'équation du travail lorsque ces forces mutuelles s'exercent entre deux points matériels qui se déplacent l'un par rapport à l'autre.

4. — Composition des éléments que l'on peut avoir à considérer dans l'étude du mouvement absolu. On sait que si un mobile est soumis simultanément à plusieurs déplacements, à plusieurs vitesses, à plusieurs accélérations, ou à plusieurs forces, chacun des systèmes dans lesquels on considérerait simultanément tous les éléments de même nature peut donner lieu à une représentation graphique dans laquelle la résultante des déplacements, ou la résultante des vitesses, ou la résultante des accélérations, ou enfin la résultante des forces, s'obtiendra facilement par les règles de la composition de chacun de ces genres de grandeurs.

Nous aurons à élargir ce mode de détermination de la résultante pour l'appliquer à l'étude du mouvement relatif.

5. — Représentation graphique de l'accélération au moyen de la trajectoire d'un mobile. Soit $M M'$ une partie infiniment petite de la trajectoire d'un mobile parcourue pendant un temps très petit θ ; si en même temps nous menons à cette trajectoire une tangente $M M_1$, de longueur $V\theta$, V étant la vitesse acquise au point M, la longueur $M' M_1$ représentera à la même échelle, le chemin dû à l'accélération. Désignons ce chemin par ε, par J l'accélération dans le sens $M_1 M'$ et par u la vitesse acquise dans cette direction, au bout du temps θ, en raison de cette accélération.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



On sait que $J = \frac{du}{d\theta}$, d'où $du = J\,d\theta$ et $u = J\theta$, puisque cette vitesse u est nulle à l'origine du temps.

Or $u = \frac{d\varepsilon}{d\theta}$ et par conséquent :

$$d\varepsilon = u\,d\theta = J\theta\,d\theta$$

et $\varepsilon = \frac{1}{2} J\theta^2$.

$M'M_1$ représentera donc, à la même échelle, la quantité $\frac{1}{2} J\theta^2$, quand MM_1 représentera $V\theta$, et en supposant que θ soit remplacé par le temps infiniment petit dt, M_1M' représentera la quantité $\frac{1}{2} J dt^2 = M_1M'$, lorsque MM_1 représentera la quantité $V\,dt$ et l'on aura par conséquent :

$$J = \frac{2\,M_1M'}{(dt)^2}$$

L'accélération J pourrait donc se déduire de la longueur M_1M' et ce mode de représentation nous sera très-utile dans l'étude des mouvements relatifs.

6. — Résultantes géométriques. L'étude toute entière du mouvement relatif est basée sur la considération des résultantes géométriques que l'on peut envisager ici avec tout son caractère de généralité.

Concevons dans l'espace, un certain nombre de grandeurs dont la mesure, la direction et le sens sont connus ; si l'on représente ces grandeurs par des lignes ayant précisément les directions et les sens qui leur conviennent, en les traçant les unes à la suite des autres et dans un ordre quelconque, on constitue avec ces lignes un polygone, ordinairement gauche, et si l'on ferme ce polygone en partant du premier point du tracé, cette nouvelle ligne est, dans le sens et la direction qui correspondent à cette fermeture, la résultante géométrique de toutes les autres. Le polygone ainsi formé s'appelle pour cette raison le polygone de composition.

Nous connaissons l'usage que l'on fait de ce polygone pour trouver la résultante de plusieurs mouvements ou de plusieurs forces,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et cette résultante donne lieu, dans tous les cas à certaines propositions entre les quelles nous énumérerons les plus importantes.

7. — Propriétés des résultantes géométriques.

1° La résultante géométrique OD telle qu'elle vient d'être définie est de sens contaire à la ligne DO que l'on mènerait du point D au point O, pour fermer le polygone, en continuant à cheminer dans le sens où le tracé a été effectué.

2° La résultante géométrique est la même quel que soit l'ordre dans lequel on aurait tracé les côtés du polygone de composition. Cette propriété se démontre par simple comparaison.

3° Si l'on projette la résultante sur une droite, cette projection n'est autre que la somme algébrique des projections de toutes les composantes sur celle même droite.

4° La résultante géométrique de deux grandeurs est la diagonale du parallélogramme construit avec ces deux grandeurs.

5° La résultante géométrique de trois grandeurs est la diagonale du parallélipipède construit sur ces trois grandeurs.

8. — Du mouvement relatif. Si un mobile B est entraîné dans le mouvement général d'un autre mobile A, et s'il a en même temps un mouvement propre par rapport à celui-ci, on dit que ce dernier mouvement est relatif par rapport au premier, auquel on le rapporte en spécifiant que le mobile est entraîné dans le mouvement de A, considéré comme système de comparaison.

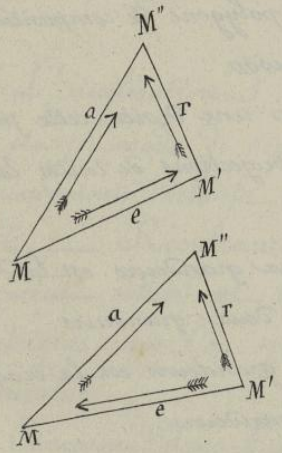
Dans tout mouvement relatif, il y a à tenir compte du mouvement dun tel système de comparaison avec lequel le mobile est entraîné

Nous nous proposons, dans les paragraphes suivants, de donner des règles pour déterminer ce mouvement relatif par rapport au mouvement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

absolu du mobile, dans l'espace et par rapport à son mouvement d'entraînement. Cette étude comprendra aussi celle des forces qui déterminent ce mouvement relatif.

9. ___ Composition des déplacements dans le mouvement relatif. Il est clair que si un point M est tout à la fois soumis au déplacement d'un système de comparaison, et à un mouvement propre, ou relatif par rapport à ce système, son déplacement réel est la résultante des deux autres. Le déplacement élémentaire absolu d'un point est ainsi la résultante géométrique du déplacement d'entraînement de ce point et de son déplacement relatif.



Les trois déplacements dans le triangle M M'M" étant respectivement représentés par e (Entrainement) r (relatif), a (absolu), avec les flèches qui en indiquent les sens, en cheminant de M à M' et de M' en M", on voit sur la première figure que la résultante a est de sens contraire à celui de ce cheminement.

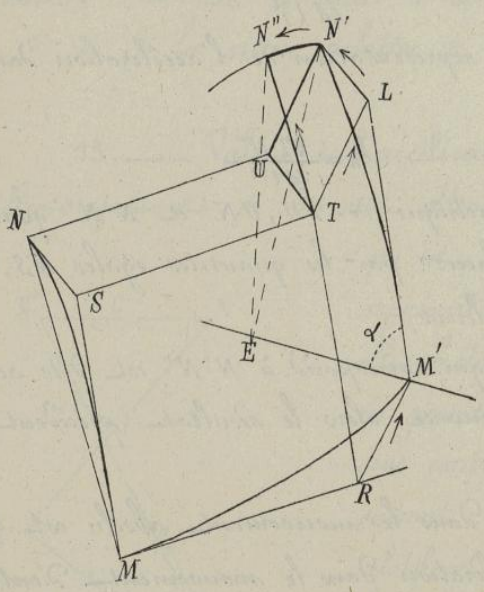
Réciproquement e et a étant donnés, on pourra déterminer r; Pour cela on cheminera de M' en M en sens contraire du mouvement d'entraînement, puis de M en M" dans le sens même du mouvement absolu; le polygone de composition sera fermé par M'M", dans le sens même du mouvement relatif qui était une des données du problème précédent; ainsi se trouve démontrée cette nouvelle proposition. Le déplacement élémentaire dû au mouvement relatif est la résultante du déplacement dû au mouvement absolu et du déplacement dû au mouvement d'entraînement, ce dernier étant changé de sens.

10. ___ Composition des vitesses dans le mouvement relatif. Les chemins simultanés qui correspondent à une même durée dt, étant proportionnels aux vitesses, les deux énoncés précédents, justifiés pour les déplacements, sont immédiatement applicables aux vitesses correspondantes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La vitesse absolue d'un point est la résultante géométrique de sa vitesse d'entraînement et de sa vitesse relative. La vitesse dans le mouvement relatif est la résultante géométrique de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement, cette dernière étant changée de sens.

11. — Composition des accélérations dans le mouvement relatif.



Nous pouvons de même considérer les accélérations dans le mouvement absolu, dans le mouvement d'entraînement et dans le mouvement relatif, mais la question devient alors un peu plus complexe parceque l'une de ces trois accélérations n'est pas nécessairement la résultante des deux autres seulement.

L'accélération dans l'un quelconque de ces mouvements étant mesurée d'une manière générale par $J = \frac{2M_1M'}{(dt^2)}$ nous chercherons d'abord à représenter sur une même figure les diverses accélérations et à en formuler les valeurs.

Si le mouvement relatif conduit le mobile de M en N, l'accélération dans le mouvement relatif sera exprimée par :

$$J_r = \frac{2NS}{(dt)^2}$$

Si le mouvement d'entraînement conduit le mobile par translation, de M en M', la valeur de l'accélération dans le mouvement d'entraînement sera :

$$J_e = \frac{2RM'}{(dt)^2}$$

En vertu de ces deux mouvements simultanés, le mobile

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

serait conduit en N', mais si en outre nous admettons que le mouvement comporte aussi une rotation autour d'un axe $M'E$ passant par le point M', ce qui répond au cas le plus général, le mobile sera conduit, en outre, de N' en N'', et l'accélération complémentaire qui en résultera sera :

$$J_c = \frac{2\,N'N''}{(dt)^2}$$

TN'' qui est alors la représentation de l'accélération dans le mouvement absolu,

$$J_a = \frac{2\,TN''}{(dt)^2}$$

est la résultante géométrique de TV, VN' et $N'N''$ quantités que l'on peut d'ailleurs remplacer par les quantités égales NS, KM'. $N'N''$ dont nous connaissons les valeurs.

L'accélération qui correspond à $N'N''$ est dite accélération complémentaire et l'on énonce alors le résultat précédent sous la forme suivante :

L'accélération dans le mouvement absolu est la résultante géométrique de l'accélération dans le mouvement d'entraînement, de l'accélération dans le mouvement relatif et de l'accélération complémentaire correspondant à la rotation.

12. — Valeur de l'accélération complémentaire.

L'accélération complémentaire $J_c = \frac{2\,N'N''}{(dt)^2}$ peut être exprimée, en fonction de la vitesse de rotation ω du mouvement d'entraînement, de la vitesse v_r du mouvement relatif, qui satisfait à la condition $M'N' = v_r\,dt$, et de l'angle α que fait la vitesse du mouvement relatif avec l'axe de rotation.

On a ainsi,

$$J_c = \frac{2\,N'N''}{(dt)^2} = \frac{2\,N'E \times \omega\,dt}{(dt)^2} = \frac{2 \times v_r \sin\alpha \times \omega\,dt}{(dt)^2} = 2\,\omega\,v_r \sin\alpha$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

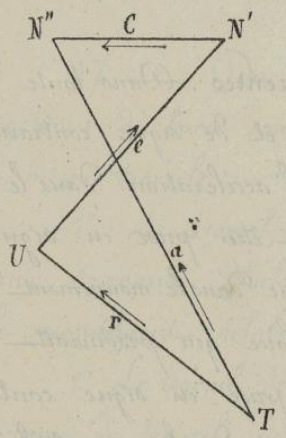
Cette valeur de l'accélération complémentaire est tout à fait générale et l'on doit faire remarquer qu'elle s'annulle dans les trois circonstances suivantes :

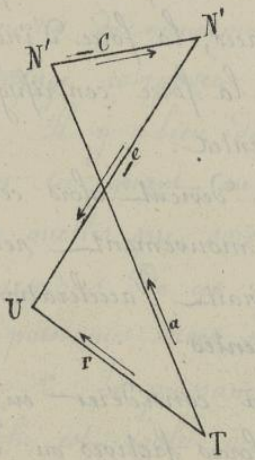
1° Si $\omega = 0$, c'est-à-dire quand le mouvement d'entraînement est seulement une translation ;

2°. Si $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand ce mouvement de rotation a lieu autour d'un axe parallèle à la vitesse relative ;

3°. Si la vitesse relative v_r est elle-même nulle.

13. ___ Valeur de l'accélération dans le mouvement relatif. Réciproquement si l'on veut obtenir dans le mouvement relatif, l'accélération, qui est proportionnelle à TU, il suffira, en représentant l'accélération absolue, comme elle l'était précédemment, de cheminer en prenant les deux autres accélérations en sens contraires, ce qui permet d'énoncer le principe suivant : l'accélération dans le mouvement relatif est la résultante géométrique de l'accélération dans le mouvement absolu, prise avec son sens, et des deux accélérations complémentaire et d'entraînement, prises en sens contraires.





14. ___ Composition des forces à considérer dans le mouvement relatif. Toutes les forces mJ, simultanément appliquées à un même mobile, sont proportionnelles aux accélérations correspondantes, ce qui permet, en ce qui concerne ces forces, d'énoncer, sans autre démonstration, les deux théorèmes suivants:

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1°. La force qui produirait l'accélération dans le mouvement absolu est la résultante géométrique des forces qui produiraient séparément l'accélération du mouvement d'entraînement, l'accélération du mouvement relatif et l'accélération complémentaire. Ces trois dernières forces constituent un système équivalent à la première force considérée isolément.

2°. La force qui produirait l'accélération dans le mouvement relatif est la résultante géométrique des forces qui produiraient séparément l'accélération du mouvement absolu, l'accélération du mouvement d'entraînement et l'accélération complémentaire, mais ces deux dernières forces, étant prises en sens contraires. Les trois dernières forces constituent un système équivalent à la première force.

15.— Forces fictives ou apparentes. Dans toute modification de mouvement, la force d'inertie est égale et de signe contraire à la force accélératrice ; la force qui produirait l'accélération dans le mouvement d'entraînement, lorsque cette force doit être prise en signe contraire, n'est donc autre chose que la force d'inertie dans le mouvement d'entraînement.

Pour la même raison, la force qui produirait l'accélération complémentaire, lorsqu'elle doit être prise en signe contraire, est celle que l'on désigne sous le nom de force centrifuge composée. On donne en outre à ces deux forces, la force d'inertie dans le mouvement d'entraînement et la force centrifuge composée, le nom de forces fictives ou apparentes.

L'énoncé du dernier théorème devient alors celui-ci : la force qui produirait l'accélération du mouvement relatif est la résultante de la force qui produirait l'accélération du mouvement absolu, et des forces apparentes.

On distingue ainsi les forces à considérer en forces réelles ou réellement appliquées, et en forces fictives ou apparentes ;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ces dénominations ont l'avantage de ne permettre entr'elles aucune confusion.

16.— Circonstances dans lesquelles la force centrifuge composée est nécessairement nulle. La force centrifuge composée qui n'est autre que la force d'inertie dans la rotation du mouvement d'entraînement est nulle toutes les fois que l'accélération complémentaire est nulle, c'est-à-dire quand $\omega = 0$, quand $\sin \alpha = 0$ ou quand $v_r = 0$.

Lorsque le mouvement d'entraînement se réduit à une rotation uniforme autour d'un axe, les forces d'inertie se réduisent à la seule force centrifuge $m \omega^2 r$.

17.— Du travail du mouvement relatif. Lorsque deux systèmes de forces sont équivalents, ils produisent des résultats identiques, le même travail par exemple, Donc :

1°. Le travail développé dans le mouvement absolu est égal aux travaux développés dans le mouvement d'entraînement, dans le mouvement relatif et dans l'accélération complémentaire.

2°. Le travail développé dans le mouvement relatif, est égal à la somme du travail développé dans le mouvement absolu, du travail d'inertie du mouvement d'entraînement et du travail de la force centrifuge composée.

Il y a lieu de faire remarquer que l'on n'a plus à considérer ici, quant au travail, que des sommes algébriques, et, cela quelles que soient les quantités qui entreront dans les expressions de ces quantités de travail. Si elles sont exprimées en puissances vives, on pourra dire plus simplement que :

1°. La puissance vive gagnée ou perdue dans le mouvement absolu est égale à la somme des quantités de travail développées

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans le mouvement d'entraînement, dans le mouvement relatif et dans l'accélération complémentaire.

2° La puissance vive, gagnée ou perdue dans le mouvement relatif, est égale à la somme des quantités de travail développées tant dans le mouvement absolu, que, par l'inertie, dans le mouvement d'entraînement et par la force centrifuge composée.

On doit même supprimer dans cet énoncé tout ce qui se rapporte au travail de la force centrifuge composée parce qu'il est facile de démontrer que ce travail est toujours nul, non seulement lorsque la force centrifuge composée est nulle, mais même quand elle a une valeur quelconque.

18. — Nullité du travail de la force centrifuge composée dans le mouvement relatif. Le mouvement relatif est représenté en NM ou $M'N'$, et l'on reconnaît facilement que dans ce mouvement relatif, le travail de la force centrifuge composée est nécessairement nul. En effet, le plan qui contient l'arc $N'N''$ et la direction de la force centrifuge composée en ses différents points est toujours perpendiculaire à la courbe $M'N'$; cette courbe a donc une projection nulle sur le plan de la force centrifuge et par conséquent sur cette force centrifuge elle-même, à chaque instant, et son action ne se traduit, quant au mouvement relatif, par aucune quantité de travail.

Lorsqu'on voudra appliquer le principe des puissances vives, on voit ainsi qu'il n'y aura jamais lieu de rechercher la valeur du travail de la force centrifuge composée, qui se trouve dès lors éliminé de toutes les équations de travail.

19. — Conclusions générales. En résumant ce qui a été dit précédemment, on reconnaît que: toute question de mouvement relatif ou de repos relatif pourra être traitée, comme une question de mouvement absolu, à la condition de joindre à l'action des forces extérieures, réellement appliquées, celles des forces fictives ou apparentes.

Tous les théorèmes généraux de la mécanique s'appliquent ainsi au mouvement relatif.

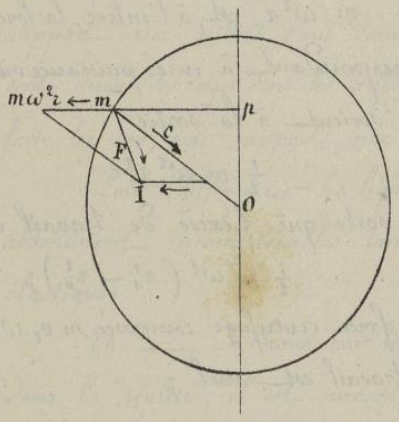
En particulier le théorème de travail appliqué au mouvement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

relatif permet l'élimination de la force centrifuge composée, dont le travail est toujours nul.

20. — Applications. Dans l'étude de l'hydraulique, nous aurons fréquemment à faire usage des considérations qui viennent d'être développées; nous nous bornerons ici à deux applications particulières, l'une, à un cas de repos relatif, l'autre, à un exemple de mouvement relatif.

21. — Repos relatif d'un corps pesant à la surface de la terre. La condition du repos relatif est ici, que l'équilibre doit exister entre les forces réelles, les forces d'inertie du mouvement d'entraînement, et la force centrifuge composée, mais celle-ci étant nulle dans ce cas, par suite de $v_r = 0$, puisqu'il s'agit de repos relatif, nous n'avons absolument à considérer que les deux premiers groupes.



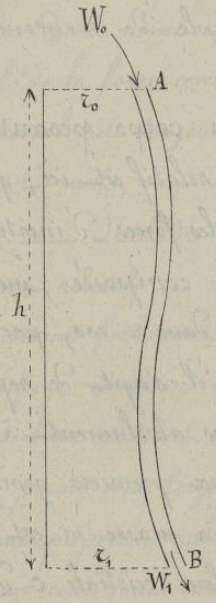
La masse m est sollicitée par une force centrale c d'attraction. Les forces d'inertie du mouvement d'entraînement qui lui font décrire la circonférence de rayon m p se réduisent à la seule force centrifuge $m\omega^2 r$. Ces deux forces n'ayant pas même direction ne pourraient pas être en équilibre; leur résultante F qui doit être équilibrée par une troisième force, due à la réaction du sol, n'est pas en général dirigée vers le centre, mais seulement lorsque la masse m est au pôle, auquel cas la force centrifuge est nulle, ou lorsqu'elle est placée à l'équateur, auquel cas la force $F = c - m\omega^2 r$; c'est la valeur minimum de F. La force c est au contraire entièrement effective au pôle.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

22. — Vitesse relative d'un mobile entraîné dans un canal soumis à un mouvement de rotation. Le mobile entre dans le canal en A et doit ressortir en B ; il gagnera dans son mouvement relatif un excès de puissance vive :

$$\frac{1}{2} m \left(W_1^2 - W_0^2 \right) = \Sigma TF$$

qui sera égal à la somme des travaux des trois groupes de forces déjà énumérées.



1°. force du mouvement absolu ; le mobile étant pesant, la force réelle qui le sollicite est $m g$, dont le travail est $m g h$;

2°. force d'inertie du mouvement d'entraînement :

$m \omega^2 r_0$ est, à l'entrée, la force centrifuge correspondant à une puissance vive $\frac{1}{2} m \omega^2 r_0^2$, qui devient à la sortie :

$$\frac{1}{2} m \omega^2 r_1^2$$

De sorte que l'excès de travail est :

$$\frac{1}{2} m \omega^2 \left(r_1^2 - r_0^2 \right) ;$$

3°. force centrifuge composée $m v_r \omega \sin \alpha$, dont le travail est nul ;

et par suite :

$$\frac{1}{2} m \left(W_1^2 - W_0^2 \right) = m g h + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(r_1^2 - r_0^2 \right)$$

d'où :

$$W_1 = \sqrt{W_0^2 + 2 g h + \omega^2 \left(r_1^2 - r_0^2 \right)} .$$

Dans le cas où le mobile ne serait pas pesant, on aurait simplement :

$$W_1 = \sqrt{W_0^2 + \omega^2 \left(r_1^2 - r_0^2 \right)}$$

Le mobile repasserait alors par la même vitesse relative W toutes les fois que r_1 reviendrait égal à r_0.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Hydrostatique.

23. ____ Conditions générales. L'hydrostatique traite des conditions d'équilibre d'une masse liquide ou gazeuse, mais pour pouvoir soumettre les conditions de cet équilibre au calcul, il est nécessaire de définir l'état liquide ou l'état gazeux, de telle manière que les propriétés actives ou passives qui y correspondent puissent être introduites dans les formules.

En désignant les corps sous ces deux états par le mot fluides, on exprime que tous les éléments de la masse peuvent se déplacer les uns par rapport aux autres, sans donner naissance à aucune résistance : les fluides sont ainsi des corps dont les différents éléments jouissent d'une mobilité parfaite les uns par rapport aux autres.

Pour différencier les liquides des gaz, on dit que les premiers sont absolument incompressibles tandis que les autres sont parfaitement élastiques.

24. ____ Notions sur les fluides. Il n'en est pas ainsi cependant dans la réalité ; il est maintenant prouvé que les liquides naturels peuvent, même sans changer de température, changer de volume sous l'action d'une pression élevée ; et les expériences sur les gaz ne se traduisent pas, dans tous les cas, par la parfaite élasticité qui vient d'être indiquée.

Cependant les fluides se rapprochent beaucoup, par leurs propriétés, des définitions théoriques qui précèdent, et les conséquences que nous en déduirons seront par conséquent applicables aux fluides naturels, au moins approximativement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

25. — Pression dans les fluides. Chaque élément d'une masse fluide agit sur l'élément voisin et, dans l'état d'équilibre, cette action se traduit nécessairement par une pression qui pourra, suivant les cas, être plus ou moins grande. La pression exercée sur un élément superficiel ω sera toujours rapportée à la pression P par unité de surface, de sorte que l'effort correspondant est exprimé sous la forme $P\omega = F$.

La pression P est dite pression par unité de surface; l'effort F correspondant est désigné souvent sous le nom de pression élémentaire, et l'on admet que cette pression élémentaire a son point d'application au centre de gravité de l'élément ω, lorsqu'il est très petit.

Comme pour les corps solides, il faut entendre que les réactions mutuelles de deux éléments en contact sont normales à leur surface de contact, car si elles n'étaient pas normales elles tendraient à déterminer un déplacement de l'une de ces surfaces par rapport à l'autre.

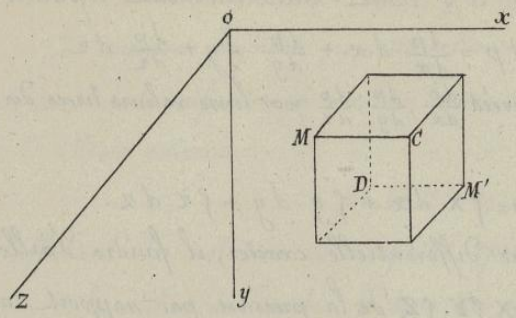
Pour la même raison, la pression par unité de surface, dans un fluide en équilibre, est nécessairement la même, dans toutes les directions, autour d'un même point.

Si le fluide n'était soumis en ses différents points à aucune force extérieure, la pression par unité de surface ne pourrait varier d'un point à un autre, car cette variation serait sans cause.

26. — Equilibre d'une masse fluide soumise à des forces quelconques. Pour qu'une masse fluide soit en équilibre, il faut évidemment que chacun des éléments qui la constitue soit individuellement en équilibre; cherchons à exprimer que cette dernière condition est satisfaite, pour un élément infinitésimal, compris entre six plans infiniment rapprochés deux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à deux et parallèles à trois plans coordonnés rectangulaires.



L'un des sommets est au point M dont les coordonnées sont $x\ y\ z$; les coordonnées des cinq autres sommets du parallélépipède $M\,M'$ ne différeront de celles là que de dx, dy ou dz.

Désignons par XYZ les composantes, parallèles aux trois axes, des forces extérieures qui, à l'exclusion des pressions exercées par les éléments voisins, agissent sur l'unité de masse.

La composante horizontale, parallèle à l'axe des x, de toutes ces forces extérieures, sur le parallélipipède $M\,M'$, sera alors, en désignant sa masse par m et son volume par v, son poids spécifique par ϖ et sa densité par ρ :

$$X \times m = X \times \frac{p}{g} = X \times \frac{\varpi v}{g} = X \times \rho v = X \times \rho\, dx\, dy\, dz$$

La pression au point M étant p par mètre carré, son effort sur la face MD sera $p\,dy\,dz$, et cette pression, devant varier d'une manière continue d'un point à un autre, sera $p + \frac{dp}{dx}\,dx$ sur $M'C$, et l'effort, de sens contraire, sur $M'C$, pourra être représenté par :

$$-\left(p + \frac{dp}{dx}\,dx\right) dy\, dz$$

La condition d'équilibre, pour les forces parallèles au plan des $y\,z$, sera donc :

$$\rho X\, dx\, dy\, dz + p\, dy\, dz - \left(p + \frac{dp}{dx}\,dx\right) dy\, dz = 0$$

ou en supprimant les termes semblables :

$$\rho X = \frac{dp}{dx}$$

On aurait de même, par rapport aux deux autres plans

$$\rho Y = \frac{dp}{dy} \qquad\qquad \rho Z = \frac{dp}{dz}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

27. — Equation générale d'équilibre.

La différentielle totale dp étant nécessairement exprimée par :

$$dp = \frac{dp}{dx}\,dx + \frac{dp}{dy}\,dy + \frac{dp}{dz}\,dz$$

en remplaçant les dérivées $\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}, \frac{dp}{dz}$ par leurs valeurs tirées des équations précédentes, on trouve.

$$dp = \rho X\,dx + \rho Y\,dy + \rho Z\,dz.$$

dp devant être une différentielle exacte, il faudra d'ailleurs que les dérivées partielles $\rho X, \rho Y, \rho Z$ de la pression par rapport aux variables x y et z, satisfassent aux trois conditions :

$$\frac{d\rho Y}{dx} = \frac{d\rho X}{dy}\,;\quad \frac{d\rho Z}{dx} = \frac{d\rho X}{dz}\,;\quad \frac{d\rho Y}{dz} = \frac{d\rho Z}{dy}$$

Cela revient en effet à dire qu'en prenant successivement la dérivée de la fonction principale par rapport à deuse des variables, on arrive nécessairement au même résultat qu'en effectuant les mêmes opérations en ordre inverse.

Lorsque ces trois conditions seront satisfaites, la variable p sera déterminée par l'intégrale :

$$p = \int (\rho X\,dx + \rho Y\,dy + \rho Z\,dz) + C$$

mais p est une quantité essentiellement positive et la constante de l'intégration sera en général déterminée par la condition que, pour tous les points de la surface libre du fluide, la pression devra être égale à la pression extérieure.

Si ρ est constant :

$$p = \rho \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + C$$

et sous cette forme, la valeur de p est particulièrement applicable aux liquides, dont l'incompressibilité est une des propriétés caractéristiques.

28. — Application à un liquide homogène, pesant. S'il s'agit d'un liquide soumis seulement à l'action de la pesanteur, on choisira horizontalement les axes des x et des y, et on prendra une verticale pour axe des Z ; dans ces conditions,

$$X = 0\,;\qquad Y = 0\,;\qquad Z = g\,;$$

et par suite $dp = \rho g\,dz$, fonction différentielle qui peut être immédiatement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

intégrée, si ρ est une quantité constante, et qui donne :

$$p = \rho g Z + C.$$

La pression augmente proportionnellement à la distance Z du point considéré au-dessous de la surface supérieure du liquide.

Nous écrivons :

$$p = \varpi Z + c$$

en affectant la notation ϖ au poids spécifique du liquide, $\varpi = \rho g$.

A la surface du liquide, p devra être égal à p_a, pour $Z = 0$, ce qui donne alors $c = p_a$ et par suite, p_a étant la pression atmosphérique,

$$p = \varpi Z + p_a$$

29. — Application aux fluides élastiques. Si ρ était variable avec p, il faudrait dans l'équation du numéro précédent, et avant l'intégration, exprimer sa valeur en fonction de p.

La densité d'un gaz qui varie proportionnellement avec la pression, est en général exprimée par la relation :

$$\rho = \frac{K p}{1 + \alpha \theta}$$

K étant un coefficient constant qui dépend de la nature du gaz ; nous pourrons même écrire $\rho = K' p$ en supposant la température constante.

La valeur de $d p$ devient alors :

$$d p = K' p \, (X \, dx + Y \, dy + Z \, dz)$$

et l'on peut immédiatement intégrer en faisant passer p dans le premier membre, ce qui donne :

$$\frac{d p}{p} = K' (X \, dx + Y \, dy + Z \, dz)$$

d'où

$$\log \text{hy} \; p = K' f (x \, y \, z) + C$$

quand les forces extérieures seront telles que l'on puisse faire l'intégration indiquée par $f (x \, y \, z)$.

C'est ce qui arrive nécessairement pour $X = 0, Y = 0, Z = g$ et il vient alors :

$$\frac{d p}{p} = K' g \, d z$$

ce qui donne :

$$Z = \frac{1}{K g} \log. \text{hy} \frac{p}{p_0}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pour la hauteur z, mesurée à partir de la position supérieure et qui correspond à la pression p_0.

C'est cette formule qui est employée pour la mesure des hauteurs par le baromètre.

30. — Propriétés des surfaces de niveau. On désigne sous le nom de surface de niveau, dans une masse fluide, le lieu des points pour lesquels la pression p est constante.

L'équation différentielle d'une surface de niveau est donc $dp = 0$ et son équation générale $p = c$,

Si l'on pose :

$$\rho X\,dx + \rho Y\,dy + \rho Z\,dz = df(x\,y\,z)$$

on peut écrire l'équation de la surface de niveau sous la forme la plus générale:

$$f(x\,y\,z) = C$$

Les surfaces de niveau sont caractérisées par diverses propriétés; voici les principales:

1°. Par un point donné d'une masse fluide, on ne peut faire passer qu'une seule surface de niveau, car les coordonnées x, y, z de ce même point ne pourraient satisfaire à deux équations distinctes,

$$f(x\,y\,z) = C, \quad f(x\,y\,z) = C'$$

2°. Dans une masse fluide en équilibre, la résultante des forces extérieures, en un point quelconque, est normale à la surface de niveau qui passe par ce point. En effet, la surface de niveau doit satisfaire, en un point quelconque et quel que soit ρ, à la condition :

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

ou en divisant tous les termes par $F\,ds$, produit de la force totale F par l'élément linéaire ds, dont dx, dy, dz sont les projections :

$$\frac{X\,dx}{F\,ds} + \frac{Y\,dy}{F\,ds} + \frac{Z\,dz}{F\,ds} = 0$$

$\frac{X}{F}, \frac{Y}{F}, \frac{Z}{F}$ sont les cosinus des angles que fait la force F avec les axes; $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sont les cosinus des angles de l'élément linéaire MM' avec ces mêmes axes. La somme des produits de ces cosinus, qui est égale au cosinus de l'angle de MM' avec F, étant nulle, montre que l'angle de MM' avec F est un angle droit.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il en serait de même pour toute autre direction de l'élément MM', ce qui montre qu'en un point quelconque M la force F est normale à la surface de niveau.

3°. La densité est constante dans toute l'étendue d'une surface de niveau. La relation en dp peut se mettre sous la forme :

$$\rho = \frac{dp}{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz} = \frac{dp}{df(x\,y\,z)} = \frac{dp}{dc}$$

$f(x\,y\,z)$ étant l'équation d'une surface de niveau pour laquelle la pression p est connue lorsqu'on connaît c. La pression p ne dépend que de c ; dp et $\frac{dp}{dc}$ sont des fractions exclusives de c ce qui suffit pour démontrer que $\rho = \frac{dp}{dc}$ reste constant quand p ne varie pas, c'est-à-dire pour toute l'étendue d'une surface quelconque de niveau.

4°. Dans une masse gazeuse en équilibre, la température est constante dans toute l'étendue d'une surface de niveau. La densité ρ d'un gaz est exprimée par $\rho = \frac{K p}{1 + \alpha\theta}$; p et ρ devant être constants dans toute l'étendue d'une surface de niveau, cette relation exige qu'il en soit de même pour θ.

31. ___ Surface de niveau d'un liquide entraîné dans un mouvement uniforme de rotation. Le second énoncé du paragraphe précédent permet de déterminer la forme que prend la surface d'un liquide assujetti à tourner d'un mouvement uniforme, avec le vase qui le contient, autour de l'axe de ce vase. Il s'agit alors d'un problème de repos relatif qui peut être traité conformément à la théorie des mouvements relatifs.

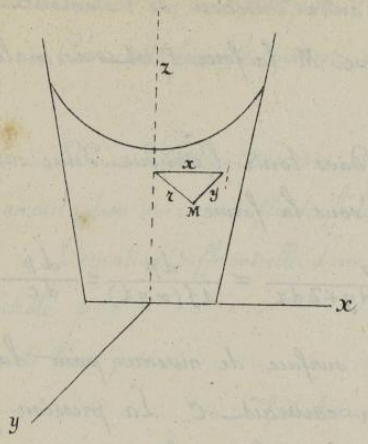
Dans cette question de repos relatif, la force centrifuge composée étant nulle, nous n'avons à considérer que les composantes de la force centrifuge du mouvement d'entraînement uniforme et le poids.

Ces trois forces sont, pour l'unité de masse :

$$X = \omega^2 x \; ; \quad Y = \omega^2 y \; ; \quad Z = -g$$

et en les introduisant dans l'expression de dp,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



$$dp = \rho\omega^2 x\,dx + \rho\omega^2 y\,dy - \rho g\,dz$$

ce qui donne par intégration (1) :

$$p = \frac{\rho\omega^2 x^2}{2} + \frac{\rho\omega^2 y^2}{2} - \rho g z + c$$

$$= \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g z + c$$

on tire de là :

$$z = \frac{c-p}{\rho g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

et en particulier, pour la surface de niveau supérieure, pour laquelle $p = p_a$,

$$z = \frac{c-p_a}{\rho g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

Cette surface prend la forme d'un paraboloïde de révolution pour lequel la constante c devra être déduite de la considération du volume de l'eau et de la forme du vase qui la contient.

Voici les éléments de cette détermination pour le cas où le vase serait cylindrique

Le volume de l'eau dans le cylindre étant $\pi R^2 b$, le volume compris au-dessous de la surface du paraboloïde doit conserver la même mesure, d'où :

$$\pi R^2 b = \int_0^R 2\pi r\,dr \times z = \int_0^R 2\pi r\,dr \left(\frac{c-p_a}{\rho g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right)$$

d'où :

$$R^2 b = R^2\,\frac{c-p_a}{\rho g} + \frac{1}{4}\,\frac{\omega^2 R^4}{g}$$

équation du premier degré en c

On en tire $b = \frac{c-p_a}{\rho g} + \frac{\omega^2 R^2}{4g}$ et si l'on substitue dans la valeur de z, il vient $z = b - \frac{\omega^2}{2g}\left(\frac{R^2}{2} - r^2\right)$ ce qui pour $r = 0$ donne $z_0 = b - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$.

---

(1) En faisant remarquer que tout est symétrique autour de l'axe, on aurait pu faire plus simplement, dans un plan méridien, $Y = 0$, $X = \omega^2 r$, ce qui aurait conduit immédiatement, à la même relation.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

32. — Variation de la pression dans un liquide pesant. Pour un liquide soumis seulement à l'action de la pesanteur, nous avons établi la relation :

$$p = \varpi z + c,$$

qui suffit pour démontrer les propositions suivantes :

1° Si p est égal à p_0 pour une hauteur z_0 on éliminera la constante c en écrivant :

$$p - p_0 = \varpi (z - z_0)$$

L'accroissement de pression par unité de surface, dans un liquide, est proportionnel à la différence $z - z_0$ des niveaux des points considérés, ou en d'autres termes : les pressions dues aux hauteurs croissent proportionnellement à l'augmentation de hauteur entre deux points considérés.

Cette loi de la distribution des pressions dans un liquide pesant en équilibre sera souvent rappelée sous la désignation de loi hydrostatique.

2° Cet accroissement ne s'annule que quand la différence de niveau est réduite à 0, ce qui revient à énoncer que toutes les surfaces de niveau sont des plans horizontaux représentés par l'équation générale :

$$z = \frac{p - c}{\varpi}$$

3° En désignant comme précédemment par p_a la pression atmosphérique, qui correspond à $z = 0$, la formule :

$$p = \varpi z + p_a$$

montre que la pression p_a, à laquelle est soumise la surface libre d'un liquide se transmet à tous les points situés au-dessous.

33. — Pressions exercées par un liquide sur une paroi plane. La pression exercée sur un élément quelconque $d\omega$ d'une surface est égale à $\varpi z \times d\omega$, en exprimant par z la hauteur de cet élément au-dessous de la surface de niveau de liquide.

Sur une surface plane ω, la pression totale sera $\varpi \int z \, d\omega$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et la pression moyenne P exercée sur cette surface totale sera celle qui répond à l'équation :

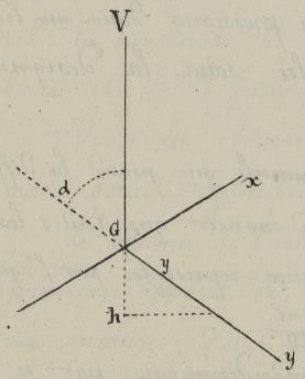
$$\varpi \int z \, d\omega = P\omega$$

Lorsqu'il s'agit d'une surface plane, il est facile de démontrer que cette pression P est précisément celle qui s'exerce au centre de gravité de la section et que nous représenterons par p_g.

Soit h la différence de niveau d'un élément $d\omega$, positive ou négative, par rapport au centre de gravité g, on aura nécessairement, pour la pression p en ce point :

$$p = p_g + \varpi h,$$

et par suite $$\int p \, d\omega = \int p_g \, d\omega + \int \varpi h \, d\omega.$$



En menant par le centre de gravité G l'horizontale GX de la paroi plane considérée, et en désignant par α l'angle que ce plan fait avec la verticale, l'ordonnée y d'un point quelconque M, mesurée sur la ligne de plus grande pente du plan, satisfera à la relation $h = y \cos\alpha$, de sorte que :

$$\int p \, d\omega = \int p_g \, d\omega + \varpi \cos\alpha \int y \, d\omega$$

Le dernier terme est nul par suite de la définition même du centre de gravité et par conséquent :

$$\int p \, d\omega = p_g \int d\omega = p_g \, \omega$$

La pression moyenne est égale à la pression due à la hauteur du centre de gravité de la paroi plane, mesurée à partir du niveau du liquide.

Dans l'expression précédente, il faudrait ajouter, des deux parts, la pression p_a si l'on voulait tenir compte de la pression atmosphérique.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

34. — Centre de pression. La pression moyenne étant ainsi connue, il convient de déterminer, sur la surface, le centre de pression, c'est-à-dire le centre des forces parallèles, normales au plan, qui sont exprimées, en chacun des éléments $d\omega$, par $\varpi z\, d\omega$.

Si sur chacun des éléments M, d'aire $d\omega$, nous élevons un prisme droit de hauteur z, le volume de ce prisme sera précisément $z\, d\omega$; et l'ensemble de ces prismes élémentaires formera un prisme total de volume $\int z\, d\omega$, dont le centre de gravité satisferait à la condition,

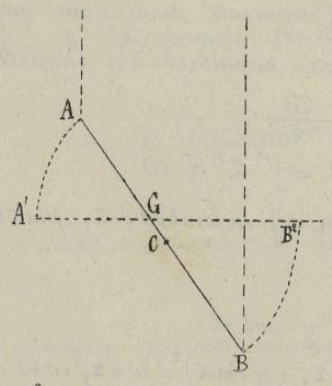
$$z_1 \int d\omega = \int z\, d\omega,$$

ce qui revient à établir que la résultante des forces parallèles $\varpi z\, d\omega$ passera par ce centre de gravité du prisme; le centre de pression de la surface plane ω est sur la même ordonnée; il en est la projection sur le plan, ce qui suffit pour démontrer que le centre de pression est placé plus bas que le centre de gravité de la surface, parce que les volumes élémentaires situés à droite du centre de gravité ont des hauteurs plus grandes que les volumes situés à gauche.

On fera remarquer d'ailleurs, que les ordonnées z aboutissant dans leur première position, à la surface de niveau, elles aboutiront encore à un plan dans leur nouvelle position.

On arrive facilement à la même démonstration par une autre considération géométrique.

Soit G le centre de gravité dans une coupe verticale menée par la ligne de plus grande pente du plan, ce centre de gravité se confondrait avec le centre de pression, si le plan était ramené à être horizontal, mais par ce mouvement autour de l'horizontale du plan, passant par le point G, on aurait augmenté les moments de tous les éléments situés au-dessus de l'horizontale G en même temps qu'on aurait diminué les autres,



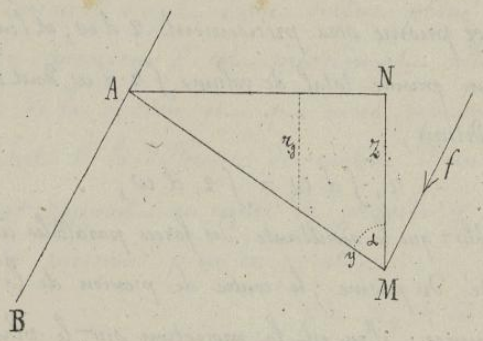
et le centre de pression C se serait en conséquence relevé.

Il était donc, avant le déplacement, placé plus bas que le point G:

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le centre de pression est toujours situé au-dessous du centre de gravité.

Pour trouver la hauteur du centre de pression, on se servira du principe de l'égalité entre le moment de la résultante et la somme des moments des composantes par rapport à l'horizontale AB de la face plane, considérée dans le plan supérieur du liquide.



Un élément $d\omega$, placé en M sur la ligne de plus grande pente AM est pressé normalement par une force $f = \varpi z\, d\omega$ et son moment sera $\varpi z\, d\omega \times AM$ et comme $AM = \frac{MN}{\cos\alpha} = \frac{z}{\cos\alpha}$, ce moment pourra s'exprimer par :

$$\frac{\varpi z^2 d\omega}{\cos\alpha}$$

D'autre part, la résultante de toutes les pressions est, en vertu de ce qui a été dit précédemment, égale à $\varpi z_g \omega$ et si nous désignons par z_c la hauteur du centre de pression, le moment correspondant sera :

$$\varpi z_g \omega \times \frac{z_c}{\cos\alpha}$$

La condition de l'égalité des moments sera donc exprimée par l'équation suivante, dans les deux membres de laquelle on a supprimé le facteur commun $\frac{\varpi}{\cos\alpha}$,

$$z_g z_c \omega = \int z^2 d\omega$$

La variable z peut toujours être exprimée en fonction de z_g par la relation déjà employée :

$$z = z_g + y\cos\alpha$$

ce qui donne

$$z_g z_c \omega = \int (z_g + y\cos\alpha)^2 d\omega = z_g^2 \omega + I\cos^2\alpha$$

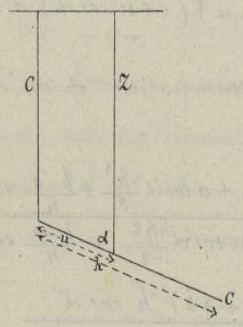
en supprimant le terme $\int 2 z_g y \cos\alpha\, d\omega$, qui est nécessairement nul et en désignant par I le moment d'inertie de toute la surface ω

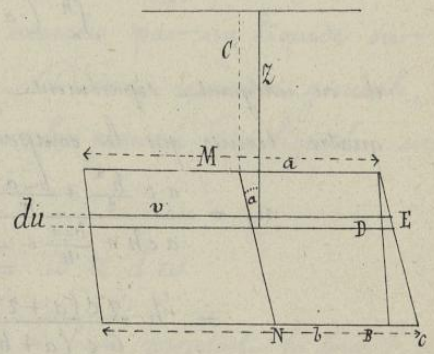
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par rapport à un axe parallèle à AB et passant par le centre de gravité, ce qui donne enfin :

$$z_c = z_g + \frac{I \cos^2 \alpha}{z_g \omega}, \text{ d'où } z_c > z_g$$

35. — Centre de pression d'un trapèze à bases horizontales. Comme exemple de la recherche du centre de pression, nous déterminerons celui d'un trapèze dont les bases sont horizontales et dont le plan fait un angle α avec la verticale.





Chaque tranche parallèle aux bases supportera une pression mesurée par le produit de la hauteur z de cette tranche au-dessous du niveau du liquide et de sa surface $v\,du$; le moment de cette pression par rapport à la base supérieure du trapèze s'obtiendra en multipliant ce produit par u.

$$v\,du \times z \times u$$

La somme de toutes les pressions analogues est :

$$\int v\,du \times z,$$

et si u_1 est l'ordonnée du centre de pression, elle sera définie par la relation :

$$u_1 \int_o^h v\,du\,xz = \int_o^h v\,du\,xz\,xu.$$

h étant la hauteur du trapèze,

d'où :
$$u_1 = \frac{\int_o^h v\,z\,u\,du}{\int_o^h v\,z\,du}$$

expression qui ne pourra être calculée qu'après que les variables v et z auront été exprimées en fonction des éléments connus du trapèze.

Si l'on désigne par c la distance verticale du niveau du liquide à la base

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

supérieure du trapèze, on voit de suite que,

$$z = c + u\cos\alpha$$

D'un autre côté, les triangles semblables ADE, ABC donnent la relation :

$$\frac{v-a}{b-a} = \frac{u}{h} \quad \text{d'où} \quad v = a + \frac{b-a}{h}u$$

en substituant ces deux valeurs de v et de z, on trouve :

$$u_1 = \frac{\int_0^h \left(a + \frac{b-a}{h}u\right)(c + u\cos\alpha)\, u\, du}{\int_0^h \left(a + \frac{b-a}{h}u\right)(c + u\cos\alpha)\, du}$$

et en intégrant séparément, au numérateur et au dénominateur, les quatre termes qui les composent :

$$u_1 = \frac{a\,c\,\frac{h^2}{2} + \frac{b-a}{h}\,c\,\frac{h^3}{3} + a\cos\alpha\,\frac{h^3}{3} + \frac{b-a}{h}\cos\alpha\,\frac{h^4}{4}}{a\,c\,h + \frac{b-a}{h}\,c\,\frac{h^2}{2} + a\cos\alpha\,\frac{h^2}{2} + \frac{b-a}{h}\cos\alpha\,\frac{h^3}{3}}$$

$$= h\,\frac{2c(a+2b) + (a+3b)\,h\cos\alpha}{6c(a+b) + (a+2b)\,2h\cos\alpha}.$$

Cette valeur de l'ordonnée du centre de pression est indépendante de c quand $\alpha = 90$, c'est-à-dire, quand le plan du trapèze est horizontal ;

dans ce cas ; $u_1 = h\,\frac{a+2b}{3(a+b)}$,

z est alors constant et le centre de pression se confond avec le centre de gravité du trapèze.

Elle est indépendante de α lorsque $c = 0$, c'est-à-dire quand la base supérieure du trapèze est dans le plan du niveau du liquide :

$$u_1 = h\,\frac{a+3b}{2(a+2b)}$$

Pour $a = b$, le trapèze devient un parallélogramme et la formule donne :

$$u_1 = h\,\frac{6ac + 4ah\cos\alpha}{12ac + 6ah\cos\alpha} = h\,\frac{3c + 4h\cos\alpha}{6c + 3h\cos\alpha};$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à titre de vérification cette valeur revient à :

$$u = \frac{1}{2} h$$

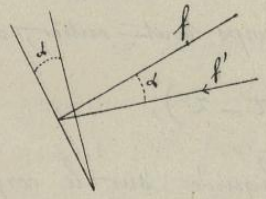
si on fait : $\alpha = 0$

Enfin, dans le cas où le trapèze serait vertical, on trouverait, en faisant $\alpha = 0$,

$$u_1 = h \frac{2c(a+2b)+(a+3b)h}{6c(a+b)+(a+2b)2h}$$

36. — Pressions exercées par un liquide sur une paroi de forme quelconque. D'une manière générale, l'effort f exercé normalement par la poussée du liquide sur un élément $d\omega$ est :

$$F = \varpi z \, d\omega$$



et, si l'on projetait la force f en f' sur une direction différente, faisant un angle α avec la première, cette composante f' de la poussée serait :

$$f' = f \cos\alpha = \varpi z \, d\omega \cos\alpha = \varpi z \times d\omega \cos\alpha$$

La composante de la pression, dans une direction quelconque, est égale au produit de la charge par la projection de l'élément $d\omega$ sur un plan perpendiculaire à cette direction.

Il résulte immédiatement de là que, dans un liquide pesant, la charge étant constante pour tous les éléments compris dans une même tranche horizontale, infiniment mince, toutes les pressions exercées sur les parois par cette tranche, s'équilibrent dans le sens horizontal.

37. — Principe d'Archimède. Lors qu'un corps est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

plongé, en tout ou en partie, dans un liquide, il est soumis de la part de ce liquide à des pressions sur toute l'étendue de la paroi par laquelle il est en contact avec lui.

Les composantes horizontales des poussées sur la paroi d'une tranche horizontale s'annulent parce que la pression est la même sur tous les éléments de cette paroi, mais il n'en est pas de même des poussées verticales.

Chacun des prismes verticaux de section droite $d\omega$ en lesquels on peut, par la pensée décomposer le solide, est soumis de bas en haut à une poussée $(\varpi z' d\omega)$, z' étant la hauteur de l'élément $d\omega$ qui en forme la base inférieure, et, en sens contraire, d'une poussée $\varpi z d\omega$, qui dépend de la profondeur z de sa base supérieure au-dessous du niveau du liquide.

La résultante verticale de ces deux poussées est $\varpi d\omega (z'-z)$ en ce qui concerne ce prisme élémentaire, et la poussée totale, exercée de bas en haut, pour le corps tout entier, sera:

$$\varpi \int d\omega (z'-z),$$

c'est-à-dire que la poussée du liquide sur le corps plongé est égale au poids du liquide déplacé. Il en sera de même pour tout l'ensemble des prismes élémentaires, c'est-à-dire tout le volume immergé et c'est en cela que consiste le principe d'Archimède; il en résulte immédiatement que le point d'application de la résultante verticale est au centre de gravité du liquide déplacé.

Pour tous les prismes élémentaires qui émergent du liquide:

$$z = 0$$

et le corps peut alors rester flottant sur le liquide si les forces qui le sollicitent dans les deux sens de la direction verticale sont en équilibre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

38. ___ Équilibre des corps flottants. Ces forces qui sollicitent un corps ainsi émergé partiellement sont seulement au nombre de deux: son poids, force verticale appliquée à son centre de gravité; la poussée du liquide, force verticale, de sens contraire, appliquée au centre de gravité du volume déplacé.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut nécessairement que ces deux forces soient égales et de sens contraires, et que les deux centres de gravité soient sur la direction commune de ces deux forces égales.

Si le solide flottant est homogène son poids sera égal au produit de son volume V par son poids spécifique δ; si le liquide est homogène, le poids du volume déplacé sera $v\,\varpi$ en désignant par v ce volume et par ϖ le poids spécifique du liquide.

La première condition d'équilibre revient alors à:

$$v\,\varpi = V\,\delta$$

d'où:

$$\frac{v}{V} = \frac{\delta}{\varpi} = r$$

ce rapport r des deux volumes étant plus petit que 1, puisque si une partie du volume émerge, v est plus petit que V; il faut en même temps que δ soit plus petit que ϖ, d'où $r < 1$.

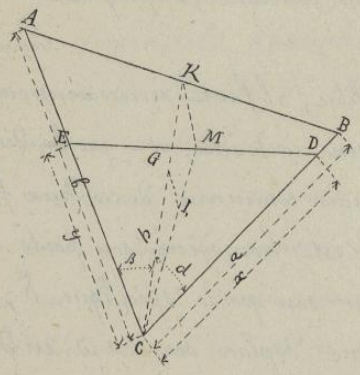
39. ___ Équilibre d'un prisme flottant. Comme application, nous rechercherons les conditions d'équilibre d'un prisme triangulaire, homogène, dont les arêtes latérales se maintiendraient horizontales, ou, ce qui revient au même, les conditions d'équilibre d'une section droite de ce prisme.

Soit A, B, C, cette section, dès lors que ce triangle se maintient verticalement dans le liquide, dans la situation d'un corps flottant, un seul de ses sommets ou deux d'entr'eux seront immergés. Considérons d'abord le cas d'un seul sommet C immergé.

La ligne de flottaison DE sera horizontale; le centre de gravité G,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du triangle ABC, sera aux deux tiers de la médiane CK, ou h, à partir du sommet C; le centre de gravité L du triangle immergé CDE sera également aux deux tiers de la médiane CM à partir du même sommet C; de plus GL est une verticale, puisqu'il y a, par hypothèse équilibre, et par suite aussi KM, qui est parallèle à GL par construction; on conclut de là que le point K est également distant des points D et F.



En vertu de la dernière observation du précédent paragraphe, on doit avoir pour l'équilibre:

$$\frac{DCE}{ACB} = r$$

r étant plus petit que 1, et en remplaçant les surfaces des deux triangles par leurs valeurs en fonction des côtés qui comprennent, dans chacun d'eux, l'angle C,

$$r = \frac{\frac{1}{2}\, x\, y \sin C}{\frac{1}{2}\, a\, b \sin C} = \frac{x\, y}{a\, b}$$

Pour éliminer l'une des variables x et y, il faudrait trouver une autre relation entr'elles; à cet effet on fera remarquer que $DK = KE$, ce qui donne:

$$DK^2 = x^2 + h^2 - 2hx \cos\alpha$$
$$EK^2 = y^2 + h^2 - 2hy \cos\beta$$

et revient à:

$$x^2 - 2hx\cos\alpha = y^2 - 2hy\cos\beta$$

ou, en mettant pour y sa valeur, tirée de la précédente équation, $y = \frac{r\,a\,b}{x}$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$x^2 - 2hx\cos\alpha = \frac{r^2a^2b^2}{x^2} - \frac{2hrab}{x}\cos\beta.$$

et en ordonnant,

$$x^4 - 2hx^3\cos\alpha + 2hrabx\cos\beta - r^2a^2b^2 = 0.$$

$\cos\alpha$ et $\cos\beta$ étant nécessairement positifs cette équation peut admettre quatre racines réelles dont trois positives et une au moins négative. Il y a donc, à ce point de vue, jusqu'à trois solutions possibles, correspondant à l'immersion de sommet C, x devant d'ailleurs être toujours plus petit que a pour satisfaire aux conditions du problème, et par conséquent un maximum de 9 solutions pour le cas d'immersion de l'un ou l'autre des trois sommets isolément.

On arriverait au même maximum de 9 autres solutions possibles pour le cas d'immersion simultanée de deux des sommets, en remplaçant r par $1-r$ dans les équations primitives.

Triangle isocèle. Si le triangle est isocèle par rapport à l'angle C, c K est perpendiculaire sur AB, d'où :

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}\ ;\quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}}{a}\ ;\quad h\cos\alpha = \frac{4a^2 - c^2}{4a}\ ;$$

d'ailleurs $a = b$, $\alpha = \beta$, $xy = ra^2$;
l'équation en x^2 et y^2 devient alors :

$$x^2 - y^2 = 2h\cos\alpha\,(x - y)$$

et se trouve satisfaite par $x = y$; cette première solution donne :

$$x = y = a\sqrt{r},$$

et cette valeur répond bien au problème, puisque r étant plus petit que l'unité, $x = y$ est plus petit que a. Cette solution répond au cas où la base immergée se tiendrait horizontale.

En divisant par $x - y$ pour isoler cette première solution, l'équation se réduit à :

$$x + y = 2h\cos\alpha = \frac{4a^2 - c^2}{2a}$$

Si l'on rapproche cette relation de :

$$xy = ra^2,$$

on voit que les valeurs de x et de y seraient simultanément les racines

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

De l'équation :

$$u^2 - \frac{4a^2 - c^2}{2a} u + r a^2 = 0$$

racines qui sont :

$$u = \frac{1}{4a}\left[(4a^2 - c^2) \pm \sqrt{(4a^2 - c^2)^2 - 16 r a^4}\right]$$

La 3e solution correspond, pour x et y, à ces racines intervertis.

Pour que ces valeurs soient réelles, il faut que :

$$(4a^2 - c^2)^2 > 16 r a^4 ; \quad 4a^2 - c^2 > 4a^2 \sqrt{r} ;$$

$$c^2 < 4a^2 (1 - \sqrt{r}) ; \quad c < 2a\sqrt{1 - \sqrt{r}}.$$

Pour qu'elles soient plus petites que a, il faut que :

$$a > \frac{1}{4a}\left[(4a^2 - c^2) + \sqrt{(4a^2 - c^2)^2 - 16 r a^4}\right]$$

$$c^2 > \sqrt{(4a^2 - c^2)^2 - 16 r a^4} ;$$

$$c^4 > 16 a^4 - 8 a^2 c^2 + c^4 - 16 r a^4 ;$$

$$8 a^2 c^2 > 16 a^4 (1 - r)$$

$$c^2 > 2a^2 (1 - r) \text{ et enfin } c > a\sqrt{2(1 - r)}$$

Triangle équilatéral. On a en plus $c = a$ et la première solution $x = y = a\sqrt{r}$, qui correspond à la position horizontale du côté émergé, étant isolée, les deux autres se trouvent toutes calculées, en remplaçant c par a dans les valeurs de u.

$$u = \frac{1}{4a}\left[3a^2 \pm \sqrt{9a^4 - 16 r a^4}\right] = \frac{a}{4}\left[3 \pm \sqrt{9 - 16 r}\right].$$

Le double signe appliqué successivement à x et y, fournit les deux autres solutions.

La condition de réalité se réduit à $9 > 16 r$ ou $r < \frac{9}{16}$.

La condition relative à la limite de la valeur de l'inconnue se simplifie aussi de la manière suivante :

$$a > \frac{a}{4}\left[3 + \sqrt{9 - 16 r}\right] ;$$

$$\frac{1}{4} a \left(1 - \sqrt{9 - 16 r}\right) > 0 \text{ et comme } a \text{ est positif,}$$

$$1 > 9 - 16 r ; \quad r > \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{8}{16}$$

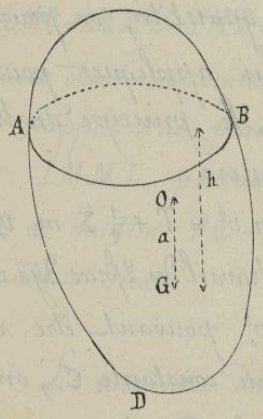
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour que toutes les solutions positives répondissent au problème, il faudrait donc que le rapport ε fut compris entre $\frac{8}{16}$ et $\frac{9}{16}$.

40. Observation sur la Stabilité de l'équilibre des corps flottants.

On démontre que lorsque le centre de gravité des corps flottants est au-dessus du centre de pression du volume déplacé, il faut que la distance a entre ces deux points soit plus petite que le rapport, au volume immergé, du moment d'inertie minimum de la surface de flottaison, pris par rapport aux différents axes menés par le centre de gravité de cette surface, soit : $a < \frac{\text{minimum de } I}{V}$. La démonstration de ce principe est indiquée au N°. 41, sans tenir compte toutefois de la modification que l'état du mouvement d'oscillation peut entraîner dans les pressions. Cette règle, basée ainsi sur une hypothèse non justifiée, est en réalité complètement vérifiée par l'expérience.

41. Condition de stabilité.

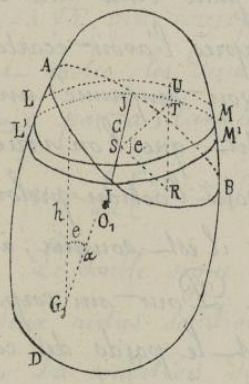


Un corps est placé dans une situation stable lorsque, après l'avoir écarté de sa position et lui avoir imprimé un mouvement aussi petit que l'on voudra, il revient ensuite, sous l'action prolongée des forces auxquelles il est soumis, à cette position primitive. Pour un corps plongé, ces forces sont le poids du corps, toujours appliqué à son centre de gravité, et la poussée du liquide, appliquée à chaque instant au centre de gravité du volume déplacé. Le poids du corps est constant, le poids du liquide déplacé est également constant et de même valeur, mais les deux centres de gravité changent de position pendant toute

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la durée des oscillations qui tendent à ramener le corps à sa position primitive ; pour déterminer la condition de stabilité de l'équilibre, il faut s'assurer que ce retour aura réellement lieu, et que le corps ne s'en est pas écarté pour n'y plus revenir.

Le corps était originairement, puisqu'il y avait équilibre, dans une position telle que les deux centres de gravité G du corps et O du liquide déplacé se trouvaient sur une même verticale OG ; nous écartons la ligne OG en O_0G_0, d'un angle θ_0, à partir de la verticale, et nous imprimons au mobile une petite vitesse qui sera connue, pour tous les points, si nous désignons par v_0 celle d'un élément quelconque, dans sa nouvelle position ; h_0 sera en même temps la hauteur du centre de gravité G_0 au-dessous de la surface du liquide dont l'horizontalité n'est pas troublée.



Le mobile s'étant déplacé d'une certaine quantité, on pourra toujours lui appliquer pour ce déplacement, le principe du travail, ce qui donnera :

$$\frac{1}{2}\Sigma m v^2 = T + \frac{1}{2}\Sigma m v_0^2,$$

T étant le travail des 2forces déjà considéréés ; $\frac{1}{2}\Sigma m v_0^2$ pouvant être regardé, comme une constante C, on écrira

$$\frac{1}{2}\Sigma m v^2 = T + C$$

Au moment où v_0 est devenu v_1, h_0 est devenu h_1, et le travail du poids $P = \rho g V$ est exprimé par :

$$\rho g V (h_1 - h_0) = \rho g V h_1 + C',$$

C' étant une nouvelle constante.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le travail de la poussée est $-\int g \Sigma\, dV \times Z + C''$
en désignant par V le volume du liquide déplacé, dans une position quelconque du mobile, par Z_1, l'ordonnée de chacun des éléments qui composent ce volume V et par C'' une nouvelle constante qui représente la valeur de $\int g \Sigma\, dv \times z_0$ dans la première position.

On a ainsi $\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = \int g V h_1 - \int g \Sigma\, dV \times Z_1 + C$ en confondant dans la seule constante C, toutes les constantes indiquées précédemment.

La détermination de $\Sigma\, dV \times Z_1$ demande quelqu'attention, mais on l'obtient assez facilement en remarquant que la signification géométrique de l'intégrale n'est autre chose que le moment du volume LMD pris par rapport au plan LM.

Si par le centre de gravité C de la première section de flottaison AB, nous menons un plan $L'M'$ parallèle au nouveau plan de flottaison LM, et, dans ce plan $L'M'$, l'horizontale IJ, commune aux deux plans, le volume LMD, compté à partir du plan de flottaison LM, donne lieu aux évaluations suivantes:

$$LMD = LMM'L' + L'M'D = LMM'L' + ABD + BM'IJ - AL'JL.$$

et nous chercherons successivement les moments de chacun des ces volumes par rapport au plan LM.

$LMM'L$, pouvant être considéré comme un cylindre de section b et de hauteur $Tu = l$, lorsque le déplacement reste très-petit, son moment sera:

$$-bl \times \frac{1}{2} l = \frac{1}{2} b l^2.$$

Le moment du volume $ABD = V$ est évidemment égal à $V(h_1 - a\cos\theta)$, en désignant par a la distance GO, ou à $V\left(h_1 - a + \frac{1}{2} a\theta^2\right)$ en développant le cosinus suivant les puissances croissantes de l'angle θ.

Pour calculer le moment du volume $BM'IJ$, nous considérons d'abord la hauteur RT d'une verticale comprise entre les deux plans qui limitent ce volume, et nous chercherons le moment d'un petit prisme, de base $d\omega$, située dans la section AB et qui aurait cette hauteur.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La section droite de ce prisme étant $d\omega \cos\theta$, $RT\, d\omega \cos\theta \left(l+\frac{1}{2} RT\right)$ sera son moment, et si nous désignons par y la distance SR de la verticale RT, rapportée à l'axe IJ, son expression pourra être transformée de la manière suivante :

$$RT\, d\omega \left(l+\tfrac{1}{2} RT\right)\cos\theta = y \sin\theta\, d\omega \left(l+\tfrac{1}{2} y\theta\right) = \theta l x y\, d\omega + \tfrac{1}{2}\theta^2 x y^2\, d\omega$$

On a remplacé dans cette formule sinus θ par θ et cos. θ par l'unité, par suite de la petitesse de l'angle θ auquel on peut attribuer une valeur aussi petite que l'on voudra.

Le moment total de tous les prismes élémentaires qui composent le volume $M'BJI$ sera donc : $\theta l \Sigma y\, d\omega + \frac{1}{2}\theta^2 \Sigma y^2\, d\omega$.

On trouverait de même pour le volume $AL'JI$, $\theta l \Sigma y'\, d\omega' \frac{1}{2}\theta^2 \Sigma y'^2\, d\omega'$, et pour la différence des deux volumes :

$$\theta l \Sigma (y\, d\omega - y'\, d\omega') + \tfrac{1}{2}\theta \Sigma (y^2 d\omega - y^2\, d\omega')$$

La première parenthèse a une valeur nulle, $y\, d\omega - y' d\omega'$ étant la somme des moments de tous les éléments de la surface AB par rapport à un axe qui passe par son centre de gravité ; $\Sigma (y^2 d\omega - y'^2 d\omega')$ est le moment d'inertie de cette surface, pris par rapport au même axe, de sorte que l'on peut écrire au lieu de l'expression précédente, le seul terme $\frac{1}{2}\theta^2 I$.

En reportant les valeurs des moments des différents volumes dans l'expression primitive, on trouve enfin :

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 = \int g V h_1 - \tfrac{1}{2}\int g b l^2 - \int g V (h_1 - a + \tfrac{1}{2} a\theta^2) - \tfrac{1}{2}\int g \theta^2 I + C =$$
$$= -\tfrac{1}{2}\int g b l^2 - \tfrac{1}{2}\int g \theta^2 (Va + I) + C'.$$

et la valeur de C' serait ensuite obtenue en substituant, dans cette expression, les valeurs de toutes les variables, à l'origine du mouvement ;

d'où : $C' = \frac{1}{2}\Sigma m v_0^2 + \frac{1}{2}\int g b l_0^2 + \frac{1}{2}\int g \theta_0^2 (Va + I_0)$

Il suffira de discuter l'équation précédente pour trouver les véritables conditions d'équilibre.

1° $a > 0$: Le corps flottant ne viendra pas se placer définitivement dans une position $O'G'$ différente de la position primitive, car il faudrait pour cela, (C' et v_0 pouvant être par hypothèse plus

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

petits que toute quantité donnée) que $\frac{1}{2}\Sigma m v^2$ fut négatif, ce qui est impossible, puisque cette expression représente la puissance vive emmagasinée dans un corps en mouvement. Le mobile reviendra donc dans la position OG; il était dans une position d'équilibre stable toutes les fois que a était positif ou, en d'autres termes, toutes les fois que son centre de gravité se trouvait situé au-dessous de celui du volume d'eau déplacé.

2°. $a < o$. Il en sera encore de même si $Va + I$ reste également positif, ce qui exige que, en considérant seulement la valeur absolue de a, on ait $a < \frac{I}{V}$ comme il a été indiqué précédemment.

Entre toutes les conditions de même forme, correspondant à différentes horizontales du plan primitif AB de flottaison, la plus limitative se rapportera à la plus petite valeur possible de I, ce qui donne pour condition finale, a $\frac{\text{minimum de } I}{V}$

Ecoulement des liquides.

42. — Considérations générales. On considère presque toujours les mouvements des fluides à l'état de régime permanent, c'est-à-dire dans des conditions telles que, sur le même point de l'espace, la direction et le sens de la vitesse, la pression et la densité des éléments fluides qui y passent successivement, ne subissent, d'un instant à l'autre, aucune modification.

Lorsqu'un phénomène de mouvement commence, il n'en est pas ainsi, mais la période de mise en action n'est pas en général celle qui intéresse les applications, où l'on a plus particulièrement en vue de produire, d'une manière continue, un effet déterminé. Quand le régime permanent est établi, on appelle filet fluide, la suite des molécules qui passent ou qui ont passé successivement par un point déterminé.

On traitera successivement dans cette partie de l'hydraulique, de la répartition des pressions dans un liquide en mouvement et de son

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

écoulement par un orifice ; du mouvement des liquides dans les tuyaux de conduite, ou dans les canaux découverts ; des actions mutuelles des solides et des liquides, des récepteurs hydrauliques, et des machines élévatoires.

Les gaz seront ensuite examinés, aux mêmes points de vue, mais dans leurs applications les plus essentielles seulement.

43. Pressions dans une masse fluide en mouvement.

L'élément M M', que nous avons considéré pour l'étude des conditions d'équilibre, doit satisfaire d'après le principe de Dalembert aux conditions générales de l'équilibre, même lorsqu'il est en mouvement, mais à la condition de faire entrer dans l'expression de ces conditions d'équilibre les forces d'inertie qui sont relatives aux variations de ce mouvement ; et dont nous pouvons désigner, pour l'unité de masse, la force d'inertie par J et les composantes parallèles aux axes par $-J_x$, $-J_y$, $-J_z$, de telle sorte que l'équation différentielle de la pression deviendra, avec une complète généralité :

$$dp = \rho (x - J_x)\, dx + \rho (y - J_y)\, dy + \rho (z - J_z)\, dz .$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que la pression p, en un point quelconque d'une masse en mouvement, peut être déterminée dans les cas les plus importants de l'écoulement des liquides, que nous examinerons successivement.

1°. Si en amont et en aval d'une section donnée, le mouvement de chaque filet est resté uniforme, et si l'on ne tient pas compte des frottements qui pourraient être mis en jeu, il n'y a aucune force d'inertie à considérer puisqu'il n'y a pas d'accélération ; J_x, J_y, J_z sont donc nuls séparément et la formule primitive $dp = \rho X\, dx + \rho Y\, dy + \rho Z\, dz$ est encore applicable ; la répartition des pressions répond alors à celle que nous avons indiquée dans le cas de l'équilibre, ce que l'on énonce en disant que ces pressions sont réparties suivant la loi hydrostatique.

2°. Si les mouvements restaient très-lents sans être uniformes, on pourrait appliquer la même loi, mais par approximation seulement, et lorsque les composantes des accélérations paraîtraient négligeables.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3°. Lorsque les filets liquides se meuvent comme s'ils étaient libres les composantes de la force d'inertie sont respectivement égales et contraires aux composantes des forces extérieures:

$$X - J_x = 0 \; ; \quad Y - J_y = 0 \; ; \quad Z - J_z = 0.$$

On a alors $dp = 0$; la pression est la même dans toute la section.

4°. Si tous les mouvements sont rectilignes, et tels que les filets traversent normalement la section considérée, on peut choisir pour axe des z, la direction même de ces filets, ce qui est exprimé par:

$$J_x = 0 \; ; \; J_y = 0 \; ; \; J_z = J$$

L'expression différentielle de la pression devient alors,

$$dp = \int X\,dx + \int Y\,dy + \int (Z - J)\,dz$$

et si l'on se borne à l'examen des pressions dans la section normale elle même, pour tous les points de laquelle:

$$dz = 0,$$

elle se réduit à:

$$dp = \int X\,dx + \int Y\,dy,$$

formule qui exprime encore que la pression se répartit dans toute l'étendue de la section suivant la loi hydrostatique.

Il en serait encore de même si l'on avait à tenir compte, entre les filets voisins, d'un frottement longitudinal f, dont les composantes seraient $f_x = 0$, $f_y = 0$ et f_z ;

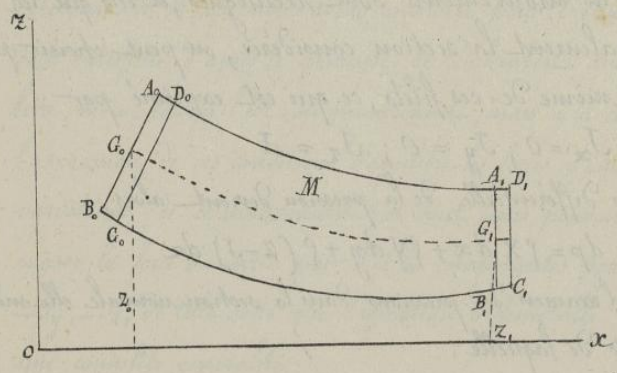
Cette nouvelle force f_z disparaîtrait comme la force J dans l'équation générale, puisque $dz = 0$

On comprend dès à présent, toute l'importance de ces conclusions fondamentales, auxquelles nous aurons à nous référer dans un grand nombre de circonstances ; elles servent pour ainsi dire de base à toutes les applications de l'hydrodynamique.

44 – Théorème de Bernoulli. – Il en est de même du théorème de Daniel Bernoulli dont nous avons à nous occuper maintenant.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Soit $A_0 B_0 A_1 B_1$, un faisceau de filets parallèles, se déplaçant tous avec la même vitesse et de manière que chaque tranche successive telle que $A_0 B_0 C_0 D_0$ reste toujours, dans son déplacement, une tranche normale à l'axe $G_0 G_1$ formé par les centres de gravité successifs des différentes tranches du faisceau, on veut déterminer, dans le cas du mouvement permanent, la vitesse commune V_1 en $A_1 B_1$ en partant de la vitesse commune V_0 en $A_0 B_0$.



Par mouvement permanent, nous entendrons, ainsi que nous l'avons dit déjà, qu'en un point M déterminé, mais quelconque, de la figure $A_0 B_0 A_1 B_1$ la vitesse ne varie pas avec le temps, dans la succession des tranches qui y passent, non plus que la direction de cette vitesse.

On rapporte toutes les hauteurs à deux axes de coordonnées, ox et oz; z_0 z_1, sont les hauteurs des points G_0, G_1, d'un même filet au-dessus de l'axe ox de comparaison; p_0, p_1 les pressions en ces mêmes points.

Nous appliquerons à la tranche élémentaire $A_0 B_0 C_0 D_0$, qui devient après son déplacement $A_1 B_1 C_1 D_1$, le principe des puissances vives. En désignant par m la masse de cette tranche, la variation de puissance vive sera:

$$\frac{m V_1^2}{2} - \frac{m V_0^2}{2} = \Sigma Tf,$$ en exprimant par ΣTf la somme des travaux de toutes les forces qui peuvent agir sur le liquide.

Il n'y a pas lieu de considérer, dans la masse liquide, les positions intermédiaires, puisqu'en chacune de ces positions, chaque tranche est successivement remplacée par une tranche de même masse et de même vitesse, et que par conséquent cette partie intermédiaire conserve toujours la même puissance vive.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Enumérons maintenant les forces dont le travail doit être inscrit dans le second membre de l'équation.

1° Poids du liquide : Ce poids mg est descendu d'une hauteur $z_0 - z_1$; son travail est donc :

$$mg\,(z_0 - z_1)$$

et, il n'y a pas lieu non plus de considérer les masses intermédiaires, chaque tranche étant successivement remplacée, dans tout l'intervalle $G_0 G_1$ par une tranche de même masse.

2° Pressions normales sur les faces latérales du faisceau ; les forces qui en résultent s'équilibrent et ne produisent d'ailleurs aucun travail, puisque tous les déplacements ont eu lieu perpendiculairement à ces pressions.

3° Pression sur la face d'amont, d'aire Ω_0 ; son travail est :

$$p_0 \Omega_0 \times V_0 \theta,$$

pour un déplacement infiniment petit $V_0 \theta$; l'on doit immédiatement remarquer que $\Omega_0 V_0$ est le volume de la tranche dont nous avons représenté la masse par m, ce qui donne :

$$\frac{\Omega_0 V_0 \theta \times \varpi}{g} = m \quad \text{et} \quad \Omega_0 V_0 \theta = \frac{mg}{\varpi}$$

Le travail de la pression p_0 est en définitive exprimé par :

$$p_0 \times \frac{mg}{\varpi}$$

4° Pression sur la face d'aval ; cette pression est p_1 par unité de surface, et en y adaptant le résultat précédent, on trouve pour l'expression de son travail :

$$-p_1 \times \frac{mg}{\varpi}$$

qu'il faudra introduire, comme valeur négative, dans l'équation générale des forces vives.

En y portant les expressions des travaux de toutes les forces, cette équation devient :

$$\frac{m V_1^2}{2} - \frac{m V_0^2}{2} = mg\,(z_0 - z_1) + (p_0 - p_1)\frac{mg}{\varpi}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et en divisant tous les termes par mg:

$$\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z_0 - z_1 + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}$$

Cette relation est celle du théorème de Bernoulli; pour l'énoncer nous remarquerons que $z_0 - z_1$ est une différence de hauteur, que $\frac{p_0}{\varpi}$ et $\frac{p_1}{\varpi}$, sont les hauteurs d'eau qui produiraient respectivement les pressions p_0 et p_1, et qu'enfin, les termes $\frac{V_0^2}{2g}$, $\frac{V_1^2}{2g}$ peuvent être aussi considérés comme les hauteurs auxquelles les vitesses V_0 et V_1 seraient respectivement dues.

L'équation se traduit dès lors, ainsi qu'il suit:

Dans le mouvement de la tranche liquide que nous avons considérée, l'accroissement de hauteur dû à l'accroissement des vitesses entre deux sections est égale à la différence de charge $(z_0 - z_1)$, augmentée de la différence des hauteurs dues aux pressions.

45. Deuxième forme du théorème de Bernoulli. - On désigne sous le nom de piézomètre un tube dont les deux extrémités se trouveraient respectivement, l'une en un point déterminé d'une masse liquide, l'autre dans le vide; la hauteur à laquelle s'élèverait le liquide dans un pareil tube est dite la hauteur piézométrique et est précisément égale, pour une pression p par unité de surface, au bas du tube, à $\frac{p}{\varpi}$.

L'énoncé du théorème de Bernoulli peut, d'après cette définition, être mis sous une forme encore plus simple.

L'accroissement de hauteur dû à la différence des vitesses en deux sections quelconques est égal à la différence de charge entre ces deux sections, augmentée de la différence piézométrique, ou encore à la charge totale entre les deux sections. On comprend alors, dans cette charge totale, la différence des hauteurs piézométriques.

46. — Ecoulement permanent par un orifice en mince paroi. - Le théorème de Bernoulli permet de déterminer

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

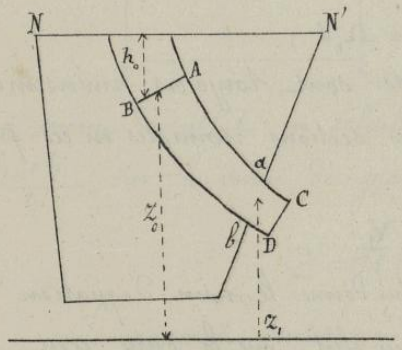
la vitesse d'écoulement d'un liquide dans le cas du mouvement permanent et d'un orifice en mince paroi.

Pour que le mouvement soit permanent, il faut que les causes qui déterminent ce mouvement restent identiques ; la charge qui le produit doit donc être constante et la hauteur d'eau, qui la mesure, invariable.

En d'autres termes, le niveau du liquide dans la vase doit rester le même ; on dit alors que l'écoulement a lieu à niveau constant.

Par la désignation d'orifice en mince paroi, on entend que l'épaisseur de la paroi, au pourtour de l'orifice, est assez faible pour que le liquide n'y contracte aucune adhérence et qu'au delà d'une certaine distance, à partir de l'orifice, tous les filets liquides se meuvent comme s'ils étaient isolés.

Dans ces conditions, on doit appliquer à chaque faisceau AB ab de filets sensiblement parallèles, le théorème de Bernoulli, ce qui donne pour la vitesse en ab, et en négligeant la vitesse V_0 en AB, qui est sensiblement nulle, si le vase a une section très-grande par rapport à la section Ω de l'orifice,



$$\frac{V^2}{2g} = (z_0 - z_1) + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}$$

En AB, les vitesses sont très-faibles, de sorte qu'on peut appliquer à la détermination de la pression p_0 la loi hydrostatique :

$$\frac{p_0}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + h_0 ,$$

$\frac{p_a}{\varpi}$ étant la hauteur due à la pression atmosphérique et h_0 la hauteur d'un point quelconque de AB au dessous du niveau invariable NN' du liquide dans la vase.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En CD les filets tombant librement, par hypothèse, la pression ne présente pas de variation d'un point par rapport à un autre point de la section ; la pression p_1 est donc celle du milieu dans lequel se fait l'écoulement.

On trouve alors :

$$\frac{V^2}{2g} = (z_0 - z_1) + \frac{p_a}{\varpi} + h_0 - \frac{p_1}{\varpi} = H + \frac{p_a}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi},$$

Si l'on fait $H = z_0 - z_1 + h_0$, égal à la charge d'eau sur la section finale CD à la sortie.

On tire de là $V = \sqrt{2g\left(H + \frac{p_a}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}\right)}$

et pour le cas où l'écoulement se fait à l'air libre, p_1 étant égal à p_a :

$$V = \sqrt{2gH}$$

47 – Equation de continuité. – Dans toutes les questions d'écoulement permanent d'une veine liquide, le volume débité étant constant pour chaque section, et étant représenté, à chaque seconde, par :

$$Q = \Omega V = \Omega_1 V_1,$$

les vitesses en différents points sont toujours inversement proportionnelles aux aires des sections normales en ces points, ainsi que l'indique la formule :

$$\frac{\Omega}{\Omega_1} = \frac{V_1}{V}$$

Cette relation à laquelle on donne le nom d'équation de continuité, parce qu'elle indique, en effet, que la veine n'est point interrompue, permet d'exprimer toutes les vitesses en fonction de l'une quelconque d'entr'elles.

48 – Calcul du Débit. – Le débit Q par seconde étant donné par le produit de la section Ω

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

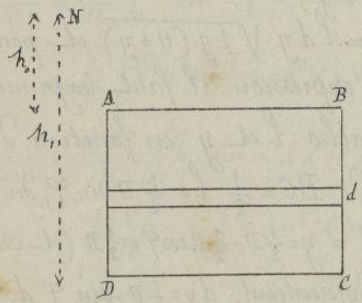
de l'orifice et de la vitesse $V = \sqrt{2gH}$, on devrait avoir :

$$Q = \Omega \sqrt{2gH}$$

mais ce résultat n'est pas confirmé par l'expérience et il y aura lieu de rechercher si la cause de cette différence, provient d'une fausse évaluation de la vitesse V ou de la section Ω.

49. — Application à un orifice rectangulaire de grandes dimensions. — Pour déterminer théoriquement le débit par l'orifice rectangulaire A B C D, il faut nécessairement le décomposer en tranches infinitésimales, de hauteur dh, pour chacune desquelles le débit dQ serait exprimé par

$dQ = b\,dh\,\sqrt{2gh}$, et en intégrant depuis h_0 jusqu'à h_1,



$$Q = \frac{2}{3}\, l\, \sqrt{2g}\, \left(h_1^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}}\right)$$

Mais il est facile de voir que, dans les limites ordinaires de la hauteur des orifices, on arriverait sensiblement au même résultat en calculant le débit d'après la seule charge $\frac{h_0 + h_1}{2}$ sur le centre de gravité de l'orifice ; on obtiendrait ainsi :

$$Q' = l\,(h_1 - h_0)\,\sqrt{2g\left(\frac{h_0 + h_1}{2}\right)}$$

Le rapport entre ces deux évaluations

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{\frac{2}{3}\left(h_1^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}}\right)}{(h_1 - h_0)\left(\frac{h_0 + h_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\, \frac{1 - \frac{h_0}{h_1}\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}}{\left(1 - \frac{h_0}{h_1}\right)\sqrt{1 + \frac{h_0}{h_1}}}$$

montre qu'il ne dépend absolument que de $\frac{h_0}{h_1}$.

On a réuni dans le tableau suivant les valeurs calculées de $\frac{Q}{Q'}$ pour plusieurs valeurs de $\frac{h_0}{h_1}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

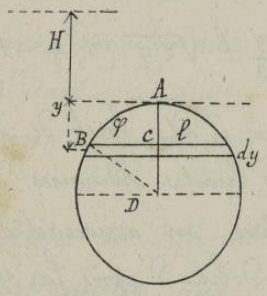
$\frac{h_0}{h_1} = 0 ;\quad 0,1 ;\quad 0,2 ;\quad 0,3 ;\quad 0,05 ;\quad 0,8 ;\quad 1,00$

$\frac{Q}{Q'} = 0,943 ; 0,967 ; 0,979 ; 0,987 ;\quad 0,995 ; 0,999 ;\quad 1,000$

La moyenne calculée de ces valeurs de $\frac{Q}{Q'}$, lorsque $\frac{h_0}{h_1}$ varie de 0 à 1,00, est 0,981, d'où l'on conclut que $Q : Q'$ est toujours plus petit que 1 et qu'il diffère assez peu de l'unité, en pratique, pour qu'il soit inutile de recourir à un autre mode de calcul que celui qui repose sur la charge du centre de gravité.

50. - Orifice circulaire. — La même conclusion est applicable à un orifice circulaire, pour lequel nous calculerons de même Q, Q' et le rapport $Q : Q'$.

D'après les notations de la figure le débit dQ d'une tranche de hauteur dy et de largeur l, est



$dQ = l\,dy\,\sqrt{2g(H+y)}$ et pour intégrer cette expression il faut exprimer les variables l et y en fonction d'une seule.

Or $BC = \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}D\sin\varphi$, d'où $l = D\sin\varphi$

$AC = y = \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}D\cos\varphi = \frac{1}{2}D(1-\cos\varphi)$

et en différentiant, $dy = \frac{1}{2}D\sin\varphi\,d\varphi$;

puis en portant ces valeurs dans dQ,

$$dQ = D\sin\varphi \times \tfrac{1}{2}D\sin\varphi\,d\varphi\,\sqrt{2g\left[H+\tfrac{1}{2}D(1-\cos\varphi)\right]}$$

$$dQ = \frac{1}{2}D^2\sqrt{2g\left(H+\tfrac{D}{2}\right)} \times \sin^2\varphi\,d\varphi\,\sqrt{1-\frac{D}{2H+D}\cos\varphi}$$

ou en posant $\quad \frac{D}{2H+D} = \mathcal{E}$

$$dQ = \tfrac{1}{2}D^2\sqrt{2g\left(H+\tfrac{D}{2}\right)} \times \sin^2\varphi\,d\varphi\,\sqrt{1-\mathcal{E}\cos\varphi}$$

et $\quad Q = \frac{1}{2}D^2\sqrt{2g\left(H+\frac{D}{2}\right)}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\,\sqrt{1-\mathcal{E}\cos\varphi}$

D'un autre côté si l'on avait calculé d'après la charge sur le centre de gravité, on aurait trouvé :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$Q' = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2g\left(H + \frac{D}{2}\right)}$$

de sorte que

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi \sqrt{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

Cette valeur de $Q : Q'$ ne varie que suivant la valeur de la seule variable $\varepsilon = \frac{D}{2H + D}$.

Nous chercherons la valeur du rapport $\frac{Q}{Q'}$ pour deux cas extrêmes, celui où, H étant infini, $\varepsilon = 0$, et celui où $H = 0$, qui correspondrait à $\varepsilon = 1$.

Dans le premier cas

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\left(\frac{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1$$

Dans le deuxième cas, si nous posons $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ d'où $d\varphi = 2 d\alpha$

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \sqrt{1 - \cos \varphi} \, d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\alpha) \sqrt{1 - \cos(2\alpha)} \times 2 \, d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \times \sqrt{2} \sin \alpha \times 2 \, d\alpha = \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \, d\alpha \times \cos^2 \alpha \left(1 - \cos^2 \alpha\right)$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \sin \alpha \, d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \alpha \sin \alpha \, d\alpha \right]$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \left(-\frac{1}{3} \cos^3 \alpha + \frac{1}{5} \cos^5 \alpha \right) + C = \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right).$$

$$= \frac{32\sqrt{2}}{15\pi} = 0,960$$

Ainsi les deux valeurs extrêmes de $\frac{Q}{Q'}$ sont 1.000 et 0,960; toutes les autres sont comprises entre ces limites ; elles diffèrent toujours assez peu de l'unité pour qu'il suffise, dans les applications, d'employer la formule basée sur la charge du centre de l'orifice.

51. — Vidange d'un vase cylindrique. La formule qui exprime le débit d'un vase, pendant une seconde,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$Q = \Omega \sqrt{2gh},$$

s'il s'agit d'un vase cylindrique et d'un temps dt, devient

$$dQ = \Omega \sqrt{2gh}\, dt = -A\, dh$$

d'où l'on tire

$$dt = -\frac{A}{\Omega \sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{A}{\Omega \sqrt{2g}} h^{-\frac{1}{2}} dh$$

et en intégrant, pour obtenir la durée de la vidange du vase, depuis $h = H$ jusqu'à $h = 0$, dans l'hypothèse où l'écoulement se ferait, pour chaque hauteur, dans les mêmes conditions qu'à niveau constant, on obtient ainsi :

$$t = -\frac{A}{\Omega \sqrt{2g}} \int_{h=h}^{h=0} h^{\frac{1}{2}}\, dh = \frac{A}{\Omega \sqrt{2g}} \int_{h=0}^{h=H} h^{-\frac{1}{2}}\, dh = \frac{2A}{\Omega \sqrt{2g}} H^{\frac{1}{2}}$$

Ce temps t est nécessairement plus long que le temps nécessaire pour débiter le même volume AH, sous la pression maximum et constante H, et qui est

$$t' = \frac{A}{\Omega \sqrt{2g}} H^{\frac{1}{2}}$$

Quand le vase se vide, la durée est double de celle qui correspond au même débit sous la charge constante et primitive H.

52 — Vérification de la vitesse par la portée du jet. La veine qui sortirait par un orifice vertical avec une vitesse initiale $v = \sqrt{2gh}$ décrirait dans l'espace une parabole telle que son abcisse x serait, au bout d'un temps t, égale à vt, et que son ordonnée y serait, au bout de ce même temps, $y = \frac{gt^2}{2}$

En éliminant t entre ces deux équations

$$x = vt; \qquad y = \frac{gt^2}{2}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on trouve

$$y = \frac{g x^2}{2 v^2} \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt{\frac{2 v^2 y}{g}}$$

Lorsque la vitesse v est un peu grande, la veine, fut-elle de petite section, ne se divise qu'à une assez grande distance de l'orifice, et on peut alors mesurer la distance x, pour vérifier si elle répond exactement à la vitesse $v = \sqrt{2gh}$.

C'est en réalité ce que montre l'expérience et l'on en conclut que la vitesse à la sortie est bien celle qui répond à la hauteur de la charge d'eau sur le centre de gravité de l'orifice.

53. – Contraction de la veine. C'est dès lors au moyen d'une réduction de la section Ω de l'orifice qu'il est nécessaire de chercher à mettre l'expérience d'accord avec le calcul.

D'ailleurs, cette réduction est conforme aux faits, à la sortie de l'orifice en mince paroi la veine se contracte, et l'on observe le plus souvent qu'à une distance de l'orifice, égale à peu près à la plus grande dimension de cet orifice, la section de la veine est réduite à un minimum, au delà duquel elle se renfle par suite de l'action de l'air sur la surface latérale.

Ce phénomène de contraction est tout à fait général dans les écoulements par orifices en mince paroi et l'on a pu, dans un certain nombre de circonstances, déterminer le coefficient m dont il faut affecter la section de l'orifice pour avoir la véritable mesure de la section, à la contraction.

54. Convergence des filets. – La raison de cette contraction est évidemment attribuable, pour une grande part, à la convergence des filets liquides en amont de l'orifice.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il résulte d'ailleurs de nos propres expériences sur l'écoulement des corps solides que le jet est formé de couches superposées concentriquement, qui prennent leur naissance dans toutes les parties du réservoir et qui par conséquent doivent donner lieu à des inclinaisons très-variables des filets. Lorsque le jet n'est pas placé symétriquement par rapport à la disposition du réservoir, on voit souvent qu'il peut en outre se produire des déplacements latéraux provenant de la même cause.

55. — Détermination expérimentale du Coefficient de contraction. — Les valeurs du coefficient de réduction à appliquer à la formule théorique pour les petits orifices en mince paroi, circulaires, carrés ou rectangulaires, s'écartent peu, d'après l'expérience, de $m = 0,62$, pourvu, dans le dernier cas, que la plus grande dimension du profil de l'orifice ne dépasse pas le double de l'autre.

Michelotti a mesuré directement le diamètre de la section contractée : le diamètre de l'orifice en mince paroi étant représenté par 1, celui de la section minimum était 0,79, ce qui correspond à une valeur de $m = 0,79 \times 0,79 = 0,62$, à une distance 0,39 de l'orifice.

On doit donc donner au coefficient m indifféremment le nom de coefficient de réduction ou de coefficient de contraction, sous le rapport du calcul de la dépense.

Poncelet et Lesbros ont exécuté à Metz, en 1827, la plus grande série de déterminations de débits, avec des orifices rectangulaires, dont la largeur était constamment de $0^m,20$ mais dont la hauteur variait de 0,01 à 0,20 et avec des charges sur le centre de l'orifice de $0^m,01$ à $3^m,00$.

Ils ont représenté les résultats de ces nombreuses

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

expériences de débit par la formule :

$$Q = m \Omega \sqrt{2 g H}$$

et ils ont ainsi établi.

1°. Que le coefficient m a varié de 0,57 à 0,70

2°. Que ce coefficient diminue, toutes choses égales d'ailleurs, quand la hauteur de l'orifice augmente.

3°. Quand la charge sur le centre augmente, m augmente d'abord et diminue ensuite.

Les données numériques de ces résultats sont insérées dans tous les traités d'hydraulique. Il sera bon de s'y reporter pour connaître le meilleur coefficient de réduction à appliquer dans un cas déterminé.

Hachette avait indiqué que le coefficient m reste constant, pour la même section et la même charge, quelle que soit la forme de l'orifice, pourvu qu'elle ne présente pas d'angle rentrant.

Nous citerons encore les expériences de Lespinasse en 1782, à cause de la grandeur exceptionnelle des orifices : largeur 1m30, hauteur 0,50. La hauteur de charge passant de 1m 875 à 4m 114, le coefficient de réduction ou, comme on dit encore, le coefficient de dépense s'est élevé de 0,514 à 0,647.

On voit en définitive que la valeur m = 0,62 répond assez bien à l'ensemble des données expérimentales sur les orifices en mince paroi.

56. - Ajutage de Borda. — L'ajutage rentrant de Borda est le seul qui permette de calculer le coefficient de contraction par des considérations théoriques ; il se compose d'une paroi cylindrique, qui coiffe l'orifice à l'intérieur et qui a pour effet d'isoler, de la paroi du vase, les filets descendants qui se rendent le plus directement à l'ouverture. Il suffit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

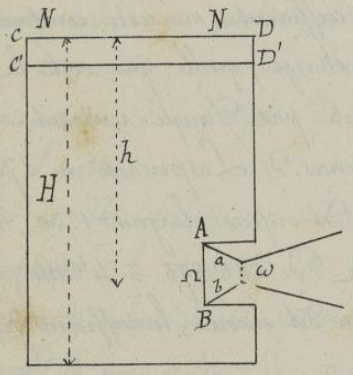
pour cela que la longueur de l'ajutage soit égale au diamètre de l'orifice, de manière qu'il n'y ait lieu d'ailleurs de tenir compte d'aucun frottement.

On applique à l'écoulement par cet ajutage le principe des quantités de mouvement, en désignant respectivement par Ω et par ω, les sections AB à l'entrée de l'ajutage et ab à la contraction, et, en prenant pour axe de projection, l'axe même de l'ajutage, passant par le centre de l'orifice.

De CD à $C'D'$, la quantité de mouvement projetée est nulle; de AB à ab, elle est

$$mV = \frac{\varpi\,\omega V}{g}\,\theta \times V = \frac{\varpi\,\omega V^2\theta}{g}$$

et cette expression doit être égale à la somme des impulsions projetées.



Les forces à considérer sont :

1° Le poids du liquide, dont l'impulsion projetée est nulle;

2° La pression sur CD, dont l'impulsion projetée est également nulle;

3° Les réactions normales exercées horizontalement par le réservoir et qui partout se contrebalancent, si ce n'est devant l'orifice Ω. Au contraire devant l'orifice, la réaction de la paroi est $(p_a + \varpi h) \times \Omega$ et son impulsion élémentaire $(p_a + \varpi h)\,\Omega\,\theta$;

4° La pression sur la veine à la sortie qui est égale à $p_a \times \Omega$ et dont l'impulsion est $-p_a\,\Omega\theta$.

5° Les réactions normales produites par l'ajutage, qui s'annulent.

6° La réaction verticale produite par le fond du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

réservoir et dont l'impulsion est nulle aussi.

En réunissant tous les termes et en divisant par θ, l'équation des quantités de mouvement devient :

$$\frac{\varpi\,\omega\,V^2}{g} = (p_a + \varpi\,h)\,\Omega - p_a\,\Omega = \varpi\,h\,\Omega,$$

d'où l'on tire $\omega = \Omega\,\frac{gh}{V^2} = \frac{1}{2}\,\Omega$, car $V^2 = 2gh$

Avec l'ajutage de Borda le coefficient de contraction est réduit à $\frac{1}{2}$, ainsi d'ailleurs qu'on a pu le vérifier par l'expérience. Si le liquide avait un mouvement rapide en DD' on ne pourrait plus affirmer que les pressions latérales sont symétriques et c'est pour cela que le raisonnement ne serait plus applicable, en l'absence de l'ajutage intérieur.

57. - Orifices évasés. — On peut en évasant les parois de l'orifice à l'intérieur, de manière à leur donner autant que possible la forme de la veine en mince paroi, jusqu'à la section contractée, éviter qu'il ne se produise au-delà aucune contraction.

La section de sortie Ω étant alors mesurée à la contraction, on devrait avoir :

$$Q = \Omega\,\sqrt{2gH}$$

Michelotti a réussi, dans ce cas, à constater par l'expérience un débit $Q = 0{,}984\,\Omega\,\sqrt{2gH}$

On peut donc éviter très-approximativement toute contraction extérieure, au moyen d'orifices parfaitement évasés.

58. - Orifice muni de fausse paroi. On appelle fausse paroi toute saillie intérieure, aboutissant normalement à

BIBLIOTHÈQUE CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS CNAM

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'orifice, et qui a pour effet de détruire une partie de la convergence des filets.

Bidone a trouvé que, dans le cas d'une fausse paroi, le coefficient de contraction était assez bien représenté par

$$m = 0,62\left(1+0.152\frac{N}{P}\right)$$

P étant le périmètre de l'orifice, et N la portion de ce périmètre munie de fausse paroi, mais cette évaluation est seulement relative au cas où N ne dépasse pas $\frac{1}{2}P$, et où le surplus de l'orifice est évasé.

59. - Orifice évasé suivi d'un canal découvert. On prolonge quelquefois l'orifice évasé, à section rectangulaire, par un canal de même section, auquel on donne une faible pente, telle que l'eau continue à s'y déplacer d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Pour appliquer la formule générale :

$$V = \sqrt{2g\left(h+\frac{p_a}{\varpi}-\frac{p_1}{\varpi}\right)}$$

il faudrait, pour chaque filet, estimer la pression p_1, en raison de la profondeur y de ce filet au-dessous de la surface supérieure, d'après la loi hydrostatique, qui convient à la répartition des pressions dans un courant à filets parallèles, on devrait donc faire $\frac{p_1}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + y$

et par suite :

$$V = \sqrt{2g(h-y)} = \sqrt{2gH}$$

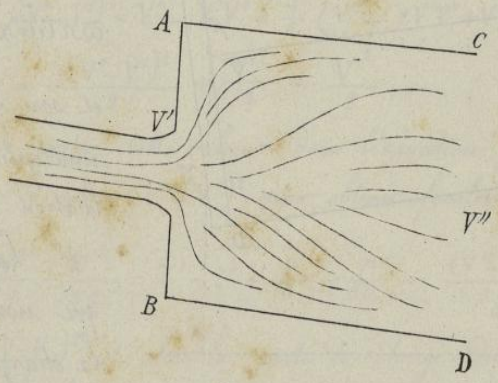
en désignant par H, non plus la charge d'eau sur le centre de l'orifice, mais celle qui correspond à son bord supérieur.

60. - Orifice suivi d'un élargissement brusque de section. Lorsque la veine liquide qui traverse la section AB rencontre ultérieurement un conduit de plus grande dimension elle se gonfle, en diminuant de vitesse, et remplit bientôt toute la section de ce conduit où les filets se déplacent dès lors parallèlement à ses parois.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Entre la section d'entrée et la section de sortie, il se produit des tourbillonnements considérables, dont la figure ci-jointe indique la disposition générale et qui peuvent déterminer, en égard à la viscosité plus ou moins grande du liquide, une perte de travail appréciable

Belanger a traité cette question importante et y a appliqué un théorème particulier, qui doit être considéré comme une appropriation à une circonstance distincte, du théorème de Bernoulli



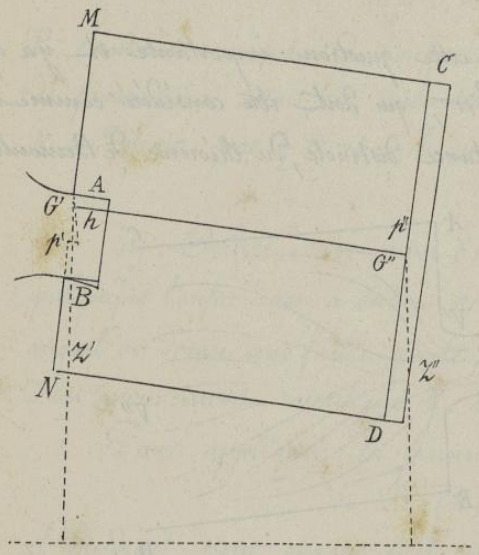
61 _ Théorème de Belanger. _ En considérant la section AB à l'entrée de l'élargissement brusque, à la suite d'un évasement donné à l'orifice pour éviter la contraction, et la section CD en laquelle les filets, après que les tourbillonnements ont cessé, sont redevenus parallèles, on applique directement, à l'intervalle compris entre ces sections, l'équation des quantités de mouvement à la masse totale; cette masse comprend une zône intermédiaire dans laquelle la vitesse reste constante en chaque point, de sorte que la variation de la quantité de mouvement se réduit à celle de la masse élémentaire m, pour laquelle cette variation de la quantité de mouvement se trouve exprimée par:

$$m\left(V''-V'\right) = \frac{\varpi \Omega V'' \theta \left(V''-V'\right)}{g} = \Sigma I.P$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le second membre représentant l'ensemble des impulsions projetées sur l'axe $G'G''$, parallèle aux vitesses en AB et en CD.

Les forces dont il faut inscrire, dans le second membre, les impulsions projetées sont:



1°. Le poids $\varpi \Omega \times G'G''$ de l'eau contenue dans la capacité $MNDC$; la projection de cette force verticale sur l'axe $G'G''$ est:

$$\varpi \Omega\, G'G'' \times \frac{h+Z'-Z''}{G'G''} = \varpi \Omega (h+Z'-Z'')$$

et son impulsion s'obtiendra en multipliant cette première évaluation par θ;

2°. La pression d'amont, que nous pouvons estimer d'après la charge correspondante sur le centre de gravité G'; le mouvement devant être considéré comme excessivement lent, à partir de la face MN dans le sens $G'G''$, la pression moyenne qui correspond au centre de gravité G' est $p' - \varpi h$ et la force $\Omega (p' - \varpi h)$, qui en résulte, a pour impulsion $(p' - \varpi h) \Omega \theta$.

3°. La pression d'aval, dont l'impulsion dans le sens de l'axe est:

$$- p'' \Omega \theta;$$

4°. Les réactions transversales de la paroi MD du conduit, qui ne développent aucune impulsion en projection sur l'axe.

5°. Les forces pouvant résulter de la viscosité du liquide: ce sont des forces intérieures, égales deux à deux, dont les impulsions se compensent;

6°. Les forces de frottement, le long des parois, que nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sommes provisoirement autorisés à négliger sur une longueur MC très petite, limitée à la section la plus rapprochée de l'orifice, à partir de laquelle les filets ont repris leur parallélisme.

En résumé, l'équation des quantités de mouvement devient :

$$\frac{\varpi\,\Omega\,V''\theta\,(V''-V')}{g} = \varpi\,\Omega\,(h+Z'-Z'')\,\theta+(p'-\varpi h)\,\Omega\theta-p''\,\Omega\,\theta$$

et en divisant par $\varpi\,\Omega\,\theta$,

$$\frac{V''(V''-V')}{g} = Z'-Z''+\frac{p'}{\varpi}-\frac{p''}{\varpi},$$

Or le terme $V''(V''-V') = V''^2-V'V'' = \frac{1}{2}(V''^2-2V'V''+V'^2)+\frac{V''^2}{2}-\frac{V'^2}{2}$

$$= \frac{(V''-V')^2}{2}+\frac{V''^2}{2}-\frac{V'^2}{2}.$$

Il suffit de porter cette valeur dans l'équation précédente et de changer de membre le carré $(V''-V')^2$, pour obtenir finalement :

$$\frac{V''^2}{2g}-\frac{V'^2}{2g} = Z'-Z''+\frac{p'}{\varpi}-\frac{p''}{\varpi}-\frac{(V''-V')^2}{2g}$$

Le terme $\frac{(V''-V')^2}{2g}$ est alors la perte de charge due à l'élargissement brusque et on la représente habituellement par une notation particulière ξ.

L'énoncé du théorème de Bernoulli, modifié par Belanger, pour le cas d'un élargissement brusque, est alors celui-ci :

En passant de la section qui précède à celle qui suit l'élargissement brusque, l'augmentation de hauteur due à la vitesse est égale à la charge moins la perte de charge $\xi = \frac{(V''-V')^2}{2g}$.

Quant à la différence entre p' et p'', elle a été vérifiée expérimentalement avec un piézomètre différentiel.

Si l'orifice d'entrée n'était pas évasé, il suffirait de considérer le fond MN, à partir duquel se produit l'élargissement, comme situé dans la section contractée, où l'on doit alors estimer la section d'entrée à laquelle correspond la vitesse V'.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Quant au travail dépensé par l'élargissement brusque, il est clair qu'il est égal au poids ϖQ du liquide écoulé, multiplié par la perte de charge ξ.

Nous verrons dans le chapitre qui traite du mouvement de l'eau dans les conduites cylindriques, comment on devra tenir compte d'une succession d'élargissements brusques.

62. – Calcul de la dépense en cas d'élargissement brusque.

La perte de charge qui résulte d'un élargissement brusque donnant lieu à une perte de travail, réduit nécessairement la dépense, mais on peut encore calculer facilement le débit, en exprimant toutes les vitesses en une seule, au moyen de l'équation de continuité.

Si A est la section d'entrée, correspondant à la vitesse V', Ω la section de sortie correspond à la vitesse V'', la perte de charge :

$$\xi = \frac{(V''-V')^2}{2g} = \frac{V''^2}{2g}\left(1-\frac{\Omega}{A}\right)^2$$

et la variation de puissance vive

$$\frac{V''^2-V'^2}{2g} = \frac{V''^2}{2g}\left(1-\frac{\Omega^2}{A^2}\right)$$

étant, comme ces formules l'indiquent, exprimée en fonction de la seule vitesse V'', au lieu de :

$$\frac{V''^2-V'^2}{2g} = H - \frac{(V''-V')^2}{2g};$$

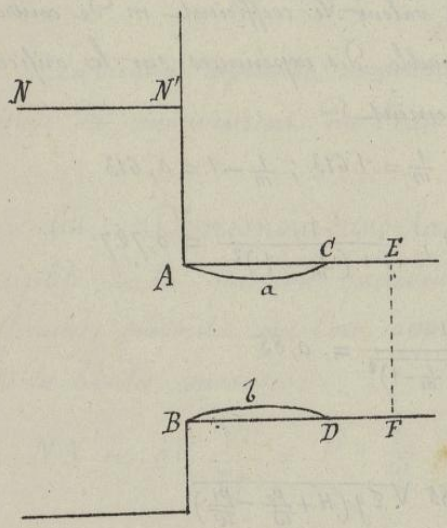
on aura : $$\frac{V''^2}{2g}\left(1-\frac{\Omega^2}{A^2}\right) = H - \frac{V''^2}{2g}\left(1-\frac{\Omega}{A}\right)^2$$

et par suite : $$V'' = \sqrt{\frac{2gH}{\left(1-\frac{\Omega^2}{A^2}\right)+\left(1-\frac{\Omega}{A}\right)^2}}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce qui conduit à $Q = \Omega V'' = \sqrt{\frac{2gH}{\left(\frac{1}{\Omega^2}-\frac{1}{A^2}\right)+\left(\frac{1}{\Omega}-\frac{1}{A}\right)^2}}$

63 - Ajutage cylindrique extérieur. — L'écoulement par un ajutage extérieur peut être assimilé à celui que nous venons d'étudier, en passant de la section contractée ab, à la section agrandie CD, de même dimension que l'orifice AB lui-même, le rapport des sections étant déterminé par le coefficient de contraction.



En fait, l'air qui se dégage dans la section contractée, pendant les premiers instants, est bientôt entraîné avec la veine, et nous verrons, qu'une certaine dépression se maintient constamment dans le voisinage de la section contractée.

CD étant une section voisine de l'orifice, dans laquelle les filets sont redevenus parallèles, après la cessation des tourbillonnements résultant de l'élargissement, on aura, d'après le théorème de Belanger, et, en négligeant la Vitesse V_0 en NN':

$$\frac{V^2}{2g} = H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega} - \frac{(V-V')^2}{2g}$$

la vitesse V'' de la formule étant ici remplacée par V, parce que les deux sections AB et CD sont égales entr'elles. Cette section commune étant désignée par Ω, la section contractée aura pour mesure $m\Omega$ et la vitesse V' en cette section sera:

$$V' = V\frac{\Omega}{m\Omega} = \frac{V}{m}$$

L'équation précédente devient alors:

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\frac{V^2}{2g} = H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega} - \frac{V^2}{2g}\left(1-\frac{1}{m}\right)^2$$

et en résolvant par rapport à V^2:

$$\frac{V^2}{2g}\left(1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2\right) = H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega}$$

d'où :
$$V = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}}\sqrt{2g\left(H+\frac{p_0}{\omega}-\frac{p_1}{\omega}\right)}$$

Si on applique à cette valeur le coefficient m de contraction, $m = 0,62$, qui résulte de l'ensemble des expériences sur les orifices en mince paroi, on a successivement :

$$m = 0,62 \; ; \; \frac{1}{m} = 1.613 \; ; \; \frac{1}{m} - 1 = 0,613$$

$$\left(\frac{1}{m}-1\right)^2 = 0,3758 \; ; \; \frac{1}{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2} = 0,727$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}} = 0,85$$

ce qui conduirait à :

$$V = 0,85\sqrt{2g\left(H+\frac{p_0}{\omega}-\frac{p_1}{\omega}\right)}$$

Ce coefficient de réduction s'applique alors à la vitesse et non plus à la section de l'orifice.

Le chiffre correspondant, résultant de l'expérience, est 0,82 et c'est en conséquence celui que nous emploierons dans les applications.

Quant à la valeur de ζ, on peut chercher à l'exprimer soit en fonction de la charge totale, soit en fonction de la vitesse finale V;

On a toujours $\zeta = \frac{(V-V')^2}{2g} = H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega} - \frac{V^2}{2g}$
et si l'on admet, conformément au paragraphe précédent, que l'on ait $\frac{V^2}{2g} = (0,82)^2\left(H+\frac{p_0}{\omega}-\frac{p_1}{\omega}\right)$
ou
$$\frac{V^2}{2g} = 0,672\left(H+\frac{p_0}{\omega}-\frac{p_1}{\omega}\right)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On obtiendra facilement par substitution :

$$\xi = \left(H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega}\right)(1 - 0672) = 0{,}328\left(H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega}\right)$$

ou :

$$\xi = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{0{,}672} - 1\right) = 0{,}488\ \frac{V^2}{2g}$$

Nous ferons conformément à ces indications :

$$\xi = \frac{1}{3}\left(H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega} = \frac{1}{2}\ \frac{V^2}{2g}\right).$$

La dernière expression surtout nous sera fort utile dans l'étude du mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite.

64. – Dépression dans la section contractée. – L'étude complète de la question précédente comporte trois équations différentes, suivant que l'on applique le théorème de Bernoulli entre les limites suivantes :

De NN' en ab, $\dfrac{V'^2}{2g} = H + \dfrac{p_0}{\omega} - \dfrac{p'}{\omega}$

De NN' en EF, $\dfrac{V^2}{2g} = H + \dfrac{p_0}{\omega} - \dfrac{p'}{\omega} - \xi$

De ab en EF, $\dfrac{V^2}{2g} - \dfrac{V'^2}{2g} = \dfrac{p'}{\omega} - \dfrac{p_1}{\omega} - \xi$

La troisième de ces équations, qui pourrait aussi se déduire des deux autres par voie de soustraction, est la plus propre à déterminer la dépression en ab ; on en tire, en effet, pour la mesure de la différence de pression :

$$\frac{p_1}{\omega} - \frac{p'}{\omega} = \frac{V'^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} - \xi = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2} - 1\right) - \xi$$

et en substituant, dans le second membre, les valeurs pratiques, déduites du paragraphe précédent :

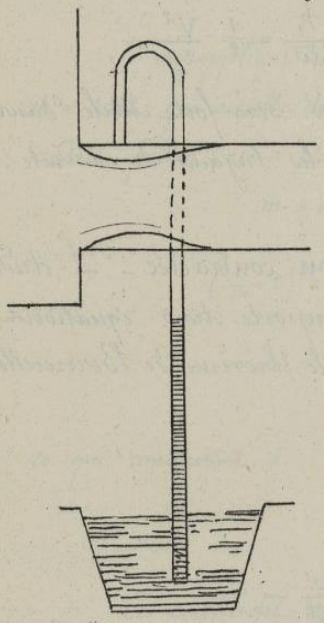
$$\frac{p_1}{\omega} - \frac{p'}{\omega} = \left[(0{,}82)^2\left(\frac{1}{(0{,}62)^2} - 1\right) - 0{,}333\right]\left(H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega}\right) = 0{,}743\left(H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega}\right)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Dans le cas où les deux pressions extrêmes $\frac{p_0}{\varpi}$ et $\frac{p_1}{\varpi}$ seraient celles de l'atmosphère, on aurait simplement :

$$\frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi} = 0,75\,H.$$

Une dépression égale à $\frac{3}{4}$ H devrait donc se maintenir dans la section contractée, et la vérification de ce fait constitue la constatation du phénomène que l'on désigne sous le nom de phénomène de Venturi.



Ayant placé un tube recourbé de manière que son orifice supérieur aboutisse dans la section contractée et que son extrémité inférieure plonge dans une cuvette garnie d'eau, Venturi a vu que la dépression dans la section contractée était accusée par la surélévation de l'eau dans ce tube à une hauteur de 0m. 65, alors que la charge d'eau sur le centre de l'orifice était de 0m. 88. Les trois quarts de cette hauteur H font précisément 0,66

Dans cette expérience, l'orifice avait 0m.12 de diamètre et le tube piézométrique 0,008.

65. Ajutage divergent. — Lorsque l'ajutage est prolongé, après l'évasement, par une partie conique, qui va en s'élargissant d'une manière continue jusqu'à une certaine distance, et qui se termine par une portion cylindrique, on peut encore admettre que les filets se meuvent parallèlement et arrivent au débouché CD, si l'élargissement n'est pas brusque, avec des vitesse symétriquement réparties;

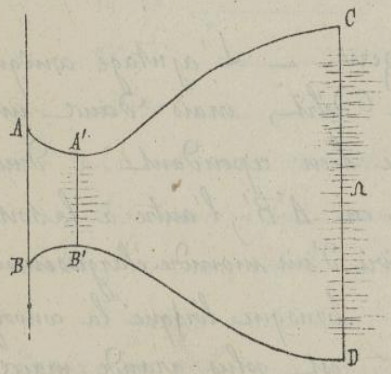
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

nous supposerons que l'ajutage est assez long pour satisfaire à cette condition, et assez court pour qu'il n'y ait pas à tenir compte des frottements

La vitesse en CD serait alors donnée par le théorème de Bernoulli :

$$V = \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega}\right)}$$

ce qui permettrait d'estimer la dépense à $Q = \Omega \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega}\right)}$, Ω étant la section en CD, c'est-à-dire la grande base de l'ajutage.



Il n'est pas admissible cependant, que le débit augmente indéfiniment avec Ω et l'on trouvera un correctif à cette conclusion évidemment inexacte, en considérant la pression p' dans la section contractée $A'B'$.

De $A'B'$ en CD, il n'y a pas de chute, ce qui donne : $\frac{V^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g} = \frac{p'}{\omega} - \frac{p_1}{\omega}$,

ou en remarquant que $V' = V\frac{\Omega}{\Omega'}$ par raison de continuité.

$$\frac{p'}{\omega} - \frac{p_1}{\omega} = \frac{V^2}{2g}\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega'^2}\right) = \left(H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega}\right)\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega'^2}\right)$$

et par suite : $\frac{p'}{\omega} = H + \frac{p_0}{\omega} - \left(H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega}\right)\frac{\Omega^2}{\Omega'^2}$,

p' ne pouvant devenir négatif, on voit ainsi qu'il y a une limite à la valeur de $\frac{\Omega}{\Omega'}$ et que cette limite correspond à :

$$\frac{\Omega}{\Omega'} = \frac{\sqrt{H + \frac{p_0}{\omega}}}{\sqrt{H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega}}}$$

La plus grande valeur que puisse, pour ce motif, prendre Ω sans qu'il y ait discontinuité dans la nappe liquide, est donc :

$$\Omega = \Omega' \sqrt{\frac{H + \frac{p_0}{\omega}}{H + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega}}}$$

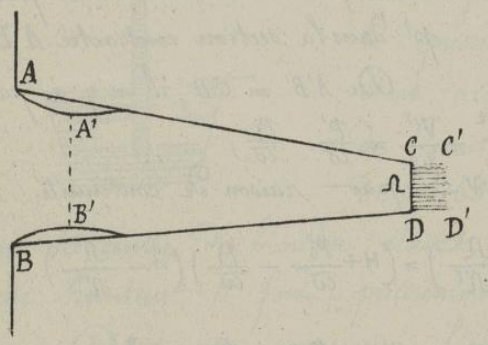
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

elle correspond à un débit, alors maximum,

$$Q' = \Omega' \sqrt{\frac{H + \frac{p_0}{\varpi}}{H + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}}} \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p'}{\varpi}\right)} = \Omega' \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0}{\varpi}\right)}$$

Ce débit Q' est celui qui aurait lieu par l'orifice Ω' si l'écoulement se faisait dans le vide, condition qui se trouverait en effet réalisée à la limite, lorsque p' deviendrait nul.

66. – Ajutage convergent. — L'ajutage conique convergent augmente aussi le débit, mais dans une moindre proportion. Il donne lieu cependant à deux contractions, l'une à l'entrée, en $A'B'$, l'autre à la sortie, en $C'D'$; la première est suivie d'un moindre élargissement brusque lorsque la convergence est plus grande, mais alors la section contractée extérieure $C'D'$ diminue aussi par le fait de la plus grande convergence des filets extrêmes.



Cette double influence de la conicité de l'ajutage conduit à penser que le débit doit comporter un maximum correspondant à un certain angle de convergence. C'est ce qui a été mis en évidence par Castel avec des ajutages convergents dont le diamètre, à la petite base a varié de $0^m,0155$ à $0^m,0200$.

Il a déterminé expérimentalement la vitesse V en $C'D'$, qu'il a représentée par $V = n\sqrt{2gH}$, et le débit Q, qu'il a exprimé, en fonction de la section Ω de la petite base, par $Q = m\Omega\sqrt{2gH}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le Tableau suivant reproduit les résultats qu'il a obtenus :

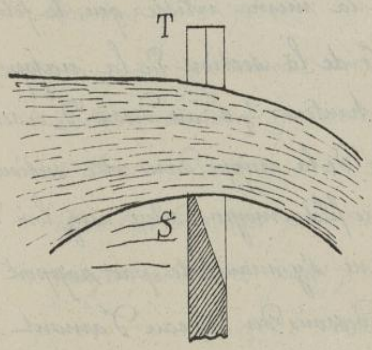
Angles de convergence	Valeurs de n.	Valeurs de m.
0	0.830	0.829
5° 26	0.920	0.924
10° 20	0.950	0.938
12° 04	0.955	0.942
13° 24	0.962	0.946
14° 28	0.966	0.941
23°	0.974	0.913
48° 50	0.984	0.847

Le coefficient m est maximum pour l'angle 13° 24.

Lespinasse a fait aussi quelques expériences avec une base pyramidale, sur une échelle plus rapprochée des conditions de la pratique.

L'ajutage avait une longueur de 2m. 923 ; la grande base 0m.731 x 0,975 ; la petite base 0, 135 x 0 190 ; l'angle de convergence étant de 11° ; le coefficient m a varié de 0,979 à 0,987.

67. — Orifices en déversoir. Les orifices que nous avons examinés jusqu'ici sont limités, sur tout leur pourtour, par une paroi continue, formant cadre ; ils sont généralement noyés dans le liquide d'amont et on les désigne souvent pour cette raison sous le nom d'orifices de fond ; ils peuvent souvent être plus ou moins obturés par une vanne qui est disposée de manière à diminuer, par le haut, la hauteur de l'orifice libre.



Les déversoirs se distinguent de ces orifices de fond en ce qu'ils ne sont pas fermés à la partie supérieure,

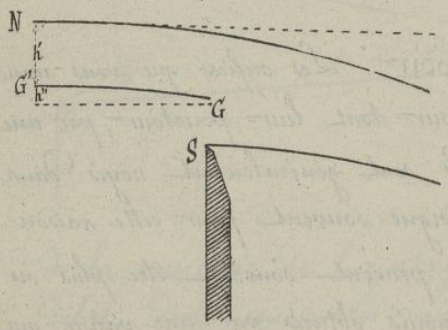
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui est entièrement libre ; leurs orifices ne sont ainsi limités que de trois côtés, à la partie inférieure par l'arête horizontale S de l'orifice, qui en forme le seuil, et latéralement par deux arêtes verticales ST. Le déversoir est à mince paroi, lorsque l'encadrement de l'orifice est formé de pièces dont l'épaisseur est très-faible au pourtour de cet orifice ; la veine liquide donne alors lieu à une contraction que l'on peut éviter en évasant convenablement les bords du côté d'amont. Quant à la face supérieure de la veine, elle n'est jamais horizontale dans le sens du cheminement, et la dénivellation que l'on y observe au-dessus du seuil se prolonge toujours à quelque distance en amont.

La réduction de l'épaisseur de la veine s'obtient, lorsqu'il est nécessaire, en relevant le seuil au moyen d'une transmission appropriée à la manœuvre de la vanne mobile, logée dans le fond du canal d'amenée.

68. Écoulement par un déversoir en mince paroi.

Nous supposerons d'abord que le seuil et les deux côtés verticaux de l'orifice sont en mince paroi, de sorte qu'il se produira une contraction dans tous les sens, mais même dans ce cas, on ne peut calculer le débit que d'une manière approximative et en supposant que tous les filets prennent la même vitesse que le filet qui passe par le centre de gravité G de la section de la nappe, au-dessus du seuil ; ce point G est à une hauteur $\frac{1}{2}e$ au-dessus de ce seuil, si l'on désigne par e l'épaisseur totale de la nappe dans cette section.



Soit en amont un point G' de ce filet moyen, situé assez loin de l'orifice pour qu'aucune dénivellation ne s'y manifeste par rapport à l'amont, h' la hauteur de ce point au-dessous du niveau d'amont N,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et h'' la dénivellation du point G par rapport à G'

La vitesse en G sera donnée par la formule,

$$\frac{V^2}{2g} = h'' + \frac{p'}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}$$

mais cette formule se simplifie, si l'on remarque que la vitesse en G' étant négligeable, en égard à la petitesse relative de l'orifice par rapport à la section du canal, la pression p' est donnée par la loi hydrostatique :

$$p' = p_a + \varpi h'$$

et que la veine parabolique se détachant du seuil est maintenue par cette raison, et dans toute sa section, à la pression extérieure p_a ce qui donne $p = p_a$ et par suite, toutes réductions faites :

$$V = \sqrt{2g(h' + h'')} = \sqrt{2g\left(H - \frac{e}{2}\right)}$$

la dernière transformation résultant de ce que la hauteur H du niveau N au-dessus du seuil, est égale à :

$$h' + h'' + \frac{1}{2}e$$

Si, comme on est conduit à le supposer, la vitesse V est commune à tous les filets, on aura :

$$Q = m \times L\,e \times V = m \times L\,e\,\sqrt{2g\left(H - \frac{1}{2}e\right)}$$

L étant la largeur de l'orifice et m un coefficient de réduction dû à la contraction.

On ne connait à priori ni m, ni e; on sait seulement, par la dénivellation qui se produit au déversoir, que $e < H$.

L'expérience apprend, d'ailleurs, que e ne se réduit jamais au-dessous de $0,72\,H$; $\quad e > 0,72\,H$.

En prenant une moyenne entre ces deux limites, on serait conduit à faire approximativement :

$$e = \frac{1 + 0,72}{2} H = 0,86\,H$$

et si l'on admettait pour m la valeur $m = 0,62$, qui correspond aux orifices noyés, en mince paroi, il viendrait :

$$Q = 0,62\,L \times 0,86\,H\,\sqrt{2g(H - 0,43H)} = 0,403\,LH\,\sqrt{2gH}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les nombreuses expériences de Poncelet et Lesbros ont montré que le coefficient pratique de cette formule variait, pour les conditions extrêmes qu'ils ont réalisées, de 0,385 à 0,424 ; moyenne 0,404

Elles confirment ainsi l'emploi de cette formule générale, qui peut s'interpréter en disant qu'en considérant comme hauteur de l'orifice la charge d'eau sur le seuil, sans tenir compte de la dénivellation, il faut réduire la dépense calculée par l'introduction d'un coefficient de réduction m dont on trouve la valeur dans les tableaux des expériences qui viennent d'être citées ; Il est essentiel de faire remarquer que dans tous les orifices en déversoir, la charge H se mesure à partir du seuil et non à partir du centre de la section, et c'est pour cela que le coefficient m est aussi petit.

69. - Déversoir de barrage - Dans le cas où le déversoir a toute la largeur d'un cours d'eau ou une largeur qui n'en diffère pas beaucoup, on ne peut négliger, dans l'expression de la vitesse V, la vitesse V_0 en amont de ce barrage

En raisonnant absolument comme au numéro précédent, on trouverait alors :

$$Q = 0,62 \times 0,86 \, l H \sqrt{2g\left(0,57H+\frac{V_0^2}{2g}\right)} = 0,533 \, l H \sqrt{2g\left(0,57 H+\frac{V_0^2}{2g}\right)}$$

la hauteur $\frac{V_0^2}{2g}$, qui répond à la vitesse V_0 en amont du barrage, venant s'ajouter à la hauteur H, dans l'expression de la vitesse V.

70 - Déversoir suivi d'un canal découvert - Lorsque l'orifice en déversoir est parfaitement évasé, les filets traversent normalement la section au seuil, et si l'orifice est ensuite prolongé par un canal dont la pente soit telle que le mouvement y reste uniforme, on peut déterminer le coefficient maximum de contraction par des considérations théoriques, parceque les charges et les vitesses sont alors les mêmes en tous les points de la section au seuil.

En effet, pour chacun des filets, $\frac{p}{\omega}$ est alors égal à $Z + \frac{p_a}{\omega}$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

conformément à la loi hydrostatique, applicable lorsque les filets se meuvent tous parallèlement et d'une vitesse uniforme.

En substituant la valeur de $\frac{p'}{\varpi} = z + \frac{p_a}{\varpi}$, dans la première équation en $\frac{V^2}{2g}$, elle devient ici :

$$\frac{V^2}{2g} = h' + h'' - z = H - e$$

d'où $$V = \sqrt{2g(H-e)}$$

et $$Q = Le\sqrt{2g(H-e)}$$

La charge $H-e$ et la vitesse V sont constantes pour tous les filets. La hauteur e inconnue est comprise entre 0 et H, limites pour lesquelles on a, dans un cas comme dans l'autre, $Q = 0$.

Il y a donc, entre ces limites, un maximum du débit, Q', et ce maximum sera donné par celui de la fonction

$$\varphi = e^2(H-e) = e^2H - e^3$$

En égalant à 0 la dérivée $\frac{d\varphi}{de}$, on trouve, comme condition de ce maximum :

$$\frac{d\varphi}{de} = 2eH - 3e^2 = 0 \qquad \text{d'où} \quad e = \frac{2}{3}H$$

et si l'on porte cette valeur de e dans l'expression du débit, on obtient pour débit maximum :

$$Q' = L \times \frac{2}{3} H \sqrt{2g\left(H - \frac{2}{3}H\right)} = 0{,}385\, LH\sqrt{2gH}$$

Ce résultat est confirmé par les expériences de Castel et Lesbros, à Toulouse, sur un déversoir établi dans les conditions que nous avons supposées ici ; ils ont trouvé $m = 0{,}35$

Dans le cas d'un barrage, il faudrait de même ajouter, sous le radical, la hauteur $\frac{V_0^2}{2g}$ à la hauteur H dans la première expression du débit.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Mouvement de l'eau dans les Tuyaux de Conduite.

---

71 - Conditions générales. - L'établissement des tuyaux de conduite constitue un des problèmes les plus importants de l'hydraulique; il a pour objet de distribuer l'eau, d'un point à un autre avec la moindre perte de chute, au moyen d'une canalisation dont il faut aussi diminuer, autant que possible, le prix d'établissement.

Ces deux conditions, en quelque sorte contradictoires, ne peuvent recevoir, dans chaque cas, la meilleure solution qu'elles comportent, que si la question est étudiée dans tous ses éléments techniques et économiques.

72 - Lois du frottement de l'eau dans les conduites. - Le débit d'une conduite s'amoindrit quand, la chute restant la même, sa longueur augmente. La cause retardatrice, qui est ainsi mise en évidence, peut être comparée à un frottement dépendant soit du glissement des filets liquides contre les parois du tuyau, soit de la viscosité même du liquide, qui donnerait lieu à des actions retardatrices particulières entre ces filets.

Les molécules en contact avec les parois sont plus retardées que les autres, et en réagissant à leur tour, avec moins d'intensité, sur les filets voisins, elles font que la vitesse est en réalité la plus grande dans l'axe de la section, et qu'elle va en diminuant à partir de cet axe jusqu'au contour.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Tous ces effets, peu connus quant aux détails, ont été résumés par de Prony dans leur ensemble, lorsqu'il a énoncé que les lois du frottement dans les tuyaux sont précisément inverses de celles qui caractérisent les frottements des solides; ainsi:

1°. Le frottement dans les tuyaux est indépendant de la pression;

2°. Il est proportionnel à l'étendue des surfaces de contact.

3°. Il dépend de la vitesse, et cette dépendance est telle, qu'on peut le considérer comme proportionnel à la fonction $\alpha u + \beta u^2$ de la vitesse moyenne u, cette vitesse moyenne étant celle qui répond au débit même du tuyau. En désignant par l la longueur d'un tuyau, par χ le périmètre de sa section droite, que l'on appelle son périmètre mouillé, et par F la résistance du frottement, celle-ci est donnée par:

$$F = l\chi(\alpha u + \beta u^2)$$

ou en fonction du poids spécifique ϖ du liquide en faisant $\alpha = a\varpi$, $\beta = b\varpi$

$$F = \varpi l \chi (au + bu^2)$$

73.- Coefficients de la formule du frottement - Les premières valeurs de a et de b résultent des expériences de D'Aubuisson; mais de Prony, en les complétant par d'autres séries d'observations a modifié un peu ces premiers chiffres.

	D'Aubuisson	De Prony
a =	0.000 018	0.000 017 3
b =	0.000 343	0.000 348

Ce sont les derniers nombres que l'on emploie le plus ordinairement, et l'on remarque que le coefficient b est environ 20 fois aussi grand que a; il en résulte que, quand la vitesse u n'est pas très-petite, on peut se servir d'une formule plus simple:

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$F = \varpi l \times b_1 u^2$$

dans laquelle il suffira de donner, suivant M. Dupuit, à b_1 la valeur $b_1 = 0{,}0003855$

La prépondérance du second terme, ainsi conservé seul dans la formule monôme, se reconnaît d'ailleurs avec facilité par la considération du rapport :

$$\frac{a u}{b u^2} = \frac{a}{bu} = \frac{1}{20}\,\frac{1}{u}$$

Déjà pour $u = 0^m 5$, le premier terme $a u$ ne serait que la dixième partie de $b u^2$ et le rapport va ensuite en diminuant rapidement à mesure que u augmente.

Dans la plupart des circonstances, nous emploierons indifféremment la formule monome ou la formule binome, mais il faudra prendre le soin d'y appliquer dans tous les cas les coëfficients appropriés.

74 - Coëfficients de Darcy. Cet observateur a reconnu que les coëfficients a, b et b_1, varient avec les diamètres, la nature et l'état de la surface des tuyaux.

Pour des tuyaux en fonte, déjà recouverts de dépôt, et dont le diamètre intérieur serait D, il y aurait lieu de donner à ces coëfficients les valeurs suivantes :

$$a = 0\,000\,032 + \frac{0\,000\,000\,01504}{D^2}$$

$$b = 0\,000\,443 + \frac{0{,}000\,012\,4}{D}$$

$$b_1 = 0\,000\,507 + \frac{0{,}00\,001\,294}{D}$$

Pour $D = 0^m 060$, on trouverait $b_1 = 0.0007227$

$D = 1^m 000$ ..... $b_1 = 0.0005200$

Moyenne 0.0006210

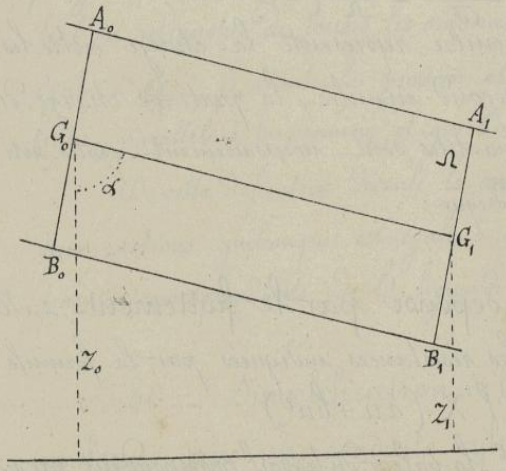
Les deux diamètres ci-dessus pouvant être considérés comme comprenant toutes les dimensions des tuyaux employés dans les canalisations

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de quelqu'importance, on devra, en moyenne, employer le dernier chiffre, presque double de celui de Dupuit.

75. Mouvement permanent uniforme dans les conduites. On dit que, dans une conduite, le mouvement est permanent lorsqu'en un point quelconque, la vitesse ne varie pas avec le temps. En général, le mouvement est uniforme si, par suite de la constance de la section la vitesse d'un même filet est toujours la même quelle que soit la section considérée. Le débit Q par seconde, en chacune des sections d'une conduite cylindrique, sera toujours donné par l'équation de continuité $Q = \Omega u$ et le mouvement sera uniforme, les quantités Q et u conservant partout leur même valeur.

76. — Equation du mouvement permanent uniforme dans une conduite cylindrique. — Soient A_0B_0, A_1B_1 deux sections normales aux génératrices du cylindre qui forme la conduite, proposons-nous d'appliquer le principe des quantités de mouvement à la partie du canal comprise entre ces deux sections, dont les centres de gravité G_0 et G_1 sont nécessairement situés sur une même parallèle G_0G_1 aux génératrices telles que A_0A_1.



Puisque le mouvement est uniforme dans toute la conduite, il n'y a pas d'accroissement de la quantité de mouvement de A_0B_0 en A_1B_1 et l'équation fondamentale se réduit à :

$0 = \Sigma$ impulsions projetées

et comme toutes ces impulsions

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

renferment le facteur θ, qui exprime un temps très-court et toujours le même, on peut supprimer ce facteur dans le second membre et écrire simplement :

$$0 = \Sigma \text{ forces projetées.}$$

Nous prendrons pour axe de projection la droite $G_0 G_1$ et les différentes forces à considérer seront les suivantes :

1° Poids du liquide $A_0 B_0 A_1 B_1$ ou $\varpi \Omega \times G_0 G_1$, et il faut projeter ce poids sur $G_0 G_1$, c'est-à-dire le multiplier par $\cos\alpha$ ou par $\frac{z_0 - z_1}{G_0 G_1}$; la projection du poids sera donc :

$$\varpi \Omega G_0 G_1 \times \frac{z_0 - z_1}{G_0 G_1} = \varpi \Omega (z_0 - z_1)$$

2° Pressions d'amont et d'aval, qui sont toutes deux dirigées suivant l'axe et qui ont respectivement pour mesures Ωp_0 et Ωp_1 ; leur somme algébrique est $\Omega p_0 - \Omega p_1$.

3° Frottement du tuyau ; force négative et égale à :

$$-\varpi l \chi (au + bu^2).$$

4° Frottements moléculaires ; forces intérieures s'annulant deux à deux en projection. En résumé l'équation devient ;

$$0 = \varpi \Omega (z_0 - z_1) + \Omega (p_0 - p_1) - \varpi l \chi (au + bu^2)$$

relation que l'on peut écrire sous la forme :

$$z_0 - z_1 + \frac{p_0 - p_1}{\varpi} = \frac{l \chi}{\Omega} (au + bu^2).$$

Le premier membre représente la charge entre les deux sections extrêmes ; le second membre, la perte de charge due au frottement. Ces deux quantités sont nécessairement égales entr'elles, dans toute conduite cylindrique.

77.- Travail dépensé par le frottement.- Nous comprenons ici toutes les résistances indiquées par la formule :

$$\varpi l \chi (au + bu^2)$$

et, en désignant par TF, la valeur du travail correspondant, par seconde

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on aura pour expression de TF :

$$TF = \varpi\, l\, \chi\, (au + bu^2)\, u,$$

et, en remarquant que $Q = \Omega u$ et que par conséquent $u = \frac{Q}{\Omega}$

$$TF = \frac{\varpi Q l \chi}{\Omega} (au + bu^2).$$

Cette valeur devra être prise avec le signe négatif, toutes les fois qu'on aura à l'opposer aux forces motrices, considérées comme positives.

Le facteur $\frac{l\chi}{\Omega}(au + bu^2)$ équivalant, d'après l'équation du N.° précédent, à la perte de charge entre les deux sections, on peut dire que le travail TF est égal à cette perte de charge multipliée par le poids ϖQ du liquide dépensé.

78. – Niveau piézométrique en un point quelconque. On appelle niveau piézométrique le niveau auquel se maintiendrait dans le vide le sommet d'une colonne liquide dans un tube vertical posé en un point donné de la veine liquide.

En G_0 par exemple, le niveau piézométrique serait à une hauteur $\frac{p_0}{\varpi}$ au-dessus de G_0, en G_1 à une hauteur $\frac{p_1}{\varpi}$ à partir de ce point G_1.

79. – Ligne de pression et ligne de charge. – La ligne qui joindrait tous les niveaux piézométriques s'appelle ligne de pression. Si l'on retranche de toutes les ordonnées de cette ligne une hauteur égale à $\frac{p_a}{\varpi}$, p_a étant la pression atmosphérique, on obtient une autre ligne, parallèle à la première, et que l'on appelle ligne de charge.

De cette définition découle la conséquence suivante : la charge entre deux sections quelconques est égale à la différence de niveau entre les points correspondants de la ligne de pression ou de la ligne de charge

80. – Simplification de l'équation du mouvement uniforme dans une conduite cylindrique. Si nous désignons par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la notation y la différence de charge entre les deux sections G_0 et G_1, l'équation du numéro 76 se réduit à :

$$y = \frac{l\chi}{\Omega}(au + bu^2) \quad \text{d'où} \quad \frac{y}{l} = \frac{\chi}{\Omega}(au + bu^2)$$

Le rapport $\frac{y}{l}$ qui représente la charge par unité de longueur de la conduite, est ordinairement désigné par J, ce qui donne :

$$J = \frac{\chi}{\Omega}(au + bu^2)$$

Lorsque la conduite est à section circulaire, on a encore :

$$\chi = \pi D, \quad \Omega = \frac{\pi D^2}{4} \quad \text{et par conséquent :}$$

$$\frac{\chi}{\Omega} = \frac{4\pi D}{\pi D^2} = \frac{4}{D}$$

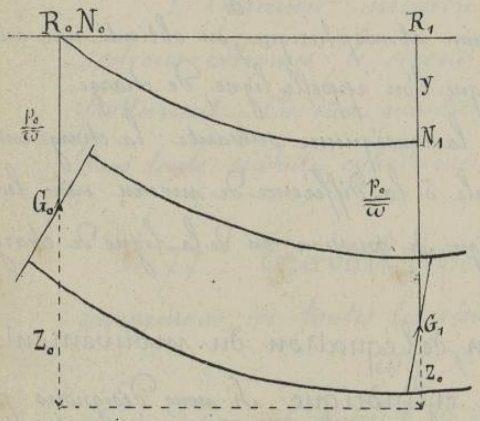
$$\text{D'où} \qquad J = \frac{4}{D}(au + bu^2)$$

relation que l'on écrit habituellement :

$$\frac{1}{4} DJ = au + bu^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4} DJ = b_1 u^2$$

suivant que l'on se sert, pour exprimer la résistance, de la formule binome ou de la formule monome.

81 - Conduite courbe à section constante. Si la conduite, au lieu d'être parfaitement cylindrique, présentait une courbe peu prononcée et telle que les filets ne cessent pas de rester parallèles les uns par rapport aux autres, on devra considérer deux sections infiniment voisines, comme constituant, avec les parois, un cylindre de longueur ds auquel les relations précédentes seront applicables :



$$dy = \frac{\chi\, ds}{\Omega}(au + bu^2)$$

ds étant la seule variable du second membre, l'intégration de G_0 à G_1 donnera :

$$y = \frac{\chi}{\Omega}(au + bu^2)\int ds = \frac{s\chi}{\Omega}(au + bu^2).$$

On pourra donc appliquer la même

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

formule que précédemment en y remplaçant seulement la longueur l par la longueur s de la ligne $G_0 G_1$ développée.

Si l'on trace la ligne de pression $N_0 N_1$ et si l'on en rapporte les ordonnées à l'horizontale $N_0 R_0, R_1 N_1$ représentera la valeur de y en un point quelconque de la conduite, et la figure indique que :

$$\frac{p_0}{\omega} + z_0 = y + \frac{p_1}{\omega} + z_1$$

ce qui revient à : $y = z_0 + \frac{p_0}{\omega} - z_1 - \frac{p_1}{\omega} = \frac{f X}{\Omega}(a u + b u^2)$

Le second membre de la précédente équation étant essentiellement positif, puisque sa valeur représente la perte de charge due au frottement, y l'est aussi, et par conséquent la courbe de pression va toujours en s'abaissant vers l'aval. Il en est de même de la ligne de charge.

Le rapport $\frac{y}{s}$ est d'ailleurs constant puisque :

$$\frac{y}{s} = \frac{X}{\Omega}(a u + b u^2)$$

82. Problèmes relatifs au mouvement de l'eau dans les conduites cylindriques.

L'équation la plus simple des conduites cylindriques étant :

$$\frac{1}{4} D J = b_1 u^2,$$

on pourrait déterminer, par son emploi, une des quantités D J u lorsque les deux autres seraient connues, mais, dans la plupart des cas, on a surtout à considérer le débit Q de la conduite :

$$Q = \frac{1}{4} \pi D^2 u,$$

ce qui introduit dans les problèmes à résoudre une quatrième variable Q, et une deuxième équation ; cela revient à dire que, dans les problèmes de cette nature on a en général deux équations entre quatre variables.

De la six problèmes distincts, dont deux surtout ont

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

une grande importance dans la pratique.

83. Solution analytique. – Ces six problèmes sont les suivants, la solution déduite des deux équations générales est placée en regard de l'énoncé dans l'hypothèse où b_1 peut être considéré comme un coëfficient constant.

	Données.	Inconnues	Équations.	
			$\frac{1}{4} DJ = b_1 u^2$	$Q = \frac{1}{4}\pi D^2 u$
I	DJ	uQ	$U = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{DJ}{b_1}}$	$Q = \frac{1}{4}\pi D^2 U$
II	QJ	DU	$D = \sqrt[5]{\frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2 J}}$	$U = 2\sqrt{\frac{Q}{\pi D^2}}$
III	UJ	DQ	$D = \frac{4 b_1 u^2}{J}$	$Q = \frac{1}{4}\pi D^2 U$
IV	UQ	DJ	$D = \sqrt[3]{\frac{Q}{\pi u}}$	$J = \frac{4 b_1 u^2}{D}$
V	DU	QJ	$Q = \frac{1}{4}\pi D^2 U$	$J = \frac{4 b_1 u^2}{D}$
VI	DQ	UJ	$U = \frac{4Q}{\pi D^2}$	$J = \frac{4 b_1 u^2}{D}$

Les valeurs des inconnues se déduisent de la résolution immédiate de chacune des équations primitives, excepté dans le second problème où il faut faire une élimination.

En portant dans la première équation la valeur :

$$u = 4\frac{Q}{\pi D^2}$$

tirée de la seconde elle devient :

$$\frac{1}{4} DJ = b_1 u^2 = b_1 \times 16 \frac{Q^2}{\pi^2 D^2}$$

d'où en résolvant par rapport à D,

$$D^5 = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2 J}$$

Le coefficient numérique $\sqrt[5]{\frac{64 b_1}{\pi^2}}$ nous servira dans un grand nombre de circonstances.

Les deux premiers problèmes sont ceux qu'on a le plus habituellement à résoudre. Dans le premier, étant donnée une conduite établie, dont on connait, par conséquent le diamètre et la pente, on détermine la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

vitesse et le débit. Le second permet de calculer les dimensions d'une conduite à établir lorsque l'on donne son débit Q et sa pente J.

L'importance de ces deux problèmes principaux doit nous engager à en rechercher la solution la plus précise, c'est-à-dire celle qui tient compte du coëfficient spécial de Darcy, qui convient à chaque diamètre:

84 – Détermination de la vitesse et du débit dans une conduite établie, en tenant compte de la variation du coëfficient b_1 – En mettant dans la valeur de u, tirée de la première équation la valeur moyenne de b_1 donnée par Darcy, en fonction du diamètre, on obtient:

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D\,J}{0,000507 + \frac{0,000\,012\,94}{D}}} = 22,2\,D\sqrt{\frac{J}{D+0,0255}}$$

Cette expression simple qui n'a d'autre inconvénient que de n'être pas calculable par logarithmes donne immédiatement la véritable solution du problème.

La valeur de u étant ainsi déterminée, on obtient Q par la deuxième formule.

85 – Détermination du diamètre d'une conduite d'un débit donné, en cherchant à tenir compte de la variation du coefficient b_1 – La valeur de D peut se mettre sous la forme:

$$D = \sqrt[5]{\frac{64\,b_1}{\pi^2}}\ \sqrt[5]{\frac{Q^2}{J}}$$

et toute la difficulté consiste en ce que b_1 est une fonction de l'inconnue D; mais si l'on fait remarquer que, pour les deux valeurs extrêmes que nous avons déjà considérées:

$$D = 0,06 \qquad \sqrt[5]{\frac{64\,b_1}{\pi^2}} = 0.342\,1$$

$$D = 1,00 \qquad \sqrt[5]{\frac{64\,b_1}{\pi^2}} = 0.320\,6$$

on reconnait que toutes les valeurs du radical sont comprises entre deux nombres très rapprochés, dont la moyenne donnera une exactitude très-satisfaisante dans tous les cas; cette valeur

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

est 0.33135 = $\frac{1}{3}$ et l'on obtient ainsi très-simplement :

$$D = \frac{1}{3}\sqrt[5]{\frac{Q^2}{J}}$$

La vitesse u se calcule ensuite à l'aide de l'équation du débit.

86 — Tables calculées. — Pour faciliter les calculs relatifs aux conduites cylindriques, on a construit des tables numériques qui sont, depuis celle de Prony, d'un usage assez général, et dont voici les dispositions :

I. Les tables de Prony, qui sont maintenant hors d'usage, ne contenaient que deux colonnes :

U	$\frac{1}{4}$DJ.

On voit immédiatement comment elles pourraient servir à la détermination de u quand D et J sont donnés.

Lorsque l'on ne connaît que Q et J on ne peut plus se servir de cette table sans prendre d'abord une valeur de D arbitrairement ; la valeur de Q qui correspond alors à celle de D n'étant pas celle qui est donnée, on modifiera successivement la première valeur de D jusqu'à ce que l'on obtienne, par voie de vérification, la véritable valeur de Q.

II. — Les tables de Mary comprenaient 15 diamètres différents, de 0^m.06 à 0^m.60, et, pour chacun d'eux, les valeurs de Q comprises entre 0^{mc}.000 22 et 0^{mc}.266 00

D	Q	J	U

Pour trouver la dépense Q relative à un diamètre et à une pente donnés, il suffit de chercher dans la table la valeur de Q, qui correspond aux valeurs simultanées de D et de J ; la valeur de U se trouve en regard.

Pour le second problème, on cherche de même les valeurs simultanées des données Q et J, et on lit immédiatement celles des inconnues D et u.

Les tables de Mary sont ainsi les plus commodes, mais elles ne tiennent pas compte de la variation du coëfficient b_1.

III. — La table de Fournayron, qui a le même défaut, est surtout appropriée

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à la solution du second problème. Elle repose sur le calcul de :

$$J^2 Q = 4\pi u (au + bu^2)^2$$

formule à laquelle on arrive en éliminant D entre les deux équations générales.

U	$J^2 Q$	différences	D J	différences

Le produit $J^2 Q$ étant calculé d'après les données, on trouve immédiatement u dans la première colonne et par suite $D = 2\sqrt{\frac{Q}{\pi u}}$

Cette table, qui est insérée dans les comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences, Août 1843, est très-peu employée, et nous n'avons pas à y insister.

Les trois méthodes précédentes ne pourraient plus fournir aujourd'hui de résultats acceptables à moins que l'on y donne à b_1, conformément aux indications de Darcy, une valeur double de sa valeur primitive.

87 — Table de M. Bresse. — La table de M. Bresse, qui comprend toute la série des diamètres depuis 0m.01 jusqu'à 1m.20, est la seule qui tienne compte de la variation du coëfficient b_1 ; c'est celle dont l'emploi doit être aujourd'hui le plus recommandé.

Elle comprend les 6 colonnes suivantes :

D	$\frac{\pi D^2}{4}$	$1000\, b_1$	$\frac{J}{Q^2}$	Log. $\frac{J}{Q^2}$	différences

On voit, par cette disposition, que son emploi repose sur le calcul du rapport $\frac{J}{Q^2}$, qui est indépendant de u.

Si l'on élimine la vitesse u entre les deux formules :

$$\frac{1}{4} DJ = b_1 u^2 \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{4}\pi D^2 U$$

on trouve, en élevant la seconde au carré et en la portant au dénominateur,

$$\frac{J}{Q^2} = \frac{64\, b_1}{\pi^2 D^5} = \frac{64}{\pi^2 D^5}\left[0.000\,507 + \frac{0\,000\,012\,94}{D}\right]$$

et c'est cette valeur, calculée pour toute la série des diamètres, que M. Bresse a insérée dans sa table, avec les logarithmes et les différences.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les deux problèmes principaux se résolvent, au moyen de cette table, avec une grande facilité.

1er Problème; données D et J; inconnues Q et U. En regard du diamètre inscrit dans la 1re colonne on trouve, dans la 4ème, $\frac{J}{Q^2}$ qui est fonction du seul diamètre D; d'où l'on déduit Q, la valeur de U est ensuite $U = \frac{Q}{\frac{1}{4}\pi D^2}$.

2e Problème; données Q et J; inconnues D et U.

En regard de la valeur de $\frac{J}{Q^2}$, qui correspond aux données, dans la 4e colonne, on trouve, à la première, la valeur de D, et ensuite U par la même formule qu'au 1er problème.

88 — Conduite dont la section varie insensiblement. Lorsque la variation de la section n'a lieu que d'une manière insensible, on peut encore se baser approximativement sur l'hypothèse du parallélisme des filets, et par conséquent sur le mode de répartition des pressions, dans une même section, suivant la loi hydrostatique.

Considérons la partie comprise entre deux sections normales infiniment voisines et distantes de ds; soit u, la vitesse en amont $u+du$, la vitesse en aval, z et $z+dz$, p et $p+dp$, les hauteurs et les pressions correspondantes, l'équation générale des quantités de mouvement projetées sur l'axe sera:

$$m\,du = \varpi\,\Omega\,dz\times\theta - \Omega\,dp\times\theta - \varpi\,\chi\,ds\,(au+bu^2)\times\theta.$$

Si l'on met à la place de m sa valeur:

$$m = \frac{\varpi\,\Omega\,u\times\theta}{g}$$

$$\frac{\varpi\,\Omega\,u\,du\times\theta}{g} = \varpi\,\Omega\,dz\times\theta - \Omega\,dp\times\theta - \varpi\,\chi\,ds\,(au+bu^2)\theta;$$

ou en divisant tous les termes par $\varpi\,\Omega\,\theta$,

$$\frac{u\,du}{g} = dz - \frac{dp}{\varpi} - \frac{\chi\,ds}{\Omega}(au+bu^2)$$

ou plus simplement, en représentant par dy la différence de niveau piézométrique,

$$\frac{u\,du}{g} = dy - \frac{\chi\,ds}{\Omega}(au+bu^2)$$

Si l'on veut appliquer cette équation différentielle entre les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sections extrêmes A_0B_0, A_1B_1, il faudra l'intégrer en considérant u, y, s et Ω comme des variables simultanées, ce qui donne:

$$\frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} = y - \int X (au + bu^2) \frac{ds}{\Omega}$$ et si la section est circulaire:

$$\frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} = y - \int \frac{4}{D} (au + bu^2)\, ds$$

ce qui donne:

$$y = \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} + \int \frac{4}{D} (au + bu^2)\, ds$$

ou

$$y = \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} + \int \frac{4}{D} b_1 u^2\, ds$$

Les diamètres extrêmes D_0 et D_1 étant donnés, on a nécessairement par raison de continuité:

$$\frac{\pi D^2 u}{4} = \frac{\pi D_0^2 u_0}{4} = \frac{\pi D_1^2 u_1}{4} = Q$$

d'où: $u = u_1 \frac{D_1^2}{D^2}$ et $u_0 = u_1 \frac{D_1^2}{D_0^2}$, et en substituant:

$$y = \frac{u_1^2}{2g} \left(1 - \frac{D_1^4}{D_0^4}\right) + 4 b_1 u_1^2 D_1^4 \int \frac{ds}{D^5}$$

Le premier terme du second membre est toujours très-petit par rapport au second; dans tous les cas où il y a lieu de considérer les frottements, et l'on se borne le plus souvent à écrire, avec une approximation suffisante;

$$y = 4 b_1 u_1^2 D_1^4 \int \frac{ds}{D^5}$$

ou en remplaçant $u_1^2 D_1^4$ par sa valeur $\frac{16 Q^2}{\pi^2}$

$$y = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2} \int_0^s \frac{ds}{D^5}$$

Cette formule se réduirait à celle qui a été déjà donnée si l'on supposait que le diamètre D reste constant; elle exigera dans certains cas le calcul graphique de l'intégrale. Nous réserverons la notation ξ, pour cette perte de charge due aux frottements seuls.

89. — Conduite à changement brusque de section — Il y a lieu

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de distinguer entre le cas d'un élargissement brusque et celui d'une diminution de diamètre. Nous examinerons séparément l'influence de chacune de ces circonstances, avant de les apprécier dans leur ensemble, lorsqu'elles se présentent, l'une à la suite de l'autre, dans une conduite.

90. — Perte de charge due à un élargissement brusque. — Avant l'élargissement, la vitesse moyenne est u'; après l'élargissement, il se produit des tourbillonnements à la suite desquels les filets redeviennent parallèles, la vitesse moyenne étant alors u''. Le théorème de Bernoulli modifié donne, dans ces conditions :

$$\frac{u''^2}{2g} - \frac{u'^2}{2g} = y - \frac{(u''-u')^2}{2g}$$

d'où l'on tire :

$$y = \frac{u''^2}{2g} - \frac{u'^2}{2g} + \frac{u''^2 - 2u'u'' + u'^2}{2g} = \frac{u''(u''-u')}{g}$$

La perte de charge, que nous désignerons dans ce cas par ξ_2 est ainsi :

$$\xi_2 = \frac{(u''-u')^2}{2g}$$

et la différence de hauteur piézométrique est :

$$y_2 = \frac{u''(u''-u')}{g}$$

u'' étant plus petit que u', cette différence est essentiellement négative; et la hauteur piézométrique augmente de l'amont à l'aval, puisque y, qui représente la diminution de hauteur, est négatif.

91. — Perte de charge due à une diminution de diamètre. La seule perte de charge qu'il y ait lieu de considérer dans ce cas est celle qui résulte de l'élargissement qui suit la section contractée et que nous désignerons par ξ_3 ; soit u' la vitesse dans cette section, u'' la vitesse après l'élargissement, la perte de charge sera :

$$\xi_3 = \frac{(u''-u')^2}{2g} = \frac{1}{2}\,\frac{u''^2}{2g}$$

suivant les indications données au N° 62.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La différence des niveaux piézométriques est alors :

$$y_3 = \frac{u''^2}{2g} - \frac{u'^2}{2g} + \xi_3 = \frac{3}{2}\,\frac{u''^2}{2g} - \frac{u'^2}{2g}$$

et u'' étant plus petit que u', puisque la section qui y correspond est plus grande, il y a lieu de rechercher le signe de y en faisant $u'' = 0{,}62\,u'$, ce qui suffit pour vérifier que la valeur de y est positive et que par conséquent le niveau piézométrique va en diminuant vers l'aval.

92. — Perte de charge due aux coudes. Cette perte de charge a été déterminée d'une manière tout à fait expérimentale.

$$\xi_4 = \frac{u^2}{2g}\,(0.0039 + 0.0186 \times r)\,\frac{c}{n^2}\,;$$

r est le rayon de la circonférence formée par l'axe du coude et c la fraction de cette différence qui est comprise dans le coude.

On cesse de tenir compte de cette formule toutes les fois que le rayon r est plus grand que cinq fois le diamètre de la conduite, $r > 5D$, parce qu'alors la perte de charge, due à la courbure du tuyau, est assez petite pour être négligée.

93. — Récapitulation des différentes pertes de charge. Afin d'y recourir plus facilement dans les applications, nous reproduirons ici les quatre valeurs précédentes des pertes de charge les plus usuelles;

Perte de charge due au frottement $\xi_1 = \frac{l\chi}{\Omega}(au + bu^2) = \frac{4l}{D}(au + bu^2)$

Perte de charge due à un élargissement brusque :

$$\xi_2 = \frac{(u'' - u')^2}{2g}$$

Perte de charge due à une diminution de diamètre :

$$\xi_3 = \frac{1}{2}\,\frac{u''^2}{2g}$$

Perte de charge due à un coude de la conduite :

$$\xi_4 = \frac{u^2}{2g}\,(0.0039 + 0.0186\,r)\,\frac{c}{n^2}$$

Dans l'étude d'une conduite il faudra introduire ces différentes pertes de charge, avec les valeurs appropriées des variables qui entrent

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans leur expression, autant de fois que se renouvelleront les circonstances qui y donnent lieu. Cette remarque permet d'écrire maintenant $\frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} = y - \Sigma\xi$.

94 – Perte de charge dans une conduite à débit constant et à changements brusques de section. L'équation générale :

$$\frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} = y - \Sigma\xi$$

montre qu'il n'y a de différence entre la différence y des niveaux piézométriques et la perte totale de charge que quand les vitesses u_0 et u_1, à l'amont et à l'aval sont différentes,

Si la conduite est longue, cette différence est presque toujours négligeable par rapport aux pertes de charge dues aux frottements et l'on a, avec une approximation suffisante, au moins pour une première appréciation :

$$y = \Sigma\xi$$

Lorsque le frottement est prépondérant, on peut même négliger l'influence des changements de section et écrire simplement :

$$y = \Sigma\xi_1 = \Sigma\frac{4l}{D}b_1 u^2 = \Sigma\frac{64 l b_1 Q^2}{\pi^2 D S}$$

et même, si l'on regarde b_1 comme constant

$$y = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2}\Sigma\frac{l}{DS}$$

95 – Problèmes relatifs aux conduites présentant des changements brusques de section – Les changements brusques de section devant être évités autant que possible, si ce n'est dans le cas où l'on doit absolument chercher à relever le niveau piézométrique sur un point déterminé, les problèmes que l'on a ordinairement à résoudre se réduisent aux deux suivants, en ce qui concerne les conduites déjà établies :

1° Etant donnés les dimensions d'une conduite et l'abaissement total du niveau piézométrique, déterminer les vitesses et le débit.

2° Etant donnés les dimensions et le débit, déterminer l'abaissement du niveau piézométrique et les vitesses.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour résoudre ces problèmes, il suffit de faire remarquer que toutes les vitesses, et par conséquent toutes les pertes de charge, peuvent, eu égard aux diamètres des diverses parties de la conduite qui sont tous connus, être exprimés en fonction de la seule vitesse u_1 à l'extrémité.

Cette substitution étant faite dans l'équation:

$$\frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} = y - \Sigma \xi$$

elle suffira, dans le premier problème, pour déterminer u_1 et par suite:

$$Q = \frac{1}{4} \pi D_1^2 u_1$$

Pour le second problème Q étant connu, cette dernière équation suffira pour déterminer u_1 et la précédente donnera la valeur de y, quand tous les termes de $\Sigma \xi$ auront été exprimés en fonction de u_1.

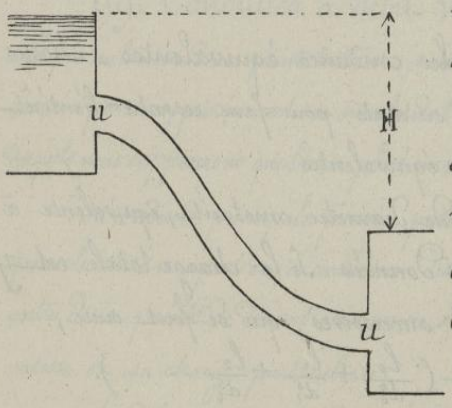
96. Conduite cylindrique aboutissant normalement à deux réservoirs à niveau constant. Nous calculerons cette conduite comme exemple, par la formule:

$$\frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} = H - \frac{1}{2}\frac{u^2}{2g} - \frac{u^2}{2g} - \frac{lx}{\Omega} b_1 u^2$$

Il y a trois pertes de charge à considérer et elles se rapportent toutes trois à la vitesse u dans le tuyau cylindrique, dont le diamètre est partout le même.

$\frac{1}{2}\frac{u^2}{2g}$ est l'expression de la perte de charge au-delà de la contraction, à l'entrée du tuyau.

$\frac{u^2}{2g}$ est la perte due à l'élargissement brusque, au débouché du tuyau dans le second réservoir, où nous supposons la vitesse sensiblement nulle.



$\frac{lx}{\Omega} b_1 u^2$ est la perte due aux frottements dans la conduite.

D'un autre côté, la perte totale de charge est égale à H, différence de niveau entre les deux réservoirs, et si l'on néglige u_0^2 en même temps que u_1, il suffira de résoudre l'équation par rapport à u^2, ce qui donne:

$$u^2 \left(\frac{3}{4g} + \frac{lx b_1}{\Omega} \right) = H,$$

et

$$u^2 = \frac{H}{\frac{3}{4g} + \frac{lx b_1}{\Omega}} = \frac{H}{\frac{3}{4g} + \frac{4 l b_1}{D}}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le débit Q sera : $Q = \frac{1}{4}\pi D^2 u$; D étant toujours le diamètre de la conduite.

On serait arrivé plus vite au même résultat en écrivant immédiatement que la charge totale H est nécessairement égale à la somme des pertes de charge.

97 - Conduites équivalentes. — Deux conduites sont considérées comme équivalentes lorsqu'elles ont même débit sous la même charge.

En faisant abstraction des hauteurs dues aux vitesses et des pertes de charge autres que celles dues aux frottements, la théorie des conduites équivalentes permet souvent de résoudre, d'une manière facile, certains problèmes de remplacement de conduites

Pour une conduite quelconque on a, dans ces conditions :

$$y = \frac{64\, b_1\, Q^2}{\pi^2} \Sigma \frac{l}{D^5} = \frac{64\, b_1\, Q^2}{\pi^2} \int_0^s \frac{ds}{D^5}$$

ce qui montre que deux conduites sont équivalentes quand elles donnent la même valeur pour $\Sigma \frac{l}{D^5}$ ou pour $\int_0^s \frac{ds}{D^5}$

Cette seule condition, entre toutes les variables qui entrent sous le signe de la sommation, suffit pour montrer que le problème des conduites équivalentes admet une infinité de solutions.

98. — Problèmes sur les conduites équivalentes. — Nous nous bornerons aux deux problèmes suivants pour faire ressortir l'intérêt que présente l'étude des conduites équivalentes.

I. Faire une conduite, de diamètre constant, équivalente à la succession de plusieurs conduites données. Si la charge totale est y, on devra avoir, avec les conduites successives, qui se font suite ;

$$y = \frac{64\, b_1\, Q^2}{\pi^2} \left(\frac{l_0}{d_0^5} + \frac{l_1}{d_1^5} + \frac{l_2}{d_2^5} \ldots\ldots \right)$$

et pour la conduite unique :

$$y = \frac{64\, b_1\, Q^2}{\pi^2} \frac{L}{D^5}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La solution est immédiatement donnée, en supprimant le facteur commun, par l'équation :

$$\frac{I}{D^5} = \frac{l_0}{d_0^5} + \frac{l_1}{d_1^5} + \frac{l_2}{d_2^5} + \ldots\ldots = \Sigma \frac{l}{d^5}$$

I étant connu, cette formule servira à calculer le diamètre D.

II. - Faire une conduite équivalente à un faisceau de plusieurs conduites indépendantes; l'équation générale en y étant résolue par rapport au débit donné, pour une conduite unique, deviendra :

$$Q = \sqrt{\frac{\pi^2 y}{64 b_1}} \sqrt{\frac{D^5}{L}}$$

Pour plusieurs conduites distinctes, de même charge y, et de débits différents $q_0\ q_1\ q_2 \ldots\ldots$, on aurait de même :

$$q_0 + q_1 + q_2 = \sqrt{\frac{\pi^2 y}{64 b_1}} \left(\sqrt{\frac{d_0^5}{l_0}} + \sqrt{\frac{d_1^5}{l_1}} + \ldots\ldots \right)$$ et,

pour que le débit de la première conduite soit égal à celui de toutes les autres, il suffira de satisfaire à la condition :

$$Q = q_0 + q_1 + \ldots\ldots = \Sigma q$$

qui revient à :

$$\sqrt{\frac{d^5}{L}} = \sqrt{\frac{d^5}{l_0}} + \sqrt{\frac{d_1^5}{l_1}} + \sqrt{\frac{d_2^5}{l_2}} + \ldots\ldots = \Sigma \sqrt{\frac{d^5}{l}}$$

Le mode de solution resterait le même dans le cas où les conduites primitives seraient de diamètres variables, ou présenteraient des sinuosités.

99. Conduites à débit variable. - Généralement une conduite ne relie pas seulement deux points extrêmes, mais elle est en outre destinée à fournir de l'eau, sur son parcours, par un certain nombre de tuyaux de dérivation, à la naissance de chacun desquels nous supposerons que l'on a placé un robinet qui permette d'en régler le débit.

La conduite principale pourra présenter des changements de diamètre, mais pour la mise en équation, on considèrera distinctement chacune des portions comprises entre deux points de dérivation, comme si elle avait son diamètre particulier, sa vitesse et sa charge particulières.

Le débit se trouve réduit, à chaque dérivation, d'un certain volume d'eau et il faudra avoir égard à cette diminution pour l'évaluation des différentes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

vitesses dans les parties successives de la conduite.

Un débit de rang quelconque sera équivalent au débit de rang suivant augmenté de celui de la dérivation, ce qui donnera autant d'équations de débit qu'il y aura de dérivations, toutes de la forme :

$$Q_{n-1} = Q_n + q_{n-1}$$

Quant aux vitesses correspondantes, elles seront toujours données, en fonction des débits, par des relations $u = \frac{4Q}{\pi D^2}$, et le nombre de ces équations, pour chacun des débits, dépendra du nombre des diamètres qui y correspondront.

Entre deux points de dérivation, on ne considèrera, la plupart du temps que les pertes de charge dues au frottement et l'on aura ainsi d'une manière générale :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{u^2_n}{2g} - \frac{u^2_{n-1}}{2g} + \Sigma\xi$$

ou plus simplement, et en négligeant la différence entre les deux premiers termes du second membre

$$y_{n+1} - y_n = \Sigma\xi$$

équation dans laquelle y_{n+1} et y_n représentent respectivement les différences de charge par rapport à l'origine de la conduite.

Il y aura autant d'équations de cette forme que de dérivations plus une ; les pertes de charge seront exprimées, suivant les circonstances, soit en fonction des vitesses, soit en fonction des débits, et en additionnant toutes les équations semblables, on trouvera en définitive :

$$y_n - y_0 = \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} + \Sigma\xi.$$

ou, en négligeant la même différence, $y_n - y_0 = \Sigma\xi$; ce qui fournira une équation supplémentaire, qui déduite des premières pourra, au besoin, remplacer l'une quelconque d'entr'elles.

100. Tableau des équations. Nous pouvons ainsi inscrire toutes ces équations en différents groupes, dans chacun desquels nous considèrerons successivement chaque portion distincte de la conduite.

1° Equations de débit, N°. 1.

$$\begin{aligned} Q_0 &= Q_1 + q_0 \\ Q_1 &= Q_2 + q_1 \\ Q_2 &= Q_3 + q_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_{n-1} &= Q_n + q_{n-1} \end{aligned}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En totalité n équations de débit

2.° Equations de vitesses, N.° 2, répondant à chacun des diamètres, résolues chacune en fonction de la vitesse :

$$u_0 = \frac{4 Q_0}{\pi D_0^2}$$

$$u_1 = \frac{4 Q_1}{\pi D_1^2}$$

.....

$$u_{n-1} = \frac{4 Q_{n-1}}{\pi D^2_{n-1}}$$

En totalité n équations du 2.e groupe

3.° Equations de charges, N.° 3, de la forme :

$$y_1 - y_0 = \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} + \frac{l_0 b_1}{D_0} u_0^2$$

Toutes ces équations étant de même forme seront suffisamment caractérisées si nous indiquons que les pertes de charge ξ dues au frottement sont exprimées en fonction des vitesses et des diamètres.

On aura ainsi :

$$y_0 = \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} + \Sigma \xi (u_0 D_0)$$

$$y_1 - y_0 = \frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} + \Sigma \xi (u_1 D_1)$$

.....

$$y_n - y_{n-1} = \frac{u_n^2}{2g} - \frac{u_{n-1}^2}{2g} \Sigma \xi (u_{n-1} D_{n-1})$$

Encore n équations de charge.

Le nombre des équations distinctes s'élève ainsi à $3n-1$, savoir :

$n-1$ équations N.° 1

n équations N.° 2

n équations N.° 3

Si l'on additionne toutes les équations (3) on trouve une nouvelle relation (3 bis), qui n'exprime pas autre chose que les précédentes, mais qui nous sera fort utile pour la solution de quelques problèmes.

$$y_n - h = \frac{u_n^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} + \Sigma \xi (u D)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Tous les diamètres entrent dans cette dernière relation dont le premier membre est l'expression de la charge totale entre les deux extrémités de la conduite. On pourrait en outre obtenir un nouveau groupe d'équations (4) en exprimant les charges en fonction des débits, ce qui donnerait comme équations équivalentes aux précédentes :

$$y_0 = \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} + \Sigma\, \xi\ (D_0 \cdot Q_0)$$

$$y_1 - y_0 = \frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} + \Sigma\, \xi\ (D_1 \cdot Q_1)$$

- -

$$y_n - y_{n-1} = \frac{u_n^2}{2g} - \frac{u_{n-1}^2}{2g} + \Sigma\, \xi\ (D_{n-1}\, Q_{n-1})$$

et aussi par voie d'addition une nouvelle équation (4 bis)

$$y_n = h = \frac{u_n^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} + \Sigma\, \xi\ (D\, Q)$$

101. – Nombre des variables. Les longueurs l étant presque toujours au nombre des données, nous ne les avons pas mises en évidence dans les équations, et nous ne les compterons pas non plus au nombre des variables, qui se réduiront ainsi aux suivantes :

n	débits	Q
$n-1$	débits	q
n	vitesses	u
n	diamètres	D
n	charges	y

Au Total : $5\,n-1$ variables

Le nombre des équations distinctes étant $3\,n-1$, chaque problème pourra comporter $2\,n$ données et $3\,n-1$ inconnues. Il y a lieu de faire remarquer toutefois que le nombre des variables pourrait être de beaucoup

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diminué lorsque certaines valeurs n'auront à subir aucun changement en passant d'une portion de la conduite à la suivante.

102.- Problèmes sur les conduits à débit variable. Ces problèmes sont relatifs aux conduites construites ou aux conduites à construire ; on y néglige ordinairement les pertes de charges dues à la variation des vitesses et même les termes relatifs aux hauteurs dues aux vitesses. Parmi ces problèmes, nous en indiquerons trois seulement, qui sont les plus pratiques et qui se résolvent tous trois au moyen des $3n-1$ équations mentionnées au paragraphe précédent.

Les deux premiers de ces problèmes sont relatifs à une conduite construite

103.- Mode de solution des trois problèmes principaux.

I. On donne toutes les Dimensions et toutes les charges, (les n valeurs de D et les n valeurs de y) et on se propose de déterminer tous les débits et toutes les vitesses

Les inconnues sont les n valeurs de Q, les $n-1$ valeurs de q et les n valeurs de u, ensemble $3n-1$ quantités à déterminer.

Les n équations de groupe (3) donnent immédiatement les n valeurs de u, puisque tous les diamètres et toutes les charges sont connus ; les équations (2) fournissent ensuite les n débits Q, qui permettent de calculer les $n-1$ valeurs de q par les équations (1)

II. Etant données les dimensions, la charge totale et le débit de chaque dérivation, on se propose de déterminer les débits aux différents points de la conduite, les charges et les vitesses.

Données n valeurs de D
$n-1$ valeurs de q
1 valeur de y_n

Total : $2n$ données.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Inconnues n valeurs de Q
n valeurs de u
$n-1$ valeurs intermédiaires de y

Total $3n-1$ inconnues.

Les équations (1) permettent tout d'abord d'exprimer toutes les les valeurs de Q en fonction de Q_n, et en substituant ces valeurs dans l'équation (4 bis) où y_n se trouve connu, cette équation donne immédiatement Q_n; les $n-1$ équations du 1er groupe fournissent ensuite les $n-1$ autres valeurs de Q; enfin les $n-1$ charges inconnues sont fournies par les équations (4) et les n vitesses par les équations (2)

III - Etant donnés le tracé de la conduite avec les positions des orifices de dérivation, toutes les charges, le débit final, et celui des dérivations, on se propose de déterminer les débits inconnus, les diamètres et les vitesses.

Données n valeurs de y
1 valeur de Q_u
$n-1$ valeurs de q

Total $2n$ données

Inconnues $n-1$ valeurs de Q
n valeurs de D
n valeurs de u

Total $3n-1$ inconnues.

Les équations (1) suffisent pour calculer immédiatement les $n-1$ valeurs de Q; les équations (4) donneront ensuite les n diamètres et les équations (2) les n vitesses.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Toutes ces opérations se simplifieront beaucoup dans les applications par suite des valeurs qui restent souvent les mêmes pour plusieurs des variables successives de même nom.

104. Observations complémentaires sur le troisième problème général. Les équations qui donnent les diamètres sont du 5e degré par rapport à ces inconnues, mais on pourra dans la plupart des cas se servir utilement des tables qui répondent à la formule:

$$\frac{\Delta I}{L} = \frac{64\, b_1\, Q^2}{D^5}$$

Si l'on veut tenir compte des hauteurs dues aux vitesses et de toutes les pertes de charge étrangères au frottement, il sera plus convenable de les négliger d'abord et d'y revenir ensuite par voie d'approximations successives.

105. Condition à laquelle doivent satisfaire les charges aux points de dérivation. En tête d'une dérivation, la pression doit toujours être supérieure à celle qui est strictement nécessaire au débit qu'elle doit fournir jusqu'à l'extrémité de cette conduite. Il est même bien de relever cette charge de $0^m.50$ à $0^m.60$ par rapport à celle qui conviendrait à la longueur λ de cette conduite et à son diamètre δ. C'est pour cela que l'on est quelquefois conduit à augmenter en certains points le diamètre de la conduite principale, ce qui, comme nous l'avons vu, a pour effet de relever le niveau piézométrique.

On sera quelquefois obligé d'augmenter davantage cette charge si l'un des autres points de dérivation, à l'aval, exige lui-même une charge plus élevée.

106. Conduite à débit uniforme sur tout son parcours. Lorsqu'une longue conduite doit desservir, sur tout son parcours, un grand nombre de dérivations généralement espacées d'une façon à peu près

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

régulière, on peut l'assimiler à une autre conduite qui débiterait uniformément la même quantité d'eau sur chaque unité de longueur de son parcours et cette condition en simplifierait l'étude d'une façon toute particulière, en permettant d'y appliquer une seule et même équation.

Dans une telle conduite, à section constante, la différentielle dy de la charge satisferait à l'équation:

$$dy = \frac{64\,b_1}{\pi^2 D^5}\, Q^2\, ds;$$

ds étant un élément de la longueur et Q le débit de la section correspondante.

Cette formule ne pourra être intégrée que si on élimine, dans le second membre, l'une des deux variables Q ou S; à cet effet, représentant par Q_0 le débit à l'entrée de la conduite, par Q_1 le débit à la sortie et par P le débit total des dérivations, débit que l'on suppose réparti uniformément sur toute la longueur, la considération du débit total donne:

$$Q_0 = Q_1 + P$$

et, celle du débit Q, à la distance S de l'origine, conduit à:

$$Q_0 = Q + P\,\frac{S}{l};$$

relation qui, différentiée par rapport aux deux seules variables Q et S, donne:

$$0 = dQ + \frac{P\,ds}{l} \quad \text{d'où:} \quad ds = -\frac{l}{P}\,dQ.$$

En substituant cette valeur dans dy, il vient:

$$dy = -\frac{64\,b_1 l}{\pi^2 D^5 P}\, Q^2\, dQ$$

et, en intégrant:

$$y = -\frac{64\,b_1 l}{\pi^2 D^5 P}\int_{Q_0}^{Q_1} Q^2\,dQ = \frac{64\,b_1 l}{\pi^2 D^5 P}\int_{Q_1}^{Q_0} Q^2\,dQ = \frac{64\,b_1 l}{\pi^2 D^5 P}\left(\frac{Q_0^3}{3} - \frac{Q_1^3}{3}\right)$$

puis, en mettant pour Q_0 sa valeur déjà exprimée en fonction de Q et de P, et en développant:

$$y = \frac{64\,b_1 l}{\pi^2 D^5 P}\left(\frac{Q_1^3 + 3Q_1^2 P + 3Q_1 P^2 + P^3}{3} - \frac{Q_1^3}{3}\right) = \frac{64\,b_1 l}{\pi^2 D^5}\left(Q_1^2 + Q_1 P + \frac{P^2}{3}\right).$$

Cette équation permettra de déterminer l'une des quatre quantités y, D, Q, dP lorsque les trois autres auront été données.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On peut comparer, au moyen de cette équation, la différence du débit d'une conduite à dérivation uniforme, suivant que l'on dépenserait toute l'eau par la déviation seule, ou exclusivement par l'extrémité de la conduite.

Dans le premier cas $Q_1 = 0$ réduit l'équation à :

$$y = \frac{64\, b_1 l}{\pi^2 D^5} \frac{P'^2}{3},$$

en désignant par P' le débit total de la dérivation uniforme, dans ce cas particulier.

Pour la même charge y, on aurait alors :

$$\frac{P'^2}{3} = Q_1^2 + P Q_1 + \frac{P^2}{3} :$$

il est facile de voir approximativement dans quelle proportion le débit total serait augmenté.

Pour cela, remarquons que le second membre est plus grand que $\left(Q_1 + \frac{P}{2}\right)^2$, ce qui conduit à $\frac{P'^2}{3} > \left(Q_1 + \frac{P}{2}\right)^2$;

$$P' > \sqrt{3}\left(Q_1 + \frac{P}{2}\right) ;$$

ou : $$P' > 1{,}73\, Q_1 + 0{,}86\, P.$$

D'un autre côté, on peut encore faire remarquer que le second membre de l'équation est plus petit que $\left(Q_1 + \frac{P}{\sqrt{3}}\right)^2$, ce qui conduit à :

$$\frac{P'^2}{3} < \left(Q_1 + \frac{P}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$P' < \sqrt{3}\left(Q_1 + \frac{P}{\sqrt{3}}\right)$$

$$P' < 1{,}73\, Q_1 + P.$$

Les deux inégalités résolues par rapport à P', conduisent à des valeurs fort rapprochées l'une de l'autre, et dont la moyenne donne très approximativement :

$$P' = 1{,}73\, Q_1 + 0{,}93\, P,$$

Dans ces conditions le débit est augmenté de $0{,}73\, Q_1$ et diminué de $0.07\, P$ seulement.

La même méthode peut être appliquée au cas où, à l'inverse, la dérivation serait réduite à Zéro.

Les inégalités sont alors :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$Q' > Q'_1 + 0.50\,P\,;$$

$$Q' < Q_1 + 0.58\,P\,;$$

d'où : $$Q' = Q_1 + 0.54\,P\,.$$

Le débit total est diminué de 0,46 P

En comparant de la même façon le débit exclusif par dérivation au seul débit par l'extrémité de la conduite on trouverait encore plus facilement :

$$\frac{P'^2}{3} = Q_1'^2 \quad \text{d'où} \quad Q' = 0,58\,P'$$

Le débit dans ce dernier cas est réduit aux 58 centièmes de ce qu'il est dans le premier.

107. – Conduite à dérivation, alimentée par deux réservoirs. – Une conduite AB étant alimentée par deux réservoirs à niveaux constants, celui de B étant au-dessous de celui de A d'une hauteur h, on propose de déterminer la part de chacun de ces réservoirs dans le débit total de toutes ces dérivations dont le mode de répartition sur la longueur L est supposé connu.

Ce problème qui exige de longs tâtonnements dans le cas général, peut se résoudre directement si l'on suppose que la conduite puisse être assimilée à celle dont les dérivations seraient uniformément réparties.

Il suffirait, dans tous les cas, de déterminer les longueurs L et $L-L'$ respectivement alimentées par les réservoirs A et B.

Soit P le débit total et C le point de séparation des deux longueurs L' et $L-L'$; si la conduite est à dérivation uniforme, le débit de AC sera $P\frac{L'}{L}$ et celui de BC, $P\frac{L-L'}{L}$, de sorte qu'en appliquant l'équation du N.° précédent, pour le cas où tout le débit a lieu par la dérivation, et en remarquant que, si du côté de AC la charge de A en C est représentée par y, elle sera $h-y$ de C en B, on aura :

$$y = \frac{64\,b_1 L'}{\pi^2 D^5}\,\frac{P^2 L'^2}{3\,L^2} = \frac{64\,b_1}{\pi^2 D^5}\,\frac{P^2}{3}\,\frac{L'^3}{L^2}\,;$$

$$h-y = \frac{64\,b_1 (L-L')}{\pi^2 D^5}\,\frac{P^2}{3}\,\frac{(L-L')^2}{L^2} = \frac{64\,b_1}{\pi^2 D^5}\,\frac{P^2}{3}\,\frac{(L-L')^3}{L^2}\,;$$

et par addition $h = \frac{64\,b_1}{\pi^2 D^5}\,\frac{P^2}{3\,L^2}\left\{L'^3 + (L-L')^3\right\}$, d'où l'on tirera L'.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Deuxième solution. — On pourrait résoudre la question telle qu'elle a été posée, par quelques tâtonnements, sans avoir à supposer que la dérivation est uniforme; on chercherait d'une autre manière, à déterminer le point de partage C, par voie de vérification.

Choisissons le d'abord arbitrairement, à la suite de la dérivation A par exemple, on connaîtra alors le débit total de AC.

$$Q_0 = q_0 + q_1 + q_2 \ldots\ldots\ldots + q_n$$

puisque le débit Q_0 doit être égal à celui de toutes les dérivations échelonnées de A en C: on aura la valeur de y_0 par la relation:

$$y_0 = \frac{64\, b_1 l_0}{\pi^2 D^5}\, q_0^2$$

et, ainsi de suite, toutes les différences de charges jusqu'en C, où elle sera y_n.

On opèrera de la même façon pour BC, ce qui donnera une seconde valeur y'_n de la charge en C.

Si les deux valeurs de y_n et y'_n se trouvaient égales entr'elles, le problème serait résolu: le point C serait le véritable point de partage; sinon il faudra déplacer le point C, et recommencer la même série de déterminations jusqu'à ce que l'égalité précédente soit satisfaite.

108. — Conduites complexes — On appelle conduites complexes, celles dans lesquelles l'eau peut passer d'un point à un autre par plusieurs chemins différents; elles sont ainsi formées de conduites distinctes, ayant des points communs, que l'on désigne sous le nom de points d'embranchement; ces points d'embranchement seront toujours réunis par des conduites simples, avec ou sans dérivation, et l'on est ainsi conduit à considérer, d'une manière générale, un nombre de m de points d'embranchement, à chacun desquels aboutiraient respectivement des conduites d'amenée et des conduites de départ, en nombre quelconque.

A partir de chacun des points d'embranchement, et à une petite distance, les filets liquides prennent, dans chacune des conduites simples, des mouvements parallèles, mais il y a lieu cependant d'admettre qu'il se produira dans

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'espace compris entre les points de départ et d'arrivée des différents conduits, des tourbillonnements résultant de ce que les courants d'amenée doivent se mélanger pour se répartir ensuite dans les différents canaux de sortie.

L'expérience semble montrer que les pressions ne sont pas absolument les mêmes dans les différentes directions, mais les différences sont certainement très-petites, et les questions que comporte l'étude des conduites complexes ne peuvent, jusqu'ici, être soumises au calcul qu'en admettant l'existence d'un niveau piézométrique unique au débouché de toutes les conduites qui aboutissent au même point d'embranchement; la charge en ce point d'embranchement sera désignée par y.

109. - Équations relatives aux conduites complexes. -

Soit m le nombre des points d'embranchement; il y aura lieu de considérer m cotes de charge correspondantes, et d'exprimer que le débit des conduites d'amenée à ces embranchements est égal au débit des conduites de départ, ce qui, en regard de m inconnues y, conduit à m équations de la forme (1) $\Sigma q_a = \Sigma q_s$, en représentant respectivement par q_a et par q_s les débits d'entrée et de sortie, pour le même point d'embranchement.

D'un autre côté, n étant le nombre des conduites simples qui aboutissent aux divers embranchements, chacune de ces conduites donnera lieu à une équation:

$$(2) \qquad y' - y = f(q)$$

en désignant par q son débit, par y la charge au point d'embranchement où elle s'alimente, et par y' celle du point d'embranchement où elle se déverse; il y aura toujours n de ces équations.

Le nombre total des équations s'élève ainsi à $m+n$, m relations exclusives entre les débits, et n relations entre ces débits et les charges.

Le nombre total des variables s'élève également à $m+n$: m

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

charges piézométriques et n débits, et l'on a ainsi m+n équations appartenant à deux groupes différents (1) et (2), entre m+n variables de deux natures différentes.

Il suffirait, quelles que soient les données, de résoudre ces m+n équations, mais les éliminations entr'elles seraient toujours difficiles même en négligeant les hauteurs dues aux vitesses et toutes les pertes de charge autres que celles dues aux frottements.

110 - Conduite complexe déjà établie. - Etant donnés les dimensions de toutes les parties de la conduite, ses conditions de dérivation, les niveaux dans les réservoirs qui en font partie, on se propose de calculer les débits de toutes les conduites simples, avec ou sans dérivation, qui composent la conduite complexe.

Le débit de chacune des conduites simples, avec ou sans dérivation, se trouve lié aux charges qui correspondraient aux points d'embranchement par les équations (2) mais ces charges ne sont pas connues, et il ne faut pas songer à les déterminer par voie d'élimination.

On cherchera d'abord, suivant la méthode indiquée par M. Bélanger, à se fixer sur l'ordre dans lequel la distribution des charges paraîtra devoir déterminer le mouvement de l'eau dans un sens prévu, et même on fera une hypothèse numérique sur chacune d'elles.

Ces hypothèses conduiront à certaines valeurs de q, qui satisferaient au problème si elles vérifiaient les équations (1). Cela n'aura certainement pas lieu, dès les premières hypothèses, mais les différences qui en résulteraient entre les débits d'entrée et de sortie aux différents points d'embranchement, montreront le sens dans lequel ces premières hypothèses devraient être modifiées, et l'on devra poursuivre successivement ces modifications jusqu'à ce que les équations du débit soient satisfaites.

Il peut toutefois arriver que l'on se soit tout d'abord mépris sur le

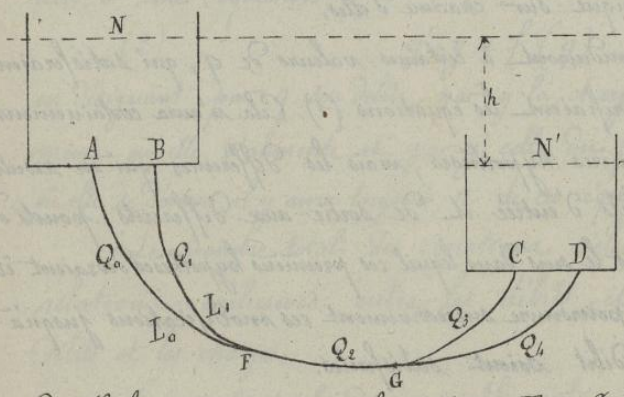
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sens du mouvement dans quelques unes des conduites ; la méthode de tatonnement, qui vient d'être indiquée, ne conduit pas alors à la solution avant qu'on ait modifié, à cet égard, l'ordre de distribution des charges et il faut recommencer à nouveau par rapport à d'autres hypothèses plus plausibles.

III. – Conduite complexe à établir. – Lorsqu'il s'agit d'établir une conduite, on sait les conditions auxquelles elle doit répondre ; la position des orifices, le tracé des axes, les niveaux de l'eau dans les réservoirs, les sens des mouvements, la dépense de chaque conduite simple et de chacune de ses dérivations sont alors les données du problème, et toutes les équations du groupe (1) deviennent des équations de condition. Il ne reste donc que n équations entre m cotes piézométriques et n diamètres ; le problème étant complètement indéterminé, il y a lieu de choisir, entre plusieurs des solutions qu'il comporte, celle qui conviendrait le mieux, soit au point de vue de la dépense, soit au point de vue de certaines conditions accessoires.

Dans cette situation, on est encore conduit, avec plus de raison, à choisir un système de distribution des charges, qui soit compatible avec le sens du mouvement de l'eau, et l'on calcule, dans cette hypothèse, les diamètres des conduites simples, en tenant compte de leur débit, et de leurs dérivations.

112. – Bassins réunis par une conduite qui se bifurque à ses deux extrémités. – Etant donnés le tracé, les diamètres et la charge totale, déterminer les charges et les débits, lorsque toute l'eau doit s'écouler du bassin N au bassin N'.



On néglige les pertes de charge à l'entrée des différentes conduites et l'on opère par la méthode de Belanger, parce que les points F et G doivent être considérés comme

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

points d'embranchement. Il y a dès lors 2 embranchements et 5 conduites, ce qui correspond à sept équations, parmi lesquelles deux équations de condition entre les débits :

$$(1) \qquad Q_2 = Q_0 + Q_1 = Q_3 + Q_4 .$$

Les cinq autres équations sont, groupe N°. 1 :

$$AE \quad y_0 = \frac{64\, b_1 L_0}{\pi^2 D_0^5}$$

$$BE \quad y_0 = \frac{64\, b_1 L_1}{\pi^2 D_1^5}$$

$$FG \quad y_1 - y_0 = \frac{64\, b_1 L_2}{\pi^2 D_2^5}$$

$$GC \quad h - y_1 = \frac{64\, b_1 L_3}{\pi^2 D_3^5}$$

$$GD \quad h - y_1 = \frac{64\, b_1 L_4}{\pi^2 D_4^5}$$

S'il n'y avait à tenir compte d'aucune résistance la charge serait partout égale à h et, en particulier la charge y_0; les résistances dues au frottement diminueront nécessairement cette charge et l'on ne saurait admettre pour y_0 aucune valeur supérieure à h.

On choisira donc arbitrairement une valeur de y_0 comprise entre 0 et h; les deux premières équations permettront de calculer, dans cette hypothèse, Q_0 et Q_1 ainsi que leur somme Q_2, qui substituée dans la troisième équation donnera y_1; cette valeur de y_1 étant connue, ainsi que celle de h, les deux dernières équations suffiront pour obtenir Q_3 et Q_4, et il faudra ensuite vérifier si la somme de ces deux débits est égale à Q_2.

Si elle est trop grande, ce sera l'indice que y_0 est trop petit par rapport à h et il faudra recommencer avec une valeur plus grande de y_0.

Dans le cas où l'on voudrait que tout le débit se fit en G, on devrait considérer les deux parties AG et DG de la conduite comme indépendantes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ecoulement de l'eau dans les Canaux découverts.

113. – Indications Générales. L'écoulement de l'eau dans les canaux découverts donne lieu à des frottements contre les parois et à des résistances provenant de la viscosité du liquide, qui sont encore proportionnels à la longueur L du parcours, au périmètre mouillé X et à une fonction de la vitesse moyenne u qui répond au débit; cette fonction est représenté soit par $au+bu^2$, soit par $b_1 u^2$, a, b et b_1 étant des coefficients à déterminer par l'expérience. Le périmètre mouillé est, dans ce cas, le contour de la section de la paroi qui est en contact avec le liquide, par un plan perpendiculaire au lit, sans tenir compte de la surface libre.

114. – Résistance due aux frottements. – Les coefficients proposés par de Prony, d'après Dubuat, pour la formule:

$$F = \varpi X (au+bu^2)$$

sont:

$$a = 0.000\ 044$$
$$b = 0.000\ 309$$

Mais les expériences plus récentes de Darcy et de M. Bazin, sur des canaux à sections rectangulaires et à sections trapézoïdales, ont permis d'assigner au coëfficient b_1 de la formule monome

$$F = \varpi L X b_1 u^2$$

des valeurs mieux appropriées aux différentes natures de parois; voici ces valeurs:

Parois très-unies, en ciment lisse ou bois raboté.... $0.000\ 15 \left(1+\frac{0.03}{R}\right)$;

Parois unies, pierres de taille, briques, planches... $0.000\ 19 \left(1+\frac{0.07}{R}\right)$;

Parois peu unies, maçonnerie de moëllons.... $0.000\ 24 \left(1+\frac{0.25}{R}\right)$;

Parois en terre..... $0.000\ 28 \left(1+\frac{1.25}{R}\right)$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$R = \frac{\omega}{X}$ étant le rayon moyen, applicable seulement aux sections qui ressemblent à celles sur les quelles les déterminations des expérimentateurs ont été faites.

On se contente le plus souvent de prendre, suivant Eadini :

$$F = 0.0004\ \varpi\ L\ X\ u^2$$

Le travail de frottement est comme précédemment, pour un poids P de liquide écoulé:

$$Tf = \frac{LX}{R}\ b,\ u^2 \times P$$

115.– Observations sur la répartition des vitesses – La vitesse u, en fonction de laquelle le frottement est exprimé, est la vitesse moyenne du courant, c'est-à-dire celle qui répond à la condition $q = \Omega U$ et, au point de vue rationel, il aurait été plus désirable que la résistance put être calculée d'après les vitesses relatives qui la déterminent; mais il serait très-difficile de prendre ces vitesses, variables dans chacune des sections, pour servir de base dans l'expression de la résistance.

La vitesse contre les parois est généralement plus petite que celle des filets voisins et le filet le plus rapide est ordinairement celui qui en est le plus éloigné.

Entre la vitesse V du filet le plus rapide et la vitesse moyenne u, on a constaté la relation approximative :

$$u = 0.8\ V$$

et, d'un autre côté, en désignant par W la vitesse du filet qui chemine au contact du fond, dans le même plan vertical que le filet de vitesse maximum V, on a trouvé :

$$u = \frac{V+W}{2}$$

D'où résulterait :

$$W = 2\ U - V = 0.6\ V = \frac{3}{5}\ V \qquad \text{ou } 0.6\ V$$

De Prony a établi une relation plus exacte $u = V\ \frac{V+2.37}{V+2.15}$, qui revient à très peu de chose près à la précédente, lorsque les vitesses sont comprises dans les limites de celles des cours d'eau ordinaires.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

M. Defontaine, en désignant par v la vitesse à la profondeur y au-dessous de la surface supérieure, a proposé, pour le Rhin, la relation :

$$v = 1.226 - 0.175\, y^2$$

On voit par la complication du problème comment on a été conduit à prendre la vitesse moyenne pour base de l'évaluation des résistances.

Les rapports entre les différentes vitesses doivent d'ailleurs être très-variables suivant la forme du profil, comme le sont eux-mêmes les coefficients de frottement, et nous ne nous occuperons que de profils assez réguliers pour être assimilés à ceux des canaux de Darcy et de M. Bazin.

A / Mouvement permanent uniforme.

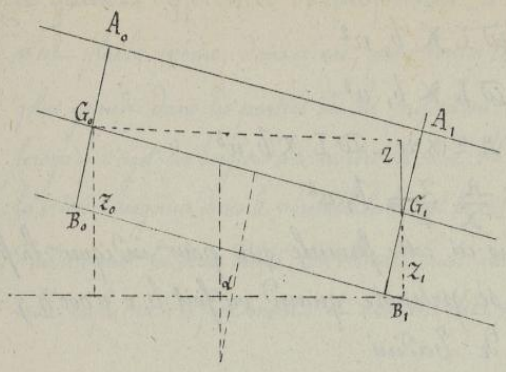
116 — Equation du mouvement uniforme et permanent dans un Canal découvert. Puisque le mouvement doit être uniforme pour chacun des filets liquides, le canal est partout de même section et de même pente et il suffit de considérer une portion de la lame d'eau comprise entre deux sections perpendiculaires au lit, pour pouvoir déterminer, en tenant compte des frottements, l'équation du mouvement uniforme. La surface libre est nécessairement un plan parallèle au lit, et tous les filets se mouvant parallèlement, la pression en un point quelconque est conforme à celle de la loi hydrostatique.

On pourrait indifféremment recourir dans ce but au principe des quantités de mouvement, ou au principe du travail. — Nous ferons usage du premier qui donne ici :

$0 = \Sigma$ projections des forces, et nous prendrons pour axe de projection une Droite parallèle au lit.

Les forces projetées sont :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



1° Poids de la nappe d'eau de A_0 à A_1.

$$\varpi \Omega \times A_0 A_1$$

Cette force est verticale et il faut la projeter sur l'axe, c'est-à-dire la multiplier par $\sin\alpha$ ou par $\frac{z_0 - z_1}{A_0 A_1}$ ce qui donne en définitive pour la projection suivant l'axe, et en désignant par Z la différence $z_1 - z_0$, $\varpi \Omega Z$.

2° Les pressions s'équilibrent en amont et en aval parce que la hauteur de la nappe est constante.

3° Frottement des parois $\varpi L \chi b_1 u^2$

L'équation des quantités de mouvement se réduit donc à :

$$o = \varpi \Omega Z - \varpi L \chi b_1 u^2$$

d'où

$$\frac{\Omega Z}{\chi L} = b_1 u^2$$

en continuant à désigner le rapport $\frac{\Omega}{\chi}$ par R, le rapport $\frac{Z}{L}$ par i; et en remarquant que $u = \frac{Q}{\Omega}$, on peut écrire l'équation du mouvement sous les deux formes suivantes :

$$Ri = b_1 u^2 = b_1 \frac{Q^2}{\Omega^2}$$

Cette équation permet de résoudre immédiatement les problèmes les plus usuels, dans le cas du mouvement permanent.

116 bis. — Application du principe du travail. — On arriverait au même résultat en appliquant le principe du travail.

$$o = \Sigma \text{ Travaux des forces.}$$

1° Poids $\varpi \Omega \times A_0 A_1$

Travail $\varpi \Omega \times A_0 A_1 \times u \sin\alpha = \varpi \Omega Z u$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2°. Pressions : travail nul

3°. Frottement $-\varpi L \times b_1 u^2$;

Travail $-\varpi L \times b_1 u^3$;

En résumé $o = \varpi \Omega z \times u - \varpi L \times b_1 u^3$

comme précédemment $\frac{\Omega}{X} \frac{z}{L} = b_1 u^2$

et nous ne rappelons ici cette formule que pour indiquer la forme simple sous laquelle elle se présente quand on fait $b_1 = 0{,}000.4$; on obtient alors la formule de Vadini

$$u = 50 \sqrt{Ri}$$

117. – Problème I. – Déterminer l'inclinaison du lit d'un canal dont la section et le débit sont donnés

Données $\Omega R Q$,

Inconnue i,

i est donné par l'équation précédente, sous sa deuxième forme :

$$i = \frac{b_1}{R} \frac{Q^2}{\Omega^2}$$

118 – Problème II. – Déterminer le débit lorsqu'on connaît la section et l'inclinaison du lit du Canal.

Données $\Omega R i$,

Inconnue Q

La solution est encore directe :

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{Ri}{b_1}}$$

119. – Problème III. – Détermination de la Vitesse. – Cette détermination découle encore de la même formule précédente qui donne directement :

$$u = \frac{Q}{\Omega} = \sqrt{\frac{Ri}{b_1}}$$

120. – Problème III. – Cas dans lequel le lit présente transversalement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

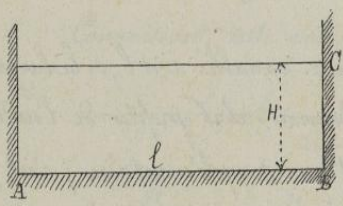
de grandes différences de profondeur. — L'influence relative du frottement n'est plus la même, dans ce cas; pour toutes les parties du lit; elle sera beaucoup plus grande dans les parties où la profondeur d'eau sera faible, comme par exemple lorsqu'il s'agit des berges d'une rivière débordée. Il convient alors de calculer séparément la vitesse moyenne dans le véritable lit, et la vitesse moyenne dans le lit accessoire, afin d'additionner les deux débits. On obtient ainsi un résultat plus en rapport avec la véritable influence du frottement et avec le débit réel.

121. Problème IV. — Connaissant le débit, l'inclinaison et le profil transversal d'un canal, déterminer la hauteur du niveau et par suite la section et son périmètre mouillé.

Les formules ne permettent pas, en général, de résoudre directement la question, mais on obtient assez facilement la hauteur cherchée en se donnant arbitrairement une première valeur de H, qui, introduite dans l'équation générale, entraîne des valeurs correspondantes pour Ω et R, et, en modifiant ensuite cette valeur de H jusqu'à ce que les nouvelles valeurs de Ω' et de R' satisfassent au débit donné Q.

Cette valeur de H porte habituellement la désignation de hauteur du régime uniforme correspondant à la dépense.

122. — Problème IV. — Cas où le lit est rectangulaire. —



En désignant par l la largeur du plafond du canal, les données sont Q i l et l'inconnue reste H.

On peut facilement exprimer R en fonction de H.

$$R = \frac{\Omega}{\chi} = \frac{AB \times BC}{AB + 2BC} = \frac{l\,H}{l + 2H}$$

et en substituant dans la valeur de i

$$i = \frac{1\,H}{l + 2H} \qquad i = \frac{1,1\,Q^2}{l^2 H^2}$$

on a dès lors, par la deuxième de ces égalités une équation du 3ème degré en H, qui permet de résoudre le problème sans tâtonnement ; elle se

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ramène à :

$$l^3 i \times H - 2 b_1 Q^2 H - b_1 Q^2 l = 0$$

et ne contient que la seule inconnue H.

123 — *Problème IV* — Cas où le lit est large et très peu profond. — On peut alors exprimer approximativement la section Ω par lH et le périmètre mouillé χ par l, en négligeant les parois latérales par rapport à cette largeur l, ce qui se traduit par :

$$R = \frac{\Omega H}{\chi} = H \text{ et par suite } Ri = Hi = \frac{b_1 Q^2}{l^2 H^2}$$

D'où l'on tire immédiatement :

$$H = \sqrt[3]{\frac{b_1 Q^2}{l^2 i}}$$

124 — *Problème V.* — Déterminer pour une vitesse donnée et une aire donnée de section, l'inclinaison et la section même d'un Canal à profil trapézoïdal, dont l'angle de talus et la largeur de plafond sont également donnés.

Dans ce cas $\chi = l + \frac{2H}{\cos \alpha}$

$$\Omega = lH + H^2 \operatorname{tang} \alpha$$

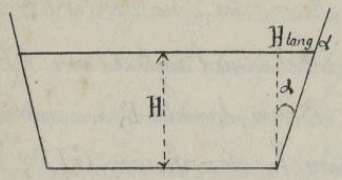
et la formule ordinaire devient :

$$i = \frac{\chi}{\Omega} b_1 u^2 = \frac{l + \frac{2H}{\cos \alpha}}{lH + H^2 \operatorname{tang} \alpha} b_1 u^2$$

Il y aurait dans ce problème deux variables i et l, si la largeur du plafond n'était pas donnée, et l'on pourrait alors profiter de l'indétermination pour s'imposer une condition supplémentaire ; c'est ce qui a lieu dans le problème suivant :

125 — *Problème VI.* — Déterminer pour une aire de section donnée et une vitesse donnée, le profil trapézoïdal d'un canal dont l'angle de talus est donné, de manière que la pente i du lit soit minimum.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Données α, Q, Ω, et par conséquent $u = \frac{Q}{\Omega}$

Inconnues i, H et l.

La relation $i = \frac{X}{\Omega} b, u^2$ montre que si Ω est constant, le minimum de i correspond au minimum de X; or:

$$X = l + \frac{2H}{\cos\alpha} \quad \text{et par suite} \quad dX = dl + 2\frac{dH}{\cos\alpha}$$

De sorte que la condition du minimum est:

$$\frac{dX}{dl} = 1 + \frac{2}{\cos\alpha}\frac{\partial H}{\partial l} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial H}{\partial l} = -\frac{\cos\alpha}{2}$$

D'autre part $\Omega = lH + H^2 \operatorname{tang}\alpha$ donne, par suite de la constance de Ω,

$$\partial\Omega = l\,dH + H\,dl + 2H\,dH\operatorname{tang}\alpha = 0$$

d'où $$\frac{\partial H}{dl} = \frac{H}{l + 2H\operatorname{tang}\alpha}$$

En égalant entr'elles ces deux valeurs de $\frac{dH}{dl}$ on trouve $\frac{H}{l+2H\operatorname{tang}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2}$

ce qui se ramène successivement à $l\cos\alpha + 2H\cos\alpha\operatorname{tang}\alpha = 2H$

$$H = \frac{1}{2} l\cos\alpha + H\sin\alpha$$

$$H = \frac{l\cos\alpha}{2(1-\sin\alpha)}$$

Connaissant cette valeur de H, on trouve facilement X et Ω

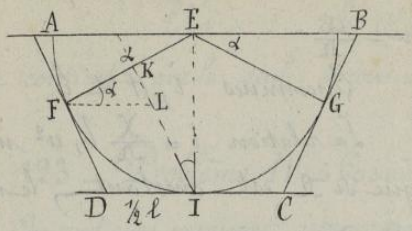
$$X = l + \frac{2l\cos\alpha}{2(1-\sin\alpha)\cos\alpha} = l + \frac{l}{1-\sin\alpha} = \frac{l(2-\sin\alpha)}{1-\sin\alpha}$$

$$\Omega = \frac{l^2\cos\alpha}{2(1-\sin\alpha)} + \frac{l^2\cos^2\alpha\operatorname{tang}\alpha}{4(1-\sin\alpha)^2} = \frac{l^2\cos\alpha}{4(1-\sin\alpha)^2}\left[2(1-\sin\alpha) + \sin\alpha\right]$$

$$= \frac{l^2\cos\alpha\,(2-\sin\alpha)}{4(1-\sin\alpha)^2}$$

126- Solution géométrique du problème VI.- Il est très facile de construire le trapèze qui répond à la solution précédente.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Mener l'horizontale AB ;
Mener les deux droites EF et EG faisant chacune l'angle α avec AB ;
Décrire, du centre E, avec un rayon arbitraire la circonférence GIF ;
Mener les 3 tangentes en G, I et F ;
ABCD sera le profil demandé.

En effet, on voit immédiatement, en abaissant la perpendiculaire IK sur EF, que :

$$EI = H = EF = EK + FK = EI \sin\alpha + FL \cos\alpha$$
$$= EI \sin\alpha + DI \cos\alpha$$
$$= H \sin\alpha + \frac{1}{2} l \cos\alpha$$

D'où $H = \frac{l \cos\alpha}{2(1-\sin\alpha)}$, comme précédemment.

On pourrait également rechercher, d'une manière plus générale, la forme de la section transversale qui réduirait l'inclinaison ou la perte de hauteur au minimum, pour un débit déterminé, mais le problème n'a vraiment d'intérêt pratique que quand le profil est celui des canaux ordinaires.

B / Mouvement permanent varié.

127. - Notions Générales. - Le mouvement est dit permanent lorsqu'il reste identiquement le même, en tel point du canal où on veuille le considérer, à différents moments ; cette permanence n'empêche pas que la vitesse puisse varier d'un point à un autre d'un même filet liquide, et c'est en cela que consiste le mouvement varié, quelle que soit d'ailleurs la cause de cette variation. Le lit peut changer de forme, l'inclinaison peut augmenter ou diminuer, la hauteur d'eau peut n'être pas la même en toutes les sections ; ce sont là autant de circonstances, qui, prises individuellement, suffisent pour que le mouvement ne soit plus uniforme.

On ne peut étudier, avec une approximation qui se rapproche des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

faits, le mouvement permanent varié que quand les changements de section, de direction et de pente ne sont pas brusques, mais ont lieu, au contraire, d'une manière graduelle et pour ainsi dire insensible.

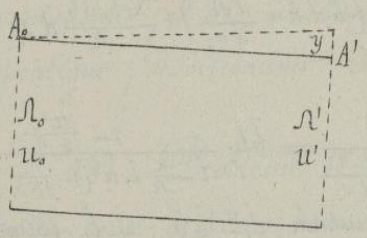
On admet alors que la ligne d'eau, dans une section quelconque, normale au lit, est toujours horizontale et que le liquide la traverse en filets parallèles, ce qui permet d'admettre que la répartition des pressions s'y fait, dans toutes les couches sous-jacentes, conformément à la loi hydrostatique, toute horizontale comprise dans une section transversale étant par cela même une ligne de niveau piézométrique.

128 — Equation du mouvement permanent varié. — La différence des hauteurs des centres de gravité de deux sections normales, situées à une distance s l'une de l'autre, étant indiquée par y, cette hauteur de chute sera nécessairement égale à la différence des hauteurs dues aux vitesses extrêmes, augmentée de la perte de charge due au frottement $y = \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} + \int_{s_0}^{s_1} \frac{X}{\Omega} b_1 u^2 ds$,

où, par suite du débit constant, $Q = \Omega u$, ce qui donne

$$y = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_0^2}\right) + Q^2 \int_{s_0}^{s_1} \frac{X}{\Omega^3} b_1 ds$$

Les relations précédentes, déjà établies précédemment, se déduisent facilement du théorème de Bernoulli.



On fera remarquer d'ailleurs que la hauteur piézométrique étant nécessairement la même pour tous les points d'une même section, la hauteur y pourrait indifféremment être comptée sur un filet quelconque, mais il est plus commode évidemment de l'estimer eu égard au plan d'eau supérieur.

Nous nous servirons souvent de la relation différentielle équivalente:

$$dy = \frac{u\,du}{g} + \frac{X}{\Omega} b_1 u^2 ds$$

qui permet de fractionner l'examen des conditions de l'écoulement pour

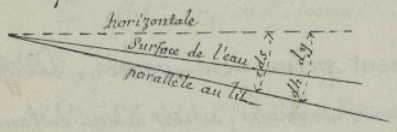
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

chacune des petites longueurs comprises entre deux sections transversales.

129.– Formule équivalente, à deux différentielles.

La formule $dy = \frac{u\,du}{g} + \frac{\chi}{\Omega} b_1 u^2 ds$

peut être utilement modifiée ; elle renferme trois quantités infiniment petites et on lui substitue facilement une relation qui n'en contient que deux ; i étant l'inclination du lit et dh la différence de hauteur de la ligne d'eau, par rapport à une parallèle à ce lit, on a en effet, pour une longueur ds, en faisant remarquer que l'on doit négliger tous les infiniments petits du second ordre



$$ids = dy + dh$$

ainsi qu'on le reconnaît à première vue sur la figure ci-jointe.

Le volume qui passe dans toutes les sections étant le même, la différentielle $dQ = d(\Omega u) = 0$ ou $\Omega\,du + u\,d\Omega = 0$, d'où $du = -\frac{u}{\Omega} d\Omega$.

En désignant par l la largeur du plan d'eau à la surface, la différentielle partielle de Ω prise par rapport à la variation de hauteur sera $l\,dh$ et la différentielle totale pourra être exprimée par $d\Omega = l\,dh + \frac{d\Omega}{ds} ds$;

En opérant les substitutions on trouve :

$$ids = dh - \frac{u^2}{g\Omega}\left(l\,dh + \frac{d\Omega}{ds}\right) + \frac{\chi b_1 u^2}{\Omega} ds$$

d'où l'on tire :

$$ds = dh\,\frac{1 - \frac{u^2 l}{g\Omega}}{i - \frac{\chi}{\Omega} b_1 u^2 + \frac{u^2}{g\Omega}\frac{d\Omega}{ds}} = dh\,\frac{1 - \frac{u^2 l}{g\Omega}}{i - \frac{\chi}{\Omega} b_1 u^2\left(1 - \frac{1}{g\chi b_1}\frac{d\Omega}{ds}\right)}$$

Si le canal était à section constante, $\frac{d\Omega}{ds} = 0$, et la formule se réduirait à :

$$ds = \frac{1 - \frac{u^2 l}{g\Omega}}{i - \frac{\chi}{\Omega} b_1 u^2}$$

Cette relation permet de résoudre, directement ou indirectement, quelques problèmes sur le mouvement de l'eau, avec plus de facilité ;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous ferons remarquer dès à présent que si :

$$1 - \frac{u^2 l}{g \Omega} = 0 \; ; \; \frac{ds}{dh} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dh}{ds} = \infty ,$$

ce qui reviendrait à admettre que, dans ce cas particulier, le niveau du liquide se relèverait verticalement, mais cette circonstance ne répondrait plus à l'hypothèse du parallélisme des filets, qui a servi à établir les équations, et il faudra l'examiner à part.

130. Problème I. - Connaissant le débit d'un Canal dont on peut relever autant de profils transversaux que l'on voudra, déterminer la dénivellation y entre deux sections données. La formule générale donne bien la dénivellation y entre deux sections extrêmes

$$y = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_0^2}\right) + Q^2 \int_0^{s_1} \frac{\chi}{\Omega^3}\, b_1\, ds$$

mais la valeur de $\frac{\chi}{\Omega^3}$ est variable entre ces deux sections ; il faut alors relever sur le cours d'eau un nombre suffisant de valeurs $\frac{\chi}{\Omega^3}$ et calculer l'intégrale, au moyen de ces valeurs intermédiaires, par la formule de Simpson ou d'autres procédés équivalents ; il est évidemment plus exact et plus facile, en pratique, de déterminer directement y par un nivellement.

131 - Problème II. - Connaissant la dénivellation entre deux sections données d'un canal, dont on peut relever autant de profils intermédiaires que l'on voudra, déterminer le débit de ce canal.

Le problème répond encore à la même équation :

$$y = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_0^2}\right) + Q^2 \int_0^{s_1} \frac{\chi}{\Omega^3}\, b_1\, ds$$

qu'il suffit de résoudre ainsi qu'il suit, par rapport à l'inconnue Q,

$$Q^2 = \frac{y}{\frac{1}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_0^2}\right) + \int_0^{s_1} \frac{\chi}{\Omega^3}\, b_1\, ds}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La deuxième partie du dénominateur exigerait la même sommation, et il est plus pratique de recourir à un jaugeage direct.

132. — *Problème III.* — On connaît le débit, la forme du lit et l'une des hauteurs d'eau extrêmes, h_0 ou h_1, et l'on se propose de déterminer l'autre hauteur h_1 ou h_0.

L'équation générale se mettra sous la forme suivante, applicable à une petite longueur,

$$Z_{n-1} \; Z_n = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_n^2} - \frac{1}{\Omega_{n-1}^2}\right) + Q^2 \int_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{\chi}{\Omega^3}\, b_1\, ds$$

et l'on cherchera à l'appliquer successivement à des intervalles suffisamment courts pour que l'on puisse y considérer le lit comme sensiblement cylindrique et le coefficient b_1 comme constant. Si par exemple, partant de Z_n, on veut connaître Z_{n-1} on posera:

$$\frac{\chi}{\Omega^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\chi_n}{\Omega_n^3} + \frac{\chi_{n-1}}{\Omega_{n-1}^3}\right); \qquad b_1 = \frac{1}{2}\left(b_{1n} + b_{1,n-1}\right)$$

et l'équation deviendra :

$$Z_{n-1} - Z_n = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_n^2} - \frac{1}{\Omega_{n-1}^2}\right) + \frac{Q^2 b_1}{2}\left(\frac{\chi_n}{\Omega_n^3} + \frac{\chi_{n-1}}{\Omega_{n-1}^3}\right)\Delta s.$$

On résoudra cette équation en supposant d'abord que le premier membre puisse être égal à zéro, ce qui revient à mener une horizontale par le sommet de la section en h_n; on obtiendra ainsi, d'après le profil correspondant, certaines valeurs correspondantes pour χ_{n-1} et Ω_{n-1}; puis en portant, dans l'équation, les valeurs approximatives ainsi mesurées, on obtiendra une nouvelle valeur de $Z_n - Z_{n-1}$ différente de zéro, mais non exacte encore et on continuera, de la même manière, les tracés et les substitutions jusqu'à ce que deux valeurs successives de Z_{n-1} coïncident, ce qui n'exigera jamais de très longs essais.

La section réelle étant alors connue on remontera de la même façon,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pour un nouvel intervalle Δs, à une autre section située vers l'amont, et ainsi de suite

Ce problème est celui que l'on rencontre lorsqu'on veut reconnaître, a priori, l'influence que produira sur le régime d'un cours d'eau, l'exécution d'un ouvrage projeté

133 _ Problème III. Cas d'un lit cylindrique.

La formule $ds = \frac{1 - \frac{u^2 l}{g \Omega}}{i - \frac{\chi}{\Omega} b_1 u^2}$

donne par intégration :

$$s_n - s_0 = s = \int_{h_0}^{h_n} \frac{1 - \frac{u^2 l}{g \Omega}}{i - \frac{\chi}{\Omega} b_1 u^2} dh :$$

Sous le signe de l'intégration, toutes les quantités variables Ω, χ, l, u, sont des fonctions de h qu'il est facile de mesurer ou de calculer pour chacune des valeurs arbitraires de cette variable ; on peut donc faire la sommation en prenant les valeurs de la fraction, pour un certain nombre de valeurs équidistantes de h, et en déterminant ensuite celle de la fonction elle-même par la formule de Simpson. On connaîtrait ainsi deux valeurs de h, entre les quelles se placerait le point s_0 et le problème se trouverait complètement résolu.

Si le lit était à section rectangulaire on aurait plus simplement

$$\Omega = lh \; ; \; \chi = l + 2h \; ; \; u = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{lh}$$

La formule en ds deviendrait alors :

$$ds = \frac{1 - \frac{Q^2}{l^2 h^2} \frac{l}{g lh}}{i - \frac{l+2h}{lh} b_1 \frac{Q^2}{l^2 h^2}} dh = \frac{1 - \frac{Q^2}{g l^2 h^3}}{i - \frac{(l+2h) b_1 Q^2}{l^3 h^3}} dh$$

L'intégration se ferait à la manière ordinaire par voie de sommation, en donnant successivement à h différentes valeurs.

134 _ Cas particuliers de la valeur de $\frac{ds}{dh}$.

Dans le cas du lit cylindrique auquel s'applique

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'équation

$$\frac{ds}{dh} = \frac{1 - \frac{u^2 l}{g\Omega}}{i - \frac{x}{\Omega} b, u^2}$$

il se présente deux cas particuliers qu'il convient de mettre en évidence;

1° Si $1 - \frac{u^2 l}{g\Omega} = 0$, on $\frac{dh}{ds} = \infty$, ce qui indiquerait une brusque surélévation verticale; nous indiquerons par H' la hauteur d'eau correspondante, c'est-à-dire la hauteur qui satisfait à l'équation $1 - \frac{u^2 l}{g\Omega} = 0$, dans laquelle Ω ne dépend que de h, eu égard à la forme du profil, ainsi que $v = \frac{q}{\Omega}$; c'est bien là une fonction de h répondant à une valeur particulière H' de cette variable.

Si le canal était à section rectangulaire, la condition $1 - \frac{u^2 l}{g\Omega} = 0$ deviendrait $1 - \frac{q^2}{g H'^3 l^2} = 0$

D'où l'on tirerait $H'^3 = \frac{q^2}{g l^2}$

2° Si $i - \frac{x}{\Omega} b, u^2 = 0$, ce qui revient à $\frac{\Omega}{x} i = Ri = b, u^2$, on se trouve dans le cas du mouvement uniforme et la valeur H correspondante de h est désignée sous le nom de hauteur du régime uniforme; cette hauteur H correspond à $dh = 0$, ce qui indique que si elle se présente sur un point déterminé du parcours, elle doit nécessairement rester partout la même; dans le canal cylindrique à pente constante i.

Si le canal était à section rectangulaire on sait, N°.122, que $H^3 = \frac{b, q^2}{l^2 i}$.

Le profil longitudinal de la ligne d'eau ne pourra jamais être discuté qu'entre les limites H et H'

135. Problème III. Cas d'un lit rectangulaire large et peu profond.

Dans ces conditions le problème est susceptible d'une solution directe; après avoir posé:

$$x = l;\ \Omega = lh;\ u = \frac{q}{lh};\ q = \frac{Q}{l};$$

on obtiendra:

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$ds = \frac{1-\frac{u^2 l}{g\Omega}}{i-\frac{\chi}{\Omega} b_1 u^2} = dh\,\frac{1-\frac{Q^2}{g l^2 h^3}}{i-\frac{b_1 Q^2}{l^2 h^3}} = dh\,\frac{1-\frac{q^2}{g h^3}}{i-\frac{b_1 q^2}{h^3}}$$

Si H était la hauteur correspondante du régime uniforme, nous avons vu que:

$$H = \sqrt[3]{\frac{b_1 Q^2}{l^2 i}} = \sqrt{\frac{b_1 q^2}{i}} \quad \text{d'où} \quad q^2 = \frac{H^3 i}{b_1}$$

et en substituant:

$$ds = dh\,\frac{1-\frac{H^3}{g b_1 h^3}}{i-\frac{b_1}{b_1}\frac{H^3 i}{h^3}} = \frac{dh}{i}\,\frac{1-\frac{H^3 i}{g b_1 h^3}}{1-\frac{H^3}{h^3}} = \frac{dh}{i}\left[1+\frac{\frac{H^3}{h^3}-\frac{H^3}{h^3}\frac{i}{g b_1}}{1-\frac{H^3}{h^3}}\right]$$

ce qui donne, en remplaçant $\frac{h}{H}$ par une nouvelle variable x:

$$ids = dh + \left(1-\frac{i}{g b_1}\right)\frac{H^3 dh}{h^3 - H^3} = dh + \left(1-\frac{i}{g b_1}\right) H\,\frac{\frac{\partial h}{H}}{\frac{H^3}{h^3}-1} = dh + H\left(1-\frac{1}{g b_1}\right)\frac{dx}{x^3-1};$$

l'intégration de cette équation se fera en remarquant que:

$$\frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\,\frac{(x+\frac{1}{2})dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

D'où pour l'intégrale définitive:

$$is = h + H\left(1-\frac{i}{g b_1}\right)\left[\frac{1}{6}\log.hy\,\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tang.}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right] + C$$

En remplaçant x par sa valeur $h:H$, cette équation, résolue par approximations successives, fournira la valeur cherchée de h.

136. — Equations applicables à un canal rectangulaire dont la hauteur d'eau est négligeable par rapport à la largeur.

La formule générale des canaux cylindriques

$$ds = dh\,\frac{1-\frac{l u^2}{g\Omega}}{i-\frac{\chi}{\Omega} b_1 u^2}$$

se modifie dans ce cas par suite des relations

$$\Omega = lh\,;\quad \chi = l\,;\quad \frac{\chi}{\Omega} = \frac{1}{h}\,;\quad u = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{lh} = \frac{q}{h}$$

En substituant ces valeurs l'équation devient:

$$ds = dh\,\frac{1-\frac{1}{g}\frac{q^2}{h^3}}{i-b_1\frac{q^2}{h^3}}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les valeurs H' et H de h, qui annuleraient respectivement, soit le numérateur, soit le dénominateur du second membre seraient $H'^3 = \frac{q^2}{g}$ et $H^3 = \frac{b_1 q^2}{i}$ et l'on peut par conséquent mettre cette équation sous la forme :

$$\frac{ds}{dh} = \frac{1 - \frac{H'^3}{h^3}}{i - i\frac{H^3}{h^3}} = \frac{1}{i}\,\frac{h^3 - H'^3}{h^3 - H^3}$$

La dérivée seconde $\frac{d^2 s}{dh^2}$ s'obtient immédiatement :

$$\frac{d^2 s}{dh^2} = \frac{1}{i}\,\frac{(h^3 - H^3)\,3h^2 - (h^3 - H'^3)\,3h^2}{(h^3 - H^3)^2} = \frac{3h^2}{i}\,\frac{H'^3 - H^3}{(h^3 - H^3)^2}$$

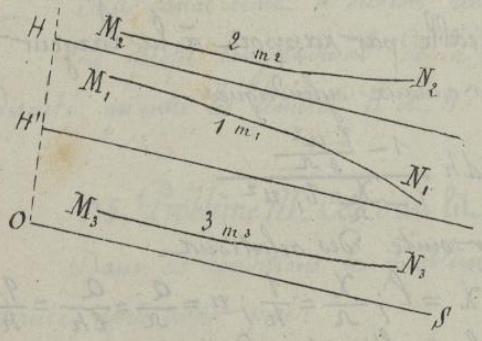
Le signe de cette dérivée est celui de $H'^3 - H^3$, ou, ce qui revient au même, celui de $H' - H$, et cette circonstance va nous permettre de discuter les circonstances qui caractériseront la disposition du profil longitudinal de ce canal rectangulaire et peu profond.

137. — Discussion du profil longitudinal — Supposons d'abord $H > H'$, ce qui correspond à $\frac{d^2 s}{dh^2} < 0$; la valeur de $\frac{ds}{dh}$ est donnée par la relation

$$\frac{ds}{dh} = \frac{1}{i}\,\frac{h^3 - H'^3}{h^3 - H^3}$$

et les diverses dispositions que peut présenter le profil longitudinal sont indiquées par la figure ci-jointe.

Représentons, suivant sa pente OS, le fond du lit et les deux parallèles ayant respectivement pour ordonnées les hauteurs H et H', suivant leur ordre de superposition, nous aurons à considérer trois zônes dans lesquelles la disposition du profil serait différente.



1.° Pour une première valeur de h, comprise entre H' et H, la valeur de $\frac{ds}{dh} = \frac{1}{i}\,\frac{h^3 - H'^3}{h^3 - H^3}$ sera

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

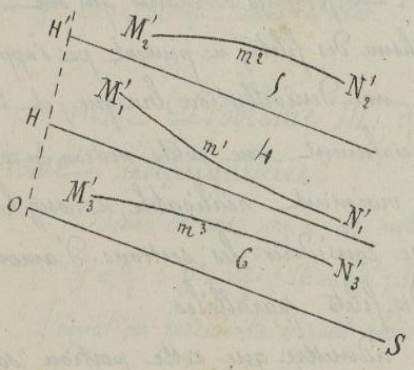
toujours négative ; h variera en sens contraire de S, ainsi que l'indiquent les deux points M_1 et N_1 compris dans cette zône et, l'inclinaison $\frac{dh}{ds}$ allant en augmentant, la courbe tourne sa concavité vers l'axe OS

2°. Au-dessus de la ligne H, $\frac{ds}{dh}$ sera toujours positif ; h augmente en même temps que S et l'inclinaison, augmentant encore, la courbe affectera la disposition $M_2 N_2$. Pour une valeur de h vers l'aval, on approcherait de $dh = ids$ et le profil deviendrait horizontal ; en remontant au contraire vers l'amont, h deviendrait de plus en plus petit et la courbe aurait pour assymptote la ligne H.

3°. Pour un point m_3 placé au-dessous de la ligne H', $\frac{ds}{dh}$ est toujours positif, parce que le numérateur et le dénominateur de la fraction deviennent simultanément négatifs ; h augmente encore avec S et la courbe tourne sa convexité vers l'axe OS.

Il convient de faire remarquer que l'hypothèse $H > H'$ qui sert de base à la discussion qui précède est toujours réalisée dans les cours d'eau non torrentiels ; cette condition $H > H'$ revient en effet à $H^3 > H'^3$ ou, en remplaçant H et H' par leurs valeurs, à $\frac{b_1 Q^2}{l^2 i} > \frac{Q^2}{g l^2}$, ou à $i < g b_1$; or $g = 9.81$, b_1 diffère peu de 0.0004, ce qui conduit à $i < 0.003924$, et une pente de 4 millimètres par mètre n'est atteinte que très-exceptionnellement.

Supposons au contraire que, dans certaines circonstances exceptionnelles, H soit plus petit que H' ; $\frac{d^2 s}{dh^2}$ est alors positif, ce qui montre que $\frac{ds}{dh}$ va constamment en augmentant avec S ; l'inclinaison de la courbe diminue quand S augmente.



Le profil dans les différentes zônes présenterait alors les circonstances indiquées par la figure ci-jointe ; On pourra donc

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

avoir à considérer six dispositions différentes, mais il n'en saurait exister aucune autre.

Une discussion analogue pourrait d'ailleurs être faite dans un sens plus général.

138. – Pente et contrepente de l'eau – La dénivellation de la surface de l'eau, par rapport à l'horizontalité, est représentée par $dy = i\,ds - dh$, et par conséquent sa pente sera :

$$\frac{dy}{ds} = i - \frac{dh}{ds}$$

En mettant à la place de $\frac{dh}{ds}$ sa valeur tirée de l'équation précédente, pour le cas d'un canal cylindrique, on trouve :

$$\frac{dy}{ds} = i - i\,\frac{h^3 - H^3}{h^3 - H'^3} = i\left(1 - \frac{h^3 - H^3}{h^3 - H_1'^3}\right) = i\,\frac{H^3 - H'^3}{h^3 - H'^3}$$

Cette pente deviendra négative toutes les fois que $\frac{H^3 - H'^3}{h^3 - H'^3}$ sera négatif.

Si $H > H'$ il faudra donc pour qu'il s'établisse une contre pente que l'on ait en même temps $h < H'$, condition qui se rapporte à la zône inférieure de la discussion précédente.

Si $H < H'$ la seconde condition $h > H'$ correspond au contraire à la zône supérieure.

139 – Cas du ressaut –. Les formules ordinaires, qui ont été déduites de l'hypothèse du parallelisme des filets, ne peuvent pas s'appliquer au cas dans lequel il se produirait une dénivellation brusque, et l'on est alors conduit à considérer spécialement une petite portion du courant, comprenant ce ressaut, s'il est vraiment réalisable, et assez longue cependant pour que l'on puisse considérer les sections d'amont et d'aval, comme traversées par des filets parallèles.

Nous pouvons d'ailleurs admettre que cette portion soit assez courte pour qu'il y ait lieu de négliger la pente du lit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

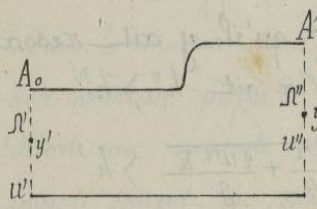
et de ne pas avoir égard aux frottements.

La pression atmosphérique s'équilibrant autour de toute masse isolée, il n'y aura plus à tenir compte, dans l'application du principe des quantités de mouvement, que des pressions dues au liquide en amont et en aval.

L'impulsion élémentaire due au poids de l'eau sera elle-même éliminée si l'on choisit un axe de projection horizontal; on obtient ainsi la relation spéciale:

$$\frac{\Omega'' u''^2}{g} - \frac{\Omega' u'^2}{g} = \Omega' y' - \Omega'' y'';$$

en tenant compte de la loi de continuité:



$\Omega' u' = \Omega'' u''$, pour éliminer u'', on trouve facilement:

$$\frac{u'^2}{g}\left(\frac{\Omega'^2}{\Omega''} - \Omega'\right) = \Omega' y' - \Omega'' y''; \quad \frac{u'^2}{g}\left(\frac{\Omega'}{\Omega''} - 1\right) = y' - y''\frac{\Omega''}{\Omega'}$$

En éliminant de la même manière u' on aurait obtenu:

$$\frac{u''^2}{g}\left(\Omega'' - \frac{\Omega''^2}{\Omega'}\right) = \Omega' y' - \Omega'' y''; \quad \frac{u''^2}{g}\left(1 - \frac{\Omega''}{\Omega'}\right) = y'\frac{\Omega'}{\Omega''} - y''.$$

140. — Problème III, dans le cas du ressaut —

Le problème se résout par tâtonnement; étant donnés, par exemple, y' et Ω' on fera une hypothèse sur y'' et l'on vérifiera l'équation jusqu'à ce que l'on ait obtenu deux valeurs simultanées de Ω'' et de y'' qui soient compatibles.

141. — Problème III. dans le cas du ressaut, le lit étant rectangulaire.

Dans ce cas, on a en outre, les cinq relations:

$$y' = \frac{h'}{2}; \quad y'' = \frac{h''}{2}; \quad \Omega' = lh'; \quad \Omega'' = lh''; \quad \frac{\Omega'}{\Omega''} = \frac{h'}{h''};$$

L'équation précédente devient alors, en remplaçant $\frac{\Omega'}{\Omega''}$ par $\frac{h'}{h''}$,

$$\frac{u'^2}{g}\left(\frac{h'}{h''} - 1\right) = y' - y''\frac{h''}{h'} = \frac{1}{2}h' - \frac{1}{2}h''\frac{h''}{h'}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\frac{2u'^2}{g}\left(\frac{h'-h''}{h''}\right) = \frac{h'^2-h''^2}{h'} \quad \text{ou} \quad \frac{2u'^2}{g} = (h'+h'')\frac{h''}{h'}.$$

Et résolvant cette équation par rapport à h'', on trouve :

$$h'' = -\frac{h'}{2} \pm \sqrt{\frac{h'^2}{4} + \frac{2u'^2}{g}h'}$$

On aurait trouvé de même $h' = -\frac{h''}{2} \pm \sqrt{\frac{h''^2}{4} + \frac{2u''^2}{g}h''}$

mais il convient de rejeter les deux valeurs négatives, ce qui permet de résoudre, sans tâtonnement, la question quelle que soit l'inconnue h' ou h''.

142. — Conditions pour qu'il y ait ressaut.

Le problème exige alors que l'on ait $h'' > h'$

$$\text{ou} \quad -\frac{h'}{2} + \sqrt{\frac{h'^2}{4} + \frac{2u'^2h'}{g}} > h'$$

ce qui revient successivement à $\frac{3}{2}h' < \sqrt{\frac{h'^2}{4} + \frac{2u'^2}{g}h'}$

$$\frac{9}{4}h'^2 < \frac{h'^2}{4} + \frac{2u'^2}{g}h' \; ; \quad 2h'^2 < \frac{2u'^2}{g}h'$$

$$h' < \frac{u'^2}{g} \; ; \quad \frac{\Omega'}{l} < \frac{u'^2}{g} \; ; \text{ et enfin à } 1 - \frac{u'^2 l}{g\Omega'} < 0 \; ;$$

on aurait de même trouvé par rapport à u'' et Ω'' ; $1 - \frac{u''^2}{g}\frac{l}{\Omega''} > 0$

Ces deux inégalités expriment qu'en passant de Ω' à Ω'', la valeur de $1 - \frac{u^2 l}{g\Omega}$ passe réellement par 0, ce qui reproduit la condition déjà entrevue.

143. — Détermination du profil longitudinal dans le cas du ressaut. En nous bornant à examiner la question pour le cas d'un canal rectangulaire très-large par rapport à la hauteur d'eau, l'inclinaison de la surface par rapport au fond du lit est donnée par la relation

$$\frac{dh}{ds} = i\,\frac{h^3 - H^3}{h^3 - H'^3}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La discussion de la valeur de cette inclinaison a déjà été donnée au N.° 137 et les figures indiquent clairement que la parallèle au lit dont l'ordonnée est H' ne pourra être atteinte par le niveau du liquide que dans les conditions M_1N_1 ou M_3N_3 de la première figure, correspondant au cas où H est plus grand que H'.

Il faut alors employer la méthode ordinaire, en partant successivement de l'amont et de l'aval, jusqu'à ce que l'on arrive, dans les deux sens, jusqu'au lieu du ressaut.

144 – Application de la Théorie du ressaut. –

Dans les anciennes roues hydrauliques à axe horizontal, l'eau s'échappe avec la vitesse propre de la roue à sa circonférence et la puissance vive de cette eau représente ainsi un travail perdu $\frac{mv^2}{2}$. D'un autre côté, il importe souvent que, sans noyer la roue à l'aval, on puisse utiliser la totalité de la chute, en plaçant le seuil au niveau le plus bas que comporte le fonctionnement du recepteur. Cette condition fait rechercher une vitesse d'eau un peu grande à la sortie et M. Belanger a compris qu'on pouvait alors utiliser cette vitesse de l'eau à dégorger le canal de fuite, jusqu'à une certaine distance en aval.

Si la puissance vive de l'eau à la sortie était employée à élever cette eau à une hauteur E, on aurait $E = \frac{v^2}{2g}$. Pour obtenir cette élévation, il suffira de prolonger le radier, presque horizontal, par un plan incliné à $\frac{1}{10}$ de pente. L'eau passe alors, très près de la roue, du premier au second cas de la discussion précédente; la condition de H qui était d'abord plus grand que H' fait place à une nouvelle condition $H < H'$ suffisante pour que l'eau atteigne quelque part le nouveau niveau H'; dans ces circonstances il se produit en réalité un ressaut et l'expérience prouve que l'on peut ainsi abaisser la roue des $\frac{2}{3}$ de la hauteur E.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pressions réciproques des Solides et des Liquides.

145. — Considérations générales. — Quand un liquide dans son mouvement, rencontre une paroi solide, il se produit des pressions réciproques qui ne peuvent être les mêmes que dans l'état de repos relatif, par suite des forces d'inertie qui sont nécessairement développées entre eux, toutes les fois qu'ils ne sont pas animés de la même vitesse, dans le même sens. — L'élément prépondérant, dans ces actions réciproques, est la vitesse relative, le solide ou le liquide pouvant être en mouvement, tandis que l'autre corps est en repos.

Dans l'un et dans l'autre cas, des pertes de travail, plus ou moins grandes, sont la conséquence de ces rencontres, et nous aurons à rechercher les moyens à employer pour réduire ces pertes à leur minimum.

146. — Pressions réciproques au repos. — Lorsque le liquide est en repos, la pression et l'effort exercés sur une paroi quelconque sont ceux qui résultent de la loi hydrostatique, et la paroi réagit, en sens contraire de celui de la pression exercée sur elle, avec la même intensité.

Nous ne rappelons ici cette indication que pour faire ressortir la signification qui sera donnée, dans le cas de mouvement, à cette pression morte que l'on aura bientôt à comparer à la pression vive.

La pression morte est celle que la paroi exerce à l'état de repos sur le liquide, à l'état de repos ; la pression vive n'est que l'excès de celle qui la remplace dans l'état du mouvement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

relatif, et que nous nous proposons d'étudier dans les paragraphes suivants.

147. – Choc des corps mous. – On dit généralement que, dans le choc des corps mous, la somme des quantités de mouvement reste la même, avant et après le choc, ce qui peut être exprimé par la relation :

$$m\,v + m'\,v' - (m+m')\,u = 0$$

qui résolue par rapport à la vitesse commune u, après le choc, donne :

$$u = \frac{m\,v + m'\,v'}{m+m'}$$

Cette relation, qui a été vérifiée par de nombreuses expériences fondamentales, est la conséquence immédiate du principe des quantités de mouvement, puisque les impulsions étant celles qui résultent des actions réciproques, leur somme est nécessairement nulle pendant toute la durée du choc et jusqu'au moment où les deux masses sont arrivées à se mouvoir, l'une et l'autre, avec la vitesse commune u.

Il résulte d'expériences directes, qui nous sont personnelles, que cette formule est très exactement applicable aussi aux gaz en mouvement.

148. – Perte de travail dans le choc des corps mous. La perte de travail ΔT, qui résulte du choc, sera facilement déterminée par la différence entre les puissances vives des deux masses, avant et après le choc :

$$\Delta T = \frac{m\,v^2}{2} + \frac{m'\,v'^2}{2} - \frac{(m+m')\,u^2}{2} = \frac{m\,v^2}{2} + \frac{m'\,v'^2}{2} - \frac{m+m'}{2}\,\frac{(m\,v+m'\,v')^2}{(m+m')^2}$$

$$= \frac{m\,v^2 + m'\,v'^2\,(m+m') - (m\,v+m'\,v')^2}{2\,(m+m')^2} = \frac{m\,m'\,(v-v')^2}{2\,(m+m')}$$

Si la masse choquante m est petite par rapport à la masse choquée m', ce qui arrive ordinairement, lorsqu'une tranche liquide tombe sur une paroi solide, appartenant à un organe de machine, on met cette dernière expression sous la forme :

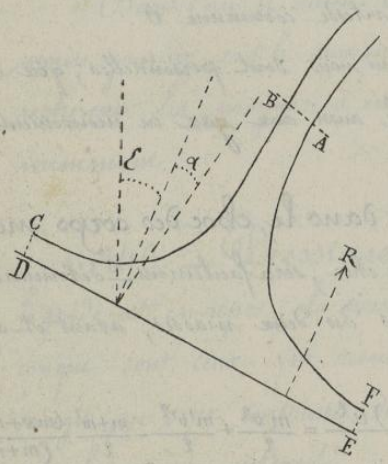
$$\Delta T = \frac{m\,(v-v')^2}{2\left(\frac{m}{m'}+1\right)}$$ ou en négligeant $\frac{m}{m'}$, qui est alors très petit par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rapport à l'unité, $\Delta T = \frac{m(v-v')^2}{2}$

La perte de travail est, dans cette circonstance, égale à la puissance vive de la masse choquante, pour la perte de vitesse $v - v'$ qui correspond à la différence des vitesses primitives.

149. — Choc d'une veine contre un plan fixe. C'est encore par l'application du principe des quantités de mouvement que l'on arrive à mettre en évidence l'effort exercé sur un plan DE par une veine liquide ABCDEF; cette veine se gonfle jusqu'à une certaine distance en amont du plan et, lorsque le régime est établi on peut considérer une section AB à l'amont, qui ne soit pas encore influencée par l'action du plan, et une autre section CDEF à l'aval, en laquelle les filets, après s'être déviés, se meuvent déjà parallèlement à ce plan.



L'application du principe des quantités de mouvement permettra d'introduire la réaction normale R, exercée par le plan sur le liquide, mais nous ne tiendrons pas compte de la pression atmosphérique qui, du côté du liquide, est transmise par ce liquide même et qui, de l'autre côté du plan, agit sur la face postérieure DE de ce plan.

Si l'on prend pour axe une perpendiculaire au plan, faisant un angle α avec la vitesse commune des filets en AB, le premier membre de l'équation sera :

$$0 - \Omega V\theta \times \frac{\varpi}{g}(-V\cos\alpha)$$

car les projections des vitesses en CDE sur l'axe qui vient d'être choisi, sont nulles, et nous pouvons prendre V dans un sens négatif, en considérant,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

comme positive la réaction normale R exercée par le plan.

On aura donc, en effectuant la multiplication :

$$\frac{\varpi}{g} \Omega V^2 \cos\alpha \times \theta = \Sigma \text{ impulsions projetées,}$$

Ces impulsions sont :

1°. Celle du poids de la portion de liquide considérée, de AB en DE, $-P \cos\mathcal{E} \times \theta$

2°. Celle de la réaction du plan $+ R\theta$

3°. Celle des actions latérales dues à la pression atmosphérique et qui est nécessairement nulle.

L'équation se réduit, en supprimant le facteur commun θ à :

$$\frac{\varpi}{g} \Omega V^2 \cos\alpha = -P \cos\mathcal{E} + R$$

d'où

$$R = P\cos\mathcal{E} + \frac{\varpi}{g} \Omega V^2 \cos\alpha$$

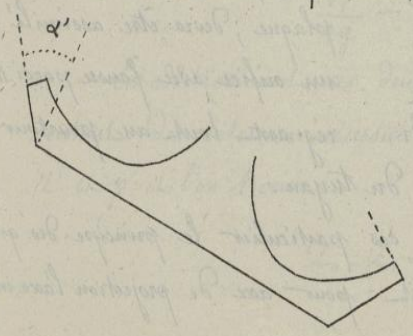
On voit ainsi que cette réaction R du plan, se compose de deux termes ; le premier est indépendant de la vitesse et représente la pression morte, qui reste la même quelle que soit la vitesse V.

Le deuxième est proportionnel au carré de la vitesse et prend le nom de pression vive, par opposition avec le premier.

Ce cas est le seul dans lequel la réaction puisse être ainsi déterminée rigoureusement

Si $\alpha = 90°$ la pression vive est nulle.

150. Cas où le plan est muni de rebords. — Si le plan est muni de rebords, dont nous indiquerons par α' l'angle avec la normale, les filets ne deviendront parallèles, à l'aval, que quand ils auront pris dans cette direction, une vitesse V', dont la



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

projection sur l'axe, au lieu d'être nulle, sera exprimée par $V' \cos \alpha'$

L'équation précédente deviendra alors :

$$\frac{\varpi}{g} \Omega V (V' \cos \alpha' + V \cos \alpha) = -P \cos \varepsilon + R$$

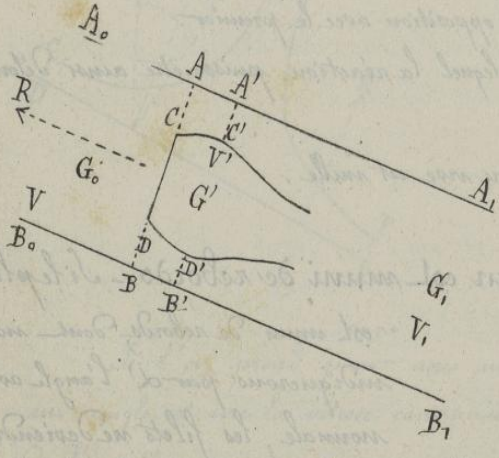
d'où : $$R = P \cos \varepsilon + \frac{\varpi}{g} \Omega V (V' \cos \alpha' + V \cos \alpha)$$

Si α' était égal à α et si V' était égal à V, ce qui ne pourrait avoir lieu que si les frottements étaient négligeables sur le plan et sur les rebords, la valeur de R serait ramenée à :

$$R = P \cos \varepsilon + 2 \frac{\varpi}{g} \Omega V^2 \cos \alpha$$

La pression vive serait précisément double de celle que nous avons obtenue dans le cas où il n'y aurait pas de rebords.

151. Réaction exercée dans un tuyau par une plaque mince. Soit CD une plaque mince, directement opposée au mouvement de l'eau dans le tuyau $A_0 A_1$, cette plaque donnera lieu à une déviation, qui se prolongera au delà de la plaque et les filets qui sont parallèles en $A_0 B_0$ ne deviendront parallèles qu'à une certaine distance $A_1 B_1$ en aval.



Au delà de la plaque CD, mais à une petite distance, en C'D', se produira une section contractée qui est indiquée sur la figure en A'C'D'B' ; l'orifice annulaire ACDB, resté libre autour de la plaque, devra être assimilé à un orifice avec fausse paroi $A_0 A_1$ régnant tout au pourtour de la plaque et jusqu'à la paroi du tuyau.

Nous appliquerons à ce cas particulier le principe des quantités de mouvement, en choisissant pour axe de projection l'axe même

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du tuyau, supposé cylindrique, et en admettant que les centres de gravité des diverses sections, y compris celles qui sont désignées en AB et $A'B'$ sont sur une même droite G_0G_1 parallèle aux génératrices; de A_0B_0 et A_1B_1 la variation de la quantité de mouvement devient nulle, par suite de la loi de continuité, qui exige que les vitesses extrêmes soient égales entre elles et l'on a ainsi :

$$0 = \Sigma \text{ impulsions projetées}.$$

Ces impulsions sont les suivantes :

1° Poids du liquide : $\varpi\, \Omega\, (Z_0 - Z_1) \times \theta$

2° Pressions extrêmes suivant l'axe : $(p_0\, \Omega - p_1\, \Omega) \times \theta$

3° Réaction totale : $-R \times \theta$

ou en supprimant le facteur θ

$$0 = \varpi\, \Omega\, (Z_0 - Z_1) + p_0\, \Omega - p_1\, \Omega - R$$

ce qui conduit à $R = \varpi\, \Omega \left(Z_0 - Z_1 + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi} \right)$

expression dans laquelle il est facile de substituer les vitesses aux charges.

Derrière CD le mouvement est nécessairement très lent, ce qui conduit à appliquer la loi hydrostatique en G'; on a ainsi, vu la petitesse du parcours, qui permet de négliger les frottements :

$$\frac{V'^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} = Z_0 - Z' + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p'}{\varpi}$$

Au delà de $A'B'$, on doit appliquer la formule qui exprime la perte de charge due à l'élargissement, à partir de la section contractée,

$$\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g} = Z' - Z_1 + \frac{p'}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi} - \frac{(V'-V)^2}{2g}$$

En additionnant ces deux équations, dans lesquelles V et V_1 représentent des vitesses nécessairement égales entr'elles, on élimine Z' et p' et l'on trouve :

$$Z_0 - Z_1 + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi} = \frac{(V'-V)^2}{2g}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce qui permet d'écrire, pour la valeur de R précédemment trouvée,

$$R = \varpi \Omega \frac{(V'-V)^2}{2g}$$

Il serait préférable de substituer à la vitesse V', qui dépend de la section du disque et du coëfficient m de contraction, une valeur déduite de ces données :

Si l'on désigne par Ω' la section annulaire du liquide en A'B', elle sera donnée en appliquant le coëfficient m à la section Ω-A de l'orifice en AB,

$$\Omega' = m\left(\Omega - A\right)$$

et par suite :

$$V' = V\frac{\Omega}{\Omega'} = V\frac{\Omega}{m(\Omega - A)} = V\frac{\frac{\Omega}{A}}{m\left(\frac{\Omega}{A}-1\right)}$$

d'où $$R = \varpi \Omega \frac{V^2}{2g}\left[\frac{\frac{\Omega}{A}}{m\left(\frac{\Omega}{A}-1\right)} - 1\right]^2 = \varpi A \frac{V^2}{2g}\left[\frac{\Omega}{A}\left(\frac{\frac{\Omega}{A}}{m\left(\frac{\Omega}{A}-1\right)} - 1\right)^2\right]$$

ou, en désignant le dernier facteur, qui ne dépend absolument que des sections et de m, par K,

$$R = \varpi A \frac{V^2}{2g} \times K.$$

La réaction totale R est représentée par la puissance vive $\varpi A \frac{V^2}{2g}$, d'une colonne de 1m. de longueur et de section A, multipliée par un coëfficient K, qui sera connu en même temps que m et $\frac{\Omega}{A}$.

Dans les conditions de fausse-paroi de l'orifice, m diffère toujours peu de m = 0.85, et voici alors quelques valeurs calculées de K,

$\Omega = A$	$m = 0,85$	$K = \infty$
$\Omega = 2A$	$m = 0,85$	$K = 3.06$
$\Omega = 3A$	$m = 0,85$	$K = 1.75$
$\Omega = 4A$	$m = 0,85$	$K = 1.30$
$\Omega = 10A$	$m = 0,85$	$K = 0.95$

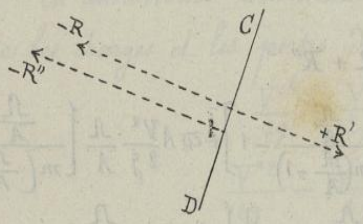
Pour une même valeur de Ω et à mesure que A diminue

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la valeur de K se rapproche rapidement de 1.30 et finalement de 1.00.

Quant à la valeur de R, il suffira de rappeler qu'elle croît proportionnellement à la surface du disque et au carré de la vitesse relative.

152. - Distinction entre les réactions exercées dans un tuyau par les deux faces d'une plaque mince. La réaction - R, que nous venons de calculer, est la résultante de la réaction de la face d'avant, que nous indiquerons par - R", et de la réaction + R' de la face d'aval.



Pour calculer ces deux réactions il suffira de connaître R' et d'obtenir R" par la relation :

$$R'' = R + R'$$

La réaction R' est très approximativement égale à A p' et, pour avoir p', il suffit de rappeler la relation :

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g} = Z' - Z_1 + \frac{p}{\varpi} - \frac{p'}{\varpi} - \frac{(V'-V)^2}{2g}$$

ce qui donne : $p' = p_1 - \varpi (z' - z_1) - 2\varpi \frac{V^2}{2g} \left(\frac{V'}{V} - 1\right)$

On obtient ainsi :

$$R' = A\,p' = A \left[p_1 - \varpi (Z' - Z_1) - 2\varpi \frac{V^2}{2g} \left(\frac{V'}{V} - 1\right) \right]$$

ou en exprimant V' en fonction de V,

$$R' = A \left[p' - \varpi (Z' - Z_1) - 2\varpi \frac{V^2}{2g} \left(\frac{\frac{\Omega}{A}}{m\left(\frac{\Omega}{A} - 1\right)} - 1 \right) \right].$$

Cette valeur de R' se compose de deux parties :

La première est indépendante de la vitesse et répond à la pression hydrostatique ; c'est la pression morte.

La seconde, toujours négative et désignée par Du Buat

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sous le nom de non-pression, varie proportionnellement à la surface du disque et au carré de la vitesse.

Il est facile de voir que la non-pression est en effet négative, car l'inégalité

$$\frac{\frac{\Omega}{A}}{m\left(\frac{\Omega}{A}-1\right)}-1>0,$$

revient successivement à :

$$\frac{\Omega}{A}-m\left(\frac{\Omega}{A}\right)+m>0\ ;\qquad (1-m)\left(\frac{\Omega}{A}\right)+m>0 \text{ et à } \frac{\Omega}{A}>\frac{m}{m-1}\ :$$

relation qui est toujours vérifiée, puisque son second membre est négatif, le coëfficient de contraction m étant nécessairement plus petit que 1.

Cette valeur de R' étant calculée, celle de R'' s'en déduit par voie de simple addition :

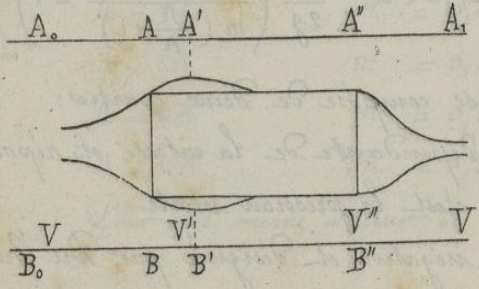
$$R''=R+R''$$

$$=A\left[p_1-\varpi\left(z'-z_1\right)\right]-2\varpi A\frac{V^2}{2g}\left[\frac{\frac{\Omega}{A}}{m\left(\frac{\Omega}{A}-1\right)}-1\right]+\varpi A\frac{V^2}{2g}\frac{\Omega}{A}\left[\frac{\frac{\Omega}{A}}{m\left(\frac{\Omega}{A}-1\right)}-1\right]^2$$

$$=A\left[p_1-\varpi\left(z'-z_1\right)\right]+\varpi A\frac{V^2}{2g}\left[\frac{\frac{\Omega}{A}}{m\left(\frac{\Omega}{A}-1\right)}-1\right]\left[\frac{\Omega}{A}\left(\frac{\frac{\Omega}{A}}{m\left(\frac{\Omega}{A}-1\right)}-1\right)-2\right]$$

La première partie est la pression morte, la seconde, positive, est la pression vive de Du Buat.

153. — Pressions exercées dans un tuyau par les deux faces d'un cylindre. — La même méthode est applicable à la recherche des réactions longitudinales, exercées par les deux bases d'un cylindre placé concentriquement dans le tuyau, à la condition de tenir compte de deux élargissements, l'un à la suite de la section contractée $A'B'$, l'autre à la suite de l'extrémité d'aval $A''B''$ du



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cylindre. Dans ce qui suit, on supposera que le cylindre est assez long pour que le parallelisme des filets se soit rétabli avant son extrémité d'aval, en A_1 et cependant assez court pour que les frottements soient négligeables.

Le cylindre étant supposé horizontal, l'équation fondamentale du numéro précédent se simplifiera encore :

$$0 = \Lambda\,(p_0 - p_1) - R$$

ainsi que la valeur de R, qui en résulte,

$$R = \Lambda\,(p_0 - p_1)$$

mais il n'en est pas de même des transformations qu'il faudra faire subir à cette valeur, pour en éliminer les pressions.

En considérant isolément les trois parcours AA', $A'A''$, $A''A_1$ on obtient, entre les charges et les pertes de charge, les relations suivantes :

$$\frac{V'^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} = \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p'}{\varpi}$$

$$\frac{V''^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g} = \frac{p'}{\varpi} - \frac{p''}{\varpi} - \frac{(V'-V'')^2}{2g}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V''^2}{2g} = \frac{p''}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi} - \frac{(V''-V)^2}{2g}$$

Dans l'addition à faire de ces trois équations, membre à membre, on remarquera que, puisqu'il s'agit d'un tuyau cylindrique $V_1 = V$ et par suite, que :

$$0 = \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi} - \frac{(V'-V'')^2}{2g} - \frac{(V''-V)^2}{2g}$$

ce qui donne la valeur de la différence des charges dues aux pressions, en fonction des vitesses, d'où :

$$R = \Lambda\,(p_0 - p_1) = \varpi\,\Lambda\left[\frac{(V'-V'')^2}{2g} + \frac{(V''-V)^2}{2g}\right]$$

D'un autre côté nous avons déjà vu que :

$$V' = V\,\frac{\frac{\Lambda}{A}}{m\left(\frac{\Lambda}{A} - 1\right)}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et pour les mêmes raisons :

$$V'' = V \frac{\frac{\Omega}{A}}{\left(\frac{\Omega}{A} - 1\right)}$$

ce qui conduit définitivement à :

$$R = \varpi \Omega \frac{V^2}{2g} \left(\left[\frac{\frac{\Omega}{A}}{m\left(\frac{\Omega}{A} - 1\right)} - \frac{\frac{\Omega}{A}}{\frac{\Omega}{A} - 1} \right]^2 + \left[\frac{\frac{\Omega}{A}}{\frac{\Omega}{A} - 1} - 1 \right]^2 \right)$$

$$= \varpi A \frac{V^2}{2g} \frac{\Omega}{A} \left[\left(\frac{\frac{\Omega}{A}(1-m)}{m\left(\frac{\Omega}{A} - 1\right)} \right)^2 + \left(\frac{\frac{\Omega}{A}}{\frac{\Omega}{A} - 1} - 1 \right)^2 \right] = \varpi A \frac{V^2}{2g} \times K'$$

Ce nouveau, coefficient K', qui ne dépend encore que de $\frac{\Omega}{A}$ et de m, peut être comparé au précédent :

$$K = \frac{\Omega}{A} \left[\frac{\frac{\Omega}{A}}{m\left(\frac{\Omega}{A} - 1\right)} - 1 \right]^2$$

qu'il conviendra, dans ce but, de mettre sous la forme :

$$K = \frac{\Omega}{A} \left[\left(\frac{\frac{\Omega}{A}(1-m)}{m\left(\frac{\Omega}{A} - 1\right)} \right) + \left(\frac{\frac{\Omega}{A}}{\frac{\Omega}{A} - 1} - 1 \right) \right]^2$$

La somme des carrés, qui forme l'un des facteurs de la valeur de K', est ici remplacée par le carré de la somme, ce qui suffit pour en conclure que $K' < K$.

On aurait pu prévoir ce résultat en remarquant que la perte de travail est moindre lorsque l'eau passe successivement de la vitesse V' à la vitesse V'' et à la vitesse V, que lorsqu'elle arrive directement, par suite d'un seul élargissement brusque, de la vitesse V' à cette même vitesse V.

154. — Pression exercée dans un canal de grande section. On voit bien encore les sens dans lesquels se produiront les réactions, mais il est impossible d'en calculer théoriquement les valeurs, avec quelqu'exactitude. Aussi, sans nous arrêter à des considérations

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

analytiques trop incomplètes, il vaut mieux résoudre la question en y appliquant des relations analogues aux précédentes et dont les coëfficients seront déterminés par expérience.

On écrira donc les relations suivantes:

Réaction à l'amont $R' = \varpi A h - \varpi A \frac{V^2}{2g} \times K'$

Réaction à l'aval $R'' = \varpi A h + \varpi A \frac{V^2}{2g} \times K''$

et par suite:

Réaction totale $R = R'' - R' = \varpi A \frac{V^2}{2g} (K' + K'')$

K' et K'' étant des coëfficients particuliers, et h la profondeur d'eau, du centre de gravité de la plaque.

Il en serait de même pour un prisme placé dans le courant et voici les déterminations qui ont été faites par Du Buat, en modifiant, dans certains cas, les conditions du mouvement; la dernière partie du tableau se rapporte au cas dans lequel l'obstacle se mouvait dans l'eau tranquille. Dans les expériences ainsi interprétées, la section A était toujours un carré de $0^m 325$ de côté.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Forme de l'obstacle	Epaisseur	Vitesse de l'eau par rapport à l'obstacle immobile. V	K	K'	K"
Plaque	0m.009	0m.975	1.86	0.67	1.19
Cube	0.325	0.975	1.46	0.27	1.19
Prisme	0.975	0.975	1.34	0.15	1.19
	Vitesse du corps flottant par rapport à l'eau immobile.				
Plaque	0m.009	0m.975	1.43	0.43	1.00
Cube	0.325	0.975	1.17	0.17	1,00
Prisme	0.975	0.975	1.10	0.10	1.00

Les réactions exercées par la face d'amont sont restées les mêmes dans chacune des séries, mais il ne faudrait pas en conclure, que cela serait encore vrai pour des prismes plus longs. A un autre point de vue on doit faire remarquer que les coefficients sont notablement plus grands lorsque c'est le liquide qui se déplace par rapport à l'obstacle fixe.

155. — Corps prismatiques flottants. C'est également d'après l'expérience qu'il convient d'établir les coefficients relatifs à la résistance au mouvement des corps prismatiques qui flottent dans un canal.

A étant alors l'aire transversale de la partie immergée de la projection du solide sur un plan perpendiculaire au mouvement relatif, V' étant la vitesse relative et R la réaction totale, on se sert toujours de la formule: $R = \varpi A \frac{V^2}{2g} \times K$
dans laquelle le coëfficient K peut varier avec la longueur du solide et la disposition des surfaces qui le terminent

La proue est celle de ces surfaces suivant laquelle le courant d'eau

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

se divise, la poupe celle sur laquelle l'eau se referme et, elles ont, l'une et l'autre, une influence marquée sur la valeur du coëfficient. On en jugera par les exemples suivants, dans lesquels les arêtes longitudinales du solide sont toujours dirigées parallèlement à la vitesse relative ..... K =

Cylindre dont la longueur dépasse le triple du rayon moyen de la base, $L > 3\sqrt{A}$ 1.10

Même cylindre avec poupe aigüe 1.00

Proue formée d'un demi-cylindre vertical, ce qui diminue la résistance R" 0.50

Proue formée d'un angle dièdre, à arête verticale, et dont l'angle se rapproche de 60° 0.50

La proue étant en outre coupée à la partie inférieure par un plan incliné d'un angle de 30° sur l'horizon 0.33

On voit d'après ces exemples combien la forme des extrémités du corps flottant peut influer sur les conditions de la résistance.

156. — Moyens de jaugeage fondés sur les réactions mutuelles. — Un grand nombre d'appareils de jaugeage sont fondés sur les pressions exercées par l'eau, dans son mouvement, sur des organes en repos ou sur des organes auxquels elle imprime un mouvement de rotation.

Les plus simples sont les tubes de Pitot et de Darcy, et les moulinets. Nous dirons quelques mots sur chacun de ces appareils.

157. — Tube de Pitot. — Cet instrument est formé d'un simple tube vertical, prolongé, à la partie inférieure, par une sorte de sabot horizontal, percé d'un très-petit orifice exposé au courant; la vitesse de l'eau extérieure y détermine, dans la branche verticale, une surélévation de niveau qui devrait être proportionnelle au carré de la vitesse de l'eau, au point où débouche le sabot. Il vaut mieux tarer l'instrument, par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des expériences préalables, dans un courant de vitesse connue.

La dénivellation est en général mesurée au moyen d'un flotteur dont les indications sont données, au dehors, par une tige indicatrice mobile avec lui.

158. Tube de Darcy. — Le tube de Darcy est fondé sur le même principe, mais il est en verre, et, au moyen d'un second tube dont le sabot est dirigé en sens inverse, et dans lequel il se produit un abaissement de niveau, on obtient, en comparant le niveau surélevé à ce niveau surbaissé, une indication ménisque plus grande, permettant, par conséquent, d'après la tare de l'instrument, une appréciation plus exacte de la vitesse de l'eau.

Afin d'éviter l'emploi d'un flotteur, même pour l'évaluation de la cote surbaissée, les deux tubes sont réunis, à la partie supérieure, par une garniture munie d'un robinet; avant de faire l'observation on aspire un peu d'air par ce robinet, qu'on ferme ensuite; la dépression intérieure qui en résulte relève les deux niveaux d'une même quantité, ce qui suffit pour faire la lecture de la différence de hauteur des deux colonnes, les deux ménisques étant alors amenés hors de l'eau ambiante.

159. — Moulinet de Woltman. — Le moulinet de Woltman se compose d'un petit volant à ailes inclinées, monté sur un arbre horizontal, dont les coussinets sont portés par une sorte d'étrier en fer mince. Le nombre des tours du volant est inscrit automatiquement sur un compteur, lorsque l'axe est placé dans le sens du courant, et l'expérience prouve que ce nombre de tours par minute est très sensiblement proportionnel à la vitesse du courant, $V = Kn$, le coëfficient K devant être déterminé, pour chaque moulinet, par des expériences préalables, embrassant les vitesses extrêmes entre lesquelles on peut avoir à s'en servir. Cet instrument, quoique moins délicat, est disposé comme les anémomètres qui servent à observer la vitesse des courants d'air.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Machines hydrauliques.

160. Considérations générales. — L'eau par sa chute, par sa pression sur des parois mobiles, ou par sa puissance vive, peut développer des quantités de travail plus ou moins grandes, que des organes de machines recueillent; à l'inverse, on peut, en dépensant sur elle une certaine quantité de travail, l'élever, lui faire exercer des pressions plus ou moins grandes, ou augmenter sa puissance vive. Les machines hydrauliques sont celles qui sont combinées de manière à déterminer ces différents genres d'action, et elles se distinguent en machines réceptrices ou machines élévatoires, suivant qu'elles sont destinées à donner la solution de l'un ou l'autre des problèmes mécaniques qui viennent d'être indiqués.

161. — Objet des récepteurs hydrauliques. Les récepteurs hydrauliques sont des machines qui fonctionnent d'une manière continue ou alternative, au moyen d'une chute d'eau, en utilisant le travail moteur que cette chute peut leur fournir. Le plus souvent l'eau est projetée contre des palettes ou dans des augets distribués symétriquement autour d'une roue, et c'est au moyen de l'arbre de cette roue que le travail recueilli est transmis aux appareils qui doivent utiliser ce travail.

162. — Puissance dynamique d'une chute d'eau. — Si P est le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

poids de l'eau débitée par la chute, en une seconde, et H la hauteur dont cette eau descend, le travail de la pesanteur sur cette eau a pour mesure P.H Kilogrammètres et c'est ce produit qui représente la puissance dynamique de la chute.

Si l'eau, avant de tomber était déjà animée d'une vitesse u_0, sa puissance vive serait représentée par $\frac{Pu_0^2}{2g}$ et cette quantité de travail s'ajouterait à la précédente dans l'évaluation de la puissance dynamique de la chute; mais la vitesse u_0 est presque toujours négligeable et nous aurons rarement à en tenir compte.

163. — Travail transmis par l'eau à une roue hydraulique.

La puissance dynamique d'une chute d'eau ne peut pas être intégralement recueillie par une roue hydraulique, et le travail effectif Te de cette roue diffère plus ou moins de la puissance dynamique ou absolue Ta, suivant les pertes de travail que l'on ne peut entièrement éviter dans le mode d'action du liquide sur la roue.

On a donc $Tc = PH + \frac{Pu_0^2}{2g} - Tp$

en désignant par Tp l'ensemble de ces pertes de travail.

Ces pertes de travail peuvent d'ailleurs être distinguées les unes des autres :

Tf sera le travail de frottement de l'eau contre les parties de la construction qui sont extérieures à la roue elle-même.

Ti sera le travail intérieur dépensé par les actions mutuelles de l'eau sur elle-même et en tourbillonnements.

$\frac{PV_1^2}{2g}$ sera le travail encore emmagasiné par l'eau à sa sortie, si sa vitesse est représentée par V_1; ce travail conservé par l'eau, en raison de sa vitesse, sera nécessairement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

perdu pour la roue.

On aura donc en définitive :

$$T_e = PH + \frac{Pu_0^2}{2g} - Tf - Ti - \frac{PV_1^2}{2g}$$

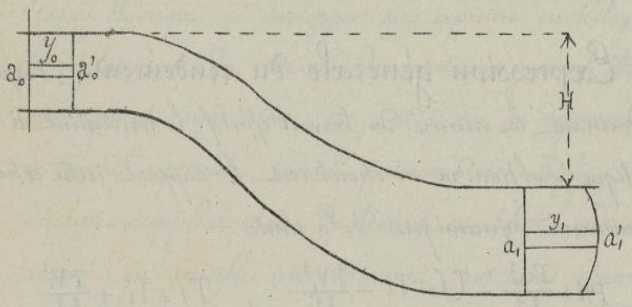
pour l'évaluation du travail qui a pu être transmis à la roue.

Nous aurons à estimer toutes ces quantités pour chacune des roues hydrauliques que nous avons à étudier.

Dans certains cas nous chercherons à calculer directement, et non par différence, le travail transmis par l'eau sur la roue, en nous appuyant sur les réactions mutuelles de l'eau en mouvement et des organes du récepteur, en égard à leurs vitesses respectives.

164 — Observation sur l'influence de la répartition des pressions dans les différentes couches du liquide en amont et en aval.

Si l'on considère deux sections faites dans la masse d'eau en amont et en aval de la roue, il est facile de voir que les pressions longitudinales exercées sur ces sections extrêmes ne sauraient modifier le travail PH, lorsque le liquide y passe en filets parallèles.



Soit par exemple, à l'amont, un filet horizontal $a_0 a'_0$, de section a^0, situé à une distance y_0 au-dessous du niveau de la nappe affluente : l'effort exercé par sa pression sera $(p_a + \varpi y_0)\, a_0$ et le travail correspondant à un temps θ, $(p_0 + \varpi y_0)\, a_0 v_0 \theta$,

On trouverait à l'aval un travail en sens contraire pour le filet de section a_1 correspondant au premier

$$-(p_a + \varpi y_1)\, a_1 v_1 \theta$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et la somme de ces deux travaux sera, en remarquant que $a_0 v_0 = a_1 v_1$,

$$\varpi a_1 v_1 \theta (y_0 - y_1) = K (y_0 - y_1)$$

en désignant par K le poids d'eau débité de part et d'autre.

En une seconde et pour tous les filets, le travail des pressions sera donc exprimé par $P (y_0 - y_1)$, pour le poids total débité P.

Si l'on additionne ce travail avec celui du poids P qui descend d'une hauteur $H - y_0 + y_1$ et qui est :

$$P (H - y_0 + y_1),$$

on voit que la somme de tous les travaux se réduira simplement à PH.

C'est pour cette raison que nous n'avons pas fait intervenir les pressions des différentes couches du liquide, en amont et en aval, dans les considérations préliminaires, indiquées au paragraphe précédent.

D'un autre côté, si le liquide était soumis en amont ou en aval à des pressions ambiantes d'intensités différentes il y aurait lieu de les considérer comme pression motrice et comme pression résistante dans le calcul de l'effet produit.

165. — **Expression générale du rendement.** — L'expression précédente de Te donnant la mesure du travail effectif, le rendement R du récepteur hydraulique s'obtiendra en cherchant le rapport entre ce travail recueilli et la puissance dynamique de la chute.

$$R = \frac{Te}{PH + \frac{Pu_0^2}{2g}} = \frac{PH + \frac{Pu_0^2}{2g} - Tf - Ti - \frac{PV_1^2}{2g}}{PH + \frac{Pu_0^2}{2g}} = 1 - \frac{Tf + Ti + \frac{PV_1^2}{2g}}{PH + P\frac{u_0^2}{2g}}$$

Il conviendra, dans tous les cas, d'employer les moyens les plus propres à réduire au minimum le terme soustractif, ce qui reviendra presque toujours à chercher les conditions du minimum de $Tf + Ti + \frac{PV_1^2}{2g}$ ou de chacune des parties de ce trinome. Quand les vitesses u_0 et V_1 sont négligeables, l'expression du rendement se simplifie et l'on a alors :

$$R = 1 - \frac{Tf + Ti}{PH}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

166. — Principaux types des récepteurs hydrauliques. — Les roues hydrauliques sont ordinairement à axe horizontal, auquel cas, la roue elle-même est verticale, ou à axe vertical; ce sont ces dernières, dites aussi roues horizontales, que l'on désigne sous le nom de turbines.

167. — Objet des machines hydrauliques élévatoires. — A l'inverse des récepteurs, les machines hydrauliques élévatoires ont pour objet d'élever l'eau au-dessus de son niveau primitif, ou de lui impartir des pressions ou des vitesses qui sont nécessaires dans certaines opérations mécaniques. Le plus souvent le travail extérieur est transmis au liquide par l'intermédiaire d'organes à mouvement alternatif ou à mouvement continu et les variations de pression jouent dans leur mode de fonctionnement un rôle considérable.

168. — Travail mécanique représenté par une élévation d'eau. — Si P est le poids de l'eau à élever en une seconde, à une hauteur H, le travail théorique à développer sera exprimé en Kilogrammètres par PH. Mais le déplacement de cette eau ne peut en général être obtenu qu'en lui communiquant une vitesse u_1, c'est-à-dire en dépensant sur elle une quantité de travail représentée par la puissance vive $\frac{Pu_1^2}{2g}$; et pour éviter cette dépense supplémentaire de travail on cherche ordinairement à restreindre autant que possible cette vitesse u_1, dont nous n'aurons ainsi à tenir compte que dans certains cas particuliers.

169. — Travail à dépenser sur les organes d'une machine élévatoire. — Le travail moteur dont on dispose ne peut pas être transmis intégralement au liquide élevé, parce que ce travail est nécessairement employé à vaincre les résistances passives, soit des organes de la machine élévatoire, soit du liquide lui-même.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On a donc : $T_m = PH + \frac{Pu_i^2}{2g} + T_p$.

en désignant par T_p l'ensemble de ces pertes de travail, qui peuvent d'ailleurs être distinguées les unes des autres par des notations spéciales, et si en outre on avait à tenir compte d'une vitesse u_o de l'eau, à l'origine, il faudrait écrire :

$$T_m = PH + \frac{Pu_i^2}{2g} - \frac{Pu_o^2}{2g} + T_f + T_i$$

en désignant, comme précédemment, par T_f et par T_i, l'ensemble des travaux correspondant aux forces relatives aux résistances extérieures, ou aux réactions intérieures des diverses parties de la masse liquide.

170. — Observation sur l'influence de la répartition des pressions dans les différentes couches du liquide, en amont et en aval. — Le raisonnement qui a été présenté déjà au N° 164, s'applique identiquement au cas de l'élévation d'un liquide, et il suffirait d'invoquer à cet égard la raison de réciprocité.

Mais il ne faut pas oublier que si la pression ambiante à l'amont est différente de la pression ambiante à l'aval, il est nécessaire d'en tenir compte dans l'évaluation du travail moteur et du travail résistant.

171. — Expression générale du rendement. — L'expression précédente de T_m donnant la mesure du travail à dépenser, le rendement R d'une machine élévatoire s'obtiendra en cherchant le rapport entre le travail recueilli et le travail dépensé

$$R = \frac{PH + \frac{Pu_i^2}{2g} - \frac{Pu_o^2}{2g}}{PH + \frac{Pu_i^2}{2g} - \frac{Pu_o^2}{2g} + T_f + T_i} = 1 - \frac{T_f + T_i}{PH + \frac{P(u_i^2 - u_o^2)}{2g} + T_f + T_i}$$

Il conviendra dans tous les cas d'employer les moyens les plus propres à réduire au minimum le numérateur du terme soustractif, en cherchant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à amoindrir autant que possible T_f et T_i. Il convient d'ailleurs de faire remarquer que dans la plupart des circonstances la vitesse u_0 est nulle et la vitesse u, inutilement imparte au liquide quand il s'agit seulement de l'élever, à une certaine hauteur, au-dessus de son niveau primitif.

172 – Principaux types des machines hydrauliques élévatoires. – Les machines élévatoires le plus généralement employées à l'élévation des liquides sont les pompes à mouvement alternatif de piston, mais il existe aussi, pour le même objet beaucoup d'appareils à action continue tels que le tympan, la vis d'Archimède, la noria, le chapelet et même un certain nombre de pompes, dites pompes rotatives, dans lesquelles le piston ou l'organe qui en tient lieu, se meut constamment dans le même sens.

173. — Appareils à force centrifuge. – Dans certains appareils rotatifs, servant de récepteurs ou d'élévateurs les forces centrifuges développées dans le liquide en mouvement jouent un rôle tout-à-fait prépondérant. Cette circonstance exigera qu'ils soient étudiés à part sous le nom de turbines, De pompes à force centrifuge, ou, lors qu'il s'agira des gaz, sous le nom de ventilateurs.

174 – Incertitudes de la théorie des machines hydrauliques et moyens d'approximation – Les nappes d'eau en mouvement dans les machines hydrauliques peuvent être considérées comme composées de filets juxtaposés qui ne sont pas, dans la plupart des cas,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

soumis exactement aux mêmes déplacements. On ne saurait dans de pareilles conditions se proposer d'étudier chacun de ces filets en particulier et l'on se contente d'apprécier l'effet d'ensemble par le seul examen des actions exercées et des effets produits sur le filet moyen. Ce mode d'approximation laisse évidemment à désirer sous le rapport de son exactitude, et les conséquences qu'on en déduit ne pourront dès lors être considérées pour certaines que dans la mesure où elles auront été vérifiées par les résultats de l'expérience. Ces deux modes d'examen devront, autant que possible, être sévèrement contrôlés l'un par l'autre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Recepteurs hydrauliques.

175. — Dispositions générales des roues hydrauliques verticales. — Les roues verticales sont formés d'un arbre horizontal, reposant sur deux paliers et muni de deux ou plusieurs tourteaux sur lesquels s'assemblent les bras au nombre de quatre et quelquefois plus. Aux extrémités de ces bras sont assemblées, suivant les cas, des palettes ou des couronnes circulaires qui portent des cloisons transversales, sur lesquelles l'eau d'amont doit exercer son action; cette eau les accompagne pendant un parcours suffisant pour perdre, à leur contact, son excès de vitesse, par rapport à elles, et s'écoule ensuite, de l'autre côté, dans le bief d'aval, à un niveau inférieur.

176. — Enumération des différents systèmes de roues verticales. — Les principales roues verticales sont distinguées les unes des autres par le mode d'arrivée de l'eau sur les organes de la roue:

1°. Les roues en dessus ou à augets reçoivent l'eau à la partie supérieure;

2°. Les roues où elle arrive à peu près à la hauteur de l'axe de la roue sont désignées sous le nom de roues de côté; elles tournent ordinairement dans un coursier

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en maçonnerie qui les entoure jusqu'à la sortie de l'eau, et on les appelle, par ce motif, roues emboîtées dans un coursier circulaire.

3°. Les roues en dessous, dans lesquelles l'eau n'agit que sur les palettes inférieures, généralement avec une grande vitesse.

Quelquefois ces roues sont disposées de manière à recevoir l'action d'une eau courante, en pleine rivière, on les désigne alors sous le nom de roues pendantes, et nous aurons en outre à étudier séparément les roues en dessous, à palettes courbes, qui ont conservé le nom de roues Poncelet.

177.– Roue en dessus.– La roue en dessus se compose d'une suite d'augets distribués symétriquement dans l'anneau formé par les deux couronnes concentriques qui forment les parois latérales de la roue, et ils en occupent toute la largeur. Ces augets sont ouverts à la partie supérieure, fermés dans le fond, et les couronnes, qui en forment les parois latérales, sont reliées par des bras à l'arbre central, sur lequel le travail moteur sera recueilli. Les cloisons qui séparent les augets ont d'ailleurs l'inclinaison convenable pour que l'eau entre à peu près suivant leur direction; les fonds des augets sont ordinairement dirigés suivant des plans qui passent par l'axe de la roue.

178.– Introduction de l'eau.– L'eau est le plus souvent amenée par un coursier ou canal de faible inclinaison, alimenté par un orifice de fond, et conduisant l'eau, par dessus la roue, à une petite distance au delà de la verticale de son centre. La roue marche alors dans le même sens que l'eau dans le bief d'amont et dans le bief d'aval.

Quand la roue doit tourner en sens contraire ou quand

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le niveau d'amont est très-variable, on coiffe au contraire la roue, un peu en contre bas de son sommet, du canal d'amenée lui-même, qui est alors fermé vers son extrémité, par une sorte de persienne munie d'une vanne tangentielle à la circonférence extérieure des augets; les cloisons de cette persienne guident l'eau avant son arrivée dans la roue.

179.- Travail perdu par le frottement de l'eau dans le canal d'amenée.

On donne au fond de ce canal l'inclinaison nécessaire pour que la vitesse de l'eau, qui était V_0 à la sortie de l'orifice, y reste la même jusqu'à son extrémité

Le travail de frottement a pour valeur:

$$Tf = \frac{PL}{R} X \times 0{,}0004\, V_0^2 = \frac{PL(m+2n)}{mn} \times 0{,}0004\, V_0^2$$

En désignant respectivement par L la longueur du canal, par m sa largeur, et par n la hauteur de la nappe d'eau qui le parcourt. Si la vitesse restait rigoureusement la même à l'entrée et à la sortie du du canal cette perte du travail serait représentée pour chaque Kilogr.me d'eau écoulée, par la différence de niveau entre les deux extrémités de ce canal; on multiplie et on divise par $2g$, puis en mettant pour $2g$, au numérateur sa valeur numérique, on trouve:

$$Tf = PL\, \frac{m+2n}{mn} \times 0.008\, \frac{V_0^2}{2g}$$

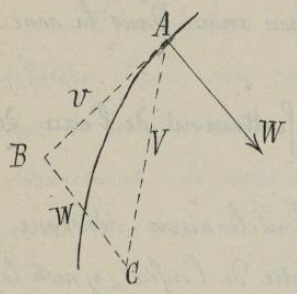
Telle est la forme sous laquelle on exprime habituellement la perte due au frottement dans le canal d'amenée, perte qui est presque toujours négligeable.

180 — Travail perdu à l'introduction.

L'eau arrive dans la roue avec une vitesse V, celle-ci se meut avec une vitesse v, et l'on admet que la vitesse relative W qui en résulte est entièrement perdue pour l'effet utile,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

parce qu'en effet cette vitesse, dirigée vers la roue et qui correspond à une quantité de travail $\frac{PW^2}{2g}$, se trouve tout entière dépensée en tourbillonnements ou en chocs sur le fond de l'auget et ne saurait en aucune façon aider au fonctionnement de la roue.



Cette perte de travail $\frac{PW^2}{2g}$ peut d'ailleurs s'exprimer en fonction des vitesses absolues, puisque, dans le triangle ABC on a nécessairement :

$$W^2 = V^2 + v^2 - 2Vv \cos Vv,$$

ce qui donne pour nouvelle expression du travail non utilisé :

$$\frac{P}{2g}\left(V^2 + v^2 - 2Vv \cos Vv\right)$$

La vitesse V de l'eau étant donnée, il faut chercher à réduire cette perte au minimum, ce qui revient pour une nappe d'eau donnée, en prenant la dérivée de la fonction par rapport à la seule variable v, à la condition :

$$2v - 2V \cos Vv = 0$$

D'où l'on tire :

$$v = V \cos Vv ;$$

La vitesse v serait alors la projection de V sur la tangente à la circonférence, et par suite :

$$W = v \operatorname{tg} Vv$$

ce que l'on voit immédiatement sur la figure.

On pourrait annuler W si l'angle Vv était nul, mais alors l'eau arrivant dans la direction de v, c'est-à-dire tangentiellement à la roue n'y pourrait entrer sous une épaisseur appréciable, ni par conséquent y produire aucun effet.

Cet angle ne pouvant être nul, on doit le choisir aussi petit que l'épaisseur de la lame d'eau le permet et l'expérience a

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

prouvé qu'il pouvait, dans de bonnes conditions varier de 20° à 30°

Dans ce dernier cas :

$$\text{tang. } 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$$

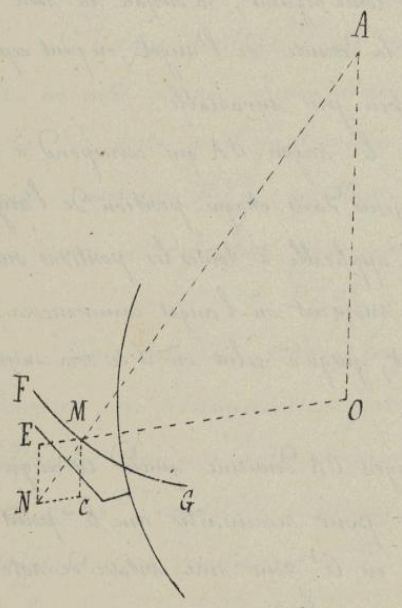
On obtient alors les trois relations :

$$v = V \cos Vv = 0,866\, V ;$$

$$W = v \operatorname{tang} Vv = 0,577\, v ;$$

et $W = V \sin Vv = 0.50\, V.$

181. — Forme que prend la surface de l'eau dans les augets. L'eau entraînée dans le mouvement de l'auget et soumise en même temps à l'action de la pesanteur et à celle de la force centrifuge, ne saurait conserver ses surfaces de niveau horizontales. En considérant seulement le poids $mg = MC$ d'une molécule de sa surface, et sa force centrifuge $m\omega^2 = ME$; cette molécule sera en équilibre relatif dans l'auget si la surface de niveau à laquelle elle appartient est normale à la résultante de ces deux forces.



MN étant cette résultante, les deux triangles semblables MCN, MOA donnent la proportion :

$$\frac{AO}{MO} = \frac{MC}{NC} \quad \text{ou} \quad \frac{AO}{r} = \frac{mg}{m\omega^2 r}$$

d'où l'on tire :

$$OA = \frac{g}{\omega^2}$$

Si donc du point A comme centre, défini par cette valeur sur la verticale du point O, on traçait une circonférence passant par le point M, cette circonférence serait tangente à la surface

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de niveau en M, et ce point M étant quelconque sur la surface, on en conclut qu'elle appartient elle-même à la surface de niveau, qui sera ainsi formée par la juxtaposition d'arcs de cercle dont les centres seront tous situés sur l'horizontale du point A ; c'est-à-dire que cette surface sera cylindrique, qu'elle aura ses génératrices horizontales et pour section droite, l'arc de cercle FG décrit du point A.

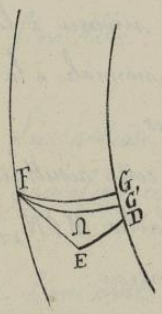
Le centre A est d'ailleurs situé à une très grande hauteur, dans tous les cas de la pratique, par exemple :

pour $r = 2^m$; $\omega = 0^m.65$; $v = \omega R = 1.30$; on trouve $OA = 23^m$

pour $r = 2.$; $\omega = 0.50$; $v = \omega R = 1.00$ " $OA = 39^m$

Il en résulte que la surface FG se modifie très peu d'une position à l'autre de l'auget et que, si en toute rigueur, la surface ne reste pas identique à elle-même pendant la descente de l'auget, on peut cependant considérer sa forme comme à peu près invariable.

En tous cas, connaissant le rayon OA qui correspond à une vitesse angulaire ω, on pourra toujours dans chaque position de l'auget déterminer la section $EFGD = \Omega b$, applicable à toutes les positions successives depuis le moment où l'auget commencera à devenir insuffisant, jusqu'à celui où il se sera complétement vidé.



Le rayon OA diminue quand ω augmente, ce qui suffit pour reconnaître que le point G s'abaisserait en G' pour une vitesse de rotation plus grande ; le déversement commencerait alors plutôt, ce qu'il importe d'éviter dans l'application.

182. — Travail perdu par le déversement.

Le point où commence le déversement étant à une hauteur h_0 au dessus du niveau du bief d'aval, si P_0 est le poids primitif

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de l'eau admise dans un auget, $P_0 h_0$ serait une expression de la perte de travail correspondante, trop grande, de tout le travail que l'eau peut encore fournir au dessous de cette hauteur h_0, soit $\int_{h_1}^{h_0} P' dz$, en désignant par P' le poids variable d'eau qui est encore contenu dans l'auget à une hauteur h, et h_1 étant la valeur de cette variable, au moment où l'auget se trouve complétement vide. La perte réelle de travail, pour un auget sera donc exprimée par:

$$P_0 h_0 - \int_{h_1}^{h_0} P' dz$$

Cette perte se rapporte au poids primitif P_0, et si on veut la calculer pour le poids total P de l'eau dépensée par seconde, il suffira de multiplier l'expression précédente par $\frac{P}{P_0}$, ce qui donne:

$$P\left(h_0 - \frac{1}{P_0}\int_{h_1}^{h_0} P\, dh\right),$$

Chaque particule d'eau, au moment où elle quitte la roue, est en outre animée d'une vitesse v égale à celle de la circonférence de la roue, de sorte qu'il faut encore ajouter, à l'expression précédente, la perte commune $P\frac{V^2}{2g}$, résultant de la puissance vive correspondante, ce qui donne en définitive, pour exprimer la perte totale à la sortie:

$$P\left(\frac{v^2}{2g} + h_0 - \frac{1}{P_0}\int_{h_1}^{h_0} P' dh\right)$$

Cette intégrale pourra toujours se calculer par la formule de Simpson, en déterminant par une épure la valeur de P' aux différentes hauteurs intermédiaires entre h_0 et h_1; on la déterminerait avec moins d'exactitude il est vrai, mais avec une approximation encore suffisante, en substituant à P' la valeur moyenne $\frac{P_0}{2}$ de la contenance de l'auget, entre les deux limites, ce qui donnerait approximativement:

$$\frac{1}{P_0}\int_{h_1}^{h_0} P' dh = \frac{1}{P_0}\int_{h_1}^{h_0} \frac{P_0}{2}\, dz = \frac{1}{2}(h_0 - h_1).$$

et pour l'expression entière de la perte:

$$P\left(\frac{v^2}{2g} + h_0 - \frac{1}{2}(h_1 - h_0)\right) = P\left(\frac{v^2}{2g} + \frac{1}{2}(h_0 + h_1)\right).$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

183. — Effet dynamique. — En récapitulant les pertes de travail précédemment indiquées et en les déduisant de la puissance dynamique PH de la chute, on trouve pour l'expression de l'effet dynamique:

$$Te = PH - 0.008\frac{PV_0^2}{2g} - \frac{P}{2g}(V^2 + v^2 - 2Vv\cos Vv) - P\left(\frac{V^2}{2g} + h_0 - \frac{1}{P_0}\int_{h_1}^{h_0} P'dh\right);$$

V_0, vitesse de l'eau à l'extrémité du canal, différent de la vitesse V d'arrivée de l'eau dans la roue par suite de la petite chute parabolique que l'eau éprouve à la suite du canal, ce qui donne, en égard à la petite inclinaison de V_0 la relation suivante:

$$V^2 = V_0^2 + 2gE$$

E est alors la hauteur verticale comptée à partir du bec du canal d'amenée jusqu'à l'entrée dans la roue.

Si l'on se reporte aux diverses régions dans lesquelles il se produit des pertes de travail, on reconnaît facilement que:

1°. Dans la première région en amont de la roue, il y a lieu d'éviter la contraction au vannage par des évasements convenables, donnés au bord de l'orifice, et de diminuer autant que possible la longueur L du canal d'amenée. Au reste la perte due au frottement dans le coursier est extrêmement faible et on peut en général la négliger.

Les pertes peuvent, au contraire, être très considérables dans les deux autres régions, c'est-à-dire dans la roue elle-même et en aval de la roue. Les premières augmentent proportionnellement au carré de la vitesse v, à la circonférence de la roue, et nous avons vu déjà que, pour les secondes, non-seulement le premier terme de leur expression varie dans la même proportion, mais encore, que la différence des deux autres termes $h_0 - \frac{1}{P_0}\int P'dh$, augmente avec cette même vitesse.

La roue à augets doit donc fonctionner lentement et on ne l'emploie le plus ordinairement que pour des valeurs de v inférieures à 1m.30.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

184. — Débit de la roue en dessus. — Les augets représentant la capacité toute entière comprise entre les couronnes, déduction faite de l'espace occupé par les cloisons, en ne tenant pas compte de cette épaisseur et en appelant p la profondeur des augets le volume engendré par seconde serait :

$$b\ p\ v$$

L'expérience a prouvé que pour obtenir un bon rendement il ne convenait pas de remplir les augets à plus du tiers de leur capacité, ce qui conduit à faire :

$$Q = \frac{b\,p\,v}{3} \quad \text{d'où} \quad \frac{Q}{b} = \frac{p\,v}{3}$$

Pour $p = 0.25$ et $v = 1^{m}.30$

on trouverait ainsi $\frac{Q}{b} = 0.108$

Pour tenir compte de l'espace occupé par l'épaisseur c des parois, il suffirait de considérer chaque auget, comme équivalent à celui que nous aurons à examiner dans la roue de côté.

La capacité effective d'un auget serait alors :

$$q = b\,p\,c\left(1 - \frac{p}{2r} - \frac{c}{c}\right)$$

et la capacité totale au pourtour de la roue

$$n\,q = n\,b\,p\,c\left(1 - \frac{p}{2r} - \frac{c}{c}\right),$$

la différence d'évaluation ne porterait ainsi que sur le dernier facteur qui différera peu de 0,9.

185. — Débit par mètre de largeur. —

Le vannage débite par seconde un volume Q

$$Q = 0.95\ b\,n\,\sqrt{2g\left(d - \frac{n}{2}\right)}$$

en admettant que les précautions aient été prises pour que l'effet de la contraction ne réduise le débit qu'à 0.95 de sa valeur théorique ; n est la hauteur de l'ouverture et $\left(d - \frac{n}{2}\right)$ la charge sur le centre de gravité de cet orifice.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On tire de là :

$$\frac{a}{b} = 0.95\, n \sqrt{19.62\left(d - \frac{n}{2}\right)}$$

pour $n = 0.06$ et $d = 0.17$; on trouverait $\frac{a}{b} = 0^{mc}.095$

$n = 0.10$ et $d = 0.20$; $\frac{a}{b} = 0^{mc}.153$

Mais déjà cette dernière valeur est en pratique trop grande et, il convient en général de limiter le débit à environ 100 litres par seconde et par mètre de largeur.

186. — Résultats d'expériences — Les expériences de M. Morin sur les roues à augets sont celles qui ont été faites avec le plus de méthode, en variant les divers éléments qui peuvent modifier leur rendement.

Pour rendre compte des résultats de ces expériences il est nécessaire de réduire la formule de l'effet utile à ces termes vraiment essentiels. On a alors, en désignant par H' la chute libre dans la roue.

$$T_e = PH' + \frac{PV^2}{2g} - \frac{P}{2g}\left(V^2 + v^2 - 2Vv\cos\alpha\right) - \frac{Pv^2}{2g} = P\left(H' - \frac{1}{g}(V\cos\alpha - v)v\right)$$

Pour la discussion des résultats observés, M. Morin a considéré le second terme de la parenthèse comme une expression véritablement théorique et inévitable, et il a en conséquence cherché à déterminer le coefficient μ dont il faudrait affecter le premier terme pour exprimer les véritables données de l'expérience.

On aura ainsi : $T_e = P\left(\mu H' - \frac{1}{g}(V\cos\alpha - v)v\right)$

Quatre roues ont été expérimentées dans les conditions les plus variées : 1°. Roues de Guebwiller de $9^m.10$ de diamètre, de Jemelles, $3^m.42$, de fleur moulin $2^m.28$, de la Renardière $2^m.74$. Toutes ces roues ont conduit, avec de très légères différences, à un coëfficient $\mu = 0.77$, alors que les augets n'étaient remplis

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'à moitié, et que la vitesse v à la circonférence n'a pas sensiblement dépassé 2m. 00.

Il semblerait d'après ces indications que l'on peut sans inconvenient faire fonctionner les roues de ce genre avec une vitesse à la circonférence notablement supérieure à 1m. 30. Quant au coëfficient R de rendement effectif par rapport à la puissance dynamique de la chute, il ne s'est pas élevé en moyenne à plus de 0.65 - Au-dessous de 3m. 00 de chute, la roue de côté est préférable - La levée de la vanne ne doit pas être supérieure à 0m. 08 ou 0m. 10.

187.— Etablissement de la roue à augets - Etant donnée une chute de 4 à 8 mètres à utiliser, on déterminera la largeur de l'orifice qui, sous une charge de 10 centimètres, débiterait la quantité d'eau disponible. Cette largeur est la largeur b de la roue. Cette largeur ne devra pas dépasser 5 mètres, limite à laquelle la roue serait déjà très lourde.

A moins d'un niveau très-variable à l'amont, on préférera l'admission près de l'arête supérieure, par radier incliné, à l'introduction latérale par persienne, parce que la roue serait, dans ce dernier cas, d'un plus grand diamètre, ce qui aurait pour résultat de faire commencer le déversement en un point dont la cote de hauteur qui, en restant la même, représente par cela seul une plus grande partie de la chute utilisée.

Le diamètre de la roue sera de 0m. 20 à 0m. 25 plus petit que la hauteur de chute, et son centre sera placé de manière que le point inférieur de la couronne affleure le niveau habituel des eaux d'aval.

Le canal débouchera à 0m. 40 ou 0,50 en amont de l'auget dans lequel l'eau entrera à une très-petite distance du sommet de la roue.

La distance C entre les bords de deux augets successifs, pourra

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

varier de 0m 32 à 0m 35.

On donnera 0m 25 de profondeur aux augets, et s'ils sont en bois leur profil inférieur sera formé de deux lignes, l'une, celle du fond, dirigée suivant le rayon et arrêté au diamètre moyen de la couronne, l'autre dirigée de ce point vers le point de rencontre entre le rayon suivant et la circonférence extérieure.

L'épaisseur du bois employé à la construction sera de 0m 015 à 0m 030, mais si on exécutait les augets en tôle, on leur donnerait une forme courbe et une épaisseur de quelques millimètres seulement.

188.— **Roue de côté.** — Dans ce système de roue, l'eau arrive un peu au dessous de l'axe, dans l'espace compris entre les palettes, qui sont dirigées suivant des rayons. Ces palettes se meuvent dans un coursier circulaire en maçonnerie, avec le moindre jeu possible tant à la circonférence que sur les côtés. Les capacités ainsi limitées sont d'ailleurs percées d'une ouverture, vers le haut de chacun des compartiments, pour permettre à l'air entraîné de se dégager vers l'intérieur de la roue.

Dans les meilleures roues, l'eau arrive toujours par un déversoir dont le seuil doit pouvoir s'élever ou s'abaisser, suivant la quantité d'eau à débiter, ce que l'on obtient au moyen d'une pièce intermédiaire ou col de cygne qui raccorde ce seuil avec la paroi du coursier. Dans certains cas cependant, le liquide est introduit par un orifice de fond au moyen d'une vanne inclinée, et le coursier est alors réduit à une très petite hauteur.

189.— **Perte de travail au passage du déversoir.** — En arrondissant convenablement les bords du déversoir, on n'aura qu'une perte de travail insignifiante, que l'on estime, suivant les circonstances, de :

$$0^m 05 \text{ à } 0^m 06 \quad P\frac{V^2}{2g}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

190. — Introduction de l'eau. — La perte à l'introduction, due à la vitesse relative est comme précédemment :

$$\frac{PW^2}{2g} = \frac{P}{2g}\left(V^2 + v^2 - 2Vv\cos Vv\right).$$

et nous entrerons dans quelques détails sur les conditions qui correspondent à la plus petite valeur de la fonction :

$$W^2 = V^2 + v^2 - 2Vv\cos Vv$$

Si l'on cherche le minimum de W^2 :

1° En supposant v constant

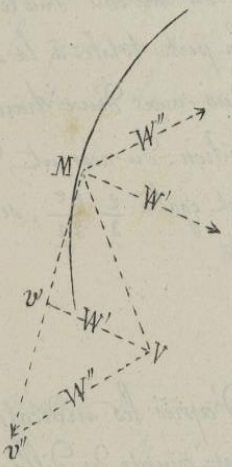
$$\frac{dW^2}{dV} = 2V - 2v\cos Vv = 0 \qquad V = v''\cos Vv$$

$$W'' = V\,\mathrm{tang}\,Vv = v''\sin Vv$$

2° En supposant V constant

$$\frac{dW^2}{dv} = 2v - 2V\cos Vv = 0 \qquad v' = V\cos Vv$$

$$W' = V\sin Vv = v'\,\mathrm{tang}\,Vv$$



Les lignes W' et W'' sont en effet les plus courtes que l'on puisse mener de V sur Mv'' ou de v'' sur MV. Pour une même valeur de V, W' est plus petit W''; cette solution est donc la plus convenable et en outre W' est dirigé suivant le rayon, tandis que W'' est toujours dirigé par rapport à ce rayon, dans des conditions telles que le filet moyen s'écarterait de la palette, supposée radiale, dans son mouvement relatif, sauf à retomber ensuite, après avoir été choqué par la palette suivante.

En ce qui concerne la roue à augets les cloisons ne pourraient être, à l'admission, dirigées suivant W'', et pour la roue de côté cette direction déterminerait à la sortie un pelletage qui relèverait une partie de l'eau au-dessus du niveau d'aval, au préjudice du travail réalisé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

191 — Perte de travail due au frottement dans le coursier. — L'eau se mouvant, après quelques tourbillonnements, comme les parties de la roue entre lesquelles elle se trouve maintenue, sa vitesse, au fond du canal formé par les parois du coursier et des bajoyers, est v, et par conséquent sa vitesse moyenne u, en se reportant à ce qui a été dit sur le mouvement de l'eau dans les canaux découverts (1), sera :

$$u = \frac{4}{3} v ;$$

de sorte que la perte due aux frottements sera :

$$P L \frac{b+2h}{bh} b, u^2 = P L \frac{b+2h}{bh} 0{,}0004 \times 19{,}62 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = 0{,}014\, P L \frac{b+2h}{bh} \frac{v^2}{2g}$$

192. — Perte de travail à l'échappement. — Si nous désignons par h' la hauteur de l'eau, mesurée à partir du niveau dans le bief inférieur, au moment où elle quitte la roue, la perte totale à la sortie sera déterminée par la somme des travaux dus aux deux hauteurs $\frac{v^2}{2g}$ et h', quantité qui au moyen de la disposition du ressaut, due à M. Bélanger, h' devenant alors négatif et égal à $\frac{2}{3}\frac{v^2}{2g}$, se réduira dans ce cas le plus favorable à :

$$\frac{1}{3} \frac{P v^2}{2g}$$

193. — Effet dynamique. — D'après les indications qui précèdent, le travail utilisable, en tenant compte des différentes

---

(1) On a trouvé au numéro 115, $W = 0{,}6\, V$; d'un autre côté $u = 0{,}8\, V$ et par suite $W = 0{,}6 \frac{u}{0.8} = \frac{3}{4} u$. — La vitesse au fond est égale aux trois quarts de la vitesse moyenne ; c'est ce que nous exprimons ici en disant que la vitesse moyenne u est égale aux $\frac{4}{3}$ de la vitesse v mesurée à la circonférence du coursier circulaire.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pertes déjà examinées sera donc :

$$Te = PH - 0{,}05\,P\frac{V^2}{2g} - \frac{P}{2g}(V^2 + v^2 - 2Vv\cos Vv) - 0{,}014\,PL\frac{b+2h}{bh}\frac{v^2}{2g} - \frac{1}{3}\frac{Pv^2}{2g}$$

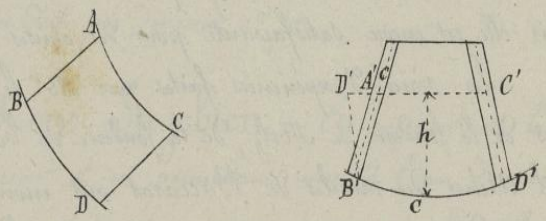
Toutes les pertes augmentent proportionnellement au carré de la vitesse de la roue, qu'il est ainsi nécessaire de réduire le plus possible, à 1m.30 environ.

Si l'on voulait, en outre, évaluer la perte par l'intervalle, de section ω, compris entre les aubes, les bajoyers et le coursier, on pourrait évaluer le travail correspondant à :

$$\varpi\, w\, \sqrt{2gH} \times H$$

en admettant que la même eau passe successivement par tous les joints w.

194. — Volume compris entre deux augets. Nous représentons en AB et CD, deux palettes successives dans une position quelconque; l'eau qu'elles comprendront aura même volume que si les palettes occupaient les positions A'B', C'D' situées symétriquement par rapport à la verticale du centre de la roue. Si l'eau s'élève, dans cette dernière position à une



hauteur h, on aura pour la surface du trapèze $A'B'C'D'$,

$$h \times C - A'B'D' - h \times c = hC - \frac{1}{2}h \times h\frac{C}{r} - hc,$$

ou $hC\left(1 - \frac{h}{2r} - \frac{c}{C}\right)$ et $q = hbC\left(1 - \frac{h}{2r} - \frac{c}{C}\right)$

Cette quantité est approximativement évaluée à $0{,}9\,hbC$, et il en résulte, pour l'évaluation du débit réel,

$$Q = 0{,}9\,h\,b\,v,$$

en remplaçant la longueur C de la distance comprise entre deux aubes consécutives par la vitesse v à la circonférence.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il convient toutefois que les augets ne reçoivent pas plus d'eau qu'il n'en faut pour les remplir à moitié.

195. — Débit par mètre de largeur. — On tire de la relation précédente $\frac{q}{b} = 0{,}9\, h\, v$, ce qui conduit dans le cas des deux exemples suivants à :

$$h = 0^{m}15\ ;\ v = 1^{m}30\ ;\ \frac{q}{b} = 0^{m.c.}175$$

$$h = 0.25\ ;\ v = 1.30\ ;\ \frac{q}{b} = 0.290$$

Ce dernier nombre est déjà élevé et il convient de ne pas débiter dans la roue beaucoup plus de 200 litres par mètre de largeur et par seconde.

196. — Résultats d'expériences. — La roue de côté fonctionne dans les conditions du maximum de rendement utile en recueillant 0,60 de la puissance dynamique de la chute lorsque son diamètre est compris de $3^{m}50$ à $6^{m}00$. Elle convient parfaitement aux chutes de 1^{m} à $2^{m}50$, mais elle est encore satisfaisante pour des chutes un peu supérieures.

Les séries d'expériences faites par M^r^ le Général Morin sur les roues de la fonderie de Metz, de la fonderie de Toulouse, de Chatellerault, de l'atelier des meules de Baccarat ont montré que pour des chutes de 1^{m} à $2^{m}00$, avec vanne de fond, le coefficient de réduction de la formule approximative :

$$Te = P\left[\mu H' + \frac{1}{g}\left(V\cos\alpha - v\right)v\right]$$

a différé très-peu de 0.75, le rendement par rapport à la puissance dynamique de la chute ayant cependant varié de 0.33 à 0,53.

Avec une vanne en déversoir les expériences faites sur cette dernière roue et sur celle de la tôllerie de la même usine exigent un coefficient de correction de 0.79, l'effet utile absolu

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

n'ayant varié que de 0.67 à 0.75.

197. — Etablissement de la roue de côté. — Le centre de la roue étant placé un peu au-dessus du niveau d'amont, le diamètre est un peu plus grand que le double de la hauteur de la chute ; la règle précédente indique alors la quantité d'eau que l'on peut y admettre par mètre de largeur, ce qui permet de déterminer cette largeur, et de calculer l'épaisseur de la lame d'eau sur le déversoir.

Les aubes ne doivent être ni trop écartées ni trop rapprochées ; dans le premier cas, la chute libre, entre les augets, serait trop grande ; dans le second, l'eau qui viendrait à tomber sur la tranche des palettes donnerait lieu à des rejaillissements trop multipliés. L'écartement entre les palettes ne doit varier qu'entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{3}{2}$ de l'épaisseur de la lame d'eau sur le déversoir.

Pour un diamètre de 3 à 4 mètres, la roue portera 4 bras, et ce nombre pourra être augmenté pour un plus grand diamètre ; le nombre des aubes est toujours multiple de celui des bras ; leur hauteur dans le sens de la circonférence, ne doit pas dépasser 0m.70.

198. — Roue Sagebien. — En augmentant la hauteur de l'orifice en déversoir et en permettant ainsi à l'eau d'arriver directement, presque sans chute et en nappe épaisse sur les palettes, MM. Sagebien a construit, depuis quelques années, des roues très lentes, dans lesquelles le liquide n'éprouve que très peu d'agitation et qui donnent un rendement de plus de 80 pour cent. Elles ont, d'un autre côté, l'inconvénient d'être très grandes et très-lourdes, mais elles sont favorables surtout dans les cas où les machines à conduire fonctionnent elles-mêmes fort lentement, comme par exemple les pompes à faible vitesse de marche. Les aubes sont alors très-larges et très-multipliées, l'eau s'y relève un peu à l'arrivée, par suite de l'inclinaison en sens convenable de ces aubes,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

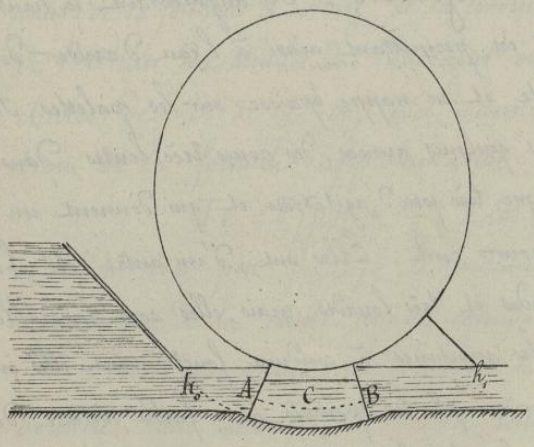
pour retomber ensuite, et M. Sagebien arrive ainsi à dépenser, dans les meilleures conditions, plus de 1000 litres d'eau par seconde et par mètre de largeur de roue.

199. – Roue en dessous. – La roue en dessous est encore une roue à palettes planes, tournant entre deux bajoyers ; le coursier circulaire est réduit, en regard de la partie inférieure de la roue, à une très-petite longueur et disposé de façon que les palettes en suivent le contour, qui est arrondi seulement au bas de leur évolution.

L'eau n'atteint les palettes qu'à la partie inférieure à la suite d'un radier, et leur est nécessairement distribuée par un orifice de fond, muni d'une vanne ordinairement inclinée ; elle sort avec toute la vitesse due à la chute, ce qui, comme nous l'avons vu déjà, augmente beaucoup les pertes de travail dues aux tourbillonnements et aux chocs.

La partie circulaire AB doit avoir au moins une longueur égale à la distance C comprise entre deux palettes et il faut que le jeu soit aussi petit que possible, soit entre les palettes et le coursier, soit entre les palettes et les bajoyers.

200. – Gonflement de l'eau à l'aval. – L'eau devant agir sur les palettes en raison de sa vitesse V_0, perd une partie de cette vitesse dans son action, et quitte ainsi la roue avec une vitesse V_1, nécessairement plus petite que V_0.



Si l'on désigne respectivement par h_0 et h_1 les hauteurs d'eau sur le radier, et par b la distance comprise entre les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

bajoyers, on aura nécessairement :

$$Q = b h_0 V_0 = b h_1 V_1$$

d'où l'on déduit :

$$h_1 = h_0 \frac{V_0}{V_1}$$

ce qui montre que h_1 est nécessairement plus grand que h_0, puisque la fraction $\frac{V_0}{V_1}$ est plus grande que l'unité ; il y a gonflement de l'eau à l'aval de la roue.

201. — Arrivée de l'eau à la partie inférieure de la palette. Si un filet liquide, dirigé horizontalement à partir du vannage, venait rencontrer seulement la palette, supposée verticale, avec une vitesse V_0 et par conséquent avec une vitesse relative $V_0 - v$, la perte de travail due au choc serait :

$$\frac{P}{2g} (V_0 - v)^2$$

et si l'on ajoutait la perte $\frac{P}{2g} v^2$ due à ce que le liquide quitte la roue avec la vitesse v de sa palette, la perte totale de travail serait $\frac{P}{2g} (V_0^2 - 2 V_0 v + v^2 + v^2)$.

En déduisant cette perte du travail moteur $\frac{P}{2g} V_0^2$, on aura pour évaluation du travail transmis :

$$\frac{P}{g} (V - v) v$$

expression dont le maximum correspond à $v = \frac{V_0}{2}$ et est donné par

$$\frac{P}{g} \left(V_0 - \frac{V_0}{2}\right) \frac{V_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{P V_0^2}{2g}.$$

Le travail transmis serait, même dans ce cas maximum, réduit à la moitié du travail moteur. Pour compléter l'évaluation du travail développé il faudrait toutefois retrancher de l'expression précédente celle du travail des pressions à l'amont et à l'aval, ainsi que nous les calculerons dans le paragraphe suivant.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

202. — Effet dynamique. L'application du principe des quantités de mouvement à toute la période d'action, et entre deux sections de la lame d'eau que celle-ci traverserait de part et d'autre en filets parallèles, nous permettra de mettre approximativement en évidence, la valeur de ce travail transmis.

En choisissant un axe horizontal de projection, on aura ainsi :

$$\frac{P}{g}(v - V_0)\theta = \Sigma \text{ impulsions projetées.}$$

Les forces à considérer sont :

1° Poids du liquide : impulsions verticales nécessairement nulles en projection horizontale ;

2° Pressions normales au coursier : même observation.

3° Pression atmosphérique, ayant une impulsion nulle, parce qu'elle s'exerce sur un contour fermé ;

4° Pression sur les sections extrêmes, dues à la répartition suivant la loi hydrostatique :

$$\varpi \frac{h_0}{2} \times b h_0 \ldots \frac{h_1}{2} \times b h_1 \times \theta = \left(\frac{h_0}{2} \times \frac{P}{V_0} - \frac{h_1}{2}\frac{P}{v}\right)\theta,$$

en remarquant que $P = \varpi Q = \varpi\, b h_0 V_0 = \varpi\, b h_1 v$.

Cette expression peut encore se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{2} P \left(\frac{h_0}{V_0} - \frac{h_1}{v}\right)$$

5° Réaction des palettes : Nous représenterons sa projection horizontale par F et son impulsion élémentaire sera $F\theta$.

En récapitulant toutes ces valeurs, en leur donnant les signes convenables, et en divisant tous les termes par θ, on trouve :

$$\frac{P}{g}(v - V_0) = \frac{P}{2}\left(\frac{h_0}{V_0} - \frac{h_1}{v}\right) - F$$

et cette force F, qui exprime aussi l'action reçue sur les palettes, aura pour valeur :

$$F = \frac{P}{g}(v - V_0) + \frac{P}{2}\left(\frac{h_0}{V_0} - \frac{h_1}{v}\right).$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le travail Fv de cette force, par seconde, sera donc:

$$Tc = Fv = \frac{P}{g} v(V_o - v) + \frac{Pv}{2}\left(\frac{h_o}{V_o} - \frac{h_1}{v}\right) = \frac{P}{g} v(V_o - v) + P\frac{h_o}{2}\left(\frac{v}{V_o} - \frac{V_o}{v}\right);$$

$$Tc = Fv = \frac{PV_o^2}{2g}\left[2\left(\frac{v}{V_o} - \frac{v^2}{V_o^2}\right) + g\frac{h_o}{V_o^2}\left(\frac{v}{V_o} - \frac{V_o}{v}\right)\right]$$

$$= \frac{PV_o^2}{2g}\left[2\left(x - x^2\right) + \frac{h_o}{2H}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] = \frac{PV_o^2}{2g} \times K$$

en représentant $\frac{v}{V_o}$ par x, et la valeur tout entière de la parenthèse par k, et en remarquant d'ailleurs que $V_o^2 = 2gH$.

203 – Détermination du rendement. $\frac{PV_o^2}{2g}$ étant l'expression de la puissance dynamique de la chute, le rendement se trouve indiqué par la valeur que nous allons discuter du coefficient K.

$$K = 2\left(x - x^2\right) + \frac{h_o}{2H}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

En égalant à 0 sa dérivée par rapport à x, il vient:

$$\frac{dK}{dx} = 2 - 4x + \frac{h_o}{2H}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

On obtient une équation du 3e. degré dont il suffit de tirer quelques valeurs de x, en faisant remarquer d'ailleurs que dans ces sortes de roues $\frac{h_o}{2H}$ est toujours plus petit que 0.10.

Voici quelques unes des valeurs calculées de K:

$\frac{h_o}{2H}$	= 0,000	0,050	0.100
x	= 0,500	0.553	0.595
K	= 0,500	0.431	0.373

Entre ces limites de $\frac{h_o}{2H}$, les valeurs du coëfficient K de rendement sont toutes comprises de 0.500 à 0,373.

Dans le premier cas:

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$2 - 4x = 2 - 4\frac{v}{V_0} = 0 \qquad \text{ou} \quad V_0 = 2v$$

et l'effet utile de 0.50 qui y correspond est le maximum réalisable.

D'après l'expérience le maximum d'effet est obtenu pour $\frac{v}{V_0} = x = 0.4$ ce qui donne $K = 2(0.4 - 0.16) + \frac{h_0}{2H}\left(0.4 - \frac{1}{0.4}\right) = 0.48\frac{h_0}{2H} \times 2.1$

On a alors :

$$Te = \frac{PV_0^2}{2g}\left(0.48 - 2.1\frac{h_0}{2H}\right) = 0.48\frac{PV_0^2}{2g} - 1.05\,Ph_0$$

Sous cette forme, on aperçoit qu'il faut retrancher des 0.48 du travail moteur, tout le travail correspondant à la hauteur h_0, qui est entièrement perdu.

204. Résultats d'expériences.

Les nombreuses expériences faites sur des roues en dessous n'ont jamais donné un effet utile de plus de 30 % et le maximum s'est toujours manifesté pour une vitesse $v = 0.40\,V$ à $0.45\,V$, autant toutefois qu'on en puisse juger d'après les diverses séries d'expériences de Smeaton et de Bossut, sur des modèles de diamètres insuffisants.

On est loin du maximum théorique de 0.50 ce qui est dû sans doute aux pertes d'eau par le jeu laissé entre la roue et le coursier, et à ce que l'exiguité du parcours commun ne permet pas à l'eau de perdre, dans toutes ses parties, l'excès de sa vitesse sur celle de la roue.

Quoiqu'il en soit, la roue en dessous offre le grand avantage d'être très rapide et on l'utilise fréquemment pour des chutes de 1 à 2 mètres, lorsqu'on n'a pas pour obligation de tirer de cette chute le meilleur effet utile.

205. Établissement de la roue en dessous.

Au point de vue de son établissement, la roue en dessous n'est, pour

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ainsi dire, soumise à aucune règle précise, si ce n'est en ce qui concerne l'écartement des palettes qui ne doit pas dépasser 0m.35. Leur longueur peut être portée de 0m.40 à 0m.60.

On améliorera un peu son rendement, en y appliquant la disposition déjà indiquée de Belanger, pour faciliter le dégorgement à l'aval.

206. — Cas où la roue en dessous fonctionne dans un courant de grande largeur. — Ce cas est celui de la roue pendante sur bateau, et l'action de l'eau peut alors être considérée comme dépendant d'une certaine masse M de cette eau, passant par seconde entre les aubes, et ramenée, de sa vitesse initiale V, à la vitesse finale v des palettes.

Il y a ainsi transmission d'une certaine quantité du travail abandonné en une seconde par la masse M débitée et le principe des quantités du mouvement, appliqué à un temps θ, permet encore de mettre le problème en équation.

207. — Effet dynamique. — En considérant les projections sur un axe horizontal, l'accroissement de la quantité de mouvement sera $M\theta(v-V)$ et, dans le second membre, il n'y aura à considérer que la réaction F dont l'impulsion élémentaire est $F\theta$, le niveau ne pouvant s'élever en aval plus qu'en amont, dans le cours d'eau indéfini, au delà d'une très petite distance.

On a donc :

$$M(v-V)\theta = F\theta,$$

d'où

$$F = m(V-v).$$

Nous admettrons, d'après Poncelet, que la masse m qui vient choquer les aubes est proportionnelle à la section immergée A

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et à la vitesse V du courant, de sorte que l'on pourra poser :

$$m = \frac{\varpi}{g} AV \times K ;$$

K étant un coëfficient à déterminer par l'expérience ; il vient alors :

$$Te = Fv = \frac{\varpi}{g} AV \times K \times v(V-v) = \frac{\varpi}{g} KAv(V-v).$$

En considérant la seule vitesse v variable, par rapport à V, la condition du maximum sera :

$$2v - V = 0 \; ; \; \text{d'où} \quad v = \frac{1}{2} V.$$

et ce maximum lui-même deviendra :

$$T = \frac{\varpi}{g} KA \frac{V^2}{2} \times \frac{V}{2} = \frac{PV^2}{2g} \times \frac{K}{2} ;$$

en remarquant que ϖAV est précisément le poids P de l'eau qui passe par seconde.

Ce résultat théorique est d'accord avec l'expérience, si l'on donne à K' la valeur 0,80, ce qui fait $T = 0{,}40 \frac{PV^2}{2g}$. L'effet utile s'élèverait alors à 40 pour cent de la puissance vive de l'eau qui vient agir sur les palettes.

Dans les expériences faites par Bossut, sur un modèle de trop petit diamètre, il a trouvé pour K une valeur plus grande que 1, ce qui doit être attribué à l'influence de l'eau qui chemine à côté de la roue et dont une partie peut pénétrer entre les palettes.

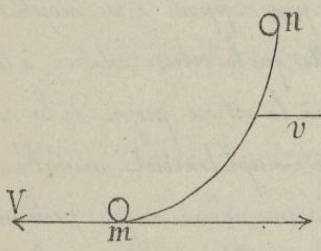
208. - Roue Poncelet. - Poncelet s'est proposé de doter la roue en dessous d'un bon rendement, tout en lui conservant la propriété de marcher vite, qu'elle doit à l'emploi d'un orifice de fond.

Il a pour cela remplacé les aubes planes par des aubes courbes, disposées de telle façon que l'eau puisse théoriquement y entrer sans choc et en sortir sans vitesse ; la première condition

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

est à peu près réalisée, mais il n'en est pas de même pour la seconde bien que le principe ait été le point de départ d'une notable amélioration dans la construction des roues hydrauliques.

209. Solution théorique de Poncelet. - Supposons d'abord une aube courbe, maintenue fixe dans une certaine position, dont le premier élément soit horizontal, et lançons y tangentiellement une molécule liquide, animée d'une certaine vitesse, cette molécule après son arrivée sur l'aube, sera déviée dans son mouvement le long de cette aube et y glissera jusqu'à ce que sa vitesse ait été complètement éteinte par l'action de la pesanteur. Elle arrivera ainsi, avec une vitesse nulle, au point n et rétrogradera ensuite, pour revenir en m et sortir par ce point avec une vitesse tangentielle, précisément égale à sa vitesse primitive V si elle n'a perdu au contact de l'aube dirigée en sens contraire et aucune partie de cette puissance vive mais dirigée en sens contraire de cette vitesse. Si tout le système au moment de l'introduction de l'eau, avait été emporté d'un mouvement commun de translation avec une vitesse v, dirigée dans le même sens que V, la molécule liquide ayant alors, à l'origine, une vitesse relative V - v, conserverait encore en arrivant en m, la même vitesse relative V - v, dirigée comme dans le cas précédent, en sens contraire.



Pour que sa vitesse absolue fut complètement nulle à la sortie il suffirait que, la vitesse commune de translation étant v, la vitesse relative V - v à l'entrée eût été précisément égale à cette valeur de v, ce qui conduit à la relation $V - v = v$ d'où $V = 2v$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cet effet peut encore être approximativement réalisé en soumettant l'aube au mouvement de rotation de la roue, à la condition de tenir compte du travail communiqué à l'aube et de celui qui est dû à la chute finale, et l'on comprend ainsi que, pour une seule molécule, les deux conditions cherchées puissent être satisfaites.

Mais ce qui est absolument vrai pour une molécule cesse de l'être pour un faisceau de filets parallèles.

Si la vitesse V du filet moyen commun aux différents filets était dirigée tangentiellement à la roue, une grande partie de la masse ne pourrait entrer dans cette roue, et l'on est dès lors obligé de donner à cette vitesse V une certaine inclinaison par rapport à la circonférence; cette inclinaison est d'environ 15°, il en résulte que la vitesse relative, à la sortie, sera de même inclinée par rapport à la vitesse propre de la roue, et qu'ainsi la vitesse finale ne pourra être complètement annulée.

D'un autre côté, l'eau entre dans un même angel pendant tout le passage de cet angel devant le courant d'eau affluent; les molécules qui arrivent les dernières se trouvent sur le chemin de retour des précédentes et donnent lieu, par conséquent, à des remous dont nous ne savons pas tenir compte avec exactitude.

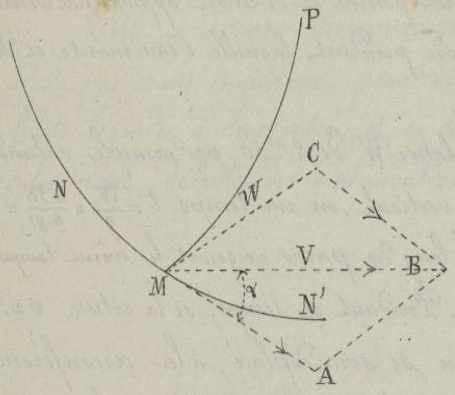
Dans les considérations théoriques qui suivent, nous ferons abstraction de cette difficulté, et nous supposerons que l'introduction se fait sous un angle α, avec la tangente à la circonférence au point M d'introduction.

210. - Introduction d'eau dans la roue. -

NMN' est la circonférence décrite par l'extrémité des aubes; $v = MA$, vitesse de la roue, est dirigée suivant la tangente en M à cette circonférence; la vitesse v de l'eau fait un angle de 15° avec cette direction de V, et la vitesse v elle-même est représentée en MB; la vitesse relative

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

est alors MC, troisième côté du triangle MBC, et pour éviter tout choc à l'entrée, il faut que cette vitesse relative soit dirigée suivant le premier élément de l'aube courbe MP.

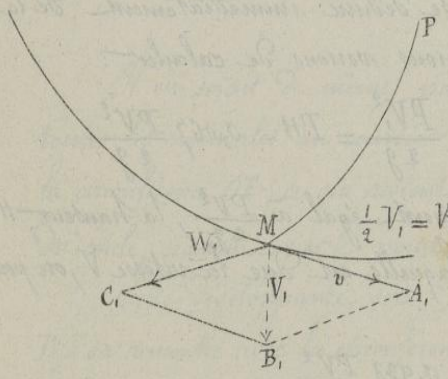


Si l'angle AMB = BMC, la vitesse relative W sera égale à v, et, cette condition est celle à laquelle on cherchera à satisfaire dans les applications ; la figure MABC est alors un losange dans lequel on a :

$$\frac{1}{2} V = W \cos\alpha = W \cos 15° = v \cos 15° ; \text{ d'où } v = \frac{V}{2 \cos 15°}$$

211. – Perte de travail à la sortie. – A la sortie la vitesse v de la roue sera toujours de même sens et de même grandeur ; la vitesse W_1 sera dirigée suivant le premier élément de l'aube, mais en sens contraire, et la vitesse absolue V_1 à la sortie sera représentée par MB,

Si $W_1 = v$, ce qui est une des conditions au moyen desquelles on peut rendre la vitesse absolue minimum, le triangle M, B, C_1 donne :



$$\frac{1}{2} V_1 = W_1 \sin 15° = v \sin 15° = \frac{1}{2} V \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{1}{2} V \operatorname{tg} 15°,$$

d'où enfin

$$V_1 = V \operatorname{tang} 15° = 0.259\, V.$$

La perte de travail à la sortie est alors exprimée par :

$$\frac{P V_1^2}{2g} = (0.259)^2 \frac{P V^2}{2g} = 0.067 \frac{P V^2}{2g},$$

en faisant toutefois abstraction de toutes les pertes de travail dues

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aux tourbillonnements dans l'intérieur de l'auget.

212.— Observation sur la durée du cheminement de l'eau dans la roue. — Il est possible de se rendre approximativement compte de la durée de la période pendant laquelle l'eau monte et descend au contact des aubes.

En effet, une vitesse relative W de 2m.50, par exemple, s'éteindrait dans la roue, suivant une verticale, en un temps $t = \frac{W}{g} = \frac{2.50}{9.81} = 0''25$; le mouvement de descente le long des parois exigerait le même temps, soit au total une demi-seconde. Pendant ce temps, si la vitesse $v = 2m.50$, le point M d'entrée de l'eau se sera déplacé, à la circonférence de $0.50 \times 250 = 1m.25$; or cette sortie de l'eau doit avoir lieu autant que possible, vers le bas de la roue, ce qui exige, ou que l'entrée commence à une certaine hauteur, ou que le diamètre de la roue soit assez grand; cette condition favorable permettra de donner à la portion courbe du coursier une plus grande longueur.

213.— Effet dynamique.— L'effet dynamique de la roue à aubes courbes peut se déduire immédiatement de la seule perte de travail que nous venons de calculer:

$$Te = PH - \frac{PV_1^2}{2g} = PH - 0,067\,\frac{PV^2}{2g}$$

et comme PH est sensiblement égal à $\frac{PV^2}{2g}$, la hauteur H étant précisément celle à laquelle est due la vitesse V, on peut aussi écrire:

$$Te = 0.933\,\frac{PV^2}{2g}$$

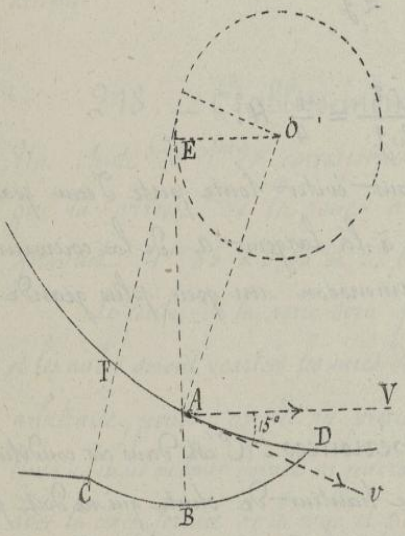
Mais en réalité cette valeur, qui correspondrait à un rendement de 0,93 dans le cas de maximum d'effet, est bien loin d'être jamais atteinte en réalité et il y aura lieu, au point de vue pratique, de déterminer

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par l'expérience le coefficient dont devra être affecté le second membre de la relation plus générale.

$$Te = PH - \frac{PV.^2}{2g}$$

214. — Forme du coursier. — La disposition du coursier n'est pas sans importance pour déterminer la parfaite direction des filets liquides à leur entrée, et sa forme doit être celle d'une surface cylindrique, déduite des considérations qui suivent :



Si un filet liquide doit entrer en A, dans la direction AV, faisant un angle de 15° avec la tangente Av, il sera bon que la coupe longitudinale CBD du coursier soit normale en B à la perpendiculaire AE sur AV; cette perpendiculaire est tangente à la circonférence OE, tracée du point O comme centre, et d'un rayon tel que l'angle OAE soit également de 15°.

Il en serait de même pour tout autre point A', en sorte que toutes les normales au coursier CBD sont également tangentes à la circonférence OE ; ce qui revient à dire que CBD est une développante du cercle, passant par le point B.

Cette développante sera, d'une part, prolongée jusqu'au point D, à sa rencontre avec la circonférence de la roue, d'autre part jusqu'au point C, tel que l'épaisseur CF soit celle de la lame d'eau affluente.

Ce coursier est raccordé, du côté d'aval, au plafond du canal de fuite, et, du côté d'amont, à un radier incliné à un dixième de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pente, se raccordant au seuil de l'orifice d'amenée.

215. — Hauteur des aubes suivant le rayon. — A mesure que l'eau, introduite vers le bas de l'aube, s'élèvera le long de sa paroi, sa vitesse relative x, qui était d'abord $V-v$, ira certainement en diminuant, et lorsqu'elle se sera ainsi élevée d'une hauteur a, on aura, suivant les lois de l'action de la pesanteur,

$$\frac{x^2}{2g} = \frac{(V-v)^2}{2g} - a$$

Cette vitesse sera nulle pour :

$$a = \frac{(V-v)^2}{2g}$$

et si l'on suppose $v = \frac{1}{2} V$;

$$a = \frac{1}{4} \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{4} H.$$

Pour plus de sécurité et pour éviter toute perte d'eau par l'intérieur de la roue, on donne à la largeur a de la couronne, dans le sens du rayon, une dimension un peu plus grande et égale à $\frac{1}{3} H$.

216. — Résultats d'expériences. — C'est dans ces conditions que la roue Poncelet, avec une hauteur de chute qui ne doit pas dépasser $1^m.50$, donne un effet utile de 60 à 65 % du travail absolu de la chute.

Toutefois le maximum de rendement paraît correspondre à $v = 0,55\, V$; la roue étant ainsi un peu plus rapide que ne l'indiquent les conditions qui précèdent.

On le voit par ces résultats, la roue Poncelet conserve tous les avantages des roues vives, que nous avons considérées précédemment sous le nom de roues en dessous, mais avec une amélioration de rendement très-importante.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

217. — Débit par mètre de largeur. — Nous verrons dans le paragraphe suivant que la vitesse V atteint souvent 5 mètres par seconde, et si l'on suppose que l'orifice de la vanne soit ouvert de 0m. 10, ce qui n'a rien d'exagéré, on voit que le débit par mètre de largeur peut être de :

$$5 \times 0{,}10 = 0^{mc}.500.$$

évaluation de beaucoup supérieure à celle que nous avons indiquée pour les autres systèmes de roues hydrauliques, la roue Sagebien exceptée.

218. — Établissement de la roue à aubes courbes. — Une chute de 1m. 20 correspond à une vitesse $v = 4^{m}.85$, de sorte que la vitesse de la roue à la circonférence est donnée par le produit $4^{m}.85 \times 0{,}55 = 2^{m}.67$.

Le centre de la roue sera placé assez en contre-haut de la nappe d'eau, et les aubes seront écartées les unes des autres de 0m. 30. Leur forme est d'ailleurs arbitraire, pourvu qu'elle ne présente dans sa courbure, aucune déviation brusque, mais on leur donne en général un profil circulaire faisant l'angle de 30° avec la circonférence de la roue et passant par le centre. L'épaisseur de la lame d'eau peut atteindre de 0m. 20 à 0m. 30 pour les chutes de 1m. 50 ; mais, pour les chutes plus grandes, il convient de la réduire de 0m. 10 à 0m. 15.

Lorsque le débit s'accroît beaucoup pendant les crues, on dispose la roue de manière à recevoir l'excès d'eau en déversoir, en même temps que la plus grande partie du liquide moteur passe par la vanne principale de fond, qui est toujours inclinée de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{3}$ sur l'horizontale.

219. — Autres récepteurs hydrauliques. — Nous donnerons encore quelques indications sur plusieurs autres récepteurs dans lesquels l'eau agit plus exclusivement par son

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

poids : Balancier hydraulique, Noria et Chapelet moteurs ; par sa pression : Machines à colonne d'eau, Accumulateur et presse hydraulique ; ou par sa puissance vive : bélier hydraulique.

220. — **Balancier hydraulique.** Le balancier hydraulique se compose de deux plateaux de balance qui sont successivement chargés par un certain poids de liquide.

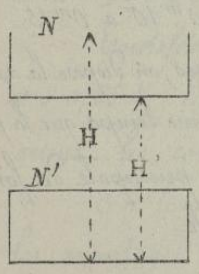
Le travail théorique est mesuré par le produit du poids de cette eau et de la hauteur dont elle descend ; mais le fonctionnement même de la machine entraîne certaines pertes de travail, dont les principales peuvent être énumérées ainsi qu'il suit :

1°. — Perte de travail résultant de la petite hauteur h comprise au départ, entre le niveau de l'eau dans le bief d'amont et la hauteur de l'eau dans le plateau récepteur.

2°. — Perte de travail résultant de la petite hauteur h' comprise, à l'arrivée, entre le niveau de l'eau dans le plateau récepteur et la hauteur de l'eau dans le bief d'aval.

3°. — Perte de travail résultant de l'accélération que prend le plateau chargé pendant la descente.

4°. — Perte de travail des résistances passives.



En nous bornant à tenir compte de la perte la plus inévitable, il nous suffira de faire remarquer que la caisse remplie au niveau N, en descendant au niveau N', n'utilise la chute H que pour la hauteur H' et qu'ainsi le rendement R ne saurait s'élever qu'à $R = \frac{H'}{H}$. La perte serait relativement faible si H était très grand, mais alors l'installation du balancier serait fort complexe. Pour les petites chutes, au contraire, la perte est relativement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

grande. C'est cependant dans cette dernière condition que le balancier hydraulique a été de nouveau employé dans ces dernières années, mais seulement pour de faibles débits et avec un rendement qui n'atteint pas 0.50.

221. – Noria motrice. – La noria est une chaîne sans fin dont les deux brins se meuvent verticalement et qui sont garnis d'augets également espacés sur toute leur longueur. Chacun de ces augets se remplit successivement vers le haut de la machine, et se vide vers le bas au moment de la rotation qu'effectue l'auget autour du tourteau inférieur.

Le travail moteur est PH, en désignant par H la hauteur totale de la chute de l'eau contenue successivement dans chacun des augets; mais il y a lieu de tenir compte de plusieurs pertes de travail, dont voici les principales:

1°. Perte Ph due à la différence de niveau dans le bief d'amont et dans l'auget au moment du remplissage.

2°. Perte Ph' due à la différence de niveau entre l'eau de l'auget au moment où il commence à se vider et le bief d'aval.

3°. Pertes dues aux résistances passives.

4°. Pertes dues aux quantités d'eau qui ne tombent pas dans l'auget ou qui s'en échappent, par suite des trépidations pendant la descente.

5°. Pertes dues aux quantités d'eau qui mouillent l'auget après la vidange et qui retombent après l'élévation de l'auget.

Quand la machine est employée, à l'état de régime, à fournir, à vitesse constante, un travail constant, il n'y a pas lieu de se préoccuper de l'accélération que la chute libre de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'eau pourrait produire, puisque cette accélération n'a pas lieu ; cet avantage se rencontre, pour la même raison, dans toutes les machines dont la rotation se continue toujours dans le même sens.

La noria motrice pouvait avoir sa raison lorsque la chute dont on pouvait disposer était trop grande pour s'adapter à une roue verticale, mais les turbines permettant aujourd'hui d'utiliser les plus grandes chutes, cette machine ne peut plus être recommandée.

222. — Chapelet moteur. — Le chapelet diffère de la noria en ce que les augets distribués sur la chaîne continue sont remplacés par de simples disques qui cheminent, à la descente, dans une gaîne où l'eau motrice se trouve emprisonnée. L'eau agit à peu près de la même façon en dépensant un travail PH, et les pertes de travail qu'il faut en retrancher sont les suivantes :

1°. Bien qu'il n'y ait pas de perte de chute à l'entrée, le choc des disques contre l'eau et le passage de ces disques dans le liquide du bief d'amont, substitué, à la perte que nous avons signalée dans le fonctionnement de la noria, une perte au moins équivalente, surtout si l'on tient compte du frottement des disques dans la gaine.

2°. Perte Ph' à la sortie, h' étant ici la différence de niveau entre l'eau d'un des compartiments, au moment où il commence à se vider, et le bief d'aval.

La machine à colonne d'eau fonctionne sous les mêmes actions que le chapelet moteur et doit toujours lui être préférée.

223. Machine à colonne d'Eau. — La machine à colonne d'eau, par son mode de fonctionnement, ressemble à une machine à vapeur à pleine pression. La pression de l'eau pousse un

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

piston, alternativement dans les deux sens, au moyen d'organes de distribution commandés par le mouvement même de ce piston.

Si A est la section du piston moteur $A \times \varpi H$ donnera la mesure de l'effort exercé et pour une course I du piston, le travail moteur du piston sera $\varpi AH \times I = PH$.

Dans cette machine les pertes de travail sont assez nombreuses et d'une évaluation difficile; nous citerons particulièrement:

1°. Puissance vive acquise par l'eau dans le tuyau d'amenée.

2°. Travail du frottement de l'eau dans la même conduite,

3°. Perte de travail résultant des conditions variables de la distribution et des perturbations qu'elles produisent dans les mouvements du liquide; on peut encore compter dans cette même catégorie les pertes de puissance vive résultant des variations de la vitesse du piston et par conséquent de celle de l'eau qui pousse ce piston.

4°. Pertes de travail dues au frottement du piston dans le cylindre.

5°. Perte due à la différence de niveau de l'eau dans le cylindre et dans le canal de fuite.

Le calcul de ces pertes n'offre pas un grand intérêt, et elles se résument d'ailleurs dans le coefficient de rendement qui a été constaté sur un certain nombre de machines à colonne d'eau, qui ont permis de réaliser un effet utile de 0.50 à 0.60.

On emploie maintenant un très-grand nombre de machines de ce genre comme compteurs d'eau présentant les dispositions les plus variées.

224 - Accumulateur. - L'accumulateur est un appareil de construction récente et dont les applications sont dès maintenant nombreuses et importantes. Il se compose en principe

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'un cylindre alésé de section Ω dans lequel se meut verticalement un piston chargé de poids P suffisants pour y maintenir l'eau à une pression élevée $p = \frac{P}{\Omega}$. Si cette eau agit sur un piston de section A auquel elle fait parcourir une course L, le travail moteur développé sera pAL et ce travail équivaudrait théoriquement à celui PH de la chute du poids qui charge l'accumulateur; L'équation $pAL = PH$, revient à définitive à $\frac{P}{\Omega} AL = PH$ ou à $AL = \Omega H$, chacun des membres représentant sous une forme particulière le volume d'eau dépensé.

La forme sous laquelle se présentent ainsi les éléments du travail disponible les rendent éminemment propres aux applications les plus variées. On comprend, en effet qu'un travail moteur, ainsi disponible et prêt à agir à volonté, soit d'une grande utilité pour toutes les manoeuvres intermittentes; aussi l'accumulateur est il employé dans les docks pour l'élévation des fardeaux par l'intermédiaire de pistons de presses hydrauliques, dont le déplacement est amplifié à l'aide d'une disposition inverse de celle qui sert de principe à l'emploi des mouffles usuels lorsqu'on doit soulever un lourd fardeau avec une force motrice relativement faible.

Les pertes de travail qu'entraine l'emploi de l'accumulateur se réduisent presque à celle qui résulte du frottement du piston, mais pour comparer cet appareil à ceux qu'il peut remplacer, il faudrait se rendre compte des pertes de travail nécessitées par son chargement et de celles qui correspondent à la circulation de l'eau dans les conduites, où elle prend nécessairement des vitesses variables et d'autant plus grandes que ces tuyaux sont d'un diamètre plus petit.

Mais la faiblesse du rendement de cet appareil dans les applications tient surtout à la difficulté d'approprier les presses qu'il est destiné à desservir aux efforts, souvent variables, qu'elles doivent exercer: pour une charge P à l'accumulateur qu'il serait presque impossible de faire

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

varier facilement et correspondant à une pression $\frac{P}{\Lambda}$, l'effort sur un piston de presse de section A serait $\frac{P}{\Lambda} A$ et pour une course L de ce piston on transmettrait un travail théorique $\frac{P}{\Lambda} AL = PH$, H étant la hauteur d'eau dépensée dans l'accumulateur, car on a nécessairement, par suite de l'égalité des deux volumes, $\Lambda H = AL$. L'effort PA est pour ainsi dire invariable ; il ne saurait être augmenté, et si on venait à l'utiliser pour vaincre une résistance moindre F, il faudrait, pour y parvenir, étrangler la conduite, et l'on dépenserait encore, pour une course entière, un travail PH pour n'obtenir qu'un effet utile FL ; le rendement se trouverait alors réduit à $\frac{FL}{PH} = \frac{F\Lambda}{PA} = \frac{F}{P\frac{A}{\Lambda}}$, c'est-à-dire dans la proportion même du rapport entre l'effort à exercer et l'effort maximum disponible. On ne peut obvier à ce grave inconvénient qu'en construisant des presses à différentes sections de piston, mais la même objection subsiste encore pour tous les cas où il y aurait à exercer des efforts intermédiaires entre ceux qui correspondraient respectivement aux diverses dimensions de ces pistons.

225. — Presse hydraulique. — L'application des accumulateurs aux usines dans lesquelles fonctionnent un grand nombre de presses hydrauliques est devenue tout-à-fait générale La manœuvre d'un robinet suffit pour mettre la presse en charge, et comme ces sortes d'actions sont toujours lentes, les pertes de travail restent relativement faibles. Il suffit pour cela que l'accumulateur soit maintenu constamment en charge par une injection suffisante d'eau, sous la pression $P : \Lambda$ que détermine la charge de son piston.

Les résistances de frottement sont si faibles dans les pressions hydrauliques, même sous des charges de plusieurs centaines d'atmosphères,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que deux manomètres placés aux extrémités d'une même canalisation n'indiquent que des différences à peine mesurables.

226. — Bélier hydraulique. — Comme exemple de récepteur dans lequel l'eau agit par sa puissance vive, nous citerons le bélier hydraulique. Dans cette machine, l'eau qui circule à partir d'une hauteur H, au-dessus d'une soupape de refoulement, acquiert une assez grande vitesse dans le canal situé en amont de cette soupape et que l'on désigne sous le nom de corps du bélier; elle s'écoulerait avec continuité par un orifice de sortie, si cet orifice restait constamment ouvert; mais il est lui-même muni d'un clapet, dit clapet d'arrêt, qui après avoir été soulevé par le liquide qui s'échappe retombe bientôt par son propre poids, et ferme momentanément l'orifice. La puissance vive de l'eau contenue dans le corps du bélier force alors la soupape de refoulement à s'ouvrir et y injecte une certaine quantité d'eau, qui est ainsi élevée à une certaine hauteur H plus grande que celle h du niveau primitif. Or la puissance vive $\frac{PV^2}{2g} = Ph$, et s'il n'y avait pas de perte de travail, on aurait $Ph = pH$.

Ce qu'il y a de remarquable dans cette machine, c'est que, malgré les chocs auxquels elle donne lieu, on obtient fréquemment un rendement pratique $R = \frac{pH}{Ph} = 0,80$

Au reste ce rendement serait plus justement, peut être, calculé par la relation $R' = \frac{p(H-h)}{(P-p)h}$, en considérant comme source motrice le travail seul de l'eau qui tombe réellement de la hauteur h, et comme travail produit celui du poids p, élevé du niveau primitif au niveau final.

Or, il est facile de voir que cette méthode de calcul donne toujours $R' < R$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet :

$$R' = \frac{pH - ph}{Ph - ph} = \frac{RP - p}{P - p} < \frac{RP - Rp}{P - p} < R$$

Pour $R = 0,80$ par exemple, la valeur de R' variera avec le rapport $P : p$ et l'on trouverait pour

$P = 15p$ $\quad R' = \frac{15R - 1}{15 - 1} = \frac{11}{14} = 0,79$

$P = 10p$ $\quad R' = \frac{10R - 1}{10 - 1} = \frac{7}{9} = 0,78$

$P = 5p$ $\quad R' = \frac{5R - 1}{5 - 1} = \frac{3}{4} = 0,75$

$P = 4p$ $\quad R' = \frac{4R - 1}{4 - 1} = \frac{2.2}{3} = 0,73$

La différence entre les deux modes d'évaluations devient surtout grande quand le rapport $P : p$ diminue, c'est-à-dire quand l'eau est relativement élevée moins haut.

Il résulte des expériences d'Eytelwein que le rendement du bélier hydraulique en eau montée peut s'élever jusqu'à 0,80 quand le rapport entre la hauteur de chute et celle de l'élévation de l'eau est d'environ 0,50 et ce rendement s'abaisse à 0,40 quand ce rapport est réduit à un dixième.

Les nouveaux béliers n'ont rien ajouté à cet égard aux avantages constatés dans ceux de Montgolfier, mais ils sont plus automatiques et moins sujets à dérangement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Machines élévatoires

227. — Notions préliminaires. — Les pompes sont des machines à l'aide desquelles on détermine l'élévation de l'eau par suite du jeu des pressions, alternativement supérieures et inférieures à la pression atmosphérique, déterminées par les variations de volume d'une capacité fermée.

Ce résultat est le plus ordinairement obtenu par le déplacement d'un piston qui augmente ou diminue le volume d'une capacité cylindrique ou corps de pompe, en relation soit avec le bief inférieur, où l'eau à élever est supposée maintenue, soit avec le bief supérieur, dans lequel il faut l'élever.

L'augmentation du volume de la chambre de ce corps de pompe y détermine une diminution de pression en vertu de laquelle la pression extérieure est momentanément prépondérante, et c'est là ce qui produit l'aspiration.

La diminution du volume de cette même chambre sert ensuite à expulser l'eau qui a été ainsi aspirée, mais il faut pour cela que le liquide ne puisse retourner par le conduit qui l'a amené et qui doit alors être fermé par une soupape, maintenue précédemment ouverte pendant la période d'aspiration. Une autre soupape est nécessaire pour isoler également le corps de pompe du bief supérieur ou du tuyau qui y conduit, pendant la période d'aspiration.

Nous distinguerons la disposition de la pompe dite aspirante et élévatoire, parce que le piston relève directement l'eau aspirée

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et celle de la pompe aspirante et foulante qui renvoie cette eau par refoulement dans une conduite spéciale, distincte du corps de pompe.

228. — Limite de hauteur à laquelle l'eau peut être élevée à l'aspiration. — Soit à un instant donné, v l'espace nuisible occupé par l'air dans le cylindre, au-dessus de son fond ou de la nappe d'eau parvenue à une hauteur x au-dessus du bief inférieur, et par conséquent soumise de haut en bas à une pression $\varpi (H - x)$ ou plus simplement $H - x$, H étant la hauteur d'eau qui mesure la pression atmosphérique.

Après la fermeture de la soupape d'aspiration, la pression se maintiendra, dans le corps de pompe, sensiblement égale à celle H de l'atmosphère; il en sera encore de même lorsque le volume se trouvera réduit à v et lorsque ce volume deviendra $V + v$, à la fin de la course croissante qui suivra, on aura, en vertu de la loi de Mariotte, $vH = (V + v)(H - x)$.

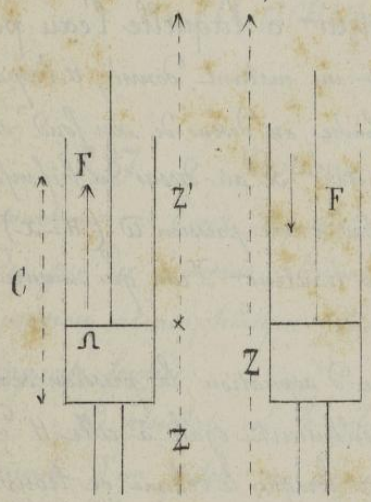
Cette relation revient à $x = \frac{V}{V+v} H$, x exprimant la hauteur à laquelle l'eau cesserait de s'élever au-dessus de son niveau par le jeu de la pompe. Cette hauteur est toujours plus petite que H, à moins que v ne soit absolument nul.

Mais en réalité on ne saurait compter sur cette limite, par suite du poids des soupapes, de l'introduction d'air qui peut se produire dans le corps de pompe, soit par entraînement, soit par dégagement résultant de la diminution de pression, et par suite aussi de la vapeur d'eau qui peut se former en même temps.

Il est, en général, convenable de ne pas donner, même avec une bonne pompe, à la colonne d'aspiration une hauteur de plus de 8 mètres, H étant égal à $10^m.33$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

229. — Pompe aspirante et élévatoire. — Dans le jeu de cette pompe nous déterminerons séparément l'effort moteur, dans la période d'aspiration et dans la période inverse.



1° Dans la première, la force motrice F doit soulever le poids P de la tige et du piston, diminués de leur perte de poids ϖV dans l'eau où ces organes sont plongés et vaincre l'action $\varpi \Omega (H+Z')$ exercée sur la surface supérieure par la pression atmosphérique, équivalente à une hauteur d'eau H, et par la colonne d'eau Z' qui est déjà parvenue au-dessus du piston; elle doit vaincre aussi le frottement φ du piston, mais elle est aidée, d'un autre côté par la poussée $\varpi \Omega (H-z)$ qui s'exerce sur la face inférieure de ce piston ; on a donc :

$$F = P - \varpi V + \varpi \Omega (H+z') - \varpi \Omega (H-z) + \varphi$$
$$= \varpi \Omega Z + P - \varpi V + \varphi$$

2° Dans la seconde période, le piston se meut simplement dans le liquide sous l'action du poids qu'il conserve dans l'eau, et n'a à vaincre que le frottement φ' du piston; $F = \varphi' - (P - \varpi V)$.

A chaque instant de la course croissante le travail élémentaire est $F\,dz$, il est $-F'\,dz$ pour la même position pendant la course décroissante et le travail total sera ainsi donné par l'intégrale:

$$T = \int_{z_0}^{z_0+c} F\,dz + \int_{z_0+c}^{z_0} F'(-dz) = \int_{z_0}^{z_0+c} (F+F')\,dz = \varpi \Omega Z \times C + (\varphi+\varphi')\,C.$$

dans laquelle on a désigné par Z la hauteur totale d'élévation de l'eau et par C la course du piston.

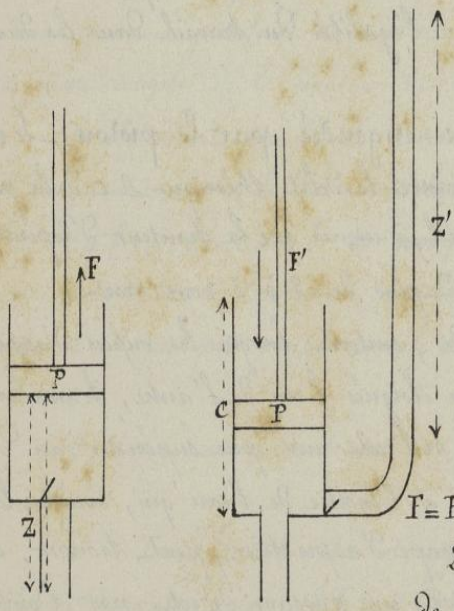
Le travail à dépenser est en réalité, pour la double course,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

celui qui correspond à l'élévation du volume d'eau qui remplirait le cylindre, augmenté de celui du frottement, ce qui d'ailleurs résulte immédiatement de la simple notion du travail.

230. — Pompe aspirante et foulante à simple effet. —

1°. — Pendant la période d'aspiration celle qui est croissante sur la figure, la force F doit supporter le poids P du piston et refouler la pression atmosphérique dont l'action est $\varpi \Omega H$ sur la face supérieure; mais elle est soulagée par la pression inférieure $\varpi \Omega (H-Z)$ qui se transmet sur la face inférieure par l'intermédiaire du liquide.



On a ainsi :

$$T = P + \varpi \Omega H - \varpi \Omega (H-z) + \varphi = \varpi \Omega z + P + \varphi$$

2°. — Dans la période inverse, dite de refoulement, la soupape inférieure se tient fermée et le piston, aidé par son poids P et la pression atmosphérique $\varpi \Omega H$, doit vaincre la pression $\varpi \Omega (H+Z')$ exercée sur sa face inférieure, ce qui donne :

$$F' = P - \varpi \Omega H + \varpi \Omega (H+Z') + \varphi' = \varpi \Omega Z' - P + \varphi'$$

Le travail total dépensé pendant la double période est alors, comme précédemment :

$$T = \int_{z_0}^{z_0+c} F\,dz + \int_{z_0+c}^{z_0} F'(-dz) = \int_{z_0}^{z_0+c} (F+F')\,dz = \varpi \Omega Z \times c + (\varphi+\varphi')\,c$$

et il représente encore le travail de l'élévation de l'eau et celui des frottements, $(\varphi+\varphi')\,c$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On cherche quelquefois la condition nécessaire pour que $F = F'$ et elle se réduit dans l'hypothèse de $\varphi = \varphi'$, à :

$$\varpi \Lambda z + P = \varpi \Lambda (Z - z) - P.$$

$$2P = \varpi \Lambda Z - 2\varpi \Lambda z, \text{ d'où l'on tire :}$$

$$P = \frac{1}{2} \varpi \Lambda Z - \varpi \Lambda z = \varpi \Lambda \left(\frac{1}{2} Z - z\right)$$

Le poids du piston serait alors donné par cette dernière relation, et correspondrait à l'égalité du travail dans les deux sens.

231. — **Volume engendré par le piston.** — Le volume engendré par le piston représente le débit théorique Λc de la pompe et il est rare que le débit réel, à moins que la hauteur d'aspiration ne soit excessive, en diffère de plus de 2 à 3 pour cent.

Dans les pompes rapides, surtout lorsque les orifices d'aspiration et de refoulement sont peu éloignés l'un de l'autre, il arrive même fréquemment que le débit réel est un peu supérieur au débit théorique ; cet effet est dû à l'inertie de l'eau qui, avant la fermeture complète de la soupape d'aspiration, peut trouver, en raison de sa vitesse acquise, un passage direct par l'orifice de la soupape de refoulement, au premier instant de son ouverture.

232. — **Frottement du piston et travail de frottement.** — Bien que l'effet utile des différents systèmes de pompes ait été déterminé par des expériences nombreuses, l'expression du frottement, très-variable d'ailleurs, n'est pas encore bien connue, et, à défaut de données précises, il conviendra de la calculer d'après Langdroff et D'Aubuisson, par la formule $\varphi = \mu D \delta$, dans laquelle D est le diamètre du piston, δ la hauteur d'eau due à la différence de pression sur les deux faces

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du piston et μ un coëfficient particulier dont la valeur approximative peut être indiquée ainsi qu'il suit :

Laiton poli	$\mu =$	7^K
Fonte	$\mu =$	15^K
Bois lisse	$\mu =$	25^K
Bois dégradé	$\mu =$	50^K

Cette formule, qui est très peu sûre, ne s'appliquait d'ailleurs qu'aux anciennes garnitures en cuir et l'on remarquera qu'elle ne tient pas même compte de la hauteur de cette garniture.

On obtiendrait une formule rationnelle pour l'expression du frottement, en désignant par e la hauteur de la surface frottante et en écrivant :

$$\varphi = f \times 2\pi r e \times 1000\,\delta = 1000\, f\, \pi\, e \times D\,\delta,$$

ce qui reviendrait à l'expression précédente si $1000\, f\, \pi\, e$ était égal à μ, et serait à peu près vérifié, pour le laiton, en faisant $f = 0{,}10$ et $e = 0{,}025$.

φ étant connu, le travail de frottement sera donné par la formule :

$$T = \int_0^c \mu\, D\,\delta \times dz$$ et approximativement, pour la double évolution du piston, par : $2T = \mu\, D\,\delta \times 2C$

233. — Pompe à double effet comparée à la pompe à simple effet. Dans la pompe aspirante et foulante à double effet, les deux actions, respectivement dévolues à chacune des deux courses, deviennent simultanées ; la régularité du travail est plus grande et le débit beaucoup plus régulier.

Le frottement du piston n'est pas beaucoup augmenté bien que son travail se rapporte à un volume double, mais il faut alors munir le couvercle antérieur du corps de pompe, d'une boîte à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

étoupe qui augmente, d'un autre côté, la résistance.

Le grand avantage de la pompe à double effet consiste surtout dans la possibilité d'obtenir le même débit avec un piston de section moitié moindre

234. — Frottement de l'eau dans les tuyaux. L'expression du frottement de l'eau dans les tuyaux de conduite doit être appliquée au mouvement de l'eau dans les tuyaux d'aspiration et de refoulement, ce qui, pour chaque tuyau de section A, de diamètre D et de longueur L, et un débit $\Lambda\, dx$ du piston, donne :

$$dTf = \varpi \Lambda\, dx \times \varphi = \varpi \Lambda\, dx \frac{4L}{D} \times b_1 u^2 =$$

$$= \frac{4 \varpi \Lambda L}{D} \times b_1 \left(\frac{\Lambda}{A}\right)^2 v^2\, dx$$

en remarquant que, par suite de la loi de continuité, $Au = \Lambda v$, si l'on représente par v la vitesse du piston, et par u celle de l'eau dans le tuyau, au même instant.

Pour une course entière $Tf = \int^c \frac{4 \varpi \Lambda L}{D} \times b_1 \left(\frac{\Lambda}{A}\right)^2 v^2\, dx$ formule dans laquelle il suffira d'exprimer v en fonction de x, d'après la loi du mouvement du piston, résultant du mode de transmission employé.

On voit que ce travail augmente proportionnellement à v^2; c'est là un des motifs pour lesquels il convient de limiter la vitesse moyenne du piston de $0^m.20$ à 0.30, à moins de recourir à des dispositions exceptionnelles des chambres d'eau.

235. — Autres résistances au mouvement de l'eau. Il y a encore dans les pompes à mouvement alternatif un grand nombre d'autres causes de déperdition de travail ; nous ne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

citerons ici que les principales.

Après chaque passage dans les étranglements dûs à la présence des soupapes, il y a une perte de travail résultant d'élargissement brusque et qui peut être exprimée par :

$$\frac{P}{2g}(u'-u)^2$$

Les pertes de travail, dues au choc des soupapes, ne peuvent être soumises au calcul, mais elles sont relativement assez grandes.

La perte de travail due à la vitesse u_1 de l'eau à sa sortie ne doit généralement être prise en considération que quand la vitesse u_1 est très grande ; elle est en tous cas représentée par $\frac{P}{2g}u_1^2 = \frac{P}{2g}\frac{\Omega^2}{A_1^2}v^2$, et, sous ces deux formes, on voit toute l'importance qu'il faut attacher à l'emploi des tuyaux de grande section.

236. — Conduites des distributions d'eau. Les résistances augmentant dans le rapport des carrés des vitesses, ou, pour un même débit, dans le rapport inverse des carrés des sections, il y a intérêt sous ce rapport à choisir des conduites d'un assez grand diamètre. Cette solution est presque toujours la plus avantageuse lorsqu'il s'agit de tuyaux de distribution de faible longueur, mais il n'en est plus ainsi dans le cas d'une distribution importante, pour l'alimentation d'une ville par exemple, parce que les frais d'installation augmentent rapidement avec le diamètre des conduites, et il faut alors tenir compte, ainsi qu'il suit, de tous les éléments économiques que le problème comporte ; frais d'achat et d'installation des conduites, prix de revient de la machine motrice et des pompes, et, s'il s'agit d'une machine à vapeur, capital représenté par la consommation annuelle du combustible.

Nous donnerons l'indication du calcul complet pour ce cas qui se rencontre fréquemment dans les projets de distribution d'eaux.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

237. — Calcul du diamètre des conduites d'une grande distribution d'eau. — Il faut élever par seconde un poids d'eau $1000\,q$, à une hauteur effective H, avec une perte totale de charge $\mathcal{S}$, de sorte que le travail effectif, en eau élevée, exprimé en chevaux-vapeur est

$$C = \frac{1000\,q\,(H+\mathcal{S})}{75}$$

et il s'agit de déterminer le diamètre d des conduites, qui assurera le meilleur résultat économique, pour une longueur totale L, composée de la longueur L' à l'aspiration et de la longueur L'' au refoulement.

Pour introduire dans cette expression le diamètre d, nous ferons remarquer que

$$\mathcal{S} = \frac{4L}{d}\,b_1\,u^2 ; \quad b_1 = m + \frac{n}{d} ; \quad u = \frac{4q}{\pi d^2}$$

ce qui donne

$$\mathcal{S} = \frac{4L}{d}\left(m+\frac{n}{d}\right)\frac{16\,q^2}{\pi^2 d^4} = \frac{64\,q^2 L}{\pi^2}\left(\frac{m}{d^5}+\frac{n}{d^6}\right)$$

et

$$C = \frac{1000\,q}{75}\left[H + \frac{64\,q^2 L}{\pi^2}\left(\frac{m}{d^5}+\frac{n}{d^6}\right)\right]$$

Le prix de la machine et des pompes, à raison de P par cheval effectif, sera :

$$PC = \frac{1000\,Pq}{75}\left[H + \frac{64\,q^2 L}{\pi^2}\left(\frac{m}{d^5}+\frac{n}{d^6}\right)\right]$$

Le prix d'établissement de la conduite sera :

$$100\,p\,d\,L$$

En désignant par p le prix du mètre de longueur pour chaque augmentation d'un centimètre dans le diamètre d.

Quant à la capitalisation de la dépense de combustible, à 5 %, elle sera $20\,b\,c\,h\,j\,p'$, en désignant par b le poids du combustible brûlé par heure et par cheval, par h le nombre d'heures par jour, par j le nombre de jours de fonctionnement par an, et par p' le prix du kilogramme de combustible, ce qui donne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pour le chiffre de la capitalisation.

$$20\,b\,h\,j\,p' \times C = 20\,b\,h\,j\,p' \times \frac{1000\,q}{75}\left(H + \frac{64\,q^2 L}{\pi^2}\left(\frac{m}{d^5} + \frac{n}{d^6}\right)\right)$$

et pour la dépense totale D, en faisant la somme des trois évaluations précédentes.

$$D = 100\,p\,d\,L + \frac{1000\,p\,q}{75}\left[H + \frac{64\,q^2 L}{\pi^2}\left(\frac{m}{d^5} + \frac{n}{d^6}\right)\right]$$

$$\left[20\,b\,h\,j\,p' \times \frac{1000\,q}{75}\left\{H + \frac{64\,q^2 L}{\pi^2}\left(\frac{m}{d^5} + \frac{n}{d^6}\right)\right\}\right]$$

ou

$$D = 100\,p\,d\,L + \frac{1000\,q}{75}\left(P + 2\,b\,h\,j\,p'\right)\left[H + \frac{64\,q^2 L}{\pi^2}\left(\frac{m}{d^5} + \frac{n}{d^6}\right)\right]$$

Le minimum de D correspondra à la valeur de la seule variable d pour laquelle la dérivée de D par rapport à cette variable sera nulle, ce qui donne

$$0 = 100\,p\,L + \frac{1000\,q}{75}\left(\frac{5m}{d^6} + \frac{6n}{d^7}\right)\left(P + 20\,b\,h\,j\,p'\right)$$

d'où

$$\frac{1.1566\,p}{g^3\left(P + 20\,b\,h\,j\,p'\right)}\,d^7 - 5\,m\,d - 6\,n = 0.$$

Cette équation résolue par rapport à d, en négligeant tout d'abord son second terme, conduira par une suite d'essais à la véritable valeur de cette inconnue.

En pratique, on choisira dans les modèles du commerce le diamètre le plus rapproché, par excès, de cette valeur de d.

238. — Réservoir d'air. L'emploi des réservoirs d'air a pour effet de régulariser le jeu des pompes en offrant à l'inertie de l'eau une sorte de compensateur, par l'intervention de l'air qui y est cantonné. Cet air se comprime lorsque la vitesse augmente, et se détend au contraire lorsque les résistances deviennent moindres. La régularité est sous ce rapport d'autant plus satisfaisante que le réservoir d'air est plus grand et l'expérience prouve que, si une partie de cet air est incessamment entraînée avec l'eau expulsée, l'eau affluente en amène aussi avec elle une quantité suffisante pour maintenir le réservoir d'air à un régime à peu près normal.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour calculer un réservoir d'air on s'impose pour condition que la différence $V_0 - V_1$ des volumes de l'air puisse emmagasiner la moitié du débit u d'un coup de piston:

$$V_0 - V_1 = \frac{1}{2} u$$

sans que pour cela la pression maximum p_1 excède la pression minimum p_0 de plus de la n^e partie de la pression moyenne:

$$p_1 - p_0 = \frac{1}{n} \frac{p_1 + p_0}{2}$$

n est alors un coëfficient de régularisation analogue à celui qu'on est conduit à considérer dans la théorie du volant.

A l'aide des deux équations précédentes, il faut calculer V_0, en tenant compte, suivant la loi de Mariotte, de la relation $V_0 p_0 = V_1 p_1$.

La seconde relation donne:

$$2n p_1 - 2n p_0 = p_1 + p_0 \quad \text{d'où} \quad p_1 = \frac{2n+1}{2n-1} p_0$$

et par suite:

$$V_0 = \frac{1}{2} u + V_1 = \frac{1}{2} u + V_0 \frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{2} u + V_0 \frac{2n-1}{2n+1}$$

en résolvant par rapport à V_0, on obtient immédiatement:

$$V_0 = \frac{\frac{1}{2} u}{1 - \frac{2n-1}{2n+1}} = \frac{\frac{1}{2} u (2n+1)}{2} = u \frac{2n+1}{4}$$

On fait ordinairement $n = 3$ ce qui correspond à $V_0 = \frac{7}{4} u$ et à $p_1 = \frac{7}{5} p$.

Le calcul de la valeur de p_1 est nécessaire pour que l'on puisse calculer l'épaisseur du réservoir.

239. — Importance de l'uniformité du mouvement du piston. Les masses d'eau produisent, lorsque le mouvement n'est pas uniforme, des chocs ou coups de bélier très dangereux pour le bris des appareils, et il est essentiel dans les grandes pompes, d'amoindrir ces effets de l'inertie. Soit M la masse de l'eau et des organes en mouvement, son accélération $J = \frac{dv}{dt}$ peut devenir considérable,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et il faut que la force d'inertie MJ de cette masse soit toujours égale à la résultante R de toutes les forces extérieures ; on a :

$$MJ = R \qquad \text{d'où} \qquad J = \frac{R}{M}$$

On voit ainsi qu'il peut y avoir avantage à rendre le rapport $R : M$ aussi petit que possible ; c'est dans ce but que, dans les grandes pompes d'épuisement à simple effet, on augmente le poids P dans une proportion considérable, en équilibrant cet excès de poids au moyen d'un balancier supportant un contrepoids convenablement calculé.

240. — Accouplement des pompes. — Dans les installations permanentes et de quelque importance, on prend soin de multiplier les corps de pompes pour régulariser autant que possible le débit de l'eau et la dépense de travail qu'exige l'élévation de cette eau.

Nous examinerons successivement les résultats que l'on peut se promettre, sous ce rapport, avec deux pompes à double effet, dont les manivelles motrices seraient calées à angle droit l'une par rapport à l'autre, et avec trois pompes à simple effet, avec manivelles à 120°.

241. — Système de deux pompes à double effet, avec manivelles à 90°. — Le débit de chacune des pompes varie comme la vitesse v ou v' de son piston et pour discuter la variation de ce débit, il faut exprimer chacune des deux volumes dV et dV' en fonction de la vitesse ωr, supposée uniforme, du bouton de manivelle. On trouve ainsi, en supposant les bielles suffisamment longues pour ne pas avoir à considérer leurs inclinaisons :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\partial V + \partial V' = \omega r \left(\sin\alpha + \sin(90+\alpha)\right) d\alpha$$
$$= \omega r \left(\sin\alpha + \cos\alpha\right) d\alpha$$

Il n'y a donc qu'à discuter la fonction.

$$y = \sin\alpha + \cos\alpha$$

Sa dérivée par rapport à α, égalée à 0, donne la condition du maximum :

$$\frac{dy}{dx} = \cos\alpha - \sin\alpha = 0 \quad \text{qui est satisfaite par :}$$
$$\alpha = 45°$$

et en substituant dans la valeur de y

$$y = 2\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.414$$

valeur du débit maximum.

Le débit minimum correspond à :

$\alpha = 0$ et $\alpha = 90$, qui donnent la valeur commune : $y = 1$

y varie donc de 1 à 1.414.

Le débit moyen serait d'ailleurs donné par le rapport :

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\alpha + \cos\alpha)\, d\alpha}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha} = \frac{-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{0+1+1-0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} = 1.273$$

Le plus grand écart s'élève ainsi à :

$$\frac{1.273 - 1}{1.273} = \frac{0.273}{1.273} = 0,215 \text{ du débit moyen.}$$

Le débit moyen diffère de la valeur moyenne des deux débits extrêmes :

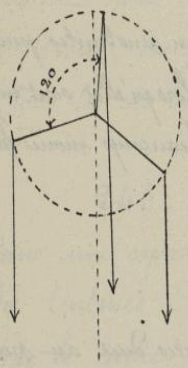
$$\frac{1 + 1.414}{2} = 1.207$$

242. — Système de trois pompes à simple effet avec manivelles calées à 120°.

Dans le cas de trois manivelles à 120°, il y en a toujours

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Deux d'un côté de l'axe et une de l'autre, mais elles ne travaillent que dans leur course descendante ; il n'y a lieu d'examiner la variation du débit, pour le cas des deux manivelles agissantes, que depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = 60$.



On a ainsi :

Calcul pour les deux manivelles d'un seul côté

$$\partial V + \partial V' = \omega r (\sin\alpha + \sin(60 - \alpha)) \partial\alpha$$

d'où $y = \sin\alpha + \sin 60 \cos\alpha - \sin\alpha \cos 60$

$= \sin\alpha (1 - \cos 60°) + \sin 60 \cos\alpha$

$= \sin\alpha (1 - \cos^2 30 + \sin^2 30) + 2 \cos\alpha \sin 30 \cos 30$

$= 2 \sin\alpha \sin^2 30 + 2 \cos\alpha \sin 30 \cos 30$

$= 2 \sin 30 (\sin\alpha \sin 30 + \cos\alpha \cos 30)$

et enfin $y = 2 \sin 30° \cos(30 - \alpha) = \cos(30 - \alpha)$

Les limites extrêmes sont :

$\alpha = 0$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 60°$
$y = 0.866$	$y = 1.000$	$y = 0.866$

Le même calcul, pour une seule manivelle d'un côté, donnerait depuis $\alpha = 60$, limite du cas précédent, jusqu'à $\alpha = 120°$; $y = \sin\alpha$, dont le maximum correspond à $\alpha = 90$.

$\alpha = 60$	$\alpha = 90$	$\alpha = 120°$
$y = 0.866$	$y = 1.000$	$y = 0.866$

Dans l'un comme dans l'autre cas, la variation de débit est comprise entre 0.866 et 1000.

Le débit moyen est exprimé par $\frac{6}{2\pi} = 0.955$, tandis que la moyenne entre les deux débits extrêmes est :

$$\frac{1000 + 0.866}{2} = 0.933$$

Quant à l'écart maximum par rapport au débit moyen, il est ici donné par la fraction :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\frac{0.955 - 0.866}{0.955} = 0.093;$$

et se trouve réduit à moins de moitié de l'écart calculé dans le cas précédent.

243. — **Rendement**. Les pompes bien construites peuvent donner jusqu'à 65 à 70 pour cent d'effet utile, lorsqu'elles sont employées à élever l'eau à de grandes hauteurs ; elles sont beaucoup moins favorables pour les petites élévations.

En général : $$R = \frac{PH + \frac{Pv_1^2}{2g}}{PH + Tf + \frac{P}{g}\frac{v_1^2}{2}}$$

en désignant par Tf le travail de toutes les résistances dues au parcours et par v_1 la vitesse perdue à l'extrémité de la conduite. Dans les pompes ordinaires surtout si H est relativement grand, le dernier terme, $\frac{P}{g}\frac{v_1^2}{2}$, commun au numérateur et au dénominateur, a une très petite valeur relative et peut être négligé.

Il en est tout autrement dans les pompes à incendie, au moyen desquelles l'eau doit être lancée le plus loin possible, et, par conséquent être projetée avec une grande vitesse. Dans cette application l'effet utile devient approximativement :

$$R = \frac{\frac{Pv_1^2}{2g}}{Tf + \frac{Pv_1^2}{2g}} = \frac{Pv_1^2}{Pv_1^2 + 2gTf}$$

en supprimant le terme PH qui est alors négligeable.

244. — **Pompes rotatives**. On a construit un grand nombre de pompes dans lesquelles la rotation continue d'un arbre déterminé, dans une boîte cylindrique, formant corps de pompe, une augmentation de la capacité en relation avec la soupape d'aspiration et une diminution de cette même capacité

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pendant la période de refoulement. Ces machines sont d'un très bon usage lorsqu'il s'agit de transvaser des liquides, sans avoir à les élever très-haut. Les déplacements des parties flottantes sont relativement plus considérables et les difficultés d'obtenir, avec ces dispositions, des garnitures parfaitement étanches, limitent leur emploi à tous les cas dans lesquels les pressions sont faibles.

245. — Pompe centrifuge. En faisant tourner dans une capacité close une roue à aubes courbes, analogue à celle des turbines Fourneyron, on détermine facilement une aspiration par le centre de la roue et un refoulement par tous les points de la circonférence.

Cet appareil dont nous développerons ultérieurement la théorie permet d'élever de grandes quantités d'eau à une hauteur de 6 à 8 mètres, dans de très bonnes conditions.

246. — Autres machines élévatoires. L'extrême variété que présentent les dispositions des machines élévatoires exige que nous en examinions les principaux types, que nous pouvons définir ainsi qu'il suit :

1°. Autres machines élévatoires produisant l'ascension du liquide par le jeu des pressions a : pompe spirale.

2°. - Machines élevant l'eau dans des augets : Ecopes, Roues à pots, Roue chinoise, Noria.

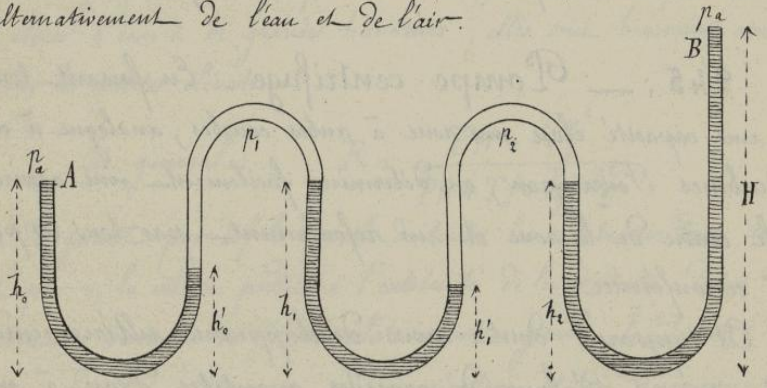
3°. - Machines élevant l'eau en la faisant cheminer dans des canaux ouverts à l'air libre : Chapelet, Tympan, Vis d'Archimède.

4°. - Machines élevant l'eau par communication de puissance vive : Bélier hydraulique, constituant tout à la fois un récepteur et un élévateur.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

5°. Machines utilisant la poussée du liquide à déterminer l'action d'organes de machines.

247. — Pompe spirale. — Le fonctionnement de la pompe spirale repose sur la possibilité d'une grande dénivellation entre les deux extrémités ouvertes d'un tube plusieurs fois recourbé, contenant alternativement de l'eau et de l'air.



Dans celui qui est représenté sur la figure on trouve en effet pour conditions de l'équilibre

$$p_a + \varpi h_0 = p_1 + \varpi h'_0$$
$$p_1 + \varpi h_1 = p_2 + \varpi h'_1$$
$$p_2 + \varpi h_2 = \varpi H + p_a$$

d'où l'on tire par addition

$$H = (h_0 + h_1 + h_2) - (h'_0 + h'_1)$$

En thèse générale la hauteur H est égale à la somme des différences de hauteur entre les deux branches verticales des différentes parties du tube. Cet état de choses se continuerait si l'on faisait successivement entrer de l'air et de l'eau en A ; les fluides contenus dans les divers compartiments du tube se déverseraient de chacun de ces compartiments dans le suivant et s'écouleraient en B dans le même ordre, pourvu qu'ils aient été introduits dans la proportion nécessaire pour que la séparation entre chaque colonne d'air et chaque colonne d'eau subsiste toujours dans chacun de ces

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

compartiments.

C'est là précisément ce que réalise la pompe spirale, uniquement formée d'un tube enroulé en hélice sur un cylindre horizontal que l'on fait tourner autour de son axe. La bouche d'amont de ce tube est disposée de manière à puiser alternativement de l'air et de l'eau; la bouche d'aval est raccordée au moyen d'une garniture avec un tube vertical, fixe, par lequel doit se faire l'expulsion des fluides, qui s'écoulent alternativement à la partie supérieure.

L'expérience a prouvé que cette singulière machine pouvait rendre un effet utile de 0.60, lorsque la hauteur à laquelle on élève l'eau est égale à la somme des diamètres des spires. Cette machine qui n'exige ni soupape ni robinet se recommande par son étonnante simplicité. La seule difficulté que l'on ait rencontrée jusqu'ici dans son emploi provient de la conservation du joint au bas de la colonne de refoulement. La pompe spirale devait surtout être citée à cause du jeu des pressions qui se produit dans les différentes spires.

248. — **Ecopes.** — Les écopes sont des pelles creuses à l'aide desquelles on puise l'eau dans le bief inférieur, pour lui imprimer ensuite une impulsion brusque qui lui permet de parvenir jusqu'au bief supérieur. On comprend que dans ce mode d'action il y ait tout à la fois perte de travail par suite de la vitesse conservée par l'eau au-dessus du niveau auquel elle doit parvenir, et par suite de cet excès d'élévation.

Dans la plupart des applications les écopes sont manœuvrées à la main, et l'on perd en outre le travail de descente de la pelle après chaque élévation; mais dans les installations permanentes la cuiller est manœuvrée mécaniquement autour d'un axe, de sorte que cette dernière perte est en grande partie évitée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

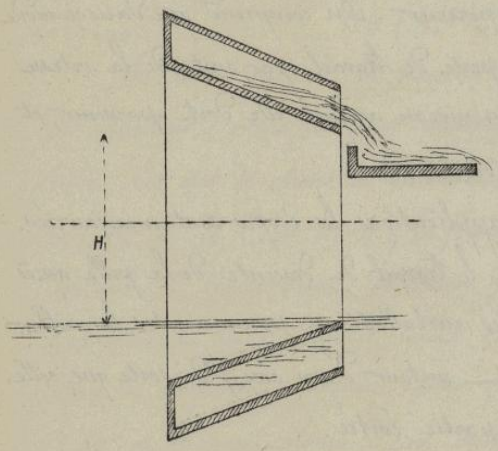
Un homme élève en 8 heures de travail 60 mètres cubes à une hauteur de 1m. avec une écope simple ce qui correspond à un travail en eau élevée de deux Kilogrammètres seulement par seconde. Avec les écopes hollandaises, qui sont suspendues à un support formé de trois perches, le travail doit être évalué au double du précédent.

249. — Roue à pots. — Lorsqu'il s'agit d'élever l'eau un peu plus haut, mais à quelques mètres seulement au-dessus de son niveau primitif, la roue à pots résout pratiquement le problème dans les conditions d'une très facile installation.

Chaque pot est vidé au haut de sa course, soit parce qu'il se retourne par le fait même du mouvement de rotation, soit, ce qui est en général préférable, par un mode d'accrochage qui le déverse plus rapidement et avec une moindre perte de hauteur.

La roue à pots est moins favorable que la roue chinoise et, suivant que les dispositions ont été plus ou moins convenables à l'entrée et à la sortie de l'eau, on ne peut guère compter dans la plupart des installations, ordinairement fort rustiques, que sur un rendement de 0,40 à 0.45 du travail moteur.

250. — Roue Chinoise. — La roue Chinoise est de construction très simple et mériterait d'être plus employée. Les auges en forme de prisme creux dont l'axe est incliné par rapport à celui de la roue se présente, en bas et en haut, dans les deux positions inverses qui conviennent le mieux au remplissage et à la vidange.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La hauteur non utilisée est relativement assez grande et pour faciliter l'entrée et la sortie du liquide tout en réduisant autant que possible le cheminement des augets dans le bief inférieur, on les place un peu en hélice, le bec en avant, d'une manière fort avantageuse.

Une roue Chinoise de 1m. 80 de diamètre, expérimentée au Conservatoire, a fourni un rendement de plus de 0,50, avec une vitesse à la circonférence de près de 0m. 30, pour laquelle les résistances de la partie inférieure de la roue dans le bief d'amont sont déjà très grandes.

251. — Noria. — La noria, de construction moins primitive, est employée aussi fréquemment que la roue à pots et elle convient lorsque la hauteur à laquelle l'eau doit être portée atteint 5 ou 6 mètres.

Les principales pertes de travail sont les suivantes:

1°. — Travail de frottement des augets et de la chaîne dans le bief inférieur.

2°. — Perte de hauteur lorsque l'eau passe successivement de chacun des augets dans le bief d'aval.

3°. — Egouttement de l'eau qui mouille les parois des augets, pendant l'élévation, et quelquefois déversement d'une partie de cette eau, si les augets n'ont pas été convenablement construits et n'ont pas été munis de clapets pour le dégagement de l'air pendant l'immersion.

4°. — Résistances mécaniques des tourteaux et de la chaîne.

Au-delà d'une certaine hauteur les deux dernières pertes peuvent prendre une assez grande importance, et il en résulte que la noria ne convient ni pour les petites élévations où la roue à pots est préférable, ni pour les très grandes hauteurs auxquelles s'appliquent surtout les pompes.

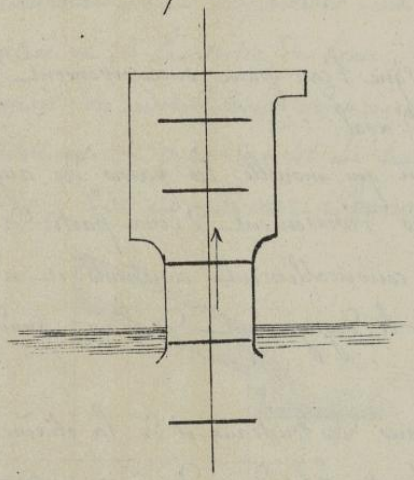
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La Noria bien construite donne facilement un rendement de 0.60, et elle se prête très-facilement à l'emploi d'un âne attelé à un manège, dans les petites exploitations.

252. — Chapelet vertical. — Le Chapelet vertical ne diffère de la Noria qu'en ce que les augets sont remplacés par des palettes formant successivement piston dans un cylindre alésé sur une hauteur un peu plus grande que la distance qui sépare deux de ces palettes.

Si ces palettes ont du jeu dans le cylindre il se produit par les joints un retour d'eau qui diminue nécessairement l'effet utile; Si au contraire les palettes sont garnies de rondelles de cuir, comprimées entre deux plaques de métal, ces cuirs donnent lieu à un frottement plus ou moins considérable dans le cylindre.

Les palettes, en traversant la masse d'eau dans toute sa hauteur, augmentent aussi les résistances passives, mais le déversement se faisant par le seuil même de l'orifice de la colonne ascendante, l'eau n'est plus inutilement élevée au-dessus du point où doit la recueillir.



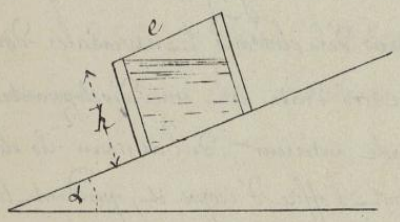
Au-delà d'une certaine hauteur les pressions deviennent considérables sur les garnitures de cuir, qu'il est assez difficile de maintenir en très bon état. Aussi ne doit-on se servir du chapelet vertical que pour des hauteurs de 4 à 6 mètres, auxquelles il donne facilement un effet utile de 0,65.

Dans les chapelets sans garniture qui sont, ainsi que nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'avons dit déjà, d'un emploi beaucoup moins avantageux, les palettes sont ordinairement carrées ; les grains du chapelet sont circulaires dans tous les cas où l'on emploie une garniture étanche.

253.– Chapelet incliné. – Dans le chapelet incliné qui se recommande par la rusticité de ses organes et qui ne convient non plus que pour des élévations de 4 mètres et au-dessous, la colonne est remplacée par une auge rectangulaire en bois, découverte dans toute sa longueur. L'eau est en quelque sorte balayée sur le fond du plan incliné par les palettes, qui sont rectangulaires et qui laissent un jeu inévitable de 5 à 6 millimètres sur leurs bords latéraux.



En regard de cet inconvénient il convient de faire remarquer qu'un chapelet donné peut en variant son inclinaison élever successivement l'eau à des hauteurs différentes, ce qui est nécessaire dans la plupart des épuisements. Cependant l'angle α de cette inclinaison a une influence sur le rendement et nous chercherons la valeur de cet angle qui correspond au maximum d'effet utile. La section d'eau dans chaque compartiment sera, d'après la figure, $eh - \frac{1}{2} e \operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{2} e (2h - e \operatorname{tang} \alpha)$ pour une largeur l des palettes, le volume compris sera $\frac{1}{2}(2h - e \operatorname{tang} \alpha) l$ et pour une longueur L du chapelet le travail total en eau élevée sera :

$$\frac{1}{2} (2h - e \operatorname{tang} \alpha) l \times L \sin \alpha$$

Le maximum de cette valeur correspond à l'annulation de sa dérivée, soit à la condition

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

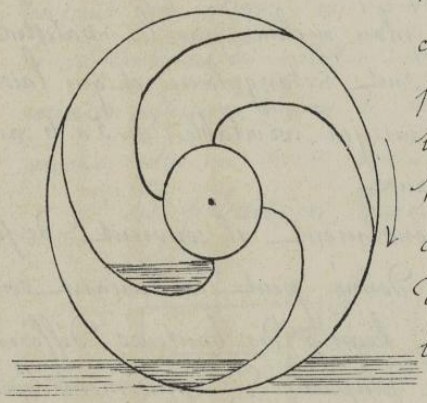
$$2h\cos\alpha - e\left(2\sin\alpha + \sin\alpha\tan g^2\alpha\right) = 0$$

d'où $$2h - 2e\tan g\alpha - e\tan g^3\alpha = 0$$

et $$\tan g^3\alpha + 2e\tan g\alpha = \frac{2h}{e}$$

Cette valeur de l'angle α est celle pour laquelle le travail en eau montée sera le plus grand, mais, même dans ces conditions les moins défavorables, et avec une vitesse de 1m 50, le chapelet incliné ne donne pas un rendement de plus de 0,40.

254. – Tympan. – Le tympan se compose d'un tambour annulaire, divisé par des cloisons transversales dont la section droite est une développante du cercle intérieur de l'anneau. Ces cloisons font l'office d'écopes et, pendant la rotation du cylindre autour de son axe horizontal, elles portent l'eau qu'elles ont ramassée jusqu'au cylindre central dont la bouche sert à la déverser dans le bief d'aval.



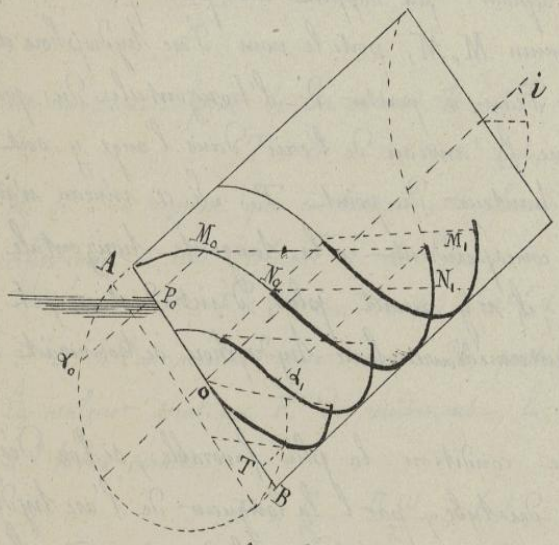
L'eau occupe ainsi dans chaque compartiment une sorte de segment dont on sait que le centre de gravité est à peu près situé sur la tangente verticale du cercle générateur de la développante ; elle s'élève donc verticalement ; le bras de levier de la charge reste constante, et, pour le même débit, le travail reste également constant. C'est dans ce but que Lafaye a substitué les aubes en développante aux aubes radiales que l'on employait précédemment. En arrivant au cercle intérieur l'eau a peu de vitesse de rotation et la perte de puissance vive est relativement faible ; aussi le tympan peut-il donner en pratique un rendement de 0,80, mais la nécessité dans laquelle on se

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trouve de lui donner un diamètre plus que double de la hauteur à laquelle on doit élever l'eau restreint son emploi à une élévation de 3 mèt environ. On peut lui donner une vitesse d'au moins 0m.75 à la circonférence extérieure et il rend, dans ces conditions, de très bons services.

Le tympan construit en tôle se prête en outre très bien à l'abaissement successif du niveau d'amont par l'addition d'anneaux supplémentaires qui augmentent successivement son diamètre.

255. — **Vis d'Archimède.** — La vis d'Archimède est employée pour des élévations d'eau de 4 à 5 mètres, mais les conditions de son fonctionnement sont assez complexes.



Supposons d'abord qu'un tube ouvert par les deux bouts se trouve enroulé en hélice sur un cylindre incliné d'un angle i sur l'horizon, et plonge par le bas dans une auge remplie d'eau jusqu'à une certaine hauteur. Au repos le niveau du liquide qui pénètre par la bouche ouverte de ce tube sera le même que celui de l'eau dans l'auge, et il en sera encore de même si, cette bouche plongeant toujours dans le liquide de la bache, l'on imprime au cylindre un mouvement de rotation. Si à un certain moment le tube, par son mode d'enroulement, présente par rapport au plan horizontal qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

passe par son point le plus élevé à l'amont, une dépression pouvant former poche, l'eau qui aura pénétré dans cette poche n'en pourra plus sortir et cheminera dans le tube en s'élevant, par le fait même de la rotation, car elle se trouvera toujours retenue par une sorte de seuil terminé à l'amont par un point tel que M_0 en lequel la tangente à l'hélice serait horizontale et qui, pour toutes les positions de l'hélice, se trouvera toujours sur une même génératrice $M_0 P_0$ du cylindre qui forme le noyau de cette hélice.

L'eau ainsi emprisonnée en $N_0 N_1$ dans le tube, ou au maximum en $M_0 M_1$, s'élèvera, par la rotation, comme dans une écope où elle pourrait se déplacer par rapport aux parois qui la retiennent.

L'arc maximum $M_0 M_1$ porte le nom d'arc hydrophore et pour qu'il fût rempli d'eau à partir de l'horizontale du point M_0 il faudrait que le niveau de l'eau dans l'auge y soit maintenu jusqu'à la hauteur du point P_0. Si ce niveau n'atteignait que le point I, correspondant à la tangente horizontale inférieure de l'hélice, il n'y aurait plus d'introduction, et pour tous les niveaux intermédiaires l'arc hydrophore se trouverait inégalement rempli.

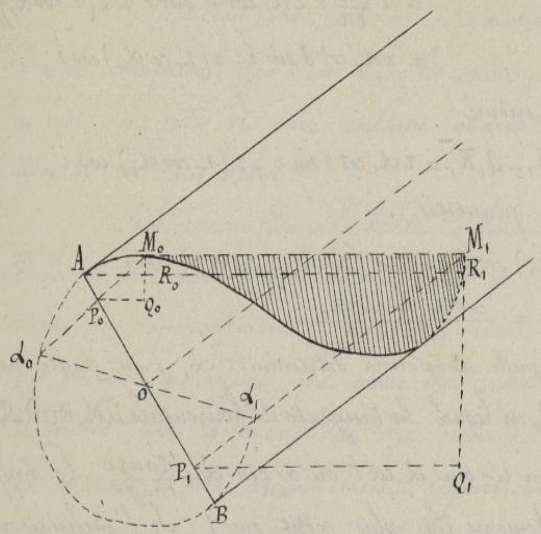
Dans cette condition la plus favorable, si l'on désigne par ω la section du tube, par l la longueur de l'arc hydrophore, le poids d'eau puisé à chaque tour du cylindre sera $\varpi\, \omega\, l$ et le travail en eau élevée sera $\varpi\, \omega\, l \times \varepsilon$, si l'on désigne par ε la hauteur verticale correspondant au pas de l'hélice.

Le cylindre étant représenté sur la figure par ses génératrices opposées A et B avec leur véritable inclinaison, nous désignerons par α_0 et α, les angles, mesurés sur la section droite de ce cylindre, qui correspondent respectivement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aux points M_0 et M_1 ; θ étant l'angle qui fait l'hélice, en tous ses points, avec les génératrices du cylindre, on aura nécessairement :

$$l = \frac{r(\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin\theta}$$



Quant à la valeur de E, elle sera donnée par la projection $h \sin i$ de la hauteur du pas sur la verticale.

Le travail en eau élevée, par tour sera donc $T = \varpi\, \omega\, r \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin\theta} h \sin i$, ou en mettant pour h sa valeur $h = 2\pi r \cot\theta$.

$$T = \varpi\, \omega \times 2\pi r^2 (\alpha_1 - \alpha_0) \frac{\sin i \cos\theta}{\sin^2\theta}$$

et si l'on suppose que ce travail est fourni par l'action d'une force F appliquée à une distance r de l'axe,

$$T = F \times 2\pi r = \pi\omega \times 2\varpi r^2 (\alpha_1 - \alpha_0) \frac{\sin i \cos\theta}{\sin^2\theta}$$

Si l'on voulait tenir compte des pertes de travail, résumées dans la valeur pratique R de rendement, la véritable force F' à appliquer à l'hélice serait :

$$F' = \frac{F}{R} = \frac{\pi\omega}{R} r(\alpha_1 - \alpha_0) \frac{\sin\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

La longueur de l'arc hydrophore dépend de la grandeur relative des deux angles i et θ. Soit $M_0 M_1$ l'horizontale qui le limite, on voit immédiatement sur la figure, en menant l'horizontale AR_0R_1, que l'on doit avoir $M_0R_0 = M_1R_1$, ou $M_0Q_0 - Q_0R_0 = M_1Q_1 - Q_1R_1$. Le premier membre de cette équation peut être développé de la manière suivante :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$M_0Q_0 - Q_0R_0 = M_0P_0 \sin i - AP_0 \cos i$$
$$= r\frac{\alpha_0}{2\pi} \times 2\pi \cot\theta \sin i - r(1-\cos\alpha_0)\cos i$$
$$= r\alpha_0 \cot\theta \sin i - r(1-\cos\alpha_0)\cos i$$

On aurait de même

$$M_1R_1 - Q_1R_1 = r\alpha_1 \cot\theta \sin i - r(1-\cos\alpha_1)\cos i$$

et en égalant ces deux quantités :

$$(\alpha_0-\alpha_1)\cos\theta \sin i = (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)\cos i$$

d'où $$\frac{\tang i}{\tang\theta} = \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0}{\alpha_0-\alpha_1}$$

équation à l'aide de laquelle on pourra déterminer α_1 pour toute valeur de α_0. Pour le point M_0 en lequel la tangente est horizontale $dM_0R_0 : d\alpha = 0$ ce qui revient à $\cot\theta \sin i = \sin\alpha \cos i$ ou à $\sin\alpha = \frac{\tang i}{\tang\theta}$. Le rapport $\tang i : \tang\theta$ devra toujours être plus petit que 1. Si l'inclinaison i du cylindre était plus grande que θ, il n'y aurait plus d'arc hydrophore.

Si pour nous rapprocher des circonstances de la pratique, nous supposons une succession de conduits hélicoïdaux, de même pas, juxtaposés sur toute la longueur des rayons du cylindre, l'angle θ sera différent pour chacun d'eux; il diminuera à mesure qu'on approchera de l'axe, et on arrivera ainsi à un rayon ς pour lequel $\theta = i$, et tel, par conséquent, que, pour un rayon plus petit, l'axe hydrophore n'existerait plus. Ce rayon ς est évidemment donné par la relation $2\pi\varsigma \times \cot\theta = h$, ou en remplaçant θ par i $\varsigma = \frac{h \cot i}{2\pi}$. Ce rayon limite, vers le centre, la partie de la vis qui ne peut servir à l'élévation de l'eau, et qui est en grande partie occupée par le noyau plein.

En réalité les petits canaux hélicoïdaux dont nous venons de parler sont remplacés par des cloisons en formes d'hélicoïdes gauches à génératrices perpendiculaires à l'axe du cylindre, et il est facile de se rendre compte du déplacement de l'eau sur cette surface.

Si nous la composons par une suite de cylindres concentriques nous obtiendrons, comme précédemment, une suite d'hélices de même pas, pour

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

lesquelles l'angle θ ira en diminuant de la circonférence au centre

Si le niveau dans la bâche se maintient entre A et P, l'air se trouve comprimé par l'eau dans les spires ; l'arc hydrophore est d'abord rempli avec excès et une certaine quantité d'eau tourne inutilement avec la vis sans s'élever.

Si le niveau dans la bâche s'élevait jusqu'en A l'orifice inférieur de la vis resterait constamment noyé et le fonctionnement de la machine se rapprocherait, dans de moins bonnes conditions, de celui des pompes centrifuges que nous étudierons ultérieurement, mais dans lesquelles nous pouvons dire déjà qu'en raison de leur grande rapidité de marche le rôle prépondérant appartient à la force centrifuge qui est ici presque négligeable.

Si le niveau est en P, l'arc hydrophore augmente quand i diminue, et l'eau ne s'élève plus qu'à une hauteur moindre. Il y a dès lors, pour chaque vis, une inclinaison qui correspond au maximum de travail, mais pour $\theta = 60$, on s'écartera peu de ce maximum en passant de $i = 30$ à $i = 50°$.

Si le rayon du moyau est plus grand que $\frac{2}{3}$, il faudra éviter que la base du moyau soit complètement immergée ; mais si ce rayon est plus petit que $\frac{2}{3}$, l'air atmosphérique restera, par le haut, en libre communication avec l'intérieur de la vis, même si la base venait à être complètement immergée.

256. – Dispositions diverses des vis d'Archimède. – Les vis d'Archimède portent ordinairement deux ou trois filets, afin d'augmenter leur débit ; leur diamètre varie de $0^m.35$ à $0^m.65$, dont $\frac{1}{3}$ pour le moyau. On leur donne deux dispositions très différentes, avec une inclinaison $\theta = 60°$ sur l'enveloppe extérieure.

1° Les vis à enveloppe (ou canon) mobile, dans lesquelles tout

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'appareil tourne autour de son axe ; elles ont l'inconvénient de faire porter toute la charge sur les coussinets et de donner lieu à des flexions de l'arbre qui mettent rapidement celui-ci hors de service. On leur imprime une vitesse de 1m.30 à la circonférence.

2°. Les vis hollandaises, qui sont ordinairement d'un diamètre plus grand, n'ont pas d'enveloppe mobile ; elles tournent dans une sorte de coursier en maçonnerie, qui porte une partie de la charge. Ce coursier étant découvert, la vis peut marcher noyée et par conséquent agir successivement jusqu'à des profondeurs croissantes pendant toute la durée d'un épuisement. Afin de diminuer l'influence des fuites qui se produisent inévitablement entre les aubes hélicoïdes et le coursier, on leur donne une vitesse de 2 mètres environ à la circonférence.

La vis d'Archimède permet d'obtenir en travail courant un rendement de 50 %; on élève avec elle 11 mètres cubes d'eau par heure et par homme à 1m. de hauteur, soit un peu plus de 3 Kilogrammètres par seconde.

Dans les grands épuisements on en place plusieurs en ligne de manière à être manoeuvrées, indépendamment les unes des autres, par un même arbre de couche muni d'engrenages d'angle.

257. - Machines élévatoires fonctionnant par transmission de puissance vive. - Nous n'avons pas à revenir ici sur l'étude du bélier hydraulique qui doit être tout à la fois considéré comme récepteur et comme élévateur. Quoique les chocs y jouent le rôle le plus important, le corps du bélier restitue, par son élasticité, une partie du travail que ces chocs dépensent et la machine doit sans doute son grand rendement à ce qu'il n'y a plus qu'une seule série d'organes, une seule machine au lieu de deux. Dans le cas de deux machines distinctes, le rendement final ne pourrait

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

s'élever au delà de 0,70 × 0,70 = 0,49, en supposant que chacune d'elles puisse rendre un effet utile de 0.70, et nous restons ainsi fort loin de ce que l'on réalise avec le bélier.

Quant aux machines dans lesquelles la poussée du liquide agit par l'intermédiaire d'un piston, elles se prêtent aux applications les plus variées et leur usage en devient tout à fait général.

Chaque genre de machine se recommande d'ailleurs par les conditions particulières du travail à effectuer, et suivant qu'une installation doit être considérée comme provisoire ou permanente on choisira les dispositions les moins coûteuses ou celles qui assurent le meilleur effet utile.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Fluides élastiques.

260. — Notions préliminaires. — Les gaz diffèrent des liquides en ce qu'ils sont compressibles et extensibles, de sorte que les volumes qu'une même masse gazeuse occupe successivement, dans son déplacement, peuvent être très-différents. Cette particularité va nous conduire à rechercher, pour les mouvements des gaz des formules spécialement appropriées.

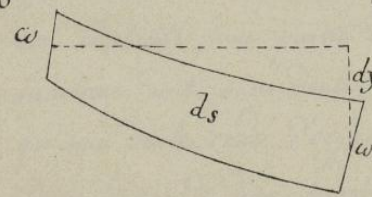
Conformément à la loi de Mariotte, le produit du volume par la pression d'une masse de gaz est constant pour une même température, et, conformément à la loi de Gay-Lussac, on sait que, lorsque la température varie, ce volume augmente dans le rapport du binome de dilatation. On a ainsi :

$$v p = v_0 p_0 (1+\alpha t);$$

mais nous supposerons presque toujours qu'il ne se produit aucun changement de température, ce qui nous permettra de nous servir exclusivement de la formule simple

$$v p = v_1 p_1 = v_0 p_0$$

261. — Écoulement permanent d'un filet gazeux sans tenir compte du frottement. — L'équation différentielle de cet écoulement peut se déduire du principe des quantités de mouvement, en considérant un filet de section ω,



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui devient $\omega + d\omega$, en même temps que sa vitesse v devient $v + dv$, et sa pression p, $p + dp$.

Pour une masse m, infiniment petite, l'accroissement de la quantité de mouvement $m\,dv$ sera, en projetant les impulsions élémentaires sur la direction de la vitesse v, $m\,dv = \Sigma$ impulsions projetées.

Ces impulsions sont :

1°. Celle du poids $\varpi\,\omega\,ds$ du gaz compris entre les deux sections, cette impulsion étant exprimée par $\varpi\,\omega\,ds\,\frac{dy}{ds}\,dt$.

2°. Celles des pressions d'amont et d'aval $p\,\omega - (p+dp)(\omega + d\omega)$ qui se résument en $-\omega\,dp\,dt - p\,d\omega\,dt$, mais cette dernière impulsion est équilibrée par celle de la pression extérieure p qui s'exerce sur la paroi latérale, par suite de l'augmentation de section $d\omega$.

Les forces intérieures ne donnant lieu à aucune résultante de leurs impulsions, l'équation se réduit ainsi à :

$$m\,dv = \varpi\,\omega\,dy\,dt - \omega\,dp\,dt$$

Mais $$m = \frac{\varpi\,\omega\,v\,dt}{g}$$

et en substituant cette valeur de m dans le premier membre de l'équation

$$\frac{\varpi\,\omega\,v\,dt\,dv}{g} = \varpi\,\omega\,dy\,dt - \omega\,dp\,dt$$

et par suite :

$$\frac{v\,dv}{g} = dy - \frac{dp}{\varpi}.$$

262. — Application de l'équation différentielle à une nappe finie. — Pour appliquer l'équation précédente à l'écoulement d'un gaz dont la densité, prise par rapport à celle de l'air, est δ, il faut calculer ϖ.

$$\varpi = 1.293\,\frac{p}{10330}\,\frac{\delta}{1+\alpha t} = \frac{1}{8000}\,\frac{\delta}{1+\alpha t}\,p = \frac{p}{K},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

si l'on représente par K la valeur du dénominateur de p,

$$K = \frac{10330\,(1+\alpha t)}{1.293\,\delta} = 8000\,\frac{1+\alpha t}{\delta}.$$

on a par suite :

$$\frac{v\,dv}{g} = dy - K\,\frac{dp}{p}$$

et en intégrant :

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = y_1 + K \log hyp.\frac{p_0}{p_1}$$

$$= y_1 + 2.30258\ K \log \frac{p_0}{p_1}$$

ou : $\frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = y_1 + 8000\,\frac{1+\alpha t}{\delta} \log hy \frac{p_0}{p_1} = y_1 + 18400\,\frac{1+\alpha t}{\delta} \log \frac{p_0}{p_1}$

263. — Même application lorque les pressions extrêmes diffèrent peu l'une de l'autre.

Si la pression varie peu, on peut approximativement remplacer la pression variable p, dans le dernier terme, par la moyenne des pressions extrêmes p_0 et p_1 ; dès lors :

$$\frac{v\,dv}{g} = dy - K\,\frac{dp}{p} = dy - K\,\frac{dp}{\frac{1}{2}(p_0+p_1)}$$

$$= dy - 2K\,\frac{dp}{p_0+p_1}$$

En intégrant sous cette nouvelle forme

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = y_1 + 2K\,\frac{p_0-p_1}{p_0+p_1}$$

et en mettant pour K sa valeur $8000\,\frac{1+\alpha t}{\delta}$

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = y_1 + 16000\,\frac{p_0-p_1}{(p_0+p_1)}\,\frac{1+\alpha t}{\delta}$$

Ce mode plus simple de calcul est suffisamment exact lorsque le rapport $\frac{p_0}{p_1}$ ne dépasse pas 2, ainsi qu'on peut le voir par le tableau suivant des valeurs calculées du rapport des coëfficients des deux formules, dans quelques cas particuliers.

$\frac{p_0}{p_1} =$	1.00 ;	1.05 ;	1.10 ;	2.00
$\frac{\log.hyp\,\frac{p_0}{p_1}}{\frac{p_0-p_1}{\frac{1}{2}(p_0+p_1)}} =$	1.00 ;	1.002 ;	1.008 ;	1.0391

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Même dans le dernier cas le rapport diffère très peu de l'unité.

264. — Expression de la vitesse et de la dépense dans l'écoulement d'un gaz par un orifice déterminé. —

Si un gaz s'écoule d'un vase où la vitesse v_0 peut être considérée comme nulle et si l'écoulement se fait dans un milieu de pression p_1 il suffit d'exprimer dans la formule générale les deux conditions :

$$v_0 = 0 \qquad y_1 = 0$$

d'où $$\frac{v_1^2}{2g} = 18400 \cdot \frac{1+\alpha t}{\delta} \log \frac{p_0}{p_1}$$

et par suite $$v_1^2 = 2g \times 18400 \frac{1+\alpha t}{\delta} \log \frac{p_0}{p_1}$$

Il faut admettre dans ce cas que les filets cheminent parallèlement pendant que la pression passe de p_0 à p_1, ce qui exige que le rapport $\frac{p_0}{p_1}$, ne diffère pas beaucoup de l'unité.

Le volume Q_0 de gaz à p_0 qui s'écoulera par seconde satisfera à la condition :

$$Q_0 = Q_1 \frac{p_1}{p_0} = \Omega\, v_1 \frac{p_1}{p_0}$$

qui permettra d'écrire :

$$Q_0 = \Omega \frac{p_1}{p_0} \sqrt{2g \times 18400 \frac{1+\alpha t}{\delta} \log \frac{p_0}{p_1}}$$

$$= 600\, \Omega \frac{p_1}{p_0} \sqrt{\frac{1+\alpha t}{\delta} \log \frac{p_0}{p_1}}$$

265. — Même application lorsque les pressions extrêmes diffèrent peu l'une de l'autre.

Il convient alors de recourir à la formule non logarithmique qui devient :

$$\frac{v_1^2}{2g} = 16000 \frac{p_0 - p_1}{p_1 + p_0} \frac{1+\alpha t}{\delta},$$

et l'on trouve dans les mêmes conditions que précédemment,

$$Q_0 = Q_1 \frac{p_1}{p_0} = \Omega_1\, v_1 \frac{p_1}{p_0}$$

et en mettant pour v_1 sa valeur,

$$Q_0 = \Omega_1 \frac{p_1}{p_0} \sqrt{2g \times 16000 \frac{1+\alpha t}{\delta} \frac{p_0 - p_1}{p_0 + p_1}}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

266. — Condition du maximum de la dépense.

La dépense en volume, Q_0 n'augmente pas toujours quand p_1 diminue parce que les facteurs $\frac{p_1}{p_0}$ et $\sqrt{\log \frac{p_0}{p_1}}$ de la formule du N°. 264 varient alors en sens contraires.

Pour le reconnaître, il suffit de chercher le maximum du produit :

$$p_1^2 \times \log \frac{p_0}{p_1} = A$$

Pour égaler la dérivée à zéro, on trouve successivement :

$$p_1^2 (\log p_0 - \log p_1) = A$$

$$\frac{dA}{dp_1} = 2p_1 . \log p_0 - 2p_1 \log p_1 - p_1 = 0 ;$$

d'où

$$\log \text{hyp} \frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{2}$$

$\frac{p_0}{p_1} = e^{\frac{1}{2}} = 1.649$; ce curieux résultat méritait d'être signalé.

267. — Formule approximative de l'écoulement des gaz.

Si l'on supposait ϖ constant dans l'expression déjà simplifiée du N°. 261

$$\frac{v\,dv}{g} = -\frac{dp}{\varpi}$$

elle donnerait immédiatement par intégration :

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_0 - p_1}{\varpi}$$

et si l'on désignait par h la hauteur de gaz, de poids spécifique ϖ, pouvant produire la pression $p_0 - p_1$, on aurait nécessairement $\varpi h = p_0 - p_1$, et par suite :

$$\frac{v_1^2}{2g} = h \qquad \text{et} \qquad v_1^2 = 2gh$$

formule analogue à celle de l'écoulement des liquides et qui peut être appliquée aux gaz par approximation.

268. — Coëfficients de contraction.

En réalité le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

débit est moindre dans la proposition déterminée par le coëfficient de contraction m applicable à chaque cas particulier.

D'Aubuisson a déterminé par expérience plusieurs de ces coëfficients, qui se rapprochent beaucoup de ceux des liquides, dans les circonstances analogues :

Orifice en mince paroi ..... $m = 0.65$
Ajutage cylindrique ..... $m = 0.93$
Ajutage légèrement convergent .. $m = 0.94$

269. — Résistances dues au frottement des gaz.

Pour exprimer la résistance des parois sur une masse gazeuze en mouvement, Navier avait été conduit à la formule monome :

$$F = \varpi L \chi 0.000\,355\, u^2.$$

Mais les dernières expériences de Mrs. Arson, Mouard et Honoré ont montré qu'il convenait de revenir à la formule binome employée quelquefois pour les liquides :

$$F = \varpi L \chi (a u + b u^2)$$

en donnant, aux coëfficients, pour les conduites en fonte, des valeurs différentes suivant le diamètre de la conduite.

Diamètres	Valeurs de a	Valeurs de b.
$0^m 500$	0.000020	0.000246
0.325	0.000151	0.000326
0.254	0.000237	0.000359
0.103	0.000560	0.000480
0.081	0.000589	0.000489
0.050	0.000702	0.000595

270. — Equation différentielle du mouvement permanent d'un gaz dans une conduite cylindrique à débit constant.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Application du principe des quantités de mouvement —

$$m\,du = \Sigma \text{ impulsions élémentaires ;}$$

1° poids $\varpi\,\omega\,ds$; projection $\varpi\,\omega\,ds\,\frac{dy}{ds}$

Impulsion $\varpi\,\omega\,dy\,dt$

2° pressions ; $\omega\,p - \omega\,(p+dp)$

Impulsion $\omega\,dp\,dt$

3° frottement, $\varpi\,X\,ds\,(au+bu^2)$

Impulsion $\varpi\,X\,ds\,(au+bu^2)\,dt$

D'un autre côté :

$$m = \frac{\varpi\,\omega\,u\,dt}{g}$$

ce qui conduit en résumé à :

$$\frac{\varpi\,\omega\,dt}{g}\,u\,du = \varpi\,\omega\,dy\,dt - \omega\,dp\,dt - \varpi\,X\,ds\,(au+bu^2)\,dt$$

$$\frac{u\,du}{g} = dy - \frac{dp}{\varpi} - \frac{X\,ds}{\omega}\,(au+bu^2)$$

$$= dy - \frac{dp}{\varpi} - \frac{4}{D}\,(au+bu^2)\,ds$$

$$= dy - \frac{K\,dp}{p} - \frac{4}{D}\,(au+bu^2)\,ds$$

Telle est l'équation différentielle du mouvement permanent, dans une conduite cylindrique, en tenant compte des frottements.

271. — Vitesse à l'extrémité de la conduite. — Cette vitesse u_1 sera donnée par l'intégration de l'équation différentielle sous sa dernière forme ;

$$\frac{u\,du}{g} = dy - K\,\frac{dp}{p} - \frac{4}{D}\,(au+bu^2)\,ds$$

Pour faciliter l'intégration par approximation, nous poserons :

$$p\,u = p_0\,u_0 = p_1\,u_1 = C$$

C étant une constante qui donne :

$$u = \frac{C}{p} \quad \text{et} \quad du = -\frac{C\,dp}{p^2}$$

En mettant à la place de u et de du ces valeurs, l'équation devient :

$$-\frac{C^2\,dp}{g\,p^3} = dy - K\,\frac{dp}{p} - \frac{4}{D}\left(a\,\frac{C}{p} + b\,\frac{C^2}{p^2}\right)ds$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et en multipliant tous les termes par p^2 :

$$-\frac{C^2 dp}{gp} = p^2 dy - Kp\,dp - \frac{4}{D}(aCp + bC^2)ds.$$

Pour intégrer les termes qui contiennent deux variables, p et y, ou p et s, on donnera à p la valeur constante $\frac{p_0+p_1}{2}$, ce qui conduit à :

$$\frac{C^2}{g}\log hy\frac{p_0}{p_1} = \left(\frac{p_0+p_1}{2}\right)^2 y_1 - \frac{K}{2}(p_1^2 - p_0^2) - \frac{4L}{D}ac\frac{p_0+p_1}{2} - \frac{4L}{D}bC^2$$

On peut remplacer C par sa valeur $p_1 u_1$:

$$\frac{p_1^2 u_1^2}{g}\log hy\frac{p_0}{p_1} = \left(\frac{p_0+p_1}{2}\right)^2 y_1 - \frac{K}{2}(p_1^2 - p_0^2) - \frac{4L}{D}ap_1u_1\frac{p_0+p_1}{2} - \frac{4L}{D}bp_1^2u_1^2$$

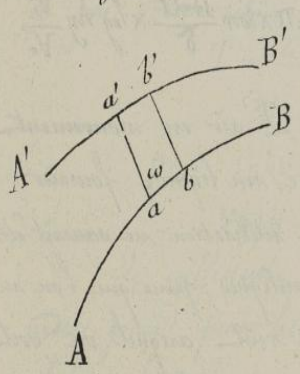
et en divisant les deux membres par p_1^2 puis réunissant les termes en u_1^2

$$\frac{u_1^2}{2g}\left(\frac{8bgL}{D} + 2\log hy\frac{p_0}{p_1}\right) = \frac{(p_0+p_1)^2}{4p_1^2}y_1 - \frac{K}{2}\left(\frac{p_1^2-p_0^2}{p_1^2}\right) - \frac{4L}{D}\frac{p_0+p_1}{2p_1}au_1$$

Le terme y_1 est le plus ordinairement négligeable et l'on résout facilement cette équation par approximations successives de la valeur de u_1^2.

On aurait pu, de la même façon, résoudre l'équation par rapport à u_0, en substituant à la constante C, après l'intégration, sa valeur $p_0 u_0$ au lieu de $p_1 u_1$.

272. — Travail de la détente des gaz. — Lorsqu'on ne tient pas compte de la variation de la température, le travail de la détente des gaz se calcule par une simple formule logarithmique. Examinons d'abord le cas où il y a seulement augmentation de volume ; pendant cette augmentation de volume, le gaz étant enfermé dans une enveloppe extensible, la paroi AB serait transportée en A'B' et ab par exemple en a'b'. Dans ce déplacement infiniment petit on peut considérer l'espace ab a'b' comme un cylindre ayant pour section droite ω et pour hauteur h de sorte que, la pression étant p, le travail élémentaire relatif à ce cylindre sera exprimé



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par $p\,\omega h$, et pour tous les cylindres qui par leur ensemble, représentent la variation de volume $\mathcal{E}$, le travail total sera $\Sigma\, p\omega h = \Sigma\, p\mathcal{E}$ ou $p\,dV$, en désignant le volume primitif total par V.

S'il y a en même temps augmentation et diminution de volume, $dT = \Sigma\, p\,\mathcal{E} - \Sigma\, p\,\mathcal{E}' = p\,dV$ et par conséquent $T = \int_{V_0}^{V_1} p\,dV$ comme précédemment.

Cette expression donne, dans tous les cas, au signe près, la mesure du travail développé sur l'enveloppe ou, sur le gaz, par cette enveloppe.

Si la pression p pouvait rester constante pendant la détente, on aurait :

$$T = p\,(V_1 - V_0)$$

Si la pression suit, par rapport au volume, la loi de Mariotte:

$$p\,V = p_0 V_0 = p_1 V_1$$

$$T = \int_{V_0}^{V_1} p\,dV = \int_{V_0}^{V_1} p_0 V_0 \frac{dV}{V} = p_0 V_0 \log hy \frac{V_1}{V_0} = p_0 V_0 \log hy \frac{p_0}{p_1}$$

Cette formule donne l'expression du travail de la détente pour un poids de gaz,

$$\varpi_0 V_0 = \varpi_1 V_1 = \Pi$$

Mais on a généralement :

$$\varpi_0 = \frac{p_0}{K} \; ; \; \varpi_1 = \frac{p_1}{K}$$

de sorte qu'on peut écrire aussi :

$$T = \varpi_0 K V_0 \log hy \frac{V_1}{V_0} = \Pi K \log hy \frac{V_1}{V_0} = \Pi \times 8000 \frac{1+\alpha t}{\delta} \times \log hy \frac{V_1}{V_0}$$

273. — **Moteurs à air.** — L'air en mouvement, par sa puissance vive $\frac{m v^2}{2}$, peut comme un liquide fournir une certaine quantité de travail, mais cette utilisation ne saurait être régularisée comme dans les récepteurs hydrauliques, parce que l'on ne peut régler ni l'intensité ni la direction du vent auquel on doit l'emprunter.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'arbre des grands moulins dits verticaux est habituellement incliné de 15° sur l'horizon; les ailes, à fort peu près rectangulaires, règnent depuis le rayon de deux mètres jusqu'à celui de 13 mètres, et leur largeur est telle que la surface des 4 ailes offre au vent une superficie de 80 mètres au total, ce qui représente le sixième environ de la surface qu'elles développent pendant leur rotation; l'intervalle compris entr'elles sert à laisser passer l'air dont la vitesse s'est amoindrie à leur contact et qui doit être remplacé par celui que la continuité du vent y introduit à nouveau.

La puissance vive de cet air $\frac{mv^2}{2}$ ou $\frac{\varpi \Omega v^3}{2g}$ peut ainsi fournir un travail $\frac{R\varpi\Omega v^3}{2g}$. En faisant $\Omega = 80^{m.q.}$ on trouverait pour R le coëfficient de rendement pour chacune des conditions de fonctionnement de ces moulins.

Coriolis en corrigeant les observations de Coulomb des effets du choc des pilons, mus par les moulins sur lesquels les observations ont été faites, a donné les chiffres suivants:

Vitesse du Vent v	Travail moteur en Kilogrammètres T
4m. 05	178 Kilog.
6. 50	683 "
9. 10	960 "

ce qui donnerait:

$T' = \frac{\varpi \Omega v^3}{2g}$	$K = \frac{T}{T'}$
350. 09	0. 58
1446. 72	0. 47
3974. 96	0. 24

Le coëfficient K est donc loin d'être constant, et s'il est aussi grand pour les vitesses les plus modérées du tableau de Coriolis, il faut l'attribuer à ce que ce n'est pas seulement la section des ailes,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

limitée à 80 mètres quarrés, mais la section totale développée qui contribue à fournir le travail moteur.

Malgré la gratuité de leur fonctionnement, les moulins à vent sont de plus en plus délaissés par suite de la discontinuité de leur travail, l'industrie exigeant dans la production une certitude qui leur fait défaut.

Les moulins à vent sont surtout à recommander pour l'élévation, dans des réservoirs appropriés, de l'eau nécessaire à l'agriculture. On emploie alors des moulins de plus petites dimensions, souvent à ailes métalliques, disposés de manière à supporter sans se détériorer les bourrasques les plus violentes; quelle que soit leur intensité, la pompe qu'ils actionnent élève une quantité d'eau que l'on peut augmenter en faisant varier la course du piston, quand la puissance motrice augmente et le moulin s'oriente de lui même, dans la direction exactement opposée à la direction habituelle. Il faut alors que la tour disparaisse et que les ailes ainsi que l'axe soient portées sur un léger bati en charpente.

On construit aussi de petits moulins à axe vertical dans lesquels les ailes sont remplacées par des palettes articulées ou par des poches qui, aux deux extrémités d'un même diamètre, résistent ou cèdent à l'action du vent; on ne peut alors recueillir que le travail correspondant à la différence des deux actions, et les surfaces ainsi utilisables sont d'ailleurs trop petites pour qu'on obtienne des effets de quelque valeur.

274. — Pompe à air. — Pour établir la théorie de la pompe à air, il suffit de considérer, dans son fonctionnement, quatre périodes successives, indiquées par la figure ci-jointe, et au moyen desquelles l'air, introduit à la pression p_0, est refoulé à la pression p,

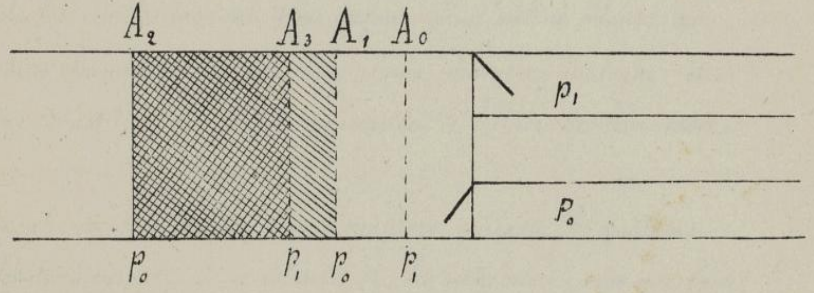
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1° de A_0 (V_0 et p_1) à A_1 (V_1 et p_0)
Travail. — $V_0 p_1 \log hy \frac{p_1}{p_0}$

2°. de A_1 (V_1 et p_0) à A_2 (V_2 et p_0)
Travail. — $(V_2 - V_1) p_0$

3° de A_2 (V_2 et p_0) à A_3 (V_3 et p_1)
Travail. + $V_3 p_1 \log hy \frac{p_1}{p_0}$

4°. de A_3 (V_3 et p_1) à A_0 (V_0 et p_1)
Travail + $(V_3 - V_0) p_1$



En additionnant ces quatre quantités et en remarquant qu'en vertu des relations $V_3 p_1 = V_1 p_0$ et $V_0 p_1 = V_1 p_0$, qui expriment respectivement les différents états d'une même masse gazeuse, les termes 2 et 3 s'annulent et l'on obtient :

$$T = p_1 (V_3 - V_0) \log hy p \frac{p_1}{p_0} = (V_2 - V_1) p_0 \log hy p \frac{p_1}{p_0} = V p_0 \log hy p \frac{p_1}{p_0}$$

C'est la formule générale du travail de la détente, dans tous les cas où l'on peut appliquer la loi de Mariotte.

En réalité la température de l'air augmente par sa compression et l'augmentation de pression qui en résulte se traduit nécessairement par une augmentation dans la quantité de travail dépensé. Aussi cherche-t-on à la combattre par des moyens de réfrigération de la masse gazeuse et des parois de la pompe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

275. — Ventilateur. Le ventilateur est une machine soufflante dans laquelle l'air, entraîné par des palettes qui tournent rapidement, d'une manière continue autour d'un axe, se trouve chassé hors de ces palettes par l'action de la force centrifuge que le mouvement de rotation imprime au fluide. Le ventilateur sera étudié avec les autres appareils à force centrifuge dans un chapitre spécial.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Théorie générale des Appareils à force centrifuge.

276.—Dispositions générales. Les turbines, les pompes centrifuges et les ventilateurs ont pour organe principal un volant qui fonctionne, dans chacune de ces machines, d'une manière analogue, et dont la théorie constitue la partie dominante de l'étude de leur mode d'action.

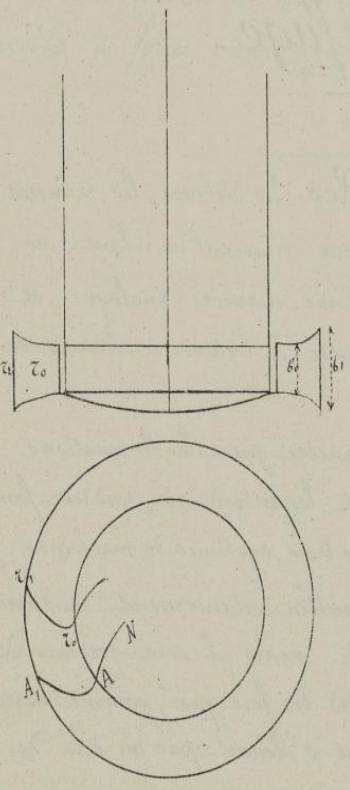
On peut dès lors établir, d'une manière générale, les équations relatives au fonctionnement de ce volant et les introduire, sous une forme unique, dans l'ensemble des équations de ces trois systèmes de machines.

Si le fluide est élastique, on commettra certainement une erreur en considérant sa densité comme constante, mais il sera permis de négliger les variations de cette densité toutes les fois que, comme dans les ventilateurs, les différences de pression ne s'élèvent pas au-delà de quelques décimètres d'eau.

277.—Choix de la Turbine Fourneyron pour l'établissement des équations. Pour faciliter nos premières études sur les appareils à force centrifuge, nous nous occuperons d'abord de la turbine Fourneyron d'une manière exclusive. Nous indiquerons ultérieurement les rapprochements qu'il sera nécessaire de faire pour approprier les équations relatives à cette turbine, aux autres appareils à force centrifuge.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

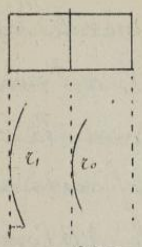
278. — Turbine Fourneyron. La première turbine qui ait satisfait à ces conditions est due à Fourneyron ; les directrices courbes NA sont disposées en lames verticales, élevées sur le fond horizontal de la cuve, de manière à obliger l'eau qui les parcourt, à y prendre avant de s'échapper une vitesse horizontale ; la roue dans laquelle l'eau est ainsi conduite constitue un anneau concentrique à la cuve, divisé par un très grand nombre d'aubes cylindriques AA_1, entre lesquelles l'eau continue à se mouvoir horizontalement pour en sortir finalement à une distance r_1 du centre, plus grande que la distance r_0 à laquelle elle est entrée dans la roue, b_0 et b_1 indiquent la hauteur ou l'épaisseur de l'anneau à l'entrée et à la sortie. Cet anneau ou couronne des aubes, qui constitue la véritable roue de la turbine, est relié à un axe vertical dirigé suivant l'axe de la cuve ; isolé par un manchon qui l'entoure, il repose sur un pivot inférieur, sous l'eau, et porte à la partie supérieure la poulie de transmission.



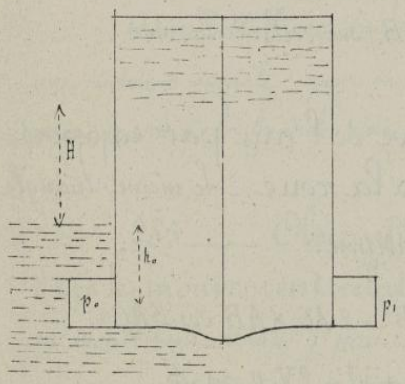
279. — Théorie de la Turbine Fourneyron. Pour reconnaître les conditions du meilleur fonctionnement des turbines, nous suivrons l'eau depuis le niveau d'amont jusqu'au niveau d'aval en supposant que les pertes dues au tourbillonnements ou aux frottements peuvent être négligées par suite de l'exiguité des parcours et des précautions qui peuvent être prises pour éviter les changements

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

brusques de section. En représentant dans cette étude, la disposition de la turbine Fourneyron, nous devons déjà indiquer que l'ensemble de la méthode, et la plupart des formules elles-mêmes seront applicables aux autres types avec quelques légères modifications.



280. — Vitesse de l'eau à l'entrée de la roue. L'eau arrive à l'entrée des aubes en filets que nous supposerons parallèles par suite de la section de la cuve, incomparablement plus grande que celles des orifices d'entrée dans la roue. En ne tenant compte ni des contractions, que l'on atténue autant que possible par des évasements convenables, ni des frottements contre les parois de la cuve ou contre les directrices, on peut écrire directement, en appliquant le théorème de Bernoulli, dans les conditions les plus simples :



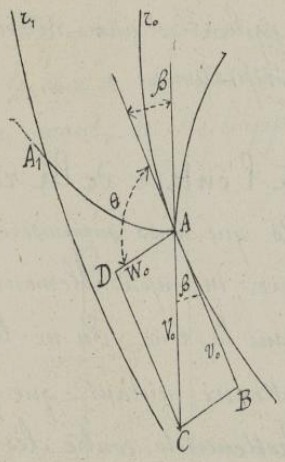
$$V_0^2 = 2g\left(H + h_0 + \frac{p_a}{\varpi} - \frac{p_0}{\varpi}\right)$$

Cette vitesse V_0 de l'eau, à l'arrivée sur la roue, a en outre une direction déterminée par le dernier élément de la directrice, si l'on admet que la couche contigüe glisse à son contact et que les filets voisins éprouvent les mêmes déviations.

281. — Rapport entre la vitesse de la roue et celle de l'eau à son entrée dans la roue. Il importe, pour éviter tout choc à l'entrée, que la vitesse W_0 de l'eau par rapport à l'aube soit dirigée suivant le premier élément de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cette aube, qui fait un angle θ avec la tangente A.B. à la circonférence de la roue en A; si on représente en outre en AC la vitesse absolue V_0 de l'eau, au sortir de la directrice suivant la tangente à son dernier élément, faisant un angle β avec AB, le triangle A.B.C. de décomposition de la vitesse V_0, en deux autres vitesses v_0 et W_0, dirigées l'une suivant AB, l'autre suivant AD, devra dans le cas où tout choc serait évité, satisfaire à la condition.



$$\frac{AB}{AC} = \frac{v_0}{V_0} = \frac{\sin ACB}{\sin ABC} = \frac{\sin(180° - (\beta+\theta))}{\sin\theta} = \frac{\sin(\beta+\theta)}{\sin\theta}$$

L'eau entrera ainsi dans l'aube AA_1, sans choc, et n'aura aucun excès de vitesse, dans la direction AB, sur celle de la roue.

282. — Vitesse relative de l'eau par rapport à l'aube, à son entrée dans la roue. — Le même triangle ABC fournira comme seconde condition :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,AC \times AB \cos BAC$$

$$W_0^2 = V_0^2 + v_0^2 - 2 V_0 v_0 \cos\beta$$

283. — Rapport entre les vitesses de la roue à l'entrée et à la sortie de l'eau.

Les vitesses de la roue à l'entrée et à la sortie de l'eau sont comme les rayons des circonférences décrites c'est à dire :

$$\frac{v_1}{r_1} = \frac{v_0}{r_0}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

284. — Vitesse relative de l'eau par rapport à l'aube, à la sortie de la roue. — L'eau chemine le long de l'aube et est entraînée, à partir de son entrée, dans le mouvement propre de la roue, la vitesse d'entraînement v_0 devient ainsi v_1 et si on applique au mouvement relatif le théorème de Bernoulli, l'augmentation de puissance vive dans le mouvement relatif sera donnée par le travail des forces réelles et de la force centrifuge.

$$\frac{W_1^2 - W_0^2}{2g} = h_1 + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi} + \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g};$$

h_1 étant la hauteur du niveau d'aval au dessous du point de sortie, et $\frac{p_1}{\varpi}$ étant la pression hydraulique en ce même point.

Nous écrirons cette relation sous la forme :

$$W_1^2 - W_0^2 = 2g\left(h_1 + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}\right) + v_1^2 - v_0^2$$

Dans la turbine Fourneyron, $h_1 = 0$ mais, en ayant donné à cette variable une notation spéciale, pour en représenter la valeur à la sortie de la roue, nous assurons à la formule une plus grande généralité.

285. — Observation sur la variation du travail dans le mouvement relatif. — Le principe des forces vives, appliqué au mouvement relatif, peut s'énoncer ainsi :

L'accroissement de puissance vive, dans le mouvement relatif, est égal à la somme des travaux dûs aux forces développées dans le mouvement absolu, augmentée de la somme des travaux dûs à la force d'inertie développée dans le mouvement d'entraînement, le travail de la force centrifuge composée étant toujours nul.

1° Accroissement de la puissance vive dans le mouvement relatif :

$$\frac{P}{2g}(W_1 - W_0^2)$$

2° Accroissement du travail d'inertie dans le mouvement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'entraînement. A un instant quelconque la force centrifuge a pour mesure $\frac{P}{g}\omega^2 r$, et par conséquent l'expression générale de son travail sera donnée par : $\frac{P}{g}\int_{r_0}^{r_1}\omega^2 r\,dr = \frac{P}{g}(\omega^2 r_1^2 - \omega^2 r_0^2) = \frac{P}{2g}(v^2 - v_0^2)$.

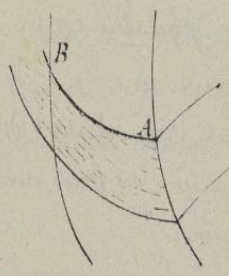
3° Travail du aux forces réelles :

$$P\left(h_1 + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega}\right)$$

et par suite

$$\frac{W^2 - W_0^2}{2g} = h_1 + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega} + \frac{v^2 - v_0^2}{2g}$$

286. ____ **Conditions relatives au minimum de la vitesse de l'eau à sa sortie de la roue.** — Cette vitesse que nous désignerons par V_1 ne pourrait être nulle que si les deux vitesses composantes v_1 et W_1 étaient égales et de sens contraires. On ne peut évidemment réaliser la condition de direction commune, puisque l'une d'elles v_1 est absolument déterminée, et si l'autre W_1 était également tangente à la circonférence de la roue, il ne pourrait sortir de la turbine qu'une nappe d'eau extrêmement mince et non en rapport avec la capacité des augets. On cherche donc, sous ce rapport, à faire que l'angle des deux vitesses soit extrêmement obtus ; son supplément y devra être aussi petit que possible. Quant à la seconde condition, on cherchera toujours à y satisfaire, ce qui donne une nouvelle équation :



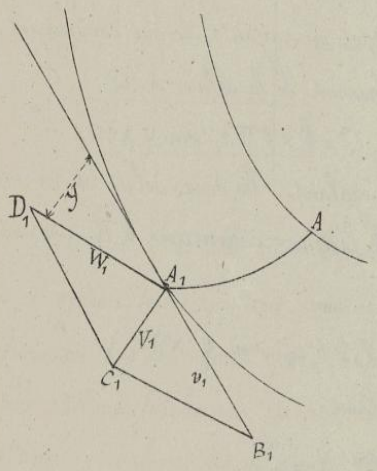
$$W_1 = v_1$$

287. ____ **Vitesse absolue de l'eau à sa sortie de la roue.** — La vitesse de sortie V_1 est nécessairement la résultante des deux vitesses v_1 et W_1

La vitesse V_1 est donnée, dans le triangle de composition A, B, C,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par le côté A_1C_1, qui a pour valeur :



$$V_1^2 = W_1^2 + v_1^2 - 2 W_1 v_1 \cos \gamma$$

γ étant l'angle que fait le dernier élément de l'aube AA_1 avec la tangente à la circonférence décrite par le point de sortie.

Les deux vitesses W_1 et v_1 étant égales entr'elles, on pourrait encore écrire cette relation sous la forme :

$$V_1^2 = 2 v_1^2 (1 - \cos \gamma)$$

288. ____ Pression de l'eau à la sortie. — L'eau en sortant de la roue, pénètre dans le bief d'aval, dont la section est incomparablement plus grande et où la vitesse est par conséquent très-faible : on peut, dès lors, admettre que la pression s'y répartit suivant la loi hydrostatique, à la sortie, et en la désignant, en hauteur d'eau par $\frac{p_1}{\varpi}$ cette pression est donc égale à la pression atmosphérique $\frac{p_a}{\varpi}$, augmentée de la hauteur du point moyen de sortie de l'eau au dessous du niveau dans le bief d'aval, c'est-à-dire $\frac{p_a}{\varpi} + h_0 + h_1$, et l'on a en définitive :

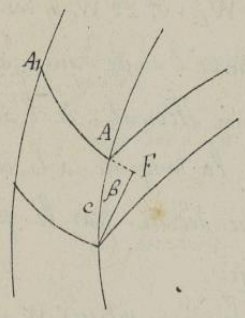
$$\frac{p_1}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + h_0 + h_1$$

289. ____ Égalité des débits à l'entrée et à la sortie. — L'épaisseur du filet qui entre dans la roue étant représentée sur la figure par la section droite $A.F. = e \sin \beta$ pour chacun des augets et sa largeur étant b_0, la quantité d'eau débitée dans chaque intervalle compris entre deux directrices, sera $b_0 \times e \sin \beta \times V_0$ et l'on obtiendra le débit total Q en remplaçant, dans cette expression, la distance e

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par la circonférence tout entière de la couronne, ce qui donne :

$$Q = b_0 \times 2\pi r_0 \sin. \beta \times V_0$$



A la sortie de la roue, on raisonnerait de la même façon, par rapport à l'angle γ, à la vitesse W_1 et au rayon r_1, ce qui conduirait à une autre expression de la valeur de Q :

$$Q = b_1 \times 2\pi r_1 \sin \gamma \times W_1$$

En égalant les deux débits et en supprimant le facteur commun 2π, on arrive à l'équation cherchée.

$$b_0 r_0 \sin. \beta \times V_0 = b_1 r_1 \sin \gamma \times W_1 ,$$

que l'on peut ainsi mettre sous la forme :

$$\frac{b_1 r_1 \sin. \gamma}{b_0 r_0 \sin \beta} = \frac{V_0}{W_1}$$

dans laquelle le premier membre ne dépend absolument que des dimensions de la turbine.

290. ___ Résumé sur les neuf équations qui précèdent. — Nous avons ainsi obtenu neuf équations générales ; nous les reproduisons dans le tableau suivant :

(1) $V_0^2 = 2g \left[(H + h_0) + \frac{p_\alpha}{\omega} - \frac{p_0}{\omega} \right]$

(2) $\frac{v_0}{V_0} = \frac{\sin (\beta + \theta)}{\sin \theta}$

(3) $W_0^2 = V_0^2 + v_0^2 - 2 V_0 v_0 \cos \beta$

(4) $v_1 = v_0 \frac{r_1}{r_0}$

(5) $W_1^2 = W_0^2 + 2g \left(h_1 + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega} \right) + v_1^2 - v_0^2$

(6) $W_1 = v_1$

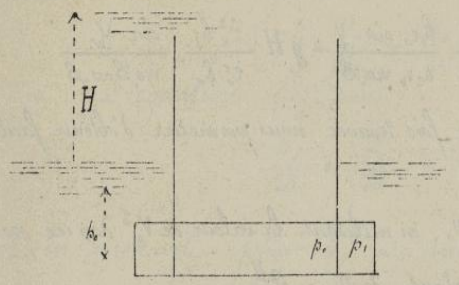
(7) $V_1^2 = 2 v_1^2 (1 - \cos \gamma)$

(8) $\frac{p_1}{\omega} = \frac{p_\alpha}{\omega} + h_0 + h_1$

(9) $\frac{b_1 r_1 \sin \gamma}{b_0 r_0 \sin \beta} = \frac{V_0}{W_1}$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ces neuf équations comprennent un grand nombre de variables :



2 rayons r_0 et r_1
2 largeurs b_0 et b_1
3 angles β, θ et γ
3 hauteurs H, h_0 et h_1
6 vitesses $V_0, v_0, W_0, V_1, v_1, W_1$,
2 pressions p_0 et p_1
1 débit Q

Au total 19 variables, entre lesquelles il n'existe en général que les 9 équations précédentes, le système de ces équations pouvant d'ailleurs être remplacé par tout système équivalent, que l'on obtiendrait par l'élimination entr'elles de quelques unes des variables. Nous chercherons parmi ces systèmes équivalents celui qui mettrait en évidence les valeurs des différentes vitesses en fonction des dimensions de la turbine et des hauteurs.

291. Détermination de toutes les vitesses, en fonction de la hauteur de la chute et des dimensions de la roue.

Pour dégager la valeur de la vitesse V_0, il suffit d'additionner, membre à membre, les 3 équations (1) (3) et (5)

$$V_1^2 + W_0^2 + W_1^2 - W_0^2 = 2g\left(H + h_0 + \frac{p_a}{\omega} - \frac{p_0}{\omega} + h_1 + \frac{p_0}{\omega} - \frac{p_1}{\omega}\right) + V_0^2 + v_0^2 + v_1^2 - v_0^2 - 2V_0 v_0 \cos\beta$$

En réduisant les termes semblables, elle conduit à :

$$W_1^2 - v_1^2 = 2g\left(H + h_0 + h_1 + \frac{p_a}{\omega} - \frac{p_0}{\omega}\right) - 2V_0 v_0 \cos\beta$$

Mais en vertu de l'équation (6) $W_1 = v_1$ et de l'équation (8)

$$h_0 + h_1 + \frac{p_a}{\omega} - \frac{p_1}{\omega} = 0$$

L'équation se réduit donc à :

$$2V_0 v_0 \cos\beta = 2gH \quad \text{ou} \quad V_0 v_0 \cos\beta = gH$$

d'où l'on tirera $$V_0 = \frac{gH}{v_0 \cos\beta} = \frac{gH}{\cos\beta}\,\frac{r_1}{v_1 r_0} = \frac{gH}{W_1 \cos\beta}\,\frac{r_1}{r_0}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et en mettant pour W_1 sa valeur tirée de l'équation (9)

$$[1] \quad V_0^2 = \frac{gH}{\cos^2\beta} \frac{r_1}{r_0} \frac{b_1 r_1 \sin\gamma}{b_0 r_0 \sin\beta} = gH \frac{r_1^2 b_1}{r_0^2 b_0} \frac{\sin\gamma}{\sin\beta\cos\beta}$$

Cette valeur de V_0^2 une fois trouvée, nous permettra d'obtenir facilement toutes les autres.

En ce qui concerne v_0, en utilisant la valeur de V_0^2 donnée par la relation précédente et en partant de $v_0 = \frac{gH}{V_0 \cos\beta}$ on trouve facilement :

$$v_0^2 = \frac{g^2H^2}{V_0^2\cos^2\beta} = \frac{g^2H^2}{\cos^2\beta} \frac{r_0^2}{r_1^2} \frac{b_0}{b_1} \frac{\sin\beta\cos\beta}{gH\sin\gamma}$$

$$[2] \quad v_0^2 = gH \frac{r_0^2}{r_1^2} \frac{b_0}{b_1} \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\gamma}$$

Ces deux vitesses étant connues donneraient la valeur de W_0 au moyen de l'équation (3) à laquelle nous conservons sa première forme.

$$[3] \quad W_0^2 = V_0^2 + v_0^2 - 2 V_0 v_0 \cos\beta.$$

La vitesse v_1 se déduit de l'équation (4)

$$[4] \quad v_1^2 = v_0^2 \frac{r_1^2}{r_0^2} = gH \frac{b_0}{b_1} \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\gamma}$$

L'équation (6) reproduite ici donne :

$$[5] \quad W_1 = v_1$$

Pour obtenir V_1 il faut recourir à l'équation (5) qui, lorsque $W_1 = v_1$ se réduit à :

$$V_1^2 = 2 v_1^2 (1 - \cos\gamma) = 2gH \frac{b_0}{b_1} \frac{\operatorname{tang}\beta(1-\cos\gamma)}{\sin\gamma}$$

et après transformation :

$$[6] \quad V_1^2 = 2gH \frac{b_0}{b_1} \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma$$

292. — **Détermination des pressions.** — Le nouveau système équivalent au système primitif devrait être complété par trois autres équations indépendantes, qui ne contiendrait pas les vitesses et que l'on obtient d'ailleurs assez facilement ainsi qu'il suit :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'équation (8), ne contenant pas les vitesses, formera la septième équation du nouveau système.

$$[7]\quad \frac{p_0}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + h_0 + h_1$$

L'équation (1) donne :

$$\frac{p_0}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + H + h_0 - \frac{V_0^2}{2g}$$

et en mettant pour V_0^2 sa valeur [1]

$$[8]\quad \frac{p_0}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + h_0 + H\left(1 - \frac{b_1}{b_0}\,\frac{r_1^2}{r_0^2}\,\frac{\sin\gamma}{2\sin\beta\cos\beta}\right)$$

Enfin l'équation (3) donne :

$$\frac{\sin(\beta+\theta)}{\sin\theta} = \frac{v_0}{V_0} = \frac{gh}{\cos\beta}\,\frac{1}{V_0^2} = \frac{r_0^2}{r_1^2}\,\frac{b_0}{b_1}\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$[9]\quad \frac{\sin(\beta+\theta)}{\sin\theta} = \frac{r_0^2}{r_1^2}\,\frac{b_0}{b_1}\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Parmi les neuf équations précédentes, la dernière est la seule qui renferme exclusivement certaines dimensions de la roue. Au point de vue d'une roue construite, on doit donc la considérer comme une équation de condition, à laquelle ces dimensions auront à satisfaire, si l'on veut obtenir le meilleur rendement. Il convient en outre que l'angle γ soit aussi petit que possible et que l'angle β ne soit pas très grand.

293. — Tableau des équations modifiées.

Nous réunirons ici les neuf équations qui peuvent ainsi être substituées aux équations primitives.

$$[1]\quad V_0^2 = g\,H\,\frac{b_1}{b_0}\,\frac{r_1^2}{r_0^2}\,\frac{\sin\gamma}{\sin\beta\cos\beta}$$

$$[2]\quad v_0^2 = g\,H\,\frac{b_0}{b_1}\,\frac{r_0^2}{r_1^2}\,\frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\gamma}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$[3]\quad W_0^2 = V_0^2 + v_0^2 - 2 V_0 v_0 \cos\gamma$$

$$[4]\quad v_1^2 = g H \frac{b_0}{b_1} \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\gamma}$$

$$[5]\quad W_1 = v_1$$

$$[6]\quad V_1^2 = 2 v_1^2 (1 - \cos\gamma) = 2 g H \frac{b_0}{b_1} \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma$$

$$[7]\quad \frac{p_1}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + h_0 + h_1$$

$$[8]\quad \frac{p_0}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + h_0 + H\left(1 - \frac{b_1}{b_0}\frac{r_1^2}{r_0^2}\frac{\sin\gamma}{2\sin\beta\cos\beta}\right)$$

$$[9]\quad \frac{\sin(\beta+\theta)}{\sin\theta} = \frac{b_0}{b_1}\frac{r_0^2}{r_1^2}\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Quand on connaît toutes les dimensions d'une turbine, la dernière équation [9] est, ainsi que nous venons de le voir, une équation de condition, les équations [7] et [8] déterminent les pressions à l'entrée et à la sortie de la roue ; les six premières suffisent pour calculer les vitesses.

294. — Débit. — Nous avons déjà établi l'expression du débit, soit à l'entrée, soit à la sortie de la roue ; il est déterminé à la sortie par la vitesse $W_1 = v_1$, qu'il faut appliquer à une section $2\pi r_1 b_1$ inclinée d'un angle γ sur la section droite de chacune des nappes qui remplissent les augets.

On a donc $Q = 2\pi r_0 b_0 \sin\beta V_0$

ou $Q = 2\pi r_1 b \sin\gamma \times v_1$, et en mettant par b_1 sa valeur dans cette dernière expression :

$$[12]\quad Q = 2\pi r_1 \sqrt{g H b_0 b_1 \operatorname{tang}\beta \sin\gamma}$$

On voit que le débit est strictement nul pour $\gamma = 0$; c'est ce qui oblige à donner à l'angle γ une valeur assez grande, d'environ

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

30°, qui a été déterminée par la pratique.

En outre, le débit Q doit être affecté d'un coefficient K pour tenir compte du volume des cloisons qui diminuent les largeurs comprises entre les aubes.

295. — Effet utile et rendement. — Aucune autre perte de travail n'étant prise en considération que celle résultant de la vitesse conservée par l'eau à la sortie de la turbine, le travail effectif a pour mesure :

$$Te = PH - P\frac{V_1^2}{2g} = PH\left(1 - \frac{V_1^2}{2gH}\right)$$

et en mettant pour V_1 la valeur tirée de l'équation [6]

$$[13]\quad Te = PH\left(1 - \frac{b_0}{b_1}\operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma\right)$$

On voit ainsi qu'il y aurait avantage à augmenter b_1 par rapport à b_0, mais cette augmentation doit toujours être très restreinte, et ne pas dépasser beaucoup $b_1 = 1.10\, b_0$, si l'on veut que la nappe d'eau remplisse l'angle formé par l'intervalle de deux aubes, aussi bien à la sortie qu'à l'entrée.

L'effet utile est, d'après le résultat précédent :

$$[14]\quad R = \left(1 - \frac{b_0}{b_1}\operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma\right)$$

296. — Nombre de tours correspondant. — Le nombre de tours n de la turbine par minute est en rapport avec la vitesse de la roue, car on a évidemment :

$$v_0 = 2\pi r_0 \frac{n}{60} \quad \text{ou} \quad v_1 = 2\pi r_1 \frac{n}{60}$$

$$[15]\quad \text{d'où}\quad n = \frac{30\, v_0}{\pi r_0} = \frac{30}{\pi r_0}\sqrt{gH\frac{b_0}{b_1}\frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\gamma}}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

297. — Variations de la vitesse et du débit en cas de variation de la hauteur de chute. — Si pour une turbine déterminée, la hauteur H devenait H' et si l'on désignait par Q' et n' les nouvelles valeurs qui en résulteraient pour n et Q, les formules précédentes reviendraient à :

$$\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{H}{H'}} \; ; \qquad \frac{Q}{Q'} = \sqrt{\frac{H}{H'}}$$

Pour obtenir le maximum d'effet avec la nouvelle chute H' il conviendrait donc de faire varier le débit et le nombre de tours dans le rapport de $\sqrt{\frac{H}{H'}}$, toutes les autres quantités restant d'ailleurs constantes.

298. — Condition spéciale aux turbines noyées. Lorsque la turbine est noyée, il importe que l'eau ne puisse s'échapper ni pénétrer par le jeu qui existe nécessairement entre la couronne des directrices et la roue ; de là une nouvelle condition relativement à $\frac{p_0}{\varpi}$, qui doit nécessairement égaler la pression hydrostatique correspondante, soit $\frac{p_a}{\varpi} + h_0$, et cette relation :

$$\frac{p_a}{\varpi} = h_0 + \frac{p_0}{\varpi},$$

quand on la compare avec l'équation [8], montre que le facteur de H y doit être nul, ce qui revient à :

$$[10] \qquad \frac{b_1}{b_0} \frac{r_1^2}{r_0^2} \frac{\sin \gamma}{2 \sin \beta \cos \beta} = 1$$

condition à laquelle les dimensions de la turbine devront encore satisfaire.

L'équation [9] ainsi que les valeurs des différentes vitesses se simplifient alors d'une manière notable.

299. — Simplifications qui résultent de cette condition dans les diverses équations. — Si dans l'équation [9]

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on met en évidence la fonction qui doit être égale à l'unité, dans le facteur de H de l'équation [7], on trouve :

$$\frac{\sin(\beta+\theta)}{\sin\theta} = \frac{b_0 r_0^2 \sin\beta \times 2\cos\beta}{b_1 r_1^2 \sin\gamma} \times \frac{1}{2\cos\beta} = \frac{1}{2\cos\beta}$$

d'où :

$$\sin\theta = 2\cos\beta \sin(\beta+\theta) = \sin(\beta+\theta+\beta) + \sin(\beta+\theta-\beta)$$
$$= \sin(\theta+2\beta) + \sin\theta$$

ce qui revient à :

$$[9^{bis}] \quad \sin(\theta+2\beta) = 0 \quad \text{et} \quad \theta+2\beta = 180°$$

et cette relation ramène d'ailleurs l'équation [9] à :

$$[10^{bis}] \quad \frac{\sin\gamma}{\sin\theta} = \frac{b_0}{b_1}\frac{r_0^2}{r_1^2}\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\theta)} = \frac{b_0}{b_1}\frac{r_0^2}{r_1^2}\frac{\sin\beta}{\sin(180-\beta)} = \frac{b_0}{b_1}\frac{r_0^2}{r_1^2}$$

$[1^{bis}]$ V_0^2 devient alors $V_0^2 = 2gH$.

$$v_0^2 = gH\frac{b_0}{b_1}\frac{r_0^2}{r_1^2}\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\sin\gamma} \times \frac{\sin\gamma}{2\sin\beta\cos\beta} \times \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\gamma}$$

$[2^{bis}]$ $v_0^2 = \frac{gH}{2\cos^2\beta}$ en remarquant qu'une partie des facteurs du second membre est égale à 1 ;

et par suite de l'égalité entre V_0^2 et $2V_0 v_0 \cos\beta$

$$[3] \quad W_0^2 = V_0^2 + v_0^2 - 2V_0 v_0 \cos\beta = v_0^2$$

Les valeurs des autres vitesses ne donnent lieu à aucune simplification analogue.

Les valeurs de Te et de R peuvent encore se mettre sous une autre forme pour les turbines noyées,

en remarquant que :

$$\frac{b_0}{b_1}\operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{b_0}{b_1}\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \times \frac{b_0}{b_1}\frac{r_1^2}{r_0^2}\frac{\sin\gamma}{2\sin\beta\cos\beta}$$

le facteur introduit dans le second membre étant alors égal à 1. Toutes réductions faites, on trouve que :

$$\frac{b_0}{b_1}\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{r_1^2}{r_0^2}\frac{(1-\cos\gamma)}{2\cos^2\beta}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce qui permet d'écrire :

$$\left[13^{bis}\right] \quad Te = PH\left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\,\frac{1-\cos\gamma}{2\cos^2\beta}\right)$$

$$\left[14^{bis}\right] \quad R = 1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\,\frac{1-\cos\gamma}{2\cos^2\beta}$$

Voici d'ailleurs le tableau des 15 équations que l'on a modifiées pour le cas des turbines noyées :

(1) $V_0^2 = 2gH$

(2) $v_0^2 = \frac{gH}{2\cos^2\beta}$

(3) $W_0 = v_0$

(4) $v_1 = v\frac{r_1}{r_0}$

(5) $W_1 = v_1$

(6) $V_1^2 = 2gH\frac{b_0}{b_1}\operatorname{tang}\beta\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma$

(7) $\frac{p_1}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + h_0 +$, avec la condition $h_1 = 0$

(8) $\frac{p_0}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + h_0$

(9) $2\beta + \theta = 180°$

(10) $\frac{\sin\gamma}{\sin\theta} = \frac{b_0}{b_1}\,\frac{r_0^2}{r_1^2}$ ou $\frac{\sin\gamma}{\sin 2\beta} = \frac{b_0}{b_1}\,\frac{r_0^2}{r_1^2}$

(11) $h_1 = 0$ ou $r_1 = r_0$

(12) $q = 2\pi b_0 r_0 \sin\beta\sqrt{2gH} = 2\pi r_1\sqrt{gH b_0 b_1 \operatorname{tang}\beta \sin\gamma}$

(13) $Te = PH\left(1 - \frac{b_0}{b_1}\operatorname{tang}\beta\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma\right)$

(14) $R = 1 - \frac{b_0}{b_1}\operatorname{tang}\beta\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma$

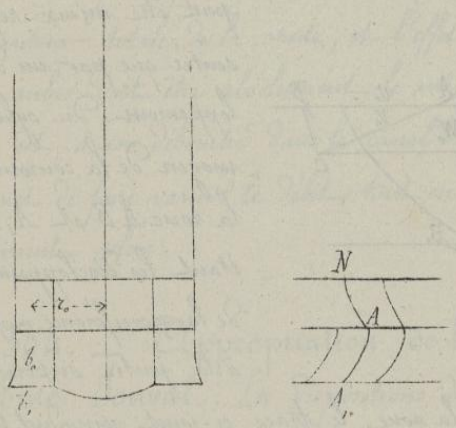
(15) $n = \frac{30}{\pi r_0\cos\beta}\sqrt{\frac{gH}{2}}$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

300.— Problèmes sur les turbines.— Les principaux problèmes que l'on peut avoir à resoudre sur les turbines consistent dans la recherche des conditions du maximum d'effet d'une turbine déjà établie, conditions qui peuvent d'ailleurs être vérifiées par une série d'experiences au frein et de jaugeage bien conduites, et dans l'établissement d'une turbine destinée à une chute déterminée.

Ces deux problèmes seront successivement examinés dans leurs principaux éléments, mais il y a lieu, sous ce rapport, à distinguer entre les turbines noyées et les turbines non noyées.

301.— Turbine Fontaine.— La disposition de la turbine Fontaine se rapproche davantage de celle d'Enler. Les directrices NA sont disposées encore au fond de la cuve, mais elles ne règnent qu'entre les parois d'un anneau vertical qui correspond aux bords de cette cuve cylindrique, et forment chacune de petites surfaces hélicoïdes à génératrices horizontales passant par l'axe; après avoir reçu l'eau à la partie supérieure N, elles la perdent à un niveau un peu inférieur A, au dessus d'une autre couronne AA, dont les aubes sont disposées en sens inverse et qui conduisent l'eau de haut en bas, en glissant entre ces nouvelles surfaces helicoïdes.

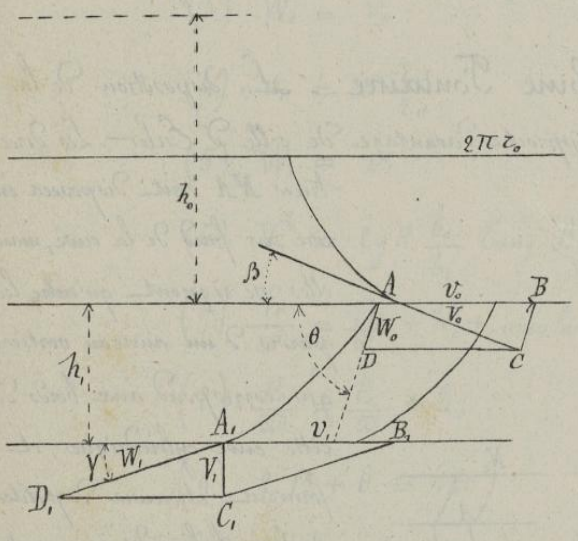


La roue qui porte seulement ces dernières aubes est également reliée à l'arbre vertical, mais cet arbre creux qui est guidé par le bas, ne prend véritablement son point d'appui,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

suivant l'ingénieuse disposition que l'on doit à M. Arson, sur un support central s'élevant hors de l'eau, ce qui facilite beaucoup le graissage, d'autant plus nécessaire, du pivot, que la roue est quelquefois très lourde et très rapide.

302.— Appropriation de la théorie générale à la turbine Fontaine. Bien que toutes les formules aient été établies sur des figures qui se rapportent à la turbine Fourneyron, il est facile de voir qu'elles sont également applicables à la turbine Fontaine, dont la disposition ne peut être mieux représentée que par un développement du cylindre moyen de la couronne de la roue. AB et A_1B_1 étant les développements de la circonférence moyenne à la partie supérieure et à la partie inférieure de la roue, le tracé ci-joint reproduit toutes les notations caractéristiques et montre que les mêmes formules répondent aux diverses circonstances que nous avons précédemment analysées.

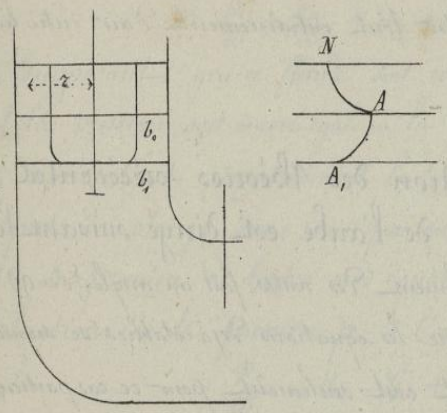


Il faudra seulement faire $r_1 = r_0$ tandis que, pour la turbine Fourneyron, $h_1 = 0$.

303.— Turbine Jonval. — Dans la turbine Jonval, la couronne des directrices et la roue sont disposées de la même façon

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que dans la turbine Fontaine, mais l'ensemble de ces organes, au lieu d'être placé vers le fond de la cuve, près du niveau du bief d'aval, est au contraire établi à la partie supérieure de cette cuve, très-peu au dessous du niveau du bief d'amont. Il en résulte que l'arbre est très court et que la visite de la roue, ainsi que le graissage sont grandement facilités.



La cuve se prolongeant jusque dans l'eau d'aval où elle est noyée, la vitesse de l'eau à l'entrée du tuyau, formant cuve est encore celle qui correspond à la hauteur totale de la chute, et l'effet dynamique qu'elle produit sur les aubes doit être absolument le même: A la partie inférieure, le tuyau est, à son débouché dans le canal de décharge, muni d'un vannage qui permet de faire varier le débit tout en maintenant le tuyau constamment plein.

304. — Appropriation de la théorie générale à la turbine Jouval.. Les dispositions de la Turbine Jouval, qui est toujours noyée, comportent évidemment les mêmes équations et la même figure que la turbine Fontaine. Il n'y a d'autre différence que celle qui résulte de ce que la hauteur h_0 est nécessairement négative, et doit être assez petite en valeur absolue pour que la continuité de la nappe soit complètement assurée. Il faut et il suffit pour cela que, par suite de la relation $\frac{p_0}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} - h_0$, la pression p_0 ne pouvant être négative, toujours on ait $h_0 < \frac{p_a}{\varpi}$ En réalité il convient de rester bien en deçà de cette limite et de ne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pas dépasser pour cette variable une hauteur de 6 à 8 mètres.

La couronne des directrices doit en outre être immergée d'au moins 0m.50 à 0.60, pour éviter tout entraînement d'air entre les aubes par voie d'aspiration.

305.— Simplification des théories précédentes lorsque le premier élément de l'aube est dirigé suivant le rayon. Lorsque le premier élément des aubes fait un angle de 90° avec la circonférence de la couronne les équations déjà établies se simplifient d'une manière notable et c'est seulement pour ce cas particulier que nous nous proposons d'établir le parallèle entre la théorie des turbines et celle des pompes ventilateurs. On a alors:

$$V_0^2 = 2g\left(H_0 - \zeta_0 + \frac{p_a}{\varpi} - \frac{p_0}{\varpi}\right)$$

$$v_0 = V_0 \cos\beta$$

$$W_0 = v_0 \operatorname{tang}\beta$$

$$W_1^2 - W_0^2 = 2g\left(\frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}\right) + v_1^2 - v_0^2$$

ou en faisant $v_1 = v_0 \frac{r_1}{r_0} = m\, v_0$

$$W_1^2 - W_0^2 = 2g\left(\frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}\right) + (m^2 - 1)\, v_0^2$$

$$V_1^2 = W_1^2 + v_1^2 - 2\, W_1\, v_1 \cos\gamma$$

L'équation générale du débit

$$Q = 2\pi r_1 b_1 W_1 \sin\gamma = 2\pi r_0 b_0 V_0 \sin\beta$$

peut d'ailleurs se décomposer en deux autres

$$Q = 2\pi r_1 b_1 W_1 \sin\gamma$$

$$\sin\beta = \frac{r_1}{r_0}\frac{b_1}{b_0}\frac{W_1}{V_0}\sin\gamma \quad \text{qui revient à}$$

$$\operatorname{tang}\beta = m\frac{b_1}{b_0}\frac{W_1}{v_0}\sin\gamma$$

Et si maintenant nous voulons représenter le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mouvement du fluide à l'aval du volant, nous avons l'équation générale :

$$\frac{p_1}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + H_1 + \zeta_1$$

en supposant que ce fluide soit conduit jusqu'à un milieu dans lequel la pression soit encore égale à la pression atmosphérique ; H_1 et ζ_1 représentant respectivement la hauteur d'élévation du fluide et la perte de charge dans son parcours à l'aval.

La première de toutes nos équations peut fournir aussi une évaluation de la pression p_0 à l'entrée :

$$\frac{p_0}{\varpi} = H_0 - \zeta_0 + \frac{p_a}{\varpi} - \frac{V_0^2}{2g}$$

Déjà nous avons la valeur du débit Q ; nous obtiendrons le nombre de tours n, par la relation : $\frac{n}{60} \times 2\pi r_0 = v_0$ d'où $n = v_0 \times \frac{30}{\pi r_0}$

306. – Simplification et spécialisation des équations. –

L'ensemble des équations précédentes tenant compte de toutes les circonstances du mouvement depuis l'amont jusqu'à l'aval, constitue le système sur lequel repose la théorie des appareils à force centrifuge, mais nous chercherons à simplifier ces équations avant de les discuter.

Si dans l'équation W_1^2, nous mettons à la place des hauteurs dues aux pressions, leurs valeurs telles qu'elles viennent d'être établies, on peut écrire :

$$W_1^2 = W_0^2 + 2g\left[\left(H_0 - \zeta_0 + \frac{p_a}{\varpi} - \frac{V_0^2}{2g}\right) - \left(\frac{p_a}{\varpi} + H_1 + \zeta_1\right)\right] + v_1^2 - v_0^2$$

ou, en réduisant les termes semblables et en exprimant les différentes vitesses en fonction de v_0^2 :

$$W_1^2 = 2g\left(H_0 - \zeta_0 - H_1 - \zeta_1\right) + v_0^2\left(\tang^2\beta - \frac{1}{\cos^2\beta} + m^2 - 1\right)$$

$$= 2gH - v_0^2\left(2 - m^2\right)$$

la hauteur $H = H_0 - \zeta_0 - H_1 - \zeta_1$ représentant la somme des hauteurs

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

effectives et des pertes de charge :

W_1^2 doit être une quantité positive et H étant toujours, dans les turbines, plus grand que 0, il faudra nécessairement que V_0^2 satisfasse à la condition.

$$v_0^2 < \frac{2gH}{2-m^2}$$, inégalité que nous pourrons transformer en l'équation :

$$V_0^2 = \frac{2gH}{2-m^2+a^2}$$

a^2 étant une indéterminée qui suffira, quelle que soit sa valeur positive, pour satisfaire à l'inégalité précédente, et qui va nous permettre de simplifier beaucoup nos principales équations.

Il vient alors en effet :

$$W_1^2 = 2gH - 2gH\frac{2-m^2}{2-m^2+a^2} = a^2 v_0^2$$

et par suite :

$$V_1^2 = V_0^2\left(a^2+m^2-2am\cos\gamma\right)$$

307. — **Rendement**. Le rendement prend une expression différente suivant qu'il s'agit d'une machine motrice ou d'une machine destinée à déterminer le déplacement du fluide, auquel cas nous dirons d'une manière générale, que la machine agit à la manière d'une pompe.

Dans le premier cas, celui des turbines, H se réduit à H_0, et la hauteur de chute motrice H correspond à un rendement $R = \frac{H-\frac{V_1^2}{2g}}{H} = 1-\frac{V_1^2}{2gH}$; le travail moteur Tm étant alors représenté par πH et le travail Te disponible par $\pi H \times R$.

308. — **Observation sur la vitesse du fluide à la sortie du volant**. Cette évaluation du rendement suppose que la vitesse V_1 du fluide, à la sortie du volant, est absolument perdue pour l'effet utile et c'est bien ce qui arrive toujours dans les turbines.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

309. — Condition du maximum d'effet utile. Toutes les dispositions étant prises pour éviter les pertes de charge qui ne sont pas inhérentes à l'effet à produire, on considère généralement la seule perte de travail qui correspond à la vitesse perdue V_1 à la sortie du volant et c'est la valeur de $\frac{V_1^2}{2gH}$ que l'on s'attache à rendre minimum.

Pour cela nous pouvons disposer de la variable a, en lui attribuant la valeur qui rendra nulle la dérivée $\frac{\partial \frac{V_1^2}{2gH}}{\partial a}$; on obtient ainsi pour condition commune aux trois genres de turbines

$$(2 - m^2 + a^2)(2a - 2m\cos\gamma) - (a^2 + m^2 - 2am\cos\gamma)\,2a = 0$$

ce qui revient, par la résolution de cette équation, à :

$$a = \frac{m^2 - 1 \pm \sqrt{(m^2-1)^2 - m^2(m^2-2)\cos^2\gamma}}{m\cos\gamma}$$

Cette valeur de a est toujours rationnelle quel que soit m, mais nous verrons ultérieurement que le signe + ne convient qu'aux turbines et le signe — qu'aux pompes et aux ventilateurs.

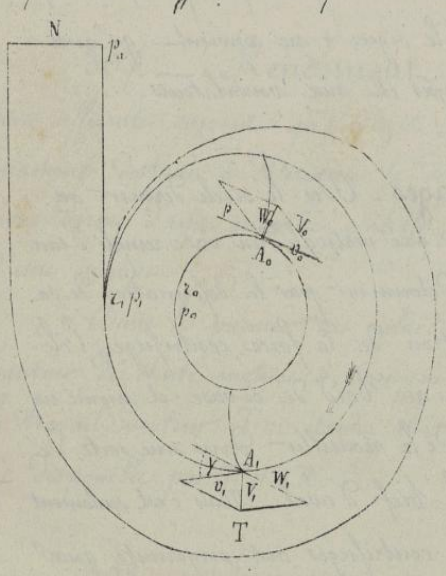
310. — Pompes centrifuges. Dès le siècle dernier on avait employé la rotation autour d'un axe vertical d'un vase rempli d'eau jusqu'à une certaine hauteur, pour déterminer par la déformation de sa surface de niveau, par suite de l'action de la force centrifuge, l'élévation continue de cette eau jusqu'au bord de ce vase et même un peu au-dessus, ce qui permettrait de la recueillir dans une sorte de couronne fixe, constituant ainsi le bief d'aval. Mais c'est seulement à partir de 1850 que les pompes centrifuges ont emprunté aux turbines leur volant à aubes courbes ; l'eau s'y introduisait par un œil au centre, garni de quelques parois formant des directrices incomplètes et rejetée, à l'extérieur du volant, par cette même action de la force centrifuge, elle s'écoulait par un

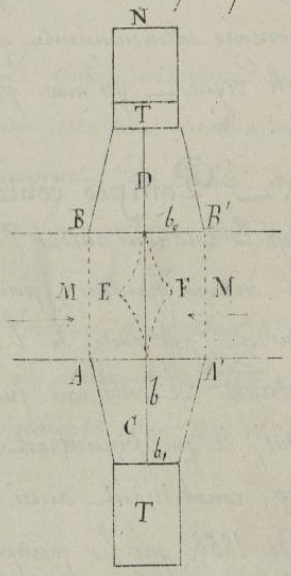
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tuyau ascensionnel établi en prolongement du canal annulaire qui entourait le volant. L'appareil ainsi construit rappelle les dispositions de la turbine Fourneyron dont l'axe serait horizontal et avec addition de ce canal et du tuyau par lequel se fait, à une certaine hauteur, l'évacuation.

Toutefois les arbres ou palettes sont quelquefois plans et le tambour dans lequel elles se meuvent sans en toucher les parois doit en épouser le profil avec la plus grande exactitude. Nous verrons ultérieurement que les ventilateurs sont, pour la plupart, construits de la même façon.

311. – Théorie des pompes centrifuges. Nous nous proposons de présenter à l'aide des notations suivantes, sous une forme analogue à la précédente, la théorie des pompes à force centrifuge.





L'organe qui reçoit directement l'action de la puissance motrice est une volant à force centrifuge, analogue à celui de la turbine Fourneyron.

Le fluide y pénètre par un orifice circulaire dont le rayon r_0 est le même que celui du cylindre au pourtour duquel

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les ailettes sont symétriquement distribuées. Ce volant, dont les ailettes ont une longueur $r_1 - r_0$ dans le sens du rayon est presque toujours fixé sur un arbre horizontal et l'on y retrouve toutes les particularités de celui de la turbine.

Les aubes sont disposées de manière que les deux vitesses v_0 et V_0 du volant et du fluide au moment où il pénètre entre les ailettes, aient pour résultante une vitesse W_0 dirigée suivant le premier élément de l'aube, dont l'angle avec la direction tangentielle de v_0 sera désigné par β.

A la sortie du volant les deux vitesses v_1 et W_1 permettent au fluide de quitter l'aube avec une vitesse absolue V_1 déterminée par l'angle γ de v_1 et W_1. Toutes les notations relatives au volant sont d'ailleurs les mêmes que celles de la théorie des turbines, b_0 et b_1 étant les largeurs respectives du volant à l'entrée et à la sortie, p_0 et p_1 les pressions correspondantes.

Si le volant était placé horizontalement les valeurs de toutes ces quantités seraient les mêmes sur toute la périphérie du volant, mais les différences de niveau y sont assez faibles pour qu'on puisse les négliger, ce qui revient, au point de vue théorique, à supposer le volant horizontal.

Le fluide y peut pénétrer soit par un seul oeil ou ouïe AB, ou mieux par deux orifices semblablement disposés AB, $A'B'$; dans ce dernier cas, on peut avec avantage établir une cloison médiane CD servant de base à des renflements EF, ayant pour but de déterminer, à la manière des directrices, la déviation régulière des filets fluides en amont des augets. La cloison sert ainsi à éviter les chocs qui ne manqueraient pas de se produire, dans les pompes, entre les deux nappes introduites simultanément par les deux oeils opposés; des conduits d'amenée ou d'aspiration y aboutissent et nous désignerons par H_0 la hauteur d'aspiration à laquelle le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fluide est ainsi élevé jusqu'au plan de la cloison supposée horizontale, cette hauteur pouvant d'ailleurs être nulle ou même négative dans certaines applications.

Le fluide refoulé par le volant doit, en général, être recueilli dans un tambour qui entoure exactement le volant et qui est prolongé par une conduite de refoulement dont le niveau de sortie sera à une hauteur H_1 au-dessus du plan moyen de la turbine. Nous désignerons, en outre, par ζ_0 et ζ_1 les pertes de charge dans la conduite d'aspiration et dans celle de refoulement.

Toutes les notations que nous venons d'indiquer sont précisément celles qui nous ont servi dans la théorie des turbines.

311. — Application de la théorie des turbines à celle des pompes centrifuges. — Nous ne ferons ici cette adaptation que pour le cas où l'angle θ est droit, de sorte les formules fondamentales peuvent être empruntées au N.° 304. On a ainsi, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans de nouvelles explications

$$V_0^2 = 2g\left(H_0 - \zeta_0 + \frac{p_a}{\varpi} - \frac{p_0}{\varpi}\right)$$

$$v_0 = V_0 \cos\beta$$

$$W_0 = V_0 \operatorname{tang}\beta$$

$$W_1^2 - W_0^2 = 2g\left(\frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}\right) - \left(m^2 - 1\right) v_0^2$$

$$V_1^2 = W_1^2 + v_1^2 - 2 W_1 v_1 \cos\gamma$$

$$Q_1 = 2\pi r_1 b_1 W_1 \sin\gamma$$

$$\operatorname{tang}\beta = m \frac{b_1}{b_0} \frac{W_1}{v_0} \sin\gamma$$

$$\frac{p_1}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + H_1 + \zeta_1$$

$$\frac{p_0}{\varpi} = H_0 - \zeta_0 + \frac{p_a}{\varpi} - \frac{V_0^2}{2g}$$

$$n = v_0 \times \frac{30}{\pi r_0}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si dans l'équation en W_1^2, nous mettons à la place des hauteurs dues aux pressions leurs valeurs, telles qu'elles résultent de l'ensemble de ces équations, on trouve immédiatement, comme pour les turbines,

$$W_1^2 = 2gH - v_0^2 (2 - m^2)$$

la hauteur $H = H_0 - \xi_0 - H_1 - \xi_1$ représentant encore la somme des hauteurs effectives et des pertes des charges ; mais ici cette hauteur H étant essentiellement négative nous la représenterons par $-H'$ ce qui conduit à

$$W_1^2 = -2gH' + v_0^2 (m^2 - 2)$$

d'où pour exprimer que W_1^2 doit être positif la nouvelle condition

$$v_0^2 > \frac{2gH'}{m^2 - 2}$$

ou en introduisant dans cette inégalité une nouvelle indéterminée a^2

$$v_0^2 = \frac{2gH'}{m^2 - 2 - a^2}$$

Dans ce cas spécial, on a comme précédemment,

$$W_1^2 = -2gH' + 2gH' \frac{m^2 - 2}{m^2 - 2 - a^2} = 2gH' \frac{a^2}{m^2 - 2 - a^2} = a^2 v_0^2$$

et pour la valeur de V_1^2

$$V_1^2 = v_0^2 (a^2 + m^2 - 2am \cos \gamma)$$

313. — **Rendement et conditions du maximum d'effet.** Il convient tout d'abord de faire remarquer qu'en considérant comme perte le travail dû à la vitesse finale, nous écartons les pompes à incendie, la disposition du volant centrifuge ne se prêtant pas à cette destination.

En dehors de cette exception, la hauteur H' d'élévation, et la vitesse V_1 perdue à la sortie, conduisent à la valeur

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$R = \frac{H'}{H' + \frac{V_1^2}{2g}} = \frac{1}{1 + \frac{V_1^2}{2g H'}}$$

et l'expression de ce rendement est essentiellement différente de celle que nous avons trouvée pour les turbines.

Si cependant on cherche à déterminer la valeur de a par laquelle la dérivée $\frac{d V_1^2}{d a} = 0$ on trouvera encore comme pour les turbines

$$a = \frac{m^2 - 1 - \sqrt{(m^2-1)^2 - m^2 (m^2 - 2) \cos^2 \gamma}}{\cos \gamma}$$

la seule différence à signaler consistant en ce que le signe — est le seul qui soit admissible devant le radical.

C'est ce rapprochement entre les deux conditions du maximum du rendement pour les turbines et pour les pompes centrifuges qui nous a engagé à en poursuivre les déductions simultanément pour les deux genres d'appareils.

314. — Système général des équations. En récapitulant les diverses équations distinctes qui ont été successivement établies nous en formerons, ainsi qu'il suit, le tableau comparatif dans lequel les hauteurs H et H' sont respectivement positive et négative suivant qu'il s'agit d'une turbine ou d'une pompe centrifuge.

Tableau comparatif.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Turbines	Pompes Centrifuges.
(0) $H = H_0 - \mathcal{G}_0 - H_1 - \mathcal{G}_1$ essentiellement positif	(0) $H' = -(H_0 + \mathcal{G}_0 + H_1 + \mathcal{G}_1)$ essentiellement négatif
(1) $v_0^2 = \dfrac{2gH}{2 - m^2 + a^2}$	(1) $v_0^2 = \dfrac{2gH'}{m^2 - 2 - a^2}$
(2) $V_0 = v_0 \dfrac{1}{\cos \beta}$	.....
(3) $W_0 = v_0 \operatorname{tang} \beta$	.....
(4) $v_1 = m\, v_0$	.....
(5) $W_1 = a\, v_0$	.....
(6) $V_1^2 = 2gH \dfrac{a^2 + m^2 - 2am\cos\gamma}{2 - m^2 + a^2}$	(6) $V_1^2 = 2gH' \dfrac{a^2 + m^2 - 2am\cos\gamma}{2 - m^2 + a^2}$
(7) $\dfrac{p_1}{\varpi} = \dfrac{p_a}{\varpi} + H_1 + \mathcal{G}_1$	.....
(8) $\dfrac{p_0}{\varpi} = H_0 - \mathcal{G}_0 + \dfrac{p_a}{\varpi} - \dfrac{v_0^2}{2g\cos^2\beta}$	.....
(9) $\operatorname{tang}\beta = \dfrac{r_1}{r_0}\dfrac{b}{b_0}\, a \sin\gamma$	.....
(12) $Q = 2\pi r_1 b_1 a v_0 \sin\gamma$	.....
(13) $T_e = PH\left(1 - \dfrac{V_1^2}{2gH}\right) = P\left(H - \dfrac{V_1^2}{2g}\right)$	(13) $T_m = PH'\left(1 + \dfrac{V_1^2}{2gH'}\right) = P\left(H' + \dfrac{V_1^2}{2g}\right)$
(14) $R = 1 - \dfrac{V_1^2}{2gH} = \dfrac{2m^2 - 2 - 2am\cos\gamma}{m^2 - 2 - a^2}$	(14) $R' = \dfrac{1}{1 + \dfrac{V_1^2}{2gH'}} = \dfrac{m^2 - 2 - a^2}{2m^2 - 2 - 2am\cos\gamma}$
(15) $n = \dfrac{30}{\pi r_0} v_0$	.....
(16) $a = \dfrac{m^2 - 1 + \sqrt{(m^2-1)^2 - (m^2-2)m^2\cos^2\gamma}}{m\cos\gamma}$	(16) $a = \dfrac{m^2 - 1 - \sqrt{(m^2-1)^2 - (m^2-2)m^2\cos^2\gamma}}{m\cos\gamma}$

315. ____ Equations conjuguées. On remarquera que la plupart des équations finales expriment isolément la valeur d'une des variables en fonction de v_0 ; on doit considérer celles qui présentent cette

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

particularité comme en quelque sorte indépendantes du système général, et, pour résoudre les problèmes relatifs à l'emploi ou à la construction des divers appareils à force centrifuge, dans toute leur généralité, nous n'avons, en dehors d'elles que cinq équations conjuguées; ce sont les suivantes :

Turbines	Pompes Centrifuges.
(1) $V_o^2 = \frac{2gH}{2-m^2+a^2}$	$V_o^2 = \frac{2gH'}{m^2-2-a^2} = \frac{2gH}{2-m^2+a^2}$
(9) $\operatorname{tang}\beta = \frac{r_1 b_1}{r_o b_o} a \sin\gamma$	$\operatorname{tang}\beta = \frac{r_1 b_1}{r_o b_o} a \sin\gamma$
(16) $a = \frac{m^2-1+\sqrt{(m^2-1)^2-(m^2-2)m^2\cos^2\gamma}}{m\cos\gamma}$	$a = \frac{m^2-1-\sqrt{(m^2-1)^2-(m^2-2)m^2\cos^2\gamma}}{m\cos\gamma}$
(12) $Q = 2\pi r_1 b_1 a v_o \sin\gamma$	$Q = 2\pi r_1 b_1 a v_o \sin\gamma$
(14) $R = \frac{2m^2-2-2am\cos\gamma}{m^2-2-a^2}$	$R = \frac{m^2-2-a^2}{2m^2-2-2am\cos\gamma}$

Dans toutes les questions de ce genre le rendement R doit toujours être positif et plus petit que 1, et l'on peut s'étonner, à ce point de vue, que les expressions de R paraissent inverses l'une de l'autre, ce qui semblerait indiquer que, quand l'une des valeurs est plus petite que 1, l'autre est nécessairement plus grande que l'unité et par conséquent inadmissible.

Mais cette difficulté n'est qu'apparente en ce que, parmi les deux valeurs de a, c'est seulement celle que l'on calcule avec le signe + qui convient, pour le motif qui vient d'être indiqué, à la question des machines motrices, le signe − devant être exclusivement réservé pour les machines élévatoires, que nous continuerons à désigner sous le nom générique de pompes centrifuges.

316. — Variables engagées dans les équations

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

conjuguées. — Ces cinq équations comportent 11 variables :

1 vitesse v_0

1 hauteur H

2 angles β et γ

4 dimensions linéaires $r_0, r_1 = m\, r_0, b_0, b_1$

1 débit Q

1 variable a correspondant à la condition du rendement maximum

1 rendement R qui devient maximum pour cette valeur de la variable a, et, si dans un problème donné on parvient à fixer la valeur de ces 11 quantités, toutes les autres variables seront données directement par les équations isolées, que nous avons, pour cette raison, omises dans la dernière énumération.

Parmi les 11 variables que nous avons conservées dans les cinq équations conjuguées, six, à savoir : $H, \gamma, r_0, m, b_0, b_1$, sont toujours données lorsqu'il s'agit d'une machine construite, et il n'y a plus dès lors qu'à déterminer les 5 autres variables v_0, a, β, Q et R au moyen des 5 équations finales. Le problème est toujours déterminé lorsqu'il consiste dans la détermination de ces dernières variables, c'est-à-dire dans la désignation du mode d'emploi de la machine construite. On remarquera que nous considérons ici l'angle β comme une inconnue qui dépend en réalité du débit qui se fait par la section droite des augets.

Dans le cas d'une machine à construire on ne connaît en général que Q et H ; il y a ainsi 9 variables à déterminer au moyen de 5 équations seulement ; le problème est alors indéterminé et ne peut être résolu qu'en choisissant arbitrairement les valeurs de quatre des inconnues ou en s'imposant quatre conditions équivalentes.

317. — Turbines. — La théorie générale des turbines se trouve réduite aux cinq équations suivantes :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$(1)\quad V_0^2 = \frac{2gH}{2-m^2+a^2}$$

$$(9)\quad \text{Tang.}\beta = \frac{r_1 b_1}{r_0 b_0}\, a \sin\gamma$$

$$(16)\quad a = \frac{m^2-1+\sqrt{(m^2-1)^2-(m^2-2)m^2\cos^2\gamma}}{m\cos\gamma}$$

$$(12)\quad Q = 2\pi r_1 b_1 a v_0 \sin\gamma = 2\pi r_0 b_0 v_0 \frac{\sin\gamma}{\cos\beta}$$

$$(14)\quad R = \frac{2m^2-2-2am\cos\gamma}{m^2-2-a^2}$$

1° Turbine construite. — Puisque la turbine est construite, on connaît γ, r_0, m, b_0, b_1, et il faut déterminer pour une hauteur H : v_0, a, Q et R de manière à obtenir le meilleur rendement.

a est donné par l'équation (16) puis R par l'équation (14).

D'après la valeur de H, v_0 est déterminé par l'équation (1), puis Q par l'équation (12) et β par l'équation (9) ; aucune élimination n'est nécessaire et le problème se résout sans difficulté.

2° Turbine à construire ; On ne connaît plus que H et Q, et il faut trouver les valeurs des 9 autres variables.

On pourrait, pour ramener la question à la précédente, se donner arbitrairement γ, m, b_0, b_1, et la question ne différerait alors de la première qu'en ce que Q et r_0 alterneraient comme inconnues, dans l'ensemble des deux problèmes ; a serait de même donné par l'équation (16) puis R et β, par les équations (14) et (9). r_0 s'obtiendrait ensuite de l'équation (12) dans laquelle on a remplacé V_0 par sa valeur en fonction de v_0.

Il ne nous reste donc qu'à indiquer les considérations en vertu desquelles on aura pu choisir les quatre données γ, m, b_0 et b_1.

Si γ était nul, la valeur de a deviendrait :

$$a = \frac{m^2-1+\sqrt{(m^2-1)^2 m^2 (m^2-2)}}{m} = m$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et par suite :

$$R = \frac{2m^2 - 2 - 2am\cos\gamma}{m^2 - 2 - a^2} = 1$$

Mais alors l'eau ne sortirait plus de la turbine, ainsi que le montre la valeur de Q qui devient nulle dans cette hypothèse.

Il est avantageux de s'approcher de cette limite, en laissant cependant à γ une valeur compatible avec l'échappement facile de l'eau.

C'est ce qui nous a engagé à calculer, pour différents angles et pour différentes valeurs de m, la fonction a et la fonction R ;

$$R = \frac{2m^2 - 2 - 2am\cos\gamma}{m^2 - 2 - a^2}$$

Ces valeurs se trouvent inscrites dans le tableau suivant :

Tableau des Valeurs calculées des variables a et R pour les Turbines.

$\cos\gamma =$		0.70	0.85	0.90	0.95	0.98	1.00
$\gamma =$		45°	31°40	25°51	18°12	11°29	0°
Valeurs de $a = \frac{m^2 - 1 + \sqrt{(m^2-1)^2 - (m^2-2)m^2\cos^2\gamma}}{m\cos\gamma}$							
$m =$ 1.00	$a =$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$m^2 =$ 2.00		2.030	1.664	1.571	1.489	1.439	1.414
$m =$ 1.50		2.270	1.824	1.705	1.598	1.539	1.500
2.00		3.753	2.824	2.548	2.285	2.116	2.000
2.50		5.180	3.838	3.426	3.014	2.729	2.500
3.00		6.550	4.830	4.297	3.755	3.359	3.000
4.00		9.191	6.760	6.000	5.220	4.632	4.000
Valeurs de $R = \frac{2m^2 - 2am\cos\gamma}{m^2 - 2 - a^2}$							
$m =$ 1.00		0.700	0.850	0.900	0.950	0.980	1.000
$m^2 =$ 2.00		0.490	0.723	0.810	0.900	0.960	1.000
$m =$ 1.50		0.462	0.699	0.793	0.891	0.956	1.000
2.00		0.374	0.597	0.706	0.836	0.926	1.000
2.50		0.338	0.554	0.657	0.789	0.900	1.000
3.00		0.326	0.529	0.634	0.761	0.875	1.000
4.00		0.304	0.504	0.600	0.730	0.848	1.000

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous voyons par ce tableau que, pour le même angle γ, il est plus avantageux de prendre $m = 1.00$, ce qui a lieu seulement dans la turbine Fontaine ou très voisin de 1.00, comme on l'observe en général dans toutes les turbines Fourneyron.

Les variables $\cos\gamma$ et m étant choisies d'après les indications de ce tableau, il n'y a plus d'arbitraire que pour les valeurs de b_0 et de b_1.

318. — Pompes centrifuges. — Le système des cinq équations conjugées diffère du précédent par la seule équation (14).

$$(1)\qquad V_0 = \frac{2gH'}{m^2 - 2 - a^2} = \frac{2gH}{2 - m^2 + a^2}$$

$$(9)\qquad \text{Tang.}\,\beta = \frac{r_1 b_1}{r_0 b_0}\, a \sin\gamma$$

$$(16)\qquad a = \frac{m^2 - 1 - \sqrt{(m^2-1)^2 - (m^2-2)\, m^2 \cos^2\gamma}}{m\cos\gamma}$$

$$(12)\qquad Q = 2\pi r_1 b_1 a v_0 \sin\gamma$$

$$(14)\qquad R = \frac{m^2 - 2 - a^2}{2m^2 - 2 - 2am\cos\gamma}$$

Les deux problèmes principaux se résolvent exactement de la même façon et en se servant des équations dans le même ordre.

Nous avons calculé de même les différentes valeurs de a et de R, pour différents angles et différents rapports m.

Tableau des valeurs calculées.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Tableau des Valeurs calculées des variables a et R pour les pompes centrifuges.

Cos γ	0.70	0.85	0.90	0.95	0.98	1.00
γ	45°	31°40	25°51	18°12	11°29	0°

Valeurs de $a = \dfrac{m^2 - 1 - \sqrt{(m^2-1)^2 - (m^2-2)\, m^2 \cos^2\gamma}}{m \cos\gamma}$

m = 1.50 a =	0.109	0.137	0.147	0.156	0.162	0.167
2.00	0.533	0.706	0.785	0.872	0.944	1.000
2.50	0.821	1.104	1.245	1.406	1.556	1.700
3.00	1.069	1.444	1.629	1.859	2.083	2.333
4.00	1.524	2.064	2.333	2.674	3.021	3.500

Valeurs de $R = \dfrac{m^2 - 2 \cdot a^2}{2m^2 - 2 - 2am\cos\gamma}$

m = 1.50 R =	0.105	0.107	0.109	0.110	0.111	0.111
2.00	0.381	0.410	0.437	0.462	0.482	0.500
2.50	0.468	0.535	0.551	0.584	0.636	0.685
3.00	0.500	0.569	0.595	0.655	0.709	0.780
4.00	0.526	0.610	0.648	0.718	0.772	0.825

Il est avantageux de prendre de grandes valeurs de m, en même temps que l'on fait γ = 20° au maximum, quand les aubes sont courbes

319.— Disposition du tambour. — Le tambour qui reçoit le fluide débité par le volant et le conduit jusqu'à l'entrée du tuyau de refoulement doit, autant que possible, maintenir ce fluide à une pression et à une vitesse constantes pour que tout soit symétrique autour de l'axe. Pour cela, on lui donne une forme cylindrique, dont la hauteur soit à peu près égale à la largeur b_1 des ailettes à la sortie. Quant au profil transversal, il doit être tangent à circonférence décrite par les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ailettes pour que le fluide ne soit pas indéfiniment entraîné dans le mouvement de rotation, et à partir de ce point de tangence, la hauteur restant constante, il faudra que la largeur augmente proportionnellement à l'arc compté à partir du point de contact, ce qui revient à dire que la section droite du tambour sera une spirale tracée à partir du point de contact. V_1 étant la vitesse absolue du fluide le débit total, pour toute la circonférence, sera $Q = b_1 L V_1$ en désignant par b_1 et L les deux dimensions transversales du tuyau de refoulement auquel le cylindre se raccorde, ce qui donne $L = \frac{Q}{b_1 V_1}$. La spirale s'écartera donc de la circonférence, de cette quantité L pour un tour entier 2π, et pour tout autre arc α compté à partir du point de tangence on aura : $L' = L \frac{\alpha}{2\pi}$ la spirale peut ainsi être décrite par points sans aucune difficulté.

320. — Ventilateur à force centrifuge. — L'insufflation de l'air peut facilement être produite, avec une augmentation de pression sur un point de son parcours, au moyen des ventilateurs à force centrifuge, qui ressemblent de tous points aux pompes que nous venons d'examiner.

Ces ventilateurs peuvent avoir pour objet d'injecter un courant d'air, plus ou moins rapide, dans la chambre d'un foyer ou dans toute autre capacité où la pression est généralement peu différente de la atmosphérique. Ils constituent, dans ce cas, les ventilateurs soufflants terminés par une buse d'insufflation qui fait partir du canal d'évacuation.

Les ventilateurs sont simplement aspirants lorsqu'ils puisent l'air dans une capacité où on veut le renouveler et le rejettent directement dans l'atmosphère par tous les points de la circonférence du volant et sans qu'il soit nécessaire de leur adopter ni tambour face, ni buse d'évacuation.

321. — Equation de continuité. — Dans le conduit continu formé par l'ail, le volant à ailettes, le tuyau de refoulement et la buse, il y a lieu d'admettre que le mouvement de l'air est permanent et que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

chaque section complète donne lieu au même débit dans l'unité de temps.

Cette condition se traduisait, pour les liquides, en celle de l'égalité du volume débité dans chaque section. Il n'en est plus de même pour les gaz dont le volume, pour une même masse, dépend au contraire de la pression, et varie avec elle suivant la loi de Mariotte si la température reste constante; rigoureusement il faudrait donc exprimer que le volume qui passe dans une section varie en raison inverse de la pression du gaz à ce passage, mais Poncelet a fait remarquer que cette variation pouvait sans inconvénient être négligée dans la mise en équation du problème, par la raison qu'elle ne dépasse jamais, dans les ventilateurs, une hauteur de 4 à 5 centimètres de mercure, soit un quinzième seulement de la pression normale. Nous ne tiendrons pas compte de cette différence et nous admettrons que le volume débité reste le même dans les diverses sections.

322.— Dispositions générales des ventilateurs à force centrifuge.— Dans tous les ventilateurs à force centrifuge l'air entre au centre du volant par deux ouies ou œils, mais nous nous proposons de n'étudier que l'entrée par une seule de ces ouies. Quand le ventilateur est simplement soufflant, il aspire directement l'air de l'atmosphère ambiante, et il se trouve dépourvu de tout conduit d'amenée qui donnerait lieu à une résistance spéciale. Quand au contraire le ventilateur est simplement aspirant cette conduite d'amenée peut avoir une très grande étendue, tels par exemple que les galeries d'une mine, qui se raccordent alors avec les orifices des ouies par des tuyaux intermédiaires; ce sont alors les conduits de refoulement qui deviennent inutiles et le volant tourne dans l'atmosphère ambiante sans qu'il soit nécessaire de recueillir l'air qu'il débite dans un tambour qui ne ferait qu'augmenter les résistances.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Dans ces deux cas le ventilateur se trouve donc dépourvu d'une partie des organes que comportent les pompes centrifuges dont la théorie lui est immédiatement applicable à la condition d'y annuler les résistances qui sont ainsi supprimées. Nous pourrions même ajouter qu'en raison de la faible densité du fluide les travaux d'élévation sont toujours très faibles et que l'on pourra dans la plupart des cas en négliger l'influence par rapport à celle de la force centrifuge.

Les ventilateurs sont munis d'ailes planes ou d'ailes courbes, comme les pompes, mais on n'introduit pas en général, dans leur construction, les directrices E F qui sont essentielles dans ces derniers appareils

323. — Théorie des ventilateurs. — Les mêmes notations sont applicables aux ventilateurs, pour lesquels nous pourrons par conséquent nous borner à considérer les 5 équations distinctes auxquelles s'est trouvée réduite en définitive, la recherche des conditions d'établissement des pompes.

Rappelons ici ces équations.

$$(1) \qquad v_0^2 = \frac{2gH}{2 - m^2 + a^2}$$

$$(2) \qquad \operatorname{tang} \beta = \frac{r_1 b_1}{r_0 b_1} \, a \sin \gamma$$

$$(3) \qquad a = \frac{m^2 - 1 - \sqrt{(m^2-1)^2 - (m^2-2)\, m^2 \cos^2 \gamma}}{m \cos \gamma}$$

$$(4) \qquad Q = 2\pi r_1 b_1 \, a \, v_0 \sin \gamma$$

$$(5) \qquad R = \frac{m^2 - 2 - a^2}{2m^2 - 2 - 2am \cos \gamma}$$

Les deux problèmes principaux se résoudront avec ces cinq équations avec une grande facilité, en se laissant guider à cet égard par les renseignements contenus au tableau du N° 317.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

324. — Disposition du tambour. - La partie du tambour qui entoure les ailettes doit être aussi jointive que possible avec les bords des ailettes, et le canal d'écoulement de l'air en doit être le prolongement. Si les ailettes sont partout d'égale largeur le tambour tout entier est cylindrique; si cette largeur va en diminuant du centre à la circonférence le canal d'écoulement pourra aussi être de largeur variable pourvu que la section radiale augmente toujours dans le même rapport que le débit à partir du point de contact; la spirale du contour extérieur sera alors modifiée en conséquence.

325. — Formes des ailettes. - M. Ser a nettement caractérisé les différentes formes que l'on peut rationnellement donner aux ailettes des ventilateurs pour satisfaire à la condition fondamentale d'un débit égal, avec vitesse relative constante, dans chacune des sections annulaires de chaque auget.

La valeur du débit total à l'extrémité des ailettes est donnée par l'équation $Q = 2\pi r_1 b_1 \sin\gamma_1 \times W_1$, et si pour chaque point intermédiaire des ailettes, en désignant respectivement par r, b et γ les valeurs correspondant à r_1, b_1 et γ_1, on devrait écrire pour satisfaire à la condition précédente

$$r\, b \sin\gamma = C$$

$C = \frac{Q}{2\pi W_1}$ est une constante. On pourra toujours disposer de b et de γ pour que le produit des trois variables soit constant.

1° Si γ ne varie pas, $rb = \frac{C}{\sin\gamma}$ devient l'équation d'une hyperbole équilatère qui définit la forme de la section faite dans le tambour par un plan quelconque passant par l'axe et par conséquent aussi le profil des ailettes planes qui y correspondent.

Nous remarquerons d'ailleurs que $\gamma = \theta = 90$ dans cette hypothèse; les ailettes sont radiales.

2° Si la largeur b de l'ailette est constante on aura $r \sin\gamma = \frac{C}{b}$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

équation d'une développante de la circonférence d'entrée des palettes, dont le rayon est r_0.

3°. On peut encore obtenir le même résultat avec des palettes planes d'égale largeur en rendant la face d'arrière de chaque palette, parallèle à la face d'avant de la palette précédente; l'espace ainsi clos entre deux palettes a pour effet de resserrer le passage dans de telles conditions que la section soit constante.

326. ____ Théorie des turbines semblables. — Au lieu de calculer directement toutes les dimensions d'une turbine, on préfère souvent déduire ces dimensions de celles d'une turbine dont on connaît tous les éléments de fonctionnement; la théorie des turbines semblables donne avec une grande sureté la solution pratique du problème.

Lorsque deux turbines sont semblables géométriquement, c'est-à-dire quand leurs dimensions linéaires sont proportionnelles et leurs angles respectivement égaux, on voit par les formules [12] et [15] qu'en désignant par ρ et ρ' leurs rayons homologues, elles donneront, sous la même chute, les meilleures conditions de rendement, si l'on a:

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{\rho^2}{\rho'^2} \qquad \frac{n}{n'} = \frac{\rho'}{\rho}$$

d'où $$Q' = Q\,\frac{\rho'^2}{\rho^2} \qquad n' = \frac{n\,\rho}{\rho'}$$

Ces relations, analogues à celle que nous avons indiquée au (N°. 231), pour une turbine qui fonctionnerait également bien sous deux chutes différentes, donnent un moyen simple de construire, sans incertitude, une turbine dans les mêmes conditions de bon fonctionnement qu'une turbine donnée, mais pour une chute et un débit différents.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

327. — Turbine déduite d'une turbine donnée. La considération des turbines semblables permet de résoudre facilement le problème suivant : étant donnée une turbine A qui fonctionne bien avec une hauteur de chute H et pour un débit Q, calculer les dimensions d'une turbine C qui fonctionnerait de la même façon avec une chute H' et pour un débit Q'.

Nous désignerons par ρ le rayon de la turbine A qui entre dans la formule [12], et qui devient alors :

$$Q = 2\pi\rho\sqrt{2gH\,b_0 b_1 \operatorname{tang}\beta \sin\gamma}$$

Une turbine B semblable à la première et de même débit sous la chute H' donnerait, en désignant par ρ' le rayon correspondant :

$$Q = 2\pi\rho'\sqrt{2gH'\frac{b_0\rho'}{\rho}\,\frac{b_1\rho'}{\rho}\operatorname{tang}\beta\sin\gamma}$$

En désignant par ρ'' le rayon que l'on cherche à calculer, de la turbine C débitant Q' sous la chute H', on aura de même :

$$Q' = 2\pi\rho''\sqrt{2gH'\,b_0\frac{\rho''}{\rho'}\,b_1\,\frac{\rho''}{\rho'}\operatorname{tang}\beta\sin\gamma}$$

En divisant la dernière équation par la précédente, on obtient :

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\rho''^2}{\rho'^2}$$

et par les deux premières :

$$1 = \frac{\rho'^2}{\rho^2}\sqrt{\frac{H'}{H}}$$

d'où l'on tire :

$$\rho''^2 = \rho'^2\frac{Q'}{Q} = \rho^2\frac{Q'}{Q}\sqrt{\frac{H}{H'}}$$

Si l'on voulait connaître le nombre de tours n'' correspondant, il suffirait d'écrire :

$$n = \frac{30}{\pi\rho}\sqrt{gH\frac{b_0}{b_1}\frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\gamma}}$$

$$n' = \frac{30}{\pi\rho'}\sqrt{gH'\frac{b_0}{b_1}\frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\gamma}}$$

d'où

$$n'' = \frac{30}{\pi\rho''}\sqrt{\frac{H'}{H}}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

328. — Généralisation de la théorie de la similitude aux trois genres d'appareils. — Tout ce qui a été dit au point de vue des turbines semblables s'applique exactement aux pompes centrifuges et aux ventilateurs.

Dans tous les cas on a : $Q = 2\pi r_1 b_1 a \sin\gamma \sqrt{\frac{2gH}{m^2 - 2 - a^2}}$ et :

$$n = \frac{30}{\pi r_0} \sqrt{\frac{2gH}{m^2 - 2 - a^2}}$$

en prenant seulement la valeur absolue de la quantité comprise sous le radical ; pour une machine semblable, de débit Q', fonctionnant avec une hauteur H' on aurait de même :

$$Q' = 2\pi r'_1 b'_1 a \sin\gamma \sqrt{\frac{2gH'}{m^2 - 2 - a^2}}$$

et par suite :

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{r_1 b_1}{r'_1 b'_1} \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{H'}} = \frac{r^2}{r'^2} \sqrt{\frac{H}{H'}} \quad \text{et} \quad n' = n \frac{r}{r'} \sqrt{\frac{H'}{H}}$$

La méthode de similitude étant ainsi généralisée, son emploi permet de calculer, au moyen d'un type bien choisi, tous les appareils à force centrifuge sans aucun tâtonnement.

Etude complémentaire des principales machines à force centrifuge.

---

329. — Objet de cette étude. — Dans le chapitre précédent nous avons eu pour but spécial d'établir la théorie commune aux différents genres d'appareils à force centrifuge en réservant pour une étude ultérieure les détails de leurs conditions d'établissement et les résultats des expériences à l'aide desquelles leur rendement a été déterminé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous avons ainsi à nous occuper, à ce nouveau point de vue, des différentes turbines, des pompes centrifuges et des ventilateurs.

330. — **Anciennes roues à axe vertical.** Les anciennes roues, dites à cuillers ou à cuve, peuvent être considérées comme le point de départ des turbines, en ce que l'eau y était également reçue sur des aubes courbes, où elle était amenée, soit par une ou plusieurs buses, soit même à plein jet, dans une cuve verticale, au fond de laquelle se trouvait la roue. Euler avait proposé une roue dans laquelle l'alimentation était faite, tout au pourtour de la roue, par un grand nombre de petits tuyaux courbes, imposant à l'eau une direction convenable à l'entrée des augets; ce qui caractérise encore les turbines actuelles c'est l'emploi, avant l'arrivée de l'eau dans les aubes, de cloisons désignées sous le nom de directrices, qui satisfont bien mieux à cette condition, tout en formant de simples guides, de petites longueurs et à frottements négligeables, disposés dans la cuve elle-même.

331. — **Rappel des équations les plus générales de la théorie des turbines.** En conservant aux équations de la théorie des turbines la forme qui comprend les deux systèmes principaux de ces roues nous les rappellerons en totalité dans le tableau suivant emprunté au N°. 299

$$[1]\quad V_0^2 = 2gH$$

$$[2]\quad V_0^2 = \frac{gH}{2\cos^2\beta}$$

$$[3]\quad W_0 = V_0$$

$$[4]\quad v_1 = v_0 \frac{r_1}{r_0}$$

$$[5]\quad W_1 = v_1$$

$$[6]\quad V_1^2 = 2gH \frac{b_0}{b_1} \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$[7]\quad \frac{p_1}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + h_0 + h_1$$

$$[8]\quad \frac{p_0}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + h_0$$

$$[9]\quad 2\beta + \theta = 180^\circ$$

$$[10]\quad \frac{\sin\gamma}{\sin\theta} = \frac{b_0}{b_1}\frac{r_0^2}{r_1^2}$$

$$[11]\quad h_1 = 0 \quad \text{ou} \quad r_1 = r_0$$

$$[12]\quad Q = 2\pi b_0 r_0 \sin\beta \sqrt{2gH}$$

$$[13]\quad T_c = PH\left(1 - \frac{b_0}{b_1}\operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma\right)$$

$$[14]\quad R = 1 - \frac{b_0}{b_1}\operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$[15]\quad n = \frac{30}{\pi r_0 \cos\beta}\sqrt{\frac{2H}{t}}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

332 — Distinction entre les turbines noyées et les turbines non noyées Les formules établies aux Nos 298 et 299 pour les turbines noyées satisfont à une condition spéciale, celle de l'égalité des pressions sous l'eau, des deux côtés de la ligne de joint qui sépare la couronne fixe de la couronne mobile.

Cette même égalité entre les deux pressions s'exprime d'une manière différente lorsque la ligne de joint se trouve dénoyée puisque la pression extérieure se trouve alors mesurée par celle de l'atmosphère. L'introduction de cette condition conduit à des modifications différentes des équations primitives, et il n'est pas possible de les confondre dans une même discussion. Nous avons donc à distinguer entre les turbines noyées et les turbines non noyées quant à leurs conditions d'établissement.

333. — Problèmes sur les turbines noyées.

Les quinze équations précédentes renferment 22 variables, mais il est facile de voir qu'elles sont préparées de telle façon que la plupart d'entr'elles suffiraient individuellement à fournir la valeur de l'une de ces variables lorsqu'un certain nombre d'autres seront connues.

Si l'on pouvait choisir parmi elles un système de n équations contenant seulement $22-(15-n)$ variables distinctes, on aurait évidemment, un système plus simple qui comporterait les mêmes circonstances de condition ou d'indétermination pourvu que les autres équations permettent de calculer les valeurs des inconnues non comprises dans ces équations.

Les cinq équations [8] [9] [10] [11] et [12] répondent à ce but, car elles ne renferment que 12 variables et il suffira, par conséquent, de les considérer seules pour se rendre compte des conditions dans lesquelles les deux problèmes principaux se présentent.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Dans celui de la turbine construite, toutes les dimensions sont connues ainsi que la hauteur de chute H; dans le second, il s'agit de déterminer toutes les dimensions d'une turbine pour laquelle on ne connaît que la chute et le débit.

Le tableau suivant résume les conditions de ces deux problèmes.

Variables comprises dans les 5 équations.	Turbine à construire		Turbine construite	
	Données	Inconnues.	Données	Inconnues
2 Rayons	2	"	"	2
2 Largeurs	2	"	"	2
3 Angles	3	"	"	3
3 hauteurs	3	"	1	2
1 Pression	"	1	"	1
1 Débit	"	1	1	"
12	10	2	2	10

Equations 5 5

Conditions ..... 3 Indéterminées.... 5

Il y a lieu d'ailleurs de faire remarquer que la hauteur h_0, n'entrant absolument que dans les équations primitives qui donnent les valeurs des pressions, on peut considérer h_0 comme arbitraire par rapport aux équations finales.

Pour la turbine construite le nombre des équations excède de 3 le nombre des inconnues; il faut donc que les Données satisfassent à trois équations de condition, et il se trouve précisément que les trois équations [9] [10] et [11] expriment ces trois conditions. Si elles n'étaient pas réalisées la roue ne pourrait satisfaire aux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diverses relations nécessaires au fonctionnement régulier et sans perte inutile du travail mécanique de la chute.

Pour la turbine à construire l'indétermination constatée pour 5 des variables est rachetée par des conditions supplémentaires mais seulement approximatives que nous avons indiquées au cours des calculs et que nous rappelons ici dans leur ensemble.

Pour $\beta = 0$ et pour $\beta = 90°$ l'expression primitive de p_0 serait négative; la valeur de β doit s'éloigner de ces limites, et varier entre 30 et 45°; d'ailleurs θ diffère peu de 90°.

L'angle γ des deux vitesses à la sortie ne doit pas, comme dans la roue Poncelet, s'éloigner beaucoup de 30°; une valeur plus grande de cet angle diminuerait encore le rendement.

La largeur b_1 ne doit pas beaucoup dépasser $b_1 = 1{,}10\, b_0$

Dans la turbine Fourneyron on recommande de ne pas faire:

$$r_1 < 1.25\, r_0$$

Enfin Fourneyron lui-même a fait remarquer que la cuve devait avoir une section au moins quadruple de la section de sortie des directrices ce qui se traduit par:

$$\pi r_0^2 > 4 b_0 \times 2\pi r_0 \sin\beta$$

ou: $$r_0 > 8 b_0 \sin\beta$$

Ce sont là autant de conditions accessoires qui viennent s'ajouter à celles qui sont exprimées par les équations théoriques et qui permettent de calculer avec très peu d'indécision toutes les dimensions de la turbine. Nous verrons dans des exemples numériques comment elles doivent être interprétées dans les applications.

334. — Etablissement d'une turbine Fourneyron noyée. — Les cinq équations réservées, quand il s'agit d'une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

turbine Fourneyron, sont les suivantes :

$$[8] \quad \frac{p_0}{\omega} = \frac{p_a}{\omega} + h_0$$

$$[9] \quad 2\beta + \theta = 180°$$

$$[10] \quad \frac{\sin\gamma}{\sin 2\beta} = \frac{b_0}{b_1}\,\frac{r_0^2}{r_1^2}$$

$$[11] \quad h_1 = 0$$

$$[12] \quad Q = 2\pi b_0 r_0 \sin\beta \sqrt{2gH}$$

et nous pouvons encore laisser de côté les équations [8] et [11], celle ci ne contenant que les variables h_0 et $\frac{p_0}{\omega}$ dont la première est arbitraire et détermine, lorsqu'elle a été choisie arbitrairement, la valeur de la seconde. Nous n'avons plus à considérer que les trois équations restantes qui renferment encore :

2 rayons
2 largeurs
3 Angles
1 hauteur
1 débit

Ensemble 9 variables dont deux sont données, Q et H ;

Il faut ainsi déterminer les sept autres en tenant compte des trois équations définitives et des conditions supplémentaires.

Nous ferons d'abord une hypothèse sur γ et sur β, ce qui permettra de connaître en même temps θ par l'équation [9].

Restent seulement quatre inconnues b_0, b_1, r_0, r_1, entre les deux équations [10] et [12].

L'équation [10] permet de calculer le rapport $\frac{b_1}{b_0}\,\frac{r_1^2}{r_0^2}$ et de reconnaître si elle peut être satisfaite avec les relations $\frac{b_1}{b_0} = 1.10$; $\frac{r_1}{r_0} < 1,25$, sinon il faudra modifier les angles choisis primitivement.

Enfin on combinera l'équation [12] avec la règle de Fourneyron

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

transformée en équation limite $r_0 = 8\, b_0 \sin\beta$; on écrira par suite :

$$Q = 2\pi \times b_0^2 \sin\beta \sqrt{2gH}$$

d'où : $$b_0^2 = \frac{Q}{\sqrt{2H}} \frac{1}{16\pi \sin\beta}$$

Connaissant ainsi b_0, r_0 sera donné par la règle de Fourneyron et toutes les dimensions se trouveront déterminées.

Supposons, dans un exemple particulier, $H = 6^m$, $Q = 1^{mc}.50$, ce qui correspond à une puissance dynamique $PH = 1500 \times 6 = 9000$ kilogrammètres par $1''$ ou 120 chevaux.

La méthode précédente revient à faire $\beta = 45°$, $V = 30°$, d'où par l'équation [9] $\theta = 90°$.

L'équation [10] devient alors $\frac{b_1}{b_0} \frac{r_1^2}{r_0^2} = \frac{\sin 2\beta}{\sin V} = 2$ et l'on voit facilement qu'elle est satisfaite par $\frac{b_1}{b_0} = 1.10$; $\frac{r_1}{r_0} = 1.35$.

En adoptant ces valeurs, il vient enfin :

$$b_0^2 = \frac{1.5}{16\pi \sin\beta \sqrt{12}} \quad \text{d'où} \quad b_0 = 0.074.$$

Les dimensions de la turbine sont alors les suivantes : $b_0 = 0.074$; $b = 0{,}085$; $r_0 = 0.418$; $r_1 = 0.564$; elles conviennent parfaitement à l'établissement de la turbine proposée.

335. — Etablissement d'une Turbine Fontaine noyée. Les cinq équations réservées, quand il s'agit d'une turbine Fontaine, se réduisent aux quatre suivantes :

$$[8] \quad \frac{p_0}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + h_0$$

$$[9] \quad 2\beta + \theta = 180°$$

$$[10] \quad \frac{\sin V}{\sin 2\beta} = \frac{b_0}{b_1}$$

$$[12] \quad Q = 2\pi\, b_0\, r_0 \sin\beta \sqrt{2gH}$$

Au point de vue de la détermination des dimensions d'une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

telle turbine, nous devons même négliger la première, et les trois autres renferment encore

1 rayon
2 largeurs
3 angles
1 hauteur
1 débit

Ensemble 8 variables dont deux sont données: Q et H. Il faut ainsi déterminer les 6 autres entre lesquelles nous n'avons cependant que 3 équations ce qui exige l'introduction de trois autres conditions.

On donnera arbitrairement à θ une valeur peu différente de 90°, ce qui déterminera celle de β par l'équation [9]; et l'on pourra ensuite se donner encore $b_0 = K r_0$ d'après la connaissance des turbines analogues; l'équation [10] permettra de déterminer V pour satisfaire à la relation $b_1 = 1.10\, b_0$ et enfin l'équation [12] donnera:

$$r_0 = \sqrt{\frac{Q}{2K\pi \sin\beta \sqrt{2gH}}}$$

Il conviendra dans un premier essai que le coëfficient $K = \frac{1}{6}$ environ.

336. — Etablissement de la turbine Jonval.

La couronne de la Turbine Jonval étant toujours noyée, les éléments de cette machine doivent être calculés par la méthode précédente.

Ainsi que nous l'avons dit déjà au N°. 2. h_0 est une quantité essentiellement négative dont la valeur absolue est nécessairement plus petite que 10m. 33.

337. - Problèmes sur les turbines non noyées. Les équations

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les plus générales des turbines non noyées applicables aux deux systèmes de roues sont résumées dans le tableau suivant, où l'on a introduit la condition $\frac{b_1 \sin \gamma}{2 b_0 \sin \beta \cos \beta} = \frac{H - h_1}{H}$ qui résulte, après quelques transformations de l'égalité de pression, à la séparation de la couronne fixe et de la couronne mobile.

$$[1] \quad V_0^2 = 2g(H - h_1)$$

$$[2] \quad v_0^2 = \frac{g}{2\cos 2\beta} \frac{H^2}{H - h_1}$$

$$[3] \quad W_0^2 = v_0^2$$

$$[4] \quad v_1 = v_0$$

$$[5] \quad W_1 = v_0$$

$$[6] \quad V_1^2 = \frac{g}{2\cos 2\beta} \frac{H^2}{H - h_1}$$

$$[7] \quad \frac{p_1}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi}$$

$$[8] \quad \frac{p_0}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi}$$

$$[9] \quad \frac{\sin(2\beta + \theta)}{\sin \theta} = \frac{h_1}{H - h_1}$$

$$[10] \quad \frac{b_1 \sin \gamma}{2 b_0 \sin \beta \cos \beta} = \frac{H - h_1}{H}$$

$$[11] \quad r_1 = r_0 \quad \text{ou} \quad h_1 = 0$$

$$[12] \quad Q = 2\pi r_0 b_0 \sin \beta \sqrt{2g(H - h_1)}$$

Les cinq équations N^os [8] à [12] ne renferment encore que 12 variables et il suffira de les considérer seules pour se rendre compte des conditions dans lesquelles les deux problèmes principaux doivent être résolus. Dans celui de la turbine construite toutes les dimensions sont connues ainsi que H; dans le second il s'agit de déterminer toutes les dimensions, au nombre de 10, d'une turbine pour laquelle on ne connaît que la chute et le débit.

Pour la turbine construite, dont on veut seulement déterminer les conditions d'emploi les plus favorables, les équations [9] à [11] deviennent des équations de condition.

Pour la turbine à construire, l'indétermination de 5 variables sur 10 conduit à tenir compte des conditions secondaires déjà indiquées et particulièrement résumées au N°. 2.

338. — Établissement de la turbine Fourneyron non noyée.

Les équations réservées ne contenant pas la hauteur h_0 sous laquelle la turbine était

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

noyée, l'annulation de cette quantité ne modifie en rien les trois équations à l'aide desquelles nous avons calculé les éléments d'une turbine Fourneyron; le calcul reste absolument le même lorsque la turbine n'est plus noyée, et nous n'avons pas à y revenir.

239 - Établissement d'une turbine Fontaine non noyée. De même que pour les turbines noyées, on n'a plus à considérer que 3 équations qui sont ici:

$$[9] \qquad \frac{\sin(2\beta+\theta)}{\sin\theta} = \frac{h_1}{H-h_1}$$

$$[10] \qquad \frac{b_1 \sin\gamma}{b_0 \sin 2\beta} = \frac{H-h_1}{H}$$

$$[12] \qquad Q = 2\pi r_0 b_0 \sin\beta \sqrt{2g(H-h_1)}$$

En faisant une hypothèse sur β et θ, la première permettra de calculer h_1;

En faisant, dans la seconde, l'hypothèse $\gamma = 30°$, on en tirera la valeur correspondante de $\frac{b_1}{b_0}$, qui, si elle n'est pas admissible, conduira à modifier les premières hypothèses sur les angles.

On cherchera ensuite r_0 par comparaison avec les constructions existantes et l'on tirera b_0 de l'équation [12].

Voici encore, à titre d'exemple, une détermination numérique dans laquelle les équations exigent que l'on donne à γ et à $\frac{b_1}{b_0}$ des valeurs plus grandes qu'à l'ordinaire.

$H = 2^m.00$; $Q = 0.60$; d'où $PH = 600 \times 2 = 1200$ kilogrammètres par seconde, soit 16 chevaux.

Nous ferons $\gamma = 35°$; $\beta = 40°$ et $\theta = 90°$.

L'équation [9] donne alors :

$$h_1 = \frac{H \sin 1_0}{\sin 90 \sin 1_0} = \frac{2 \times 0.174}{1 + 0.175} = 0.30$$

On tire ensuite de l'équation [10]:

$$\frac{b_1}{b_0} = \frac{H-h_1}{H} \frac{\sin 2\beta}{\sin\gamma} = \frac{1.70 \times 0.985}{2 \times 0574} = 1.47$$

et enfin de l'équation [12] en faisant $r_0 = 0.60$ d'après l'examen des turbines analogues.

$$b_0 = \frac{Q}{2\pi r_0 \sin\beta \sqrt{2g(H-h_1)}} = \frac{0.60}{6\,28 \times 0\,60 \times 0643 \times 5.77} = 0^m.043$$

Les données se prêtent très peu à l'obtention de dimensions convenables, mais, pour les turbines qui fonctionnent à l'air libre, il y a moins d'inconvénients à augmenter la valeur du rapport $\frac{b_1}{b_0}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

340. **Hydropneumatisation.** — Les turbines utilisent toute la chute disponible quelle que soit la variation des niveaux, pourvu que les orifices soient assez grands pour assurer le débit de l'eau affluente, mais elles ont l'inconvénient de donner lieu à des résistances particulières dans le bief d'aval; les autres perdent toujours une partie de la hauteur de chute, ce qui est surtout facheux en temps de basses eaux, mais elles sont à l'abri de l'inconvenient qui vient d'être indiqué. Dans le but de parer à l'influence des variations de niveau, MM. Girard et Callon ont proposé l'emploi d'une disposition particulière désignée sous le nom d'hydropneumatisation: la roue qui fonctionne en contre bas du niveau d'aval, est enfermée dans une cloche où une machine soufflante entretient une pression d'air suffisante pour faire refluer l'eau ambiante, en dehors de la cloche, de manière que, sans perte de chute, la turbine fonctionne comme si elle n'était pas noyée. Cette disposition qui emprunte nécessairement, pour entretenir la soufflerie, une partie de la puissance motrice de la turbine est quelquefois a recommander, lorsque la première installation de la roue a été faite au dessous du niveau le plus convenable.

341. **Réglementation de la dépense d'eau dans les turbines.** — Pour une turbine donnée, le débit Q, qui correspond au maximum d'effet, est absolument déterminé, en fonction de la hauteur de chute, par la relation.

$$Q = 2\pi r_1 \sqrt{\operatorname{tang}\beta \sin\gamma} \times \sqrt{b_0 b_1 g H}$$

Q devrait donc varier dans la même proportion que $\sqrt{H}$.

C'est plutôt le contraire qui se présente dans le régime des cours d'eau, les eaux d'aval se relevant en général lorsque le débit augmente et la chute utilisable se trouvant par cela même diminuée.

Pour satisfaire aux conditions du maximum de rendement, on peut toutefois, dans toutes les circonstances ou l'eau disponible va en diminuant, restreindre en même temps le facteur $\sqrt{b_0 b_1 H}$ en diminuant soit les hauteurs

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

b_3 et b_4 dans la turbine Fourneyron, soit les orifices d'accès du liquide dans les canaux formés par les directrices; et c'est ce que l'on fait pour les turbines Fontaine.

342. Moyens de vannage. Dans le premier cas, la cuve contient un anneau que l'on peut faire monter ou descendre à volonté, et auquel sont appendus des tasseaux, qui peuvent pénétrer entre les directrices et en fermer les orifices sur une partie plus ou moins grande de la hauteur b_3 de ces orifices. L'anneau lui-même est suspendu par un certain nombre de tiges, reliées à un cercle placé hors de l'eau, et que l'on soulève plus ou moins au moyen d'organes de manœuvre.

L'expérience a démontré que la fermeture partielle des orifices b_3, ne permettant plus à l'eau de remplir, à plein jet, les canaux de la roue, il en résulte, surtout lorsque la couronne est noyée, des tourbillonnements qui réduisent l'effet utile dans une proportion considérable. Quelquefois cependant, on cherche à atténuer cet inconvénient, dans la turbine Fourneyron, en divisant chaque auget par une cloison horizontale qui en limite la hauteur utile en cas de basses eaux.

Dans la turbine Fontaine, on cherche à obtenir le même résultat en munissant chaque directrice d'une petite vanne glissant sur la directrice suivante et l'ensemble de tous ces vannages est, de même, manœuvré de l'extérieur par une seule transmission.

Pour éviter dans le rendement la diminution qui résulte des mêmes causes, M. Callon a proposé le premier de fermer complétement, un certain nombre d'orifices, symétriquement placés aux extrémités d'un même diamètre, mais cette méthode n'a répondu au but proposé que d'une manière encore insuffisante. Plus tard, M. Fontaine a employé deux lames de cuir ou de gutta-percha, pouvant se développer sur le plan supérieur de la couronne des directrices, et fermant à volonté un plus ou moins grand

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de leurs intervalles.

Le vannage inférieur de la turbine Jonval suffirait au besoin pour régler la quantité d'eau débitée, mais on se sert aussi d'obturateurs qui sont placés à la main entre les directrices, lorsque cela est nécessaire, la position occupée par la roue, près du niveau supérieur, permettant d'opérer de cette façon.

343 ___ Accouplement de plusieurs turbines.

La disposition de la turbine Fontaine est celle qui permet le mieux l'accouplement de deux turbines; il suffit pour cela de placer, à l'intérieur de la couronne de la roue, une autre couronne concentrique; il y a de même deux couronnes de directrices et M. Fontaine a eu recours à ce moyen pour utiliser, pendant les crues, une quantité d'eau plus grande, qui agissait alors sur la turbine centrale, ouverte seulement à ce moment; en eau ordinaire la turbine extérieure fonctionnait seule et donnait alors son maximum d'effet utile.

On a aussi avec le système Jonval, placé quelquefois plusieurs turbines, à des niveaux différents, dans le même corps et l'on a parfois débité l'eau par deux turbines opposées, dans le but de diminuer la pression sur les pivots, qui n'ont à porter alors que la différence entre les pressions exercées sur les deux roues.

344 ___. Résultats d'expériences sur les turbines.

De nombreuses expériences ont été faites sur la turbine Fourneyron, qui s'approprie à toutes les chutes en réalisant un effet utile de 0.70 de la puissance dynamique. Toutefois, ce rendement diminue très rapidement lorsqu'on réduit, au moyen du vannage, l'épaisseur de la lame d'eau, et l'on cite des expériences dans lesquelles l'effet utile a été réduit par cette cause de 0.70 à 0.39.

Le maximum du rendement correspond assez bien aux conditions indiquées

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par la théorie, mais la vitesse peut varier d'un quart, en plus ou en moins, par rapport à la vitesse qui donne ce maximum, sans que l'effet utile s'abaisse au dessous de 0.60.

Les expériences faites sur la turbine Fontaine ont donné lieu à des constatations presqu'identiques. On peut donc compter, avec cette disposition, sur un effet utile de 0.65 à 0.70 avec des variations de vitesses même assez grandes.

Les premières expériences exécutées sur les turbines Jonval avaient donné lieu à un rendement calculé, supérieur même aux précédents, mais en réduisant le coëfficient de jaugeage, plus exactement, à sa valeur la plus probable, on a bientôt reconnu qu'elle était de tout point comparable à la turbine Fontaine, qu'elle ne peut évidemment surpasser comme effet utile, le placement de la roue au sommet de la chute, s'il n'est pas une cause d'amoindrissement, ne pouvant en tous cas présenter aucun avantage sous le rapport de l'effet dynamique.

345. ____ Turbine sans directrice. En entourant l'arbre vertical d'un manchon qui offre une proue évidée du côté de l'arrivée de l'eau et qui est prolongé à la partie inférieure par une rondelle à profil arrondi, qui force l'eau affluente à se dévier jusqu'à la direction horizontale, dans tous les sens, à partir de l'axe de rotation, M. Girard est parvenu à construire de petites turbine, dans lesquelles la roue est placée comme celle de la turbine Fourneyron; l'eau y arrive dans les diverses directions radiales et agit sur les aubes de manière à sortir avec une très petite vitesse V,

Dans ces turbines, on peut obtenir jusqu'à 0.70 d'effet utile lorsque le vannage est ouvert à son maximum et la sortie de l'eau se trouve facilitée par l'élargissement assez considérable de la hauteur b_1 de la roue, à l'extérieur.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

346. — Expérience sur la turbine Girard sans directrice.

Nous citerons seulement une expérience, que nous avons faite avec M. Girard, au Conservatoire des Arts et Métiers, sur une turbine de 0m. 39 de diamètre, construite pour une chute de 50 mètres, mais essayée seulement avec une hauteur d'eau de 4 à 13 mètres.

Les résultats ont été très-satisfaisants et le rendement s'est élevé, pour la plus grande chute et l'ouverture complète du vannage, au-delà de 0. 70.

Cette turbine était destinée à fournir, sur divers points de la Ville de Gênes, des quantités de travail variant de 50 à 500 kilogrammètres par seconde, pour satisfaire aux besoins des petites usines de la localité.

Le problème de la distribution, à domicile, de la quantité de travail nécessaire, au moyen d'une canalisation d'eau spéciale, avait ainsi été abordé par M. Girard dans les conditions les plus satisfaisantes.

347. — Pompes à force centrifuge. — Les cuves à force centrifuge dans lesquelles l'eau participait au mouvement de rotation, sans aucun guide, ou dans des tuyaux élévatoires ont été employées dans le siècle dernier, mais les avantages des pompes centrifuges, telles que nous les connaissons aujourd'hui n'ont véritablement été bien constatés qu'à partir de l'Exposition Universelle de 1851, où les pompes d'Appold et de Gwyne ont pu être soumises à des expériences pratiques.

Dans la première de ces pompes, le volant était muni d'ailes courbes; le diamètre extérieur mesurait 0. 305; le diamètre intérieur 0. 1525, de sorte que le rapport que nous avons désigné par m différait peu du nombre 2. Son rendement constaté s'élevait à 60 %.

Pour la seconde, dont les ailes étaient radiales et le tambour conique les résultats ont été beaucoup moins favorables.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Depuis cette époque, les dimensions ont beaucoup augmenté, et dans certaines installations très récentes on est allé jusqu'au diamètre de 1m.44 et même de 1m.60 pour l'extrémité des ailettes. Dans cette dernière installation le débit s'est élevé jusqu'à 140 mètres cubes par minute, de sorte que ce sont les pompes centrifuges qui fournissent réellement les plus grands débits.

Débarassées de toute soupape et même des clapets de pied qui sont nécessaires dans la plupart des cas pour éviter qu'elles se désamorcent, elles présentent sur tout le parcours du liquide, une section suffisante pour que l'entraînement des corps solides ne fasse pas obstacle à leur bon fonctionnement et c'est là, sans doute, un de leurs plus grands avantages.

348. — Dispositions diverses des pompes centrifuges. Les clapets de pied dont il vient d'être question étaient considérés comme indispensables puisque l'amorçage de ces pompes ne peut avoir lieu lorsque le volant n'est pas entouré d'eau, et que sans leur emploi, il faudrait, à chaque reprise, remplir les tuyaux d'aspiration au moyen d'une petite pompe d'alimentation.

A ce point de vue l'emploi d'un éjecteur à vapeur doit être considéré comme le progrès le plus considérable puisqu'il permet d'alimenter à volonté le tuyau d'aspiration et peut suppléer aux dispositions qui avaient été successivement proposées, une petite pompe d'injection entr'autres, pour chasser l'air qui, surtout dans les aspirations à fleur d'eau vient se cantonner autour du centre du volant, pendant que l'eau en est chassée, en vertu de sa plus grande densité, par l'action de la force centrifuge.

On a quelquefois employé deux pompes placées à la suite l'une de l'autre, la seconde était alimentée au centre par l'eau chassée de la première. On peut ainsi, avec une moindre vitesse, augmenter la pression

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'une manière suffisante pour élever l'eau à une grande hauteur.

Dans ces dernières années les pompes centrifuges ont reçu des applications d'un nouveau genre pour des épuisements à faible différence de niveau; elles ont ainsi pu rendre de grands services pour l'immersion des vignes phylloxerées et, dans d'autres cas elles fonctionnent presque à la manière des syphons, leur volant produisant alors l'amorçage.

349. — Résultats d'expériences sur les pompes centrifuges. — Les pompes centrifuges bien construites fournissent facilement un effet utile de 60%.

Sur une grande pompe de Gwyne à ailes planes recourbées seulement vers leur circonférence extérieure nous avons obtenu, dans les meilleures circonstances un maximum de 50% en 1860.

M. Durand Claye, en 1873 a obtenu sur une des pompes doubles installées pour le service d'Asnières, et avec des vitesses très modérées un rendement de 0.63, pour une élévation à 12m.

M. Wiedmer, en 1880 a obtenu un rendement de 0.66 dans les expériences qu'il a faites au Hâvre, pour l'épuisement d'un bassin de Radoub avec une hauteur maximum d'élévation de 8 mètres.

350. — Ventilateurs à force centrifuge. — Les ventilateurs à force centrifuge ne sont en général employés que dans les cas où il suffit d'obtenir une faible augmentation ou une faible diminution de pression, s'élevant au maximum à quelques centimètres de mercure. Pour des variations plus grandes on se sert des machines à piston, et quelquefois aussi, dans les mines, de dispositions qui rappellent celles des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pompes rotatives ou des pompes à engrenages.

Cependant le domaine des appareils à force centrifuge va toujours en augmentant et nous pouvons citer, en égard à son grand débit, le ventilateur installé par M. Guibal, à Frameries, et qui dans certains essais a aspiré des galeries près de 30 mètres cubes d'air par seconde.

351. — Dispositions diverses des ventilateurs. — Nous avons déjà indiqué que les ventilateurs soufflants étaient enveloppés d'un tambour en spirale comme les pompes centrifuges ; que les ventilateurs aspirants étaient munis d'une simple enveloppe, solidaire avec les ailettes, et qu'ils déversaient l'air aspiré par tous les points de la circonférence du volant ; dans quelques cas cependant on paraît avoir trouvé quelqu'avantage à les munir aussi d'un tambour et d'une conduite de refoulement, qui, au moyen de l'augmentation continue de son diamètre, depuis le volant jusqu'au débouché de l'air, permet de n'abandonner cet air qu'avec une vitesse réduite, et par conséquent avec moins de perte de puissance vive.

Les ventilateurs donnent souvent lieu à la production d'un ronflement désagréable que l'on est parvenu à éviter en partie, en plaçant le tambour dans lequel se meut le volant, dans une caisse en tôle de plus grande dimension, où une même masse d'air se trouve constamment confinée.

Nous avons eu l'occasion de faire quelques expériences sur un ventilateur double, disposé de manière que le second volant soit alimenté par le débit du premier. On parvient aussi, sans augmenter notablement les vitesses, à une augmentation de pression de 50 à 60 millimètres de mercure.

352. — Résultats d'expériences sur les ventilateurs. — Le rendement des ventilateurs est en apparence beaucoup plus variable que celui des pompes parce que leur fonctionnement a presque toujours lieu dans

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des conditions telles qu'il est difficile d'isoler l'influence particulière des résistances passives de la canalisation.

Dans les expériences faites sur les ventilateurs de mines on n'accuse en général, et par ce motif, qu'un rendement de 25 à 30 %, tandis que dans nos expériences avec M. De Lacolonge nous avons constaté un rendement de 0.64 avec une vitesse d'environ 50 mètres à la sortie.

Nous reproduisons dans le tableau ci-joint quelques uns des résultats de ces expériences parce qu'ils indiquent tout à la fois la concordance entre le volume théorique et le débit pratique et parce qu'ils sont accompagnés d'une indication précise sur la mesure des pressions observées et calculées.

Tableau comparatif des résultats du Calcul et de l'expérience.

Vitesse angulaire du Volant	Volume			Pression		
	observé m. cub.	Calculé m. c.	Rapports	Observée en m. d'eau	Calculée en m. d'eau	Rapports
31.m903	0.451	0.434	1.039	0.024	0.028	0.857
45.083	0.620	0.613	1.011	0.045	0.057	0.799
64.957	0.886	0.883	1.003	0.093	0.118	0.788
74.475	1.058	1.013	1.014	0.133	0.155	0.855
84.304	1.156	1.146	1.009	0.159	0.199	0.801
85.458	1.171	1.162	1.008	0.164	0.204	0.814

D'après les indications de ce tableau et conformément à la théorie, les volumes sont proportionnels aux nombres de tours et les pressions sont proportionnelles aux carrés des vitesses.

M. Ser a reproduit ce tableau dans son essai sur la théorie des ventilateurs à force centrifuge, essai dans lequel on trouve de précieux renseignements sur l'installation de ce genre d'appareils.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Théorie mécanique de la chaleur et applications.

A — Théorie mécanique de la chaleur.

353. — Notions générales. La théorie mécanique de la chaleur est basée sur la corrélation qui existe entre la quantité de chaleur qui disparaît dans un phénomène mécanique et la quantité de travail qui y correspond.

On dit qu'il y a équivalence entre ces quantités, et la quantité de travail, exprimée en kilogrammètres, qui représente l'emploi d'une calorie est ce que l'on désigne sous le nom d'équivalent mécanique de la chaleur. On l'exprime par $\frac{1}{A}$ et, à l'inverse, le coëfficient A est la fraction de calorie qui correspond à l'unité de travail, ou en d'autres termes l'équivalent thermique d'un kilogrammètre.

Si on rabote, si on pulvérise, si on comprime, si l'on forge un corps solide, sa température s'élève, et une accession de chaleur, qui provient du travail effectué sur lui, vient augmenter sa température, ou ce qui revient au même, la quantité de chaleur totale qu'il possédait auparavant. Le travail qui a déterminé cette augmentation de température est alors l'équivalent de l'accroissement de sa chaleur interne et de sa chaleur thermométrique.

Lorsqu'un gaz se détend dans les conditions ordinaires, sa température s'abaisse et la quantité de chaleur qu'il perd alors

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

est l'équivalent du travail qu'il a développé pendant sa détente.

On pourrait multiplier à l'infini les exemples de cette corrélation, mais ce qui précède suffit pour faire comprendre le principe d'équivalence qui, comme un axiome, sert de point de départ à la théorie mécanique de la chaleur.

354. — Détermination du coëfficient mécanique de la chaleur en partant de la capacité C_1 de l'air à volume constant, et de sa capacité C à pression constante.

Il est toujours facile d'établir, pour une masse gazeuse, une relation entre sa température t, sa pression p et son volume v.

Les lois combinées de Mariotte et de Gay-Lussac donnent en effet :

$$p\,v = p_0\,v_0\,(1+\alpha t)$$

d'où l'on tire

$$1+\alpha t = \frac{p\,v}{p_0\,v_0}$$

$$t = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\,\frac{p\,v}{p_0\,v_0} = -a + \frac{p\,v}{R}$$

en remplaçant en même temps $\frac{1}{\alpha}$ et $\alpha\,p_0\,v_0$ par les notations plus simples a et R, dont les valeurs numériques résultent des tables reproduites dans les tous les traités de physique.

Par suite : $\frac{dt}{dv} = \frac{p}{R}$, $\frac{dt}{dp} = \frac{v}{R}$, et $dt = \frac{p}{R}\,dv + \frac{v}{R}\,dp$

Si l'on désigne par u la quantité de chaleur totale, nécessaire pour porter le gaz, à volume constant, à la température t, on aura

$$u = C_1\,t$$

Si l'on désigne par Q la quantité totale de chaleur nécessaire pour le porter à la température t, et produire à pression constante, le travail correspondant, on aura nécessairement :

$$Q = C\,t.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et cette nouvelle quantité de chaleur devra surpasser la première de toute la chaleur équivalente au travail produit $\int p\,dv$,

c'est-à-dire $A\int p\,dv$,

on aura donc, au moyen de l'égalité entre les deux expressions différentielles correspondantes,

$$(C-C_1)\,dt = A\,p\,dv;$$

et en mettant pour dt sa valeur lorsque dp est nul.

$$(C-C_1)\left(\frac{dt}{dv}\right)dv = A\,p\,dv$$

d'où $$A = \frac{(C-C_1)}{p}\left(\frac{dt}{dv}\right) = \frac{C-C_1}{p}\,\frac{p}{R} = \frac{C-C_1}{R}$$

355. — Valeur numérique de l'équivalent mécanique de la chaleur.

On peut encore déterminer la valeur du coëfficient mécanique de la chaleur d'une manière plus simple, indiquée d'abord par M. Masson. En partant de 0°, les quantités de chaleur nécessaires pour élever un Kilogramme d'air à volume constant et à pression constante seront respectivement exprimées par C_1 et C, et la chaleur nécessaire pour faire passer le gaz de l'un à l'autre état sera pour un degré

$$C - C_1$$

Le travail correspondant sera $(v - v_0)\,p_0 = \alpha\, v_0 p_0$

et par suite :

$$C - C_1 = A\alpha\, v_0 p_0$$

d'où l'on tire immédiatement

$$A = \frac{C-C_1}{\alpha\, v_0 p_0} = \frac{C-C_1}{R}$$

On sait que, pour l'air, on a :

$$C = 0.2377$$

$$C_1 = 0.1686$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$a = \frac{1}{0.00367} = 273$$

$$p_0 v_0 = 10330 \times \frac{1}{1.293}$$

$$\alpha p_0 v_0 = R = 10330 \times \frac{1}{1.293} \times \frac{1}{273} = 29.27$$

et par suite :

$$A = \frac{C - C_1}{R} = \frac{0.2377 - 0.1686}{29.27} = \frac{1}{423.58}$$

La valeur $\frac{1}{A} = 424$, de l'équivalent mécanique de la chaleur concorde avec la plupart des déterminations expérimentales qui en ont été faites.

A l'inverse, connaissant à priori l'équivalent mécanique $\frac{1}{A}$ de la chaleur, on pourrait déduire de cette formule la différence $C - C_1$ entre les deux capacités pour la chaleur.

Une calorie pouvant ainsi être considérée comme l'équivalent de 424 kilogrammètres, la conversion de la chaleur en travail est un problème d'un immense intérêt pratique ; il en est tout autrement du problème inverse, car en estimant à 6000 calories la valeur calorifique de la combustion d'un kilogramme de houille, on voit immédiatement qu'il faudrait, pour remplacer son action calorifique par un travail direct, dépenser $6000 \times 424 = 2550000$ kilogrammètres.

356. — Généralisation de cette théorie aux cas où les capacités varient avec la température. Nous aurions pu simplifier encore les calculs qui précèdent, si nous n'avions eu en vue de les faire servir d'introduction à la méthode générale qu'il convient d'employer lorsque les capacités pour la chaleur varient avec la température.

On retrouvera successivement dans les paragraphes suivants, mais avec un nouveau caractère de généralisation, tous les éléments de ces calculs.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

357. — Relation entre la température, la pression et le volume d'un corps. — Dans ce qui va suivre, nous considérerons toujours 1 K. de matière, ce qui permettrait d'ailleurs de modifier facilement, par une simple proportionnalité, toutes les évaluations, dans les cas où l'on aurait à opérer sur un poids différent.

Le Kilogramme d'un corps quelconque est physiquement défini, lorsqu'on connaît sa température, la pression à laquelle il est soumis et son volume. On peut donc, pour un corps donné, considérer l'une des trois quantités comme une fonction exclusive des deux autres, et cette fonction pourra toujours être représentée par la notation $t = F(p,v)$ dans laquelle t, p et v sont les valeurs simultanées des trois variables.

On en déduit par différentiation

$$dt = \left(\frac{dt}{dp}\right) dp + \left(\frac{dt}{dv}\right) dv$$

dt étant la différentielle totale de la température à laquelle le corps est considéré.

358. — Relation entre la chaleur, la pression et le volume d'un corps. — La quantité U de chaleur emmagasinée dans un kilogramme de matière, dépend elle-même de la température ; cette température est déterminée quand on connaît le volume et la pression et par conséquent, on peut aussi représenter cette quantité de chaleur par une fonction de p et de v en écrivant

$$U = f(p,v)$$

et par différentiation

$$dU = \left(\frac{df}{dp}\right) dp + \left(\frac{df}{dv}\right) dv ;$$
$$= X\,dp + Y\,dv$$

---

(1) Pour l'air nous avons vu que $t = -a + \frac{pv}{R}$, on a alors $F(p,v) = -a + \frac{pv}{R}$, et cette relation serait également applicable à tous les gaz permanents, en donnant aux constantes a et R les valeurs convenables.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

si l'on désigne séparément les dérivées partielles, prises par rapport à la pression et par rapport au volume, par les notations distinctes.

$$X = \frac{df}{dp} ; \quad Y = \frac{df}{dv} \quad (1)$$

du devant être une différentielle exacte de la fonction à deux variables $f(p\,v)$ les quantités X et Y, dérivées respectives de la fonction principale, par rapport à p et à v, devront conduire à des résultats identiques, lorsqu'on en prendra de nouveau les dérivées secondes en ordre inverse.

On a ainsi pour condition nécessaire :

$$\left(\frac{dX}{dv}\right) = \left(\frac{dY}{dp}\right)$$

qui sera invoquée dans la suite du calcul.

359. — Expression de la quantité de chaleur totale. En la désignant par Q et en remarquant qu'elle doit comprendre la quantité de chaleur correspondant au travail développé, sous la pression variable p, par l'augmentation de volume, travail qui étant exprimé par $\int p\,dv$, représente, en vertu du principe de l'équivalent mécanique de la chaleur, un nombre de calories,

$$A \int p\,dv$$

On a nécessairement :

$$Q = u + A \int p\,dv,$$

et par suite :

$$\begin{aligned} dQ &= du + A\,p\,dv \\ &= X\,dp + Y\,dv + A\,p\,dv \\ &= X\,dp + (Y + Ap)\,dv. \end{aligned}$$

---

(1) Pour l'air $u = C_1 t$, d'où $du = C_1 dt$, parce que C_1 ne varie pas avec la température.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

360. — Évaluation directe de la même quantité. Il est facile d'exprimer dQ en calories, en se servant des capacités calorifiques.

Si dans la valeur générale de dQ, on fait $dv = 0$, on trouve en effet :

$$dQ' = X\,dp = C_1\,dt\,;$$

C_1 étant la capacité pour la chaleur à volume constant.

On tire des deux derniers membres,

$$X = C_1 \frac{dt}{dp}$$

Si dans la même valeur de dQ on fait maintenant $dp = 0$, on obtient de même, à pression constante,

$$dQ'' = (Y + Ap)\,dv = C\,dt,$$

et par suite :

$$Y = C\frac{dt}{dv} - Ap$$

La substitution de ces valeurs dans l'expression générale de dQ conduit à

$$dQ = C_1\left(\frac{dt}{dp}\right)dp + C\left(\frac{dt}{dv}\right)dv$$

361. — Équation de condition. Les valeurs de X et de Y, sous leurs nouvelles formes, permettent d'exprimer la condition.

$$\left(\frac{dX}{dv}\right) = \left(\frac{dY}{dp}\right);$$

ce qui conduit à :

$$\left(\frac{dC_1}{dv}\right)\left(\frac{dt}{dp}\right) + C_1\left(\frac{d^2t}{dp\,dv}\right) = \left(\frac{dC}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dv}\right) + C\left(\frac{d^2t}{dv\,dp}\right) - A$$

362. — Valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur. L'on tire immédiatement de cette relation,

$$A = (C - C_1)\left(\frac{d^2t}{dp\,dv}\right) + \left(\frac{dC}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dv}\right) - \left(\frac{dC_1}{dv}\right)\left(\frac{dt}{dp}\right)$$

Si C et C_1 étaient des quantités constantes pour toutes les températures,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on aurait simplement ;

$$A = (C - C_1)\left(\frac{d^2 t}{dp\,dv}\right).$$

363. — Application aux gaz. C'est précisément ce qui a lieu pour les gaz permanents et, comme la relation qui s'y rapporte

$$t = -a + \frac{pv}{R}$$

donne facilement

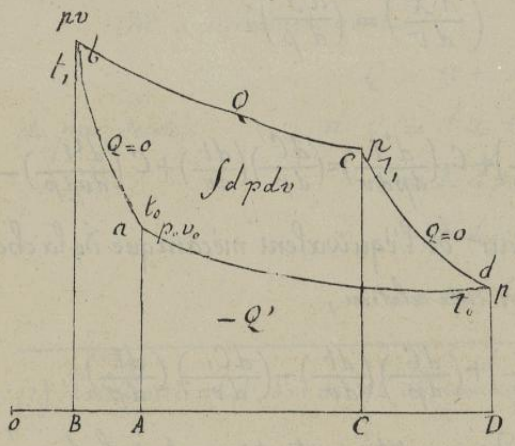
$$\left(\frac{d^2 t}{dp\,dv}\right) = \frac{1}{R}$$

On arrive, en considérant les gaz, à la valeur déjà trouvée de l'équivalent mécanique.

$$A = (C - C_1)\left(\frac{d^2 t}{dp\,dv}\right) = \frac{C - C_1}{R}$$

364. — Cycle de Carnot. On dit qu'un corps fait une évolution calorifique complète, ou qu'il parcourt un cycle complet, lorsque partant de l'état $t_0\ p_0\ v_0$ il est ramené à cet état par une série de modifications successives.

Pour faire comprendre cette évolution, nous représenterons, en ordonnées et en abscisses, sur le plan de la figure, les valeurs successives des variables p et v. Elle sera réalisée par les quatre modifications suivantes :



1°. — Le corps est à l'état $t_0\ p_0\ v_0$, et on le comprime jusqu'à ce que sa température soit devenue t_1, sans qu'il y ait ni perte ni acception de chaleur ; cette phase est représentée en $a\,b$.

2°. Le corps augmente de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

volume et il se refroidirait si on ne lui assimilait une certaine quantité de chaleur Q ; nous supposerons qu'on lui fournisse cette quantité de chaleur et nous passerons ainsi, sur la figure, de b en c.

3°. — Le corps continue à augmenter de volume, mais en se refroidissant, de manière que la température retombe à t_0.

Cette évolution est représentée de c en d, sans perte ni gain de chaleur.

4°. — On le comprime en lui enlevant, à mesure qu'elle apparaît, la quantité de chaleur Q' qui devient disponible pendant cette compression, et en lui conservant toujours la température initiale t_0 ; il reviendra ainsi à l'état primitif t_0, p_0, v_0, ce qui correspond à la ligne d a.

Ce cycle pourrait être réalisé en sens contraire, et l'on dit pour cela qu'il est reversible.

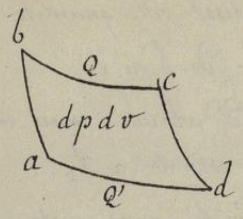
365. — Lignes isothermes et adiabatiques. — L'évolution complète étant représentée par la figure a b c d a, on dit que les côtés ab et cd, qui représentent les relations entre les pressions et les volumes, lorsqu'il n'y a ni addition ni soustraction de chaleur, sont adiabatiques.

On appelle isothermes les côtés b c et d a qui correspondent aux variations de volume et de pression, sans aucun changement de température.

366. — Travail développé dans un cycle complet. L'aire a b c d représente l'excès du travail produit par la dilatation sur le travail dépensé pour la compression et ce travail a pour mesure $\int d\,p\,dv$, entre les limites qui correspondent aux différents états successifs du Corps.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

367. — Cas où les variations sont infiniment petites.



La quantité de chaleur $Q-Q'$ devient alors dQ; le travail correspondant est représenté par une aire infinitésimale dont la signification se réduit au travail $dp\,dv$ qui doit nécessairement être l'équivalent d'une quantité de chaleur $A\,dp\,dv$.

368. — Expression de la quantité dQ.

Q' et Q sont des fonctions exclusives de t, et si l'on fait $Q'=f(t)$, on pourra représenter Q par $f(t+dt)$

d'où $Q-Q'=f'(t)\,dt$ et $\frac{Q-Q'}{Q}=\frac{f'(t)}{f(t+dt)}\,dt=\frac{f'(t)}{f(t)}\,dt$

Ce que l'on peut encore écrire plus simplement sous la forme $\frac{Q-Q'}{Q}=\frac{dt}{\varphi(t)}$ en représentant la fonction $\frac{f(t)}{f'(t)}$ par $\varphi(t)$.

On tire de là $Q\,dt=(Q-Q')\,\varphi(t)$

$$Q\,dt=A\,\varphi(t)\times T$$ et à la limite

$$dQ\,dt=A\,\varphi(t)\,dp\,dv$$

ou en faisant remarquer qu'à très-peu près, $dp=\frac{dt}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}$

$$dQ\,dt=A\,\varphi(t)\,\frac{dt}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}\,dv.$$

369. — Autre expression de la quantité dQ en fonction des capacités pour la chaleur. On obtient une autre valeur de cette quantité $dQ\,dt$ en partant de

$$dQ=X\,dp+(Y+Ap)\,dv$$

et en rappelant que

$$dt=\left(\frac{dt}{dp}\right)dp+\left(\frac{dt}{dv}\right)dv.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ce qui pour la ligne isotherme, où $dt = 0$,
donne :

$$dp = -\frac{\left(\frac{dt}{dv}\right)}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} dv$$

en substituant dans dQ :

$$dQ = -\frac{X\left(\frac{dt}{dv}\right)}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} dv + (Y + Ap)\, dv = \frac{-X\left(\frac{dt}{dv}\right)dv + (Y+Ap)\left(\frac{dt}{dp}\right)dv}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}$$

et en mettant pour X et Y les valeurs qui ont été trouvées précédemment, $X = C_1\left(\frac{dt}{dp}\right)$, $Y = C\left(\frac{dt}{dv}\right)$

$$dQ = \frac{-C_1\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dv}\right)dv + C\left(\frac{dt}{dv}\right)\left(\frac{dt}{dp}\right)dv}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}$$

ce qui, en supprimant le facteur commun au numérateur et au dénominateur, revient à :

$$dQ = (C - C_1)\left(\frac{dt}{dv}\right) dv.$$

370 .— Détermination de la fonction $\frac{Q - Q'}{Q}$. En égalant les deux valeurs précédentes de $dQ\,dt$, on trouve ;

$$A\varphi(t)\frac{dt}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} dv = (C - C_1)\left(\frac{dt}{dv}\right) dv\, dt$$

$$\varphi(t) = \frac{(C - C_1)}{A}\left(\frac{dt}{dv}\right)\left(\frac{dt}{dp}\right).$$

En ce qui concerne les gaz

$$\frac{C - C_1}{A} = R\,;\ \frac{dt}{dv} = \frac{p}{R}\,;\ \frac{dt}{dp} = \frac{v}{R}$$

et par suite :

$$\varphi(t) = R\,\frac{pv}{R^2} = \frac{pv}{R} = a + t.$$

Cette valeur très remarquable de la fonction $\varphi(t)$ nous servira dans plusieurs circonstances.

En remontant à la fonction principale, on a :

$$\varphi(t) = (a + t) = \frac{f(t)}{f'(t)}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

équation qui serait satisfaite par

$$f(t) = a + t$$

371 .— Remarque sur la quantité dQ. Il est facile de voir que dQ n'est pas la différentielle exacte d'une fonction de p et de v. Pour que cela put avoir lieu, il faudrait, en effet, que

$$\left(\frac{dX}{dv}\right) = d\left(\frac{Y + Ap}{dp}\right) = \frac{dY}{dp} + A$$

ce qui est impossible, puisque l'on a déjà

$$\left(\frac{dX}{dv}\right) = \left(\frac{dY}{dp}\right)$$

Condition incompatible avec la précédente.

372 .— Remarque sur la quantité $\frac{dQ}{a+t}$. Il en est autrement pour la quantité $\frac{dQ}{a+t}$ et, pour le démontrer, il suffira de faire voir que, par une seconde différentiation inverse, on arrive à deux résultats égaux

$$\frac{dQ}{a+t} = \frac{X\,dp}{a+t} + \frac{Y\,dv}{a+t} + \frac{Ap}{a+t}\,dv$$

En prenant la dérivée du premier terme du second membre par rapport à v, et celles des deux autres par rapport à p, on trouve, en supprimant aux dénominateurs le facteur commun $(a+t)^2$, que la condition devrait être:

$$(a+t)\left(\frac{dX}{dv}\right) - X\left(\frac{dt}{dv}\right) = (a+t)\left(\frac{dY}{dp}\right) - Y\left(\frac{dt}{dp}\right) + (a+t)A - Ap\left(\frac{dt}{dp}\right).$$

Le premier terme de chacun des membres peut être supprimé par raison d'équivalence et il reste

$$-X\left(\frac{dt}{dv}\right) + (Y + Ap)\left(\frac{dt}{dp}\right) - A(a+t) = 0$$

identité qui résulte de ce que

$$dQ\,dt = \frac{-X\left(\frac{dt}{dv}\right)dv\,dt + (Y+Ap)\left(\frac{dt}{dp}\right)dv\,dt}{\frac{dt}{dp}} = A\varphi(t)\frac{dt\,dv}{\frac{dt}{dp}}$$

373 .— Effet utile. L'expression $\frac{dQ}{a+t}$ étant la différentielle exacte d'une fonction de p et de v, que nous pouvons désigner par Z, nous écrirons:

$$\frac{dQ}{a+t} = dZ\,; \qquad dQ = (a+t)\,dZ$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Appliquons à cette nouvelle forme de la valeur de dQ les considérations déduites du Cycle de Carnot, nous aurons :

de b à c $\quad dQ = (a+t_1)\,dz$

$\quad Q = (a+t_1)(z_1 - z_0)$

de c à d $\quad dQ = 0\,;\quad dz = 0$

La valeur z_1 de z reste constante

de d à a $\quad dQ = (a+t_0)\,dz$

$\quad Q' = (a+t_0)(z_1 - z_0)$

de a à b $\quad dQ = 0\,;\quad dz = 0$

z reste à sa valeur primitive z_0

et par suite

$Q - Q' = (t_1 - t_0)(z_1 - z_0) = AT$ en désignant par T le travail correspondant, d'où

$$T = \frac{1}{A}(t_1 - t_0)(z_1 - z_0).$$

On obtient ensuite les trois relations suivantes :

$$\frac{Q}{T} = A\,\frac{a+t_1}{t_1 - t_0}\,;\quad \frac{Q'}{T} = A\,\frac{a+t_0}{t_1 - t_0}\,;\quad \frac{Q}{Q'} = \frac{a+t_1}{a+t_0}$$

Q est représenté par $(Q - Q') + Q'$

$Q - Q'$ quantité de travail transformée en travail,

Q' chaleur cédée à la source inférieure.

et l'effet utile est donné par le rapport

$$\frac{Q - Q'}{Q} = \frac{t_1 - t_0}{a+t_1}$$

374. — Deuxième principe de la théorie mécanique de la chaleur. C'est en cela que consiste le deuxième principe de la théorie mécanique de la chaleur. On l'énonce en disant que, dans l'évolution d'un cycle complet, l'utilisation est mesurée par le rapport de la différence des températures extrêmes à la température supérieure absolue.

On donne cette dénomination de température absolue à la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

température centigrade augmentée de 273°, comme si le zéro absolu devait être abaissé de cette différence de 273° par rapport au zéro centigrade.

375 .— Lois de la détente des gaz en tenant compte des variations de température. Les trois équations fondamentales sont :

$$dQ = C_1 \frac{dt}{dp}\, dp + C \frac{dt}{dv}\, dv, \text{ ou } dQ = C_1 \frac{v}{R}\, dp + C \frac{p}{R}\, dv$$

$$dt = \frac{dt}{dp}\, dp + \frac{dt}{dv}\, dv, \text{ ou } dt = \frac{v}{R}\, dp + \frac{p}{R}\, dv$$

$$a + t = \frac{pv}{R}$$

Dans le cas d'une détente adiabatique $dQ = 0$

et par suite $$C_1 \frac{v}{R}\, dp + C \frac{p}{R}\, dv = 0$$

d'où

$$\frac{dp}{p} = -\frac{C}{C_1}\frac{dv}{v} \text{ et } \frac{p_1}{p} = \left(\frac{v}{v_1}\right)^{\left(\frac{C}{C_1}\right)}$$

On a en outre :

$$\frac{a+t_1}{a+t} = \frac{p_1 v_1}{pv} = \frac{p_1}{p} \times \left(\frac{p_1}{p}\right)^{-\frac{C_1}{C}} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{C-C_1}{C}}$$

Dans le cas d'une détente isotherme, $dt = 0$; la seconde équation se réduit à $\frac{v}{R}\, dp + \frac{p}{R}\, dv = 0$, conduisant immédiatement à la formule de Mariotte $p_1 v_1 = p v$, par voie d'intégration logarithmique.

On a alors :

$$dQ = C_1 \frac{v}{R}\, dp + C \frac{p}{R}\, dv = \left(\frac{C-C_1}{R}\right) p\, dv$$

et par suite :

$$Q = \frac{C-C_1}{R} \int p_1 v_1 \frac{dv}{v} = (C-C_1)(a+t_1) \text{ log. hyp. } \frac{v_1}{v}$$
$$= (C-C_1)(a+t_1) \text{ log. hyp. } \frac{p}{p_1}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

B.- Application de la théorie mécanique de la chaleur à la machine à vapeur.

376.— Évolutions de la vapeur d'eau considérée par rapport au cycle de Carnot.— Dans l'alimentation, l'introduction, la détente, et l'échappement de la vapeur, on retrouve assez exactement les quatre phases que nous avons examinées dans un cycle complet. Ce parallèle, sera d'ailleurs mieux compris, si nous reproduisons ici les notations mêmes de la figure par laquelle ce cycle a été représenté.

1° de a à b; période de compression à température croissante, dans laquelle l'eau du condenseur se comprime et s'échauffe dans la chaudière jusqu'au moment où elle s'introduira dans le cylindre sous forme de vapeur.

2° de b à c; période de détente de cette vapeur à température constante, dans le cylindre même, pendant laquelle la chaudière fait fonction de source de chaleur indéfinie.

3° de c à d; période de détente à température décroissante, formant la 2e ligne adiabatique, et représentée par l'augmentation de volume du cylindre, après la fin de l'introduction.

4° de d à a; période de compression à température constante, ou de condensation, dans laquelle la vapeur détendue revient à l'état liquide, et cède une partie de sa chaleur au condenseur, que l'on peut considérer comme un réservoir indéfini à température plus basse.

Il faudrait toutefois, pour que ces évolutions répondissent au cycle complet, que la vapeur, en arrivant dans le condenseur, fut exactement à la même température que cet appareil. En réalité il y a une chute

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de chaleur plus ou moins considérable, en ce point du cycle, et les indications précédentes n'en tiennent aucun compte.

377. — Rendement des machines à vapeur. — La formule de l'effet utile étant

$$\frac{t_1 - t_0}{a + t_1} \cdot j$$

si on l'applique, en vertu des considérations précédentes, à une machine à vapeur fonctionnant à 150°, avec condenseur maintenu à 38°, on trouve,

$$\frac{t_1 - t_0}{a + t_1} = \frac{150 - 38}{273 + 150} = 0.265 ;$$

mais, on est loin d'atteindre à un pareil résultat qui, même au point de vue théorique, exigerait que le refroidissement dû à la détente fut continué jusqu'à la température même du condenseur.

378. — Données numériques sur la vapeur d'eau. Nous indiquerons ici quelques unes des données dont on a ordinairement besoin pour le calcul de la pression de la vapeur saturée et celui des quantités de chaleur qu'elle exige, sous les différents états.

379. — Pression en Kilogrammes de la vapeur saturée à la température t. — M. Regnault a déduit de ses expériences la relation

$$\log F = a - b\alpha^t,$$

dans laquelle F est exprimé en millimètres de mercure, t en degrés centigrades, a, b, et α étant d'ailleurs des constantes dont les valeurs répondent à :

$$a = 5.4233177$$
$$\log b = 0.6821547$$
$$\alpha = 0.9937447$$
$$\log \alpha = \bar{1}.9972311$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si l'on désigne par P, la pression en kilogrammes par mètre carré, on aura nécessairement,

$$P = F\,\frac{p_a}{760}$$

p_a étant la pression en kilogrammes par mètre carré, 10330 Kilogr., qui correspond à 760 millimètres de mercure;

d'où
$$\text{Log } P = \text{Log. } \frac{p_a}{760} + \text{log } F$$
$$= \text{Log. } \frac{p_a}{760} + a - b\,\alpha^t.$$

380. — Nombre de calories nécessaires pour porter 1 Kilogramme d'eau à 0, à l'état de vapeur saturée à t degrés.

D'après M. Regnault $\lambda = 606,5 + 0,305\,t$

Nombre de calories nécessaires pour porter un Kilog. d'eau à 0, à la température t.

D'après M. Regnault $K = t + 0,000\,021\,t^2 + 0,000\,000\,3\,t^3$

Chaleur spécifique de l'eau à t°

En désignant par C cette capacité, on doit avoir $C\,dt = dK$

d'où
$$C = \frac{dK}{dt} = 1 + 0,000\,04\,t + 0,000\,000\,9\,t^2$$

On obtient ainsi pour $t = 0$; $C = 1$; $t = 100$; $C = 1,005$; $t = 200$; $C = 1,016$.

381. — Nombre de calories nécessaires pour porter un Kilogramme d'eau à t degrés, à l'état de vapeur saturée à la même température. Cette chaleur de vaporisation n'est autre que la différence entre λ et K, ce qui donne, en la désignant par ρ,

$$\rho = \lambda - K = 606,5 + 0,305\,t - t - 0,000\,021\,t^2 - 0,000\,000\,3\,t^3$$
$$= 606,5 - 0,695\,t - 0,000\,021\,t^2 - 0,000\,000\,3\,t^3$$

Il en résulte

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} - \frac{dK}{dt} = 0,305 - 1 - 0,000\,04\,t - 0,000\,000\,9\,t^2$$
$$= -0,695 - 0,000\,04\,t - 0,000\,000\,9\,t^2$$

Cette dérivée de la chaleur de vaporisation par rapport à la température

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

est toujours négative

382. Problème I. Déterminer la quantité de chaleur à fournir à un Kilogramme d'eau à t degrés, pour le transformer en vapeur à cette même température et à la pression de saturation P correspondante.

La formule générale en ∂Q donne:

$$\partial Q = A(a+t)\left(\frac{dP}{dt}\right) dv.$$

La température et la pression restant constantes, il suffira d'intégrer par rapport à dv,

ce qui donne $Q = A(a+t)\left(\frac{dP}{dt}\right)(V-v) = \rho$

en désignant par V le volume de la vapeur et par v le volume correspondant de l'eau

Pour y recourir plus facilement, nous désignerons cette quantité par la notation spéciale ρ.

Le travail dû à l'action mécanique de la vapeur étant exprimé par $P(V-v)$ et correspondant à la quantité de chaleur $AP(V-v)$, on a nécessairement:

$$\rho = U + AP(V-v)$$

$$U = \rho - AP(V-v) = A(a+t)\left(\frac{dP}{dt}\right)(V-v) - AP(V-v)$$

$$= A(V-v)\left[(a+t)\left(\frac{dP}{dt}\right) - P.\right]$$

pour la mesure de la chaleur interne, impartie à la vapeur pour sa formation.

Pour y revenir plus facilement cette quantité par la notation spéciale φ, ce qui donne:

$$\varphi = \rho - AP(V-v) = A(V-v)\left[(a+t)\left(\frac{dP}{dt} - P\right)\right]$$

381. Problème II. Déterminer l'excès de la chaleur interne d'un kilogr. d'eau contenant une proportion M. de vapeur saturée à la température t et à la pression P de saturation, par rapport à celle d'un Kilogramme d'eau

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à 0 et à P. — Pour porter 1 kilogramme d'eau à la température t, il faut dépenser $\int_0^t C\,dt$, et cette quantité de chaleur représente tout à la fois l'excès de chaleur interne de l'eau et celle qui correspond au travail de la chaleur de cette eau à pression constante. Mais cette dilatation de l'eau étant relativement très-faible, nous la négligerons.

Il ne faut plus ajouter à cette dépense que la quantité $m\,S$ de chaleur, se rapportant à la proportion M de vapeur saturée qui existe dans le mélange, ce qui donne

$$U = \int_0^t C\,dt + m\,S$$

382. — Problème III. Déterminer l'accroissement infiniment petit de chaleur d'un kilogramme de mélange d'eau et de vapeur saturée à la température $t + dt$, par rapport à un mélange d'eau et de vapeur saturée, à la température t, contenant une proportion M de vapeur.

Il suffit de remarquer que quand P devient $P + \left(\frac{dP}{dt}\right)dt$, M devient $m + dm$, et qu'ainsi l'accroissement de chaleur du est donné par la différentielle de

$$U = \int_0^t C\,dt + m\,S - m\,A\,P\,(V - v)$$

d'où $$du = C\,dt + d\,(m\,S) - A\,d\,[m\,P\,(V - v)]$$

Si l'on voulait avoir la valeur de dQ correspondante, qui nous sera nécessaire dans les applications, il faudrait ajouter à l'expression précédente le produit de A par le travail équivalent $P\,d\,[m\,(V - v)]$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} dQ &= C\,dt + d\,(m\,S) + A\,d\,[m\,P\,(V - v)] + A\,P\,d\,[m\,(V - v)] \\ &= C\,dt + d\,(m\,S) - A\,P\,d\,[m\,(V - v)] - A\,m\,(V - v)\left(\frac{dP}{dt}\right)dt + A\,P\,d\,[m\,(V - v)] \\ &= C\,dt + d\,(m\,S) - A\,m\,(V - v)\frac{dP}{dt}\,dt = C\,dt + d\,(m\,S) - \frac{m\,S}{a + t}\,dt \end{aligned}$$

383. — Relation spéciale à toute évolution adiabatique.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On a alors $Q = 0$ ce qui revient à

$$c\,dt + d(m\rho) - \frac{m\rho}{a+t}\,dt = 0,$$

et l'on peut encore remplacer cette relation par une relation plus simple

$$\frac{c\,dt}{a+t} + \frac{d(m\rho}{a+t} - \frac{m\rho}{(a+t)^2}\,dt = 0$$

ou $$\frac{c\,dt}{a+t} = -\,d\left(\frac{m\rho}{a+t}\right).$$

Cette relation spéciale nous servira dans la démonstration du théorème suivant.

384. — Un mélange d'eau et de vapeur saturée étant donné, son volume varie en sens inverse de la température dans toute évolution adiabatique.

On a d'abord, pour une variation de volume dV,

$$dQ = du + AP\,dV \text{ ou } dQ = du + AP\,d[m(V-v)].$$

et pour $dQ = 0$

$$\frac{du}{dv} = -AP$$

Le rapport $\frac{du}{dV}$ est essentiellement négatif

Mais on a aussi, sous la seconde forme,

$$dQ = du + AP\,d[m(V-v)]$$

et pour $dQ = 0$

$$du = -AP\,d[m(V-v)] = -P\,d\left(\frac{m\rho}{(a+t)} : \frac{dP}{dt}\right)$$

$$= -P\,d\left[\frac{m\rho}{a+t} \times \left(\frac{dP}{dt}\right)^{-1}\right] = -P\left[\left(\frac{dP}{dt}\right)^{-1} d\left(\frac{m\rho}{a+t}\right) - \frac{m\rho}{a+t}\left(\frac{dP}{dt}\right)^{-2}\left(\frac{d^2P}{dt^2}\right)dt\right]$$

ou en utilisant la relation du numéro précédent

$$du = -P\left[-\left(\frac{dP}{dt}\right)^{-1} c\,\frac{dt}{a+t} - \left(\frac{m\rho}{a+t}\right)\left(\frac{dP}{dt}\right)^{-2}\frac{d^2P}{dt^2}\,dt\right]$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{P}{\left(\frac{dP}{dt}\right)^2(a+t)}\left[c\left(\frac{dP}{dt}\right) + m\rho\left(\frac{d^2P}{dt^2}\right)\right]$$

On voit ainsi que $\frac{du}{dt} > 0$, et comme $\frac{du}{dV} < 0$

on en déduit $\frac{dV}{dt} < 0$, relation qui démontre le théorème énoncé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

385. — Problème IV. — Déterminer les changements infiniment petits dans les rapports d'un Kilogramme de mélange d'eau et de vapeur, quand le mélange se modifie dans une évolution adiabatique. En égalant à 0 la valeur générale de dQ, on obtient

$$dQ = C\,dt + d(m\rho) - \frac{m\rho}{a+t}\,dt = 0$$

d'où successivement

$$C + \frac{d(m\rho)}{dt} - \frac{m\rho}{a+t} = 0$$

$$C + m\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{dm}{dt} - \frac{m\rho}{a+t} = 0$$

$$\frac{\rho\,dm}{dt} = \frac{m\rho}{a+t} - m\left(\frac{d\rho}{dt}\right) - C$$

$$= \frac{m\rho - m(a+t)\left(\frac{d\rho}{dt}\right) - C(a+t)}{a+t}$$

$$= \frac{\rho - (a+t)\left(\frac{d\rho}{dt}\right)}{a+t}\left(m - \frac{C(a+t)}{\rho - (a+t)\left(\frac{d\rho}{dt}\right)}\right)$$

La discussion de cette équation donnera la solution du problème en tenant compte de ce que la chaleur de vaporisation ρ est toujours positive et la dérivée $\frac{d\rho}{dt}$ toujours négative, ce qui assure au premier facteur le signe positif ; $\frac{dm}{dt}$ sera ainsi de même signe que le second facteur $m - \frac{C(a+t)}{\rho - (a+t)\frac{d\rho}{dt}}$ et nous aurons à faire, sur cette dernière quantité, trois hypothèses distinctes :

1° Si $m = \frac{C(a+t)}{\rho - (a+t)\frac{d\rho}{dt}}$, dm est nul, et il ne se produira ni vaporisation nouvelle, ni condensation, par suite de l'évolution adiabique entre t et $t+dt$.

Or la valeur de $m = \frac{C(a+t)}{\rho - (a+t)\frac{d\rho}{dt}}$ revient à

$$m = \frac{(1 + 0{,}000\,04t + 0{,}000\,000\,9t^2)(273+t)}{(606{,}5 + 0{,}305\,t - t - 0{,}000\,021t^2 - 0{,}000\,000\,3t^3) - 273 + t)(-0{,}695 - 0{,}000\,04t - 0{,}000\,000\,9t^2)}$$

et après calculs faits.

$$m = \frac{(1 + 0{,}000\,04t + 0{,}000\,000\,9t^2)(273+t)}{796{,}235 + 0{,}010\,92\,t + 0{,}000\,2657\,t^2 + 0{,}000\,006\,t^3}$$

Les valeurs de m qui, aux diverses températures, correspondent à la condition

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui nous occupe sont, d'après cette formule, les suivantes :

$t = 0$	$m = 0.343$	$1-m = 0.657$
50	0.407	0.593
100	0.472	0.528
150	0.539	0.461
200	0.604	0.396

2° Dans tous les autres cas, on aura $m - \frac{c(a+t)}{\varsigma - (a+t)\frac{d\varsigma}{dt}} \gtrless 0$

et par conséquent $\frac{dm}{dt} \gtrless 0$, et comme on a toujours $\frac{dV}{dt} < 0$ on en conclut que $\frac{dm}{dV} \lessgtr 0$.

La proportion de vapeur et le volume total varient en sens contraires ou dans le même sens.

La première de ces circonstances est presque toujours satisfaite dans la pratique; il y a ainsi condensation pendant la détente à chaleur constante.

386. — Travail total d'un Kilogramme de vapeur d'eau. Une machine à vapeur à double effet ayant par hypothèse les dimensions nécessaires pour recevoir un Kilogramme de vapeur à chaque admission, donne lieu à diverses quantités de travail que nous nous proposons d'évaluer successivement.

Nous y ferons abstraction des espaces nuisibles et nous supposerons qu'après la détente terminée, à la fin de la course directe, la course inverse est entièrement consacrée à l'échappement.

Considérons pour cela quatre phases successives de l'action de la vapeur en représentant le travail par la lettre T avec indice.

Admission. La pression étant p_1, le volume de l'eau sera V_1 et l'excès de celui de la vapeur sera $m_1 V_1$ [1]

(1) On prendra soin de remarquer que dans cette formule et les suivantes la notation V est exclusivement employée à désigner l'excès du volume de la vapeur par rapport à celui de l'eau qui l'a formée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où $$T_1 = p_1 (v_1 + m_1 V_1).$$

Détente. — Nous estimerons le travail de la détente T_2 en unités de chaleur, en remarquant que, puisqu'elle constitue une évolution adiabatique, on doit avoir

$$Q = 0 = U_1 - U_2 - A T_2$$

d'où $T_2 = \frac{U_1 - U_2}{A}$, U_1 et U_2 désignant les quantités de chaleur correspondant au commencement et à la fin de la détente.

Echappement. — Le volume total du mélange gazeux étant, à la fin de la détente, $v_2 + m_2 V_2$, le travail correspondant T_3, qu'il faut dépenser pour le faire entrer dans le condenseur, où la pression est p' sera négatif et aura pour valeur

$$T_3 = -p' (v_2 + m_2 V_2)$$

Alimentation. — L'eau d'alimentation est, dans le condenseur, à la pression p', et il faut la faire passer dans la chaudière, où la pression est p_1, de sorte que si le volume d'un kilogramme d'eau est v' dans le condenseur, on aura

$$T_4 = -(p_1 - p') v'$$

et c'est là encore un travail négatif.

Travail total. — En additionnant ces quatre évaluations successives, on obtient

$$T = p_1 (v_1 + m_1 V_1) + T_2 - p' (v_2 + m_2 V_2) - (p_1 - p') v'$$
$$= p_1 m_1 V_1 + T_2 - p' m_2 V_2$$

v_1, v_2 et v' représentant les volumes d'un kilogr. d'eau liquide sous les diverses conditions, volumes qui peuvent sans erreur sensible, être regardés comme égaux entr'eux.

387. — Observation sur la température à la fin de la détente. — La détente ayant lieu sans gain ni perte de chaleur, on a pour chaque élément de cette période,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\frac{dQ}{a+t} = \frac{c\,dt}{a+t} + \partial\left(\frac{m\,s}{a+t}\right) = 0$$

d'où, en intégrant entre les limites t_1 et t_2,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{c\,dt}{a+t} + \partial\left(\frac{m_2 s_2}{a+t_2}\right) = 0 \quad \frac{m_1 s_1}{a+t} = 0$$

Si t_2 était donné à priori, cette relation permettrait de déterminer m_2,

Mais si les deux quantités t_2 et m_2 sont inconnues et si, dans une machine donnée, la détente a lieu dans un espace déterminé, on a entre ces deux inconnues la relation.

$\frac{v_1 + m_1 V_1}{v_2 + m_2 V_2} = K$ ou approximativement, par suite de la petitesse relative de V_1 et V_2

$$\frac{m_1 V_1}{m_2 V_2} = K$$

K étant le rapport entre les volumes occupés par le mélange gazeux, au commencement et à la fin de la détente.

On opère alors par tatonnement en prenant arbitrairement une valeur de $t_2 < t_1$; on obtient ainsi une première approximation de m_2, qui ne satisfait pas encore à la relation en K, et l'on modifie t_2 en conséquence, jusqu'à ce que l'on soit arrivé à la véritable valeur de ce rapport K

388. — Dépense correspondante de chaleur. Le Kilogramme d'eau étant pris à la température t_2 et porté ensuite, à l'état de mélange gazeux, à la température t_1 et à la pression p_1 la dépense totale de chaleur est :

$$Q = \int_{t_2}^{t_1} c\,dt + m_1 s_1$$

389. — Coëfficient économique de la machine à vapeur. La quantité de chaleur réellement utilisée et qu'il convient de rapprocher de la précédente pour obtenir le coëfficient économique R, diffère de celle ci en ce que la vapeur d'échappement a porté, dans le condenseur, une quantité de chaleur $m_2 s_2$ perdue pour l'effet utile. On obtiendra donc la valeur du coëfficient économique par l'expression.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$R = \frac{\int_{t_2}^{t_1} c\,dt + m_1 \rho_1 - m_2 \rho_2}{\int_{t_2}^{t_1} c\,dt + m_1 \rho_1}$$

Tous les éléments de cette valeur, calculés par M. Zeuner ont été reproduits et publiés dans les ouvrages spéciaux. Combes: Voir dans le bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale, Tome 62, page 351.

On arriverait exactement à la même évaluation de la chaleur utilisée $A\,T$ en développant la valeur de T et en y introduisant pour u_1 et u_2 les valeurs tirées de la formule.

$u = \int_0^t c\,dt + m\rho - Am\,PV.$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Travail électrique et transport de l'énergie.

390. — Détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur par les actions magnéto-électriques. — Dans son mémoire du 21 Juin 1859, M. Joule s'exprime ainsi :

« En 1843 j'ai trouvé que la chaleur dégagée par la magnéto-électricité était proportionnelle au travail consommé. — Par l'observation de ces faits je me suis considéré comme fondé à annoncer que la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de 1 kilogramme d'eau, de 1° centigrade, est égale ou peut être convertie en un travail mécanique correspondant à l'élévation, à un mètre de hauteur, d'un poids de 460 kilogrammes. »

Nous avons fait la conversion en mesures françaises ; le résultat indiqué dans le texte anglais, mais les autres moyens de détermination ont conduit ultérieurement M. Joule lui même à la valeur 425.

La dépense de chaleur ainsi constatée par M. Joule dans le passage d'un courant électrique dans un fil conducteur nous servira de base aux indications sommaires que nous nous proposons de donner sur le transport du travail par les courants.

391. — Forces électriques. — L'unité de force électrique est celle qui imprimerait seulement à l'unité de masse une accélération de 1 mètre en une seconde ; elle est donc 9.81 fois plus petite que l'unité de force mécanique.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Toute force électrique F, correspond ainsi à une force mécanique F:g et il y a lieu de faire remarquer qu'elle ne varie pas, comme le poids lui même, suivant le lieu.

392. — Principales unités électriques. Dans l'action des courants nous avons nécessairement à considérer trois ordres différents de grandeurs.

1° La force électromotrice ou force qui donne lieu à l'action sur un point déterminé. L'unité de force électromotrice est le Volt, et se trouve produite par les 100/108 d'un élément de pile de Daniell.

2° La quantité d'électricité ou intensité du courant, est l'intensité qui pour un Volt de force électromotrice, fournit un travail égal à 1 kilogrammètre divisé par g.

En désignant par E la force électromotrice et par I l'intensité on aura donc $T = \frac{EI}{g}$

3° La résistance qu'oppose le conducteur au passage du courant: Suivant la loi de Joule cette résistance est liée aux deux autres grandeurs par la relation E=RI, ce qui revient à dire que l'unité de résistance est celle qui correspond à un courant d'intensité 1, développé par une force électromotrice égale à l'unité; elle équivaut à peu près à celle d'une colonne de mercure de 1 millimètre quarré de section et de 1 mètre de longueur.

Les trois ordres de grandeurs E, I et R, sont les seules qu'il nous sera nécessaire de considérer dans les paragraphes suivants; leurs unités ont pris les noms de Volt, Ampère, et Ohm, d'après les noms des physiciens qui ont le plus contribué à la connaissance des actions électromagnétiques On pourrait utilement rappeler suivant la décision antérieurement prise par l'association britannique que l'Ampère (anciennement le Weber) pris pour unité d'intensité est celle du courant fourni par une force électromotrice égale à l'unité, le Volt, dans un circuit de résistance égale à l'unité, l'Ohm.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

393. — Mesures des quantités électriques. — La résistance d'un circuit se détermine facilement avec des appareils simples, tarés par comparaison, et connus sous les noms de bobines de résistance ou de pont de Wheatstone.

Les électromètres, les galvanomètres et les électrodynamomètres sont les instruments à l'aide desquels on mesure directement les intensités; suivant leur mode de construction ces instruments fournissent des déviations qu'il suffit d'observer et qui sont proportionnelles, soit à l'intensité elle même, soit au carré de cette intensité.

Les galvanomètres donnent aussi la valeur de la force électromotrice $E = RI$ par la connaissance préalable de R, et la détermination directe de I résultant de l'observation de la déviation. Le plus ordinairement on opère sur une dérivation du courant à observer, dérivation que l'on fait passer au travers d'une boîte de résistance bien tarée et représentant un nombre considérable d'Ohms.

394. — Evaluation du travail électrique. — Le travail développé ou dépensé dans les actions des courants doivent principalement être évalués dans deux circonstances principales.

S'il s'agit d'un travail moteur il est mesuré par $EI : g$ s'il s'agit d'un travail résistant par $RI^2 : g$; ces évaluations sont absolument concordantes avec les déterminations dynamométriques faites à la manière ordinaire.

On pourra ainsi, sur un point quelconque d'un circuit, déterminer le travail en circulation et par conséquent déterminer aussi par différence la quantité de travail perdue entre deux points déterminés. Sous ce rapport la dynamométrie des actions électriques est bien plus avancé que celle des actions mécaniques et ses procédés conduisent plus facilement à des résultats plus certains.

395. — Travail converti en chaleur par la résistance

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

connue d'un circuit. — Nous avons vu que par une résistance de R Ohms et une intensité de I Ampères, le travail résistant est exprimé en kilogrammètres par le produit $\frac{RI^2}{g}$. Cette chute de travail se traduit nécessairement par l'apparition d'une quantité de chaleur équivalente, qui se disémine par la radiation du fil qui forme le circuit. On sait d'ailleurs que l'échauffement même qui en résulte a pour effet d'augmenter la résistance, et il est nécessaire de l'éviter autant que possible. La chaleur ainsi développée est nécessairement perdue pour l'effet utile dans tous les courants électriques employés à produire de la lumière ou à transmettre du travail moteur.

396. — Machines dynamoelectriques conjuguées. — En faisant tourner une bobine entourée d'un fil continu dans le voisinage d'un aimant, il se produit dans ce fil un courant plus ou moins énergique que l'on peut conduire par un autre fil à une distance quelconque. Lorsque l'aimant est remplacé par un électro aimant actionné par une dérivation du courant principal, la machine est dite dynamo électrique.

Si d'un autre côté on établit une communication entre cette première machine dynamo électrique et une autre machine analogue, le passage du courant dans la bobine de celle ci déterminera la rotation de son arbre, auquel aura été transmis de cette façon une certaine partie T_2 du travail primitif T dépensé à entretenir en mouvement la première bobine. La première machine, génératrice du courant se distingue ainsi de la seconde désignée sous le nom de réceptrice, et qui peut être placée à une grande distance de la première, pourvu que la double communication entr'elles ne cesse d'être maintenu, pôle à pôle.

397. — Transport électrique du travail mécanique. C'est par l'intermédiaire de deux machines dynamo électriques ainsi conjuguées que l'on parvient à transmettre le travail T_2 provenant du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

travail moteur T fourni par l'arbre moteur.

Au point de vue mécanique le rendement d'un pareil système sera $T_2 : T$; au point de vue électrique on pourra le calculer par le rapport $T_2 : T_1$ en ne comptant dans l'évaluation du travail moteur que celui qui est réellement fourni à l'arbre de la génératrice.

Les premières expériences de cette nature ont été faites à l'exposition de Vienne en 1873; les seules expériences sur lesquelles on connaisse des résultats certains ont eu lieu dernièrement dans les ateliers du chemin de fer du Nord, de Paris au Bourget et retour, sur les appareils installés par M. Marcel Deprez

398. — Résultats d'expériences. — Nous rapporterons ici la série complète des éléments de nos expériences du 19 Février dernier telle que nous l'avons indiquée dans notre communication à l'académie des sciences.

L'intensité moyenne du courant mesurait	$I = 8.687$ Ampère
La force électromotrice entre les pôles de la génératrice	$E_1 = 1865$ Volts
La force électromotrice entre les pôles de la réceptrice	$E_2 = 1485$ Volts
La résistance de la génératrice	$R_1 = 56$ Ohms
La résistance de la réception	$R_2 = 83$ Ohms
La résistance intermédiaire d'un circuit formé par un fil télégraphique, en fer de 4 millimètres de diamètre, et de 17 kilomètres de longueur	$r = 160$ Ohms

Le travail moteur était mesuré par un dynamomètre de rotation conduisant la génératrice; le travail transmis, par un frein de Prony établi sur l'arbre de la réceptrice.

On a pu déduire de tous ces éléments les évaluations suivantes:

Expériences

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Expériences du 18 Février 1883

Travail moteur mesuré au dynamomètre	$T = 10^{ch}.389$
Travail de la transmission mécanique à la génératrice	$t = 2.196$
Travail mécanique réellement fourni à la génératrice	$T = 8.193$
Travail perdu en chaleur dans la génératrice $\frac{R_1 I^2}{75g}$	$\theta_1 = 0.549$
Chute de travail adventice et non encore calculable	$C_1 = 0.844$
Travail électrique à la sortie de la génératrice $\frac{E_1 I}{75g}$	6.799
Travail perdu en chaleur dans le circuit	$\tau = 1.373$
Travail électrique à l'entrée de la réceptrice $\frac{E_2 I}{75g}$	5.426
Travail perdu en chaleur dans la réceptrice $\frac{R_2 I^2}{75g}$	$\theta_2 = 0.814$
Chute de travail adventice et non encore calculable	$C_2 = 1.309$
Travail mécanique transmis à l'arbre du frein	3.304

Dans d'autres expériences on a transporté, avec la même installation, jusqu'à 4.38 chevaux.

399. — Discussion de résultats. — Le rendement définitif en travail est exprimé par $T_2 : T = 0.318$ mais si l'on déduit le travail de la transmission pour obtenir plus exactement la mesure du rendement électrique on trouve $T_2 : T_1 = 0.403$.

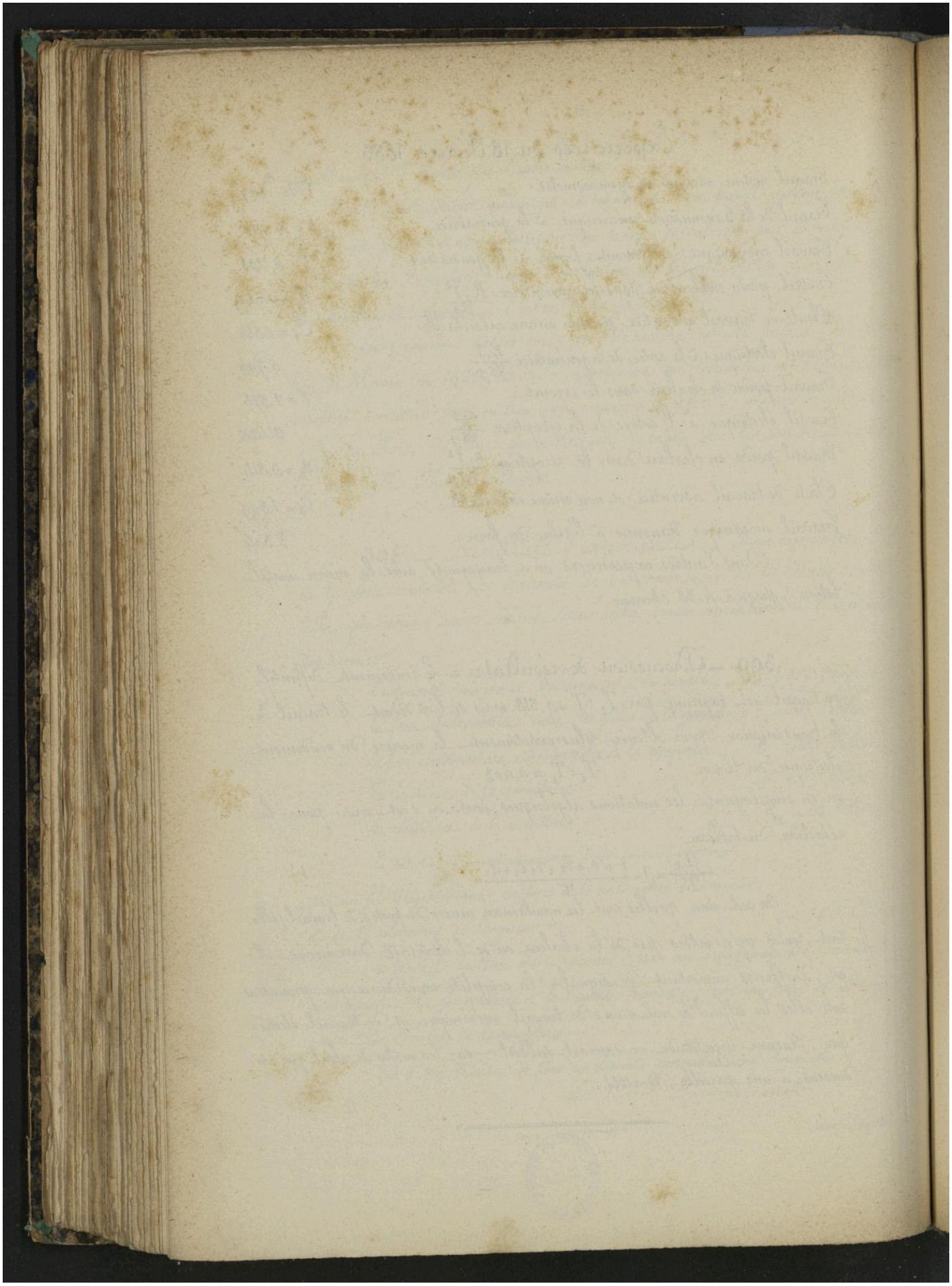
ou en employant les notations algébriques dont on s'est servi pour la rédaction du tableau

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{t + \theta_1 + \theta_2 + \tau + C_1 + C_2}{T}$$

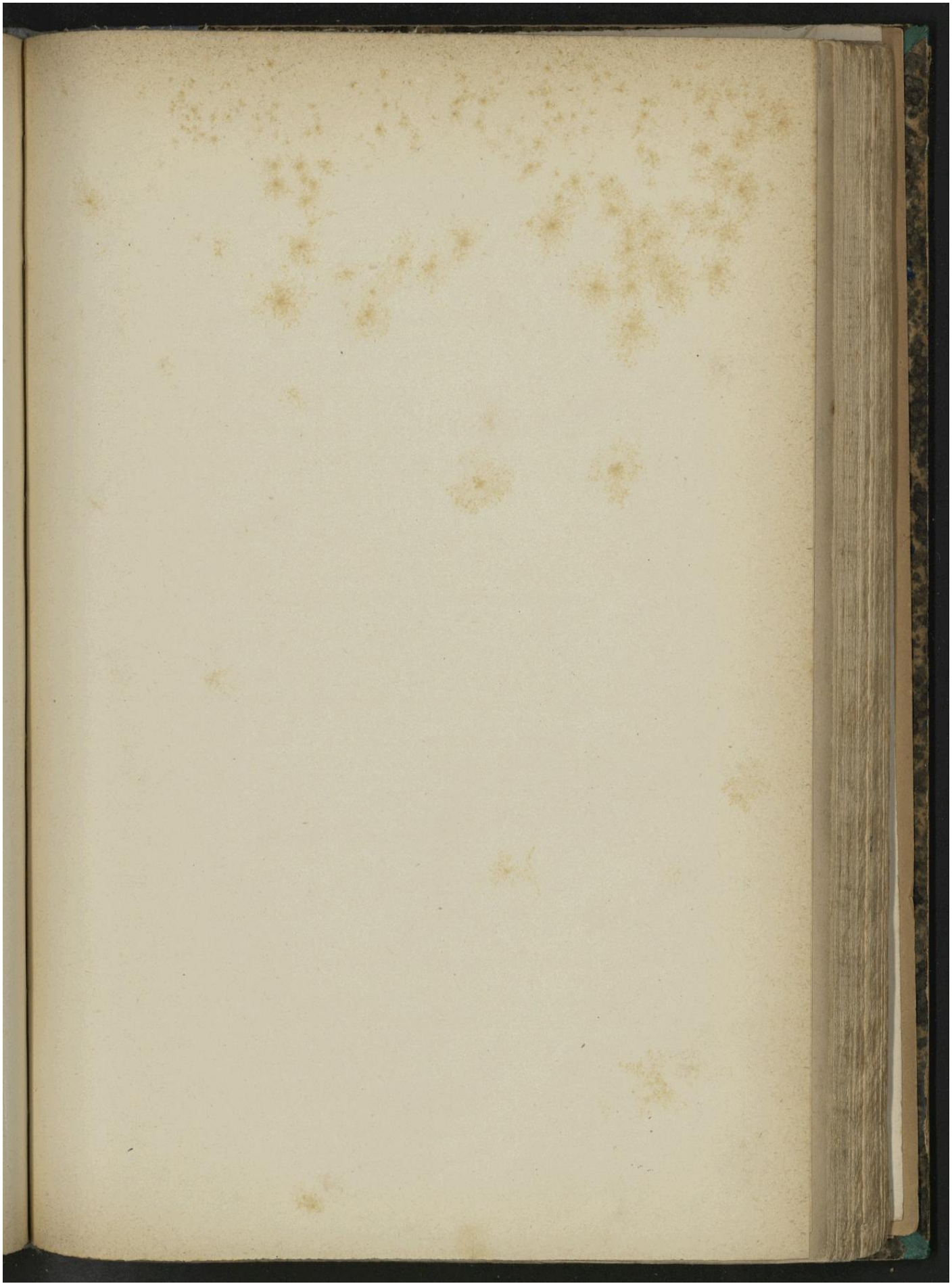
On voit ainsi quelles sont les nombreuses causes de pertes de travail; elles sont toutes représentées par de la chaleur ou de l'électricité disséminée. Il est d'ailleurs important de signaler la complète concordance que présentent entr'elles les difficultés évaluations de travail mécanique et de travail électrique. Aucune incertitude ne saurait subsister sur les modes de calcul qui conduisent à une pareille identité.

BIBLIOTHÈQUE CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS CNAM

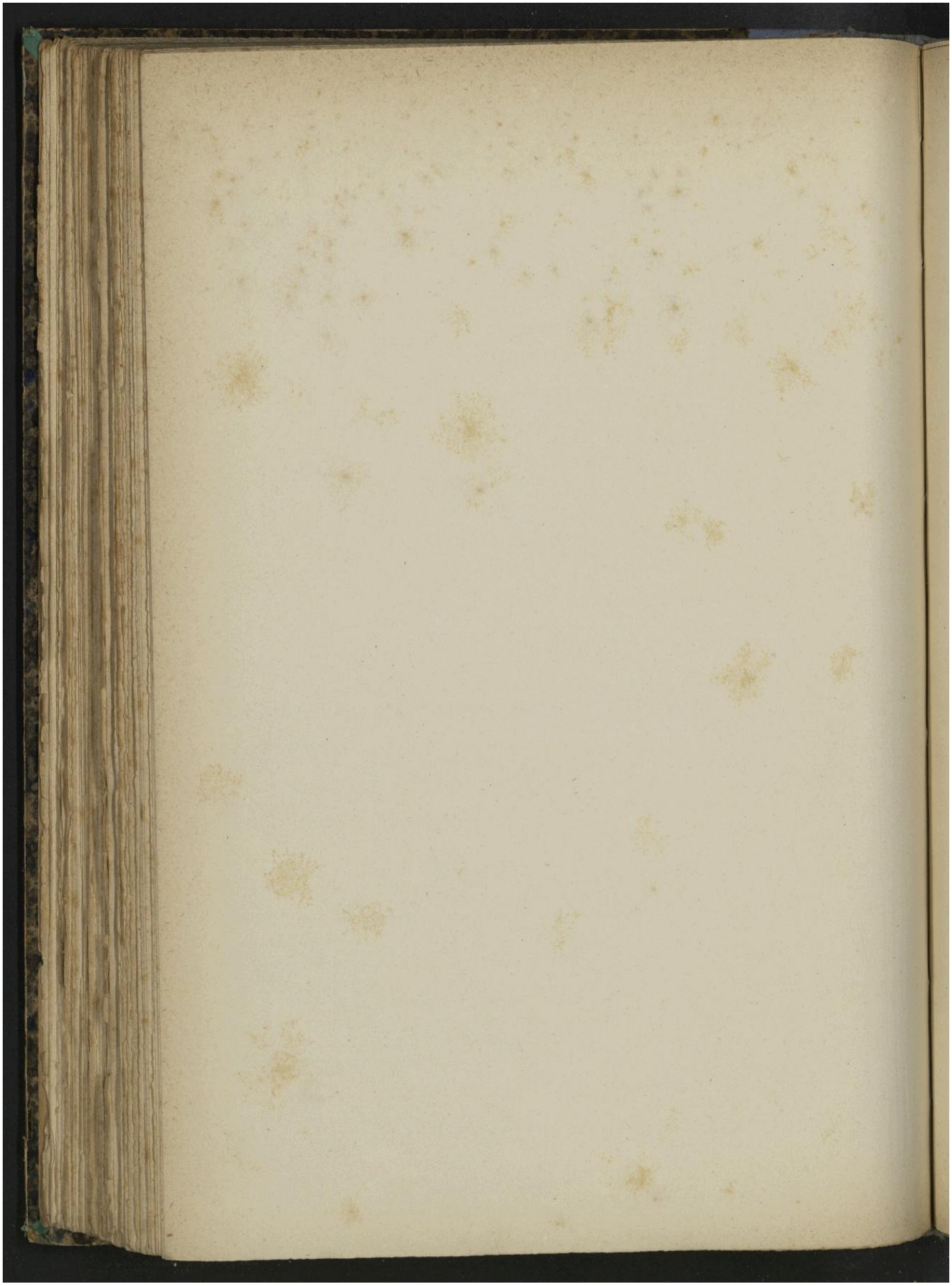
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



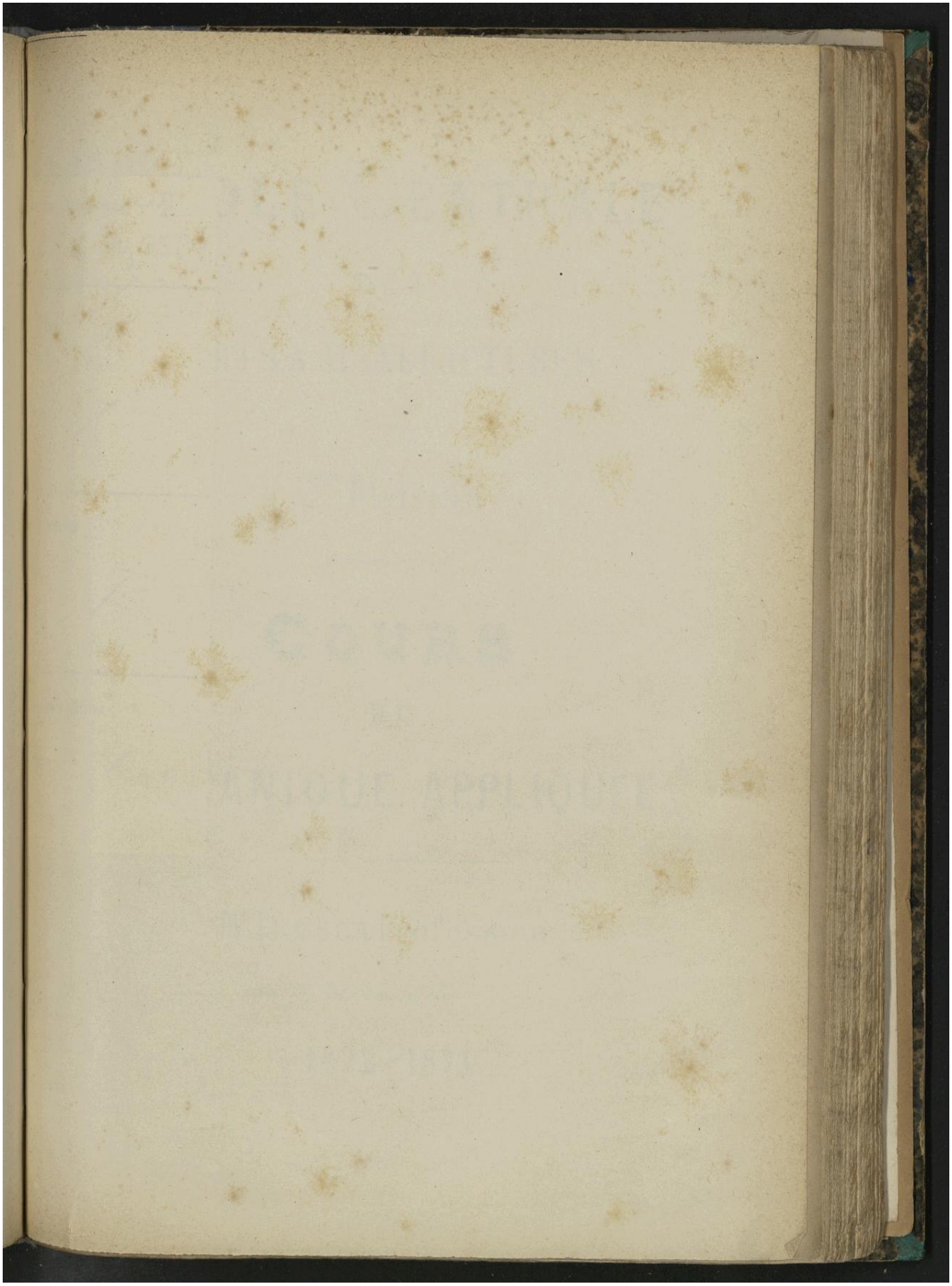
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires