Conditions d’utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- Le Conservatoire numérique communément appelé le Cnum constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d’œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s’inscrit dans le cadre de la loi nº 78-753 du 17 juillet 1978 :

- **la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue (Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - http://cnum.cnam.fr)**
- **la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l’objet d’une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.**

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- **les reproductions de documents protégés par le droit d’auteur, uniquement consultables dans l’enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l’autorisation préalable du titulaire des droits.**

4- Pour obtenir la reproduction numérique d’un document du Cnum en haute définition, contacter cnum(at)cnam.fr

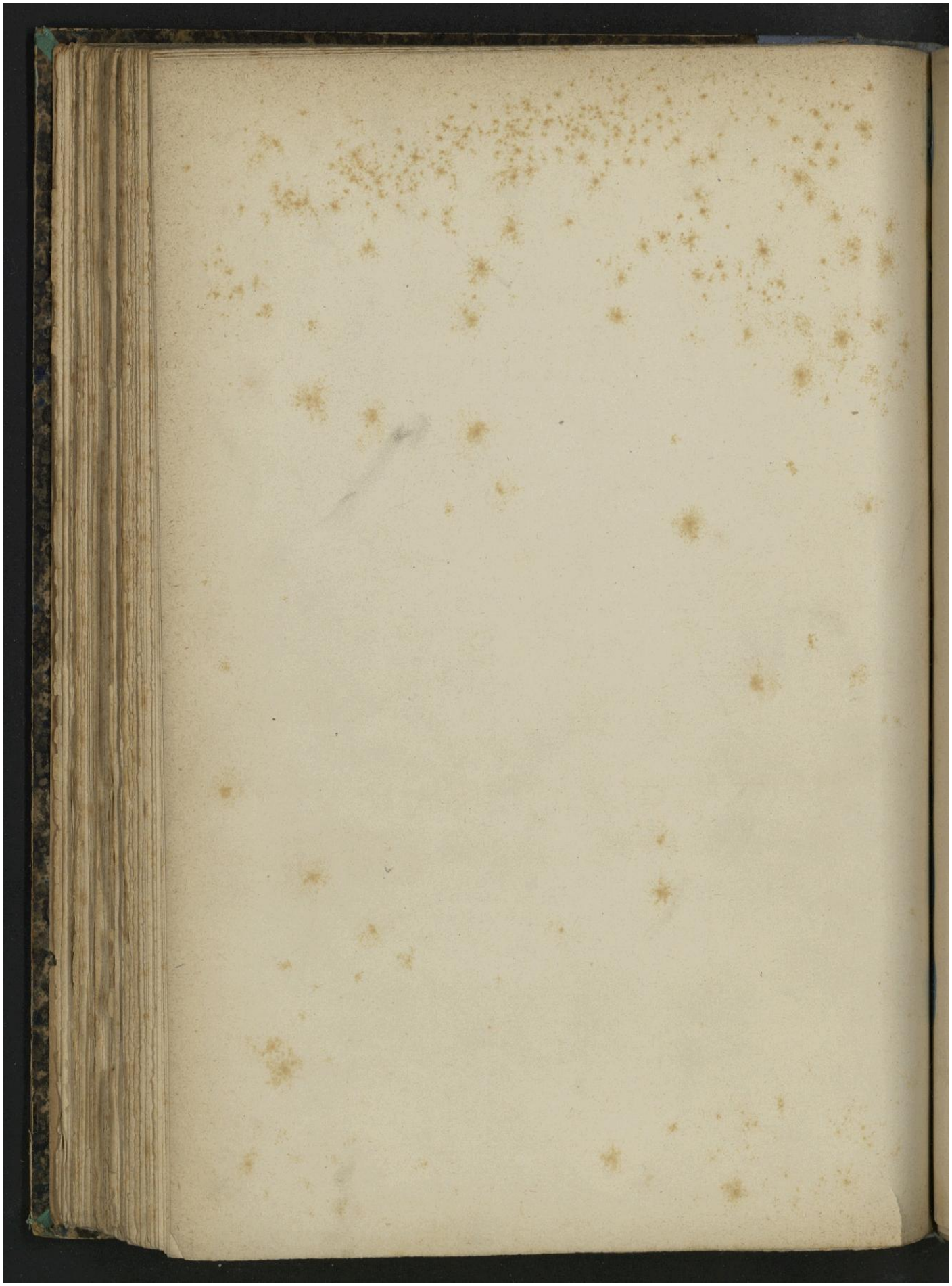
5- L’utilisateur s’engage à respecter les présentes conditions d’utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d’une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d’utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

NOTICE DE LA GRANDE MONOGRAPHIE	
Auteur(s) ou collectivité(s)	Tresca, Henri-Édouard
Auteur(s)	Tresca, Henri-Édouard (1814-1885)
Auteur(s) secondaire(s)	École centrale Paris
Titre	Cours de mécanique appliquée
Collation	4 vol.
Nombre de volumes	4
Sujet(s)	Mécanique appliquée -- Manuels d'enseignement supérieur
Permalien	http://cnum.cnam.fr/redir?4DY35
LISTE DES VOLUMES	Cours de mécanique appliquée : [2ème année] : année scolaire 1865-66
	Cours de mécanique appliquée : 2e division : 1867-1868
	Cours de mécanique appliquée : 2me division : 1872-1873
	Cours de mécanique appliquée : 1re division : 1882-1883

NOTICE DU VOLUME	
Auteur(s) volume	Tresca, Henri-Édouard (1814-1885)
Auteur(s) secondaire(s) volume	École centrale Paris
Titre	Cours de mécanique appliquée
Volume	Cours de mécanique appliquée : 2me division : 1872-1873
Adresse	[Paris] : [Ecole centrale des arts et manufactures], [1873]
Collation	1 vol. (271 p.) : ill. ; 29 cm
Nombre de vues	276
Cote	CNAM-BIB 4 Dy 35 (4)
Sujet(s)	Constructions -- Stabilité -- Manuels d'enseignement supérieur Mécanique appliquée -- Manuels d'enseignement supérieur Résistance des matériaux -- Manuels d'enseignement supérieur Résistance passive -- Manuels d'enseignement supérieur
Thématique(s)	Machines & instrumentation scientifique
Typologie	Ouvrage
Langue	Français
Date de mise en ligne	20/05/2021
Date de génération du PDF	24/02/2022
Permalien	http://cnum.cnam.fr/redir?4DY35.4



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4° Dy 35 (1)

ECOLE CENTRALE

DES

ARTS & MANUFACTURES

2me. Division

COURS

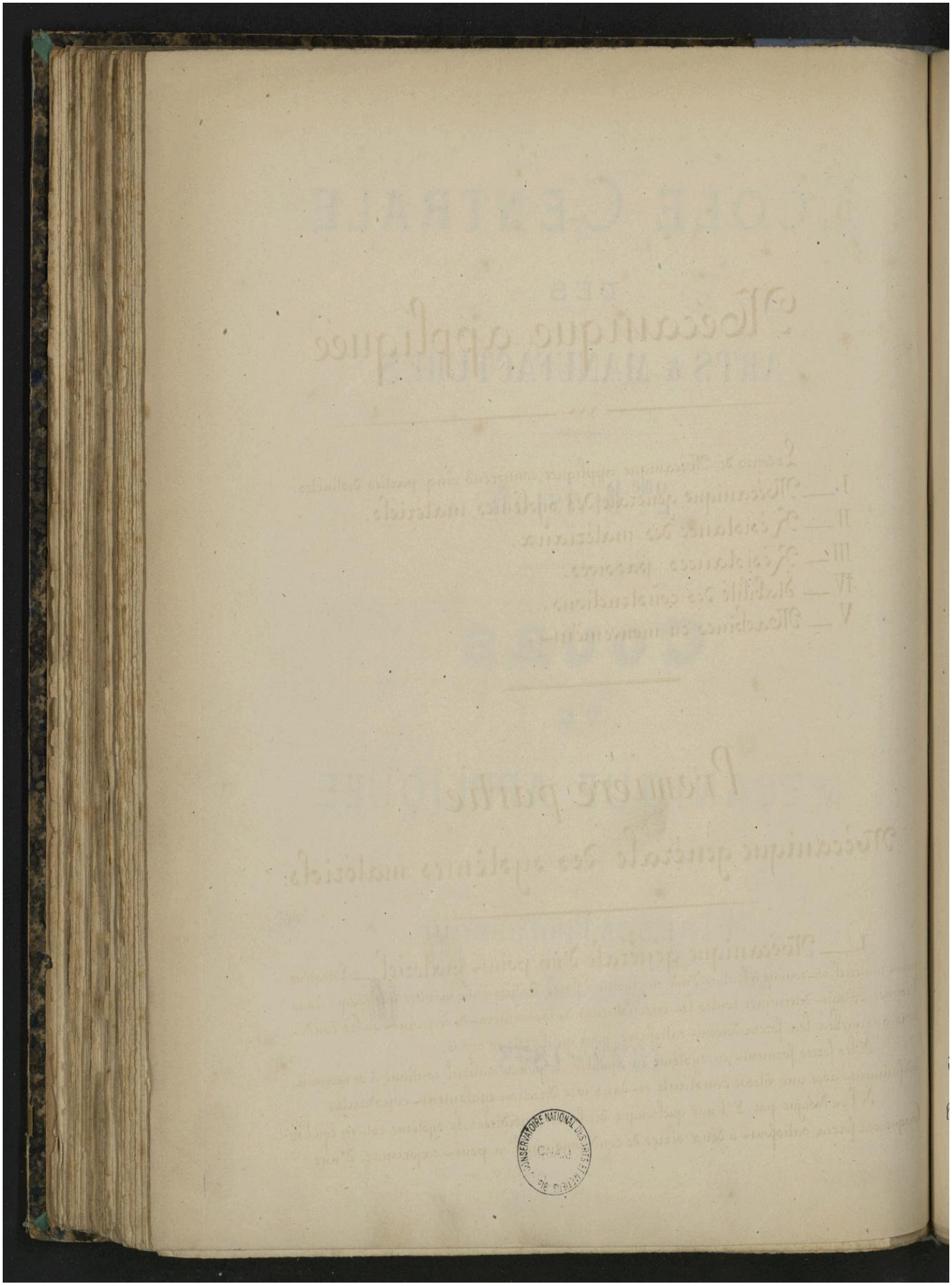
DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Mr. TRESCA Professeur

1872-1873

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Mécanique appliquée.

Le cours de Mécanique appliquée comprend cinq parties distinctes :

I — Mécanique générale des systèmes matériels.
II — Résistance des matériaux.
III — Résistances passives.
IV — Stabilité des constructions.
V — Machines en mouvement.

Première partie

Mécanique générale des systèmes matériels.

I. — **Mécanique générale d'un point matériel.** — Lorsqu'un point matériel est soumis à l'action d'une ou plusieurs forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, on sait déterminer toutes les circonstances du mouvement de ce point ou les conditions auxquelles les forces doivent satisfaire, pour qu'il reste en repos.

Si les forces forment un système en équilibre, le point matériel continue à se mouvoir indéfiniment avec une vitesse constante et dans une direction également constante.

Si l'on désigne par F l'une quelconque des forces considérées, le système est en équilibre lorsque ces forces satisfont à deux séries de conditions que l'on peut exprimer d'une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

manière sommaire par les relations

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma F_z = 0,$$
$$\Sigma \mathcal{M}_{ox} F = 0, \quad \Sigma \mathcal{M}_{oy} F = 0, \quad \Sigma \mathcal{M}_{oz} F = 0,$$

qui s'énoncent de la manière suivante :

Pour qu'un système de forces, appliquées à un point matériel, soit en équilibre, il faut et il suffit : — 1° — Que les sommes des projections de ces forces sur trois axes choisis arbitrairement soient séparément nulles. — 2° — Que les sommes des moments de ces forces par rapport à trois axes, également arbitraires, soient aussi séparément nulles.

En ce qui concerne la dynamique d'un point matériel, il faut encore rappeler qu'en vertu de son inertie, ce point matériel résiste à tout changement de vitesse dans une direction quelconque ; et si un tel changement se réalise il se développe une force particulière appelée *force d'inertie*, en sens contraire du mouvement produit et qui a pour expression

$$i = m \frac{dv}{dt},$$

cette force d'inertie ayant ainsi pour mesure le produit de la masse du point matériel par l'accélération.

C'est en partant de ces notions fondamentales qu'on a démontré les divers principes de la mécanique générale d'un point matériel, principes auxquels l'étude de la mécanique d'un système de points matériels, permettra de donner, sous une nouvelle forme, le caractère d'une plus grande généralité. Mais il faut d'abord définir ce que l'on entend par un système de points matériels et examiner successivement les deux principes fondamentaux relatifs à l'équilibre et au mouvement d'un tel système.

2. — Définition d'un système matériel. — Ce que l'on désigne, en mécanique, sous le nom de système matériel, est la réunion d'un nombre quelconque de masses élémentaires liées les unes aux autres par des conditions que l'on peut toujours assimiler à l'action de certaines forces, et sur chacune desquelles peuvent d'ailleurs s'exercer, indépendamment les unes des autres, des forces quelconques.

Les effets que déterminent les actions de ces forces, tant extérieures qu'intérieures, se déduisent des effets produits sur chacune des masses qui constituent le système matériel. Nous allons exposer les principes qui servent le plus habituellement à l'étude de la mécanique d'un tel système de points matériels.

3. — Principe du travail virtuel. — Le principe du travail virtuel qui peut facilement se déduire des connaissances déjà acquises sur la mécanique d'un point matériel est particulièrement utile dans l'étude de toutes les questions d'équilibre qui doivent bientôt nous occuper. Il permet d'ailleurs, de revoir, sous une autre forme, quelques-uns des théorèmes relatifs à l'équilibre des forces, établis dans le cours des études précédentes.

Les forces extérieures d'un système matériel étant désignées par la notation F, et les forces intérieures par f, à chaque point matériel m sont appliquées des forces telles que $F, f, f', f'', \ldots$, ces dernières étant en nombre aussi grand que l'on veut, et exprimant les forces que chacun des autres points du système exerce en particulier sur le point m. Si ce point est en équilibre, la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

résultante de toutes les forces $F', f_1', f_2', \ldots$, est nulle, et par conséquent aussi la somme des projections de toutes ces forces sur une direction quelconque ds', prise dans un sens absolument arbitraire.

On a donc, pour le point m', en vertu des règles de la composition des forces concourantes,

$$F'\cos(F', ds') + f_1'\cos(f_1', ds') + f_2'\cos(f_2', ds') + \ldots = 0.$$

L'égalité précédente subsiste encore lorsqu'on multiplie tous les termes du premier membre par un déplacement infiniment petit ds' du point m', dans cette direction, ce qui donne :

$$F'\cos(F', ds')\,ds' + f_1'\cos(f_1', ds')\,ds' + f_2'\cos(f_2', ds')\,ds' + \ldots = 0.$$

Chacun des termes de cette expression représentera le travail de chacune des forces si le déplacement ds' avait effectivement lieu, et l'on appelle *travail virtuel* de chacune d'elles ce même travail, lorsqu'il correspond à un déplacement idéal et hypothétique tel que le déplacement ds' que nous considérons en ce moment.

En désignant ce travail virtuel par la dénomination $\mathcal{T}_v$, on peut écrire la même relation sous cette forme nouvelle,

$$\mathcal{T}_v F' + \mathcal{T}_v f_1' + \mathcal{T}_v f_2' + \ldots = 0.$$

On arriverait à une relation semblable pour un autre point quelconque m'' sollicité par les forces $F'', f_1'', f_2'' \ldots$ On obtient ainsi un grand nombre d'équations d'équilibre. Chacune d'elles doit être absolument vérifiée si le système matériel est en équilibre, quelle que soit la direction ds' choisie arbitrairement, et l'on peut encore exprimer ces mêmes conditions d'équilibre au moyen d'autres relations obtenues en combinant algébriquement, d'une manière quelconque, les relations précédentes.

Parmi ces combinaisons, la plus simple est celle qui exprime la somme de toutes les relations qui concernent chacun des points matériels, ce qui donne immédiatement, sous la forme la plus abrégée :

$$\Sigma\left(\mathcal{T}_v F + \Sigma\,\mathcal{T}_v f\right) = 0.$$

Cette relation est l'expression la plus usitée du principe du travail virtuel, qui s'énonce ainsi qu'il suit :

Lorsque l'équilibre existe entre les forces qui agissent sur un système matériel, la somme algébrique des travaux virtuels de toutes les forces extérieures et intérieures est nulle.

L'équation précédente en contient implicitement autant d'autres que l'on veut, puisque l'on peut varier les déplacements infiniment petits, tous à fait arbitraires, sans que l'équation fondamentale cesse d'être satisfaite.

Lorsque le travail des forces intérieures ou mutuelles est nul séparément, ce qui arrive toutes les fois que le corps est parfaitement solide ou que les forces intérieures sont toutes égales deux à deux, et respectivement de sens contraire, l'équation se réduit à

$$\Sigma\,\mathcal{T}_v F = 0.$$

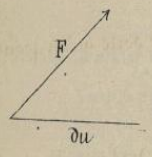
C'est sous cette forme que nous aurons souvent à en faire l'application, et c'est sous cette forme aussi qu'elle conduit, par des considérations très-simples, à l'établissement des conditions fondamentales relatives à l'équilibre des corps parfaitement solides. Nous indiquerons seulement ces déductions pour les formules les plus importantes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4. — Conditions résultant de la considération du mouvement virtuel de translation. —

Si nous considérons un mouvement virtuel de translation du, appliqué à tout le système matériel dans une direction déterminée, chacun des travaux virtuels est représenté par une expression de la forme $F_u \times du$ qui revient à

$$F\cos(F, du) \times du .$$



Si l'on introduit chacune de ces expressions dans la formule générale du travail virtuel appliqué à un solide qui se déplace parallèlement à lui-même d'une quantité du et qu'on divise ensuite par ce facteur commun du, il vient

$$\Sigma F\cos(F, du) = 0 ,$$

et comme la direction du est arbitraire, cette relation subsiste pour des directions quelconques, et en particulier pour celles de trois axes non situés dans un même plan, ce qui donne parmi les conditions nécessairement satisfaites lorsqu'il y a équilibre, les trois relations :

$$\Sigma F\cos(F, dx) = 0, \quad \Sigma F\cos(F, dy) = 0, \quad \Sigma F\cos(F, dz) = 0 ;$$

ou, sous une forme plus simple,

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma F_z = 0,$$

qui signifient que dans le cas d'équilibre, les projections des forces sur trois axes sont séparément nulles.

Pour que la somme algébrique des projections de toutes les forces sur un axe quelconque soit nulle, il faut :

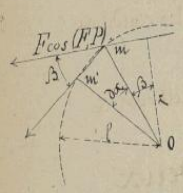
1° — Que si les unes font avec l'axe des angles aigus, les autres fassent nécessairement des angles obtus avec le même axe.

2° — Que la somme des projections de l'une des séries soit égale à la somme des projections de l'autre série

Il est facile de voir que les trois équations précédentes ont une signification distincte, ou, en d'autres termes, que l'une d'elles n'est pas la conséquence nécessaire des deux autres ; par exemple si toutes les forces étaient parallèles à l'axe des Z, les deux premières équations seraient évidemment satisfaites, et la troisième équation, complètement indépendante des deux autres, serait celle sur laquelle reposerait la principale condition d'équilibre. Ces équations doivent ainsi être considérées comme étant séparément et collectivement nécessaires pour l'équilibre du système auquel elles sont appliquées.

5. — Conditions résultant de la considération du mouvement virtuel de rotation. —

Lorsqu'il s'agit d'un mouvement de rotation de tout le système matériel, si l'on considère en particulier le point m dans son mouvement autour de l'axe projeté en O, sur le plan de la figure, pour un déplacement infiniment petit, $mm' = ds$, l'expression du travail virtuel d'une force quelconque F, agissant sur le point m, est $F\cos(F, ds)\, ds$.



Si (F,P) désigne l'angle de la force F avec le plan de la figure, on a,

$$F\cos(F, ds)\, ds = F\cos(F, P)\cos\beta .\, ds ;$$

et à cause de $\cos\beta = \frac{r}{l}$, $ds = l\,d\alpha$, il vient

$$F\cos(F, ds)\, ds = F\cos(F, P)\, r\, d\alpha .$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le principe du travail virtuel, appliqué à une série de forces telles que F, agissant sur des points différents peut donc se résumer dans la formule

$$\Sigma F \cos(F,P)\, \tau\, d\alpha = 0,$$

dans laquelle $d\alpha$ est une quantité constante pour tous les points du système, de sorte qu'on peut diviser par $d\alpha$ et écrire simplement

$$\Sigma F \cos(F,P)\, \tau = 0.$$

Le premier membre de cette équation représente la somme des moments des forces F par rapport à l'axe de rotation, et l'expression précédente peut, dès lors, être mise sous la forme

$$\Sigma . M_0 F = 0.$$

En raisonnant de même pour trois axes ox, oy, oz, non situés dans le même plan, on obtient les trois équations générales de l'équilibre dans le mouvement de rotation, c'est-à-dire

$$\Sigma . M_x F = 0, \quad \Sigma . M_y F = 0, \quad \Sigma . M_z F = 0,$$

Ces équations ont, comme celles du numéro précédent, chacune une signification distincte. Si, par exemple, toutes les forces étaient situées dans le plan x, y, les deux premières équations des moments seraient vérifiées, sans que la troisième le fût nécessairement ; elles sont toutes trois nécessaires pour l'équilibre.

Il est facile de reconnaître que les trois conditions relatives à l'égalité des moments sont indépendantes des trois premières. On voit, en effet, qu'elles seraient satisfaites pour un nombre quelconques de forces passant toutes par l'origine, et il est évident que cette condition n'est pas, à elle seule, suffisante pour assurer l'équilibre.

Les six conditions qui viennent d'être établies, prises collectivement, expriment complètement qu'il y a équilibre entre toutes les forces du système. Ces relations sont d'ailleurs tout à fait générales et elles seraient encore applicables à un système matériel pouvant se déformer, à la condition de comprendre, parmi les forces à considérer, toutes les forces intérieures qui ont été désignées précédemment par la notation f.

6. — Notions sur l'équivalence de deux systèmes de forces. —

Pour un système matériel, comme pour un point isolé, on dit que deux systèmes de forces sont équivalents, lorsqu'ils produisent les mêmes effets. Il résulte immédiatement de cette définition, et de la complète généralité de l'équation du travail virtuel dans les corps solides, que deux systèmes équivalents peuvent se remplacer mutuellement dans cette équation.

Par exemple, si une force unique est équivalente à un système de plusieurs forces, auquel cas on dit qu'elle est la résultante de ces forces ; elle peut être introduite à leur place dans les conditions d'équilibre et inversement.

On peut de même transporter une force, dans sa direction, en un point quelconque d'un solide, ou en un point qui y serait relié d'une manière invariable, etc., etc.

7. — Réduction d'un nombre quelconque de forces à deux forces équivalentes. —

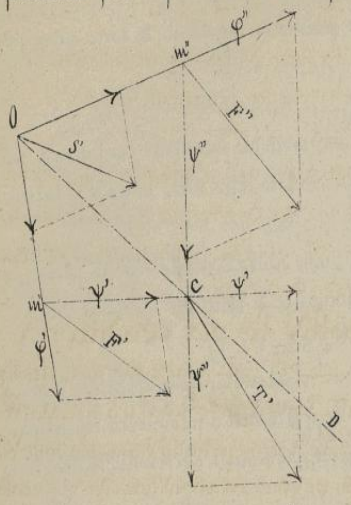
En partant de cette notion des forces équivalentes, il est facile de voir que des forces, en nombre quelconque, appliquées à un système matériel, peuvent toujours être remplacées par deux forces, dont l'une passerait par un point O, arbitrairement choisi.

Soient $F, F', F'', F''', \ldots$, les forces appliquées au système ; menons d'abord par le point O et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par chacune des deux premières forces F' et F'' deux plans qui se couperont suivant une droite OD.

Dans le plan F'OD, la force F' peut être décomposée en deux autres forces φ' et ψ', l'une passant par le point O, l'autre par un point C choisi arbitrairement sur la ligne OD.



La force F'' peut de même être remplacée par deux forces φ'' et ψ'', appliquées respectivement aux mêmes points O et C.

Ensuite les deux forces φ' et φ'' peuvent être remplacées par une résultante unique S' appliquée au point O, par lequel elles passent toutes deux, et les deux forces ψ' et ψ'' peuvent de même être remplacées par une force unique T', appliquée au point C, qui a été choisi arbitrairement sur l'intersection OD.

Le système primitif F', F'', F''', F^IV, ..., sera donc remplacé par le nouveau système équivalent S', T', F''', F^IV, ..., dans lequel les forces sont en égal nombre, mais l'une d'elles, S', passe maintenant par le point donné O.

On peut opérer de la même manière par rapport aux deux forces T' et F''', et composer ensuite la force passant par le point O avec la force S' qui vient d'être déterminée, de manière à obtenir un nouveau système de forces S'', T'', F^IV, ..., qui contient une force de moins avec la condition que l'une d'elles, la force S'', passe encore par le point O.

En continuant cette série d'opérations, on finit par réduire toutes les forces du système à deux forces seulement S et T dont l'une, la force S, passe nécessairement, comme toutes celles de même nom, par le point donné O.

Donc, un système quelconque de forces appliquées à un solide peut toujours se ramener à deux forces équivalentes, avec la condition que l'une d'elles passe par un point donné arbitrairement.

Cette propriété va nous servir à préciser davantage la signification des conditions générales de l'équilibre, et à faire voir que les six conditions énoncées sont, non seulement nécessaires, mais toujours suffisantes lorsqu'il s'agit de l'équilibre d'un corps solide.

8. — Lorsque les sommes des projections de toutes les forces sont nulles le système se ramène à un couple. — On vient de voir que le système de toutes les forces peut être remplacé par celui des forces S et T. Les équations tirées de la considération du mouvement de translation sont donc applicables à ces forces comme à celles du système primitif, et l'on a ainsi

$$S_x + T_x = 0, \quad S_y + T_y = 0, \quad S_z + T_z = 0;$$

c'est-à-dire

$$S_x = -T_x, \quad S_y = -T_y, \quad S_z = -T_z;$$

d'où l'on conclut que les deux forces S et T sont égales, parallèles et dirigées en sens opposés, ou, en d'autres termes, qu'elles forment un couple ; ce qui démontre que lorsque les sommes des projections des forces sur trois axes sont séparément nulles, on peut toujours remplacer ces forces par un couple équivalent.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

9.— Lorsque les sommes des moments sont nulles le système se réduit à une résultante unique. — Car, en remplaçant toutes les forces du système par les forces S et T, les sommes des moments de toutes les forces sont encore nulles, et l'on a

$$M_{ox}S + M_{ox}T = 0, \quad M_{oy}S + M_{oy}T = 0, \quad M_{oz}S + M_{oz}T = 0.$$

Si les axes passent au point O, par lequel passe aussi la force S, les moments de cette force S, par rapport aux trois axes, sont séparément nuls, ce qui ramène les équations précédentes à

$$M_{ox}T = 0, \quad M_{oy}T = 0, \quad M_{oz}T = 0.$$

D'où l'on conclut que la force T passe aussi par le point O, et, par conséquent qu'elle peut se composer avec la force S, en une résultante unique R, ce qui permet de dire que quand les sommes des moments de toutes les forces, pris par rapport à trois axes, sont séparément nulles, toutes ces forces peuvent être remplacées par une force unique passant par l'origine de ces axes.

10.— Dans un système parfaitement solide les six conditions précédentes sont suffisantes pour l'équilibre. — Il reste à faire voir que si les six conditions d'équilibre, celles de translation et celles des moments, sont satisfaites, il y a nécessairement équilibre. En effet, les deux forces S et T, équivalentes au système primitif, étant, par suite de la condition de translation, égales, parallèles et opposées, elles doivent aussi, par suite de la condition des moments, passer par un même point O; ce sont donc deux forces égales et opposées, appliquées à un même point, et qui, par conséquent, se font équilibre. Les six conditions nécessaires, déduites du principe général du travail virtuel, sont donc aussi suffisantes, trois d'entre elles, exprimant que les sommes des projections de toutes les forces sur trois axes sont séparément nulles; les trois autres exprimant que les sommes des moments des mêmes forces, pris par rapport à trois axes, sont aussi nulles

Les règles relatives à la composition des forces, dans les différents cas particuliers, se déduisent immédiatement de ces conditions générales, et il est utile de passer en revue les circonstances les plus nouvelles de cette composition, particulièrement en ce qui concerne les couples dont les propriétés sont, en général, moins bien étudiées que celles des forces concourantes ou des forces parallèles.

11.— Application aux règles de la composition des forces concourantes. — Si toutes les forces passent par un même point, que l'on peut prendre pour origine des coordonnées, les sommes des moments de ces forces par rapport à trois axes coordonnés, sont séparément nulles; il en est de même pour leur résultante R, et l'on n'a plus à considérer que les sommes des projections,

$$\Sigma F_x - R_x = 0, \quad \Sigma F_y - R_y = 0, \quad \Sigma F_z - R_z = 0.$$

La résultante est ainsi déterminée en grandeur et en direction, et il est facile de voir qu'elle est représentée par la diagonale du polygone des forces, car cette diagonale est la seule ligne qui satisfasse aux trois équations qui subsistent.

12.— Application aux règles de la composition des forces parallèles. — Si toutes les forces sont parallèles elles se projettent en vraie grandeur sur un axe aussi parallèle que l'on peut prendre pour axe des x, considéré par rapport à deux autres axes perpendiculaires; et si l'on désigne par R la résultante de toutes les forces, les équations de projection se réduisent à la seule relation $\Sigma F - R = 0$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

puisque l'on a, d'ailleurs $\Sigma F_y = 0$ et $\Sigma F_z = 0$, et la résultante est égale et de signe contraire à la somme algébrique de toutes les forces parallèles.

Quant aux équations des moments, qui sont, dans leur plus grande généralité,

$$\Sigma M_{ox} F - M_{ox} R = 0, \qquad \Sigma M_{oy} F - M_{oy} R = 0, \qquad \Sigma M_{oz} F - M_{oz} R = 0,$$

on voit qu'elles se réduisent aux deux dernières, puisque chacun des moments est alors nul par rapport à l'axe Ox ; la position de la résultante est donc déterminée par la double condition que les moments de cette résultante, par rapport à deux axes perpendiculaires à sa direction, soient respectivement égaux, et de mêmes signes, à la somme des moments des forces parallèles par rapport à ces mêmes axes. Le point O, ainsi considéré est connu sous le nom de *centre des forces parallèles*.

13. — Application aux règles de la composition des couples. —

Sous ce titre nous passerons en revue les théorèmes principaux de la composition des couples.

1° — *Le moment d'un couple est le même par rapport à un axe quelconque, perpendiculaire à son plan.* — Ce théorème se démontre comme une simple vérification géométrique, parce que, dans toutes les positions du point en lequel l'axe vient percer le plan, le moment du couple est toujours égal au produit de l'une des forces par la longueur de la perpendiculaire élevée sur la direction commune des deux forces, et comprise entre ces mêmes forces.

2° — *Un couple ne peut être tenu en équilibre par une force unique ;* car la résultante de translation des deux forces qui constituent le couple étant toujours nulle, il ne peut plus en être de même lorsque l'on introduit dans le système une troisième force.

3° — *Deux couples sont en équilibre lorsque leurs plans sont parallèles et leurs moments égaux et de signes contraires* ; car, si l'on prend un axe perpendiculaire à leur plan, les six équations d'équilibre sont satisfaites quand on considère cet axe comme appartenant à un système de trois plans de coordonnées rectangulaires. Ces six conditions d'équilibre se réduisent alors aux deux seules équations relatives à celui de ces plans qui est perpendiculaire à l'axe, et l'énoncé même du théorème montre que ces deux équations sont satisfaites.

4° — *Deux couples dont les plans sont parallèles et dont les moments sont égaux et de même signe, sont équivalents* : car, chaque couple pris séparément, serait équilibré à un couple parallèle dont le moment serait égal et de signe contraire.

5° — *Un couple peut toujours être remplacé par un couple équivalent dans lequel une des forces a une grandeur donnée et une direction parallèle au plan du premier couple ;* car la résultante de translation est, pour chacun des systèmes, nulle par rapport à un axe quelconque, et les conditions d'équivalence se réduisent à la condition de l'égalité entre les deux moments.

6° — *Des couples en nombre quelconque appliqués à un corps solide peuvent toujours se ramener à un seul couple.* — Cette règle est la conséquence immédiate

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de ce que la résultante de translation est nulle, et de ce que, toutes les forces peuvent se ramener à un seul couple

7°. — *Un système quelconque de forces peut toujours se ramener à une force passant par un point donné et à un couple* ; car ce système peut être remplacé par deux forces S et T, la première passant par un point donné O, auquel on peut aussi appliquer deux forces de signes contraires, égales et parallèles à T. Les forces S et T peuvent être remplacées par leur résultante R, qui passe aussi par le point O, et il reste les deux forces T et −T qui forment un couple.

14. — **Enoncé général du principe de Dalembert.** — Le principe posé par **Dalembert** en 1743 a une grande importance historique, parce qu'il a fourni une méthode générale et sûre pour résoudre tous les problèmes du mouvement, en les ramenant à des problèmes d'équilibre. Il a mis fin aux incertitudes que comportaient jusqu'alors les méthodes de calcul employées dans les différentes applications, et il doit, sous ce rapport, être considéré comme un des principes les plus féconds de la Mécanique.

Cependant il ne consiste réellement qu'en une simple extension donnée aux conditions d'équilibre et résultant immédiatement de l'égalité nécessaire entre l'action et la réaction, égalité qui avait été indiquée par **Newton** comme un axiome fondamental.

Lorsqu'il s'agit d'un point matériel seulement, on sait que toute action qui modifie la vitesse de ce point détermine une force d'inertie dont l'expression, $i = m\frac{dv}{dt}$, a été calculée dans une partie de ces enseignements.

La force d'inertie i, ainsi développée, fait obstacle aux actions extérieures exercées sur le point matériel que l'on considère, et l'on peut dire qu'elle fait alors équilibre à la résultante F de ces actions.

Quand le point fait partie d'un système matériel, on peut, par la pensée, le dégager de ce système, en considérant comme forces extérieures toutes les actions résultant de ses liaisons avec les autres points du système, et l'on dit alors que la force d'inertie i fait équilibre, tout à la fois, aux forces extérieures du système, qui sont directement appliquées au point considéré M, et en même temps qu'à chacune des forces f qui expriment les actions que les autres points exercent sur le point m.

On pourrait raisonner de la même manière pour chacun des points matériels du système ; et, en considérant alors l'ensemble des forces qui exercent leur action sur ce système, en y comprenant toutes les forces d'inertie, lui appliquer le principe général du travail virtuel qui contient à lui seul toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre

D'après ces indications, le principe de **Dalembert** doit être formulé ainsi qu'il suit :

Dans le mouvement d'un système matériel quelconque, il y a équilibre, en chaque instant, entre les forces extérieures appliquées aux divers points du système, les forces intérieures résultant des liaisons des divers points, et les forces d'inertie de tous ces points.

Cette relation est d'une grande utilité dans les questions de dynamique.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

15. — Expression générale du principe de D'Alembert. — En appliquant la formule du travail virtuel au principe de D'Alembert considéré par rapport aux forces F, f et i, on a immédiatement :

$$\Sigma F\cos(F,ds)\,ds + \Sigma f\cos(f,ds)\,ds - \Sigma i\cos(i,ds)\,ds = 0$$

ds étant un déplacement virtuel quelconque, et chacune des forces d'inertie devant être considérée comme retardatrice.

Le dernier terme de cette formule représente le travail total de la force d'inertie pour un déplacement ds, et l'on sait qu'un point matériel, sollicité par des forces quelconques, a, sur la courbe qu'il parcourt, le même mouvement qu'il aurait sur une droite, s'il était à chaque instant sollicité, suivant cette droite, par une force égale à la force totale.

Il résulte de là que si l'on remplace $\frac{ds}{dt}$ par $\frac{d^2s}{dt^2}$ dans l'expression de la valeur de i, ce qui donne $i = m\frac{d^2s}{dt^2}$; et si l'on remplace, en outre, chacune des forces F, f et i, par ses composantes parallèles à trois axes, on a :

$$\left(\Sigma F_x + \Sigma f_x - \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}\right)dx = 0, \qquad \left(\Sigma F_y + \Sigma f_y - \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}\right)dy = 0, \qquad \left(\Sigma F_z + \Sigma f_z - \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}\right)dz = 0.$$

Dans le cas où il n'y a pas à tenir compte des forces intérieures, les termes

$$\Sigma f_x\,dx, \qquad \Sigma f_y\,dy, \qquad \Sigma f_z\,dz,$$

disparaissent, et les expressions qui en résultent suffisent pour donner la solution de la plupart des problèmes que comporte la mécanique générale des systèmes matériels.

16. — Cas particulier du mouvement d'un point matériel.

Si, à l'aide de l'expression générale, on voulait retrouver les conditions du mouvement d'un point matériel, on retomberait nécessairement sur les équations ordinaires de l'accélération

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad F_z = m\frac{d^2z}{dt^2},$$

et le principe de D'Alembert, qui a surtout pour objet d'étudier le mouvement d'un système de points matériels, reproduit ainsi les formules ordinaires du mouvement d'un point, ce qui est évident à priori, puisque ces formules sont celles dont on a déduit implicitement l'expression générale qui précède.

17. — Utilité du principe de D'Alembert dans les questions de dynamique. — Le caractère essentiel du principe de D'Alembert repose sur ce qu'il fournit autant d'équations que l'on veut entre les diverses forces qui tendent à modifier le mouvement d'un corps, et parmi lesquelles se trouvent les forces d'inertie, qui sont exprimées en fonction des accélérations.

On peut d'ailleurs, dans les applications, obtenir les équations d'équilibre nécessaires et suffisantes, qui ont été déduites du principe du travail virtuel, avec cette seule différence que les forces d'inertie des points matériels qui constituent le système, entrent dans chacune d'elles.

18. — Emploi du principe de D'Alembert pour la détermination des circonstances du mouvement. — On peut tirer de l'une des formules générales la valeur de $\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ de l'accélération, en obtenir, par voie d'intégration, celle de la vitesse, toutes les fois que rien ne s'oppose à l'achèvement du calcul. Il est toutefois nécessaire de connaître, dans chaque cas particulier, les valeurs de f qui dépendent de la constitution du système et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mouvement, et l'on est le plus souvent réduit à faire, sur les valeurs de ces forces intérieures, des hypothèses plus ou moins approchées de la vérité. Le peu de données que l'on possède encore à cet égard limitera, dans un grand nombre de circonstances, l'application complète du principe qui nous occupe

Lorsque le système sera soumis à certaines liaisons, entre ses différents points, on aura entre les coordonnées de chacun de ces points, des relations de la forme :

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_2(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

auxquelles devront satisfaire les déplacements virtuels que les divers points du mobile pourraient prendre simultanément, ce qui donnera entre ces déplacements un égal nombre de relations telles que celle-ci

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\delta z_1 = 0$$

qui exprime en particulier que le point $x_1\ y_1\ z_1$ est constamment sur la courbe

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Si l'on a ainsi n équations de condition, il faudra chercher les autres relations au moyen de la formule générale du principe de D'Alembert, de manière à compléter le nombre des équations nécessaires à la détermination de tous les éléments de la question. Nous aurons souvent à faire usage de ces considérations.

19. — Application du principe de D'Alembert aux théorèmes principaux de la mécanique. — Les théorèmes principaux de la dynamique peuvent être déduits très-simplement du principe de D'Alembert et, en particulier le théorème du travail qui est le plus important de tous ; nous indiquerons aussi d'autres exemples de déductions analogues.

20. — Théorème du mouvement du centre de gravité. — Puisque l'on peut supposer aux déplacements virtuels une direction quelconque, la formule générale est encore vraie lorsque ces déplacements ont lieu parallèlement à l'axe des x, auquel cas on a $\delta y = 0$, $\delta z = 0$; et si l'on suppose en même temps que les forces intérieures se compensent, l'équation se réduit à

$$\Sigma F x - \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0.$$

Si X est l'abscisse du centre de gravité du système, on a, par définition

$$dX \Sigma m = \Sigma m\, dx,$$

d'où,

$$\frac{dX}{dt}\Sigma m = \Sigma m \frac{dx}{dt} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2 x}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

L'équation ci-dessus revient donc à

$$\Sigma F x = \frac{d^2 X}{dt^2}\Sigma m,$$

ce qui exprime une des conditions du mouvement du point matériel de masse m sous l'action des forces F auxquelles il serait directement soumis, condition qu'on peut énoncer ainsi :

Le centre de gravité d'un système matériel quelconque se meut de la même manière que si toute la masse y était concentrée et si les forces extérieures y étaient transportées parallèlement à elles-mêmes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

21.— Théorème du travail. — Pour déduire du principe de d'Alembert le principe général du travail, il suffit de considérer les déplacements virtuels dx, dy, dz, comme représentant les déplacements réels du mobile sous l'action des forces extérieures. L'équation en ds du N° 15 devient alors

$$\Sigma F\cos(F, ds)\,ds + \Sigma f\cos(f, ds)\,ds - \Sigma m\frac{dv}{dt}\,ds = 0.$$

$\frac{dv}{dt}$ n'étant autre chose, dans cette expression, que l'accélération déjà représentée par $\frac{d^2s}{dt^2}$, et l'action de la force d'inertie étant dirigée en sens contraire du déplacement ds.

Le dernier terme peut s'écrire

$$\Sigma m\frac{dv}{dt}ds = \Sigma m\frac{ds}{dt}dv = \Sigma mv\,dv = \Sigma d\tfrac{1}{2}mv^2;$$

et en remarquant que les deux premiers termes doivent être aussi considérés respectivement comme les expressions des travaux élémentaires des forces F et f, on peut transformer l'équation précédente en celle-ci

$$\Sigma d\mathcal{T}F + \Sigma d\mathcal{T}f = \Sigma d\tfrac{1}{2}mv^2$$

ou en intégrant entre les limites v et v' des vitesses, initiale et finale,

$$\Sigma\mathcal{T}F + \Sigma\mathcal{T}f = \Sigma\tfrac{1}{2}mv^2 - \Sigma\tfrac{1}{2}mv'^2.$$

On arrive ainsi à l'expression la plus générale du théorème du travail et des puissances vives, que l'on énonce de la manière suivante :

La somme des travaux de toutes les forces appliquées à un système matériel quelconque, pendant un temps déterminé, est égale à l'accroissement de puissance vive acquis par le mobile pendant le même temps.

La puissance vive $\frac{1}{2}mv^2$ d'un mobile est souvent désignée sous le nom de *demi force vive* de ce mobile, force vive qui est alors exprimée par mv^2.

Nous ferons, dans toutes les questions de dynamique, un usage constant du principe de d'Alembert.

22.— Théorème des projections des quantités de mouvement.

On appelle *quantité de mouvement* d'un mobile la somme des produits mv de la masse de chacun de ses éléments par la vitesse de cet élément.

On désigne sous le nom *d'impulsion élémentaire* d'une force F, le produit Fdt de cette force par l'élément de temps dt.

L'impulsion totale est la somme des produits Fdt pour un temps déterminé.

Il y a, pour tout mobile, certaines relations entre sa quantité de mouvement et les impulsions des forces qui le sollicitent. Ces relations sont énoncées dans deux théorèmes distincts que nous nous bornerons à démontrer d'une manière sommaire.

Le premier de ces théorèmes, celui des projections des quantités de mouvement, s'énonce de la manière suivante :

L'accroissement total de la somme des quantités de mouvement d'un système matériel, projetées sur un axe fixe quelconque, est égal à la somme des impulsions totales des forces extérieures pendant le même temps.

Pour le point matériel m considéré isolément on a, en vertu du principe de l'égalité entre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'action et la réaction, $\Sigma F_x - I_x = 0$, ou $\Sigma F_x = m\frac{dv_x}{dt}$, et par suite

$$\Sigma F_x dt = m dv_x .$$

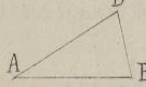
Cette même égalité existerait encore en vertu du principe de d'Alembert pour un système de points matériels, et elle est alors l'expression algébrique du théorème énoncé.

23. — Théorème des moments des quantités de mouvement.

Ce théorème est, en quelque sorte, le complément du précédent.

L'accroissement total de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe fixe quelconque, est égal à la somme des moments par rapport à cet axe, de toutes les impulsions élémentaires des forces extérieures correspondant aux divers éléments du temps que l'on considère.

Pour un point matériel m, si sa vitesse $v = AB$ devient, après le temps dt, $v' = AB'$, et a ainsi reçu un accroissement $dv = BB'$ dans le sens BB', les trois quantités v, v' et dv, qui



représentent des quantités analogues à celles que l'on considère dans la composition des mouvements, donnent la relation

$$M_o v' = M_o v + M_o dv .$$

La quantité dv peut être remplacée par son égale $\Sigma \frac{F dt}{m}$, ainsi que cela résulte de la relation $\Sigma F - m\frac{dv}{dt} = 0$.

On a donc $M_o v' - M_o v = \Sigma M_o \frac{F dt}{m}$, et par suite, $M_o(v' - v)m = \Sigma M_o F dt$.

On peut ajouter à cette équation autant d'équations semblables qu'il y a de points matériels dans le système et en intégrant ensuite pour un temps fini t, on a pour résultat la formule algébrique qui est la traduction de l'énoncé.

Ce théorème conduit, d'ailleurs, à celui des aires, qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Si la somme des moments des forces extérieures appliquées à un système matériel, par rapport à un axe fixe, est constamment nulle, la somme des aires décrites pendant un temps quelconque, par les rayons vecteurs qui joignent le pied de l'axe, sur un plan perpendiculaire à sa direction, aux projections des différents points matériels du système sur ce plan, est proportionnelle au temps.

Dans le cas d'une force F dont la direction passe constamment par un même point O, si le système se réduit à un seul point matériel et si le mouvement s'effectue tout entier dans un plan passant par le point O, les aires décrites par le rayon vecteur émanant du point O, sont proportionnelles au temps.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Deuxième partie

Résistance des Matériaux.

24.— Considérations préliminaires. — Dans un grand nombre de problèmes de la mécanique, on admet que les corps solides sont complètement rigides et indéformables ; il n'en est pas ainsi cependant dans la réalité, et l'action d'une force quelconque déforme plus ou moins le solide auquel elle est appliquée.

L'étude de ces déformations constitue la partie de la mécanique que l'on désigne sous le nom de *Résistance des matériaux*.

25.— Notions générales sur les forces moléculaires. — On se rend compte de cette déformation en remarquant que les corps solides sont des assemblages de molécules ou points matériels groupés entre eux et tenus à distance par l'effet d'actions mutuelles ou *forces moléculaires*, les unes *attractives*, les autres *répulsives*. Dès qu'une action étrangère intervient, certaines molécules se rapprochent, d'autres s'écartent, et la forme du corps se modifie. Mais tout effort qui tend à écarter les molécules détermine entre celles-ci des actions attractives, et tout effort qui tend à les rapprocher développe des actions répulsives. Il résulte de là, que si la forme du solide arrive d'une façon permanente à une nouvelle forme, sous l'influence d'efforts déterminés, dans ce nouvel état l'équilibre existe à nouveau entre les forces extérieures et les réactions moléculaires, et l'on peut, au moyen des conditions qui expriment cet équilibre, obtenir des relations entre les forces ainsi développées.

26.— Développement des forces moléculaires dans la déformation des corps solides. — Quel que soit le mode de déformation que l'on cherche à faire subir à un corps solide il est facile de s'apercevoir que cette déformation augmente, lorsque les efforts exercés deviennent plus grands, et dans ce cas, les réactions réciproques, que l'on a appelées forces intérieures ou moléculaires, doivent nécessairement augmenter à mesure que les déplacements des molécules se produisent les unes par rapport aux autres. C'est ce qui arrive dans les modes de déformation les plus simples ; mais on comprend que dans certains cas il y a simultanément allongement de certaines distances, raccourcissement de certaines autres, et que d'autres distances peuvent rester, pendant cette déformation, tout à fait invariables.

L'examen attentif des déformations produites sous l'action d'efforts déterminés, a permis de reconnaître certaines relations entre les forces moléculaires et les déformations correspondantes. C'est ainsi qu'on est parvenu à soumettre au calcul les diverses questions de la résistance des matériaux.

Les équations fondamentales étant seulement au nombre de six, ne peuvent servir qu'à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

derminer six inconnues si l'on considère le solide dans son ensemble, mais on peut toujours se procurer de nouvelles équations en décomposant par la pensée, le solide donné en un certain nombre de parties distinctes.

27.— Etat d'équilibre du solide après la déformation. — Lorsque le solide reste soumis aux efforts qui ont produit sa déformation, l'expérience prouve que ce solide peut rester indéfiniment dans le même état, ce qui revient à dire qu'il y a équilibre entre toutes les forces qui le sollicitent, ou qui en sollicitent les diverses parties, c'est-à-dire, entre les forces extérieures et les forces moléculaires développées par la déformation.

En désignant par F l'une des forces extérieures, par f l'une des forces moléculaires, on a toujours entre toutes ces forces, les relations qu'exige l'équilibre

$$\Sigma F_x + \Sigma f_x = 0, \qquad \Sigma F_y + \Sigma f_y = 0, \qquad \Sigma F_z + \Sigma f_z = 0.$$

$$\Sigma M_{ox} F + \Sigma M_{ox} f = 0, \quad \Sigma M_{oy} F + \Sigma M_{oy} f = 0, \quad \Sigma M_{oz} F + \Sigma M_{oz} f = 0.$$

Les forces F extérieures sont en nombre limité, mais les forces intérieures f, sont en nombre infini. Les premières sont, en général déterminées en grandeur et en direction ; les autres ne peuvent l'être que si on connaît, non seulement les déplacements de chacun des points du solide mais encore la loi suivant laquelle varie chaque force moléculaire avec ces déplacements.

28.— Application à une partie quelconque du solide déformé.

Dès lors que le solide est en équilibre, chacune de ses parties l'est nécessairement, et l'on peut appliquer à cette partie les mêmes formules fondamentales à la condition de regarder comme forces extérieures tous les efforts qui sont exercés, sur la partie considérée par les molécules de la portion restante du solide primitif. C'est ce mode d'examen qui nous permettra, dans la plupart des circonstances, de raisonner d'abord sur un élément isolé du solide et de passer de la considération de cet élément à celle du solide réel.

29.— Problèmes principaux de la résistance des matériaux.

Cette étude comprend deux problèmes principaux intéressant également l'art de l'ingénieur, et sur lesquels reposent tous les procédés de la construction.

1° — Etudier les lois de la déformation d'un solide donné et soumis à des efforts déterminés.

2° — Calculer les formes et les dimensions que l'on doit donner à un solide pour qu'il résiste convenablement à des efforts donnés.

Ces deux questions seront traitées séparément pour les cas où les forces extérieures tendent à allonger un solide, à le refouler sur lui-même, à le tordre ou à le faire fléchir.

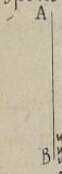
On étudiera successivement
1° — L'Extension. 3° — La Torsion.
2° — La Compression. 4° — La Flexion.

et en outre, quelques-unes des circonstances dans lesquelles ces différents genres de déformation peuvent se présenter simultanément.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Extension.

30. — Extension d'une file de molécules. — Si l'on conçoit une file de molécules d'une longueur primitive AB, fixée en A à sa partie supérieure et chargée ensuite d'un poids à sa partie inférieure, ce poids agit sur la molécule m, qui s'écarte alors de la molécule m', et tend à s'en détacher. Cet écartement augmente l'action attractive de m' sur m ; si la rupture ne se produit pas, l'équilibre s'établit et l'action développée entre m et m' est égale à l'action primitive augmentée du poids qui agit sur m.



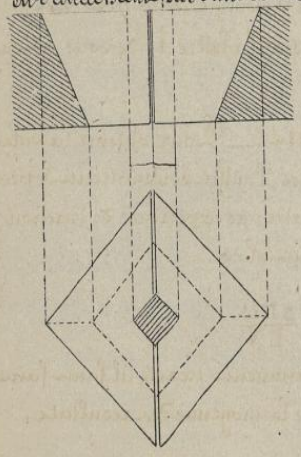
On conçoit que la charge qui agit en B, doit développer les ressorts moléculaires qui lient toutes les molécules les unes aux autres ; c'est-à-dire que l'action exercée par m sur m' doit se transmettre successivement de m' à m'', de m'' à m''', ... jusqu'en A ; et si l'on fait abstraction du poids de ces molécules, l'action développée et l'écartement produit, sont les mêmes entre deux molécules consécutives quelconques. Par suite la ligne AB s'allonge d'une quantité égale à la somme des allongements individuels et l'allongement total est proportionnel à la longueur primitive de la file de molécules.

Cette conclusion se justifie par l'observation des faits constatés dans les expériences sur l'extension des corps solides.

31. — Extension d'une tige prismatique. — Une tige que l'on soumet à l'extension peut être considérée comme un faisceau de files de molécules réunies entre elles par des actions latérales. Si l'on admet que la charge totale soit répartie de manière que chacune des files supporte un même poids, on se trouve dans les conditions du cas précédent et chaque file doit se modifier, comme si elle était isolée, sous la charge qui lui est propre.

A cet effet on emboîte la base du corps dans une sorte d'étui portant un crochet sur lequel agit la charge ; et comme on n'opère ordinairement que sur des sections assez faibles, on est porté à croire que la condition de l'uniformité de la répartition de la charge est sensiblement réalisée.

32. — Mode d'expérimentation. — On soumet un corps à la traction en l'attachant par l'une de ses extrémités, et en exerçant à l'autre extrémité un effort plus ou moins considérable. Pour mettre ce procédé d'expérimentation à l'abri des déplacements que peuvent subir les points d'attache, on trace deux repères près des deux extrémités de la tige et on mesure leur distance à l'aide de cathétomètres, avant et après la traction.



L'un des meilleurs mode de fixation de l'extrémité de la tige, que l'on peut supposer ici rectangulaire, consiste dans l'emploi d'un tronc de pyramide quadrangulaire, formé de deux parties séparées, portant chacune une gouttière destinée à embrasser fortement la tige. Le tronc de pyramide est ensuite placé dans une chappe de même forme dans laquelle les machoires se rap-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rapprochement d'autant plus que la traction qui détermine ce rapprochement est plus grande. Les résultats que l'on déduit d'expériences de cette nature sont d'autant plus précis que l'on opère sur des tiges plus longues, parceque l'allongement étant plus considérable, l'erreur que l'on peut commettre en le mesurant est relativement plus petite. Quelle que soit d'ailleurs la longueur de la tige, il est évident que les extensomètres doivent toujours être indépendants du bâti qui la supporte.

33. — **Période d'élasticité.** — Le phénomène de l'extension présente deux périodes qu'il importe de distinguer au point de vue des applications ; la première, nommée période d'élasticité, est caractérisée par le fait suivant :

Si l'on charge une tige d'un poids qui n'excède pas une certaine limite, il se produit un allongement, et si l'on enlève ensuite cette charge, la tige reprend sa longueur primitive, ou, si la longueur n'est pas rigoureusement la même, la différence ne peut être appréciée par les instruments de précision les plus délicats. On peut donc dire que la tige est restée complètement *élastique*, en ce qu'elle agit à la manière d'un ressort parfait.

34. Lois résultant de l'observation dans la période d'élasticité.

L'expérience montre que, dans la période d'élasticité, l'allongement produit est :

1° — *Proportionnel à la charge.*

2° — *Proportionnel à la longueur primitive de la tige.*

3° — *Inversement proportionnel à la section.*

De sorte que l'on désigne par :

N la charge en kilogrammes ;

L la longueur primitive de la tige mesurée en mètres ;

ω la section en mètres carrés ;

ΔL la longueur de l'allongement en mètres ;

et m un coefficient constant ou spécifique de la matière qui constitue la tige, on a

$$\Delta L = m \frac{LN}{\omega} \quad (1) \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta L}{L} = m \frac{N}{\omega}.$$

$\frac{N}{\omega}$ est la charge en kilogrammes par mètre carré de section.

$\frac{\Delta L}{L}$ est l'allongement par mètre courant ; on le nomme *allongement proportionnel* ou *allongement élastique*, et on le désigne par la lettre i, de sorte qu'on a

$$\frac{\Delta L}{L} = i.$$

35. — **Détermination du coefficient.** — Pour obtenir la valeur numérique de la constante m, relative à une substance donnée, il suffit évidemment de prendre trois valeurs déterminées L', ω', N', des variables L, ω, N ; de faire une expérience de traction, et de mesurer l'allongement résultant $\Delta L'$; la formule (1) devient alors

$$\Delta L' = m \frac{L'N'}{\omega'}, \qquad \text{d'où} \qquad m = \frac{\Delta L' \omega'}{L'N'}$$

On comprend que pour avoir une valeur de m suffisamment exacte, il faut faire plusieurs expériences sur des tiges de même matière, et prendre la moyenne des résultats.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

36.— Formule usuelle de l'extension. — Si l'on prend la valeur inverse du coefficient m, ce qu'on la désigne par E, c'est-à-dire si l'on pose $m = \frac{1}{E}$, la formule (1) prend une forme plus employée, qui est

$$\Delta L = \frac{L N}{E \omega}, \qquad (2)$$

Cette expression donne, d'ailleurs

$$\frac{N}{\omega} = E \frac{\Delta L}{L};$$

en sorte cette forme la quantité $\frac{N}{\omega}$ représente la tension, par unité de surface, à laquelle les fibres sont soumises, tension égale et contraire à la résistance moléculaire développée dans les mêmes fibres, tandis que $\frac{\Delta L}{L}$ est l'allongement correspondant par unité de longueur. Donc, si l'on pose

$$\frac{N}{\omega} = R, \qquad \frac{\Delta L}{L} = j,$$

la dernière formule peut s'écrire $R = E j$,

expression dont on fera usage dans la théorie de la flexion plane.

37.— Coefficient d'élasticité. — Le nombre E, qu'on vient de déterminer par la considération de la période d'élasticité parfaite, se nomme *coefficient* ou *module d'élasticité*; et si dans la formule (2) on supposait $\Delta L = L$ et $\omega = 1$, il viendrait $N = E$; d'où l'on voit que E est la charge qui, pour une section de un mètre carré, doublerait la longueur de la tige, si la loi de proportionnalité entre les charges et les allongements se continuait jusqu'à cette limite; mais cela n'a évidemment jamais lieu, et les allongements ne s'élèvent réellement, dans la période d'élasticité, qu'à une fraction extrêmement petite de la longueur primitive de la tige.

38.— Extension prolongée jusqu'à la rupture. — Au delà de la limite d'élasticité, c'est-à-dire, lorsque les allongements ne sont plus proportionnels aux charges correspondantes, la tige, après le déchargement, ne reprend plus sa longueur primitive, et reste allongée d'une certaine quantité qu'on nomme *allongement permanent*. Un état nouveau s'est manifesté, le corps s'est plus ou moins altéré sous la charge, et les allongements croissent alors plus rapidement que les efforts correspondants. Si l'on continue à augmenter la charge, il arrive un moment où les ressorts moléculaires ne peuvent plus l'équilibrer, et où la rupture se produit.

39.— Nécessité de ne pas dépasser une certaine charge pratique. — L'état élastique d'un corps s'altérant à partir d'une certaine limite, on doit toujours, dans les constructions, rester en dessous de la charge qui produirait cette altération d'élasticité.

D'ailleurs, dans les constructions faites avec les matériaux de l'industrie, on rencontre, soit des mal-façons, soit des défauts d'homogénéité; il peut aussi se produire, dans les organes de machines, par exemple, des chocs, des trépidations, et même des altérations chimiques. Par conséquent, si on veut se placer dans des conditions de sécurité convenables, il faut s'arrêter, avant la limite d'élasticité, à une certaine charge pratique que l'on indiquera plus loin, et qui résulte de l'étude des constructions qui ont réussi.

40.— Résistances vives d'élasticité et de rupture. — Lorsqu'un corps est soumis à un effort de traction, les molécules se déplacent les unes par rapport aux autres; l'étude de ces

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ces déplacements et des efforts correspondants, permet d'évaluer le travail qui détermine la déformation.

La *résistance vive d'élasticité* est la quantité de travail qu'il faudrait dépenser pour atteindre la limite d'élasticité.

La *résistance vive de rupture* est la quantité de travail nécessaire pour déterminer la rupture de la pièce.

41.—Détermination de la résistance vive d'élasticité.— Cette quantité est facile à déterminer. En effet, si l'on conçoit que la charge augmente successivement jusqu'à la limite d'élasticité, le travail développé est la somme des travaux élémentaires qu'on obtient en multipliant chaque élément infinitésimal $d\delta$ de l'allongement par l'effort correspondant. Donc, en désignant ce travail par T_e, on a, d'une manière générale, $T_e = \int F\,d\delta$;

et s'il s'agit d'une tige d'un mètre de longueur et d'un mètre carré de base, on a

$$F = \frac{N}{\omega}, \quad \delta = \frac{\Delta L}{L}, \quad d\delta = \frac{\partial \Delta L}{L};$$

mais on a aussi $\dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{N}{E\omega}$, d'où $\dfrac{\partial \Delta L}{L} = \dfrac{\partial N}{E\omega}$,

et par suite $T_e = \int \frac{N}{\omega} \times \frac{\partial N}{E\omega} = \frac{1}{2E}\left(\frac{N}{\omega}\right)^2 + C$.

En prenant l'intégrale entre les limites $N=0$ et $N=N_e$, N_e étant la charge qui correspond à la limite d'élasticité, le travail demandé a pour expression

$$T_e' = \frac{1}{2E}\left(\frac{N_e}{\omega}\right)^2.$$

42.—Observation sur la transmission des actions moléculaires.

On a supposé ici que la charge N, augmente graduellement depuis l'allongement initial jusqu'à la limite d'élasticité. Cette hypothèse doit toujours être réalisée. En effet, une charge ne produit pas son action d'une manière instantanée sur toute la longueur de la tige; quelque faible que soit la durée de la transmission, l'état d'équilibre doit s'établir de proche en proche; il y a un travail intérieur qui fait que les différents ressorts viennent successivement se mettre en équilibre, et si l'action exercée au début était assez énergique pour que cet état d'équilibre ne pût se produire, l'altération de l'élasticité pourrait avoir lieu avant que toutes les molécules ne fussent intéressées dans le phénomène.

43.—Détermination de la résistance vive de rupture.— La loi que suivent les allongements après la période d'élasticité, étant connue, la résistance vive de rupture, qui a pour expression générale

$$T_r = \int_0^{N_r} \frac{N}{\omega} \cdot \frac{\partial \Delta L}{L},$$

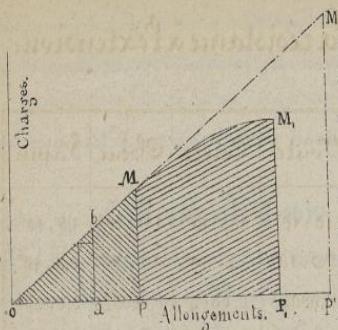
ne saurait être déterminée rigoureusement par le calcul, et l'on ne peut l'obtenir qu'approximativement par une quadrature au moyen d'un certain nombre de données résultant de l'expérience.

Il faut d'ailleurs remarquer ici, comme au N° précédent, que l'action de la force doit être progressive, et qu'un effort brusque pourrait amener la rupture de la tige avec une moindre dépense de travail.

44.—Représentation graphique du phénomène de l'extension

Si l'on prend deux axes rectangulaires; puis, qu'à des échelles données on construise une courbe ayant pour abscisses des valeurs proportionnelles aux allongements par mètre courant, et pour ordonnées des valeurs proportionnelles aux charges corres-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



pondantes par mètre carré, on obtient une figure qui indique à première vue toutes les circonstances que présente le phénomène de l'extension.

Pour que la figure soit suffisamment accentuée, il convient, en égard à la petitesse des allongements qui répondent à des charges données, d'adopter deux échelles différentes, l'une pour les allongements, l'autre pour les charges correspondantes.

45. — Discussion de l'épure. — 1° — La courbe passe par l'origine des coordonnées; car, pour $N=0$, on a $\Delta L=0$.

2° — Si M est le point correspondant à la limite d'élasticité, la portion OM de la ligne OMM, est en ligne droite, car l'équation $\frac{\Delta L}{L}=\frac{1}{E}\cdot\frac{N}{\omega}$ (1), identique de forme à $y=mx$, est du premier degré.

3° — Quand on dépasse la limite d'élasticité, les allongements croissent plus rapidement que les charges; la courbe s'infléchit à partir du point M, en tournant sa concavité du côté de l'axe OP', et se termine au point M, correspondant à la rupture.

4° — L'équation (1) donne $E=N$ quand on y fait $\omega=1$ et $\frac{\Delta L}{L}=1$; donc pour $OP'=1$ on a $M'P'=E$. Mais la détermination de E par ce procédé graphique ne peut être susceptible d'une précision suffisante; car, le maximum d'allongement d'une tige étant toujours une fraction extrêmement petite de sa longueur, une abscisse d'une longueur égale à l'unité et une ordonnée correspondante, aboutissant au prolongement de OM, seraient réellement des longueurs incompatibles avec les dimensions des échelles adoptées pour l'épure.

5° — Le travail dépensé pour produire un allongement infiniment petit étant, comme on l'a dit précédemment, égal au produit de la charge par cet allongement, il est représenté sur la figure, par l'aire du petit rectangle ab, dont la hauteur est $\frac{N}{\omega}$, et la base, l'allongement correspondant $\frac{d\Delta L}{L}$. Donc la somme de ces aires élémentaires, qui est, à la limite, représentée par l'aire du triangle OMP, doit donner la mesure de la résistance vive d'élasticité.

6° — On voit de même que l'aire de la figure OMM,PO, représente la valeur de la résistance vive de rupture.

46. — Éléments principaux à considérer dans la résistance à l'extension.

Ces éléments sont :

1° — Le coefficient E d'élasticité.

2° — La charge pratique N_p par mètre carré qu'on ne doit pas dépasser dans les applications.

3° — La charge N_e par mètre carré qui amène le corps à sa limite d'élasticité.

4° — La charge N_r par mètre carré qui produit la rupture.

5° — Les allongements ΔL_p, ΔL_e, ΔL_r par mètre de longueur correspondants à ces charges.

Des expériences faites dans le but de déterminer les valeurs des éléments qu'on vient de considérer, ont donné, pour quelques-uns des corps employés le plus fréquemment dans l'industrie, un ensemble de résultats qui sont consignés dans le tableau suivant.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

47. — Tableau des coefficients relatifs à la résistance à l'extension.

Eléments à considérer.	Désignation	Fer.	Acier.	Fonte.	Cuivre.	Chêne.	Sapin.
Coefficient d'élasticité	E	20.10^9	20.10^9	10.10^9	10.10^9	$1,2.10^9$	$1,5.10^9$
Charge pratique	N_p	6.10^6	15.10^6	$2,5.10^6$	4.10^6	$0,7.10^6$	$0,8.10^6$
Allongement correspondant ..	ΔL_p	0,0003	0,00075	0,00025	0,0004	0,00058	0,00053
Charge limite d'élasticité	N_e	12.10^6	30.10^6	8.10^6	20.10^6	2.10^6	2.10^6
Allongement correspondant	ΔL_e	0,0006	0,0015	0,0008	0,002	0,00167.	0,00133
Charge de rupture	N_r	40.10^6	70.10^6	12.10^6	"	8.10^6	7.10^6

48. — Observations relatives aux expériences faites sur la résistance à l'extension. Parmi les résultats de diverses expériences que nous avons faites à l'aide des appareils que nous avons installés au **Conservatoire des Arts-et-Métiers**, nous citerons seulement quelques faits importants. Les résultats d'expériences faites sur des barreaux de fer de Suède et sur des barreaux d'acier de cémentation fabriqué avec le même fer, ont conduit à adopter, dans le tableau précédent, le même coefficient d'élasticité pour le fer et pour l'acier.

La charge correspondante à la limite d'élasticité de l'acier, est supérieure à celle du fer ; la proportionnalité entre les charges et les allongements existe donc plus longtemps dans l'acier.

Les chiffres obtenus directement pour le chêne et pour le sapin ne paraissent pas être exacts dans tous les cas, et certains faits semblent prouver que ces deux corps ont la même résistance.

En général, les chiffres qui ont été pris pour la charge de rupture, seraient un peu trop forts pour la pratique. Cela tient à ce que les expériences ont été faites sur des matériaux de choix, et dans lesquels on a eu soin d'écarter toute cause accidentelle de défectuosité.

Lorsqu'on veut assurer la solidité d'une construction, les matériaux employés ne doivent être ni énervés, ni modifiés d'une manière sensible dans leurs dimensions. Il faut absolument que la charge d'élasticité ne puisse jamais être dépassée, même accidentellement. Il est donc préférable de déterminer la charge pratique en se basant sur la limite d'élasticité et non sur la charge de rupture.

La fonte résiste beaucoup moins que le fer à l'extension, et cette différence a été parfaitement mise en évidence par les expériences spéciales qui ont été faites sur de la fonte dite **malléable**, qui n'est autre chose que de la fonte décarburée, et par conséquent ramenée à l'état de fer, au moyen d'une opération assez semblable à la cémentation, mais dans laquelle le charbon est remplacé par un oxyde de fer.

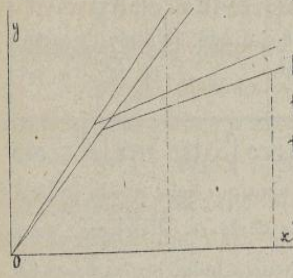
Cette décarburation ne se produit que jusqu'à une certaine profondeur ; et, en extrayant au moyen d'une machine à raboter, des barreaux minces dans des barreaux de fonte malléable d'un plus fort équarrissage, on a reconnu que le coefficient d'élasticité varie de la circonférence au centre, entre 20 et 10, c'est-à-dire depuis le coefficient d'élasticité du bon fer jusqu'à celui de la fonte ordinaire.

Il ne faut donc employer la fonte malléable que sous l'épaisseur de 7 à 8 millimètres si l'on veut compter sur une résistance analogue à celle du fer.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Après avoir enlevé à la machine à raboter, une règle de 3^{m} de longueur, en de 1$^{c/2}$ de section, dans une feuille d'acier non trempé, on a fixé les extrémités dans des manchons en deux pièces formant pinces, serrées au moyen de boulons, avec interposition de plomb fondu. La charge totale de rupture s'est élevée à 46^{kil},79 par millimètre carré, les allongements étant mesurés en centièmes de millimètres.

Les résultats de l'expérience ont été traduits par une courbe se composant d'une première partie sensiblement droite, puis d'une seconde partie presque rectiligne mais s'inclinant davantage sur l'axe des abscisses.



Dans une autre expérience faite sur un échantillon semblable, mais trempé en recuit, la partie droite de la ligne représentative s'est trouvée plus prolongée; mais peu après que la nouvelle limite d'élasticité avait été atteinte, la rupture a eu lieu.

On doit conclure de ces résultats que si la trempe prolonge la période d'élasticité, elle est néanmoins dangereuse, en ce que la rupture se fait brusquement et sans qu'il ait été dépensé une très-grande quantité de travail pour la déformation. Si l'on veut, avant tout, obtenir la sécurité, il convient de prendre des aciers non trempés, parce que l'on a la certitude d'obtenir, avant la rupture, une longue période d'allongement, après la période d'élasticité.

Le croquis ci-dessus indique les formes générales de quatre courbes déduites des expériences faites, dans chaque cas, sur deux barres distinctes avant et après la trempe.

L'expérience a donné, pour ces aciers, les coefficients d'élasticité suivants :

Acier vif, avant la trempe $E = 20\,761\,000\,000.$

Acier vif, après la trempe $E = 19\,199\,000\,000.$

Acier doux avant la trempe $E = 17\,273\,000\,000.$

Acier doux après la trempe $E = 19\,206\,000\,000.$

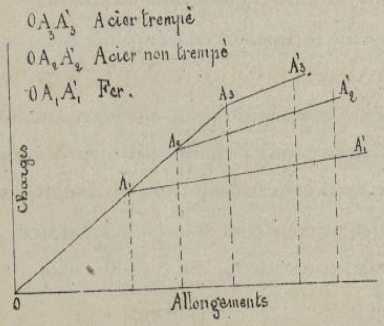
Ces nombres donnent, pour coefficient moyen $E = 19 \times 10^{9}$.

Expériences sur deux fils d'acier ayant pour section $\omega = 0^{m.q.}000\,00559$.

1er fil, 24^{m},60 de longueur entre les repères, $E = 18\,789\,000\,000$;

2^{e} fil, 24^{m},63 ___ d° ___ ___ d° ___ $E = 17\,091\,000\,000$.

49. — Observation sur les résistances vives d'élasticité et de rupture. —



La figure ci-jointe montre les formes générales qu'affectent les représentations graphiques des expériences comparatives faites sur des barres semblables de fer, d'acier non trempé et d'acier trempé en recuit. On voit comment le fer s'allonge beaucoup plus que l'acier avant la rupture, la résistance vive de rupture peut être beaucoup plus grande pour ce métal que pour l'acier, tandis que la résistance vive d'élasticité est manifestement moindre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

50. — Observation sur la déformation qui précède la rupture. —

L'expérience montre que la rupture se produit par étirage ; les deux parties voisines de la section de rupture se terminent généralement par une réduction de section aboutissant à la section finale de rupture.

Au moment de la rupture la transformation du travail en chaleur se manifeste par une élévation de température très-sensible, qui est quelquefois accusée près des lèvres de rupture, ou vers la section de striction, par une coloration due à une oxydation particulière du métal.

51. — Etat dans lequel se trouve une pièce après le déchargement.

Quand une barre a été trop chargée, les allongements, lors d'une nouvelle épreuve, restent élastiques pendant une plus longue période, et jusques à la limite de la première charge.

Certains auteurs pensent que la tige, ainsi modifiée, est amenée à un état plus parfait d'élasticité ; la pièce se serait ainsi améliorée.

En fait, il n'en est rien ; et ce qui le prouve, c'est que l'expérience donne pour coefficient d'élasticité de la barre, un nombre un peu plus faible, quand elle a été ainsi surchargée une première fois, que dans le cas où l'on n'a point dépassé sa limite d'élasticité. Cette question sera examinée plus utilement lorsque nous nous occuperons de la flexion.

52. — Applications de la formule générale de l'extension. —

1° — *Déterminer l'allongement que produit une charge de 2480 kilog. sur une tige d'acier ayant 5^m de longueur et 2 centimètres carrés de section.*

On a $N = 2480$ kilog., $L = 5^m$, $\omega = 0^{m^2},0002$; $E = 20 \times 10^9$;

d'où $$\Delta L = \frac{5 \times 2480}{20 \times 10^9 \times 0,0002} = 0^m,0031,$$ ou $\frac{0,0031}{5} = 0^m,00062$ par mètre courant.

2° — *Calculer la charge que peut supporter, d'une manière permanente, une tige de fer de 4 centimètres carrés de section.*

On a, $\frac{N}{\omega} = 6 \times 10^6$, $\omega = 0^{m^2},0004$;

et par suite $N = 6 \times 10^6 \times 0,0004 = 2400$ kilog.

La longueur de la tige est ici sans influence sur la valeur du résultat obtenu, ce qui n'aurait pas lieu si l'on tenait compte du poids de cette tige, ainsi qu'on le verra plus loin.

3° — *Déterminer la section d'une tige cylindrique en fonte, de manière qu'elle puisse supporter, sans altération, une charge de 3800 kilogrammes.*

On a ici $N = 3800$ kilog. et $N_c = 2,5 \times 10^6$; donc, si r est le rayon exprimé en mètres, il vient $$\frac{3800}{\pi r^2} = 2,5 \times 10^6 ;$$ d'où $r = 0,022$.

53. — Observation relative à la variation du volume d'une tige sous l'influence de la charge. —

Il semble résulter de l'observation des faits que le volume d'une tige prismatique reste constant sous l'influence de la charge, ou du moins, qu'il ne se modifie que d'une manière insensible. On en conclut que si ω et L sont les dimensions de la tige à un état quelconque de l'allongement, on doit avoir très-approximativement, sinon exactement,

$$\omega L = \text{Constante}. \quad (1)$$

Cette formule donne $\omega dL + L d\omega = 0$, et, par suite, $$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{dL}{L} ;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On voit ainsi que, dans l'hypothèse admise, la diminution de section par unité de surface est numériquement égale à l'augmentation de l'allongement par unité de longueur.

Poisson, en partant d'une théorie mathématique de l'élasticité, était arrivé à l'expression

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\partial L}{2L}. \qquad (2)$$

Cette formule, si elle était exacte, indiquerait une augmentation de volume sous l'effet de la charge, puisque la diminution de section ne serait ici, pour un même allongement, que la moitié de la valeur donnée par la formule (1), ce qui semble ne pouvoir s'accorder avec les faits observés.

On peut, d'ailleurs, comparer autrement les formules (1) et (2). La dernière donne, en intégrant les deux membres,

$$\log \omega = -\tfrac{1}{2}\log L + c;$$

si ω_0 et L_0 sont les dimensions primitives du solide, on a

$$\log \omega_0 = -\tfrac{1}{2}\log L_0 + c.$$

et par soustraction,

$$\log \frac{\omega}{\omega_0} = \tfrac{1}{2}\log \frac{L_0}{L} = \log\left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad \text{ou encore,} \qquad \omega L = \omega_0 \sqrt{L_0} \times \sqrt{L}.$$

ce qui montre que le volume ωL, considéré à un instant quelconque de l'allongement, croîtrait comme la racine carrée de la longueur correspondante.

54. — Influence de la température sur l'allongement. — Dans tout ce qui précède on a supposé la température constante, pendant le cours de l'expérience. S'il survient un changement de température pendant que le solide est en charge, il en résulte nécessairement une modification dans la longueur $L + \Delta L$ de la tige. Mais on peut négliger ΔL comme étant très petit relativement à L, et dans ce cas, si a désigne le coefficient de dilatation linéaire de la matière, la variation de la longueur L est $\pm La$ pour un degré, et $\pm Lat$ pour t degrés, le signe + correspondant à une élévation et le signe —, à un abaissement de température.

De l'allongement ΔL_1, produit par la charge N est

$$\Delta L_1 = \frac{LN}{E\omega};$$

la variation de longueur due au changement de température est

$$\Delta L_2 = \pm Lat;$$

donc l'allongement final a pour expression

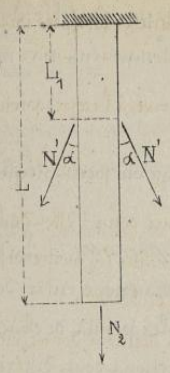
$$\Delta L = \frac{LN}{E\omega} \pm Lat.$$

Il peut arriver que l'allongement déterminé sous l'influence de la charge se trouve annulé par la contraction linéaire résultant de l'abaissement de la température. On a dans ce cas, $\Delta L = 0$, et par suite

$$\frac{N}{E\omega} - at = 0, \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{N}{Ea\omega}.$$

55. — Allongement d'un solide prismatique chargé en des points différents de sa longueur. — Soient deux forces N égales et symétriques, agissant respecti-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



vement sur deux points disposés symétriquement par rapport à l'axe de figure. Chacune de ces forces peut être décomposée en deux autres : l'une qui exerce une action normale et ne produit pas d'allongement ; l'autre, qui agit dans le sens de la longueur pour étirer le solide, et la somme N_1 des deux composantes verticales est $N_1 = 2N\cos\alpha$. Cela posé, l'allongement produit par la force N_1, sur la longueur L, est

$$\Delta L_1 = \frac{LN_1}{E\omega},$$

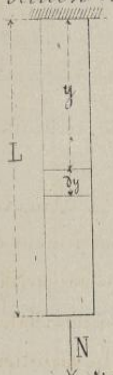
et l'allongement résultant de l'action de N_2, sur la longueur totale L, est

$$\Delta L_2 = \frac{LN_2}{E\omega};$$

donc, l'allongement total a pour expression

$$\Delta L = \frac{1}{E\omega}(LN_1 + LN_2).$$

56. — **Influence du poids de la tige sur l'allongement.** — *Cas où la section transversale est constante.* — Si l'on considère une portion y quelconque d'un solide prismatique de longueur L soumis à l'extension, la partie inférieure $L-y$ agit évidemment à la manière d'une charge ordinaire pour allonger l'autre partie ; et si l'allongement de y est Δy, celui de l'élément dy est $d\Delta y$; cet allongement élémentaire est produit par la charge additionnelle N, par le poids P de la partie $L-y$ du solide, et par le poids de la tranche dy elle-même. Ce dernier poids, infiniment petit relativement aux précédents, est sans influence sur le résultat du calcul, et la formule ordinaire de l'extension est applicable, ce qui donne



$$d\Delta y = \frac{(P+N)\,dy}{E\omega}.$$

Si Π est le poids du mètre cube de la matière qui forme la tige, on a $P = (L-y)\omega\Pi$, et, en substituant, il vient

$$d\Delta y = \frac{[(L-y)\omega\Pi + N]\,dy}{E\omega} = \frac{(L-y)\Pi\,dy}{E} + \frac{N\,dy}{E\omega};$$

d'où

$$\Delta L = \frac{\Pi}{E}\int_0^L (L-y)\,dy + \frac{N}{E\omega}\int_0^L dy = \frac{\Pi L^2}{2E} + \frac{NL}{E\omega} \qquad (1).$$

Ce résultat peut se décomposer ainsi :

allongement dû au poids de la tige, $\Delta' L = \frac{\Pi L^2}{2E}$,

allongement dû au poids additionnel, $\Delta'' L = \frac{NL}{E\omega}$.

La comparaison de ces valeurs donne

$$\frac{\Delta' L}{\Delta'' L} = \frac{\Pi L\omega}{2N} = \frac{P}{2N};$$

et si l'on suppose $N = P$, il vient

$$\frac{\Delta' L}{\Delta'' L} = \frac{1}{2},$$

ce qui prouve que l'allongement dû au poids de la tige n'est que la moitié de celui que produirait une charge équivalente agissant à la partie inférieure de la tige.

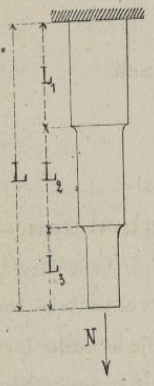
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La portion de l'allongement total, représentée par $\Delta' L$, est généralement peu sensible. S'il s'agit du fer, par exemple, on a $\Pi = 7788$, $E = 20 \times 10^9$, d'où résulte, pour l'allongement par mètre,

$$\frac{\Delta' L}{L} = \frac{7788 \times L}{2,20 \times 10^{13}} = 0,000\,000\,194.L ,$$

quantité qui ne devient appréciable que pour de très-grandes valeurs de L, en qu'on peut négliger dans les cas ordinaires de la pratique.

Cas où la tige est formée de parties ayant des sections différentes. — La formule fondamentale de l'extension n'étant applicable que dans le cas où les efforts transmis entre deux sections successives se trouvent uniformément répartis sur tous les points de chacune d'elles, il s'ensuit que si une tige est formée de parties dont les sections sont différentes, ces parties doivent être raccordées par des congés, et la différence des sections ne doit pas être trop grande. L'expérience montre d'ailleurs que la rupture, lorsqu'elle se produit, a toujours lieu dans la partie où se montre un changement brusque de section.



Cela posé, l'allongement total est nécessairement égal à la somme des allongements partiels, et l'on a, par l'application de la formule (1),

$$\Delta L_1 = \frac{\Pi L_1^2}{2E} + \frac{(\Pi\omega_2 L_2 + \Pi\omega_3 L_3 + N)L_1}{E\omega_1} ,$$

$$\Delta L_2 = \frac{\Pi L_2^2}{2E} + \frac{(\Pi\omega_3 L_3 + N)L_2}{E\omega_2} ,$$

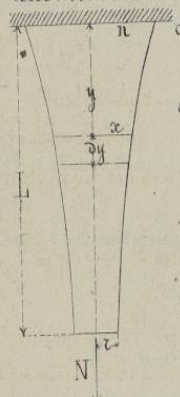
$$\Delta L_3 = \frac{\Pi L_3^2}{2E} + \frac{N L_3}{E\omega_3} .$$

D'où l'on déduit, pour l'allongement total, $\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3$.

Ces résultats se simplifient lorsque les poids des différentes parties de la tige sont négligeables par rapport à la charge N.

Cas où la section transversale varie d'une manière continue suivant une loi déterminée. — La tranche infinitésimale de hauteur dy, pouvant être assimilée à un prisme, on a, comme précédemment,

$$d\Delta y = \frac{(P + N)dy}{E\omega} ,$$



et le poids variable P, de la portion L − y du solide ayant pour expression générale

$$P = \int_y^L \Pi\omega\, dy ,$$

il en résulte $d\Delta y = \frac{\int_y^L (\Pi\omega dy + N)dy}{E\omega} = \frac{\Pi}{E}\frac{\int_y^L \omega dy}{\omega} dy + \frac{N}{E}\cdot\frac{dy}{\omega}$

d'où $$\Delta L = \frac{\Pi}{E}\int_0^L \frac{\int_y^L \omega dy}{\omega} dy + \frac{N}{E}\int_0^L \frac{dy}{\omega} .$$

Par exemple si le solide est de révolution, on a $\omega = \pi x^2$; et si le profil est une ligne droite son équation est de la forme $x = my + n$, ce qui donne d'abord

$$\int_y^L \omega dy = \int_y^L \pi (my+n)^2 dy = \frac{\pi}{3m}\left[(mL+n)^3 - (my+n)^3\right] ;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et ensuite $$\Delta L = \frac{\Pi}{3Em}\int_0^L \frac{(mL+n)^3-(my+n)^3}{(my+n)^2}\,dy + \frac{N}{\pi E}\int_0^L \frac{dy}{(my+n)^2}$$

c'est-à-dire $$\Delta L = \frac{\Pi L^2(2Lm+3n)}{6En} + \frac{NL}{\pi En(mL+n)}\ ;$$

expression qui peut se décomposer ainsi :

Allongement dû au poids de la tige $$\Delta' L = \frac{\Pi L^2(2Lm+3n)}{6En}.$$

Allongement dû au poids additionnel $$\Delta'' L = \frac{NL}{\pi En(mL+n)}.$$

En posant $mL+n=z$ il vient

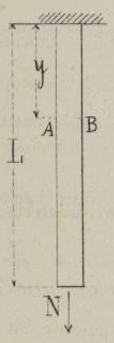
$$\Delta L = \frac{\Pi L^2(2z+n)}{6En} + \frac{NL}{\pi Enz},$$

Dans le cas où le cône se transforme en un cylindre on a $n=z$, et par suite

$$\Delta L = \frac{\Pi L^2}{2E} + \frac{NL}{E\omega},$$

comme précédemment.

57. — Résistance moléculaire développée dans une section transversale d'une tige soumise à l'extension. — La résistance développée dans une section transversale AB d'une tige soumise à l'extension est évidemment égale et opposée à l'action de la charge totale qui s'exerce sur cette section, charge qui se compose du poids de la partie L−y de la tige et du poids additionnel N. Si R est cette résistance par mètre carré, $R\omega$ est la résistance dans la section ω, et l'on a, pour l'équilibre, dans le cas d'une tige prismatique,



$$R\omega = \Pi(L-y)\omega + N,$$

d'où $$R = \Pi(L-y) + \frac{N}{\omega}\ ;$$

valeur qui augmente nécessairement à mesure que y diminue, et dont le maximum, correspondant à $y=0$, est

$$R = \Pi L + \frac{N}{\omega}.$$

Lorsque la charge additionnelle est nulle on a

$$R = \Pi L,$$

résultat indépendant de la valeur de ω comme cela aurait pu être établi avant tout calcul.

S'il s'agit du fer, par exemple, pour lequel on a $\Pi = 7788^k$, suivant que l'on veut rester dans les conditions ordinaires de sécurité, atteindre la limite d'élasticité, ou enfin déterminer la rupture, il faut poser successivement $R = 6.10^6$, $R = 12.10^6$, $R = 40.10^6$, et l'on trouve, pour les valeurs correspondantes de L, dans l'hypothèse de $N=0$ et $y=0$,

$$L = 770^m,\quad L = 1541^m,\quad L = 5136^m.$$

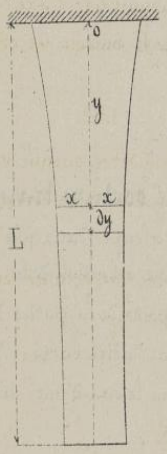
Ces résultats sont des valeurs limites qui supposent l'emploi d'un fer de très-bonne qualité, très-homogène et ne présentant aucune défectuosité, conditions qui ne sont remplies que très-imparfaitement par les fers du commerce.

58. — Solide d'égale résistance relativement à l'extension. — Lorsque la longueur d'une tige prismatique est assez grande pour que le poids de cette tige ne puisse plus être négligé relativement à la charge qui agit à la partie inférieure, la tension des fibres, dans une section

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donnée, devient d'autant plus grande que cette section est plus voisine de la partie supérieure ; et par conséquent si l'on veut que les fibres restent également tendues en toute leur pointe de la tige, il faut nécessairement accroître la section à mesure qu'on approche de la partie supérieure du solide.

Un solide d'égale résistance, relativement à l'extension, est celui dans lequel la tension des fibres, par unité de surface, est la même dans chacune des sections. L'étude de ce solide comprend deux parties principales : la détermination de la forme du profil et ensuite l'allongement total, sous la double influence de la charge inférieure et du poids propre du solide.



Forme du solide. — Soient : R la tension constante par mètre carré à laquelle le solide doit être soumis en chacune de ses sections.

$\omega = f(x)$ une section quelconque située à la distance y du point O prise comme origine des coordonnées.

N la charge totale agissant sur la section ω.

Π le poids du mètre cube de la matière qui forme la tige.

On a, comme condition de l'égale résistance par mètre carré en toutes les sections, en admettant que la répartition des efforts se fasse uniformément de l'une à l'autre, $\frac{N}{\omega} = R$, d'où $N = R\omega$. (1)

A l'accroissement dy de la variable y correspond une diminution $d\omega$ de la section, et par suite une diminution dN de la charge ; cette dernière quantité qui est la différentielle, prise négativement, de l'équation (1), a pour expression

$$dN = -R\,d\omega.$$

Mais la diminution de charge dN est évidemment représentée aussi par le poids du solide infinitésimal dont la hauteur est dy, ce qui donne

$$dN = \Pi\,\omega\,dy,$$

d'où l'on conclut

$$\Pi\,\omega\,dy = -R\,d\omega, \qquad \text{ou} \qquad dy = -\frac{R}{\Pi}\cdot\frac{d\omega}{\omega};$$

et par suite

$$y = -\frac{R}{\Pi \log e}\cdot \log \omega + C;$$

Si ω_0 représente la section à la partie supérieure du solide, on a, pour $y = 0$,

$$0 = -\frac{R}{\Pi \log e}\cdot \log \omega_0 + C;$$

d'où, par soustraction,

$$y = \frac{R}{\Pi \log e}\cdot \log \frac{\omega_0}{\omega}. \qquad (2)$$

Dans la plupart des cas la section ω_0 n'est pas donnée à priori ; mais on peut la déduire facilement des données de la question. En effet si P désigne la charge que doit supporter la tige à sa partie inférieure, et si ω_1 est la section correspondante, on a nécessairement

$$P_1 = R\,\omega_1, \qquad \text{d'où} \qquad \omega_1 = \frac{P_1}{R}.$$

A cette valeur ω_1 correspond la longueur L de la tige, et l'équation (2) devient, dans ce cas,

$$L = \frac{R}{\Pi \log e}\cdot \log \frac{\omega_0}{\omega_1},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où l'on déduit $$\log \omega_0 = \frac{\pi L}{R} \log e + \log \omega_1 , \quad \text{ou} \quad \omega_0 = \omega_1 e^{\frac{\pi L}{R}},$$

expression qui fait connaître la valeur de ω_0.

Cas où la section transversale du solide est un cercle. — En posant

$$\omega = \pi x^2 \quad \text{et} \quad \omega_0 = \pi x_0^2 ,$$

l'équation (2) devient

$$y = \frac{2R}{\pi \log e} \cdot \log \frac{x_0}{x} \qquad (3)$$

Si la section était un carré on aurait $\omega = 4x^2$, $\omega_0 = 4x_0^2$, ce qui conduirait, comme dans tous les cas où les sections sont semblables entre elles, au même résultat que ci-dessus.

L'équation (3), qui est celle d'une logarithmique ayant pour asymptote l'axe des y, permet de construire autant de points que l'on veut de la courbe; et pour $y = L$ on doit nécessairement avoir

$$L = \frac{2R}{\pi \log e} \cdot \log \frac{x_0}{x_1} \qquad (4)$$

La relation $P_1 = R\omega_1 = f(x_1)$ montre que si la charge P_1, considérée comme variable, diminuait indéfiniment, il en serait de même de x_1, et la longueur L du solide, considérée aussi comme une variable, croîtrait indéfiniment.

Calcul du poids de la tige. — On a d'abord, pour l'expression du volume, en supposant qu'il s'agit toujours d'une section circulaire,

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \pi x^2 dy ;$$

et comme l'équation $y = \frac{2R}{\pi \log e} \log \frac{x_0}{x}$ donne $dy = -\frac{2R}{\pi} \cdot \frac{dx}{x}$,

il vient $$V = -\frac{2\pi R}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} x\, dx = \frac{\pi R}{\pi} (x_0^2 - x_1^2) = \frac{R}{\pi} (\omega_0 - \omega_1) ;$$

par suite le poids de la tige est $$P = V\pi = R(\omega_0 - \omega_1) = R\omega_1 (e^{\frac{\pi L}{R}} - 1) .$$

On peut d'ailleurs déduire le poids de la tige des conditions mêmes du problème. On a, en effet, dans la section supérieure,

$$R\omega_0 = P + P_1 , \quad \text{d'où} \quad P = R\omega_0 - P_1 ;$$

et à cause de $P_1 = R\omega_1$, il vient, comme précédemment,

$$P = R(\omega_0 - \omega_1) .$$

Allongement de la tige. — L'allongement différentiel de la tranche dont la hauteur est dy et la section ω, a pour expression

$$d\Delta y = \frac{N dy}{E\omega} = \frac{R\omega dy}{E\omega} = \frac{R dy}{E} ;$$

d'où, pour l'allongement total,

$$\Delta L = \frac{R}{E} \int_0^L dy = \frac{RL}{E} ; \qquad (5)$$

ce qui montre que l'allongement est égal à celui qui résulterait de l'action d'une charge R appliquée à une tige prismatique d'une longueur L et d'une section $\omega = 1$, en ne tenant pas compte du poids de cette tige.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

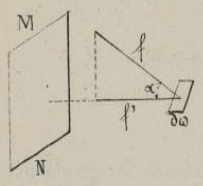
Observation relative au calcul des tiges de sonde. Lorsqu'on doit employer des barres d'une très-grande longueur, comme des tiges de sondes, par exemple, on n'en calcule généralement pas les dimensions par la formule relative aux solides d'égale résistance: d'ailleurs le profil que donne cette formule diffère très-peu d'une ligne droite; on pourrait donc, sans inconvénient, adopter une forme qui serait celle d'un tronc de cône; mais cette forme présenterait encore des difficultés d'exécution. On se conforme approximativement aux conditions de la théorie, en formant la tige de parties cylindriques vissées les unes aux autres et dont les diamètres vont en augmentant à mesure qu'on approche de l'extrémité supérieure.

59.— Chaînes, cordes et courroies considérées au point de vue de l'extension. — Ces pièces flexibles ne sont soumises ordinairement qu'à des efforts de traction. L'expérience a donné les résultats suivants:

	Courroies	Chaînes	Cordes
Charges pratiques	$0{,}2 \cdot 10^6$	$4{,}5 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^6$
Charges de rupture	$4 \cdot 10^6$	$28 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^6$

On doit d'ailleurs remarquer que les courroies s'allongent considérablement sous l'influence des premières charges, il est nécessaire, avant de les mettre en service, de les soumettre à des efforts de traction suffisamment grands.

60.— Résistance des vases à une pression intérieure. — Les vases destinés à renfermer des liquides ou des gaz comprimés sont soumis, en toutes leurs parties, à des efforts qui tendent à produire l'extension de leurs parois et qui résultent de ce que le fluide exerce sur tous les éléments de la surface une pression normale qui est la même en tous les points lorsqu'on ne tient pas compte du poids du fluide.



Dans la plupart des cas la charge due au poids du fluide est peu différente d'un point à un autre, et il suffit ordinairement de tenir compte d'une pression normale, constante en tous les points.

Si $d\omega$ est un élément d'une surface quelconque soumise en tous ses points à une pression normale, et si p représente cette pression, par unité de surface, au point considéré, la valeur de la pression, sur l'étendue $d\omega$, est

$$f = p\,d\omega,$$

et sa composante, sur une direction perpendiculaire à un plan MN choisi arbitrairement, a pour expression

$$f' = p\,d\omega\cos\alpha.$$

Cette relation, appliquée à tous les éléments de la surface considérée, donne, pour la somme totale des composantes perpendiculaires à MN,

$$\Sigma f' = \Sigma\, p\,d\omega\cos\alpha.$$

Si p est constant comme dans la question dont on s'occupe ici, on peut écrire

$$\Sigma f' = p\,\Sigma\, d\omega\cos\alpha$$

La quantité $d\omega\cos\alpha$ est la projection de l'aire $d\omega$ sur MN, et la dernière formule montre que dans le cas où la pression normale est constante, la somme des composantes perpendiculaires à un même plan est le produit de cette pression constante par la projection de la surface sur le plan considéré. Cette remarque va servir à résoudre quelques unes des questions relatives à la résistance des vases.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

61. — Résistance d'un vase sphérique. — Le plus grand effort projeté que l'on puisse obtenir dans un vase sphérique de rayon r est l'effort $\pi r^2 \times p$ qui s'exerce sur un plan méridien; et le vase, d'épaisseur e, n'y peut résister qu'en raison de la cohésion de l'anneau $2\pi r e$ qui empêche les deux hémisphères de se séparer. Donc si R désigne la résistance moléculaire, par unité de surface, dans la section méridienne de l'enveloppe, on doit avoir, dans l'état d'équilibre,

$$\pi r^2 \times p = 2\pi r e \times R, \quad \text{d'où} \quad e = \frac{pr}{2R}.$$

Cette épaisseur est augmentée dans la pratique; et dans toutes les circonstances analogues on doit ajouter, à la dimension ainsi calculée, une surépaisseur de sécurité pour tenir compte des malfaçons et des défectuosités de la matière.

62. — Résistance d'un vase cylindrique à la rupture transversale.

Si A est la section droite du cylindre, le maximum de l'effort dû à la pression intérieure sera pA; et, quelle qu'en soit la forme, le fond sera pressé avec cet effort auquel résistera, comme dans le cas précédent, l'anneau d'épaisseur e qui relie le fond à la paroi cylindrique. Donc si S est le développement de l'anneau on aura aussi

$$pA = SeR, \qquad \text{d'où} \qquad e = \frac{pA}{RS}.$$

Si le cylindre est à section circulaire on a

$$A = \pi r^2, \quad S = 2\pi r,$$

d'où résulte, comme précédemment,

$$e = \frac{pr}{2R}.$$

63. — Résistance d'un vase cylindrique à la rupture longitudinale.

En désignant par A la plus grande surface plane inscriptible dans le cylindre, parallèlement à ses génératrices, et par S le contour longitudinal, on a toujours

$$pA = SeR, \quad \text{d'où} \quad e = \frac{pA}{RS}.$$

Si le cylindre est de révolution et d'une longueur égale à l, on a

$$A = 2rl, \quad S = 2l,$$

et par suite

$$e = \frac{pr}{R};$$

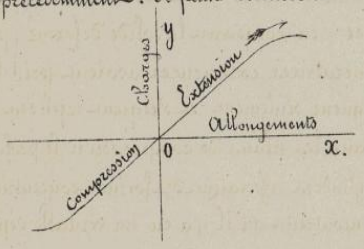
c'est-à-dire que l'épaisseur doit être double de celle qui a été calculée précédemment.

On devra évidemment, dans chaque cas, tenir compte de la section la plus dangereuse pour la détermination de l'épaisseur e.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Compression.

64. — Analogie entre la compression et l'extension. — On a vu, en commençant l'étude de l'extension, que les corps peuvent être considérés comme formés de séries de molécules réunies entre elles par des ressorts moléculaires qui s'allongent par l'extension et se raccourcissent par la compression. Entre ces deux phénomènes l'état ordinaire du corps n'est qu'un terme moyen, et l'on comprend que ce corps puisse se comprimer de la même manière qu'il s'étirait précédemment. Il faut conclure de là, qu'en restant dans les limites de compression où le solide ne cesse pas d'être élastique, la formule qui a été établie pour le cas de l'extension devient applicable à la compression et l'on a encore, entre certaines limites,



$$\Delta L = \frac{LN}{E\omega},$$

N étant la charge qui comprime le solide, et ΔL le raccourcissement dû à cette charge. On peut d'ailleurs représenter l'ensemble des deux phénomènes par un tracé graphique, en regardant les charges d'extension comme positives, et les charges de compression comme négatives. La partie de la courbe de compression qui répond à la période d'élasticité est située sur le prolongement de la partie rectiligne qui caractérise la période d'élasticité dans l'extension. Mais la ligne de compression se change bientôt en une véritable courbe caractérisant l'état des ressorts moléculaires, qui se fatiguent de plus en plus. Cette courbe doit tourner sa concavité vers les x négatifs, puisque les raccourcissements partiels augmentent pour des charges égales au-delà de la limite d'élasticité.

L'expérience directe a d'ailleurs vérifié ces hypothèses, mais d'une manière restreinte.

65. — Expériences sur la compression. — Les phénomènes de la compression sont bien plus difficiles à observer que ceux de l'extension; si le corps sur lequel on opère est d'une grande longueur, il fléchit au lieu de se comprimer; le phénomène est alors plus complexe et on ne peut plus appliquer la formule de la compression simple. Si le corps est au contraire d'une petite longueur, les raccourcissements deviennent trop petits pour être mesurés avec le degré de précision convenable.

D'ailleurs, les conditions des deux phénomènes diffèrent d'une manière notable; ainsi, une barre soumise à l'extension éprouve toujours une diminution dans sa section; s'il y a éloignement de molécules dans le sens longitudinal, il y a donc un rapprochement relativement très-petit dans le sens transversal. Ce rapprochement est nécessairement accompagné de pressions exercées par les molécules les unes sur les autres; si le corps est symétrique, ces pressions se font aussi, en sens contraire, dans chaque plan méridien on a, en général, à considérer, pour chacune des sections transversales, deux forces égales et opposées dirigées vers l'axe de la pièce. La compression transversale qui en résulte se manifeste nécessairement dans les phénomènes d'extension en donne une certaine régularité aux déformations correspondantes.

Dans la compression il se produit un tout autre état de choses; un cylindre étant comprimé

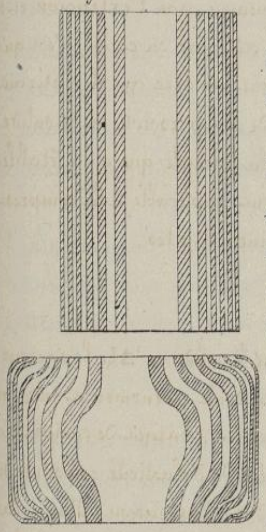
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sous l'action d'une pression déterminée, il s'établit un nouvel état d'équilibre, dans lequel il y a tendance à une augmentation de section. Les efforts transversaux qui se manifestent agissent du centre à la circonférence ; en ces forces, au lieu de se détruire les unes les autres, par suite de leurs directions et de leur symétrie, déterminent nécessairement une sorte de poussée au vide vers l'extérieur.

Il faut conclure de là que la corrélation établie précédemment entre la tension et la compression n'existe réellement que pour les premières déformations.

66. — Compression d'un cylindre formé de couches concentriques.

L'expérience suivante que nous avons répétée à plusieurs reprises, fera mieux comprendre la différence que nous venons d'indiquer.



Un cylindre de plomb ayant 0m,05 de hauteur, 0m,03 de diamètre et formé de dix anneaux concentriques, dont les aires transversales étaient égales entre elles, a été comprimé de manière à réduire sa hauteur à 0m,03.

On a constaté que le volume du corps était resté le même ; la forme de la surface latérale était bombée ; en coupant le solide déformé, par un plan méridien, on a vu que les génératrices extérieures avaient pris la forme du méridien sur une partie de la longueur seulement, et s'étaient repliées à leurs extrémités, de manière à former, dans les plans de compression, le prolongement des bases primitives ; les autres cylindres affectaient de se former concentriques, mais les modifications de chacun d'eux montrent qu'il y a eu un véritable déplacement du dit centre à la circonférence

Nous avons là l'image de ce qui doit se passer dans la compression des corps solides et ces formes démontrent bien l'existence des poussées au vide, déterminées par cette compression. C'est donc seulement dans de très-étroites limites que les filets moléculaires se comportent de la même manière à l'extension et à la compression.

67. — Compression d'un solide de forme cubique. — Rondelet a déduit de ses expériences qu'un cube soumis à l'écrasement se divise en six pyramides ayant leur sommet commun au centre du cube et pour bases les faces primitives de ces cubes ; nous pensons qu'il ne se forme réellement que deux pyramides, celles dont les bases correspondent aux deux plans de compression ; les quatre autres pyramides n'existent qu'à l'état de matières désagrégées. En tout cas la poussée au vide se manifeste clairement dans cette expérience.

68. — Résistance des métaux à la compression. — Mr. Hodgkinson a fait de nombreuses expériences sur la résistance à la compression du bois, du fer et de la fonte.

Il prenait des barres de 3m,00 de longueur, de 6c2,45 de section, et les maintenait latéralement dans des gaines de fer qui empêchaient la flexion de dépasser une certaine limite ; d'autres expériences ont été faites sur des solides de 0m,03 à 0m,05 de hauteur seulement, mais elles ne peuvent conduire qu'à la détermination du coefficient de rupture par écrasement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

69. — Résultats d'expériences sur la compression. —

Eléments à considérer.	Désignation.	Fer.	Fonte.	Chêne.	Sapin.
Coefficient d'élasticité	E	16.10^9	8.10^9	" "	" "
Charge limite d'élasticité par mètre carré	N_e	18.10^6	23.10^6	" "	" "
Charge pratique par mètre carré	N_p	6.10^6	10.10^6	$0,4..10^6$	$0,4.10^6$
Charge de rupture par mètre carré	N_r	25.10^6	$75..10^6$	$4,5..10^6$	$4,5.10^6$

Il résulte de ce tableau qu'entre certaines limites les coefficients d'élasticité sont sensiblement les mêmes pour l'extension et pour la compression ; et cela montre comment, dans ces mêmes limites, le coefficient d'élasticité caractérise les propriétés mécaniques des matériaux.

Ce rapprochement acquerra du reste toute son importance, lorsque nous pourrons en faire la vérification directe dans l'observation des phénomènes de flexion.

La limite d'élasticité se produit, pour la fonte, plus tard que pour le fer ; les molécules du premier métal résistent donc mieux à la poussée au vide, ce qui peut tenir aux différences de constitution des deux métaux. La fonte est un métal homogène, de même résistance dans tous les sens, tandis que le fer est composé de parties fibreuses, mais moins bien reliées dans le sens transversal.

D'ailleurs, la fonte n'est pas, comme on le dit généralement, plus avantageuse que le fer pour résister à la compression, car, pour une section et une charge données, la pièce de fonte éprouvera une déformation double de celle de la pièce en fer ; ce qu'il importe surtout d'obtenir, dans les machines, c'est que les pièces ne changent pas sensiblement de dimensions.

Dire que les pièces ont une hauteur plus grande que le double de la plus petite dimension transversale, on peut d'ailleurs constater qu'il y a, dans la plupart des cas, flexion transversale.

70. — Résistance des maçonneries — En général, pour les maçonneries la résistance diminue quand le rapport de la hauteur à la base est plus grand que 2.

La résistance, pour des solides semblables semble être proportionnelle aux sections transversales.

Il convient de ne pas charger les pièces, dans les constructions, au-delà du $\frac{1}{10}^{e}$ ou du $\frac{1}{20}^{e}$ de leur résistance à la rupture.

On a, sous le rapport de la charge de rupture, de très-nombreuses déterminations.

En France, M^r^ **Michelot**, Ingénieur en chef des ponts et chaussées, expérimente avec un appareil à levier.

Les cubes, de $0^m,05$ de côté, sont placés entre deux plaques de fonte.

Nous avons fait également des expériences très-nombreuses sur les diverses pierres employées aux constructions ; la pression a été obtenue au moyen d'une presse hydraulique à quatre cylindres, ce qui a permis, en égard à l'indépendance des pistons, d'obtenir un parallélisme très-exact entre les surfaces qui compriment et celle des matériaux à écraser.

Nos expériences ont toutes été faites sur des cubes de $^m0,10$, et dans les divers tableaux qui ou-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

été publiés à ce sujet, on a eu soin de distinguer les charges sous lesquelles les premières fissures apparaissent de celles qui correspondent à l'écrasement complet.

Voici quelques chiffres sur la résistance des pierres.

Pierres calcaires, $0^k.3 \times 10^6$ à $7^k.\times 10^6$; Briques, $0^k.3 \times 10^6$ à $2^k \times 10^6$

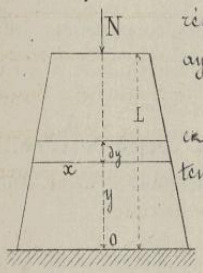
Grès des Vosges, $1^k,7 \times 10^6$ à $5^{kg} \times 10^6$; Plâtre, $0^k.3 \times 10^6$ à $0^k.6 \times 10^6$.

Pour des matériaux de même nature la résistance est à peu près proportionnelle au poids spécifique.

71. — Compression d'un solide de section variable. — La question peut se résoudre comme celle du N° 56. Si par exemple, le profil est une ligne droite, ayant pour équation

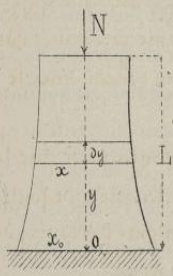
$$x = my + n,$$

et si la section est un carré, on trouve, pour le raccourcissement total, en ne tenant pas compte du poids du solide,



$$\Delta L = \frac{N}{4E} \int_0^L \frac{dy}{(my+n)^2} = \frac{NL}{4En(mL+n)};$$

72. — Solide d'égale résistance par rapport à la compression. En traitant la question comme celle du N° 58 et en supposant qu'il s'agisse d'une section rectangulaire dont une dimension est constante, on trouve, pour l'équation du profil,



$$y = \frac{R}{\Pi \log e} \cdot \log. \frac{x_0}{x}.$$

Le raccourcissement total de la tige serait

$$\Delta L = \frac{RL}{E}.$$

73. — Observation sur les grands ouvrages en maçonnerie. — C'est surtout pour les grands ouvrages en maçonnerie qu'il est nécessaire de recourir à la forme d'égale résistance.

En désignant par R la limite de charge pratique par mètre carré, par h le maximum de la hauteur d'un mur rectangulaire, et par Π le poids d'un mètre cube de maçonnerie, on a évidemment, pour la pression par mètre carré exercée à la base du mur,

$$R = \Pi h, \quad \text{d'où} \quad h = \frac{R}{\Pi}.$$

Par exemple, si l'on voulait ne pas dépasser la charge de 6000 kilog. par mètre carré, et que l'on eût $\Pi = 2000$ kilog., la limite de hauteur du mur serait

$$h = \frac{6000}{2000} = 30 \text{ mètres}.$$

Il résulte de là que si la hauteur totale du mur à construire devait dépasser cette limite, on pourrait, dans les conditions de résistance indiquées, et dans le cas où il n'existerait pas de pression latérale, conserver à ce mur, sur une hauteur de 30 mètres, comptée à partir de l'assise supérieure, une épaisseur uniforme déterminée d'après la nature des matériaux employés; mais pour toutes les assises inférieures, l'épaisseur devrait être augmentée suivant la forme logarithmique ou une autre forme appropriée,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

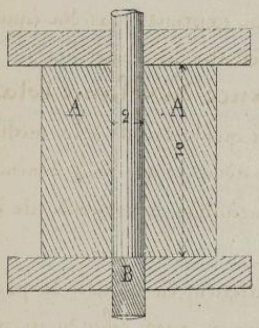
et c'est ce que l'on a fait, dans ces derniers temps, pour les grands barrages qui ont été construits sur le Furens et dans d'autres localités pour la retenue des eaux.

Ecoulement des corps solides.

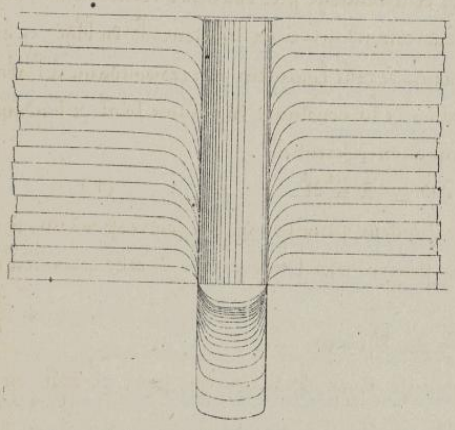
74.— **Objet de la question.**— Bien que le mécanicien ait le plus souvent à considérer les corps dans les conditions qui ne les modifient pas d'une manière permanente, il importe cependant qu'il connaisse les lois de leurs déformations, pour se guider dans les circonstances où il a besoin de leur faire subir des transformations déterminées.

Ces lois sont à peine connues, mais la théorie de l'écoulement des corps solides telle que nous l'avons envisagée doit aider à combler cette lacune importante, et son étude se place naturellement à la suite de celle que nous avons faite des phénomènes de la compression.

75.— **Premières expériences sur l'écoulement des corps solides.**— Les premières observations qui nous ont conduit à l'étude de cette question se rapportent au poinçonnage d'un cylindre de plomb de $0^m,10$ de hauteur.



Ce cylindre A ayant été placé entre deux plaques de métal percées l'une et l'autre d'un trou cylindrique de $0^m,02$ de diamètre, on a fait passer, de part en part, un poinçon de même diamètre, et l'on a ainsi fait sortir une débouchure cylindrique B, formée par le métal expulsé, et qui aurait dû présenter une hauteur égale à celle du bloc s'il y avait eu seulement déplacement de la matière dans le sens du mouvement du poinçon. En fait, cette débouchure n'avait que $0^m,03$ de hauteur, et cette différence entre le volume du trou formé et celui de la débouchure ne pouvait s'expliquer par une augmentation de densité, que les déterminations les plus précises ont démontré ne pas exister.

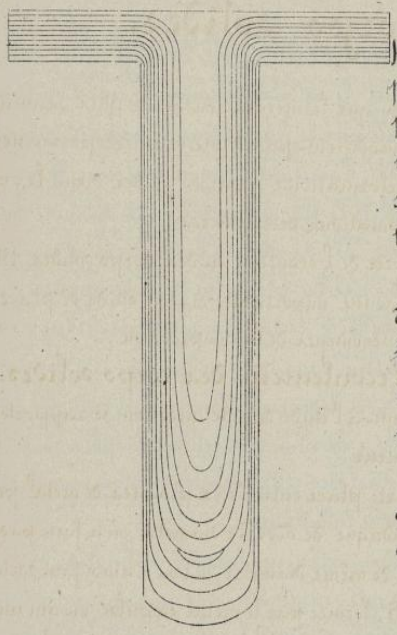


Pour connaître la cause de cette anomalie apparente, on a remplacé la masse cylindrique de plomb par une série de plaques superposées; et, après avoir de nouveau opéré avec le poinçon, on a reconnu que ces plaques étaient très-inégalement représentées dans la débouchure. Celles de la partie supérieure, à l'exception de la première, y étaient réduites à une si petite épaisseur qu'il devenait évident que la matière qui les formait primitivement avait dû être refoulée à l'extérieur du trou de poinçonnage, dans le bloc lui-même. Ce déplacement a donné la première notion des mouvements intérieurs qui peuvent se produire, par le jeu des pressions, dans l'intérieur d'une masse solide.

Afin de les étudier dans les conditions les plus simples on a dû chercher à réaliser dans une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

masse solide des déplacements plus analogues à ceux qui se produisent dans l'écoulement des liquides.

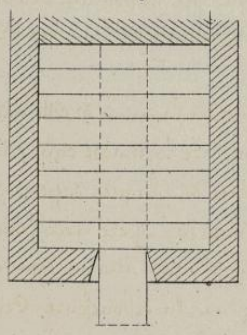


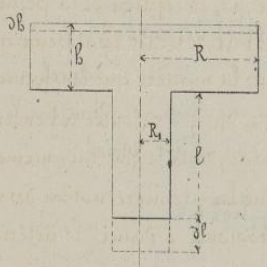
76. — Écoulement d'un bloc cylindrique par un orifice concentrique. — A cet effet on a placé dans un cylindre en fonte une série de rondelles ou de plaques en plomb, et par l'intermédiaire d'un piston fortement pressé sur ces plaques, on a forcé la matière à sortir, sous forme de jet cylindrique, par un orifice circulaire concentrique avec l'axe du cylindre.

Le jet, obtenu dans ces conditions devait permettre d'y retrouver les séparations des différentes plaques, et de fournir ainsi quelques renseignements sur les déformations intérieures correspondant à la déformation extérieure manifestée par la production du jet.

Les faits ont été sous ce rapport si concluants qu'il est devenu possible de les exprimer par des équations, au moyen de quelques considérations géométriques.

77. — Constance du volume total. — L'expérience a montré que la densité de la matière reste la même dans les diverses parties du solide, et qu'ainsi l'on doit admettre que toute diminution dans le volume du bloc est exactement compensée par une augmentation correspondante dans le volume du jet.





Si l'on désigne par R le rayon extérieur du cylindre de plomb, par R_1 le rayon de l'orifice circulaire, qui est aussi celui du jet cylindrique, par h la hauteur du bloc à un instant quelconque, par $-dh$ la diminution de cette hauteur par suite de l'écoulement, par l la longueur du jet correspondant à la hauteur h du bloc, et enfin par dl l'accroissement de cette longueur correspondant à l'abaissement dh, la condition de la constance du volume total se traduit immédiatement par l'équation différentielle

$$-\pi R^2 dh = \pi R_1^2 dl. \qquad (1)$$

Si H est la hauteur primitive du bloc, correspondant à un jet de longueur nulle, on pourra par l'intégration de cette première équation écrire

$$R^2 h = -R_1^2 l + c$$

et déterminer la constante c en observant que pour $h = H$ on a $l = 0$, ce qui donne

$$R^2 H = c$$

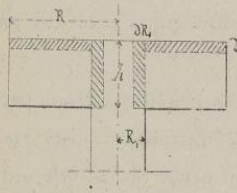
et par suite $R^2(H-h) = R_1^2 l$, d'où $h = \dfrac{R^2 H - R_1^2 l}{R^2}$. (2)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On aurait d'ailleurs pu obtenir immédiatement cette relation en remarquant que le volume $\pi R_1^2 l$ du jeu doit toujours être égal à la diminution $\pi R^2 (H - h)$ du volume du bloc; mais l'équation en dh était, ainsi qu'on le verra bientôt, indispensable pour la suite des calculs.

78. — Hypothèse de la contraction concentrique du cylindre central.

Nous désignerons sous le nom de cylindre central, le cylindre de rayon R, que l'on peut concevoir dans le bloc en prolongement du cylindre formé par le jeu, et sous le nom d'anneau extérieur au cylindre central, l'anneau de rayon extérieur R et de rayon intérieur R_1 qui complète le bloc à l'extérieur du cylindre central.



A chaque abaissement dh du piston, la matière de cet anneau ne pouvant s'échapper ni du côté du piston ni du côté opposé, ni du côté de la paroi résistante du cylindre, devra nécessairement refluer vers l'axe et comprimer le cylindre central dans toute sa hauteur. On peut même affirmer, par raison de symétrie, que la surface extérieure du cylindre central sera ainsi transformée en une surface de révolution, ayant le même axe. L'hypothèse la plus naturelle et la plus simple que l'on puisse faire sur cette transformation consiste à admettre que cette surface, en obéissant à la compression exercée par la matière environnante, est restée cylindrique.

Dans ce cas, la diminution de volume de l'anneau extérieur, lorsque sa hauteur diminue de dh, est égale à l'augmentation de volume correspondante, résultant de ce que son rayon intérieur R_1 a lui-même diminué de dR_1. On obtient ainsi, pour exprimer la constance du volume, l'équation

$$\pi (R^2 - R_1^2)\, dh = 2\pi R_1 dR_1 h, \quad \text{d'où} \quad \frac{dh}{h} = \frac{2R_1 dR_1}{R^2 - R_1^2}, \qquad (3)$$

qui donne une nouvelle relation entre les variables du problème.

79. — Hypothèse de la contraction proportionnelle dans le cylindre central.

— La surface extérieure du cylindre central, représenté ici en plan par une figure amplifiée, ne peut diminuer de rayon sans que certains déplacements se produisent à l'intérieur de ce cylindre central et, dès lors que toutes les actions s'exercent d'une manière parfaitement symétrique autour de l'axe, il est naturel de supposer que chaque cylindre de hauteur h, et de rayon extérieur r, s'est modifié, dans la section transversale, proportionnellement à cette section, ce qui permet d'écrire, comme troisième condition,

$$\frac{d(\pi r^2)}{\pi r^2} = \frac{d(\pi R_1^2)}{\pi R_1^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dr}{r} = \frac{dR_1}{R_1}. \qquad (4)$$

80. — Transformée du cylindre central primitif dans le bloc. —

Les trois équations qui précèdent permettent de trouver le rayon r du cylindre en lequel se transforme, dans le bloc, le cylindre central primitif, de rayon R_1 lorsque le bloc est réduit à la hauteur h.

Il suffit pour cela d'éliminer dR_1 entre les équations (3) et (4), ce qui donne

$$\frac{dh}{h} = \frac{2R_1^2}{R^2 - R_1^2} \times \frac{dr}{r}, \qquad \text{d'où} \quad \log h = \frac{2R_1^2}{R^2 - R_1^2} \log r + C.$$

Pour $h = H$ on a $r = R_1$, et par suite,

$$\log H = \frac{2R_1^2}{R^2 - R_1^2} \log R_1 + C;$$

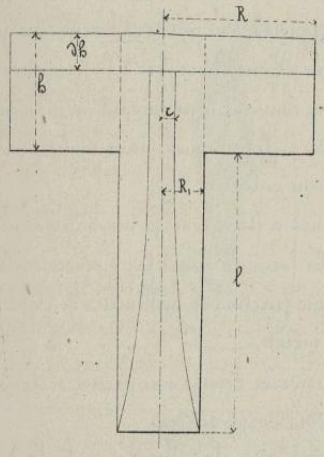
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où, par soustraction, $\log \frac{b}{H} = \frac{2R_1^2}{R^2-R_1^2} \log \frac{r}{R_1}$, ou $\frac{r}{R_1} = \left(\frac{b}{H}\right)^{\frac{R^2-R_1^2}{2R_1^2}}$

formule d'où l'on peut déduire la valeur de r.

81. — Transformée du cylindre central primitif dans le jet. —

Pour connaître la transformée dans le jet d'une des génératrices de la surface extérieure du cylindre central primitif, il suffit de remarquer que chaque abaissement db de la hauteur du bloc détermine la formation d'un élément infinitésimal du jet, de hauteur dl, et que dans cet élément cylindrique, le cylindre central primitif est représenté par un élément cylindrique dont le rayon r est donné par la formule précédente. D'après cela, l'équation cherchée s'obtient facilement en éliminant b, db et dR_1 entre les équations (1), (2), (3) et (4) ce qui donne



$$\frac{dr}{r} = -\frac{R^2-R_1^2}{2R_1^2} \times \frac{R_1^2 dl}{R^2H - R_1^2 l} = \frac{R^2-R_1^2}{2R_1^2} \times \frac{d(R^2H - R_1^2 l)}{R^2H - R_1^2 l}$$

d'où $\log r = \frac{R^2-R_1^2}{2R_1^2} . \log . (R^2H - R_1^2 l) + C$;

ou en observant qu'à l'origine on a $r = R_1$, $l = 0$, il vient

$$\log . R_1 = \frac{R^2-R_1^2}{2R_1^2} . \log R^2H + C ;$$

d'où, par soustraction,

$$\log \frac{r}{R_1} = \frac{R^2-R_1^2}{2R_1^2} . \log . \frac{R^2H - R_1^2 l}{R^2H}$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{r}{R_1} = \left(\frac{R^2H - R_1^2 l}{R^2H}\right)^{\frac{R^2-R_1^2}{2R_1^2}}, \quad \text{ou encore} \quad \frac{R^2H - R_1^2 l}{R^2H} = \left(\frac{r}{R_1}\right)^{\frac{2R_1^2}{R^2-R_1^2}}$$

équation dans laquelle les valeurs de r représentent les abscisses, et les valeurs de l, les ordonnées de la courbe.

82. — Discussion de la transformée. —

L'équation précédente, dans laquelle l n'entre qu'à la première puissance, représente une courbe qui varie suivant les grandeurs relatives de R et de R_1.

La nature de la courbe varie avec l'exposant $\frac{2R_1^2}{R^2-R_1^2}$.

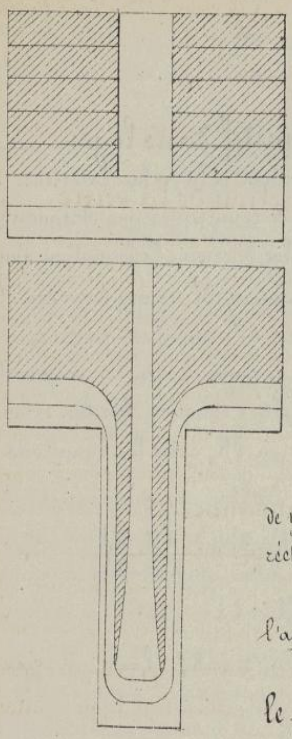
Si cet exposant est plus grand que 2, la courbe peut être considérée comme une parabole d'un degré supérieur.

Si l'exposant est égal à 2, auquel cas on a $R_1^2 = R^2 - R_1^2$, ou $R_1^2 = \frac{R^2}{2}$, la courbe est une parabole du second degré.

Enfin la courbe se réduit à une ligne droite pour $2R_1^2 = R^2 - R_1^2$, d'où $R_1^2 = \frac{R^2}{3}$.

Au-dessous de cette valeur la courbe devient une hyperbole de degré variable qui serait du second degré si l'on avait $2R_1^2 = -(R^2 - R_1^2)$, mais on aurait alors $R_1^2 = -R^2$, ce qui conduirait, pour R_1, à une valeur imaginaire qui ne saurait être utilement considérée dans la question qui nous occupe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

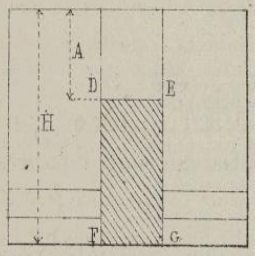


83.— Vérification expérimentale. — Pour vérifier si les résultats de l'expérience sont conformes à cette théorie nouvelle, nous avons placé dans le cylindre de compression, d'abord deux plaques de plomb qui occupent toute la section du cylindre, puis une série de plaques percées au centre d'un trou de même diamètre (0,03) que celui du jet à produire. Enfin, nous avons rempli le vide cylindrique de toutes les plaques supérieures par un cylindre de plomb bien ajusté. Chacune des génératrices de ce cylindre central devait se transformer, lors de la formation du jet, comme l'indique l'équation, en coupant le jet suivant un plan diamétral, la ligne de joint entre le cylindre et les plaques devait réaliser avec plus ou moins d'exactitude la forme calculée.

Le résultat de cette expérience a été de tout point satisfaisant; les valeurs de x, calculées par la formule, pour les diverses valeurs de y, n'ont jamais différé de plus d'une fraction de millimètre de l'abscisse réellement mesurée sur l'échantillon même.

Cette vérification doit donc être considérée comme une preuve sérieuse à l'appui de la théorie de l'écoulement des corps solides.

84.— Transformée d'une couche horizontale dans le jet. — En poussant plus loin le calcul, nous sommes arrivé à une autre vérification tout aussi probante; elle se rapporte à la distance des couches dans le jet.



Si la ligne horizontale DE, considérée dans le cylindre central est représentée dans le jet par l'horizontale D'E', le volume primitivement projeté en DEFG est représenté dans le jet D'E'F'G'; et en désignant par $H-A$ la hauteur DF, on a immédiatement

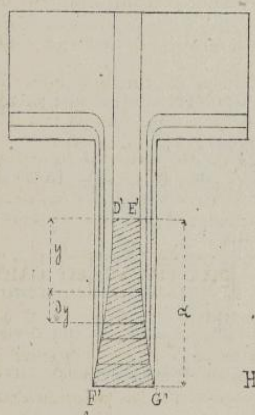
$$\text{vol. } DEFG = \pi R_1^2 (H-A);$$

en égalant ce volume à celui du solide de révolution dont le méridien D'F' est donné par son équation, on peut écrire

$$\pi R_1^2 (H-A) = \int_0^{\alpha} \pi x^2 dy;$$

et pour connaître la hauteur $MN = \alpha$, il suffit de déterminer cette limite α de manière à satisfaire à cette condition d'égalité. Or, on a, en remplaçant l par y et z par x, dans une équation obtenue précédemment

$$x^2 = R_1^2 \left(\frac{R^2 H - R_1^2 y}{R^2 H} \right)^{\frac{R^2 - R_1^2}{R_1^2}};$$



et en substituant cette valeur de x^2 sous le signe de l'intégration, il vient, après la suppression du facteur commun πR_1^2,

$$H - A = \int_0^{\alpha} \left(\frac{R^2 H - R_1^2 y}{R^2 H} \right)^{\frac{R^2 - R_1^2}{R_1^2}} dy = -\frac{R^2 H}{R_1^2} \int_0^{\alpha} \left(1 - \frac{R_1^2 y}{R^2 H} \right)^{\left(\frac{R^2}{R_1^2} - 1\right)} \times d\left(1 - \frac{R_1^2 y}{R^2 H} \right).$$

Sous cette dernière forme, l'intégration est immédiate, et si l'intégrale indéfinie qu'on obtient

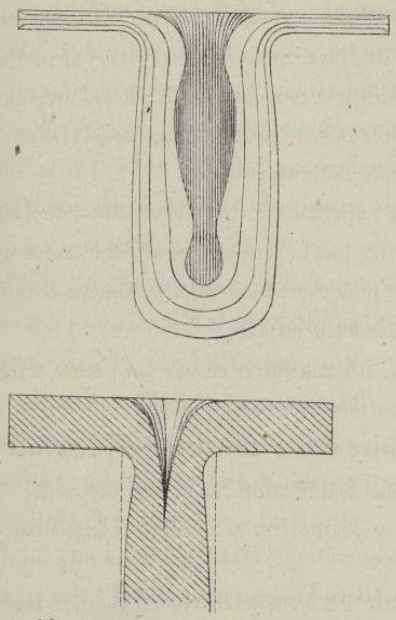
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

est prise ensuite entre les limites correspondant à $y=0$ et $y=\alpha$, il vient, réductions faites,

$$A = H\left(1-\frac{R_1^q\,\alpha}{R^q H}\right)^{\frac{R^q}{R_1^q}}, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{R^q H}{R_1^q}\left[1-\left(\frac{A}{H}\right)^{\frac{R_1^q}{R^q}}\right].$$

Cette valeur de α a été vérifiée pour chacune des plaques des nombreux échantillons qui ont été préparés, et elle a donné lieu à autant de vérifications satisfaisantes.

85. — Formation des jets creux et contraction de la veine. —

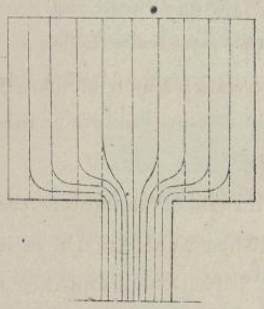


Lorsque le bloc a une hauteur moindre que le rayon du jet, au commencement de l'expérience, le jet présente une cavité vers l'axe, et la matière s'écoule comme le ferait un liquide sur l'arête d'un déversoir circulaire.

Cette cavité rend compte de l'entraînement qui a lieu dans l'écoulement de l'eau sous une très-faible charge, dans les machines soufflantes connues sous le nom de **trompes catalanes**, où l'air s'introduit dans une cavité semblable formée dans l'axe du jet. La cavité qui se forme dans les jets de matière solide a une forme très-régulière que l'on peut calculer ; et en même temps que le jet se creuse vers l'axe, on voit apparaître à l'extérieur une contraction tout à fait analogue à celle des veines liquides.

La même cavité et la même contraction se forment dans les jets ordinaires à partir du moment où le bloc est réduit, par le fait même de l'écoulement, à une petite épaisseur.

86. — Rapprochement avec l'écoulement des liquides. —



Si l'on donne un tronçon de jet ordinaire, formé de couches concentriques, à un nouvel écoulement dans une matrice percée en son fond d'un trou concentrique, on voit par la coupe faite ensuite suivant un plan méridien que les génératrices des faces de joint s'infléchissent toutes vers l'orifice et qu'à partir d'une certaine hauteur tous les points du bloc sont intéressés à la formation de la veine. On voit ainsi que l'hypothèse du parallélisme des couches, bien que parfaitement convenable pour soumettre la question de l'écoulement des liquides au calcul, n'est pas absolument conforme aux faits qui se manifestent dans l'écoulement des solides. Des expériences directes ont d'ailleurs démontré que l'écoulement des liquides a lieu dans les mêmes conditions.

87. — Écoulement d'un bloc cylindrique par un orifice latéral.

Un bloc semblable au précédent était formé de couches concentriques, si on le place dans une matrice cylindrique percée d'un trou circulaire dans sa paroi courbe, il se forme encore un jet qui offre des particularités intéressantes. La formation de ce jet prouve que la pression exercée sur la face supérieure du bloc se transmet, dans l'intérieur de la masse, jusqu'à l'orifice, puisqu'elle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

force la matière à sortir sous forme d'un jet cylindrique dont la section est exactement celle de l'orifice.

En coupant ce jet par des plans perpendiculaires à son axe on reconnaît que chacun des anneaux cylindriques a formé une partie distincte du jet total. Les figures ci-jointes reproduisent les contours des lignes séparatives des couches successives, et font voir que le jet total peut être considéré comme formé par la réunion de deux nappes, l'une supérieure qui est la nappe principale de l'écoulement de la partie supérieure du bloc ; l'autre inférieure, d'une section moindre, et que l'on pourrait appeler la nappe d'entraînement, parce qu'elle provient de la matière primitivement placée au-dessous de l'orifice et qui a été entraînée par la nappe principale dans son mouvement. (fig. A).

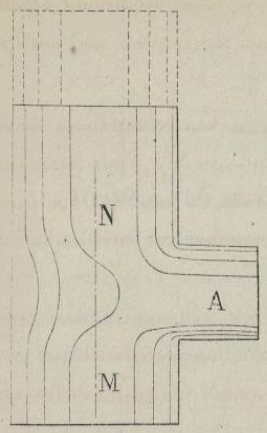
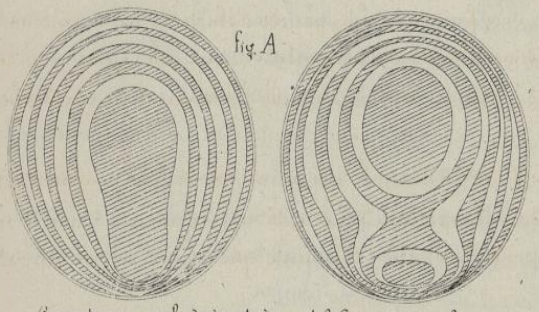


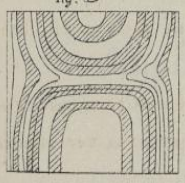
fig. A



Coupe transversale du jet A à une échelle quadruple.

L'existence de ces deux nappes est d'ailleurs mise en évidence par la coupe faite dans le bloc par un plan méridien perpendiculaire à l'axe du jet. Ces déplacements relatifs s'effectuent avec une si grande régularité que le dessin ne peut les représenter que d'une manière très-insuffisante. (fig. B).

fig. B



Coupe suivant MN.

Des déplacements analogues et tout aussi remarquables se retrouvent encore quand l'orifice est de section carrée ou polygonale.

88.— Principe général de l'écoulement des corps solides. — Les faits que nous venons d'indiquer nous ont paru suffisants pour énoncer, comme principe général, que toutes les fois qu'une pression est exercée sur un corps solide, cette pression tend à déterminer un écoulement relatif des molécules qui doivent dès lors se mouvoir dans la direction où la résistance à leur mouvement est la moindre.

Cette application du principe de la moindre résistance permettra, dans beaucoup de circonstances, de prévoir le résultat d'une pression exercée sur la surface d'un corps solide de forme déterminée, ainsi qu'on en pourra juger par quelques exemples choisis parmi les opérations nouvelles.

89.— Application au poinçonnage. — Dans l'expérience du poinçonnage, dont il a déjà été question au N° 75, la pression déterminée par l'application du poinçon fera couler la matière dans le sens de la moindre résistance ; dans le sens horizontal si la résistance est moindre que dans le sens vertical, et c'est ce qui arrive lorsque le poinçon opère à une grande distance de la face inférieure ; dans le sens vertical si la résistance est moindre que dans le sens horizontal, et c'est ce qui arrive lorsque le poinçon, après avoir traversé une grande partie de la hauteur du bloc, s'est rapproché de l'orifice par lequel la débouchure est expulsée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

C'est pour cette double raison que les couches supérieures ont beaucoup diminué d'épaisseur dans la débouchure et qu'au contraire les couches inférieures y sont représentées avec une épaisseur peu différente de leur épaisseur primitive.

90.— Notion sur la pression de fluidité. — Ces expériences nous ont montré que les corps doués d'une certaine malléabilité se déforment, au delà d'une pression déterminée, suivant des lois géométriques, d'une manière permanente, et sans que l'on puisse y reconnaître aucun indice d'élasticité ou de retour vers la forme primitive au moment où l'action cesse.

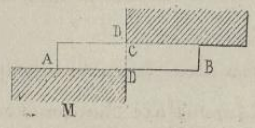
Nous avons désigné sous le nom de *pression de fluidité*, celle qui est nécessaire pour amener la matière à cet état, dont on peut donner une définition mathématique en disant que les réactions de deux molécules voisines deviennent alors indépendantes de leur déplacement relatif déjà effectué.

La période de fluidité viendrait ainsi faire suite à la période d'élasticité imparfaite dans laquelle les efforts croissent moins rapidement que les allongements, et qui elle-même ne prend naissance qu'après la période d'élasticité parfaite pendant laquelle les charges et les déplacements restent proportionnels.

On pourrait dire encore que le coefficient d'élasticité qui a une valeur fixe pendant cette dernière période, va en diminuant pendant la période d'élasticité imparfaite et acquiert ensuite une valeur nulle, à laquelle correspond la pression constante que nous avons appelée pression de fluidité.

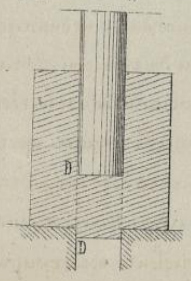
En partant de cette définition nous avons calculé le travail nécessaire pour transformer un cylindre donné en un autre cylindre de même volume et de dimensions linéaires différentes; mais les formules qui expriment ce travail ne sont point utiles à considérer dans cette partie de notre enseignement.

91.— Résistance au cisaillement. — Il en est tout autrement d'une des conséquences de cette théorie qui a permis de préciser ce que l'on appelle la résistance au cisaillement.



Etant donnée une pièce AB, soutenue sur une partie de sa longueur par le support M, on dit qu'il y a cisaillement quand la partie BC de cette pièce est séparée de la partie AD, suivant la section transversale D D.

Dans les phénomènes de poinçonnage dont il a été précédemment question, il y a cisaillement tout au pourtour du poinçon, à partir du moment où la débouchure commence à apparaître sur la face inférieure du bloc poinçonné. Nos expériences ont permis de vérifier que la résistance au cisaillement est proportionnelle à l'épaisseur D D = e de la pièce à cisailler, au contour ou à la longueur c de la ligne suivant laquelle le cisaillement s'opère; et qui en désignant par P_f la pression de fluidité pour la matière que l'on considère, l'effort à exercer pour produire le cisaillement est mesuré par le produit



$$P_f\, c\, e = F_f\, S;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

S étant à chaque instant la surface suivant laquelle le cisaillement doit être produit.

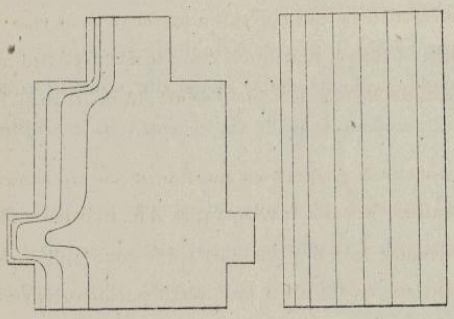
On voit ainsi que K étant le coefficient particulier de la résistance au cisaillement par mètre carré de section transversale, ce coefficient est précisément égal à la pression de fluidité par mètre carré.

Pour le plomb, la pression de fluidité par mètre carré s'élève déjà à 2.10^6 kilog.

Nous aurons à nous occuper de la résistance au cisaillement dans l'étude des phénomènes de la flexion.

92. — Application de l'écoulement des corps solides au forgeage.

Toutes les opérations de forge peuvent être considérées au point de vue de la théorie de l'écoulement des corps solides, et l'expérience démontre que toute pièce de fer fabriquée est le résultat du déplacement individuel de chacune des masses qui constituaient la loupe primitive. Le laminage les étire toutes parallèlement, et lorsqu'on forge ensuite une pièce laminée on arrive à reconnaître, par des coupes convenablement dirigées et au moyen d'une oxydation partielle, les dispositions relatives de toutes les figures de joint, comme par exemple dans l'arbre de moulin représenté dans la figure ci-jointe et obtenu à l'aide d'un fer rond, laminé et forgé ensuite au marteau pour produire les refoulements et les étirages convenables.



Toute pièce de fer ainsi laminée, peut être comparée à un paquet de fils, réunis entre eux par une matière agglutinante d'une autre nature, et que fait apparaître le procédé d'oxydation.

Lorsqu'on écrase par le forgeage une pièce de fer semblable à la précédente, de manière à diminuer sa hauteur en augmentant son diamètre, le même mode d'oxydation démontre que les lits de jointe qui étaient d'abord verticales, se courbent vers le milieu de la hauteur de la pièce et que l'augmentation de diamètre est le résultat du pliage d'une partie de la surface extérieure, dans le plan des faces supérieure et inférieure.

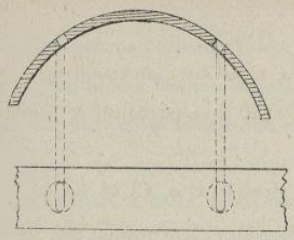
La même expérience faite sur un bloc de plomb composé de couches concentriques montre encore avec une régularité bien plus grande, ce mode de déformation. (Voir les fig. du N° 66). C'est, en effet, vers la partie libre du solide que l'écoulement doit se produire, et le frottement qui s'exerce sur les supports tend encore à assurer le résultat que nous venons d'indiquer.

93. — Application au rabottage.

Nous trouvons un nouvel exemple de l'écoulement des solides dans le rabottage des métaux. Le burin ne peut enlever le copeau qui doit être détaché de la masse, qu'en exerçant sur celle-ci une pression considérable. Si cette pression détermine un écoulement il devra se produire dans le sens de la moins grande résistance, qui est ici le sens de l'épaisseur du copeau.

Cette épaisseur devra donc augmenter, et comme le volume de la matière du copeau ne saurait varier par suite de l'action de l'outil, cette augmentation en épaisseur doit être compensée par une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



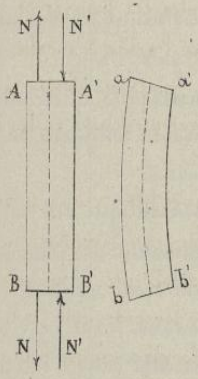
diminution en longueur.

La plupart des copeaux ne représentent que les $\frac{4}{10}$ de la longueur du solide rabotté, et ce fait est parfaitement mis en évidence par un copeau de bandage de locomotive dans lequel les rivets à section circulaire qui unissaient le bandage à la jante ont été ramenés, dans le copeau, à une forme elliptique dans laquelle le rapport entre le grand axe et le petit axe donne la mesure du raccourcissement proportionnel.

Ces exemples suffisent pour montrer le parti que l'on pourra tirer dans l'avenir de la théorie de l'écoulement des corps solides.

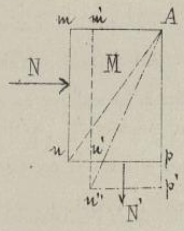
94.— Extension et compression simultanées. — Il arrive souvent, dans les applications, qu'un même corps est soumis à des actions qui tendent à produire en un même point différents genres de déformation. Il faut alors étudier l'effet de chacune de ces causes en particulier et en déduire, par la considération des déplacements partiels de deux molécules voisines, la direction et l'amplitude de leurs déplacements réels.

En ce qui concerne les phénomènes d'extension et de compression simultanées, on peut concevoir que la pièce ABA'B' soit soumise à une certaine traction N dans le voisinage de AB, et à une certaine compression N' dans le voisinage de A'B'. La partie AB devra s'allonger, la partie A'B' devra se raccourcir, et s'il n'y a pas cisaillement entre les deux parties, le solide prendra une forme analogue à celle qui est indiquée en aa'bb'. Il y aura dans ce solide des fibres allongées, des fibres raccourcies, et par raison de continuité il existera, dans l'intervalle compris entre les unes et les autres, des fibres qui n'étant ni allongées ni raccourcies sont désignées sous le nom de *fibres neutres*.



Pour ces fibres l'extension et la compression s'annulent pour ainsi dire respectivement puisqu'elles ne déterminent, ni l'une ni l'autre, aucune variation de longueur. Nous aurons, dans l'étude des phénomènes de flexion, à démontrer l'existence de ces fibres neutres et à en déterminer la position.

Il en serait tout autrement si les deux actions de compression et d'extension avaient lieu dans des directions différentes. Si le solide M est comprimé par la force N dans le sens transversal, la tranche mn sera transportée en m'n' proportionnellement à cette force N, de telle manière qu'une longueur finie Am se trouve réduite à Am', si d'un autre côté la force N' agit par extension, dans le sens perpendiculaire, la tranche np, à laquelle appartient le point n, sera transportée en n''p'' de manière que la longueur Ap sera devenue Ap'. Par suite de ces deux déformations successives le point n sera venu d'abord en n', puis en n'', et il en sera évidemment de même si les deux actions se sont exercées simultanément.



La distance primitive An sera devenue An'' et les forces élastiques qui se seront développées entre ces deux points seront, comme celles que nous avons considérées jusqu'ici, proportionnelles à l'allongement ou au raccourcissement $\frac{An'' - An}{An}$.

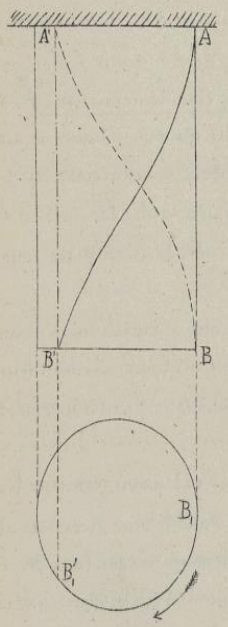
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous verrons ultérieurement comment ces mêmes considérations doivent être appliquées pour d'autres genres de déformations.

Torsion.

95.— Définition de la torsion. — Lorsqu'on fixe invariablement un solide cylindrique ou prismatique par l'une de ses extrémités et que l'on agit à l'autre extrémité au moyen d'un couple transversal, le solide subit une déformation que l'on désigne sous le nom de *Torsion*, et qui consiste en un déplacement des sections transversales successives qui glissent les unes par rapport aux autres.

96.— Effets de la torsion. — Lorsque le solide ne diffère pas trop d'un cylindre, que la déformation résultant de la torsion n'est pas trop grande, et que l'équilibre est établi entre l'action du couple et les forces moléculaires développées, on constate les phénomènes suivants :



1° — Une section transversale, primitivement plane, l'est encore après la torsion, et ses dimensions n'ont pas changé d'une manière appréciable.

2° — La distance entre deux sections transversales quelconques n'a pas varié sensiblement, et par conséquent, la longueur du solide est restée à peu près constante.

3° — Une génératrice AB, primitivement rectiligne, s'est transformée en une hélice AB', dont le développement a évidemment une plus grande longueur que AB, et les molécules situées sur cette droite se sont éloignées les unes des autres. Si l'on conçoit le solide comme étant formé de disques très-minces, chacun d'eux a tourné autour d'un axe situé dans l'intérieur du solide, et la quantité angulaire dont un disque s'est déplacé relativement au suivant est constante dans toute l'étendue du solide, de sorte que la somme de ces quantités égales exprime le déplacement angulaire total, c'est-à-dire la quantité dont le premier disque s'est déplacé relativement au dernier; le déplacement total, représenté par Θ, est donc proportionnel à la longueur l du solide, et l'on a, en désignant par θ la valeur de Θ qui correspond à $l = 1$,

$$\Theta = \theta l ;$$

la valeur θ que l'on nomme *angle de torsion*, se mesure par la longueur de l'arc de déplacement situé sur la circonférence dont le rayon est égal à l'unité.

Si n est le nombre de degrés correspondant au déplacement Θ, on a évidemment,

$$\Theta = \frac{\pi n l}{180}, \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{\pi n}{180}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

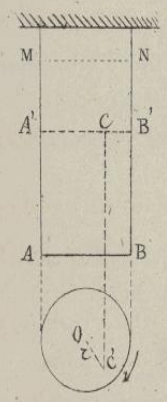
4ᵉ — Une génératrice rectiligne AB étant devenue une hélice après la torsion, on doit en conclure qu'une certaine hélice telle que A'B, primitivement tracée sur le cylindre, a dû se transformer en même temps en une ligne droite A'B' plus courte que l'hélice A'B, et par conséquent que les molécules situées sur cette courbe se sont rapprochées les unes des autres.

Ainsi, sous l'influence de la torsion, des molécules s'éloignent, d'autres se rapprochent; il y a extension dans certaines parties, compression dans d'autres, et l'on voit que la torsion est un phénomène moins simple que ceux qui ont été considérés précédemment dans les questions relatives à l'extension et à la compression.

Les phénomènes de torsion observés à la surface du cylindre doivent nécessairement s'étendre aux surfaces concentriques situées à l'intérieur du solide, et l'on peut admettre que toutes les droites situées primitivement dans un même plan passant par l'axe et parallèles à cet axe, se sont transformées en des hélices de même pas, formant par leur ensemble une surface hélicoïdale gauche. D'où l'on conclut que toutes les molécules situées d'abord sur un rayon déterminé, partant de l'axe, se trouvent encore sur un même rayon après la torsion.

97. — Expression analytique du phénomène de la torsion. — Soit AB une section transversale quelconque d'un cylindre soumis à l'action d'un couple P_p situé dans le plan AB. Dans l'état statique, il y a équilibre entre les forces moléculaires développées par l'action du couple dans la section A'B' et les forces résistantes exercées sur cette section par la partie du solide situé au-dessous de A'B'; ces dernières se réduisent nécessairement à un couple équivalent à P_p et de sens contraire. Si F est la résistance par unité de surface au point C de la section A'B', situé à la distance r du centre de torsion, la résistance sur l'élément dω situé en C est F dω, et son moment par rapport à l'axe projeté en O, a pour expression F r dω; de sorte que l'on a l'équation

$$P_p = \int F r \, d\omega. \qquad (1)$$



Pour évaluer F, il faut remarquer que si l'on prend une section m n distante d'un mètre de A'B', le déplacement de l'élément dω est, relativement à celui qui lui correspondait primitivement dans la section m n, égal à θr; si l'on admet, comme dans l'extension, que la résistance soit proportionnelle à ce déplacement et qu'on représente par G un coefficient constant pour une même substance, mais qui varie avec la nature de la matière, la force a pour expression

$$F = G\theta r,$$

valeur nulle pour $r = 0$ et dont le maximum correspond à celui de r.

La valeur de F, mise dans l'équation (1), donne

$$P_p = \int G\theta r^2 d\omega = G\theta \int r^2 d\omega,$$

et la quantité $\int r^2 d\omega$ est ce qu'on nomme le *moment d'inertie polaire* de la section A'B' par rapport à l'axe de torsion, ou axe d'inertie. En désignant cet axe par la lettre O, et le moment d'inertie par I_0, on a

$$I_0 = \int r^2 d\omega, \quad \text{d'où} \quad P_p = G\theta I_0,$$

valeur qui permet de calculer G quand on connaît à la fois P_p, θ et I_0.

En éliminant Gθ entre la dernière équation et l'expression $F = G\theta r$, on obtient cette autre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

relation $$F = \frac{P_p r}{I_0},$$

qui donne la valeur de la résistance par mètre carré pour chaque élément du solide situé à la distance r du centre d'inertie.

98. — Observation relative à la définition de la force F. — Lorsque des actions, dont la somme est φ, s'exercent d'une manière continue sur tous les éléments d'une surface ω, et que le mode de répartition de ces forces est soumis à une loi déterminée, la force qui agit sur l'élément $d\omega$ peut être représentée par $d\varphi$; et s'il y a, entre φ et ω, une relation de la forme

$$\varphi = f(\omega), \qquad (1)$$

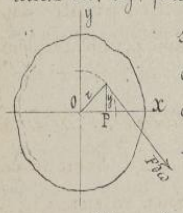
la force élémentaire $d\varphi$ a pour expression

$$d\varphi = f'(\omega)\, d\omega. \qquad (2)$$

La quantité $f'(\omega)$, représentée par $\frac{d\varphi}{d\omega}$, exprime la valeur de la force variable φ par unité de surface sur l'élément $d\omega$: c'est la somme des forces que l'on obtiendrait si, sur chacun des éléments qui entrent dans l'unité de surface adoptée, agissait une force élémentaire égale à la valeur $d\varphi$ relative à l'élément $d\omega$ que l'on considère.

99. — Situation de l'axe d'inertie. — Si la section transversale du solide est un cercle, la symétrie exige que l'axe d'inertie se confonde avec l'axe de figure du solide.

Soit maintenant une section peu différente d'un cercle ; et dans le plan de cette figure, deux axes Ox, Oy, passant par le point en lequel cette section est rencontrée par l'axe d'inertie. La somme des forces $F\,d\omega$ ou $G\theta r\,d\omega$, situées dans le plan de la section, doit faire équilibre aux forces du couple P_p ; donc, en projetant toutes ces forces sur un axe quelconque, et en remarquant que la somme des projections des deux forces $+\frac{1}{2}P$ et $-\frac{1}{2}P$ est nulle, on a, sur l'axe Ox par exemple,



$$\int F\,d\omega \cos(F, x) = G\theta \int r\,d\omega \cos(r, x) = 0.$$

Mais la force élémentaire $F\,d\omega$ s'oppose au mouvement de rotation que tend à produire le couple P_p, elle agit donc suivant la tangente au cercle de rayon r, et par suite on a

$$\cos(F, x) = \sin(r, x), \text{ d'où } G\theta \int r\,d\omega \sin(r, x) = 0 ;$$

et à cause de $r\sin(r, x) = y$, cette expression devient

$$G\theta \int y\,d\omega = 0, \text{ d'où } \int y\,d\omega = 0.$$

On aurait évidemment de même

$$\int x\,d\omega = 0.$$

Ces deux relations prouvent que le centre de gravité de la figure est situé, comme le centre d'inertie, à l'origine des coordonnées.

100. — Inclinaison et longueur de l'hélice. Hauteur du pas. — L'arc de torsion étant θl pour un rayon égal à l'unité, cet arc est $\theta l r$ lorsque le rayon est r ; et si α désigne l'inclinaison constante de l'hélice sur les génératrices primitives du cylindre dont la longueur est l, on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\theta l r}{l} = \theta r.$$

Quant à la longueur l_1 de l'hélice, on sait qu'elle est donnée par la relation

$$l_1^2 = l^2 + (\theta r l)^2, \text{ d'où } l_1 = l\sqrt{1 + \theta^2 r^2}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Enfin, la hauteur h du pas de l'hélice se déduit immédiatement de la formule $\Theta = \theta l$, dans laquelle il suffit de poser $\Theta = 2\pi$ et $l = h$, ce qui donne $2\pi = \theta h$, d'où $h = \frac{2\pi}{\theta}$.

101. — Résumé des formules de la torsion. —

Valeur de la torsion sur la longueur l, ... $\Theta = \theta l = \frac{\pi n l}{180}$.

Valeur par unité de surface de la résistance à la torsion, $F = G\theta r$.

Condition d'équilibre dans une section donnée, ... $P_p = G\theta I_0$.

Formule déduite des deux précédentes, ... $F = \frac{P_p r}{I_0}$.

Expression générale du moment d'inertie polaire, ... $I_0 = \int r^2 d\omega$.

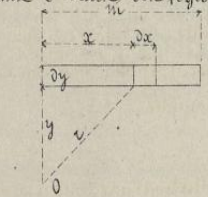
Inclinaison des fibres après la torsion, ... $\tang\alpha = \theta r$.

Longueur de l'hélice, ... $l_1 = l\sqrt{1+\theta^2 r^2}$.

Hauteur du pas de l'hélice, ... $h = \frac{2\pi}{\theta}$.

102. — Détermination analytique du moment d'inertie polaire. —

On rappelle ici, pour le calcul de la quantité $\int r^2 d\omega$, que l'axe d'inertie, projeté au point O dans les figures suivantes est perpendiculaire au plan de la section considérée, dont l'aire est désignée par ω.

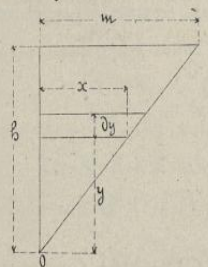


1° — *Bande rectiligne ayant une longueur m et une largeur constante dy infiniment petite.* — L'élément $d\omega$, dont la longueur est dx et la largeur dy, a pour valeur

$$d\omega = dy\,dx,$$

ce qui donne $dI_0 = r^2 d\omega = dy\,r^2\,dx = dy\,(y^2+x^2)dx$,

d'où $I_0 = \int_0^m dy\,(y^2+x^2)\,dx = m\,dy\,(y^2+\frac{1}{3}m^2)$. (1).



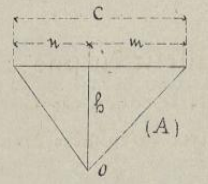
2° — *Triangle rectangle, par rapport au sommet de l'un des angles aigus.* — Le moment d'inertie de la petite bande de largeur dy et de longueur x est, d'après la formule (1),

$$dI_0 = x\,dy\,(y^2 + \tfrac{1}{3}x^2)$$

et comme on a en outre,

$$x = \frac{m y}{b},$$

il en résulte $I_0 = \int_0^b \frac{m y}{b}\,dy\,(y^2 + \frac{1}{3}\frac{m^2 y^2}{b^2}) = \frac{1}{4}mb\,(b^2+\frac{1}{3}m^2)$. (2).

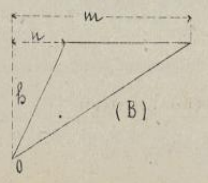


Les formules (1) et (2) conduisent très-simplement à la détermination analytique du moment d'inertie des figures suivantes.

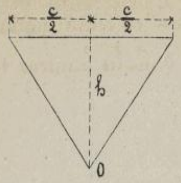
3° — *Triangle quelconque, par rapport à un sommet.*

La figure (A) donne immédiatement

$$I_0 = \tfrac{1}{4}mb\,(b^2+\tfrac{1}{3}m^2) + \tfrac{1}{4}nb\,(b^2+\tfrac{1}{3}n^2),$$



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



ou encore $I_0 = \frac{1}{4} b^3 (m+n) + \frac{1}{12} b (m^3+n^3)$. (3).

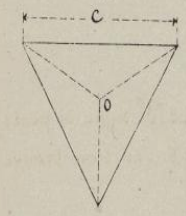
et la figure (B) $I_0 = \frac{1}{4} b^3 (m-n) + \frac{1}{12} b (m^3-n^3)$.

4°.— *Triangle isocèle par rapport à son sommet.*— On a ici, dans le cas de la figure (A),

$$n = m = \frac{1}{2} c,$$

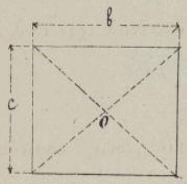
et la formule (3) devient

$$I_0 = \frac{1}{4} cb \left(b^2 + \frac{1}{12} c^2\right). \qquad (4)$$



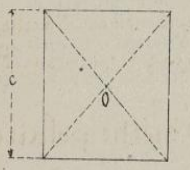
5°.— *Triangle équilatéral par rapport à son centre.*— La figure se décompose en trois triangles isocèles égaux, ayant chacun pour base c, et pour hauteur $\frac{1}{6} c\sqrt{3}$. En mettant cette valeur à la place de b dans la formule (4), et multipliant ensuite par 3 on trouve facilement

$$I_0 = \frac{1}{48} c^4 \sqrt{3} = \frac{1}{12} c^2 \omega.$$



6°.— *Rectangle par rapport à son centre.*— On a ici quatre triangles isocèles égaux deux à deux ou pour base c, et pour hauteur $\frac{b}{2}$, et les deux autres pour base b et pour hauteur $\frac{c}{2}$, ce qui donne, d'après la formule (4),

$$I_0 = 2 \frac{bc}{8} \left(\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{12}\right) + 2 \frac{bc}{8} \left(\frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{12}\right) = \frac{1}{12} bc \left(b^2 + c^2\right). \quad (5)$$

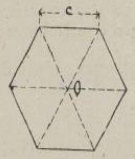


7°.— *Carré par rapport à son centre.*— En faisant $b = c$ dans la formule (5) on trouve immédiatement

$$I_0 = \frac{1}{6} c^4 = \frac{1}{6} c^2 \omega.$$

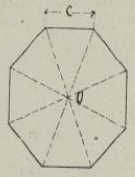
8°.— *Hexagone régulier par rapport à son centre.*— La figure comprend six triangles isocèles égaux pour chacun desquels on a $b = \frac{1}{2} c\sqrt{3}$, et la formule (4) donne alors facilement

$$I_0 = \frac{5}{8} c^4 \sqrt{3} = \frac{5}{12} c^2 \omega.$$



9°.— *Octogone régulier, par rapport à son centre.*— On a ici huit triangles isocèles égaux, et $b = \frac{1}{2} c\left(\sqrt{2}+1\right)$, ce qui conduit à

$$I_0 = \frac{1}{6} c^4 \left(11 + 8\sqrt{2}\right) = \frac{1}{12} c^2 \omega \left(5 + 3\sqrt{2}\right).$$

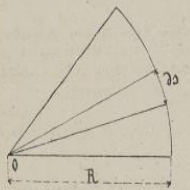


10.°— *Secteur de cercle par rapport à son centre.*— Le moment d'inertie du triangle élémentaire dont la base est ds et la hauteur R a pour expression, d'après la formule (4),

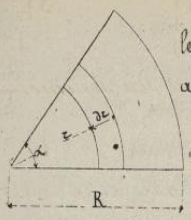
$$dI_0 = \frac{1}{4} R\, ds \left(R^2 + \frac{1}{12} (ds)^2\right) = \frac{1}{4} R^3 ds + \frac{1}{48} R (ds)^3;$$

le second terme, étant un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport au premier, est négligeable, et l'on a

$$dI_0 = \frac{1}{4} R^3 ds, \text{ d'où } I_0 = \int \frac{1}{4} R^3 ds = \frac{1}{4} s R^3 = \frac{1}{2} \omega R^2.$$



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



On arriverait plus directement au même résultat, en remarquant que le moment d'inertie élémentaire du petit trapèze circulaire dont la hauteur est dr a pour expression

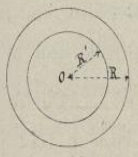
$$dI_0 = r^2 \times r\alpha\, dr = \alpha r^3 dr,$$

d'où l'on conclut, comme précédemment

$$I_0 = \int_0^R \alpha r^3 dr = \frac{1}{4}\alpha R^4 = \frac{1}{4}\omega R^2.$$

11°. — Cercle par rapport à son centre. — Il suffit de poser dans les formules précédentes, soit $\alpha = 2\pi$, soit $\omega = 2\pi R$, et l'on trouve

$$I_0 = \frac{1}{2}\pi R^4 = \frac{1}{2}\omega R^2.$$



12°. — Couronne circulaire, par rapport à son centre. — Le moment d'inertie est évidemment la différence des moments des deux cercles de rayons R et R', et l'on a immédiatement

$$I_0 = \frac{1}{2}\pi (R^4 - R'^4) = \frac{1}{2}\omega (R^2 + R'^2).$$

Il est inutile de multiplier les exemples ; et il suffit de faire remarquer, comme conséquence de la définition même du moment d'inertie, que si une figure peut être décomposée en une somme ou une différence de plusieurs autres figures dont on puisse déterminer séparément le moment d'inertie, il suffira de faire la somme ou la différence des moments partiels pour avoir le moment d'inertie total.

103. — Détermination graphique du moment d'inertie polaire.

Les procédés ordinaires du calcul donnent facilement le moment d'inertie polaire dans la plupart des cas où la section considérée est limitée par une ligne définie géométriquement. Mais il peut arriver que l'intégrale $\int r^2 d\omega$ soit trop compliquée ou que la ligne qui limite la section ne soit pas soumise à une loi géométrique connue. Dans ce cas on peut employer l'un des procédés suivants.

Méthode des rectangles. — Soit OABCD une section dont on veut déterminer le moment d'inertie polaire par rapport à l'axe projeté en O. Pour l'élément $d\omega$ situé à la distance r de l'axe, on a, fig 1,

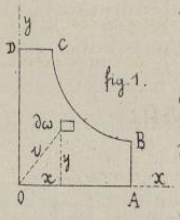


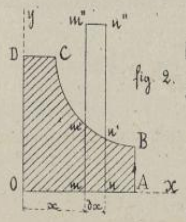
fig. 1.

$$r^2 = y^2 + x^2$$

et par suite $r^2 d\omega = y^2 d\omega + x^2 d\omega$, d'où $\int r^2 d\omega = \int y^2 d\omega + \int x^2 d\omega$;

de sorte qu'en posant $\int y^2 d\omega = I_x$, $\int x^2 d\omega = I_y$

on peut écrire $I_0 = I_x + I_y$.



Soit $mnn'm'$, figure 2, un élément dont la hauteur est y et la base dx ; la valeur de cet élément étant $d\omega = y\,dx$, son moment par rapport à l'axe Oy est $x^2 d\omega = x^2 y\,dx$, et par conséquent

$$I_y = \int x^2 y\, dx.$$

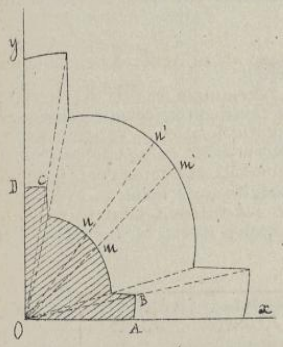
Si l'on porte, à l'échelle du dessin, et à partir du point n, une longueur nn'' égale à la valeur numérique du produit $x^2 y$, et qu'on achève le rectangle $nmm''n''$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'aire de cette figure représente évidemment le moment de l'élément n m m' n', et si l'on fait la même construction pour tous les éléments de largeur infiniment petite dx qui constituent la figure OABCD, on obtient une suite de points, tels que n'' dont l'ensemble détermine une courbe continue; l'aire comprise entre cette courbe et l'axe OX, représente, à l'échelle du dessin, la valeur de I_y. Pour $x = 0$ on a $x^2 y = 0$, donc la courbe passe par l'origine des coordonnées.

Pour obtenir I_x on fait une construction semblable en décomposant la figure en bandes très minces parallèles à l'axe Oy; on détermine ainsi une seconde courbe, et par suite une seconde aire dont la valeur représente I_x; la somme des deux aires donne le moment d'inertie I_0. Si la figure était entièrement symétrique par rapports aux deux axes coordonnés, il suffirait de déterminer une seule aire et de la multiplier par 2. Ce procédé est laborieux et les dimensions de l'épure sont souvent considérables. On peut le remplacer par la construction suivante.

Méthode des secteurs. — Soient deux droites om, on, faisant entre elles un angle très-petit; on peut, avec une erreur qui disparaît à la limite, remplacer la portion m n de la ligne BC par un arc de cercle décrit du point O comme centre. En désignant par $d\omega$ l'aire du secteur O m n, et par r son rayon, le moment d'inertie du secteur est, d'après un résultat précédemment obtenu, égal à $\frac{1}{2} r^2 d\omega$. Or, si l'on prend $On' = Om' = r^2$, et si l'on décrit l'arc n'm' de rayon On', les deux secteurs O n' m', O n m donnent la relation



$$\frac{On'm'}{Onm} = \frac{\overline{On'}^2}{\overline{On}^2} = \frac{r^4}{r^2} = r^2 ; \quad \text{d'où} \quad On'm' = r^2 \times Onm = r^2 d\omega,$$

quantité qui représente le double du moment d'inertie du secteur Onm.

Donc, si l'on construit un nombre suffisant de points tels que n', l'aire comprise entre les axes coordonnés et la courbe qui passe par ces points représente le double du moment d'inertie polaire de la section OABCD. Cette aire peut d'ailleurs être évaluée, soit par la méthode des trapèzes, soit par la formule de **T. Simpson**, ou celle de **Poncelet**, soit enfin à l'aide d'un instrument propre à déterminer les quadratures.

104. — Observation sur le coefficient de torsion. — Jusqu'ici, nous n'avons fait aucune appréciation sur les résistances moléculaires qui déterminent la valeur de A. Ces résistances, de natures très-différentes peuvent provenir de ce que chaque file de molécules, en prenant la forme d'une hélice, s'est allongée en donnant lieu à une force élastique dirigée suivant cette hélice, force dont la composante horizontale doit contribuer à équilibrer l'action du couple de torsion Pp.

Lorsqu'on calcule cette composante horizontale pour un élément annulaire et qu'on fait la somme des moments de toutes les forces semblables, en désignant par i l'allongement proportionnel de l'une des fibres, on trouve, pour le moment de toutes ces forces

$$M = E\theta I_0 \times \frac{2}{3} i = \theta I_0 \times \frac{2}{3} Ei$$

Quand i est aussi grand que le comporte le plus grand allongement élastique on voit que le produit Ei est encore très-petit et ne représente qu'une faible partie de la valeur pratique de A. Il est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donc nécessaire de chercher ailleurs l'explication de cette valeur, et l'on y arrive en remarquant que dans le déplacement d'une couche par rapport à une autre il y a un véritable glissement, analogue au cisaillement, dont il serait en quelque sorte le préliminaire, glissement qui paraît s'effectuer sans qu'il y ait aucune déformation dans la section même. On comprend, dès lors, que la résistance transversale qui se développe dans ces circonstances doive être proportionnelle au produit θr qui augmente et diminue comme le déplacement relatif de deux couches voisines, et qu'elle puisse, par conséquent, être représentée par le produit $G\theta r$ par mètre carré, comme on l'a admis précédemment.

105. — Résultats principaux des expériences relatives à la torsion.

Les quantités principales à considérer au point de vue des déterminations numériques sont : la valeur de G ; la résistance pratique à la torsion F_p, par mètre carré, et la valeur correspondante de $\tang\alpha$; enfin, les valeurs F_e et F_r, qui se rapportent l'une à la limite d'élasticité, l'autre à la rupture.

Les résultats fournis par les expériences sont peu nombreux et, en général peu concluants. Tous les expérimentateurs, à l'exception de M^r^ Duleau, et plus récemment de M^r^ Kirkaldy, en Angleterre, ont cherché exclusivement à déterminer la charge de rupture et à vérifier que, dans une certaine limite, les angles de torsion sont proportionnels aux moments de torsion correspondants.

Quoi qu'il en soit, on a admis jusqu'ici, dans la pratique, les valeurs contenues dans le tableau suivant, qui est loin d'être complet.

Coefficients	Fer	Acier	Fonte	Cuivre	Bronze	Bois
G	6.10^9	10.10^9	2.10^9	4.10^9	1.10^9	$0,4.10^9$
F_p	4.10^6	" "	$1,3.10^6$	" "	" "	$0,3.10^6$
$\tang\alpha$	0,00067	" "	0,00067	" "	" "	0,00075

En général les valeurs de G ont été bien déterminées. Les valeurs

$$F_p = 4.10^6, \quad F_p = 1,3.10^6,$$

données par M^r^ Morin, sont considérées par M^r^ Bélanger comme trop faibles, ainsi que les valeurs correspondantes de $\tang\alpha$, et l'on peut prendre :

Pour le fer . $F_p = 6.10^6$, $\tang\alpha = 0,001$.

Pour la fonte $F_p = 2.10^6$, $\tang\alpha = 0,001$.

Ces valeurs ne doivent pas être dépassées dans les applications.

Les expériences ont aussi donné, pour le fer,

$$F_e = 14.10^6 \text{ et } \tang\alpha = 0,0023 \text{ ; puis } F_r = 17.10^6 \text{ à } 26.10^6.$$

106. — Problèmes sur la torsion. — En admettant qu'il s'agisse ici d'un solide de forme cylindrique, les équations

$$P_p = G\theta I_o, \quad F = G\theta r, \quad I_o = \tfrac{1}{2}\pi r^4,$$

permettent de résoudre un certain nombre de problèmes sur la torsion. Mais il faut remarquer préalablement que la partie d'un solide tordu qui fatigue le plus étant celle où la valeur de F

Bib. CNAM

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

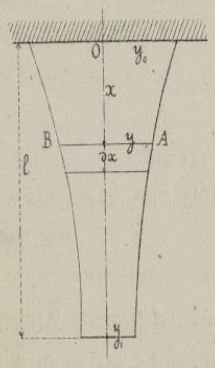
ou la plus grande, la valeur pratique qu'il convient de ne pas dépasser, doit toujours être considérée comme s'appliquant aux points situés sur la circonférence du cylindre. Cela posé, voici quelques résultats dont la plupart sont immédiatement déduits des formules précédentes.

	Données	Valeurs des inconnues				
1°	P_p, G, r,	$I_o = \frac{1}{2}\pi r^4$,	$\theta = \frac{P_p}{G I_o}$,	$F = G\theta r$,	$\tang. \alpha = \theta r$,	$h = \frac{2\pi}{\theta}$.
2°	P_p, G, θ,	$I_o = \frac{P_p}{G\theta}$,	$r = \sqrt[4]{\frac{2 I_o}{\pi}}$,	$F = G\theta r$,	$\tang. \alpha = \theta r$,	$h = \frac{2\pi}{\theta}$.
3°	G, F, r,	$I_o = \frac{1}{2}\pi r^4$,	$\theta = \frac{F}{G r}$,	$P_p = G\theta I_o$,	$\tang. \alpha = \theta r$,	$h = \frac{2\pi}{\theta}$.
4°	P_p, G, F.	$r = \sqrt[4]{\frac{2 P_p}{\pi F}}$,	$I_o = \frac{1}{2}\pi r^4$,	$\theta = \frac{F}{G r}$,	$\tang. \alpha = \theta r$,	$h = \frac{2\pi}{\theta}$.

107. — Observation relative aux arbres de transmission. — Les pièces de machines qui sont plus particulièrement soumises à des efforts de torsion sont les arbres de transmission dont la longueur est parfois considérable. L'extrémité d'une génératrice primitive peut alors éprouver un très-grand déplacement θl, lors de la mise en marche de l'arbre, avant que le mouvement soit transmis d'un bout à l'autre. Il résulte de là un retard de certains organes les uns par rapport aux autres, retard qui, dans des cas donnés, ne doit pas dépasser une limite déterminée. On est conduit alors à donner aux arbres des dimensions plus fortes que celles qui seraient nécessaires pour qu'ils puissent seulement résister convenablement aux efforts auxquels ils sont soumis.

108. — Torsion d'un solide à section variable ou d'un profil déterminé.

Les équations fondamentales établies précédemment supposent que la section transversale est constante pour toute la longueur du solide. Dans cette hypothèse la somme des résistances moléculaires exercées dans chaque section, reste la même ainsi que la valeur θ du déplacement angulaire ou celle de l'inclinaison α de la fibre longitudinale. Mais si la section varie d'une manière continue, les quantités $\int F d\omega$, θ ou α varient elles-mêmes d'une manière continue quand on passe d'une section à la section voisine, et la courbe qu'affecte alors une fibre longitudinale n'est plus une hélice ordinaire, ni sur la surface du solide, ni sur une surface cylindrique située à une distance quelconque de l'axe de figure. Il en résulte que les équations fondamentales ne peuvent être employées que si l'on considère le solide comme formé de tranches infiniment minces, assimilables chacune à un solide prismatique, et la question à résoudre devient alors un problème de calcul intégral.



Soit θ le déplacement angulaire dans la section AB, située à la distance x de l'origine; cette valeur de θ est, comme on sait, la somme des déplacements que l'on obtiendrait, si la valeur du déplacement, telle qu'elle existe dans la section AB, se continuait uniformément d'une section à l'autre sur une portion d'un solide cylindrique d'une longueur égale à l'unité. Pour une longueur dx le déplacement angulaire est θdx, et la somme des déplacements, pour toutes les sections infiniment petites qui composent le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

solide, est

$$\Theta = \int \theta \, dx \; ;$$

mais P_p étant le moment du couple qui agit à la partie inférieure du solide, on a, comme précédemment, dans la section AB,

$$\theta = \frac{P_p}{G I_o}, \qquad \text{d'où} \quad \Theta = \frac{P_p}{G} \int \frac{dx}{I_o} \; .$$

Mais on a évidemment, dans la même section,

$$I_o = \varphi(y) \; ; \qquad y = f(x), \quad \text{d'où} \quad I_o = \varphi\left(f(x)\right),$$

formule qui, dans chaque cas particulier, servira à résoudre la question proposée.

Si, par exemple, le solide est un tronc de cône, on a

$$I_o = \tfrac{1}{2} \pi r^4, \qquad y = mx + y_o, \quad \text{d'où} \quad I_o = \tfrac{1}{2} \pi (mx + y_o)^4,$$

ce qui donne

$$\Theta = \frac{2 P_p}{\pi G} \int_o^l \frac{dx}{(mx+y)^4} = \frac{2 P_p \left[(ml + y_o)^3 - y_o^3\right]}{3 \pi G m y_o^3 (ml + y_o)^3} = \frac{2 P_p (y_1^3 - y_o^3)}{3 \pi G m y_o^3 y_1^3} .$$

Cette formule ne s'applique pas directement au cas où le cône se transforme en un cylindre. Mais comme on a évidemment

$$m = \frac{y_1 - y_o}{l},$$

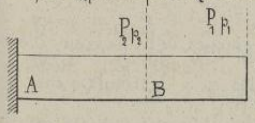
il suffira de porter cette valeur dans l'expression précédente, de simplifier le résultat et de poser ensuite $y_1 = y_o$ ce qui donne

$$\Theta = \frac{2 P_p l}{\pi G y_o^4},$$

qui est bien le déplacement angulaire total d'un cylindre de rayon y_o et de longueur l.

109. — Solide formé de parties cylindriques ayant des diamètres différents. — Lorsqu'un solide est formé de parties cylindriques dont les diamètres sont différents, on ne peut calculer la déformation due à la torsion qu'en admettant que deux sections voisines quelconques sont, malgré leur inégalité, intégralement intéressées à cette déformation, ce qui exige que ces deux sections soient très-peu différentes l'une de l'autre, ou qu'elles soient raccordées par une surface de révolution qui rend la transmission des efforts plus uniforme, et supprime les causes de rupture souvent occasionnées par un changement brusque de section. Dans ces conditions on peut appliquer les formules précédentes à chacune des parties du solide et déterminer ainsi la déformation totale.

110. — Cylindre soumis à des efforts de torsion agissant dans des sections différentes. — En désignant par θ la torsion par unité, résultant de l'action du couple $P_1 p_1$, et par θ_2 celle du couple $P_2 p_2$, il est évident que la valeur θ, par unité de longueur, déterminée dans la partie AB du solide, par l'action simultanée des deux couples,

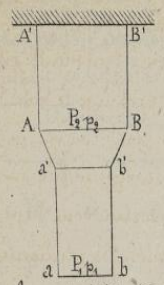


est $\theta_1 + \theta_2$ si les couples sont de même sens, et $\theta_1 - \theta_2$, s'ils sont de signes contraires. On a donc, d'une manière générale, dans la partie AB du solide considéré,

$$\Theta = \frac{P_2 p_2 \pm P_1 p_1}{G I_o}$$

111. — Condition pour qu'un solide soit d'égale résistance par rapport aux moments de torsion. — On dit qu'un solide est d'égale résistance par rapport à la torsion, lorsque le maximum de résistance moléculaire développée dans chaque section transversale est la même pour toutes les sections. Les deux couples $P_1 p_1$, $P_2 p_2$ étant supposés de même sens, la valeur de l'angle de torsion est, pour le cylindre $ab\,a'b'$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



$$\theta_1 = \frac{P_1 p_1}{G I_0} = \frac{2 P_1 p_1}{\pi G r_1^4} ;$$

et pour le cylindre $AB A'B'$,

$$\theta = \frac{2 (P_2 p_2 + P_1 p_1)}{\pi G r_2^4} = \frac{2 P' p'}{\pi G r_2^4} .$$

Si F_1 et F' sont les valeurs du maximum de la résistance dans les deux cylindres, on a, $F_1 = G \theta_1 r_1$, $F = G \theta' r_2$; ce qui donne en remplaçant θ_1 et θ' par les valeurs précédentes,

$$F_1 = \frac{2 P_1 p_1}{\pi r_1^3} , \qquad F' = \frac{2 P' p'}{\pi r_2^3} .$$

Pour que les cylindres soient de même résistance, il faut qu'on ait $F_1 = F'$; et, par conséquent

$$\frac{2 P_1 p_1}{\pi r_1^3} = \frac{2 P' p'}{\pi r_2^3} \quad \text{d'où} \quad \frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{P' p'}{P_1 p_1} .$$

ce qui montre que les cubes des rayons doivent être proportionnels aux moments effectifs de la torsion. On voit que si la somme des moments croissait d'une manière continue, il en serait de même de la section du solide considéré.

Flexion.

112. — Définition de la flexion plane. — Notions générales. — On désigne sous le nom de *flexion plane* la déformation qu'éprouve un solide prismatique, à plan de symétrie longitudinal, lorsqu'il est sollicité par des forces qui agissent dans ce plan de symétrie ou qui sont disposées symétriquement deux à deux par rapport à ce plan.

La flexion est de toutes les déformations que nous étudions celle qui donne lieu aux phénomènes les plus apparents. Dans les constructions, par exemple, les poutres des planchers, des combles, montrent immédiatement, par les flèches qu'elles prennent sous l'action de leurs charges, que certaines réactions moléculaires sont mises en jeu pour y résister, et cette déformation est d'autant plus visible que l'on cherche davantage à économiser la matière dans toutes les pièces transversales de ce genre ; depuis longtemps en effet des règles empiriques ont fixé leurs dimensions minimum pour presque tous les cas de la pratique.

Depuis longtemps aussi on a essayé de faire la théorie des phénomènes de la flexion. Les premières règles que l'on connaisse sont dues à **Galilée**, puis à **Mariotte** et à **Leibnitz** ; elles reposaient sur cette hypothèse, que les fibres allaient en s'allongeant à partir de la face concave qui ne subissait elle-même aucune modification dans sa longueur.

113. — Expériences de Duhamel du Monceau. — M. Duhamel du Monceau, le premier, fit voir que cette hypothèse était fausse. Il prit une pièce de bois de saule de $0^m,935$ de longueur, la plaça sur deux appuis par ses extrémités, puis en mesura les flèches pour diverses charges et même pour les charges voisines de celles qui produisent la rupture ; il fit ensuite dans cette pièce, à partir de la face supérieure, des entailles au tiers, à la moitié, aux trois quarts de son épaisseur ; il remplaça par des planchettes en bois dur, en chêne, la matière enlevée par le

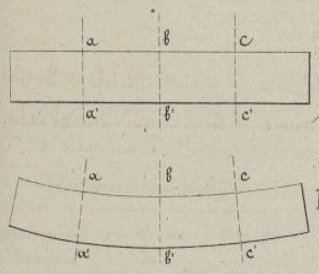
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trait de scie, et recommença les mêmes déterminations.

Si les fibres s'étaient allongées à partir de la face concave la matière enlevée par la scie eût augmenté la flexibilité de la pièce et diminué sa résistance à la rupture ; il n'en a rien été, car la flexibilité n'a par même augmenté sensiblement quand on a prolongé le trait de scie

jusqu'aux trois quarts de l'épaisseur totale. Il y a plus ; on vit, en supprimant les cales en bois dur, les bords de la fente se rapprocher et la courbure augmenter d'une façon notable. On pouvait donc déjà conclure de ces expériences qu'une véritable compression se réalisait du côté de la face concave de la pièce.

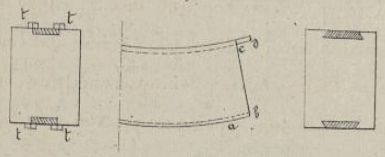
114. — Expériences de MM. Dupin et Duleau. — M. le baron Ch. Dupin, pour confirmer cette observation, prit une pièce de bois sur laquelle il avait tracé des lignes normales aux arêtes et la plaça sur deux appuis distants de 2m,00. En la courbant à l'aide d'un poids appliqué en son milieu, il vit que les lignes restaient normales aux arêtes, et il en conclut, en se reportant aux faits déjà constatés par Duhamel, que, si la face supérieure se contracte, la face inférieure, au contraire, s'allonge dans une certaine proportion.



M. Duleau a mesuré ces nouvelles longueurs ab, bc, ... a'b', b'c', ..., etc., et il a reconnu que l'allongement de la partie convexe était égal au raccourcissement de la partie concave ; il devait donc exister dans la pièce soumise à l'expérience certaines lignes longitudinales formant une suite de files de molécules dont la longueur n'avait pas changé.

Ce fait n'avait, toutefois, été vérifié que d'une manière approximative et pour des barres de fer de petits échantillons, fortement chargées. Il fallait, pour l'établir sérieusement, des expériences plus précises et plus nombreuses.

115. — Nouvelles expériences de M. Dupin et de M. Richard. — M. Dupin, (1851) indiqua alors un nouveau mode d'expérimentation ; il pratiqua une rainure longitudinale dans la pièce sur laquelle il voulait opérer, il y mit une tringle de bois flexible retenue par des tasseaux t, t, et la longueur de cette lame restant constante puisqu'elle était libre de glisser dans sa rainure, il put mesurer cd. M. Richard conseilla de loger la lame de bois dans une entaille continue en queue d'aronde, afin de rendre l'expérience plus concluante.

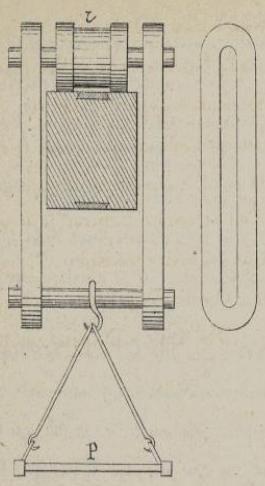


116. — Expériences de MM. Morin et Tresca. — Enfin, en 1856, MM. Morin et Tresca, par des expériences très-nombreuses et très-précises, faites au Conservatoire des Arts et Métiers, ont complété l'étude expérimentale de cette partie géométrique des phénomènes de la flexion.

La méthode adoptée pour le bois fut celle de M. Richard ; pour les fers à T, on maintint une lame métallique l, formée d'un ressort d'acier, entre deux pinces en bois t, t, adaptées à la pièce.

La poutre reposait sur deux appuis en maçonnerie bien de niveau. Les flexions étaient mesurées à l'aide d'un cathétomètre ; on déterminait ces flexions à l'aide de poids mis dans un plateau,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



supporté par des galets r, reposant au milieu de la pièce en expérience.

Un tasseau fixé à l'une des extrémités de la pièce permettait de reporter toute la saillie de la lame mobile à l'autre extrémité; on mesurait cette saillie à l'aide d'un micromètre.

On a fait varier le poids additionnel depuis 200 jusqu'à 1200 kilogrammes; on a retourné plusieurs fois la même pièce; on a cherché à obtenir une température et un état hygrométrique constants; en un mot on a pris toutes les précautions nécessaires dans une expérience aussi fondamentale.

Quelques-uns des résultats ainsi obtenus sont résumés dans le tableau ci-après.

117. — Résultats d'expériences.

Poutre en bois. — Portée 3m,80.
Section : hauteur, 200 m/m; base, 150 m/m.

Désignation des bois	Charges	Flexion totale	Flexion par 100k	Raccourcissement par 100k	Allongement par 100k
Sapin	200k	2m/m,64.	1m/m,32.	0m/m,259.	0m/m,255.
	400.	5,40.	1,36.	0,255.	0,248.
	600.	9,60.	1,60.	0,248.	0,243.
	800.	10,88.	1,18.	0,242.	0,232.
	1000.	13,40.	1,31.	0,250.	0,244.
	1200.	16,28.	1,44.	0,246.	0,246.
Moyennes des valeurs précédentes				0,250.	0,245.
Même pièce (retournée); moyenne				0,236.	0,244.
Même pièce (position primitive; moyenne				0,253.	0,262.
Chêne avec un gros nœud	Moyennes obtenues la pièce ayant été retournée successivement			0,166.	0,210.
				0,189.	0,209.
				0,165.	0,196.
				0,184.	0,209.
Chêne sans nœuds, pièce moins sèche	Moyennes obtenues avec retournements successifs.			0,325.	0,324.
				0,310.	0,330.
				0,313.	0,335.
				0,319.	0,355.

Fers à double T. — Portée 4m.
(Retournements successifs)

Dimensions de la section	Raccourcissement par 100k	Allongement par 100k
Semelles égales	0m/m,096.	0m/m,102.
	0,097.	0,100.
	0,105.	0,112.
	0,107.	0,117.
	0,101.	0,108.
Semelles égales	0,062.	0,058.
	0,067.	0,068.
	0,060.	0,066.
	0,064.	0,064.
	0,063.	0,064.
Semelles inégales	0,071.	0,055.
	0,076.	0,052.
	0,059.	0,080.
	0,058.	0,074.
	0,066.	0,065.

Les concordances pour le chêne sont moins complètes que pour le sapin; mais il faut remarquer que la charge finale de 1200 kilog. dépasse toutes les conditions de la pratique.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il ressort de ce tableau que, conformément aux faits avancés par Duleau, pour des solides dont la section est symétrique par rapport à la fibre située à la moitié de la hauteur de la section transversale, l'allongement de la partie convexe est sensiblement égal au raccourcissement de la partie concave.

Les expériences faites sur la poutre à semelles inégales, montrent d'ailleurs que, dans le cas de non symétrie par rapport au plan horizontal moyen, les allongements et les raccourcissements sont moindres du côté où il y a une plus forte répartition de matière. Mais si l'on retourne la pièce, le nouveau raccourcissement est sensiblement égal à l'allongement observé dans la première position.

118. — **Lois reconnues par M^r Dupin.** — Avant de passer à la théorie mathématique de la flexion, nous citerons ici quelques lois indiquées par M^r Ch. Dupin en 1843, et qui résultent d'expériences faites par lui à Corcyre, en 1811.

Toutes choses étant égales d'ailleurs, M^r Dupin a établi que :

1° — Les flexions sont proportionnelles aux charges :

2° — La flexion due à un poids uniformément réparti sur toute la longueur d'une poutre est égale aux cinq huitièmes de ce qu'elle serait, si la charge était appliquée au milieu de cette poutre.

3° — La flexion varie en raison inverse du produit de la base par le cube de la hauteur de la section transversale.

4° — Les flexions sont proportionnelles au cube des portées.

Il ne sera pas sans intérêt de voir comment la théorie confirme ces lois simples que M^r Dupin a en quelque sorte devinées à l'aide de quelques expériences qui demandaient à être affirmées d'une manière plus précise.

119. — **Théorie mathématique de la flexion.** — La vue et la mesure des phénomènes avaient aussi pour établir les lois les plus manifestes de la théorie de la flexion. Mais pour appliquer ces lois aux divers cas de la pratique et pouvoir résoudre les problèmes nombreux et difficiles que soulèvent aujourd'hui les questions de résistance des matériaux, il était nécessaire d'établir des formules applicables aux diverses circonstances. Navier a posé les bases principales du calcul de la résistance des matériaux ; et les études faites dans cette voie ont été ensuite étendues par M^rs Belanger, de St Venant, Phillips et par d'autres géomètres.

La méthode générale que l'on suit ici est celle qui a été adoptée par M^r Belanger dans le cours qu'il a professé avec tant de succès à l'Ecole Centrale.

120. — **Hypothèses tirées des faits.** — Pour simplifier la question un peu, en admettant toujours que le solide considéré a un plan de symétrie vertical, supposer que sa section transversale est un rectangle de dimensions constantes. Ce solide étant posé horizontalement sur des appuis, ou encastré à l'une de ses extrémités, est ensuite chargé de poids en des points différents de sa longueur. Lorsque la limite de l'élasticité n'a pas été dépassée, et que l'équilibre est établi entre les forces données et les réactions moléculaires développées dans l'intérieur du prisme, on constate approximativement les faits suivants.

1° — Les éléments matériels situés primitivement dans une section transversale perpendiculaire aux arêtes du prisme sont situés, après la flexion, dans des sections planes perpendiculaires au plan de symétrie et normales aux courbes suivant lesquelles les arêtes se sont infléchies ; les dimensions de ces sections n'ont d'ailleurs pas varié d'une manière sensible.

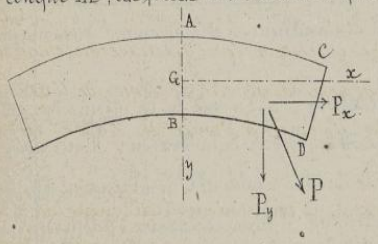
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2° — Les éléments situés dans un même plan longitudinal, primitivement horizontal, sont situés, après la flexion, sur une surface cylindrique à génératrice rectiligne horizontale.

121. — **Fibres neutres — Fibres moyennes.** — Par le fait de la courbure du solide, certaines files de molécules ou fibres longitudinales ont été allongées, tandis que d'autres ont été raccourcies ; de sorte que, dans une même tranche, normale aux arêtes courbes du solide fléchi, il s'est produit un double phénomène d'extension et de compression, et les fibres sont d'autant plus allongées ou d'autant plus raccourcies qu'elles sont plus voisines de la surface convexe ou de la surface concave du solide. Ces déplacements moléculaires, produits dans l'étendue d'une même tranche, varient nécessairement d'une manière continue, quand on passe d'une couche cylindrique à celle qui la suit immédiatement ; d'où il résulte que le passage de l'extension à la compression n'a lieu que là où les déplacements moléculaires longitudinaux sont nuls, et par conséquent, il doit exister dans l'intérieur du corps une couche cylindrique de fibres qui n'ont été ni allongées ni raccourcies, et que, pour cette raison, on désigne sous le nom de *fibres neutres*.

On appelle *fibres moyennes* celles qui forment la couche cylindrique passant par les centres de gravité des sections transversales du solide.

122. — **Équilibre dans une section transversale quelconque.** — Si l'on considère la portion d'un solide fléchi comprise entre son extrémité CD et une section transversale quelconque AB, les forces extérieures P qui sollicitent cette portion du solide, développent des actions mutuelles entre les molécules d'une tranche quelconque et celles de la tranche qui la suit immédiatement. De sorte que les forces qui déterminent l'équilibre dans une section telle que AB sont : d'une part les forces extérieures P qui agissent dans l'étendue de la portion du solide située à droite de AB ; d'autre part, les réactions moléculaires ou forces élastiques f exercées par les molécules situées à gauche de la section AB sur celles qui sont situées à droite de cette section.



Quant aux forces moléculaires développées par la déformation dans les diverses parties du solide ABCD elles sont nécessairement égales deux à deux et de signes contraires et il n'est pas nécessaire par conséquent d'en tenir compte dans l'établissement des conditions d'équilibre relatives à la section AB.

Cela posé si G est le centre de gravité de cette section, et si l'on prend, dans le plan de flexion, deux axes rectangulaires Gy ; Gx, l'un situé dans le plan AB, et dont le sens positif est compté de bas en haut, l'autre, par conséquent, perpendiculaire à ce plan et dont le sens positif va de gauche à droite, chaque force P peut être décomposée en deux autres forces P_y, P_x, respectivement parallèles aux deux axes. Chaque force f peut être décomposée de la même manière en deux forces f_y et f_x, l'une située dans le plan AB, et l'autre normale à ce plan. De sorte que si l'on désigne par $M_G P$ et $M_G f$ les moments des forces P et f par rapport à un axe perpendiculaire au plan de flexion et projeté en G, les équations nécessaires et suffisantes, pour l'équilibre dans la section AB sont :

$$\Sigma f_y + \Sigma P_y = 0 , \quad \Sigma f_x + \Sigma P_x = 0 , \quad \Sigma M_G f + \Sigma M_G P = 0 .$$

Relativement à la dernière équation on peut évidemment écrire, en remplaçant chacune des forces f par ses deux composantes f_x et f_y,

$$\Sigma M_G f = \Sigma M_G f_x + \Sigma M_G f_y$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et comme on a nécessairement $\Sigma M_\alpha f_y = 0$, puisque toutes les forces f_y passent par l'axe des moments, la troisième équation d'équilibre se réduit à

$$\Sigma M_\alpha f_x + \Sigma M_\alpha P = 0.$$

123. — **Effort tranchant.** — La quantité ΣP_y, dont la valeur est numériquement égale et de signe contraire à Σf_y, se nomme *l'effort tranchant*; en désignant cette quantité par T, on a

$$T = \Sigma P_y.$$

D'une manière générale, l'effort tranchant, relativement à une section transversale donnée, est la somme algébrique, des composantes parallèles à cette section, de toutes les forces extérieures qui agissent à la droite de cette même section.

Cet effort tranchant, que l'on regarde comme étant positif lorsqu'il exerce son action dans le sens des y positifs, est évidemment une force qui tend à cisailler, à trancher le solide suivant la section considérée, c'est-à-dire, à faire glisser l'une sur l'autre les deux parties du solide séparées par cette section. Dans l'état d'équilibre, cet effort de glissement transversal est neutralisé par la réaction, égale et contraire, des forces moléculaires Σf_y; mais si l'effort tranchant était trop considérable, la pièce pourrait être rompue suivant une section transversale, et l'on examinera ultérieurement les conditions nécessaires pour que cette action ne puisse se produire.

124. — **Tension longitudinale.** — La quantité ΣP_x, dont la valeur est numériquement égale et de signe contraire à Σf_x, se nomme la *tension longitudinale*; en la représentant par N on a

$$N = \Sigma P_x.$$

Ainsi : *la tension longitudinale, relativement à une section transversale considérée, est la somme algébrique des composantes, normales à cette section, de toutes les forces extérieures qui sollicitent la partie du solide située à la droite de cette même section.*

La force N, pour laquelle on adopte le signe de x, tend évidemment à allonger ou à refouler sur elles-mêmes les fibres qui traversent la section considérée, suivant que cette force est positive ou négative, c'est-à-dire, suivant qu'elle est une tension proprement dite ou une compression longitudinale; et ce sont les forces désignées par f_x, dont la somme constitue la *résistance longitudinale*, qui limitent ces effets d'extension ou de compression.

125. — **Moment fléchissant.** — Enfin la quantité $\Sigma M_\alpha P$, *somme des moments par rapport à l'axe projeté en G, de toutes les forces extérieures situées à droite de la section AB*, a reçu le nom de *moment fléchissant*. On désigne cette quantité par la lettre μ et l'on écrit

$$\mu = \Sigma M_\alpha P.$$

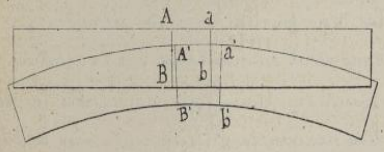
Le moment μ, que l'on regarde comme positif lorsqu'il tend à fléchir la partie AG du solide vers les y positifs, et négatif quand il tend à produire le mouvement opposé, est nécessairement égal et de signe contraire à la somme algébrique $\Sigma M_\alpha f_x$ des moments par rapport à l'axe, également projeté en G, de toutes les forces moléculaires f_x normales à la section AB; et par conséquent, $\Sigma M_\alpha f_x$ représente le *moment résistant* qui s'oppose au mouvement que déterminerait le moment fléchissant.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

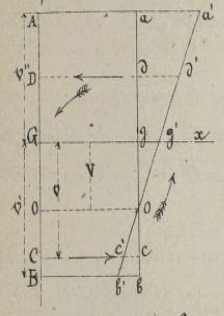
126. — **Formes que prennent les équations d'équilibre d'après les notations précédentes.** — Si l'on introduit les notations T, N et μ dans les équations d'équilibre du № 122, ces équations deviennent

$$\Sigma f_y + T = 0, \quad \Sigma f_x + N = 0, \quad \Sigma M_G f_x + \mu = 0.$$

127. — **Valeur, par unité de surface, de la résistance longitudinale.** — Si l'on considère la portion du solide comprise entre la section AB et une section infiniment voisine, et si l'on suppose, comme cela doit être entendu une fois pour toutes, que la déformation est toujours très-faible, les fibres longitudinales comprises entre ces sections peuvent être considérées comme étant des droites sensiblement normales à la section AB, et par conséquent, on commet une erreur très-petite en regardant les forces f_x comme étant égales et directement opposées aux forces qui produisent l'allongement ou le raccourcissement des fibres longitudinales.



Donc, si ω représente l'aire de la section AB, et si R est la résistance longitudinale par unité de surface déterminée par la déformation en un point de cette section, la résistance, sur l'élément dω, situé en ce point, est $f_x = R\,d\omega$, résistance dont l'intensité peut être considérée comme constante sur la longueur infinitésimale de la fibre comprise entre deux sections infiniment voisines ; et puisqu'il s'agit ici d'un phénomène d'extension ou de compression, dans lequel on doit admettre que l'élasticité n'est pas altérée, si j est l'allongement ou le raccourcissement par unité de longueur de la fibre dont la section est dω, on a, d'après la formule générale de l'extension, applicable aussi à la compression,



$$R = Ej, \quad \text{et par suite} \quad R\,d\omega = Ej\,d\omega$$

En second lieu, ab étant la position, avant la flexion, d'une section infiniment voisine de AB, et a'b' la situation de cette même section après la flexion, la courbure en un point quelconque étant toujours très-faible, si l'on rapporte la figure AB b' a' sur la figure AB ba, le dessin étant alors fait à une échelle beaucoup plus grande, on peut admettre sans erreur sensible, que les trois points A, a, a' sont en ligne droite, ainsi qu'il en est de même de trois autres points tels que G, g, g' ; B, b, b' ; C, c, c' ; .....

Or, si l'on considère la fibre Cc, par exemple, dont le raccourcissement est égal à cc', on a, pour cette fibre en particulier, $j = \frac{cc'}{Cc}$. Si en outre, on désigne par V la distance des fibres moyennes aux fibres neutres, et par v la distance des mêmes fibres moyennes à celles qui sont projetées en Cc, la quantité v étant regardée comme positive ou négative suivant qu'elle est comptée dans le sens des y positifs ou dans le sens opposé, les triangles semblables gg'o, cc'o, donnent

$$\frac{cc'}{gg'} = \frac{co}{go} = \frac{v - V}{V} \; ; \quad \text{d'où} \quad cc' = \frac{v - V}{V} . gg' ;$$

et comme on a $Cc = Gg$, si on divise le premier membre de la dernière égalité par Cc, le second par Gg, puis qu'on désigne par i l'allongement $\frac{gg'}{Gg}$ par unité de longueur des fibres moyennes projetées en Gg, il vient

$$\frac{cc'}{Cc} = \frac{v - V}{V} . \frac{gg'}{Gg}, \quad \text{ou} \quad j = \frac{v - V}{V} . i \; ;$$

et par suite l'équation

$$R\,d\omega = Ej\,d\omega$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

prend la forme

$$f_x = R\,d\omega = \frac{v-V}{V} E i\,d\omega \;; \qquad (1)$$

ou enfin, en supprimant $d\omega$,

$$R = \frac{v-V}{V} E i. \qquad (2)$$

Pour les points situés au-dessous des fibres neutres on a $v > V$, la force R est positive et elle résiste à la compression déterminée sous l'influence des forces extérieures.

Pour $v = V$ on a $R = 0$, ce qui doit être, les fibres neutres n'étant ni tendues ni comprimées.

Pour $v < V$, la force R est négative, elle agit dans le sens des x négatifs, pour s'opposer à l'extension des fibres, et il en est de même dans le cas où v est négatif.

Pour $v = 0$, il vient $R = -Ei$, et d'après la définition de i, cette valeur de R est bien, au signe près, l'expression de la tension des fibres moyennes dans la section considérée.

L'équation (2) montre encore que R croît en valeur absolue avec la quantité v, et par conséquent, que le maximum de la compression a lieu pour $v = v'$, et le maximum de la tension, pour $v = v''$.

128. — Valeur totale de la résistance longitudinale. — La force f_x ou $R\,d\omega$ étant une quantité qui varie d'une manière continue avec v dans toute l'étendue de la section ω, l'équation (1) donne, pour la somme des forces moléculaires développées dans cette section,

$$\Sigma f_x = \int \frac{v-V}{V} E i\,d\omega = \frac{Ei}{V}\int v\,d\omega - Ei\int d\omega \;;$$

mais on a évidemment $\int v\,d\omega = 0$ puisque l'axe auquel sont rapportées les valeurs de v passe par le centre de gravité de la section ω ; donc, à cause de $\int d\omega = \omega$, l'équation précédente devient

$$\Sigma f_x = -Ei\omega.$$

129. — Valeur de la tension longitudinale. — La valeur qu'on vient de trouver, mise dans l'équation $\Sigma f_x + N = 0$, donne, pour la tension longitudinale,

$$N = Ei\omega,$$

expression qui donne aussi

$$i = \frac{N}{E\omega},$$

et qui permet, par conséquent, de calculer l'allongement par mètre de longueur de la ligne moyenne dans la section ω quand on connaît les valeurs E et N.

130. — Valeur du moment résistant. — La valeur de la résistance longitudinale en un point quelconque, étant de la forme

$$f_x = \frac{v-V}{V} E i\,d\omega,$$

le moment $f_x v$ de cette force, par rapport à l'axe projeté en G, est égal à

$$v \times \frac{v-V}{V} E i\,d\omega \;;$$

mais il est facile de voir que, pour l'élément projeté en C, par exemple, le moment $f_x v$ s'exerce dans le sens de la flèche correspondante et qu'il est alors négatif si l'on regarde comme positifs les moments qui tendent à amener l'axe des x positifs sur l'axe des y positifs. On doit donc écrire, dans ce cas,

$$f_x v = M_G f_x = -v\,\frac{v-V}{V} E i\,d\omega.$$

9

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cette expression, applicable à tous les éléments de la section ω quand on tient compte du signe de v, varie d'une manière continue entre les limites extrêmes $v = v'$, $v = -v''$, et donne pour le moment résistant total

$$\Sigma M_G f_x = \int -v\frac{v-V}{V} E i \, d\omega = -\frac{E i}{V}\int v^2 d\omega + E i \int v \, d\omega .$$

Le dernier terme est nul parce que $\int v \, d\omega$ n'est autre chose que la somme des moments de tous les éléments $d\omega$ par leur distance à un axe qui passe par le centre de gravité; donc, en désignant par I le moment d'inertie $\int v^2 d\omega$ de la section ω par rapport à ce même axe, l'expression précédente se réduit à

$$\Sigma M_G f_x = -\frac{E i I}{V} .$$

131. — **Valeur du moment fléchissant.** — La valeur précédente, mise dans l'équation $\Sigma M_G f_x + \mu = 0$, donne, pour l'expression du moment fléchissant,

$$\mu = \frac{E i I}{V} .$$

132. — **Formules déduites des précédentes.** — Les relations

$$R = \frac{v-V}{V} E i , \qquad N = E i \omega , \qquad \mu = \frac{E i I}{V} ,$$

donnent, par l'élimination de Ei entre les deux dernières,

$$V = \frac{IN}{\mu\omega} ,$$

et par l'élimination de V et Ei entre les trois relations,

$$R = \frac{v\mu}{I} - \frac{N}{\omega} ;$$

mais il faut remarquer que quelques soient les signes de μ et de N il y a toujours, dans chaque section, une série de valeurs de v, soit en dessus soit en dessous de la ligne moyenne, qui donne à $\frac{v\mu}{I}$ le signe de $\frac{N}{\omega}$; il y a donc aussi, dans chaque section, une série de valeurs de R dont chacune est, en valeur absolue, de la forme

$$R = \frac{v\mu}{I} + \frac{N}{\omega} ,$$

et c'est le maximum de cette somme qui devra toujours intervenir dans les calculs relatifs à la détermination des dimensions d'un solide soumis à la flexion.

133. — **Cas où la tension longitudinale est nulle.** — Si dans les formules

$$N = E i \omega , \qquad V = \frac{IN}{\mu\omega} , \qquad R = \frac{v\mu}{I} - \frac{N}{\omega} ,$$

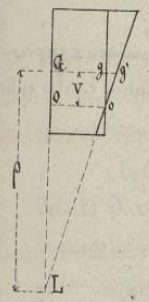
on suppose $N = 0$, c'est-à-dire, si toutes les forces extérieures du système sont perpendiculaires à la longueur du solide, il vient, $i = 0$, $V = 0$, $R = \frac{v\mu}{I}$;
ce qui montre que la ligne des fibres neutres se confond avec la ligne moyenne.

Les conditions $i = 0$, $V = 0$, introduites dans la formule $\mu = \frac{E i I}{V}$ établie précédemment, conduisent à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; mais ici l'indétermination n'est qu'apparente, car si l'on remplace dans l'expression de μ, la quantité Ei, par sa valeur tirée de l'équation $R = \frac{v-V}{V} Ei$, il vient $\mu = \frac{RI}{v-V}$, expression qui se réduit à $\mu = \frac{RI}{v}$ pour $V = 0$; c'est, d'ailleurs, ce que donne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

immédiatement l'équation $R = \frac{\nu\mu}{I} - \frac{N}{\omega}$ quand on y fait $N = 0$.

134. — **Courbure des fibres moyennes.** — On peut obtenir pour le rayon de courbure de la ligne moyenne, deux expressions dont la combinaison conduit à une relation importante pour l'étude de la flexion plane.



1° — Soient G et g' deux points infiniment voisins pris sur la ligne moyenne après la flexion. Les normales g'L et GL menées à cette courbe par les points G et g' se rencontrent en un point L qui est le centre de courbure, et par conséquent GL ou ρ est le rayon de courbure au point G.

Cela posé, les triangles semblables Gg'L et gg'o donnent

$$\frac{V}{\rho} = \frac{gg'}{Gg'} = \frac{gg'}{Gg + gg'} = \frac{\frac{gg'}{Gg}}{1 + \frac{gg'}{Gg}} = \frac{i}{1+i};$$

et comme l'allongement i par mètre est une fraction très-petite relativement à l'unité, l'erreur que l'on commet, en négligeant la quantité i au dénominateur, est elle-même très-petite; on a ainsi, très-approximativement,

$$\frac{V}{\rho} = i, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{V}{i};$$

mais on a aussi trouvé précédemment

$$\mu = \frac{EiI}{V}, \quad \text{ou} \quad \frac{V}{i} = \frac{EI}{\mu},$$

d'où l'on conclut, comme première expression du rayon de courbure,

$$\rho = \frac{EI}{\mu}. \qquad (1)$$

2° — On sait que l'expression générale du rayon de courbure est, en coordonnées rectilignes,

$$\rho = \frac{[1 + (f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

Lorsque les axes sont rectangulaires on a $f'(x) = \tang\alpha$, et cette quantité, très-petite ici relativement à l'unité, peut être négligée sans erreur sensible, ce qui donne pour la seconde expression cherchée,

$$\rho = \frac{1}{f''(x)}. \qquad (2)$$

Les formules (1) et (2) montrent que si EI est constant la valeur de ρ varie en raison inverse de μ ou de $f''(x)$, et que pour $\mu = 0$ ou $f''(x) = 0$ on a $\rho = \infty$; ainsi la courbure en un point donné de la ligne moyenne est nulle lorsque la valeur correspondante de μ est nulle elle-même.

La condition $f''(x) = 0$, pour laquelle $\rho = \infty$, annonce généralement que la courbe a une inflexion au point considéré; cependant pour qu'il en soit ainsi il faut que $f'(x)$ change de signe en passant par zéro, car le rayon de courbure peut devenir infini sans qu'il y ait un point d'inflexion, c'est-à-dire, sans que la courbure change de sens.

Si la section transversale du solide est constante, comme on l'a supposé jusqu'ici, la quantité I est aussi constante; et si les forces extérieures se réduisent à un couple (P, −P) la valeur de μ est elle-même constante, car si l'on nomme les longueurs des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

directions des forces P en $-P$, on a, dans ce cas,

$$\mu = P(l-x) - P(l'-x) = P(l-l') = \text{constante}.$$

Dans ces conditions la valeur de ρ est nécessairement constante, et par conséquent la ligne moyenne s'infléchit suivant une portion de circonférence.

135. — Équation différentielle de la ligne moyenne. — Les deux expressions de la valeur du rayon de courbure en un point quelconque de la ligne moyenne étant égales entre elles donnent la relation

$$f''(x) = \frac{\mu}{EI}, \qquad \text{ou encore} \qquad \mu = EIf''(x),$$

et l'équation différentielle de cette ligne est

$$f''(x)\,dx = \frac{\mu}{EI}\,dx,$$

expression qui donne l'équation même de la courbe par deux intégrations successives lorsque μ est une fonction explicite de x ; mais si μ est une fonction de x et de y, il faut alors recourir aux méthodes spéciales pour l'intégration des équations différentielles proprement dites.

136. — Inclinaison de la ligne moyenne en un point quelconque. — L'équation précédente donne, par une première intégration, et en supposant EI constant,

$$f'(x) = \frac{1}{EI}\int \mu\,dx + C,$$

C étant une constante dont la valeur pourra être déterminée par la considération des valeurs simultanées des deux variables x et $f'(x)$ pour un point spécial de la courbe.

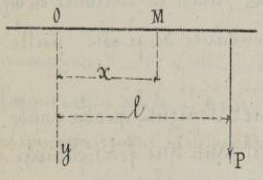
La valeur de $f'(x)$ exprime l'inclinaison de la ligne moyenne au point de cette ligne dont l'abscisse est x ; cette valeur, toujours très-petite, et égale à tang. α lorsque les axes coordonnés sont rectangulaires, peut être remplacée par α sans qu'il en résulte d'erreur appréciable dans les applications.

137. — Équation de la ligne moyenne. — Si l'on multiplie la dernière équation par dx, et qu'on intègre ensuite, il vient, pour l'équation de la ligne moyenne,

$$y = f(x) = \frac{1}{EI}\left[\left(\int \mu\,dx + C\right)dx + C'\right],$$

relation dans laquelle C' est une nouvelle constante qui sera déterminée par les conditions du problème à résoudre.

138. — Relation entre l'effort tranchant et la dérivée du moment fléchissant.



Soit P l'une quelconque des forces finies ou infiniment petites, qui agissent à la droite du point M ; le moment de cette force, par rapport à l'axe projeté en M, est $P(l-x)$ ou $Pl - Px$, et le moment fléchissant de toutes les forces analogues à la force P a pour valeur

$$\mu = \Sigma Pl - x\Sigma P,$$

ce qui donne

$$d\mu = -T\,dx, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\mu}{dx} = -T.$$

Donc la dérivée, par rapport à x, du moment fléchissant, a pour expression la valeur de l'effort tranchant changée de signe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

139. — **Relation entre l'effort tranchant et la troisième dérivée de $f(x)$.** — L'équation $\mu = EIf''(x)$, établie au N° 135, donne, en supposant EI constant dans toute la partie considérée du solide,

$$\frac{d\mu}{dx} = EIf'''(x);$$

cette expression, comparée à la précédente, conduit à la nouvelle relation

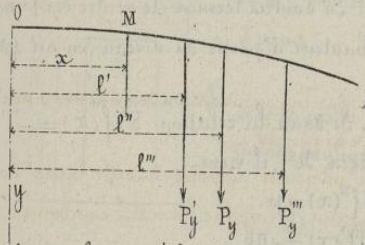
$$EIf'''(x) = -T,$$

qui servira au besoin à obtenir l'équation de la ligne moyenne par trois intégrations successives.

140. — **Détermination des pressions normales et des moments correspondants d'après le mode de répartition des forces extérieures.** — Il convient d'examiner successivement : le cas où les charges agissent isolément sur un solide donné ; celui où la charge est continue et uniformément répartie ; et enfin le cas où la charge est continue et répartie suivant une loi déterminée.

La pression totale, dans la partie considérée du solide, est ici désignée par F ; le moment de cette pression par rapport à l'axe projeté en un point M, est représenté par M_M.

1° — *Cas où les charges agissent isolément.* — **Pression totale.** — La somme des pressions normales situées à la droite de la section transversale qui passe en M est



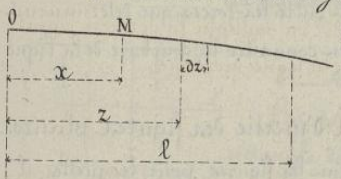
$$F = P'_y + P''_y + P'''_y + \ldots = \Sigma P_y.$$

Moment de la pression. — Considéré par rapport à l'axe projeté en M, le moment de toutes les composantes normales P'_y, P''_y, P'''_y, ... est de la forme,

$$M_M = P'_y(l' - x) + P''_y(l'' - x) + P'''_y(l''' - x) + \ldots = \Sigma P_y(l - x),$$

dans cette expression comme dans la précédente les diverses forces désignées d'une manière générale par P_y doivent être prises avec leurs signes respectifs.

2° — *Cas où la charge est uniformément répartie.* — **Pression totale.** — En désignant par p la charge par mètre courant répartie uniformément sur la portion $l - x$ du solide située à droite du point M, on a immédiatement



$$F = p(l - x).$$

Moment de la pression. — La charge sur un élément de longueur dz étant égale à pdz, le moment de cette charge, par rapport à l'axe projeté en M, est

$$dM_M = pdz(z - x),$$

et le moment de toutes les forces réparties dans l'intervalle $l - x$ est

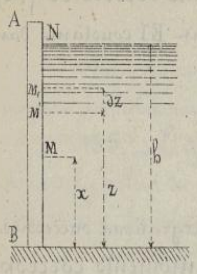
$$M_M = \int_x^l p(z - x)dz = \frac{1}{2}p(l - x)^2 = p(l - x) \times \frac{1}{2}(l - x);$$

ce qui montre que le moment d'une charge uniformément répartie est égal à celui d'une charge égale qui serait concentrée au milieu de la longueur $l - x$.

3° — *Cas d'une charge continue répartie suivant une loi déterminée.* — On peut prendre comme exemple le cas où il s'agit de la pression exercée par un liquide sur une paroi verticale.

Pression totale. — On sait que la pression exercée par un élément liquide sur tous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les élémentà environnants est la même dans tous les sens ; donc, si b est la hauteur du liquide et b la dimension de la paroi dans le sens perpendiculaire au plan de la figure, la poussée horizontale, sur l'élément superficiel projeté en $M'M_1$, est égale au poids d'un prisme de liquide dont la base est bdz et la hauteur, $b-z$; par suite, si Π désigne le poids du mètre cube de liquide, la poussée élémentaire a pour expression $dF = \Pi b(b-z)dz$, et la somme des pressions exercées de M en N est

$$F = \Pi b \int_x^b (b-z)\,dz = \frac{1}{2}\Pi b(b-x)^2.$$

La pression sur la hauteur b, correspond à $x=0$ et a pour valeur,

$$F = \frac{1}{2}\Pi b b^2.$$

Moment de la pression. — Le moment de la pression élémentaire $\Pi b(b-z)dz$, par rapport à l'axe projeté en M, est

$$dM_M = \Pi b(b-z)(z-x)\,dz,$$

ce qui donne $$M_M = \int_x^b \Pi b(b-z)(z-x)dz = \frac{1}{6}\Pi b(b-x)^3 = \frac{1}{3}(b-x)\times\frac{1}{2}\Pi b(b-x)^2;$$

on en conclut que le moment de la poussée du liquide, par rapport à l'axe projeté en M, est égal au produit de cette poussée par le tiers de la hauteur considérée. En d'autres termes, le centre des forces parallèles dues à la poussée du liquide, est situé aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur à partir du niveau, ou au $\frac{1}{3}$ de cette même hauteur à partir de la base.

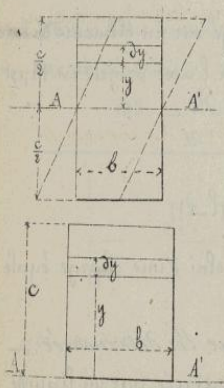
141. **Relations déduites des précédentes.** — Si, dans la relation $EIf'''(x) = -T$ on substitue successivement à T les valeurs de F des deux dernières N^os, il vient

$$EIf'''(x) = -p(l-x), \quad \text{d'où} \quad EIf^{IV}(x) = p.$$

$$EIf''(x) = -\frac{1}{2}\Pi b(b-x)^2, \quad \text{d'où} \quad EIf^{V}(x) = -\Pi b.$$

Ces résultats, peu utiles dans les applications, présentent un certain intérêt en ce qu'ils établissent d'une manière très-remarquable les relations existant entre les forces qui déterminent la flexion d'un solide et les dérivées successives de la fonction qui fait connaître la courbure de la ligne moyenne après la flexion.

142. **Détermination analytique des moments d'inertie des figures planes.**



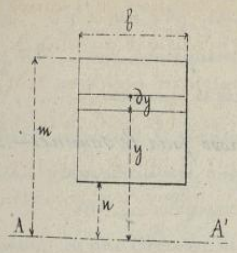
Dans toutes les questions qui suivent, les figures pour lesquelles il faut déterminer $\int v^2 d\omega$, indiquent suffisamment la situation de l'axe AA' des moments d'inertie relativement à la section considérée, et l'aire de cette section est désignée par la lettre ω.

1° — *Rectangle.* — La figure étant décomposée en éléments de formés de bandes parallèles à l'axe AA', on a $dI = y^2 d\omega = y^2 b\,dy$.

$$I = \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} y^2 b\,dy = \frac{1}{12}bc^3 = \frac{1}{12}c^2\omega.$$

2° — *Parallélogramme.* — La même formule s'applique évidemment à un parallélogramme de base b et de hauteur c : car, tout déplacement d'une figure parallèlement à l'axe d'inertie, est sans influence sur la valeur du moment d'inertie.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



3°— *Carré.*— En faisant $b = c$ dans la formule précédente, on a, pour le moment d'inertie du carré,

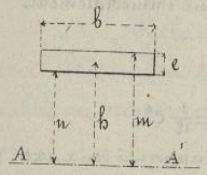
$$I = \frac{1}{12} c^4 = \frac{1}{12} c^2 \omega .$$

4°— *Rectangle dont un côté coïncide avec l'axe des moments.*— on a

$$I = \int_0^c y^2 b \, dy = \frac{1}{3} b c^3 = \frac{1}{3} c^2 \omega$$

5°— *Rectangle dont l'axe des moments est situé en dehors de la figure.*— On a évidemment

$$I = \int_n^m y^2 b \, dy = \frac{1}{3} b (m^3 - n^3), \qquad (1)$$

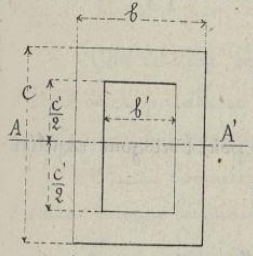


formule qui comprend les cas précédents quand on y fait :

soit $m = \frac{1}{2} c$ et $n = \frac{1}{2} c$; soit, $m = c$ et $n = 0$.

6°— *Rectangle dont la hauteur est très-petite relativement à la distance qui sépare la figure de l'axe des moments.*— si c est la hauteur du rectangle et b la distance du centre de figure à l'axe d'inertie, on a $m = b + \frac{c}{2}$, $n = b - \frac{c}{2}$, et en substituant dans la formule (1) il vient

$$I = b c b^2 + \frac{b c^3}{12} ;$$

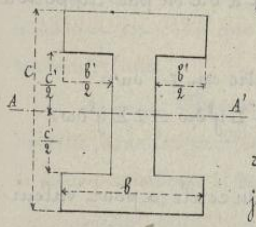


de sorte que si c est très-petit relativement à b, on peut, sans erreur appréciable, négliger le terme $\frac{bc^3}{12}$ et écrire

$$I = bcb^2 .$$

7°— *Rectangle évidé.*— Le moment d'inertie est évidemment la différence des moments d'inertie relatifs aux deux rectangles qui composent la figure, et l'on a

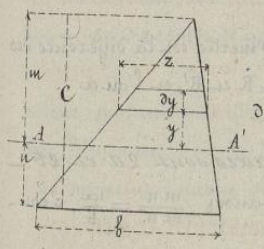
$$I = \frac{1}{12} (bc^3 - b'c'^3) .$$



8°— *Rectangle évidé en forme de double T à semelles égales.*— Les deux évidements latéraux formant encore, par leur réunion, un rectangle de base b' et de hauteur c', le moment d'inertie de la figure a toujours pour expression

$$I = \frac{1}{12} (bc^3 - b'c'^3) .$$

9°— *Triangle, dont un côté est parallèle à l'axe des moments.* on a $d\omega = z \, dy$ et $\frac{z}{b} = \frac{m-y}{c}$,



d'où $d\omega = \frac{b(m-y)}{c} dy$; il en résulte

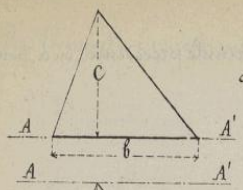
$$I = \int_n^{+m} y^2 \frac{b(m-y)}{c} dy = \frac{1}{12} \frac{b}{c} (m^4 + 4mn^3 + 3n^4)$$

Cas particuliers de la formule précédente.

10°— *Triangle dont l'axe des moments passe par le centre de gravité de la figure.*— On a $m = \frac{2c}{3}$, $n = \frac{c}{3}$, d'où

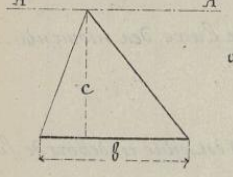
$$I = \frac{1}{36} bc^3 = \frac{1}{18} c^2 \omega .$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



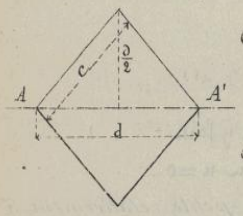
11° — *Triangle dont l'axe des moments coïncide avec la base b.* On a $n=0$ et $m=c$; d'où résulte

$$I=\frac{1}{12}bc^3=\frac{1}{6}c^2\omega \qquad (2)$$



12° — *Triangle dont l'axe des moments passe par le sommet.* — On a, $m=0$, $n=c$, et par suite

$$I=\frac{1}{4}bc^3=\frac{1}{2}c^2\omega.$$

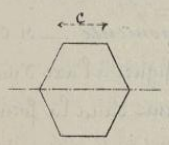


13° — *Carré dont une diagonale coïncide avec l'axe des moments.* On a ici deux triangles égaux ; et la formule (2) donne immédiatement

$$I=2\frac{D}{12}\left(\frac{D}{2}\right)^3=\frac{1}{48}D^4;$$

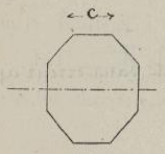
et à cause de $D=c\sqrt{2}$, on peut aussi écrire $I=\frac{1}{12}c^4$

Le moment d'inertie d'un carré est le même par rapport à deux axes passant par le centre et parallèles, l'un au côté, l'autre à la diagonale.



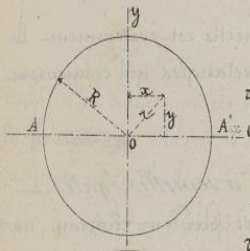
14° — *Hexagone régulier.* — En décomposant la figure en rectangles et en triangles, on trouve très-facilement

$$I=\frac{5}{16}c^4\sqrt{3}=\frac{5}{24}c^2\omega.$$



15° — *Octogone régulier.* — On obtient aussi, pour l'octogone régulier

$$I=\frac{1}{12}c^4(11+8\sqrt{2})=\frac{1}{24}c^2\omega(5+3\sqrt{2}).$$



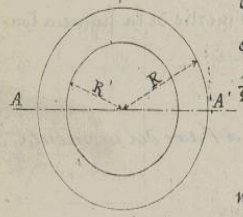
16° — *Cercle dont le centre est situé sur l'axe des moments.* — Il faut d'abord remarquer que, par le fait même de la symétrie de la figure, le moment d'inertie est le même pris par rapport à Ox ou par rapport à Oy ; on a donc $I=\Sigma y^2d\omega=\Sigma x^2d\omega$.

Or, pour un élément $d\omega$ dont la distance au centre est r, on a $r^2=x^2+y^2$, et par suite $\Sigma r^2d\omega=\Sigma x^2d\omega+\Sigma y^2d\omega=2\Sigma y^2d\omega$.

d'où $$I=\Sigma y^2d\omega=\frac{1}{2}\Sigma r^2d\omega;$$

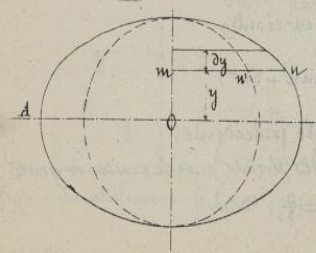
et comme $\Sigma r^2d\omega$, moment d'inertie polaire du cercle, a pour valeur $\frac{1}{2}\pi R^4$, on en conclut

$$I=\frac{1}{4}\pi R^4=\frac{1}{4}R^2\omega.$$



17° — *Section annulaire.* — Le moment d'inertie est la différence des moments d'inertie des cercles dont les rayons sont R et R', et l'on a

$$I=\frac{1}{4}\pi(R^4-R'^4)=\frac{1}{4}\omega(R^2+R'^2)$$



18° — *Ellipse pleine, dont les axes sont 2a et 2b.* — On a $I=\int y^2\times mn\times dy$; mais on a aussi $\frac{mn}{m'n'}=\frac{a}{b}$, c'est-à-dire $mn=\frac{a}{b}m'n'$, donc

$$I=\int y^2\times\frac{a}{b}m'n'\times dy=\frac{a}{b}\int y^2\times m'n'\times dy;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

or, $\int y^2 \times mn' \times dy$ est le moment d'inertie du cercle de rayon b, et ce moment a pour valeur $\frac{1}{4}\pi b^4$, par conséquent $I = \frac{1}{4}\pi a b^3 = \frac{1}{4} b^2 \omega$.

Il convient de faire remarquer ici que toute dilatation de la figure dans le sens parallèle à l'axe augmente le moment d'inertie dans le rapport des abscisses ; et que toute dilatation dans le sens perpendiculaire augmente le moment d'inertie dans le rapport du cube des ordonnées.

19°. — *Figure plane quelconque.* — Si une figure plane peut être décomposée en une somme ou une différence de plusieurs autres figures dont on puisse calculer séparément le moment d'inertie par rapport à un axe donné, il suffit évidemment de faire la somme ou la différence de ces moments d'inertie pour avoir celui de la figure donnée.

143. — **Relation entre les moments d'inertie pris par rapport à deux axes parallèles.** — Soit A un axe passant par le centre de gravité d'un système donné ; B un autre axe parallèle au premier ; a la distance des deux axes et m, l'un quelconque des éléments du système.

On a, d'une manière générale, pour les moments d'inertie du système, pris respectivement par rapport à ces deux axes

$$I_B = I_A + a^2 \Sigma m .$$

Cette relation, évidemment applicable aux moments d'inertie d'une aire plane par rapport à deux axes parallèles, situés dans son plan ou perpendiculaires à ce plan, conduit à plusieurs conséquences importantes.

1°. — Connaissant l'un des deux moments d'inertie, on peut en déduire immédiatement l'autre lorsque la quantité Σm est connue.

2°. — Les formules dans lesquelles intervient le moment d'inertie d'un système sont plus simples dans le cas de l'axe A que dans tout autre cas.

3°. — Le minimum de la valeur de I pour un même système est nécessairement I_A, et ce moment est celui que l'on doit considérer quand il s'agit de questions relatives à la résistance des matériaux.

144. — **Observation sur la détermination du centre de gravité.** — L'axe d'inertie, dans les problèmes relatifs à la flexion, devant passer par le centre de gravité G de la section considérée, il devient nécessaire de déterminer cet axe toutes les fois que le point G n'est pas immédiatement donné. Si A est l'axe d'inertie cherché ; B un axe donné, parallèle au premier, $d\omega$ un élément situé à la distance y de B, et Y la distance des deux axes, on a, par la définition même du centre de gravité,

$$Y\omega = \int y\, d\omega , \qquad \text{d'où} \quad Y = \frac{\int y\, d\omega}{\omega} ,$$

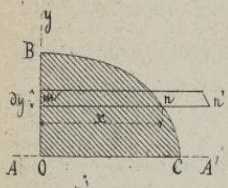
valeur qui fait connaître la situation de l'axe A. Il suffit alors de calculer, par rapport à cet axe, le moment d'inertie de chacune des parties de la figure et la somme de ces moments est la valeur I du moment d'inertie cherché.

145. — **Détermination graphique du moment d'inertie d'une aire plane.**

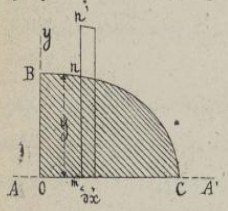
Soit BOC la portion de figure considérée et AA' l'axe du moment d'inertie. Le moment d'inertie d'une bande infiniment petite de hauteur dy et d'une longueur égale à x, est $y^2 x\, dy$. Si l'on construit un rectangle ayant la même hauteur dy et pour base une longueur mn' numé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

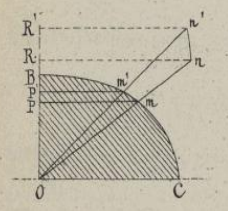
rigoureusement égale à xy^2, ce rectangle exprime graphiquement la valeur du moment d'inertie élémentaire de la bande considérée. En déterminant pour toute la figure un nombre suffisant de points tels que n', l'aire comprise dans la courbe qui passe par ces points représente le moment d'inertie de la figure.



On peut aussi arriver au même résultat en prenant un rectangle infinitésimal perpendiculaire à l'axe AA', son moment d'inertie est alors exprimé par $\frac{1}{3}y^3dx$; et si l'on détermine à l'échelle du dessin, une longueur mn' égale au produit $\frac{1}{3}y^3$, le rectangle dont la base est dx et la hauteur mn' exprime le moment d'inertie de l'élément ydx. En faisant la même construction pour un nombre suffisant d'éléments semblables pris sur l'ensemble de la figure donnée, on détermine encore une aire dont la valeur est le moment d'inertie cherché.



Enfin, on peut employer la méthode suivante : on mène par le point O et par un point quelconque m du contour donné, une droite indéfinie Om; on prend OR numériquement égal au carré de l'ordonnée OP du point m, et l'on mène par le point R une perpendiculaire qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre en n avec la droite Om. Le point n ainsi obtenu est l'un des points d'une courbe dont l'aire représente graphiquement le double du moment d'inertie demandé.



Soit, en effet, n' un point infiniment voisin de n et obtenu de la même manière que ce dernier; on a, d'après la construction

$$OR = \overline{OP}^2 = y^2; \qquad OR' = (y+dy)^2; \text{ d'où } RR' = OR' - OR = 2ydy + dy^2;$$

ou simplement $RR' = 2ydy$.

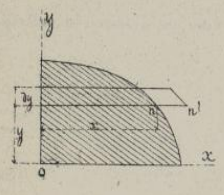
On a ensuite

$$Rn = \frac{OR \times Pm}{OP} = \frac{xy^2}{y} = xy;$$

et par conséquent aire $Rnn'R' = Rn \times RR' = xy \times 2ydy = 2xy^2dy$;

valeur qui représente bien le double du moment d'inertie du petit trapèze Pmm'P'.

146. — Détermination graphique du centre de gravité d'une aire plane. — Pour calculer la valeur de y qui satisfait à l'équation $Y\omega = \int y\,d\omega$, on décompose la section considérée en bandes élémentaires parallèles à l'axe des x. Le moment de la bande mn étant égal à $xydy$, il suffit de construire un rectangle dont la hauteur soit dy et dont la base mn' soit numériquement égale à xy, puis de déterminer un nombre suffisant de points tels que n'; on obtient ainsi une courbe limitant une aire dont la valeur est égale à $\int y\,d\omega$, et en divisant ensuite par ω, le quotient donne la valeur de Y.



On détermine de la même manière la valeur de X qui satisfait à l'équation $X\omega = \int x\,d\omega$; et le point dont les coordonnées sont X et Y est le centre de gravité de la section donnée.

On pourrait aussi déterminer la valeur Y en considérant des bandes infinitésimales parallèles à l'axe des y et pour chacune desquelles la quantité ydw aurait pour expression $\frac{1}{2}y \times ydx$. On obtiendrait ainsi une aire qu'il suffirait de diviser par ω pour avoir la valeur de Y. Une construction analogue conduirait, ailleurs à la détermination de X.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

147. — Tableau des formules fondamentales de la flexion. —

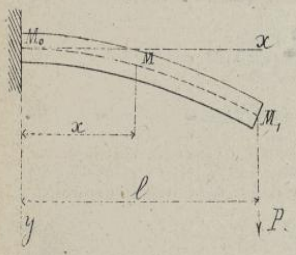
Allong.t par mètre	$j=\frac{v-V}{V}i$	(1)
Résist.ce par mètre carré	$R=Ej$	(2)
(1) et (2) donnent	$R=\frac{v-V}{V}Ei$	(3)
Résist.ce sur l'élément dω	$f_x=Rd\omega=Ejd\omega$	(4)
Résist.ce sur la section ω	$\Sigma f_x=-Ei\omega$	(5)
Tension longitudinale	$N=Ei\omega$	(6)
Momens résistans	$\Sigma M_d f_x=-\frac{EIi}{V}$	(7)
Momens fléchissans	$\mu=\frac{EIi}{V}$	(8)
L'équation (6) donne	$i=\frac{N}{E\omega}$	(9)
(6) et (8) donnent	$V=\frac{IN}{\mu\omega}$	(10)
3), (6) et (8) donnent	$R=\frac{v\mu}{I}-\frac{N}{\omega}$	(11)
(2) et (11) donnent	$j=\frac{1}{E}\left(\frac{v\mu}{I}-\frac{N}{\omega}\right)$	(12)
Allong.t élémentaire	$dJ=\frac{1}{E}\left(\frac{v\mu}{I}-\frac{N}{\omega}\right)dx$	(13)
Allong.t total	$J=\frac{1}{E}\int\left(\frac{v\mu}{I}-\frac{N}{\omega}\right)dx$	(14)
Lor N = 0 (9) donne	$i=0$	(15)
Lor N = 0, (10) donne	$V=0$	(16)
Lor N = 0 (11) donne	$R=\frac{v\mu}{I}$	(17)
Lor N = 0 (12) donne	$j=\frac{v\mu}{EI}$	(18)
Lor N = 0 (13) donne	$dJ=\frac{v\mu}{EI}dx$	(19)
Lor N = 0 (14) donne	$J=\frac{v}{EI}\int\mu dx$	(20)
Rayon de courbure	$\rho=\frac{EI}{\mu}$	(21)
Autre expression	$\rho=\frac{1}{f''(x)}$	(22)
(21) et (22) donnent	$\mu=EIf''(x)$	(23)
Eq. différent. de la ligne moy.	$f''(x)dx=\frac{\mu}{EI}dx$	(24)
Inclin. de la ligne moyenne	$f'(x)=\frac{1}{EI}\int\mu dx+c$	(25)
Equat. de la ligne moyenne	$y=\frac{1}{EI}\int(\int\mu dx+c)dx+c'$	(26)
Relation entre T et $\frac{d\mu}{dx}$, $\frac{d\mu}{dx}=-T$		(27)
Relation entre T et $f''(x)$, $EIf'''(x)=-T$.		(28)
Charges isolées — Pression	$F=\Sigma P_y$	(29)
Charges isolées — Momens	$M_M=\Sigma P_y(l-x)$	(30)
charge uniforme — Pression	$F=p(l-x)$	(31)
charge uniforme — Momens	$M_M=\frac{1}{2}p(l-x)^2$	(32)
Pression d'un liquide — Pression	$F=\frac{1}{2}\pi b(b-x)^2$	(33)
Pression d'un liquide — Momens	$M_M=\frac{1}{6}\pi b(b-x)^3$	(34)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Applications des formules fondamentales de la flexion.

148. — *Examen de quelques cas particuliers de la flexion.* — Afin de montrer comment les considérations qui précèdent sont vérifiées par les faits d'expérience, il convient d'examiner spécialement quelques cas particuliers qui peuvent être traités avec une grande simplicité, avant d'aborder l'exposé général de la théorie de la flexion.

149. — *Solide encastré et soumis à des forces transversales.* — On dit qu'un solide est encastré dans l'une de ses sections transversales, lorsque l'inclinaison de la ligne moyenne au point situé dans cette section reste invariable quel que soit le mode d'action des forces auxquelles le solide est soumis.



Le cas que l'on considère ici est celui où un solide, primitivement horizontal et encastré en M_0, est chargé d'un poids P à l'autre extrémité et supporté en outre une charge p par mètre, uniformément répartie sur toute la longueur du solide. Les axes coordonnés sont deux droites, l'une horizontale, l'autre verticale, et l'origine des coordonnées est le centre de gravité de la section d'encastrement.

Les forces qui sollicitent le solide ayant ici une direction parallèle à l'axe des y, la tension longitudinale ΣF_x, représentée par N, est nulle, et la ligne des fibres neutres se confond avec la ligne moyenne.

1° — *Effort tranchant.* — L'effort tranchant en un point quelconque M dont l'abscisse est x, a pour valeur

$$T = P + p(l - x). \qquad (1)$$

expression dont le *maximum* $T_0 = P + pl$ correspond à $x = 0$. Le *minimum* $T_1 = P$ correspond à $x = l$.

2° — *Moment fléchissant.* — Le moment fléchissant μ, au point M, se compose du moment $P(l - x)$ de la force P et du moment $\frac{1}{2}p(l-x)^2$ de la charge uniformément répartie à la droite du point dont l'abscisse est x ; donc

$$\mu = P(l-x) + \tfrac{1}{2}p(l-x)^2 = \tfrac{1}{2}\left[(2P+pl)l - 2(P+pl)x + px^2\right] \qquad (2)$$

Le maximum de μ correspond évidemment à $x = 0$ et a pour valeur

$$\mu = Pl + \tfrac{1}{2}pl^2.$$

A mesure que x augmente μ diminue ; et pour $x = l$, on a $\mu = 0$.

3° — *Inclinaison de la ligne moyenne.* — L'équation $f''(x)\,dx = \frac{1}{EI}\mu\,dx$, donne, en y remplaçant μ par la valeur (2),

$$f''(x)\,dx = \frac{1}{2EI}\left[(2P+pl)l\,dx - 2(P+pl)x\,dx + px^2\,dx\right],$$

d'où, en intégrant

$$f'(x) = \frac{1}{2EI}\left[(2P+pl)lx - (P+pl)x^2 + \tfrac{1}{3}px^3\right] + C.$$

Au point M_0, pour lequel on a $x = 0$, la tangente est horizontale ; donc, en ce point on a $f'(x) = 0$, d'où $C = 0$. Par suite l'inclinaison en un point quelconque dont l'abscisse est x a pour

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

valeur $$\alpha = f'(x) = \frac{1}{6EI}\left[3(2P+pl)lx - 3(P+pl)x^2 + px^3\right]. \qquad (3)$$

Pour $x=0$ on a nécessairement $\alpha = 0$, et cette condition est vérifiée par l'équation précédente. Les autres points pour lesquels on a encore $\alpha = 0$ ont pour abscisses les racines de l'équation

$$px^2 - 3(P+pl)x + 3(2P+pl)l = 0,$$

qui donne $$x = \frac{1}{2p}\left[3(P+pl) \pm \sqrt{9P^2 - 6Ppl - 3p^2l^2}\right];$$

et l'on voit facilement que si P et p sont positifs les deux valeurs de x déduites de cette formule sont ou plus grandes que l, ou imaginaires, et ne peuvent convenir à la question; elles forment avec la valeur $\alpha = 0$, des solutions de l'équation (3), applicables seulement lorsque cette équation est considérée d'une manière purement analytique.

Le *maximum* de α correspond aux racines qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée, par rapport à x, de l'équation (3); on trouve pour ces racines

$$x = l \qquad \text{et} \qquad x = l + \frac{2P}{p};$$

la première valeur prouve qu'il y a un maximum de α à l'extrémité du solide; la seconde valeur doit être rejetée si P est positif; et pour P négatif, la valeur $l - \frac{2P}{p}$ ne convient à la question que si l'on a $l > \frac{2P}{p}$.

4° — *Équation de la ligne moyenne.* — En multipliant l'équation (3) par dx, puis en intégrant et remarquant que pour $x=0$ on a $f(x)=0$, ce qui donne $C=0$, il vient, pour l'équation de la ligne moyenne,

$$y = f(x) = \frac{1}{24EI}\left[6(2P+pl)lx^2 - 4(P+pl)x^3 + px^4\right]. \qquad (4).$$

Les points où cette courbe rencontre l'axe des x ont pour abscisses les racines des équations $x=0$ et $px^2 - 4(P+pl)x + 6(2P+pl) = 0$.

La dernière équation donne

$$x = \frac{1}{p}\left[2(P+pl) \pm \sqrt{4P^2 - 4Ppl - 2p^2l^2}\right];$$

Si p et P sont positifs, les deux racines sont, ou imaginaires, ou numériquement plus grandes que l, et par suite n'appartiennent pas à la portion de la ligne moyenne qui correspond à la poutre.

La flèche à l'extrémité du solide se détermine en posant $x=l$ dans l'équation (4); et si l'on désigne par y la valeur de y correspondant à $x=l$, il vient

$$y = \frac{1}{3EI}Pl^3 + \frac{1}{8EI}pl^4.$$

En faisant successivement $P=0$ et $p=0$ dans cette expression on trouve

$$y_1 = \frac{1}{8EI}pl^4, \qquad y_2 = \frac{1}{3EI}Pl^3, \qquad \text{d'où} \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{3}{8}\frac{pl}{P};$$

et si l'on suppose comme cas particulier, $pl = P$, il en résulte

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{3}{8}$$

Ce résultat, conforme à l'une des lois établies par M. Dupin, montre que *la flèche due*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à une charge uniformément répartie est égale aux $\frac{3}{8}$ de celle qui aurait lieu si cette charge était remplacée par une charge égale agissant à l'extrémité du solide.

5° — *Rayon de courbure de la ligne moyenne.* — En remplaçant $f'(x)$ par sa valeur tirée de l'équation (4) dans la formule $\rho = \frac{1}{f''(x)}$, il vient, pour l'expression du rayon de courbure

$$\rho = \frac{2EI}{(2P+pl)l - 2(P+pl)x - px^2} \qquad (5).$$

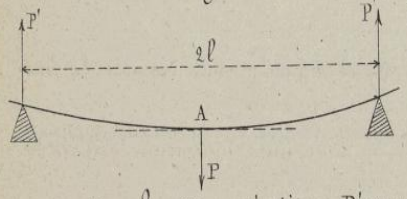
Pour $x = 0$ on a

$$\rho = \frac{2EI}{(2P+pl)l}.$$

A partir de $x = 0$ la valeur de ρ va en augmentant, car le dénominateur de l'équation (5) reste une fonction décroissante tant que l'on a $x < l$. Enfin pour $x = l$, il vient $\rho = \infty$, ce que l'on conclut également de l'expression comme $\rho = \frac{EI}{\mu}$, quand on y fait $\mu = 0$.

Il est utile de faire remarquer en terminant, que les équations précédentes, dans lesquelles entrent P et p, sont homogènes ; ce qui devient d'ailleurs évident quand on y regarde pl et px, comme étant de même nature que la quantité P, c'est-à-dire, comme représentant des efforts exprimés en kilogrammes.

150. — *Solide reposant par ses extrémités sur deux appuis de niveau, chargé d'un poids P en son milieu et d'une charge p par mètre, répartie uniformément sur toute sa longueur.* — Les forces extérieures qui sollicitent le solide sont : La charge

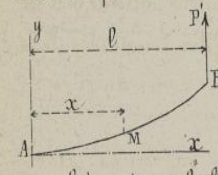


P, la charge uniformément répartie 2pl, et les réactions verticales P' des points d'appui, ces dernières agissant en sens contraire de P et de 2pl.

Tout étant symétrique par rapport à la verticale qui passe par le point A :

1° — Les deux réactions P' sont égales entre elles et chacune a pour valeur la demi-somme $\frac{1}{2}(P+2pl)$ des forces extérieures.

2° — La tangente au point A est nécessairement horizontale et le solide peut être regardé comme encastré en ce point ; de sorte que les conditions du cas précédent sont réalisées quand on ne considère que la moitié AB, de la pièce. Les formules déjà obtenues sont donc entièrement applicables à cette portion AB de la courbe pourvu qu'on y remplace P par



$\frac{1}{2}(P+2pl)$, pl par $-pl$, et que les y positifs soient pris dans le sens de la flexion du solide.

En faisant ces substitutions dans la formule (4) du N° 149, on obtient pour l'équation de la ligne moyenne

$$y = \frac{1}{24EI}\left[6l(P-pl)x^2 - 2Px^3 - px^4\right].$$

Le cas très-simple que l'on traite ici permet de résoudre facilement les questions suivantes :

1° — *Valeur de la flèche au point B,* $y = \frac{1}{24EI}(4Pl^3 + 5pl^4)$.

Flèche due à la charge P, $y_1 = \frac{Pl^3}{6EI}$. Flèche due à la charge pl, $y_2 = \frac{5pl^4}{24EI}$.

Pour $\frac{P}{2} = pl$, les valeurs y_1 et y_2 deviennent

$$y_1 = \frac{pl^4}{3EI}, \qquad y_2 = \frac{5pl^4}{24EI}, \quad \text{d'où} \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{5}{8},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

résultat conforme à l'une des lois reconnues par M^r Dupin.

2° — *Valeur du coefficient d'élasticité*. — La formule

$$y_1 = \frac{P l^3}{6 E I} \quad \text{donne} \quad E = \frac{P l^3}{6 I y_1},$$

expression qui permet de calculer le coefficient d'élasticité E avec plus d'exactitude qu'on ne pourrait le faire en se servant des formules déduites de la théorie de l'extension, parce que la grandeur de la flèche y_1 peut, en général, être évaluée d'une manière plus exacte que ne le comporte la mesure de l'allongement d'une tige soumise à l'extension.

3° — *Valeur de la résistance par mètre carré en un point donné d'une section transversale quelconque*. — Toutes les forces extérieures du système étant ici verticales, on a

$$N = 0, \quad R = \frac{v\mu}{I};$$

et, à cause de

$$\mu = \tfrac{1}{2} P (l - x), \text{ il vient} \quad R = \frac{P v (l-x)}{2 I},$$

formule qui donne la valeur de la résistance R d'une fibre située à la distance v de la fibre moyenne, et pour un point de cette fibre, situé à la distance x de la section transversale, qui passe par le milieu de la longueur du solide.

Le maximum de R correspond évidemment à la plus grande valeur v' de v et à la valeur $x = 0$; ce maximum est par conséquent

$$R = \frac{P v' l}{2 I};$$

et, au point de vue de la résistance des matériaux, cette valeur ne doit jamais dépasser les limites pratiques indiquées par l'expérience.

4° — *Allongement d'une fibre longitudinale*. — On a immédiatement, d'après la formule (20) du N° 147,

$$J = \frac{v}{EI} \int_0^l \frac{P(l-x)\,dx}{2} = \frac{P v l^2}{4 E I}.$$

Cette valeur exprime un allongement ou un raccourcissement suivant la position que la fibre considérée occupe par rapport à la fibre neutre. On voit en outre que J est proportionnel à P, ce qui est d'accord avec les faits observés ; et enfin, pour une même charge P, la valeur absolue de J est d'autant plus grande que v est lui-même plus grand ; par conséquent la fibre longitudinale la plus allongée est la fibre située sur la face convexe du solide ; la fibre la plus comprimée est la fibre située sur la partie concave.

Si v' et v'' expriment les distances du centre de gravité aux fibres extrêmes, et si J', J'', sont les valeurs correspondantes de J, on a

$$J' = \frac{P v' l^2}{4 E I}, \qquad J'' = \frac{P v'' l^2}{4 E I}, \qquad \text{d'où} \quad \frac{J'}{J''} = \frac{v'}{v''}.$$

Il résulte de là que pour $v' = v''$ on a $J' = J''$, et dans ce cas, l'allongement de la fibre extrême, du côté de la convexité, est égal au raccourcissement de la fibre extrême du côté de la concavité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

151. — **Vérifications numériques.** — Le cas d'un solide prismatique posé sur deux appuis de niveau, et soumis à une charge unique P appliquée au milieu de sa longueur, est celui qui se prête le mieux aux vérifications numériques des formules fondamentales de la flexion, parcequ'ici la condition d'encastrement peut être considérée comme réalisée complètement quand on ne considère que la moitié du solide, ce qui n'a jamais lieu d'une manière aussi parfaite lorsqu'il est maintenu par l'une de ses extrémités.

1° — *Rapport entre les variations de longueur des fibres extrêmes.* — En appliquant la formule précédente à une section à double T pour laquelle on avait $v' = 0^m,1014$, $v'' = 0^m,1416$, on trouve

$$\frac{J''}{J'} = \frac{0,1416}{0,1014} = 1,39 .$$

L'expérience directe a donné 1,376, résultat peu différent du précédent. La même coïncidence a lieu entre le nombre déduit de la formule et celui qui résulte de la mesure directe quand on retourne la pièce.

2° — *Vérification du coefficient d'élasticité.* — Si la section transversale du solide considéré est un rectangle de base b et de hauteur h, on a $I = \frac{1}{12} b c^3$, et la valeur précédente de E devient

$$E = \frac{2 P l^3}{y_1 b c^3} .$$

Une pièce de sapin pour laquelle on avait $b = 0^m,15$, $c = 0^m,20$, $l = 1^m,90$, $P = 100$ kil, a donné $y = 0,00138$, et si l'on met ces valeurs dans l'expression de E on trouve

$$E = 828\,390\,000 \text{ ou environ } 0,8 \times 10^9 ;$$

c'est à peu près le nombre que donnent les expériences de traction.

Pour les deux pièces de chêne indiquées au tableau placé au début de la flexion, les flèches mesurées étaient $y = 0,00117$, $y = 0,00185$; et l'application de la formule précédente a donné $E = 977\,070\,000$, $E = 617\,930\,000$;

ces valeurs concordent avec celles qu'on déduit de la formule de l'extension.

Une barre d'acier des usines de M^rs Petin et Gaudet, avait pour dimensions

$$b = 0^m,030, \quad c = 0^m,040, \quad l' = 1^m,50 ;$$

la charge était $P = 100$ kilog., et la flèche $y = 0,0001543$; la formule a donné

$$E = 22\,779\,000\,000 .$$

Les dimensions de la barre ayant été réduites, on a obtenu $E = 22\,250\,000\,000$.

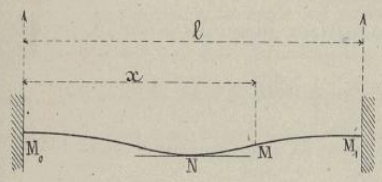
Cette même barre réduite une seconde fois à de plus faibles dimensions transversales et transformée en une tringle de $0^m,01$ a été soumise à des expériences de traction sous une charge de 2980 kilog., l'allongement par mètre était $i = \frac{0,000098}{2,328} = 0,0000421$, et l'on a trouvé, dans deux expériences successives, $E = 21\,816\,325\,530$, $E = 22\,414\,096\,916$, valeurs dont la moyenne est $22\,115\,211\,223$.

La concordance que l'on constate ici entre les résultats déduits séparément de la formule de l'extension et de l'une des formules de la flexion plane, est extrêmement remarquable ; et les différences que présentent, dans les deux cas, les valeurs de E relatives à une même matière, doivent être considérées comme négligeables, surtout quand on tient compte des erreurs inévitables résultant de la mesure directe des quantités qui interviennent dans les expériences.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il faut conclure de là que les hypothèses admises au début de l'étude de la flexion plane sont fondées, et que les conséquences que l'on en tire sont d'une grande importance, dans les applications de la mécanique aux constructions et aux machines.

152. — **Poutre horizontale encastrée à ses deux extrémités et chargée uniformément dans toute sa longueur.** — La charge totale pl détermine sur les appuis deux réactions symétriques égales à $\frac{1}{2}pl$ et dirigées de bas en haut. En outre, le fait de l'encastrement empêchant l'extrémité M_1 de la poutre de changer de direction, on doit considérer le support qui produit cet encastrement comme agissant à la manière d'un couple dont le moment μ_1 est constant quel que soit l'axe auquel il est rapporté.



Pour un point quelconque M on a

$$\mu = \mu_1 - \tfrac{1}{2}pl(l-x) + \tfrac{1}{2}p(l-x)^2 = \mu_1 - \tfrac{1}{2}plx + \tfrac{1}{2}px^2,$$

et par suite

$$f''(x) = \frac{\mu}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\mu_1 - \tfrac{1}{2}plx + \tfrac{1}{2}pl^2\right].$$

En multipliant par dx et intégrant ensuite, on obtient

$$f'(x) = \frac{1}{EI}\left(\mu_1 x - \tfrac{1}{4}plx^2 + \tfrac{1}{6}px^3\right) + C.$$

On doit remarquer que $f'(x)$ est nul en M_0 et M_1 par suite de la condition d'encastrement, et aussi en N par raison de symétrie. Par suite, en faisant $x = 0$, on a $f(x) = 0$, d'où $C = 0$, ce qui donne

$$f'(x) = \frac{1}{EI}\left(\mu_1 x - \tfrac{1}{4}plx^2 + \tfrac{1}{6}px^3\right). \qquad (1)$$

En posant ensuite $x = l$, ce qui donne encore $f'(x) = 0$, on trouve

$$\mu_1 = \tfrac{1}{12}pl^2$$

et par suite

$$f'(x) = \frac{p}{12EI}\left(l^2x - 3lx^2 + 2x^3\right).$$

On aurait obtenu aussi μ_1 en posant simultanément $f'(x) = 0$ et $x = \frac{1}{2}l$ dans l'équation (1). Quant aux autres déterminations, elles ne présenteraient aucune difficulté.

153. — **Aiguille de barrage soutenant une charge d'eau à l'amont et à l'aval.** — Un barrage à aiguilles se compose, en général, de madriers disposés verticalement les uns à côté des autres et dont les extrémités sont retenues contre des traverses horizontales. Ces madriers ou aiguilles étant tous dans des conditions identiques en égard aux pressions qu'ils reçoivent du liquide, chacun d'eux peut être considéré comme une poutre reposant sur les arêtes A et A' des traverses, et soumises :

1° — à la poussée f de l'eau d'amont,

2° — à la poussée f' de l'eau d'aval,

3° — aux réactions P et P' des appuis,

Les autres éléments de la question sont :

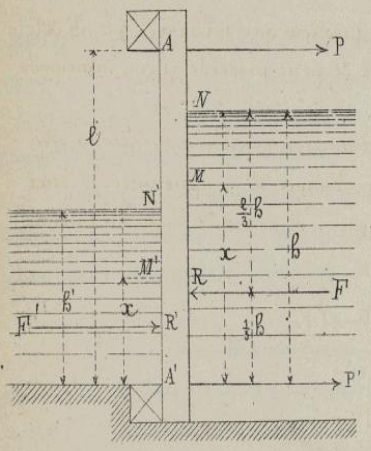
b. — largeur de l'aiguille dans le sens perpendiculaire à la figure,

l. — distance entre les points d'appui.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

b, ___ hauteur de l'eau d'amont au-dessus du seuil.

b', ___ hauteur de l'eau d'aval au-dessus de ce même seuil.



Poussée totale du liquide. ___ La pression d'amont, depuis le niveau supérieur N jusqu'à un point quelconque M, est, d'après le N° 140,

$$F = \frac{1}{2}\pi b(b-x)^2;$$

et depuis le niveau supérieur jusqu'au point A, cette poussée est

$$F = \frac{1}{2}\pi b b^2.$$

On a de même, pour la pression d'aval, dans toute la hauteur b', $F' = \frac{1}{2}\pi b b'^2$,

et l'on sait, en outre, que les points d'application des forces F et F' sont respectivement au tiers de la hauteur correspondante du liquide à partir de la base.

Réactions des appuis. ___ Le solide étant en équilibre sous l'action des forces horizontales P, P', F' et $-F$ qui le sollicitent, on a, comme première condition

$$P + P' + F' - F = 0.$$

Ensuite, les moments pris par rapport à un axe projeté en A' donnent, comme seconde condition,

$$Pl + \frac{1}{3}b'F' - \frac{1}{3}bF = 0.$$

Ces équations donnent, en remplaçant F et F' par leurs valeurs,

$$P = \frac{\pi b}{6l}(b^3 - b'^3) \qquad P' = \frac{\pi b}{6l}\left(3l(b^2 - b'^2) - b^3 + b'^3\right).$$

On aurait pu aussi, prendre les moments par rapport à l'axe projeté en A, ce qui aurait donné directement P', mais les calculs auraient été un peu plus longs; et l'on doit encore faire remarquer que la somme $P + P'$ étant connue, il suffirait de calculer P pour obtenir immédiatement par différence, la valeur de P'.

Expression générale du moment fléchissant pour un point intermédiaire entre les deux niveaux. ___ Si l'on considère toute la portion de l'aiguille située au-dessus de la section qui passe par le point M, les forces qui agissent dans l'étendue de cette partie du solide sont: 1° ___ La réaction P exercée au point A et que l'on regarde ici comme une force positive. 2° ___ La somme des pressions exercées par le liquide depuis le point M jusqu'au point N, somme dont le moment obtenu au N° 140, doit être considéré ici comme positif.

Il en résulte que la valeur μ du moment fléchissant au point M a pour expression

$$\mu = P(l-x) - \frac{1}{6}\pi b(b-x)^3.$$

Maximum du moment fléchissant. La dérivée de μ, égalée à zéro, donne

$$-P + \frac{1}{2}\pi b(b-x)^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = b \mp \sqrt{\frac{2P}{\pi b}},$$

La première valeur de x convient seule à la question; en portant cette valeur dans l'expres-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sion précédente de μ, puis en substituant à P la valeur trouvée précédemment, il vient

$$x' = b - \sqrt{\frac{2P}{\Pi b}}, \qquad \mu' = \frac{\Pi b}{6l}\left[(b^3 - b'^3)(l - x') - l(b - x')^3\right].$$

Ce maximum de μ n'est évidemment applicable à la question que si l'on a $x' > b'$. Si cette condition n'est pas remplie, il faut en conclure que la valeur de μ ne présente aucun maximum entre les points A et N'.

Expression générale du moment fléchissant pour un point situé au-dessous du niveau d'aval. — Les forces situées au-dessous d'un point quelconque M' compris entre les deux niveaux sont : la force P, la poussée d'aval et la poussée d'amont. Il en résulte immédiatement pour le moment par rapport à l'axe projeté en M',

$$\mu = P(l - x) - \frac{1}{6}\Pi b\left[(b - x)^3 - (b' - x)^3\right].$$

La dérivée de μ, égalée à zéro, donne

$$2P = \Pi b\left[(b - x)^2 - (b' - x)^2\right];$$

en désignant par x' la valeur de x qui satisfait à cette équation, il vient

$$x' = \frac{1}{2}(b + b') - \frac{P}{\Pi b(b - b')}, \quad \text{et} \quad \mu' = P(l - x') - \frac{1}{6}\Pi b\left[(b - x')^2 - (b' - x')^2\right].$$

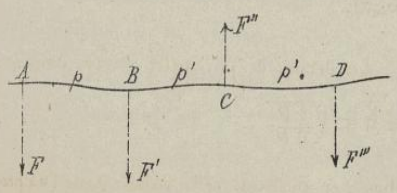
Ces formules ne sont évidemment applicables à la question que si l'on a $x' < b'$.

Les dimensions transversales d'un solide étant déterminées par la considération du maximum de μ ainsi qu'on le verra ultérieurement, on prendra, pour ce calcul, celle des valeurs de μ qui sera la plus grande.

Théorie générale de la flexion plane.

154. — Généralité de la question. — Les divers exemples de flexion plane qui ont été examinés précédemment ne sont que des cas très-simples du problème beaucoup plus général que l'on se propose d'étudier ici, en admettant : 1° — Que la section transversale n'est plus constante dans toute la longueur du solide ; 2° — Que le solide est soumis dans toute son étendue, à un nombre quelconque de forces agissant en des points différents. 3° — Que les points d'appui, en nombre quelconque, sont placés à des niveaux différents et qu'en même temps le solide peut être encastré soit par l'une de ses extrémités soit par ses deux extrémités à la fois.

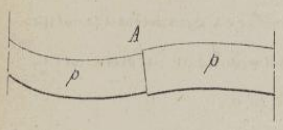
155. — Division en intervalles. — Pour simplifier l'étude de la question il convient de définir d'abord ce que l'on entend par un intervalle. On appelle ainsi toute la partie d'une poutre soumise exclusivement à une charge uniformément répartie. S'il s'agit, par exemple d'une poutre chargée uniformément de p kilog. par mètre de A en B ; de p' kilog. par mètre de B en C, et soumise en outre à des forces F, F', F'', F''', ayant leurs points d'application en A, B, C et D ; la longueu



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

AB est un intervalle, la longueur BC, un autre intervalle, et la longueur CD un troisième. Si l'on avait $F''=0$, il n'y aurait plus qu'un intervalle de B en D; mais si l'on avait $F'=0$, les deux intervalles AB et BC seraient considérés comme étant toujours distincts, la charge uniformément répartie restant différente à droite et à gauche au point B.

Le lieu A où se fait un changement de section doit aussi être considéré comme une limite commune à deux intervalles distincts, lors même qu'aucune force n'agirait au point A, et que la charge par mètre uniformément répartie serait la même à droite et à gauche de ce point; On conçoit en effet que les formules fondamentales de la flexion, ne peuvent être appliquées qu'à chacune des deux parties de la poutre considérées séparément, puisque ces formules supposent essentiellement que le moment d'inertie est constant dans la longueur considérée, ce qui implique généralement la condition que la section soit aussi constante. Enfin, on doit ajouter que tous les points d'appui sur lesquels repose le solide doivent être considérés comme points de séparation entre deux intervalles distincts, puisque les réactions exercées par ces appuis font partie des forces extérieures qui agissent sur le système.



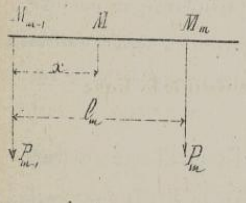
Ces définitions établies, le problème général de la flexion plane peut s'énoncer ainsi:
Étudier la flexion plane d'une poutre droite de n intervalles, soumise: 1° — à des forces déterminées aux $n+1$ points qui limitent ces intervalles; 2° — aux charges uniformément réparties sur la longueur de chacun des n intervalles.

156. — **Questions principales à résoudre.** — Le système considéré étant rapporté à deux axes Ox, Oy, situés dans le plan de flexion, on se propose de déterminer, pour les différents points de la ligne moyenne, les relations qui existent:

1° — Entre les efforts tranchants. 3° — Entre les inclinaisons.
2° — Entre les moments fléchissants. 4° — Entre les ordonnées.

Chaque question comprend deux parties distinctes suivant que la relation à déterminer doit s'appliquer aux points situés aux extrémités d'un même intervalle de rang quelconque ou bien aux points situés dans cet intervalle.

1° — *Relations entre les efforts tranchants.* — Si l'on considère un intervalle de rang m situé entre les points M_{m-1} et M_m, l'effort tranchant T_{m-1} au point M_{m-1} est, par définition, la somme algébrique de toutes les forces verticales extérieures qui agissent à la droite de ce point. Ces forces sont d'abord la charge $p_m x$ uniformément répartie de M_{m-1} en M, et ensuite l'effort tranchant T qui s'exerce en M et qui est la somme algébrique de toutes les forces verticales situées à droite de M; de sorte que la valeur de T_{m-1} est de la forme



$$T_{m-1} = p_m x + T.$$

Lorsque l'on a $x = l_m$, la valeur de T_{m-1} se compose alors de la charge $p_m l_m$ répartie sur l_m, puis de la force P_m qui agit en M_m, et enfin de l'effort tranchant T_m qui représente la somme de toutes les forces situées à droite de M_m, on a donc, dans ce cas

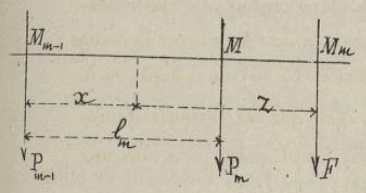
$$T_{m-1} = p_m l_m + P_m + T_m.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les deux relations précédentes peuvent aussi s'écrire sous la forme

$$T = T_{m-1} - p_m x, \qquad (1) \qquad T_m = T_{m-1} - P_m - p_m l_m. \qquad (1_1)$$

2° — *Relations entre les moments fléchissants.* — Le moment fléchissant μ_{m-1}, qui se calcule par rapport à l'axe projeté en M_{m-1}, se compose du moment $\frac{1}{2} p_m x^2$ dû à la charge $p_m x$ répartie sur la longueur x, et de la somme des moments de toutes les forces situées à droite du point M. Si F est l'une quelconque de ces forces et z sa distance au point M, le moment de cette force, par rapport à l'axe projeté en M_m, est évidemment $F(x+z)$, et l'on a



$$\mu_{m-1} = \tfrac{1}{2} p_m x^2 + \Sigma F (x+z);$$

ou encore

$$\mu_{m-1} = \tfrac{1}{2} p_m x^2 + x \Sigma F + \Sigma F z.$$

Mais, par définition, ΣF est l'effort tranchant T et $\Sigma F z$ est le moment fléchissant μ au point M, on a donc

$$\mu_{m-1} = \tfrac{1}{2} p_m x^2 + Tx + \mu, \qquad \text{d'où} \qquad \mu = \mu_{m-1} - Tx - \tfrac{1}{2} p_m x^2;$$

et en remplaçant T par sa valeur trouvée précédemment on obtient

$$\mu = \mu_{m-1} - T_{m-1} x + \tfrac{1}{2} p_m x^2, \qquad (2)$$

relation qui, pour $x = l_m$ devient

$$\mu_m = \mu_{m-1} - T_{m-1} l_m + \tfrac{1}{2} p_m l_m^2 \qquad (2_1)$$

3° — *Relations entre les inclinaïsons.* — La formule générale $f''(x) = \frac{\mu}{(EI)_m}$, établie précédemment, est évidemment applicable dans toute l'étendue de l'intervalle $M_{m-1} M_m$ puisque la quantité $(EI)_m$ est constante pour toute la longueur l_m. En remplaçant dans cette formule μ par la valeur (2), puis en multipliant par dx et en intégrant, il vient

$$f'(x) = \frac{1}{(EI)_m} \left(\mu_{m-1} x - \tfrac{1}{2} T_{m-1} x^2 + \tfrac{1}{6} p_m x^3 \right) + C;$$

Si l'on désigne par α_{m-1} et α les valeurs que prend successivement l'inclinaison $f'(x)$ aux points M_{m-1} et M, l'intégrale précédente, prise depuis $x = 0$ jusqu'à x, donne

$$\alpha = \alpha_{m-1} + \frac{1}{(EI)_m} \left(\mu_{m-1} x - \tfrac{1}{2} T_{m-1} x^2 + \tfrac{1}{6} p_m x^3 \right). \qquad (3)$$

En faisant dans cette formule $x = l_m$ et en désignant par α_m l'inclinaison de la ligne moyenne au point M_m il vient

$$\alpha_m = \alpha_{m-1} + \frac{1}{(EI)_m} \left(\mu_{m-1} l_m - \tfrac{1}{2} T_{m-1} l_m^2 + \tfrac{1}{6} p_m l_m^3 \right). \qquad (3_1)$$

4° — *Relations entre les ordonnées.* — En multipliant l'équation (3) par dx et intégrant ensuite, on obtient d'abord,

$$f(x) = \alpha_{m-1} x + \frac{1}{(EI)_m} \left(\tfrac{1}{2} \mu_{m-1} x^2 - \tfrac{1}{6} T_{m-1} x^3 + \tfrac{1}{24} p_m x^4 \right) + C;$$

Si y_{m-1} et y sont les valeurs de l'ordonnée aux points M_{m-1} et M, l'intégrale précédente, prise depuis $x = 0$ jusqu'à x, donne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$y = y_{m-1} + \alpha_{m-1} x + \frac{1}{(EI)_m}\left(\frac{1}{2}\mu_{m-1} x^2 - \frac{1}{6} T_{m-1} x^3 + \frac{1}{24} p_m x^4\right) \qquad (4)$$

Enfin, si l'on fait $x = l_m$ et si l'on désigne par y_m l'ordonnée du point M_m de la ligne moyenne, la formule (4) devient

$$y_m = y_{m-1} + \alpha_{m-1} l_m + \frac{1}{(EI)_m}\left(\frac{1}{2}\mu_{m-1} l_m^2 - \frac{1}{6} T_{m-1} l_m^3 + \frac{1}{24} p_m l_m^4\right) \qquad (4_1)$$

157. — **Emploi des formules précédentes.** — La poutre que l'on considère étant composée de n intervalles différents, les formules (1), (2), (3), (4) pourront être appliquées n fois en y faisant successivement $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, ..., $m = n$, et fourniront ainsi $4n$ équations distinctes mais non suffisantes pour la détermination, dans toute l'étendue du solide, des valeurs relatives aux points qui séparent deux intervalles successifs.

Les formules (1), (2), (3), (4) appliquées successivement à chacun des n intervalles de la poutre, serviront à étudier les variations des quantités T, μ, α et y dans l'étendue de chaque intervalle.

158. — **Tableau des formules générales de la flexion plane.** —

Pour faciliter les applications, nous rappelons ici les huit formules générales qui viennent d'être démontrées en nous y joignons en même temps d'autres formules qui se déduisent facilement des précédentes.

Formules applicables aux extrémités d'un même intervalle.

$$(A)\quad \begin{cases} (1)\quad T_m = T_{m-1} - P_m - p_m l_m \\ (2)\quad \mu_m = \mu_{m-1} - T_{m-1} l_m + \frac{1}{2} p_m l_m^2 \\ (3)\quad \alpha_m = \alpha_{m-1} + \frac{1}{(EI)_m}\left(\mu_{m-1} l_m - \frac{1}{2} T_{m-1} l_m^2 + \frac{1}{6} p_m l_m^3\right) \\ (4)\quad y_m = y_{m-1} + \alpha_{m-1} l_m + \frac{1}{(EI)_m}\left(\frac{1}{2}\mu_{m-1} l_m^2 - \frac{1}{6} T_{m-1} l_m^3 + \frac{1}{24} p_m l_m^4\right) \end{cases}$$

Formules applicables aux points intermédiaires d'un intervalle quelconque.

$$(B)\quad \begin{cases} (1)\quad T = T_{m-1} - p_m x. \\ (2)\quad \mu = \mu_{m-1} - T_{m-1} x + \frac{1}{2} p_m x^2. \\ (3)\quad \alpha = \alpha_{m-1} + \frac{1}{(EI)_m}\left(\mu_{m-1} x - \frac{1}{2} T_{m-1} x^2 + \frac{1}{6} p_m x^3\right). \\ (4)\quad y = y_{m-1} + \alpha_{m-1} x + \frac{1}{(EI)_m}\left(\frac{1}{2}\mu_{m-1} x^2 - \frac{1}{6} T_{m-1} x^3 + \frac{1}{24} p_m x^4\right) \end{cases}$$

Formules applicables aux points intermédiaires d'un intervalle en qui dispensent du calcul préalable des efforts tranchants aux extrémités de cet intervalle.

L'équation (2) de la série (A) peut se mettre sous la forme

$$T_{m-1} = \frac{1}{l_m}\left(\frac{1}{2} p_m l_m^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right);$$

et cette valeur, mise successivement dans les quatre équations de la série (B), donne immédiatement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$(G)\quad \begin{cases} (1)\quad T = \frac{1}{l_m}\left(\frac{1}{2}p_m l_m^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right) - p_m x \\ (2)\quad \mu = \mu_{m-1} - \frac{1}{l_m}\left(\frac{1}{2}p_m l_m^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right)x + \frac{1}{2}p_m x^2 \\ (3)\quad \alpha = \alpha_{m-1} + \frac{1}{(EI)_m}\cdot\left[\mu_{m-1}x - \frac{1}{2l_m}\left(\frac{1}{2}p_m l_m^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right)x^2 + \frac{1}{6}p_m x^3\right], \\ (4)\quad y = y_{m-1} + \alpha_{m-1}x + \frac{1}{(EI)_m}\left[\frac{1}{2}\mu_{m-1}x^2 - \frac{1}{6l_m}\left(\frac{1}{2}p_m l_m^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right)x^3 + \frac{1}{24}p_m x^4\right]. \end{cases}$$

159. — **Énumération des quantités engagées dans les formules relatives aux extrémités des intervalles.** — Puisque le solide que l'on étudie contient n intervalles distincts, on peut avoir à considérer, par rapport aux extrémités de ces intervalles, dans le cas le plus général,

n valeurs de l,	$n+1$ valeurs de T,
n valeurs de EI,	$n+1$ valeurs de μ,
n valeurs de p	$n+1$ valeurs de α
$n+1$ valeurs de P	$n+1$ valeurs de y,

c'est-à-dire, $8n+5$ quantités entre $4n$ équations.

Donc, pour que les $4n$ équations soient entièrement déterminées, il faut que l'on connaisse $4n+5$ des quantités que renferment ces équations ; ou, ce qui est plus général, il faut s'arranger pour qu'il y ait autant d'équations que le problème comporte d'inconnues, de sorte que si la question contient plus de $4n$ inconnues on devra avoir recours, s'il y a lieu, à des équations complémentaires, tirées de conditions particulières que pourrait renfermer l'énoncé.

Parmi les $8n+5$ quantités à considérer on doit remarquer que les valeurs de l sont généralement connues ; et comme ces valeurs sont les seules qui entrent avec des exposants dans les équations (1), (2), (3) et (4) du groupe A, il s'ensuit que ces équations sont toutes du premier degré par rapport aux autres inconnues qu'elles renferment.

160. — **Relations complémentaires relatives aux points extrêmes.** —

1° — Si l'on considère le point M_0 situé à l'extrémité de gauche d'un solide soumis à des efforts donnés, l'effort tranchant T_0, au point M_0, représente évidemment la somme de toutes les forces verticales situées à droite de ce point, et pour qu'il y ait équilibre en M_0, il faut que les deux forces P_0 et T_0 soient numériquement égales et de signes contraires ; donc, on doit avoir la relation

$$T_0 + P_0 = 0.$$

2° — Lorsque le solide est libre à son extrémité de droite, les forces qui agissent à la droite du dernier appui sont nulles ; donc les valeurs T_n et μ_n qui dépendent de ces forces sont également nulles, et l'on a $\quad T_n = 0 \qquad \mu_n = 0.$

En résumé on doit avoir : $T_n = 0$ dans tous les cas ; $\mu_n = 0$ quand il n'y a pas d'encastrement au point M_n ; $P_n = 0$ quand il n'y a ni point d'appui ni charge à cette extrémité.

161. — **Division du problème général en quatre cas distincts.** — Il s'agit maintenant d'examiner les cas principaux qui peuvent se présenter et d'établir, pour chacun d'eux, l'ensemble des conditions pour lesquelles le problème est déterminé et peut être résolu. Les quatre cas suivants sont ceux dont l'étude présente le plus d'intérêt.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1° ___ Poutre encastrée à l'extrémité de gauche, et soumise à des forces déterminées en des points donnés.

2° ___ Poutre encastrée à l'extrémité de gauche, reposant en outre sur des appuis, et soumise à des forces données.

3° ___ Poutre encastrée à ses deux extrémités, reposant en outre sur des appuis intermédiaires et soumise à des forces données.

4° ___ Poutre non encastrée reposant sur des appuis et soumise à des forces données

L'ensemble des données et des inconnues relatives à chacun de ces cas est renfermé dans le tableau suivant.

Quantités à considérer		1er Cas — Un encastrement Pas d'appuis intermédiaires		2e Cas — Un encastrement n' appuis intermédiaires		3e Cas — Deux encastrements n' appuis intermédiaires		4e Cas — Pas d'encastrement n'+2 appuis	
Désignation	Nombre total des données et des inconnues	Nombre de données	Nombre d'inconnues	Nombre de données	Nombre d'inconnues	Nombre de données	Nombre d'inconnues	Nombre de données	Nombre d'inconnues
l	n	n	0	n	0	n	0	n	0
EI	n	n	0	n	0	n	0	n	0
p	n	n	0	n	0	n	0	n	0
P	$n+1$	n	P_0	$n-n'$	$n'+1$	$n-n'-1$	$n'+2$	$n-n'-1$	$n'+2$
T	$n+1$	$T_n=0$	n	$T_n=0$	n	$T_n=0$	n	$T_n=0$	n
μ	$n+1$	$\mu_n=0$	n	$\mu_n=0$	n	0	$n+1$	$\mu_0=0$ $\mu_n=0$	$n-1$
α	$n+1$	α_0	n	α_0	n	α_0 et α_n	$n-1$	0	$n+1$
y	$n+1$	y_0	n	$n'+1$	$n-n'$	$n'+2$	$n-n'-1$	$n'+2$	$n-n'-1$
	$8n+5$	$4n+4$	$4n+1$	$4n+4$	$4n+1$	$4n+4$	$4n+1$	$4n+4$	$4n+1$

162. ___ 1er Cas. ___ **Poutre encastrée à l'extrémité de gauche et soumise à des forces déterminées en des points donnés.** ___ L'inspection du tableau précédent montre que le nombre des inconnues est $4n+1$. Les quatre équations du groupe (A) fournissent $4n$ équations entre ces inconnues, et en y joignant la relation $P_0+T_0=0$, on a le nombre d'équations nécessaires à la résolution du problème. Voici la marche très-simple à suivre pour dégager successivement ces inconnues.

En posant $n=m$ dans la formule

$$T_m = T_{m-1} - P_m - p_m l_m ,$$

on en déduit T_{m-1}. En y faisant ensuite $m=n-1$, on en déduit T_{n-2}, et ainsi de suite jusqu'à T_0 inclusivement. La relation $P_0+T_0=0$ donne alors la valeur de P_0.

Comme vérification on doit avoir, d'après la définition même de l'effort tranchant

$$T_0 = (P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n)+(p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \cdots + p_n l_n),$$

expression dans laquelle $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ doivent entrer avec leurs signes respectifs.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour $m = n$, la formule

$$\mu_m = \mu_{m-1} - T_{m-1} l_m + \frac{1}{2} p_m l_m^2,$$

donne μ_{n-1}. Ensuite, pour $m = n-1$, la même formule donne μ_{n-2} et ainsi de suite jusqu'à μ_0.

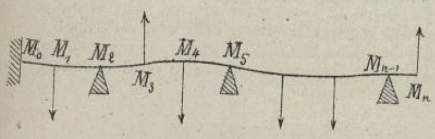
La formule (3) du groupe (A) donne ensuite les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, en y faisant successivement $m = 1$, $m = 2, \ldots, m = n$.

Enfin la formule (4) du même groupe donne de la même manière les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Tous ces résultats une fois obtenus on pourra se servir des formules du groupe (B) pour étudier les valeurs des quantités T, μ, α et y, successivement dans toute l'étendue de chacun des n intervalles qui composent la longueur du solide donné.

163. — 2e Cas. — **Poutre encastrée à l'extrémité de gauche reposant en outre sur des appuis et soumise à des forces données.**

S'il y a, comme précédemment, n intervalles distincts, et si l'on suppose en outre que le solide repose sur n' appuis différents, il est évident que parmi les $n+1$ forces P du système, les n' réactions des appuis intermédiaires sont inconnues ainsi que celle du point d'appui à l'origine. Le tableau du N° 160 montre que l'on a toujours $T_n = 0$, $\mu_n = 0$, et que le nombre des inconnues est encore $4n+1$; de sorte qu'en joignant la relation $T_0 + P_0 = 0$ aux $4n$ équations que fournit le groupe (A) on a les $4n+1$ équations nécessaires à la résolution du problème ; mais la méthode à suivre pour dégager les valeurs des inconnues est un peu plus compliquée que dans le premier cas.



Des n équations comprises dans la formule générale

$$T_m = T_{m-1} - p_m - p_m l_m,$$

et de la relation $T_0 + P_0 = 0$, on tire n valeurs de T et une valeur de P en fonction des n inconnues restantes P.

On porte ces valeurs de T, ainsi que la valeur de l'une des inconnues P, dans les n équations comprises dans la formule générale $\mu_m = \mu_{m-1} - T_{m-1} l_m + \frac{1}{2} p_m l_m^2$,

et l'on en déduit les n valeurs de μ lesquelles sont toujours exprimées en fonction des valeurs inconnues de P. Ces valeurs de μ, mises dans les n équations que renferme la formule générale $\alpha_m = \alpha_{m-1} + \frac{1}{(EI)_m}\left(\mu_{m-1} l_m - \frac{1}{2} T_{m-1} l_m^2 + \frac{1}{6} p_m l_m^3\right)$, permettent de calculer, encore en fonction des inconnues P, les n valeurs inconnues de α, valeurs que l'on porte ensuite dans les équations que contient la formule générale

$$y_m = y_{m-1} + \alpha_{m-1} l_m + \frac{1}{(EI)_m}\left(\frac{1}{2}\mu_{m-1} l_m^2 - \frac{1}{6} T_{m-1} l_m^3 + \frac{1}{24} p_m l_m^4\right).$$

Celles-ci, toujours au nombre de n, renferment n' inconnues P, et $n - n'$ inconnues y, c'est-à-dire en tout n inconnues entrant chacune au premier degré dans les n équations. On peut alors en déduire les $n - n'$ valeurs inconnues de y et les n' valeurs inconnues de P. Si l'on porte ensuite ces dernières dans les expressions des valeurs de T, de μ et de α, résultant des éliminations qui viennent d'être indiquées, on obtient facilement les valeurs $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}$; puis $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{n-1}$; et enfin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

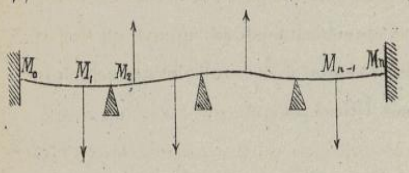
Les $4n+1$ inconnues, relatives aux extrémités des intervalles étant ainsi déterminées, on pourra appliquer successivement les formules (B), à l'étude des valeurs de T, μ, α et y dans toute l'étendue de chacun des n intervalles qui composent la longueur du solide.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

164. — 3e Cas. — Poutre encastrée à ses deux extrémités reposant en outre sur des appuis intermédiaires et soumise à des forces données.

En admettant toujours qu'il y ait n intervalles distincts et que la poutre repose sur des appuis intermédiaires, on voit facilement que les n' réactions des appuis sont inconnues ainsi que les réactions P_0 et P_n aux points extrêmes M_0, M_n; donc, le nombre des forces connues P se réduit à

$$n+1-(n'+2) \text{ ou } n-n'-1.$$



Il est nécessaire de présenter quelques considérations sur les valeurs du moment fléchissant et de l'effort tranchant au point M_n. En ce qui concerne le moment fléchissant μ_n, l'hypothèse d'un encastrement en M_n revient à admettre que quelle que soit l'action des forces extérieures, la section en M_n ne peut éprouver aucune rotation autour d'un axe quelconque situé dans son plan; et par suite, le mode de liaison de la pièce avec son support est tel qu'il doit se développer, de la part des appuis, un moment faisant équilibre à la somme des moments qui tendraient à faire tourner cette section. C'est ce moment, variable suivant les conditions de la charge et de la flexion, et encore inconnu, que nous désignons par μ_n.

Quant à l'effort tranchant T_n au point M_n, il est évidemment nul, puisque la poutre ne se prolonge pas au-delà du point M_n; on a donc $T_n = 0$.

Enfin, les inclinaisons α_0, α_n, et les ordonnées y_0, y_n, aux points M_0 et M_n sont connues, ainsi que les ordonnées des appuis intermédiaires et l'on voit d'après le tableau des données et des inconnues que le problème renferme encore $4n+1$ inconnues; mais la relation $T_0 + P_0 = Q$, jointe aux équations (A), donne aussi $4n+1$ équations entre ces inconnues; donc le problème est déterminé, et l'on doit le résoudre en employant les procédés d'élimination appropriés.

D'abord, l'équation $T_0 + P_0 = 0$, jointe aux n équations (1) du groupe (A), donne $n+1$ équations, contenant n valeurs inconnues de T, et $n'+2$ valeurs inconnues de P. On peut donc en déduire les n valeurs de T et une valeur de P en fonction des $n'+1$ autres valeurs inconnues de P.

Ces n valeurs de T, mises dans les n équations (2) du groupe (A), donnent n valeurs de μ en fonction des $n'+1$ valeurs de P, et d'une valeur restante de μ.

De même, si l'on porte les n expressions de μ, dans les n équations (3) du groupe (A), on obtient un groupe de n équations contenant $n'+1$ valeurs inconnues de P, une valeur inconnue de μ et $n-n'-1$ valeurs inconnues de α.

Enfin, si l'on prend $n-1$ de ces équations pour en déduire les expressions des $n-1$ valeurs de α et si l'on substitue ensuite dans les n équations (4) du groupe (A), on forme un nouveau groupe de n équations qui contient $n'+1$ valeurs inconnues de P, une valeur inconnue de μ et $n-n'-1$ valeurs inconnues de y, c'est-à-dire $n+1$ inconnues.

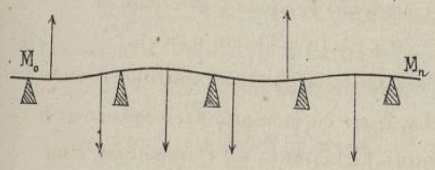
Il suffit alors de joindre à ces n équations l'équation restante du groupe précédent pour avoir un ensemble de $n+1$ équations entre $n+1$ inconnues, ce qui permet de calculer les valeurs de ces inconnues; et en substituant ces valeurs ainsi que celles qu'on en déduit successivement dans les groupes précédents, on obtient finalement les $4n+1$ inconnues relatives aux extrémités des intervalles

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

successifs qui composent le solide.

On pourra ensuite étudier les variations des quantités T, μ, x et y, dans toute l'étendue de chaque intervalle par l'application des formules du groupe (B)

165. — *4 Cas.* — **Poutre non encastrée reposant sur des appuis et soumise à des forces données.** — Ce cas diffère du précédent en ce que les encastrements des extrémités sont remplacés par des appuis ; mais comme on suppose toujours qu'il y a n' appuis intermédiaires, il en résulte que le nombre des réactions inconnues P est $n'+2$.



Le solide n'étant soumis à aucune force extérieure à la droite du point M_n, et cette extrémité M_n n'étant pas encastrée, on a évidemment $T_n = 0$ et $\mu_n = 0$. Il est facile de voir que l'on a aussi $\mu_0 = 0$; on sait, en effet, que lorsque le solide fléchi est en équilibre, il faut nécessairement que la somme des moments de toutes les forces, pris par rapport à un axe quelconque soit nulle. Il en est ainsi pour le point M_0, et toutes les forces du système étant situées à la droite de ce point, il s'ensuit que le moment total, qui doit être nul, n'est autre que le moment fléchissant ; on a donc $\mu_0 = 0$. Il faut d'ailleurs remarquer qu'au point M_0 on a encore $T_0 + P_0 = 0$.

Cela posé, le tableau des quantités qui interviennent dans la question donne toujours $4n+1$ inconnues ; et les équations (A), jointes à la relation $P_0 + T_0 = 0$, donnant aussi $4n+1$ équations, le problème est entièrement déterminé.

La méthode à suivre pour résoudre ces équations est analogue à celle qui a été exposée dans le cas précédent. En commençant d'abord par les équations (1) du groupe (A), équations auxquelles on joint la relation $P_0 + T_0 = 0$, on élimine successivement, n valeurs inconnues de T et une valeur de P, puis $n-1$ valeurs de μ et enfin les valeurs de x moins une

On obtient ainsi un système de n équations contenant $n-n'-1$ valeurs inconnues de y, puis n' valeurs inconnues de P et une valeur inconnue de x, c'est-à-dire n inconnues dont on détermine facilement les valeurs. En remontant ensuite au groupe d'équations qui précède le dernier, on achève de calculer toutes les autres inconnues.

Ces séries de valeurs étant obtenues, on peut étudier les variations de T, μ, x et y dans l'étendue de chacun des intervalles dont l'ensemble constitue le solide donné.

Les méthodes d'élimination qui viennent d'être indiquées pour les trois derniers cas de la poutre à n intervalles ne constituent que des moyens spéciaux d'abréger les calculs, et il est évident que les méthodes générales d'élimination données en algèbre, suffisent toujours pour résoudre un système déterminé d'équations du premier degré, quelles que soient les formes de ces équations.

Formules spécialement applicables à une poutre non encastrée, reposant sur des appuis et ne supportant pas de charges isolées.

166. — **Relation entre les moments fléchissants aux extrémités de deux travées successives.** — Les calculs résultant de l'application des formules (A) aux trois derniers cas de la poutre à n intervalles sont généralement compliqués ; mais lorsqu'il s'agit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'une poutre reposant exclusivement sur un certain nombre de points d'appui, et que l'on connaît les ordonnées en ces points, ce qui est le cas le plus fréquent de la pratique des constructions, on peut établir une formule générale, d'un emploi plus facile pour les éliminations et qui ne contienne, comme inconnues, que les moments fléchissants aux extrémités des intervalles.

Les trois dernières formules du groupe (A) étant écrites sous la forme

$$\mu_m - \mu_{m-1} = -T_{m-1} l_m + \frac{1}{2} p_m l_m^2$$

$$\alpha_m - \alpha_{m-1} = \frac{1}{(EI)_m}\left(\mu_{m-1} l_m - \frac{1}{2} T_{m-1} l_m^2 + \frac{1}{6} p_m l_m^3\right)$$

$$y_m - y_{m-1} = \alpha_{m-1} l_m + \frac{1}{(EI)_m}\left(\frac{1}{2}\mu_{m-1} l_m^2 - \frac{1}{6} T_{m-1} l_m^3 + \frac{1}{24} p_m l_m^4\right).$$

la valeur T_{m-1}, tirée de la première équation et mise dans les deux autres équations, donne

$$(M) \qquad 24\,(\alpha_m - \alpha_{m-1}) = \frac{1}{(EI)_m}\left(12\,\mu_{m-1} l_m + 12\,\mu_m l_m - 2 p_m l_m^3\right).$$

$$(N) \qquad 24\,\frac{(y_m - y_{m-1})}{l_m} = 24\,\alpha_{m-1} + \frac{1}{(EI)_m}\left(4\,\mu_{m-1} l_m + 8\,\mu_m l_m - p_m l_m^3\right).$$

Ces équations étant applicables à un intervalle de rang quelconque, subsistent quand on y remplace m par $m+1$, et dans ce cas la dernière équation devient

$$(N_1) \qquad 24\,\frac{(y_{m+1} - y_m)}{l_{m+1}} = 24\,\alpha_m + \frac{1}{(EI)_{m+1}}\left(4\,\mu_m l_{m+1} + 8\,\mu_{m+1} l_{m+1} - p_{m+1} l_{m+1}^3\right).$$

En retranchant (N) de (N_1) et en ajoutant (M) au résultat, on obtient pour la relation demandée,

$$(P) \qquad 24\left(\frac{y_{m+1} - y_m}{l_{m+1}} - \frac{y_m - y_{m-1}}{l_m}\right) = \left[\begin{array}{l} \dfrac{l_{m+1}}{(EI)_{m+1}}\left(8\mu_m + 4\mu_{m+1} - p_{m+1} l_{m+1}^2\right) \\ + \dfrac{l_m}{(EI)_m}\left(4\mu_{m-1} + 8\mu_m - p_m l_m^2\right) \end{array}\right]$$

Cette formule, contenant les moments fléchissants relatifs aux extrémités de deux travées successives, ne peut donner que $n-1$ équations distinctes entre les $n+1$ moments fléchissants quand on y fait successivement $m=1$, $m=2$, $m=3$, ... $m=n$; mais comme on connaît les moments fléchissants extrêmes dont les valeurs sont $\mu_0 = 0$ et $\mu_n = 0$, il s'ensuit qu'il ne reste, entre les $n-1$ équations, que $n-1$ valeurs inconnues, c'est-à-dire, $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{n-1}$; par conséquent ces quantités peuvent être toutes calculées quand on connaît toutes les valeurs de y, ce qui exige que la poutre ne contienne pas de charges isolées».

167.— Formule de Clapeyron. — Cette formule, qui n'est qu'un cas particulier de la précédente, résulte des hypothèses suivantes : Si la section transversale est la même dans chaque travée et si la poutre est homogène dans toute son étendue, ce qui est le cas le plus ordinaire, on a

$$(EI)_{m+1} = (EI)_m = (EI) = \text{constante}.$$

Si en outre on a

$$\frac{y_{m+1} - y_m}{l_{m+1}} - \frac{y_m - y_{m-1}}{l_m} = 0,$$

ce qui comprend le cas où tous les appuis sont situés sur une même ligne horizontale ; la relation précédente se simplifie et peut être mise sous la forme suivante, connue sous le nom de formule de Clapeyron,

$$p_m l_m^3 + p_{m+1} l_{m+1}^3 = 4\mu_{m-1} l_m + 8\mu_m (l_m + l_{m+1}) + 4\mu_{m+1} l_{m+1}.$$

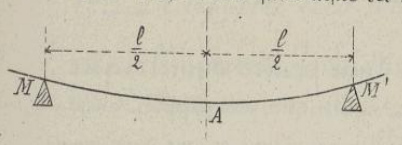
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

168. — Cas particulier de la formule de Clapeyron. — Si aux hypothèses précédentes on ajoute la condition que toutes les travées soient égales entre elles et que la charge par mètre uniformément répartie, soit la même dans chacune d'elles, on a $l_{m+1} = l_m \dots = l$; $p_{m+1} = p_m \dots = p$, et la dernière formule devient en supprimant l'indice des quantités l, et en divisant ensuite par $2l$,

$$pl^2 = 2\mu_{m-1} + 8\mu_m + 2\mu_{m+1}.$$

169. — Formule de Bertot. — Cette formule, publiée antérieurement à celle de Clapeyron et applicable dans les mêmes circonstances, peut être établie de la manière suivante.

Soit MM' l'une quelconque des travées de la poutre ; p étant la charge uniforme par mètre ; si cette travée était entièrement libre à ses extrémités et si les appuis M et M' étaient situés à un même niveau, la réaction de l'appui M' serait égale à $\frac{1}{2}pl$; le moment par rapport à l'axe projeté au milieu A de la longueur



l, se composerait du moment dû à la réaction $\frac{1}{2}pl$ exercée en M, et du moment dû à la charge uniformément répartie sur AM.

Ces deux moments étant de signes contraires, le moment total serait

$$\mathcal{M} = \frac{1}{4}pl^2 - \frac{1}{8}pl^2 = \frac{1}{8}pl^2 ; \quad \text{ou} \quad pl^3 = 8l\mathcal{M}.$$

Si l'on admet que toutes les travées soient séparément libres au-delà de leurs extrémités, la formule précédente devient, pour deux travées successives, de rangs m et $m+1$, d'où

$$p_m l_m^3 = 8l_m \mathcal{M}_m , \qquad p_{m+1} l_{m+1}^3 = 8l_{m+1}\mathcal{M}_{m+1}.$$

Ces valeurs mises dans la formule de Clapeyron, donnent celle de Bertot, c'est-à-dire

$$2l_m\mathcal{M}_m + 2l_{m+1}\mathcal{M}_{m+1} = \mu_{m-1}l_m + 2\mu_m(l_m + l_{m+1}) + \mu_{m+1}l_{m+1} ;$$

et l'on a ainsi une nouvelle relation, entre les moments fléchissants aux extrémités de deux travées successives, et les moments auxquels seraient soumises les sections au milieu de ces travées si, étant indépendantes les unes des autres, elles supportaient les mêmes charges.

Si l'on avait à la fois $l_{m+1} = l_m = \dots = l$; $p_{m+1} = p_m = \dots = p$, d'où résulterait

$$\mathcal{M}_{m+1} = \mathcal{M}_m = \dots = \mathcal{M},$$

la formule précédente se réduirait à $4\mathcal{M} = \mu_{m+1} + 4\mu_m + \mu_{m-1}$.

170. — Ordre à suivre dans l'emploi des formules précédentes. — Il s'agit ici d'une poutre non encastrée dans laquelle il n'existe aucune charge isolée entre deux appuis consécutifs quelconque, et par conséquent les valeurs de y se rapportent exclusivement aux points d'appuis et sont toutes connues

1° — *Moments fléchissants.* — On emploie la formule générale (P) du N° 166 si les appuis ne sont pas tous sur une même droite, et la formule générale de Clapeyron si les appuis sont tous sur une même direction.

2° — *Efforts tranchants.* — Les moments fléchissants étant calculés comme il vient d'être dit, on obtient les efforts tranchants par la formule (2) du groupe (A), mise sous la forme

$$T_{m-1} = \frac{1}{l_m}(\mu_{m-1} - \mu_m) + \frac{1}{2}p_m l_m ;$$

3° — *Réactions des appuis.* — On résout immédiatement la question à l'aide de la formule (1) du groupe (A), formule qui donne

$$P_m = T_{m-1} - T_m - p_m l_m .$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cette formule ne peut donner la valeur de P_0, mais on y supplée par la relation $P_0 + T_0 = 0$, qui donne P_0 quand on connaît T_0.

4.° — *Inclinaisons aux points d'appuis.* — En prenant les formules (3) et (4) du groupe (A), c'est-à-dire

$$\alpha_m = \alpha_{m-1} + \frac{1}{(EI)_m}\left(\mu_{m-1} l_m - \frac{1}{2} T_{m-1} l_m^2 + \frac{1}{6} p_m l_m^3\right),$$

$$y_m = y_{m-1} + \alpha_{m-1} l_m + \frac{1}{(EI)_m}\left(\frac{1}{2}\mu_{m-1} l_m^2 - \frac{1}{6} T_{m-1} l_m^3 + \frac{1}{24} p_m l_m^4\right);$$

la dernière de ces formules donne d'abord α_0 quand on y fait $m = 1$; l'autre formule donne ensuite, en successivement, α_1, α_2, ..., α_n.

171. — **Simplification des calculs dans le cas d'une poutre symétrique, chargée symétriquement.** — Lorsqu'une poutre est symétrique par rapport au plan mené par le milieu de sa longueur, perpendiculairement à la ligne moyenne et que deux points symétriques quelconques sont dans des conditions identiques au double point de vue de la nature des matériaux qui forment la poutre et de la répartition des forces extérieures, les calculs relatifs à cette poutre peuvent être simplifiés à l'aide des propositions suivantes :

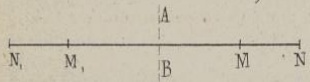
1.° — *Les réactions des appuis en deux points symétriques sont égales et de même signe.*

2.° — *Les inclinaisons de la ligne moyenne en deux points symétriques sont égales et de signes contraires.*

3.° — *Les ordonnées de deux points symétriques, comptées à partir d'une même droite parallèle à la position primitive de la ligne moyenne, sont égales et de même signe.*

Ces trois premières propositions sont des conséquences immédiates des conditions de symétrie absolue de tous les éléments qui constituent la poutre chargée.

4.° — *Les efforts tranchants en deux points symétriques sont égaux et de signes contraires.* — Soit T l'effort tranchant à droite du point M, et T_1 l'effort tranchant à droite du point M_1, supposé symétrique de M par rapport au plan projeté en AB. Puisqu'il y a symétrie dans le mode de répartition des charges, la somme T des forces normales comprises entre M et N est égale à la somme des forces comprises entre M_1 et N_1; mais dans l'état d'équilibre cette dernière somme est égale à T_1, et de signe contraire; donc aussi T est égal à T_1 et de signe contraire, et l'on a $T = -T$ ce qu'il fallait prouver.



Lorsqu'il s'agit de deux points M et M_1 en lesquels agissent respectivement des forces P et P_1, la symétrie absolue dans la répartition des charges et par suite l'égalité entre les valeurs numériques n'existent plus entre T et T_1, mais bien entre T et $T_1 + P_1$; de sorte qu'en posant $T_1 + P_1 = T_1'$ on a $T_1' = -T$ comme précédemment.

5.° — *Les moments fléchissants en deux points symétriques sont égaux et de même signe.* — Soient μ et μ_1 les moments fléchissants relatifs aux axes projetés respectivement en M et M_1. Le moment μ des forces situées entre M et N est évidemment égal et de signe contraire au moment, pris par rapport à l'axe projeté en M_1, des forces situées entre M_1 et N_1.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Mais ce dernier est, dans l'état d'équilibre, égal et de signe contraire à μ_1 ; donc les valeurs de μ et μ_1, égales chacune et de signes contraires à une même quantité, sont égales entre elles et de même signe, ce qu'on voulait prouver.

Application des formules précédentes aux poutres à travées égales, également chargées, avec appuis à un même niveau.

1°. — *Calcul des valeurs relatives aux appuis.*

172. — **Moments fléchissants.** — La formule immédiatement applicable à la question est celle de Clapeyron, c'est-à-dire

$$pl^2 = 2\mu_{m-1} + 8\mu_m + 2\mu_{m+1}. \qquad (1)$$

Poutre à deux travées égales. — En faisant $m = 1$ dans la formule (1) et en remarquant que les deux moments extrêmes sont nuls, on obtient

$$pl^2 = 8\mu_1, \qquad \text{d'où} \qquad \mu_1 = \frac{1}{8} pl^2.$$

Poutre à trois travées égales. — En posant successivement $m = 1$ et $m = 2$ dans la formule (1), il vient, à cause de $\mu_0 = 0$ et $\mu_4 = 0$,

$$pl^2 = 8\mu_1 + 2\mu_2, \qquad pl^2 = 2\mu_1 + 8\mu_2,$$

ce qui donne immédiatement $\mu_1 = \frac{1}{10} pl^2$, $\mu_2 = \frac{1}{10} pl^2$.

On pourrait d'ailleurs, en vertu de l'égalité des moments en deux points symétriques, ne calculer qu'une seule de ces valeurs. Les quatre moments fléchissants sont donc,

$$\mu_0 = 0 \qquad \mu_1 = \frac{1}{10} pl^2 \qquad \mu_2 = \frac{1}{10} pl^2 \qquad \mu_3 = 0 ;$$

Poutre à quatre travées égales. — Si l'on fait successivement $m = 1$, $m = 2$ et $m = 3$ dans la formule (1), il vient

$$pl^2 = 8\mu_1 + 2\mu_2, \quad pl^2 = 2\mu_1 + 8\mu_2 + 2\mu_3, \quad pl^2 = 2\mu_2 + 8\mu_3 .$$

Ces trois équations suffisent pour déterminer les trois inconnues, mais en remarquant que l'on a, par raison de symétrie, $\mu_1 = \mu_3$, on obtient plus facilement

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = \frac{3}{28} pl^2, \quad \mu_2 = \frac{2}{28} pl^2, \quad \mu_3 = \frac{3}{28} pl^2, \quad \mu_4 = 0.$$

Vérifications. — En faisant successivement $m = 1$, $m = 2$, ... $m = n$ dans la formule

$$pl^2 = 2\mu_{m-1} + 8\mu_m + 2\mu_{m+1},$$

puis en additionnant les résultats, et en tenant compte de la relation $\mu_1 = \mu_{n-1}$, il vient, dans le cas de travées égales et également chargées

$$\Sigma\mu = \frac{1}{12}(n-1)\,pl^2 + \frac{1}{3}\mu_1,$$

formule à l'aide de laquelle on vérifie facilement les résultats précédents.

173. — **Efforts tranchants.** — Les valeurs précédentes, mises dans la formule

$$T_{m-1} = \frac{1}{l}(\mu_{m-1} - \mu_m) + \frac{1}{2} pl,$$

donnent très-facilement les résultats suivants, en remarquant que l'effort tranchant à l'extrémité de droite est nul, et que la formule n'est d'ailleurs applicable que pour les efforts tranchants situés à gauche du dernier

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Deux travées. — $T_0 = \frac{3}{8} pl$, $T_1 = \frac{5}{8} pl$, $T_2 = 0$.

Trois travées. — $T_0 = \frac{4}{10} pl$, $T_1 = \frac{5}{10} pl$, $T_2 = \frac{6}{10} pl$, $T_3 = 0$.

Quatre travées. — $T_0 = \frac{11}{28} pl$, $T_1 = \frac{15}{28} pl$, $T_2 = \frac{13}{28} pl$, $T_3 = \frac{17}{28} pl$, $T_4 = 0$.

Vérifications. — En faisant successivement $m = 1$, $m = 2$, ..., $m = n$ dans la formule

$$T_{m-1} = \frac{1}{l}(\mu_{m-1} - \mu_m) + \frac{1}{2} pl,$$

et en additionnant ensuite les résultats, on trouve, dans le cas de travées égales et également chargées,

$$\Sigma T = \frac{1}{2} npl,$$

expression qui peut servir à vérifier promptement les valeurs de T.

174. — **Réactions aux points d'appui.** — La relation comme $P_0 + T_0 = 0$ donne d'abord P_0 en fonction de T_0 ; ensuite la formule

$$P_m = T_{m-1} - T_m - pl \qquad (1)$$

donne successivement les valeurs $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ en fonction de $T_0, T_1, T_2, \ldots T_n$.

Les calculs peuvent d'ailleurs être abrégés en tenant compte de la relation $P_m = P_{n-m}$, et l'on trouve

Deux travées. — $P_0 = -\frac{3}{8} pl$, $P_1 = -\frac{10}{8} pl$, $P_2 = -\frac{3}{8} pl$.

Trois travées. — $P_0 = -\frac{4}{10} pl$, $P_1 = -\frac{11}{10} pl$, $P_2 = -\frac{11}{10} pl$, $P_3 = -\frac{4}{10} pl$.

Quatre travées. — $P_0 = -\frac{11}{28} pl$, $P_1 = -\frac{32}{28} pl$, $P_2 = -\frac{26}{28} pl$, $P_3 = -\frac{32}{28} pl$, $P_4 = -\frac{11}{28} pl$.

Vérifications. — Il est évident que dans l'état d'équilibre la somme des réactions des appuis doit être égale et de signe contraire à la charge totale de la poutre, ce qui donne immédiatement dans le cas de n travées égales et également chargées

$$\Sigma P = -npl.$$

175. — **Inclinaisons.** — Si dans la formule (4) du groupe (A) on pose

$$l_m = l, \quad p_m = p, \quad (EI)_m = EI, \quad y_m = 0, \quad y_{m-1} = 0 \text{ et } m = 1,$$

il vient

$$\alpha_0 = \frac{l^2}{24EI}(4T_0 - pl)$$

expression qui fait connaître α_0. Ensuite si l'on pose de même $l_m = l$, $p_m = p$, $(EI)_m = EI$ dans la formule (3) de (A), on obtient

$$\alpha_m = \alpha_{m-1} + \frac{l}{6EI}(6\mu_{m-1} - 3T_{m-1} l + pl^2),$$

formule dans laquelle il suffit de faire successivement $m = 1$, $m = 2$, ..., $m = n$, pour en déduire $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Les résultats ainsi obtenus sont les suivants :

Deux travées. — $\alpha_0 = \frac{pl^3}{48EI}$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\frac{pl^3}{48EI}$

Trois travées. — $\alpha_0 = \frac{3pl^3}{120EI}$, $\alpha_1 = -\frac{pl^3}{120EI}$, $\alpha_2 = \frac{pl^3}{120EI}$, $\alpha_3 = -\frac{3pl^3}{120EI}$.

Quatre travées. — $\alpha_0 = \frac{4pl^3}{168EI}$, $\alpha_1 = -\frac{pl^3}{168EI}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \frac{pl^3}{168EI}$, $\alpha_4 = -\frac{4pl^3}{168EI}$.

On abrège d'ailleurs les calculs en faisant usage de la relation $\alpha_m = \alpha_{n-m}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

176. — Tableau des valeurs relatives aux appuis dans une poutre non encastrée, à travées égales, également chargées avec appuis à un même niveau. — Pour compléter l'utilité du tableau suivant, on y a joint, à titre de renseignement, la poutre à une seule travée, reposant sur deux appuis situés à un même niveau.

Nombre de travées	Moments fléchissants	Efforts tranchants	Réactions des appuis	Inclinaisons de la ligne moyenne
Une travée	$\mu_0 = 0$ $\mu_1 = 0$	$T_0 = \frac{1}{2} pl$ $T_1 = 0$	$P_0 = -\frac{1}{2} pl$ $P_1 = -\frac{1}{2} pl$	$\alpha_0 = \frac{pl^3}{24EI}$ $\alpha_1 = -\frac{pl^3}{24EI}$
Vérifications	$\Sigma\mu = 0$	$\Sigma T = \frac{1}{2} pl$	$\Sigma P = -pl$	$\Sigma\alpha = 0$
Deux travées	$\mu_0 = 0$ $\mu_1 = \frac{1}{8} pl^2$ $\mu_2 = 0$	$T_0 = \frac{3}{8} pl$ $T_1 = \frac{5}{8} pl$ $T_2 = 0$	$P_0 = -\frac{3}{8} pl$ $P_1 = -\frac{10}{8} pl$ $P_2 = -\frac{3}{8} pl$	$\alpha_0 = \frac{pl^3}{48EI}$ $\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = -\frac{pl^3}{48EI}$
Vérifications	$\Sigma\mu = \frac{1}{8} pl^2$	$\Sigma T = pl$	$\Sigma P = -2pl$	$\Sigma\alpha = 0$
Trois travées	$\mu_0 = 0$ $\mu_1 = \frac{1}{10} pl^2$ $\mu_2 = \frac{1}{10} pl^2$ $\mu_3 = 0$	$T_0 = \frac{4}{10} pl$ $T_1 = \frac{5}{10} pl$ $T_2 = \frac{6}{10} pl$ $T_3 = 0$	$P_0 = -\frac{4}{10} pl$ $P_1 = -\frac{11}{10} pl$ $P_2 = -\frac{11}{10} pl$ $P_3 = -\frac{4}{10} pl$	$\alpha_0 = \frac{3pl^3}{120EI}$ $\alpha_1 = -\frac{pl^3}{120EI}$ $\alpha_2 = \frac{pl^3}{120EI}$ $\alpha_3 = -\frac{3pl^3}{120EI}$
Vérifications	$\Sigma\mu = \frac{1}{5} pl^2$	$\Sigma T = 1,5\, pl$	$\Sigma P = -3\, pl$	$\Sigma\alpha = 0$
Quatre travées	$\mu_0 = 0$ $\mu_1 = \frac{3}{28} pl^2$ $\mu_2 = \frac{2}{28} pl^2$ $\mu_3 = \frac{3}{28} pl^2$ $\mu_4 = 0$	$T_0 = \frac{11}{28} pl$ $T_1 = \frac{15}{28} pl$ $T_2 = \frac{13}{28} pl$ $T_3 = \frac{17}{28} pl$ $T_4 = 0$	$P_0 = -\frac{11}{28} pl$ $P_1 = -\frac{32}{28} pl$ $P_2 = -\frac{26}{28} pl$ $P_3 = -\frac{32}{28} pl$ $P_4 = -\frac{11}{28} pl$	$\alpha_0 = \frac{4pl^3}{168EI}$ $\alpha_1 = -\frac{pl^3}{168EI}$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = \frac{pl^3}{168EI}$ $\alpha_4 = -\frac{4pl^3}{168EI}$
Vérifications.	$\Sigma\mu = \frac{2}{7} pl^2$	$\Sigma T = 2pl$	$\Sigma P = -4pl$	$\Sigma\alpha = 0$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2.° — Discussion des valeurs des variables dans l'étendue de chaque travée.

177. — **Formules à employer.** — Le cas qu'il s'agit de discuter ici est celui d'une poutre à quatre travées égales, également chargées, homogènes et de même section, ce qui permet de supprimer l'indice des quantités constantes p_m, l_m et $(EI)_m$ dans les équations du groupe (C); on suppose en outre, que tous les appuis sont placés à un même niveau; et dans ce cas en faisant passer l'axe des x par les points sur lesquels repose la poutre, on a, $y_{m-1}=0$.

178. — **Variations de l'effort tranchant.** — La formule à employer est

$$T=\frac{1}{l}\left(\frac{1}{2}pl^2+\mu_{m-1}-\mu_m\right)-px \qquad (1)$$

On reconnaît d'abord à l'inspection de cette équation que dans chaque travée, la valeur de l'effort tranchant est donnée par une équation du premier degré en x et que la courbe représentative de l'effort tranchant est une ligne droite dont le coefficient d'inclinaison est le même pour chaque travée.

1ère — Travée. — En posant $m=1$ dans l'équation (1), puis $\mu_{m-1}=\mu_0=0$, $\mu_m=\mu_1=\frac{3}{28}pl^2$, il vient

$$T=\frac{p}{28}(11l-28x)$$

et l'on voit immédiatement que T diminue à mesure que x augmente

Ensuite pour $\quad x=0, \quad x=\frac{11}{28}l, \quad x=l,$

on trouve $\quad T=\frac{11}{28}pl, \quad T=0 \quad T=-\frac{17}{28}pl$

2ème — Travée. — On pose $m=2$ dans l'équation (1), puis $\mu_{m-1}=\mu_1=\frac{3}{28}l^2$, $\mu_m=\mu_2=\frac{2}{28}pl^2$, ce qui donne

$$T=\frac{p}{28}(15l-28x).$$

La valeur de T diminue à mesure que x augmente, et si l'on fait successivement

$$x=0, \quad x=\frac{15}{28}l, \quad x=l,$$

il vient $\quad T=\frac{15}{28}pl, \quad T=0, \quad T=-\frac{13}{28}pl.$

Les calculs relatifs aux deux dernières travées étant tout aussi simples que les précédents, il suffit d'indiquer les résultats.

3ème — Travée — $\quad T=\frac{p}{28}(13l-28x)$

Pour $\quad x=0, \quad x=\frac{13}{28}l, \quad x=l$

on a $\quad T=\frac{13}{28}pl, \quad T=0 \quad T=-\frac{15}{28}pl$

4ème — Travée. — $\quad T=\frac{p}{28}(17l-28x)$

Pour $\quad x=0, \quad x=\frac{17}{28}l, \quad x=l,$

on a $\quad T=\frac{17}{28}pl, \quad T=0, \quad T=-\frac{11}{28}pl.$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On voit à l'inspection des valeurs qui précèdent, que le maximum de T, en valeur absolue est

$$T = \frac{17}{28} pl.$$

Observation. — Il résulte de la définition même de l'effort tranchant que la valeur de T_m varie brusquement d'une quantité égale à P_m quand on passe du premier point de la travée de rang $m+1$ au dernier point de la travée de rang m, en sorte ainsi la valeur de l'effort tranchant, dans le cas d'une charge continue sur chaque travée, est elle-même continue dans l'étendue de cette travée et discontinue au point de séparation de deux travées successives.

179. — *Variations du moment fléchissant.* — On sait par la formule $R = \frac{v\mu}{I} - \frac{N}{\omega}$, qui se réduit à $R = \frac{v\mu}{I}$, que l'effort moléculaire R, par mètre carré, dans une section donnée est d'autant plus grand que la valeur correspondante de μ est elle-même plus grande; il faut donc nécessairement, si l'on veut qu'une poutre chargée résiste convenablement, que sa section transversale soit calculée en ayant égard au maximum de la valeur de μ, et par conséquent il importe d'examiner comment varie cette quantité dans l'étendue de chaque travée et de déterminer les points pour lesquels elle devient un maximum en valeur absolue.

La formule à employer pour cet objet est la relation (2) de la série (C), laquelle devient ici

$$\mu = \mu_{m-1} - \frac{1}{l}\left(\frac{1}{2} pl^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right) x + \frac{1}{2} p x^2.$$

La courbe représentée par cette équation est une parabole ordinaire dont l'axe est perpendiculaire à l'axe des x, et dont les éléments principaux sont les suivants :

1° — Coordonnées du sommet : $x' = \frac{1}{2} l_m - \frac{1}{pl_m}\left(\mu_{m-1} - \mu_m\right)$, $\mu' = \mu_{m-1} - \frac{1}{2} p x'^2$.

2° — Distance du sommet au foyer : $\delta = \frac{1}{2p}$

3° — Valeurs de μ aux extrémités de la travée : $\mu = \mu_{m-1}$, $(x=0)$; $\mu = \mu_m$, $(x=l)$.

4° — Points où la courbe coupe l'axe des x :

$$x = \frac{1}{2p}\left(pl_m^2 + 2\mu_{m-1} - 2\mu_m \pm \sqrt{(pl_m^2 + 2\mu_{m-1} - 2\mu_m)^2 - 8\mu_{m-1} pl_m^2}\right), \quad \mu = 0.$$

On remarquera que, eu égard à la disposition de la courbe relativement aux axes coordonnés, l'ordonnée μ' du sommet est, en valeur absolue, un maximum pour la région de la courbe à laquelle appartient ce point.

Les valeurs de μ étant symétriques deux à deux, par rapport au milieu de la longueur de la poutre, il suffit de construire les courbes représentatives des valeurs successives de μ pour les deux premières travées seulement et de reproduire symétriquement ces courbes pour les deux autres travées.

1ère Travée. — Données : $m=1$, $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = \frac{3}{28} pl^2$.

Équation de la courbe $\mu = \frac{p}{28}(-11lx + 14x^2)$.

Valeurs principales

$x = 0,00000$	$\mu = 0,$
$x' = 0,39286\, l$	$\mu' = -0,07717\, pl^2$
$x = 0,78571\, l$	$\mu = 0,$
$x = 1,00000\, l$	$\mu = \frac{3}{28} pl^2 = 0,10714\, pl^2.$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2ème Travée. — Données : $m=2$, $\mu_1=\frac{3}{28}pl^2$, $\mu_2=\frac{2}{28}pl^2$

Equation de la courbe $\mu=\frac{p}{28}(3l^2-15lx+14x^2)$.

Valeurs principales
$x=0,00000$ $\quad\mu=\frac{3}{28}pl^2=0,10714\,pl^2$
$x=0,26608\,l$ $\quad\mu=0$
$x'=0,53571\,l$ $\quad\mu=-0,03635\,pl^2$
$x=0,80535\,l$ $\quad\mu=0$
$x=0,00000\,l$ $\quad\mu=\frac{2}{28}pl^2=0,07143\,pl^2$.

Maximum du moment fléchissant. — On reconnaît à l'inspection des valeurs précédentes que la plus grande valeur de μ est la valeur $\mu=\frac{3}{28}pl^2$, en ce qu'elle correspond à $x=l$ pour la première travée ou à $x=0$ pour la seconde. A ce maximum de μ correspond d'ailleurs le maximum de courbure de la ligne moyenne ainsi qu'on le voit par la relation connue $\frac{1}{\rho}=\frac{\mu}{EI}$.

Observation. — Bien que les variations de μ soient caractérisées par une parabole spéciale pour chaque travée, ces courbes ont cependant un point commun qui correspond au passage d'une travée à celle qui la suit immédiatement, et par suite les valeurs de μ se succèdent d'une manière continue, non seulement dans l'étendue d'une même travée, mais encore dans le passage d'une travée à la suivante. Cela tient à ce que le moment de la réaction exercée par le point d'appui qui sépare les deux travées que l'on considère, n'intervient dans la valeur de μ que d'une manière continue, en commençant par la valeur zéro, et l'on peut regarder les paraboles qui représentent les différentes séries des valeurs de μ comme formant une sorte de courbe continue qui présenterait un point anguleux au passage d'une travée à l'autre.

(Voir plus loin les épures relatives aux poutres à quatre et à deux travées égales).

180. — Variations de l'inclinaison.

L'équation à considérer est la relation (3) de la série (C), relation qui devient ici

$$\alpha=\alpha_{m-1}+\frac{1}{6EI}\left[6\mu_{m-1}x-\frac{3}{l}\left(\tfrac{1}{2}pl^2+\mu_{m-1}-\mu_m\right)x^2+px^3\right] \qquad (3)$$

Les éléments principaux à déterminer sont :

1° — Les valeurs de x pour lesquelles on a $\alpha=0$, parce qu'à ces valeurs correspond le maximum ou le minimum de l'ordonnée de la ligne moyenne.

2° — Les valeurs de x auxquelles correspond un maximum ou un minimum de α, parce qu'à ces valeurs répond un point d'inflexion de la ligne moyenne.

1ère Travée. — On a ici $m=1$, $\alpha_{m-1}=\alpha_0=\frac{4pl^3}{168EI}$, $\mu_{m-1}=\mu_0=0$, $\mu_m=\mu_1=\frac{3}{28}pl^2$, et l'équation (3) devient

$$\alpha=\frac{p}{168EI}(4l^3-33lx^2+28x^3) \quad\text{d'où}\quad \frac{d\alpha}{dx}=\frac{p}{28EI}(14x^2-11lx)$$

Pour $\alpha=0$, on a $28x^3-33lx^2+4l^3=0$; et si l'on pose $x=\frac{l}{t}$, il vient $4t^3-33t+28=0$, équation dont les racines sont

$t_1=0,953592$, $\quad t_2=2,274203$, $\quad t_3=-3,227795$;

et par suite $x_1=1,048666.l$, $\quad x_2=0,439715.l$, $\quad x_3=-0,309809.l$.

La valeur $x=0,439715.l$ est évidemment la seule qui convienne à la question, x ne pouvant être ni négatif ni plus grand que l. Cette valeur, d'ailleurs, correspond à un minimum de de l'ordonnée de la ligne moyenne, car, mise dans l'expression de la dérivée $\frac{d\alpha}{dx}$, elle donne un résultat

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

positif. Quant aux valeurs limites de α, elles correspondent aux racines de l'équation

$$14x^2 - 11lx = 0 \qquad \text{qui donne} \qquad x = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{11}{14}l = 0{,}785714.l \ ;$$

donc la ligne moyenne doit avoir une inflexion au point dont l'abscisse est $\frac{11}{14}l$. L'inflexion qui correspondrait à la valeur $x = 0$ n'est pas à considérer, puisque la ligne moyenne n'existe pas à gauche du point qui aurait pour abscisse $x = 0$.

2ème Travée. — On a $m = 2$, $\alpha_{m-1} = \alpha_1 = -\frac{pl^3}{168EI}$, $\mu_{m-1} = \mu_1 = \frac{3}{28}pl^2$, $\mu_m = \mu_2 = \frac{2}{28}pl^2$, et l'équation (3) devient, réductions faites,

$$\alpha = \frac{p}{168EI}\left(-l^3 + 18l^2x - 45lx^2 + 28x^3\right), \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{p}{28EI}\left(3l^2 - 15lx + 14x^2\right).$$

Pour $\alpha = 0$, on a $\qquad 28x^3 - 45lx^2 + 18l^2x - l^3 = 0$.

Cette équation admet les racines $x = l$, $\quad x = \frac{l}{56}\left(17 \pm \sqrt{177}\right)$,

c'est-à-dire $\qquad x = l$, $\qquad x = 0{,}541145.l$, $\qquad x = 0{,}065998.l$

et il est facile d'assurer que la première valeur et la dernière correspondent à un maximum de l'ordonnée de la ligne moyenne, tandis que la deuxième répond à un minimum de la même variable. L'examen de l'équation $14x^2 - 15lx + 3l^2 = 0$, ferait reconnaître que la courbe moyenne a deux points d'inflexion dans la seconde travée. Les principales valeurs de x étant calculées pour les deux premières travées on pourrait en déduire facilement les valeurs correspondantes de x. Il est inutile de discuter les variations de x dans les deux dernières travées, puisque pour des points symétriques ces valeurs sont respectivement égales et de signes contraires à celles qui se rapportent aux deux premières travées.

131. — Variations de l'ordonnée. — Les valeurs de l'ordonnée sont fournies par l'équation

$$y = \alpha_{m-1}x + \frac{1}{24EI}\left[12\mu_{m-1}x^2 - \frac{4}{l}\left(\tfrac{1}{2}pl^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right)x^3 + px^4\right] ; \qquad (4)$$

qui est une parabole du quatrième ordre; et l'on connaît déjà, par les calculs précédents :

1° — Les abscisses correspondant aux points d'inflexion de la courbe.

2° — Les abscisses des points pour lesquels l'ordonnée est un maximum ou un minimum.

Par conséquent, en substituant ces valeurs de x dans l'équation (4) on obtient les coordonnées des points les plus importants de la courbe. Cependant il importe de déterminer encore les points où la ligne moyenne rencontre l'axe des x, et pour lesquels on a nécessairement $y = 0$. Ce calcul doit être fait pour les deux premières travées seulement puisqu'il y a symétrie complète, par rapport à la verticale qui passe par le milieu de la poutre.

1ère Travée. — En remplaçant α_{m-1}, μ_{m-1} et μ_m par les valeurs trouvées précédemment pour α_0, μ_0 et μ_1 on obtient $\qquad y = \frac{p}{168EI}\left(4l^3x - 11lx^3 + 7x^4\right)$.

La condition $y = 0$ donne $\qquad 7x^4 - 11lx^3 + 4l^3x = 0$,

équation vérifiée pour $\qquad x = 0$, $\qquad x = l$ $\qquad$ et $\qquad x = \frac{l}{7}\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$,

c'est-à-dire $\qquad x = 0$, $\qquad x = l$, $\qquad x = 1{,}093836.l$, $\qquad x = -0{,}522408.l$;

et l'on voit facilement que les deux seules solutions que comporte la question sont $x = 0$ et $x = l$.

2ème Travée. — Les valeurs de α_1, μ_1 et μ_2, calculées précédemment, étant mises dans l'équation (4), donnent $\qquad y = \frac{p}{168EI}\left(-l^3x + 9l^2x^2 - 15lx^3 + 7x^4\right)$.

Pour $y = 0$ on a $\qquad 7x^4 - 15lx^3 + 9l^2x^2 - l^3x = 0$,

équation qui admet les racines $x = 0$, $\quad x = l$, $\quad x = l$, $\quad x = \frac{l}{7} = 0{,}142857.l$.

Il ne reste plus maintenant qu'à déterminer les valeurs de y correspondant aux abscisses calculées précédemment.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'ensemble de toutes les valeurs numériques relatives aux quantités T, μ, x et y est donné dans le tableau suivant, et se trouve en même temps représenté graphiquement par une épure correspondante. A la suite de ce tableau s'en trouve un second ainsi qu'une seconde épure des valeurs analogues aux précédentes pour une poutre à deux travées égales, également chargées, avec appuis à un même niveau.

182. — Tableau résumant les calculs relatifs aux deux premières travées d'une poutre à quatre travées égales avec appuis de niveau.

Valeurs de x.		Valeurs de T.	Valeurs de μ	Valeurs de α	Valeur de y.
M_0	0,00000	$0,39286.pl$	0,00000	$0,02381.\frac{pl^3}{EI}$	0,00000
A	$0,39286.l$	0,00000	$-0,07717.pl^2$	$0,00360.\frac{pl^3}{EI}$	$0,00638.\frac{pl^4}{EI}$
B	$0,43971.l$	$-0,04686.pl$	$-0,07607.pl^2$	0,00000,	$0,00646.\frac{pl^4}{EI}$
C	$0,78571.l$	$-0,39286.pl$	0,00000.	$-0,01661.\frac{pl^3}{EI}$	$0,00283.\frac{pl^4}{EI}$
M_1	$1,00000.l$	$-0,60714.pl$	$0,10714.pl^2$	$-0,00595.\frac{pl^3}{EI}$	0,00000
M_1	0,00000	$0,53571.pl$	$0,10714.pl^2$	$-0,00595.\frac{pl^3}{EI}$	0,00000
D	$0,06600.l$	$0,46972.pl$	$0,07396.pl^2$	0,00000	$-0,00018.\frac{pl^4}{EI}$
E	$0,14286.l$	$0,39286.pl$	$0,04082.pl^2$	$0,00437.\frac{pl^3}{EI}$	0,00000
F	$0,26608.l$	$0,26964.pl$	0,00000	$0,00673.\frac{pl^3}{EI}$	$0,00074.\frac{pl^4}{EI}$
G	$0,53571.l$	0,00000	$-0,03635.pl^2$	$0,00020.\frac{pl^3}{EI}$	$0,00189.\frac{pl^4}{EI}$
H	$0,54114.l$	$-0,00543.pl$	$-0,02634.pl^2$	0,00000	$0,00189.\frac{pl^4}{EI}$
I	$0,80535.l$	$-0,26964.pl$	0,00000	$-0,00634.\frac{pl^3}{EI}$	$0,00084.\frac{pl^4}{EI}$
M_2	$1,00000.l$	$-0,46429.pl$	$0,07143.pl^2$	0,00000	0,00000

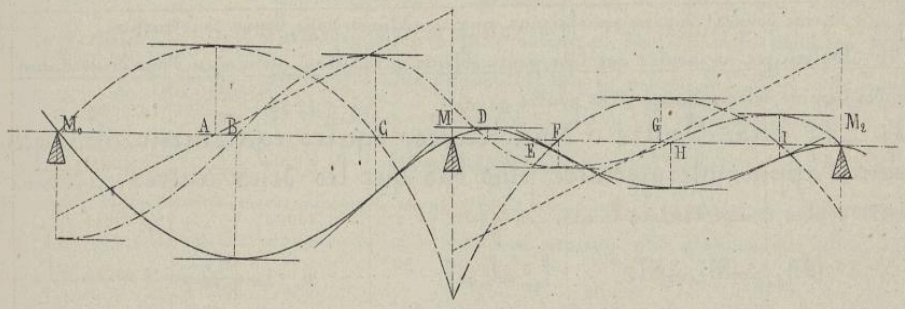
Tableau résumant les calculs relatifs à la première travée d'une poutre à deux travées égales, avec appuis de niveau.

Valeurs de x		Valeurs de T	Valeurs de μ	Valeurs de α	Valeurs de y
M_0	0,00000	$0,37500.pl$	0,00000	$0,02083.\frac{pl^3}{EI}$	0,00000
A	$0,37500.l$	0,00000	$-0,07031.pl^2$	$0,00325.\frac{pl^3}{EI}$	$0,00534.\frac{pl^4}{EI}$
B	$0,42154.l$	$-0,04653.pl$	$-0,06923.pl^2$	0,00000	$0,00542.\frac{pl^4}{EI}$
C	$0,75000.l$	$-0,37500.pl$	0,00000	$-0,01432.\frac{pl^3}{EI}$	$0,00244.\frac{pl^4}{EI}$
M_1	$1,00000.l$	$-0,62500.pl$	$0,12500.pl^2$	0,00000	0,00000

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

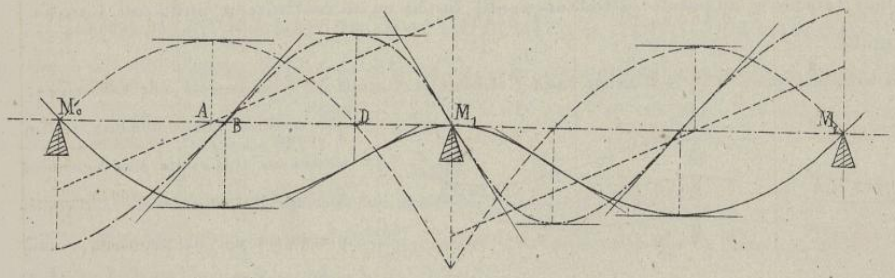
Poutre à quatre travées égales avec appuis à un même niveau.

Epure pour les deux premières travées



Poutre a deux travées égales avec appuis à un même niveau.

Epure pour les deux travées.



Mode de représentation des lignes qui composent les deux épures.

1° ___ Ligne moyenne après la flexion.....

2° ___ Courbe représentative des inclinaisons.....

3° ___ Courbe représentative des moments fléchissants.....

4° ___ Lignes représentatives des efforts tranchants.....

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Poutre reposant sur des appuis de niveaux différents.

183. — **Objet de la question.** — On a vu que la résistance moléculaire R dans une section donnée d'un solide fléchi sous l'action d'une charge, est d'autant plus grande que la valeur de μ, abstraction faite de son signe, est elle-même plus grande; par conséquent, pour une valeur donnée de R la section du solide doit croître avec la valeur du maximum de μ; et comme il importe de donner aux matériaux que l'on emploie les dimensions strictement nécessaires, il y a lieu de rechercher quelles sont les dispositions qui permettent de diminuer le maximum du moment fléchissant qui correspond à une charge donnée, tout en satisfaisant aux conditions d'une bonne construction.

M. Belanger a montré que l'on peut obtenir ce résultat au moyen d'une dénivellation convenable des appuis intermédiaires de la poutre.

184. — **1er Cas. — Poutre à deux travées égales également chargées, avec point d'appui intermédiaire plus bas que les deux autres.** — Si dans la formule (P) on pose, comme c'est ici le cas,

$$(EI)_{m+1} = (EI)_m = EI, \qquad l_{m+1} = l_m = l, \qquad p_{m+1} = p_m = p;$$

si l'on fait en même temps $m = 1$, d'où résulte

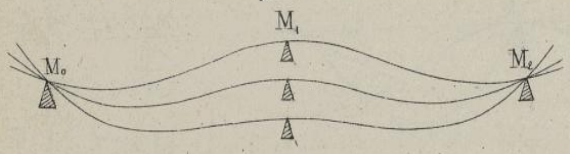
$$\mu_{m+1} = \mu_2 = 0, \qquad \mu_{m-1} = \mu_0 = 0;$$

et enfin si l'on admet que l'axe des x passe par les points M_0 et M_2, ce qui donne $y = 0$, $y_2 = 0$, la formule se simplifie et l'on en tire

$$\mu_1 = \frac{1}{8} pl^2 - \frac{3EIy_1}{l^2}, \qquad (1)$$

expression qui reproduit la valeur connue $\mu_1 = \frac{1}{8} pl^2$ quand on pose $y_1 = 0$, ce qui montre que μ_1 diminue lorsque y_1 augmente en restant positif, tandis qu'au contraire μ_1 augmente lorsque y_1 devient négatif.

On sait que pour $y_1 = 0$ il existe dans l'étendue de chacune des deux travées, une valeur de μ qui, prise en valeur absolue, est un maximum, et il s'agit de voir comment se comporte ce maximum relativement à la valeur μ_1, au point M_1, quand on fait varier y_1. Or la formule (3) du groupe (Q), donne, pour la valeur de μ en un point quelconque de la première travée,



$$\mu = \frac{1}{2} px^2 - \frac{x}{l}\left(\frac{1}{2} pl^2 - \mu_1\right),$$

expression dont le maximum en valeur absolue est l'abscisse correspondante ont pour valeur

$$x' = \frac{1}{pl}\left(\frac{1}{2} pl^2 - \mu_1\right), \qquad \mu' = -\frac{1}{2pl^2}\left(\frac{1}{2} pl^2 - \mu_1\right)^2; \qquad (2)$$

En remplaçant μ_1 par la valeur (1), dans l'équation (2), il vient

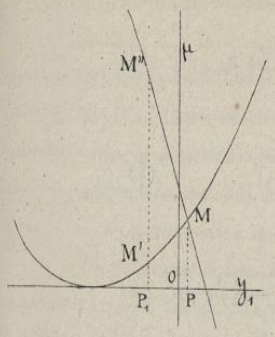
$$\mu' = -\frac{1}{2pl^2}\left(\frac{3}{8} pl^2 + \frac{3EIy_1}{l^2}\right)^2, \qquad (3)$$

et l'on voit que μ', considéré d'une manière purement analytique, croît indéfiniment lorsque y_1 croît lui-même indéfiniment en valeur absolue.

Maintenant il est évident que si l'on regarde y_1 comme variable, l'équation (1) peut être consi-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dérée comme représentant une droite et l'équation (3) comme une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe des μ', et dont le sommet est situé sur l'axe des y_1. Ces deux lignes étant construites comme l'indique la figure, on reconnaît immédiatement que la valeur de y_1 qui donne, pour μ' et pour μ_1 les valeurs simultanées les plus faibles, et par conséquent les plus avantageuses, est la valeur OP, pour laquelle on a, en valeur absolue $MP = \mu_1 = \mu'$. En effet, si l'on prend une autre valeur quelconque de y_1, par exemple, $y_1 = OP_1$, la valeur correspondante de μ', représentée par $M'P_1$, serait plus avantageuse que l'ordonnée MP; mais la valeur μ_1, donnée par la longueur $M''P_1$, serait par contre, plus désavorable que la valeur MT'; donc, cette dernière quantité est celle qui réalise les conditions du problème proposé.



On reconnaît facilement que la droite (1) et la parabole (3), prolongées suffisamment, se couperaient en un second point dont l'abscisse doit évidemment être rejetée, puisque les valeurs correspondantes de μ' et de μ_1 seraient plus grandes que celles qui se rapportent au point M.

Les valeurs numériques de μ' et de μ_1 devant être égales entre elles, il suffit, pour les calculer, de remplacer μ' par $-\mu_1$ dans l'équation (2), et d'en déduire μ_1, ce qui donne, en ne prenant que la racine la plus faible,

$$\mu_1 = -\mu' = \frac{1}{2} pl^2 (3 - 2\sqrt{2}) = 0{,}0858\, pl^2.$$

En portant ensuite cette valeur dans l'équation (1), on en tire la valeur de y_1, c'est-à-dire

$$y_1 = (8\sqrt{2} - 11) \frac{pl^4}{24EI} = 0{,}01307 \frac{pl^4}{EI}.$$

185. — **Comparaison avec la poutre à appuis de niveau.** — La valeur μ_1, qu'on vient de trouver, comparée à la valeur $\frac{pl^2}{8}$ déterminée pour le cas où les trois appuis sont à un même niveau, donne le rapport $\frac{0{,}0858}{0{,}125} = 0{,}686$; et l'on voit ainsi l'avantage qui résulterait de cette dénivellation du point M_1.

Quant à la valeur y_1, on la comparant au maximum trouvé pour la flèche dans le cas où les appuis sont de niveau, il vient $\frac{0{,}01307}{0{,}00456} = 2{,}866$; ce qui montre que la flèche est environ trois fois aussi grande dans le second cas que dans le premier.

186. — **2ème Cas. — Poutre à quatre travées égales, également chargées, avec appuis intermédiaires plus bas que les appuis extrêmes.**

On se propose, comme dans le cas précédent, d'obtenir une diminution dans la valeur absolue du maximum de μ, tout en satisfaisant à la condition que la poutre reste symétrique par rapport à la verticale qui passe au milieu de sa longueur; cette condition exige nécessairement que l'on ait $y_1 = y_3$; donc les points M_1 et M_3 seront situés à un même niveau, différent de celui des points M_0 et M_4.

Quant au point milieu M_2, sa position, relativement aux autres points d'appui, sera déterminée par les conditions du problème posé.

L'équation (2) du groupe (G), appliquée au cas dont il s'agit est

$$\mu = \frac{1}{2} px^2 - \left(\frac{1}{2} pl^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right) \frac{x}{l} + \mu_{m-1};$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et le maximum de μ ainsi que l'abscisse correspondante ont pour valeur

$$x = -\frac{1}{pl}\left(\frac{1}{2}pl^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right), \qquad \mu = -\frac{1}{2pl^2}\left(\frac{1}{2}pl^2 + \mu_{m-1} - \mu_m\right)^2 + \mu_{m-1}; \quad (1)$$

expressions qui deviennent ; pour la première travée ($m=1$, $\mu=0$)

$$x' = \frac{1}{pl}\left(\frac{1}{2}pl^2 - \mu_1\right) \qquad \mu' = -\frac{1}{2pl^2}\left(\frac{1}{2}pl^2 - \mu_1\right)^2; \quad (2)$$

et pour la deuxième travée ($m=2$),

$$x'' = \frac{1}{pl}\left(\frac{1}{2}pl^2 + \mu_1 - \mu_2\right). \quad (3) \qquad \mu'' = -\frac{1}{2pl^2}\left(\frac{1}{2}pl^2 + \mu_1 - \mu_2\right)^2 + \mu_1. \quad (4)$$

Les deux dernières travées étant symétriques des deux premières, il est inutile de s'en occuper, et il faut, comme dans la question précédente, chercher à déterminer le maximum de μ de manière que l'on ait

$$\mu_1 = -\mu' \quad \text{et} \quad \mu_1 = -\mu'';$$

Soit donc $\mu_1 = -\mu' = -\mu'' = Kpl^2$, K étant un coefficient à déterminer. En remplaçant μ_1 par Kpl^2 dans l'équation (2), il vient d'abord

$$\mu' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - K\right)^2 pl^2;$$

ensuite si l'on remplace μ'' par $-Kpl^2$ et μ_1 par Kpl^2 dans l'équation (4), on obtient facilement

$$\mu_2 = \left(\frac{1}{2} + K \pm 2\sqrt{K}\right) pl^2,$$

expression dans laquelle le radical doit être pris avec le signe $-$, sans quoi la valeur x'' de l'équation (3) serait négative, ce qui ne doit pas être. Les quatre valeurs à considérer sont donc

$$\mu_1 = Kpl^2, \qquad \mu' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - K\right)^2 pl^2,$$
$$\mu'' = -Kpl^2, \qquad \mu_2 = \left(\frac{1}{2} + K - 2\sqrt{K}\right) pl^2.$$

Les valeurs numériques de μ_1 et de μ' devant être égales entre elles, on a

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - K\right)^2 \quad \text{d'où} \quad K = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2};$$

et puisque l'on doit avoir la plus petite valeur possible pour le maximum de μ, il faut prendre

$$K = \frac{3}{2} - \sqrt{2} = 0{,}0858$$

ce qui donne finalement

$$\mu_1 = 0{,}0858\, pl^2, \quad \mu'' = -0{,}0858\, pl^2, \quad \mu' = -0{,}0858\, pl^2, \quad \mu_2 = 0.$$

Il reste encore à calculer les valeurs des ordonnées y_1 et y_2 correspondant aux points d'appui M_1 et M_2. A cet effet on prend la formule générale (P) établie précédemment, et en l'appliquant successivement aux deux premières travées, on obtient

$$\frac{24EI}{l^2}\left(y_2 - 2y_1\right) = 16\mu_1 + 4\mu_2 - 2pl^2, \qquad \frac{24EI}{l^2}\left(y_1 - y_2\right) = 8\mu_2 + 4\mu_1 - pl^2;$$

équations d'où l'on tire

$$y_1 = \frac{l^2}{24EI}\left(3pl^2 - 20\mu_1 - 12\mu_2\right), \qquad y_2 = \frac{l^2}{24EI}\left(4pl^2 - 24\mu_1 - 20\mu_2\right);$$

en remplaçant μ_2 par zéro, et μ_1 par $0{,}0858\, pl^2$, dans ces expressions, il vient

$$y_1 = 0{,}0535\,\frac{pl^4}{EI}, \qquad y_2 = 0{,}0809\,\frac{pl^4}{EI};$$

et par suite

$$y_2 - y_1 = 0{,}0274\,\frac{pl^4}{EI}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

187.— Comparaison avec la poutre à quatre appuis de niveau.—

La valeur μ_1 dans le cas où les quatre appuis sont à un même niveau est, comme on l'a vu,

$$\mu_1 = \frac{3}{28} pl^2 = 0,1071\, pl^2,$$

et celle qui vient d'être calculée, comparée à cette dernière, donne le rapport $\frac{0,0853}{0,1071} = 0,8007$; ce qui montre que le maximum du moment ne s'élève, dans le cas de la dénivellation des appuis, qu'aux huit dixièmes du maximum relatif au cas où tous les appuis sont à un même niveau, d'où résulterait une diminution très-sensible dans les dimensions transversales de la poutre; mais il faut remarquer que ce résultat n'est favorable que parce que μ_2 n'est pas supérieur à μ_1.

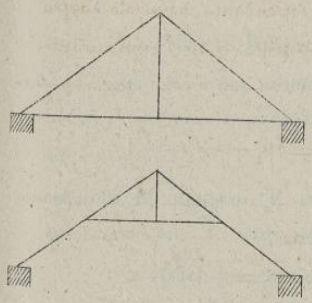
Maintenant si l'on compare le maximum de la flèche, dans le cas de la dénivellation, avec le maximum relatif au cas où tous les appuis sont à un même niveau, le rapport de ces quantités est $\frac{0,0809}{0,0063} = 12,841$; c'est-à-dire que la flèche est environ 13 fois plus grande lorsque les appuis ne sont plus tous au même niveau. Bien que cette flèche soit toujours très-peu apparente dans une construction, si l'on tient à profiter des avantages résultant de la dénivellation, tout en conservant les appuis à un même niveau, on peut, comme le fait observer M^r^ Belanger, substituer à la poutre droite une poutre faiblement curviligne, et dont la courbure naturelle, avant la charge, serait précisément égale, mais de sens opposé, à celle que la poutre droite devra prendre sous le poids dont elle sera chargée.

La théorie qui précède conduit à un rapprochement assez remarquable également dû à M^r^ Belanger. Si l'on remplace la poutre à quatre travées égales, dans l'hypothèse où la dénivellation est la plus favorable, par deux poutres à deux travées égales, dans lesquelles les différences de niveau ont été établies en vue du même objet, la valeur du plus grand moment fléchissant est la même dans les deux cas, mais les niveaux des appuis ne sont pas disposés de la même manière.

Poutres inclinées et poutres armées.

188.— Emploi de la poutre inclinée dans les combles. —

Une poutre inclinée, employée dans la construction d'un comble, se nomme un arbalétrier. La partie supérieure est assemblée dans une pièce verticale appelée poinçon ou aiguille; une seconde pièce, nommée tirant ou entrait a pour effet d'exercer sur la poutre une réaction horizontale nécessaire pour empêcher tout glissement sur l'appui inférieur de la poutre. L'entrait peut être fixé à l'extrémité inférieure de la poutre ou en un point quelconque de sa longueur



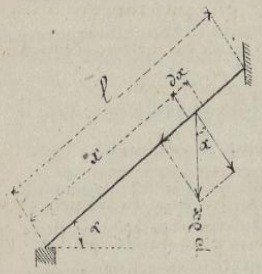
Deux poutres disposées symétriquement et assemblées entre elles d'une manière invariable constituent une ferme. La distance qui sépare les deux extrémités inférieures d'une ferme se nomme la portée de cette ferme.

Toute pièce qui entre dans la composition d'une ferme doit avoir des dimensions suffisantes pour résister d'une manière permanente aux actions qu'elle reçoit des forces extérieures du système. Un arbalétrier est généralement soumis à une flexion transversale et à une compression longitudinale; un tirant doit résister à une tension longitudinale; un boulon d'assemblage, à un

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

efforts de cisaillement, etc. La détermination des dimensions d'un solide étant, comme on le verra plus loin, subordonnée à la connaissance des efforts auxquels il est soumis, ces efforts doivent être préalablement calculés pour les cas principaux qui peuvent se présenter.

Une ferme étant en général symétrique par rapport à la verticale qui passe par son sommet, il suffit évidemment d'appliquer le calcul à l'ensemble des pièces situées d'un même côté de cette verticale.



Avant de commencer ce calcul il faut remarquer que si une poutre inclinée est chargée uniformément d'un poids p par mètre courant, chaque force verticale élémentaire pdx qui fait partie de cette charge peut être remplacée par deux composantes

$$p\,dx\cos\alpha, \qquad p\,dx\sin\alpha,$$

l'une, normale à la direction de la poutre, et l'autre, suivant cette direction.

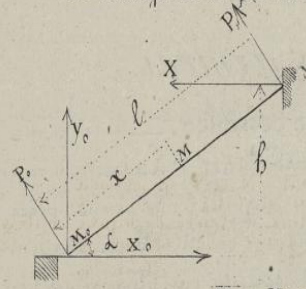
La somme des composantes normales est $px\cos\alpha$ pour la longueur x; $pl\cos\alpha$ pour la longueur l et $p\cos\alpha$ pour l'unité de longueur.

La somme des composantes longitudinales est $px\sin\alpha$ pour la longueur x; $pl\sin\alpha$ pour la longueur l, et $p\sin\alpha$ pour l'unité de longueur.

On suppose dans les questions qui vont suivre que la poutre est chargée d'un poids p par mètre courant uniformément réparti sur toute la longueur de cette poutre.

189. — Poutre inclinée, avec un entrait situé à la partie inférieure.

La charge totale pl détermine au point M_1 une réaction dont la composante horizontale X_1 doit être numériquement égale à la tension X_0 du tirant fixé en M_0; on a donc $X_1 = X_0$



On détermine X_1 en prenant les moments de toutes les forces du système par rapport à l'axe projeté en M_0 ce qui donne $X_1 h = \frac{1}{2} pl^2 \cos\alpha$, d'où $X_1 = X_0 = \frac{pl^2\cos\alpha}{2h} = \frac{1}{2} pl \operatorname{cotg}\alpha$

La réaction normale P_1 et la compression longitudinale N_1 au point M_1 sont alors

$$P_1 = X_1 \sin\alpha = \tfrac{1}{2} pl\cos\alpha, \qquad N_1 = X_1\cos\alpha = \tfrac{1}{2} pl\cos\alpha\operatorname{cotg}\alpha.$$

L'appui situé en M_0 porte évidemment toute la charge de la poutre; on a donc, pour la réaction verticale Y_0, au point M_0,

$$Y_0 = pl.$$

Enfin, la réaction normale P_0 et la compression longitudinale N_0 au point M_0 sont données par les deux conditions suivantes de l'équilibre en ce point, c'est-à-dire,

$$P_0 + X_0\sin\alpha - Y_0\cos\alpha = 0, \text{ d'où } P_0 = Y_0\cos\alpha - X_0\sin\alpha = \tfrac{1}{2} pl\cos\alpha$$

$$N_0 - X_0\cos\alpha - Y_0\sin\alpha = 0, \text{ d'où } N_0 = Y_0\sin\alpha + X_0\cos\alpha = pl\sin\alpha + N_1.$$

Quant à la compression longitudinale N en un point quelconque de la poutre, elle est

$$N = p(l-x)\sin\alpha + N_1,$$

valeur qui augmente à mesure que x diminue et dont le maximum est la valeur précédente de N_0.

Le moment fléchissant en un point quelconque M, est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\mu = \frac{1}{2} p \cos\alpha \,(x^2 - lx),$$

expression dont le maximum, correspondant à $x = \frac{1}{2} l$, est $\mu = \frac{1}{8} pl^2 \cos\alpha$.

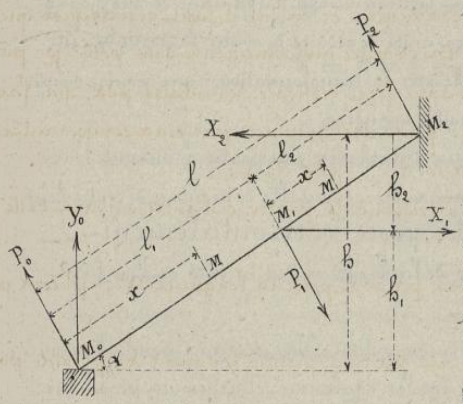
190. — Poutre inclinée avec un entrait intermédiaire. — La tension X_1 de l'entrait fixé en M_1 doit évidemment faire équilibre à la réaction horizontale X_2 déterminée par l'appui situé en M_2 sous l'influence de la charge pl de la poutre ; on doit donc avoir $X_1 = X_2$.

Ensuite, les moments, pris par rapport à l'axe projeté en M_0, de toutes les forces du système, donnent

$$X_2 b - X_1 b_1 - \frac{1}{2} pl^2 \cos\alpha = 0,$$

d'où l'on déduit

$$X_1 = X_2 = \frac{pl^2 \cos\alpha}{2b} = \frac{pl^2 \cos\alpha}{2l_2 \sin\alpha}.$$



La valeur de X_1 montre que la tension exercée par l'entrait est d'autant plus faible que l_2 est plus grand ; il est donc plus avantageux de placer l'entrait à l'extrémité inférieure de la poutre qu'en tout autre point.

La pression normale P_1 au point M_1 et la réaction normale P_2 au point M_2 ont pour valeur

$$P_1 = P_2 = X_1 \sin\alpha = \frac{pl^2 \cos\alpha}{2l_2}.$$

L'appui situé en M_0 porte évidemment toute la charge de la poutre ; on a donc, pour la réaction verticale en M_0, pour la réaction normale en ce point,

$$y_0 = pl; \qquad P_0 = pl \cos\alpha.$$

La compression longitudinale N_2, au point M_2, est

$$N_2 = X_2 \cos\alpha = \frac{pl^2 \cos^2\alpha}{2 l^2 \sin\alpha}.$$

On a ensuite :

entre M_1 et M_2, $N = N_2 + p \sin\alpha \,(l^2 - x)$; au point M_1, $N_1 = N_2 + pl_2 \sin\alpha$.

Les composantes longitudinales $X_2 \cos\alpha$ et $X_1 \cos\alpha$ étant égales et de signes contraires, on a,

entre M_0 et M_1, $N = p \sin\alpha \,(l_2 + l_1 - x)$. au point M_0, $N_0 = pl \sin\alpha$.

La pression normale P_1 déterminée au point M_1, par l'action de l'entrait, transforme l'arbalétrier en une poutre à deux intervalles de longueurs l_1 et l_2, et l'on obtient facilement, dans ce cas,

entre M_1 et M_2, $\mu = \frac{1}{2} p \cos\alpha \left[x^2 + \left(\frac{l^2}{l_2} - 2l_2\right) x - l^2 + l_2^2\right]$;

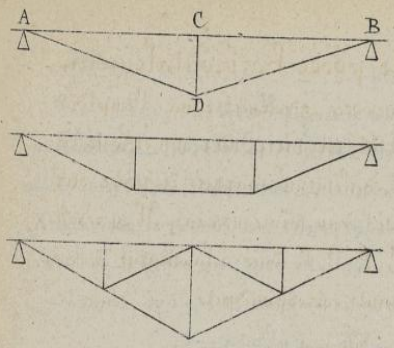
entre M_0 et M_1, $\mu = \frac{1}{2} p \cos\alpha \,(x^2 - 2lx)$;

expression dont le maximum est facile à déterminer.

La plupart des formules précédentes se simplifient quand on pose $l_1 = l_2 = \frac{1}{2} l$.

191. — Poutres armées. — La poutre armée, dont l'idée appartient à Camille Polonceau ancien élève de l'École Centrale, consiste en une disposition dont l'objet principal est de créer, pour une poutre donnée, des points d'appui intermédiaires qui soient exclusivement dépendants des points extrêmes de la poutre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



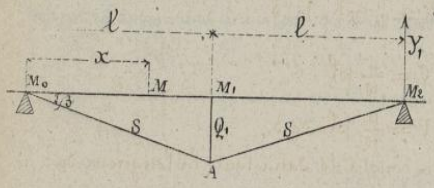
A cet effet, une pièce rigide CD, perpendiculaire à la longueur de la poutre et nommée bielle ou contre-fiche, est articulée en C au milieu de la poutre AB et retenue à son extrémité inférieure par deux tirants AD et BD fixés aux extrémités A et B. Ces tirants doivent avoir pour effet de maintenir le point C sur la ligne droite qui passe par les points A et B lorsque la poutre est en charge. On conçoit facilement tout l'avantage de cette disposition qui permet ainsi de réduire de moitié la portée de cette pièce principale par la transformation d'une poutre simple en une poutre armée formant deux travées de longueurs moitié moindres.

On peut aussi, lorsque les circonstances l'exigent, transformer une poutre à une seule travée en une poutre à trois ou à quatre travées par l'emploi d'un nombre convenable de tirants et de contre-fiches.

192. — Poutre armée à une contre-fiche, posée horizontalement. —

Pour simplifier les calculs on néglige le poids de la bielle et des tirants et l'on fait abstraction des frottements des articulations.

La poutre devant être exactement, sous le rapport des actions exercées aux points d'appui, dans les conditions d'une poutre symétrique à deux travées égales, également chargées, et posée sur des appuis situés à un même niveau, les pressions exercées par la charge et les moments fléchissants aux points M_0, M_1 et M_2 sont



$$P_0 = \frac{3}{8}\,pl, \qquad P_1 = \frac{10}{8}\,pl, \qquad P_2 = \frac{3}{8}\,pl.$$

$$\mu_0 = 0, \qquad \mu_1 = \frac{1}{8}\,pl^2, \qquad \mu_2 = 0.$$

Les deux appuis extrêmes supportant chacun la moitié de la poutre, les réactions Y_0 et Y_1 exercées par ces appuis sont

$$Y_0 = Y_1 = pl.$$

La réaction normale Q_1 de la bielle, la tension S des tirants et la compression longitudinale N sont ensuite données successivement par les conditions d'équilibre suivantes :

Au point M_1 : $\quad Q_1 - P_1 = 0, \qquad$ d'où $\quad Q_1 = \frac{10}{8}\,pl$

Au point A : $\quad 2S\sin\beta - Q_1 = 0, \qquad$ d'où $\quad S = \frac{5}{8}\,\frac{pl}{\sin\beta}.$

Au point M_0 :
$$\begin{cases} N - S\cos\beta = 0, & \text{d'où } N = \frac{5}{8}\,\frac{pl}{\operatorname{tg}\beta}. \\ Y_0 - P_0 - S\sin\beta = 0, & \text{(vérification des valeurs précédentes).} \end{cases}$$

La compression longitudinale N est constante dans toute l'étendue de la poutre.

La valeur de μ pour un point M de l'intervalle M_0M_1, et pour un point symétrique de l'intervalle M_1M_2, est

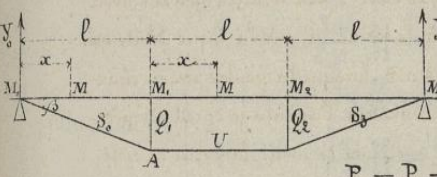
$$\mu = \frac{1}{8}\,p\,(4x^2 - 3lx),$$

expression dont le maximum est la valeur précédente de μ_1.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

193. Poutre armée à deux contre-fiches, posée horizontalement.

Les trois intervalles M_0M_1, M_1M_2 et M_2M_3 étant supposés égaux entre eux, l'emploi des contre-fiches placées en M_1 et M_2 transforme la poutre M_0M_3 en une poutre symétrique à trois travées égales, également chargées et posée sur quatre appuis situés à un même niveau. Il en résulte, pour les réactions P_0, P_1, P_2, P_3 dues à la charge, et pour les moments fléchissants correspondants,



$$P_0 = P_3 = \frac{4}{10}\,pl, \qquad P_1 = P_2 = \frac{11}{10}\,pl.$$

$$\mu_0 = \mu_3 = 0, \qquad \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{10}\,pl^2$$

La pression exercée sur chacun des deux appuis M_0 et M_3 est évidemment

$$Y_0 = Y_3 = \frac{3}{2}\,pl$$

On a encore, par raison de symétrie, $S_0 = S_3$, $Q_1 = Q_2$.

Les tensions S_0, U, la compression normale Q_1, et la compression longitudinale N_0 sont données par les conditions d'équilibre suivantes :

Au point M_0, $\begin{cases} S_0 \sin\beta + P_0 - Y_0 = 0, & \text{d'où } S_0 = \dfrac{Y_0 - P_0}{\sin\beta} = \dfrac{11}{10}\,\dfrac{pl}{\sin\beta} \\ N_0 - S_0\cos\beta = 0, & \text{d'où } N_0 = \dfrac{11}{10}\,pl\cot g\beta. \end{cases}$

Au point M_1 $\quad Q_1 - P_1 = 0, \quad$ d'où $Q_1 = \dfrac{11}{10}\,pl.$

Au point A $\quad U - S_0\cos\beta = 0, \quad$ d'où $U = \dfrac{11}{10}\,pl\cot g\beta.$

La compression longitudinale N est nécessairement constante dans toute la longueur du solide et égale à la valeur précédente de N_0.

Quant aux variations de μ, on a

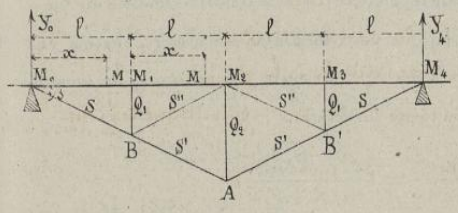
Entre M_0 et M_1, $\qquad \mu = \frac{1}{10}\,p(5x^2 - 4lx).$

Entre M_1 et M_2, $\qquad \mu = \frac{1}{10}\,p(5x^2 - 5lx + l^2)$

Le maximum de μ est la valeur μ_1 qui s'exerce au point M_1, ou son égale μ_2, au point M_2.

194. — Poutre armée à trois contre-fiches posée horizontalement.

Les trois contre-fiches qui agissent aux points M_1, M_2, M_3 et qui les maintiennent sur l'horizontale qui passe par les points M_0 et M_4 permettent d'assimiler le système à une poutre symétrique à quatre travées égales ; on a donc



$$P_0 = P_4 = \frac{11}{28}\,pl, \quad P_1 = P_3 = \frac{32}{28}\,pl, \quad P_2 = \frac{26}{28}\,pl.$$

$$\mu_0 = \mu_4 = 0, \qquad \mu_1 = \mu_3 = \frac{3}{28}\,pl^2 \quad \mu_2 = \frac{2}{28}\,pl.$$

Les réactions des appuis sont évidemment

$$Y_0 = Y_4 = 2pl.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Tout étant symétrique par rapport à la verticale M_2A qui passe au milieu de la poutre, les quantités S, S', S'', N et Q_1 sont égales deux à deux de part et d'autre de cette verticale, et on les détermine successivement en posant les conditions d'équilibre suivantes :

Au point M_0 : $\begin{cases} S\sin\beta + P_0 - Y_0 = 0, \\ N - S\cos\beta = 0, \end{cases}$ d'où $S = \frac{45}{28}\cdot\frac{pl}{\sin\beta}$.

$N = \frac{45}{28}\cdot\frac{pl}{\operatorname{tg}\beta}$.

Au point M_1 : $Q_1 - P_1 = 0$, d'où $Q_1 = \frac{32}{28}pl$.

Au point B : $\begin{cases} (S - S' - S'')\cos\beta = 0, \\ (S' - S - S'')\sin\beta + Q_1 = 0, \end{cases}$ d'où $\begin{cases} S' = \frac{29}{28}\cdot\frac{pl}{\sin\beta}, \\ S'' = \frac{16}{28}\cdot\frac{pl}{\sin\beta}. \end{cases}$

Au point A : $Q_2 - 2S'\sin\beta = 0$, d'où $Q_2 = \frac{58}{28}\cdot pl$

Au point M_2 : $P_2 + 2S''\sin\beta - Q_2 = 0$, (vérification des valeurs précédentes)

La compression longitudinale N est évidemment constante dans toute l'étendue de la poutre.

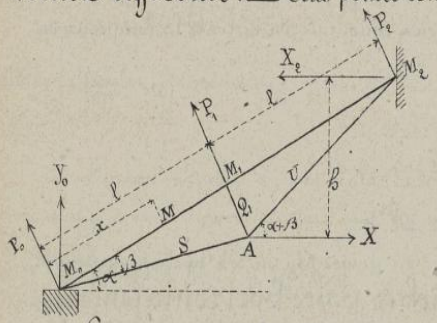
La valeur du moment fléchissant est :

Entre M_0 et M_1 : $\mu = \frac{1}{28}p(14x^2 - 11lx)$.

Entre M_1 et M_2 : $\mu = \frac{1}{28}p(14x^2 - 15lx + 3l^2)$.

Le maximum de μ est la valeur précédente de μ_1 qui s'exerce au point M_1, ou bien égale μ_3, relative au point M_3.

195. — Poutre armée à une contre-fiche posée sur deux appuis de niveaux différents. — Cette poutre devant être dans les conditions d'une poutre à deux travées égales chargées uniformément d'un poids p par mètre de longueur, les pressions normales exercées par la charge aux points M_0, M_1, M_2 ainsi que les moments fléchissants correspondants à ces points sont



$P_0 = \frac{3}{8}pl\cos\alpha$, $P_1 = \frac{10}{8}pl\cos\alpha$, $P_2 = \frac{3}{8}pl\cos\alpha$

$\mu_0 = 0$ $\mu_1 = \frac{1}{8}pl^2\cos\alpha$ $\mu_2 = 0$.

La réaction verticale en M_0 est évidemment

$$Y_0 = 2pl.$$

L'ensemble des pièces qui constituent la poutre armée pouvant être considéré comme un système rigide, les forces X_2 et X sont dans les mêmes conditions que pour la poutre simple ; et comme ce sont les seules forces qui soient horizontales, on doit avoir $X = X_2$. Ensuite, en prenant les moments des forces du système par rapport à l'axe projeté en M_0, on trouve facilement

$$b = \frac{l\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}, \qquad X_2 = X = \frac{2pl^2\cos\alpha}{b} = \frac{2pl\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Les tensions V, S, les compressions longitudinales N_2, N_0 et la réaction normale Q_1 sont

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Q ocm ensuite données successivement par les relations d'équilibre suivantes.

Au point M_2 $\begin{cases} U\sin\beta + P_2 - X\sin\alpha = 0, & \text{d'où } U = \dfrac{X\sin\alpha - P_2}{\sin\beta} = \dfrac{2pl\sin\alpha\cos\alpha}{tg\beta\sin(\alpha+\beta)} - \dfrac{3pl\cos\alpha}{8\sin\beta}. \\ N_2 - U\cos\beta - X\cos\alpha = 0, & \text{d'où } N_2 = X\cos\alpha + U\cos\beta = \dfrac{13pl\cos\alpha\cos\beta}{8\sin\beta}. \end{cases}$

Au point M_1 $Q_1 - P_1 = 0$, d'où $Q_1 = P_1 = \dfrac{10}{8}pl\cos\alpha$.

Au point M_0 $\begin{cases} S\sin\beta - P_0 - Y_0\cos\alpha = 0, & \text{d'où } S = \dfrac{13}{8}\dfrac{pl\cos\alpha}{\sin\beta} \\ N_0 - S\cos\beta - Y_0\sin\alpha = 0, & \text{d'où } N_0 = S\cos\beta + Y_0\sin\alpha = N_2 + 2pl\sin\alpha. \end{cases}$

Au point A $Q_1 - (S+U)\sin\beta + X'\sin\alpha = 0$, (cette équation servira à vérifier les valeurs précédentes).

La compression longitudinale en un point quelconque M, au-dessous de M_1, puis au point M_1 est

$$N = N_2 + p(l-x)\sin\alpha, \qquad N_1 = N_2 + pl\sin\alpha.$$

En un point M, au-dessous de M_1, on a

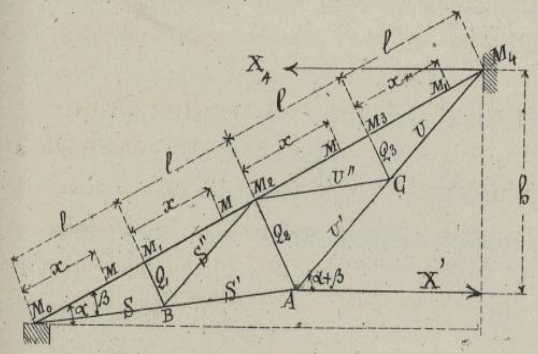
$$N = N_2 + p(2l-x)\sin\alpha,$$

quantité qui augmente à mesure que x diminue en sorte le maximum est la valeur précédente de N_0.

Enfin, la valeur de μ en un point quelconque est

$$\mu = \frac{1}{8}p\cos\alpha(4x^2 - 3lx).$$

Le maximum de μ est la valeur μ_1 qui s'exerce au point M_1.



196. Poutre armée à trois contre-fiches posée sur des appuis de niveaux différents.

Les calculs se font ici comme dans le cas précédent. On a d'abord,

$$Y = 4pl.$$

$$P_0 = P_4 = \frac{11}{28}pl\cos\alpha \qquad P_1 = P_3 = \frac{32}{28}pl\cos\alpha,$$

$$\mu_0 = \mu_4 = 0 \qquad \mu_1 = \mu_3 = \frac{3}{28}pl^2\cos\alpha,$$

$$P_2 = \frac{26}{28}pl\cos\alpha,$$

$$\mu_2 = \frac{2}{28}pl^2\cos\alpha.$$

La tension horizontale X' du tirant se déduit de l'équation des moments pris par rapport à l'axe projeté en M_0, et l'on trouve

$$h' = \frac{2l\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}, \qquad X' = X_4 = \frac{8pl^2\cos\beta}{h'} = \frac{4pl\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Les tensions U, U', U'', S, S', S'', les compressions longitudinales N_4, N_0 et les réactions normales Q_1, Q_2, Q_3, résultent successivement des équations d'équilibre suivantes,

Au point M_4 $\begin{cases} U\sin\beta + P_4 - X_4\sin\alpha = 0, & \text{d'où } U = \dfrac{X_4\sin\alpha - P_4}{\sin\beta} = \dfrac{4pl\cos\alpha\sin\alpha}{tg\beta\sin(\alpha+\beta)} - \dfrac{11}{28}\dfrac{pl\cos\alpha}{\sin\beta}, \\ N_4 - U\cos\beta - X_4\cos\alpha = 0, & \text{d'où } N_4 = X_4\cos\alpha + U\cos\beta = \dfrac{101}{28}\dfrac{pl\cos\alpha}{tg\beta}. \end{cases}$

Au point M_3 $Q_3 - P_3 = 0$, d'où $Q_3 = \dfrac{32}{28}pl\cos\alpha$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Au point G $\begin{cases} (U-U'-U'')\cos\beta = 0, \\ Q_3 - (U+U''-U')\sin\beta = 0, \end{cases}$ d'où $\begin{cases} U' = U - \frac{Q_3}{2\sin\beta} = \frac{4pl\cos\alpha\sin\alpha}{tg\beta\sin(\alpha+\beta)} - \frac{27}{28}\frac{pl\cos\alpha}{\sin\beta}. \\ U'' = \frac{Q_3}{2\sin\beta} = \frac{16}{28}\frac{pl\cos\alpha}{\sin\beta}. \end{cases}$

Au point M_0 $\begin{cases} S\sin\beta - P_0 - Y_0\cos\alpha = 0, \\ N_0 = S\cos\beta - Y_0\sin\alpha = 0, \end{cases}$ d'où $S = \frac{P_0 + Y_0\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{101}{28}\cdot\frac{pl\cos\alpha}{\sin\beta}.$ d'où $N_0 = S\cos\beta + Y_0\sin\alpha = \frac{101}{28}\frac{pl\cos\alpha}{tg\beta} + 4pl\sin\alpha$

Au point M_1 $Q_1 - P_1 = 0,$ d'où $Q_1 = \frac{32}{28}pl\cos\alpha.$

Au point B $\begin{cases} (S-S'-S'')\cos\beta = 0, \\ Q_1 - (S+S''-S')\sin\beta = 0, \end{cases}$ d'où $\begin{cases} S' = S - \frac{Q_1}{2\sin\beta} = \frac{85}{28}\frac{pl\cos\alpha}{\sin\beta} \\ S'' = \frac{Q_1}{2\sin\beta} = \frac{16}{28}\frac{pl\cos\alpha}{\sin\beta}. \end{cases}$

Au point M_2 $Q_2 - P_2 - (S''+U'')\sin\beta = 0,$ d'où $Q_2 = \frac{58}{28}pl\cos\alpha.$

Au point A $Q_2 - (S'+U')\sin\beta + X\sin\alpha = 0,$ (Cette dernière équation servira à vérifier les valeurs précédentes.)

La compression longitudinale prend successivement les valeurs suivantes :

Entre M_3 et M_4, $N = N_4 + p(l-x)\sin\alpha$; au point M_3, $N_3 = N_4 + pl\sin\alpha$.
Entre M_2 et M_3, $N = N_4 + p(2l-x)\sin\alpha$; au point M_2, $N_2 = N_4 + 2pl\sin\alpha$.
Entre M_1 et M_2, $N = N_4 + p(3l-x)\sin\alpha$; au point M_1, $N_1 = N_4 + 3pl\sin\alpha$.
Entre M_0 et M_1, $N = N_4 + p(4l-x)\sin\alpha$; au point M_0, $N_0 = N_4 + 4pl\sin\alpha$.

La valeur N_0 est évidemment le maximum de N.

Quant à la valeur de μ, elle est :

Entre M_0 et M_1, $\mu = \frac{1}{28}p\cos\alpha(14x^2 - 11lx)$.

Entre M_1 et M_2, $\mu = \frac{1}{28}p\cos\alpha(14x^2 - 15lx + 3l^2)$.

Le maximum de μ est la valeur μ_1 qui correspond au point M_1, ou son égale μ_3, relative au point M_3.

Détermination des dimensions transversales d'une pièce soumise à la flexion.

197. — Conditions nécessaires pour qu'un solide de section constante résiste sans altération aux forces qui en déterminent la flexion.

En étudiant les phénomènes généraux de la flexion plane d'un solide de section constante, nous avons reconnu que les forces extérieures déterminent l'extension de certaines fibres longitudinales, tandis que d'autres sont comprimées.

Il importe, pour que l'élasticité de la pièce ne soit altérée en aucun point, que nulle part la plus grande force longitudinale rapportée au mètre carré, ne dépasse la limite R de la charge pratique indiquée par les tables, et c'est d'après cette considération que les dimensions des diffé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rentes pièces employées dans les constructions doivent être déterminées.

198. — **Observation sur le glissement transversal et le glissement longitudinal.** — Nous montrerons un peu plus loin que cette condition n'est pas à elle seule suffisante et qu'il est nécessaire dans chaque cas de s'assurer que les actions développées ne peuvent déterminer le cisaillement de la pièce ni dans le sens transversal, ni dans le sens longitudinal ; ou en d'autres termes qu'aucune partie de l'une de ces sections ne peut glisser dans les conditions les plus défavorables, sur la partie voisine. Toutefois les premiers calculs seront faits comme si la considération du glissement transversal et celle du glissement longitudinal ne devaient intervenir qu'à titre de vérification ultérieure.

199. — **Rappel de la formule générale.** — La formule générale établie au N° 132 est

$$R = \frac{\nu\mu}{I} + \frac{N}{\omega} ;$$

et il faut qu'elle soit satisfaite pour les points en lesquels la valeur du binôme qui forme le second membre est la plus grande, R étant pour chaque nature de matière la charge pratique de sécurité et l'action des forces extérieures étant résumée dans les notations N et μ.

Les dimensions linéaires de la pièce qu'il s'agit de déterminer sont implicitement comprises dans les valeurs de ν, I et ω, et puisque l'on n'a qu'une seule équation entre ces trois variables, le problème du calcul des dimensions, pris au point de vue analytique, est, en général, indéterminé. Il ne devient déterminé que si l'on s'impose d'autres conditions et en particulier celle qui consiste à trouver la poutre dont le prix de revient serait un minimum pour des valeurs données de N et de μ.

200. — **Cas où l'on n'a pas de compression longitudinale à considérer.** — L'indétermination qu'on vient d'indiquer rend assez complexe l'appréciation des conditions les plus favorables à chaque cas particulier ; et pour simplifier la question on peut supposer d'abord que la valeur N de la compression longitudinale est nulle en tous les points du solide. La formule se réduit alors à

$$R = \frac{\nu\mu}{I}, \quad \text{d'où} \quad \frac{I}{\nu} = \frac{\mu}{R} ;$$

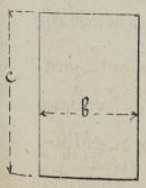
Le second membre de cette équation est proportionnel à μ, ce qui montre que le rapport $\frac{I}{\nu}$, constant pour la pièce dont les dimensions auront été déterminées, doit satisfaire à la plus grande valeur de μ. Le problème peut alors s'énoncer ainsi :

Trouver la section minimum pour laquelle la valeur de $\frac{I}{\nu}$ sera égale à la valeur maximum de $\frac{\mu}{R}$ dans les conditions de la poutre proposée.

La formule

$$R = \frac{\nu\mu}{I} \qquad (1)$$

peut servir au calcul des dimensions de la section transversale du solide, si l'on connaît la forme de cette section et si l'on s'arrange pour que la solution de la question ne dépende que d'une seule inconnue.



Par exemple, s'il s'agit d'une section rectangulaire, dont les côtés sont b et c, on a

$$I = \frac{1}{12} b c^3 ;$$

et puisque l'on suppose N = 0, la ligne des fibres neutres coïncide avec la ligne moyenne, d'où résulte $\nu = \frac{c}{2}$; par suite la formule (1) devient :

$$R = \frac{6\mu}{bc^2}. \qquad (2)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si le rapport des dimensions b et c est connu et si l'on fait, par exemple, $b = nc$, il vient

$$R = \frac{6\mu}{nc^3}, \quad \text{d'où} \quad c = \sqrt[3]{\frac{6\mu}{nR}}.$$

En posant $bc = \omega$, dans la formule (2), ce qui donne

$$R = \frac{6\mu}{c\omega},$$

on voit que des sections très différentes peuvent résister à un même moment fléchissant et que la section ω est alors d'autant moindre que la hauteur c est plus grande. Mais plusieurs considérations s'opposent à ce que l'on augmente indéfiniment la hauteur dans le but de diminuer la section.

1°___ La pièce, exagérée dans le sens de sa hauteur, a une plus grande tendance à se voiler.

2°___ La stabilité est moindre, en ce sens que le solide repose sur ses supports par une plus petite surface de contact.

3°___ Le glissement transversal et le glissement longitudinal sont plus à craindre lorsque l'épaisseur diminue, comme on le verra un peu plus loin.

201. Définition et valeur du coefficient économique des différentes poutres. ___ Dans toutes les questions de cette nature la section ω de la poutre peut, en quelque sorte donner la mesure de la dépense qu'il faudra faire pour se la procurer.

D'un autre côté, le maximum du moment fléchissant μ auquel la poutre doit résister, fixe la mesure de l'effet utile de cette poutre. Le rapport $\frac{\omega}{\mu}$ donne ainsi l'évaluation de la dépense à faire pour chaque unité du moment fléchissant, et dans ces conditions on peut lui donner le nom de **coefficient économique de la poutre**. Il est clair que la poutre la plus avantageuse sera celle pour laquelle ce coefficient sera un minimum.

La formule (1) du N° précédent peut s'écrire

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{R} \cdot \frac{v}{I},$$

et en multipliant par ω, il vient, pour l'expression du coefficient $\frac{\omega}{\mu}$,

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{\omega}{R} \cdot \frac{v}{I}.$$

On peut donner à cette expression une forme qui se prête plus facilement à la discussion; car, en désignant par c la hauteur de la section et en posant

$$\omega = nc^2, \quad \frac{I}{v} = pc^3,$$

n et p étant des coefficients qui dépendent uniquement de la forme et non des dimensions du solide, il vient

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{n}{pRc},$$

et l'on voit d'une manière générale, que si n et p conservent les mêmes valeurs pour des sections semblables, le coefficient $\frac{\omega}{\mu}$ varie en raison inverse des hauteurs des sections.

Enfin, comme on a aussi

$$pc^3 = \frac{I}{v} = \frac{\mu}{R}, \quad \text{d'où} \quad c = \left(\frac{\mu}{pR}\right)^{\frac{1}{3}},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On peut encore écrire

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{u}{p^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{R^{\frac{2}{3}} \mu^{\frac{1}{3}}}$$

ce qui montre que le coefficient économique est :

1°. — Proportionnel à u. Donc la largeur du solide doit être réduite au minimum.

2°. — Inversement proportionnel à $p^{\frac{2}{3}}$; par suite p doit être le plus grand possible.

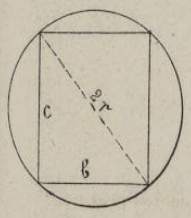
3°. — Proportionnel à $\frac{u}{p^{\frac{2}{3}}}$; d'où il suit que pour une même valeur de μ et de R, ce rapport donne la véritable mesure du coefficient économique ; et deux solides seront de même valeur économique si ce rapport est le même pour chacun d'eux. Nous désignerons dans ce qui va suivre ce rapport $\frac{u}{p^{\frac{2}{3}}}$, qui est indépendant des dimensions absolues de la section, sous le nom de **coefficient économique du profil**.

4°. — Inversement proportionnel à $R^{\frac{2}{3}}$; par conséquent deux poutres de matières différentes et de sections semblables qui conviennent à une même valeur du moment fléchissant ont des coefficients économiques inversement proportionnels à la puissance $R^{\frac{2}{3}}$ de la charge pratique R.

5°. — Inversement proportionnel à $\mu^{\frac{1}{3}}$; donc sous le rapport du coefficient économique il y a un avantage réel à considérer de grandes valeurs de μ. Les sections semblables sont d'autant plus avantageuses que la valeur de μ est plus grande.

Ces diverses considérations trouveront leur application dans l'examen que nous nous proposons de faire des formes les plus voisines que prend la section transversale d'un solide pour les différents matériaux.

202. — Profil transversal des pièces de bois. — Les pièces de bois que l'on soumet à la flexion sont toujours de section rectangulaire et le rapport de leurs dimensions transversales est déterminé par la condition du meilleur parti à tirer d'un arbre d'un diamètre donné 2r. Pour extraire de la section circulaire de cet arbre, le profil rectangulaire le plus résistant, c'est-à-dire celui pour lequel la valeur de $\frac{I}{v}$ est un maximum, il suffit de remarquer que les côtés b et c doivent satisfaire à la relation $c^2 = 4r^2 - b^2$, et par conséquent l'on a



$$\frac{I}{v} = \frac{1}{6} b c^2 = \frac{1}{6} b (4r^2 - b^2) \; ; \text{ d'où } d\frac{I}{v} = \frac{1}{6} (4r^2 - 3b^2) db .$$

La condition du maximum de $\frac{I}{v}$ est évidemment donnée par la relation

$$4r^2 - 3b^2 = 0,$$

d'où l'on déduit successivement,

$$b = \frac{2}{3} r\sqrt{3} = 1,1547.r, \qquad c = \frac{2}{3} r\sqrt{6} = 1,6330.r, \qquad b = \frac{1}{2} c\sqrt{2} = 0,7071.c.$$

Les praticiens sont arrivés à la même conclusion, et l'on prend généralement

$$b = \frac{2}{3} c = 0,6667.c .$$

Le coefficient économique de ce profil, pour lequel on a

$$u = \frac{2}{3} = 0,6667, \qquad p = \frac{1}{9} = 0,1111, \qquad p^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{81}} = 0,2311,$$

est alors

$$\frac{u}{p^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{81} = 2,8845 .$$

Pour le sapin, la pièce de petit échantillon la plus usuelle est le madrier $0^m,08 \times 0^m,22$;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mais elle ne peut convenir que pour des valeurs très-faibles de p, et elle peut être considérée comme la moitié d'une poutre répondant aux conditions précédentes.

203. — Profil transversal des pièces en fer. — Le mode de fabrication des pièces en fer permettant de les obtenir sous toutes les formes, on a dû rechercher celles qui se prêtant aux opérations ordinaires du laminage, fourniraient le coefficient économique le plus favorable.

Il faudrait pour cela employer des fers très-hauts et très-minces qui n'auraient pas dans le sens transversal une suffisante rigidité et l'on a été conduit, par cette considération, soit à l'emploi de fers plats d'une hauteur restreinte, soit à celui des fers à double T, soit enfin aux sections que l'on peut obtenir par voie d'assemblage au moyen de plusieurs pièces juxtaposées.

204. — Profil des pièces rectangulaires en fer. — Il est bien rare que l'on emploie actuellement des poutres en fer à section rectangulaire dans les planchers ou dans les combles, mais il peut quelquefois être nécessaire d'y recourir dans d'autres constructions de moindre importance. Une bonne proportion dans ce cas est celle de $b = \frac{1}{5} c$, qui correspond à

$$I = \frac{1}{12} bc^3 = \frac{1}{60} c^4 ; \quad \frac{I}{v} = \frac{1}{30} c^3 \quad \text{et} \quad \omega = bc = \frac{1}{5} c^2 ;$$

d'où l'on déduit $\quad u = \frac{1}{5} = 0,2 , \qquad p = \frac{1}{30} = 0,0333 , \text{ et } \frac{u}{p^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{5} \sqrt[3]{900} = 1,9310 .$

Dans le cas d'une section carrée, on a

$$I = \frac{1}{12} c^4 , \quad \omega = c^2 , \quad u = 1 , \quad p = \frac{1}{6} = 0,1667 , \quad \frac{u}{p^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{36} = 3,3019 .$$

En posant d'une manière générale $b = \beta c$, il vient

$$I = \frac{1}{12} \beta c^4 , \quad \omega = \beta c^2 , \quad u = \beta , \quad p = \frac{1}{6} \beta , \quad \frac{u}{p^{\frac{2}{3}}} = \beta^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{36} = \beta^{\frac{1}{3}} \times 3,3019 .$$

Les mêmes proportions seraient applicables à la fonte dans le cas d'une pièce rectangulaire, mais la facilité que l'on a toujours de donner à ce métal, par le moulage, le profil que l'on désire en a la convenance de ne pas porter les épaisseurs au-delà de 0,03 à 0,04, conduisent presque toujours à l'emploi des profils en double T.

205. — Profil des pièces en fer à double T. — Le profil en double T à semelles égales, présente les particularités suivantes :

1° — La ligne des fibres moyennes se trouve au milieu de la hauteur du solide.

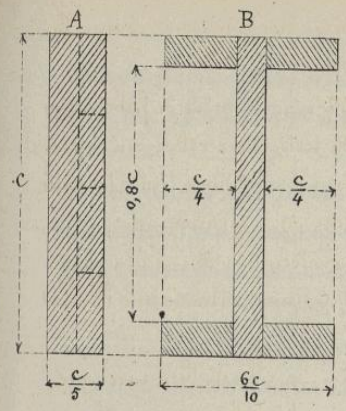
2° — La résistance par rapport aux actions perpendiculaires au plan de flexion est plus grande que pour le profil rectangulaire de faible épaisseur.

3° — Une grande partie de la section étant reportée à une certaine distance du centre de gravité, le moment d'inertie est plus grand que pour le solide rectangulaire de même section.

Ces avantages sont tels que ce profil doit être exclusivement employé pour les pièces de fer soumises à la flexion ; ils sont mis complètement en évidence par la comparaison entre le fer rectangulaire à $\frac{1}{5}$ de base et le fer à double T de même section que l'on en peut obtenir par une simple transformation géométrique.

Le fer rectangulaire est représenté en A ; pour l'amener au profil B, il suffit de réduire à moitié l'épaisseur du premier fer, de partager en quatre parties égales la partie supprimée et de disposer ces parties de part et d'autre, en forme d'ailes ou nervures horizontales, aux extrémités de la partie restante.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Ce fer à double T donne

$$I=\frac{1}{12}\left[\frac{3c}{5}\times c^3-\frac{c}{2}(0{,}8c)^3\right]=\frac{43}{1500}c^4;\quad \frac{I}{v}=\frac{43}{750}c^3,\quad \omega=\frac{1}{5}c^2;$$

en parsuite $u=0{,}2$, $p=\frac{43}{750}=0{,}0573$, $p^{\frac{2}{3}}=0{,}1487$

d'où l'on conclut $\frac{u}{p^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{5}\left(\frac{750}{43}\right)^{\frac{2}{3}}=1{,}3452.$

Mais on a trouvé pour le fer rectangulaire figuré en A,

$$\frac{u}{p^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{5}(900)^{\frac{1}{3}}=1{,}9310,$$

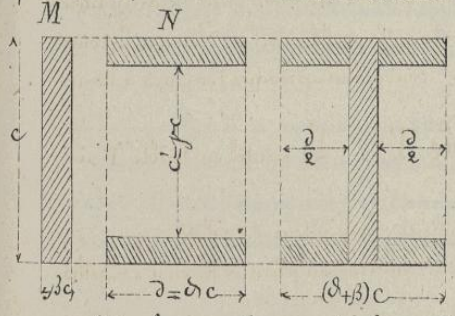
ce qui montre que la substitution du fer à T au fer rectangulaire de même section réduirait la dépense dans le rapport 1,3452 à 1,9310, rapport dont la valeur exacte est

$$\frac{1{,}3452}{1{,}9310}=\left(\frac{25}{43}\right)^{\frac{2}{3}}=0{,}6966.$$

Cette réduction de dépense par l'emploi des fers à T est souvent plus considérable et nous verrons que dans les conditions du meilleur emploi on obtient assez facilement pour la valeur du premier facteur du coefficient économique u : $p^{\frac{2}{3}}=1$, ce qui réduirait presque à moitié la section du fer à T équivalent à celle du fer rectangulaire à un cinquième de base. Quant aux avantages relatifs à la plus grande stabilité et à la plus grande résistance aux actions transversales l'examen seul de la figure équivaut à une démonstration.

206. — Expression générale du coefficient économique des profils en double T.

Tout profil en double T peut être considéré comme étant formé d'un corps vertical M et de deux bandes horizontales N, dont toutes les dimensions peuvent être exprimées en fonction de la hauteur commune c. On a alors



$$\omega=[\beta+\delta(1-\gamma)]c^2,\qquad u=\beta+\delta(1-\gamma),$$

$$I=\frac{1}{12}[\beta+\delta(1-\gamma^3)]c^4\qquad p=\frac{1}{6}[\beta+\delta(1-\gamma^3)],$$

d'où

$$\frac{u}{p^{\frac{2}{3}}}=\frac{6^{\frac{2}{3}}[\beta+\delta(1-\gamma)]}{[\beta+\delta(1-\gamma^3)]^{\frac{2}{3}}}=\frac{3{,}3019\,[\beta+\delta(1-\gamma)]}{[\beta+\delta(1-\gamma^3)]^{\frac{2}{3}}};$$

et en substituant dans les valeurs générales de $\frac{\omega}{\mu}$, il vient

$$\frac{\omega}{\mu}=\frac{6\,[\beta+\delta(1-\gamma)]}{cR[\beta+\delta(1-\gamma^3)]}=\frac{3{,}3019\,[\beta+\delta(1-\gamma)]}{R^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}[\beta+\delta(1-\gamma^3)]^{\frac{2}{3}}}.$$

Entre les deux formes sous lesquelles se présente la valeur du coefficient économique, et qui permettront, dans tous les cas, de discuter l'influence des proportions du profil, on choisira la première pour comparer les coefficients économiques de deux fers de même hauteur ; la dernière quand on voudra comparer deux fers destinés à résister au même moment fléchissant μ. En faisant $\beta=0$, dans cette formule générale, on trouve pour expression du coefficient économique relatif aux deux bandes seulement

$$\frac{\omega}{\mu}=\frac{6}{Rc}(1-\gamma)^{\frac{1}{3}}=\frac{3{,}3019}{R^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}}\delta^{\frac{1}{3}}(1-\gamma)^{\frac{1}{3}}.$$

Pour $\delta=0$ on revient nécessairement à la formule générale des profils rectangulaires.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{G}{Rc} = \frac{3,3019}{R^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}} P^{\frac{1}{3}}.$$

207.—Profils des fers à T du commerce. — Un grand nombre d'usines sont munies de laminoirs pour les fers à double T dont la hauteur varie de $0^m,10$ à $0^m,40$. On en trouve même, depuis quelques années, qui ont jusqu'à un mètre de hauteur.

L'épaisseur du corps de ces fers varie depuis $b = 0^m,020$ pour les plus grands, jusqu'à $b = 0^m,005$ pour les plus petits. Les ailes ont à peu près la même épaisseur que le corps, mais leur largeur diffère beaucoup; dans les fers de la plus grande dimension on a seulement $d = 0,18$, et cette valeur de d arrive quelquefois jusqu'à être peu différente de celle de c.

Pour la construction des planchers on est conduit à employer ces fers à larges ailes qui sont ordinairement moins hauts. Dans les combles on n'a pas les mêmes raisons pour écarter les fers de grande hauteur.

Les fers à T du commerce sont figurés dans des albums publiés par les différentes usines; dans quelques-uns de ces albums se trouve en même temps l'indication de la valeur de $\frac{I}{v}$, celle du poids par mètre, et de la charge totale, supposée uniformément répartie, que ce fer peut supporter sans que R dépasse 6, 8 ou 10^K par millimètre carré.

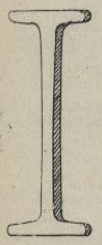
La valeur ω peut toujours s'obtenir d'après les dimensions indiquées sur le dessin, mais on peut aussi la déduire du poids K par mètre de longueur; car le mètre cube de fer pesant à peu près 7800 kilog., le poids du mètre linéaire d'une section ω sera aussi donné par la relation

$$7800\,\omega = K, \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{K}{7800}.$$

Ayant calculé la valeur de $\frac{\mu}{R} = \frac{I}{v}$ pour la construction que l'on veut établir, on pourrait se borner à chercher dans l'une de ces tables la valeur de $\frac{I}{v}$ équivalente et adopter immédiatement le fer correspondant.

Dans le cas où l'on ne trouverait dans les tables qu'une valeur trop éloignée de celle dont on a besoin, on pourrait employer le fer qui donne, par défaut, la valeur approchée de $\frac{I}{v}$ en se réservant d'augmenter l'épaisseur de l'âme de la pièce.

Les laminoirs peuvent se prêter à la réalisation de cette surépaisseur, et il suffit pour cela d'augmenter un peu l'écartement entre les cylindres. Les valeurs de $\frac{I}{v}$ et de ω étant connues, et la surépaisseur étant e, on aura, en désignant par des accents les nouveaux éléments de la section, et en remarquant que l'on ajoute ainsi au solide une bande de hauteur c et d'épaisseur e.



$$I' = I + \frac{1}{12}ec^3, \qquad \frac{I'}{v} = \frac{I}{v} + \frac{1}{6}ec^2, \qquad \omega' = \omega + ec;$$

L'augmentation $\Delta\frac{I}{v}$ à donner à $\frac{I}{v}$ étant comme d'après les données de la question il suffira de calculer e par la relation

$$\Delta\frac{I}{v} = \frac{I'}{v} - \frac{I}{v} = \frac{1}{6}ec^2, \quad \text{d'où} \quad e = \frac{6\Delta\frac{I}{v}}{c^2}.$$

Cette surépaisseur ne devra jamais dépasser 5 millimètres et seulement dans le cas où les tables auront fait connaître qu'elle peut être réalisée.

Ce mode de détermination est dans doute très-facile, mais nous ferons remarquer que le résultat de cette recherche sera plus ou moins favorable selon que l'on aura jeté les yeux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

un peu au hasard, sur telle partie ou telle autre de l'une des tables. On procèderait d'une manière plus sûre si l'on connaissait le coefficient économique des différents profils.

208. — Table des coefficients économiques des profils des fers à I du commerce. — Pour faciliter cette recherche nous avons calculé la table suivante des coefficients économiques de plusieurs profils en double T, et nous y avons compris, pour la facilité des comparaisons, ceux de quelques autres sections de forme régulière.

Désignation des profils.	Valeurs de			
	u	p	$p\frac{2}{3}$	$u : p\frac{2}{3}$.
Profil circulaire	0,785	0,098	0,213	3,690.
Profil carré	1,000	0,167.	0,303	3,302
Profil rectangulaire à $\frac{2}{5}$ de base	0,667	0,111	0,231	2,885
Profil en croix à un $\frac{1}{10}$ d'épaisseur	0,190	0,017	0,066	2,879
Profil rectangulaire à $\frac{1}{5}$ de base	0,200	0,033	0,103	1,931
Profil rectangulaire à $\frac{1}{10}$ de base	0,100	0,017	0,066	1,515
Profil en double T du N° 205	0,200	0,057	0,149	1,345
Fers en double T de MM^rs Dupont-Dreyfus (à planchers)	0,245	0,061	0,156	1,572
$c = 0,097$, Pl. 19, et $c = 0,220$, Pl. 22.	0,065	0,018	0,069	0,935
Fers en double T de MM^rs Dupont-Dreyfus (larges ailes)	0,281	0,075	0,177	1,585
$c = 0,117$, Pl. 23 et $c = 0,261$, Pl. 28.	0,077	0,023	0,081	0,957
Fers en double T de MM^rs Dupont-Dreyfus (très-larges ailes)	0,312	0,091	0,203	1,536
$c = 0,157$, Pl. 29 et $c = 0,300$ Pl. 34	0,078	0,024	0,083	0,930
Grand fer en double T de l'usine de Commentry ($c = 0,498$)	0,078	0,023	0,081	0,957
Grand fer en double T de MM^rs Petin Gaudet ($c = 0,596$)	0,046	0,013	0,055	0,835
— d° — d° ($c = 0,795$)	0,033	0,009	0,041	0,792
— d° — d° ($c = 0,996$)	0,028	0,007	0,038	0,751

Lorsqu'à l'aide de la table précédente on aura reconnu la forme du profil la plus convenable, la valeur de la hauteur c sera ensuite donnée par la relation

$$\frac{\mu}{R} = \frac{I}{v} = pc^3, \quad \text{d'où} \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{pR}}.$$

On voit ainsi que pour le calcul des dimensions de la pièce la valeur de p est nécessaire, et c'est pour cela que nous l'avons indiquée dans la table. La surface de la section transversale correspondante sera

$$\omega = nc^2.$$

On arriverait également à une bonne solution, en calculant pour chaque fer des tables, la valeur du rapport $\omega : \frac{I}{v}$, à l'aide de la relation générale

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{\omega v}{RI}.$$

En opérant de cette façon on obtiendrait immédiatement la valeur complète du coefficient économique de la section.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

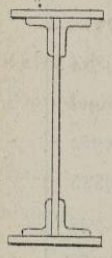
209.—Observation sur les profils compris dans le tableau.— Le tableau précédent a exigé pour sa rédaction le calcul de tous les fers compris dans l'album de Mrs Dupont-Dreyfus, édition de 1869, mais nous n'y avons compris que ceux qui, dans chaque catégorie, ont fourni pour le coefficient économique les valeurs maximum et minimum. Les fers intermédiaires donnent des coefficients intermédiaires.

On remarque en général que les procédés de laminage exigeant que toute la masse conserve une température convenable pendant toute la durée d'une opération, on ne peut réduire le corps, même pour les fers de petites dimensions, au-dessous d'une certaine épaisseur.

Les quatre derniers fers doivent être considérés comme exceptionnels et il nous paraît inutile d'en indiquer toutes les dimensions.

Provenances	c	b	b+d	$\frac{1}{2}(c-c')$
Commentry	0,498	0,020	0,158	0,034
Pétin et Gaudet N° 1	0,590	0,017	0,192	0,017
Pétin et Gaudet N° 2	0,795	0,018	0,192	0,018
Pétin et Gaudet N° 3	0,996	0,020	0,199	0,023

210.—Profil des poutres formées au moyen d'assemblages.— A défaut de fers spéciaux de dimensions convenables on construit souvent des fers à double T au moyen d'une âme en tôle, aux deux extrémités de laquelle on assemble des cornières par des rivets. Ce

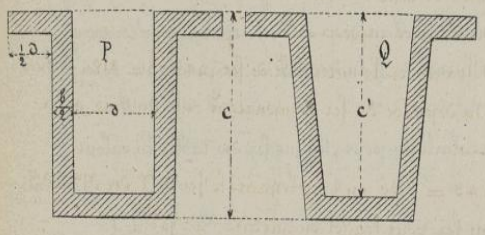


mode de construction permet d'employer des corps plus minces, mais la matière n'est pas aussi bien répartie aux extrémités, à moins que l'on n'ajoute encore une semelle au-dessous des cornières, comme le montre la figure ci-contre.

Nous n'avons pas calculé le coefficient économique de ces profils qui peuvent varier à l'infini.

C'est à l'aide de deux profils semblables que l'on peut former les plus grandes poutres tubulaires pour les ponts de chemins de fer.

211.—Profil des pièces de fer en U.— Le profil en U, indiqué par la figure P, peut être comparé à celui d'un fer à double T, dont le corps serait d'une épaisseur double de celle de chacun des jambages de l'U. Cette forme offre les mêmes avantages que les fers à double T; elle se calcule de la même façon, et quand elle est retournée, elle repose sur les appuis par un large empatement plus favorable, au point de vue de la stabilité, que la semelle des fers à T. Il est essentiel, cependant, que le centre de gravité de la section soit au milieu de la hauteur, car toute inégalité à cet égard, se traduisant d'un côté par l'augmentation de la valeur de V, réduirait la valeur de $\frac{I}{v}$ dans une notable proportion. En



observant cette règle on peut tirer un bon parti des fers dont la forme, indiquée par la figure Q, n'est qu'une nouvelle traduction de la figure P, sans changement dans la hauteur ni dans la section, ni dans le moment d'inertie. Les mêmes formules pourraient encore être employées dans les fers en forme de V, en y appliquant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les notations habituelles du fer à T équivalent.

212.—Profil des pièces en fonte en double T et en U. — La fonte pouvant se mouler sous toutes les formes, d'après un modèle spécial, on pourra, suivant les cas, déterminer en toute liberté les conditions les plus avantageuses au bon emploi du métal, en limitant toutes les épaisseurs des nervures à un maximum de $0^m,03$ à $0^m,04$. Ce mode de construction tend à disparaître depuis que l'industrie métallurgique peut fournir des fers à T de toutes dimensions, et l'on n'aura le plus souvent à y recourir que pour les pièces munies de certains appendices utiles pour l'assemblage de ces pièces.

213.—Comparaison entre les divers modes de construction en fer. — Pour établir la comparaison entre deux poutres de même matière, il suffira, dans tous les cas, de se reporter à la formule du N° 205; mais la détermination de l'économie relative n'exigera pas que l'on effectue tous les calculs.

Etant connues les valeurs de μ et de R, il suffira de les considérer comme constantes, et de comparer entre elles les valeurs du rapport $n : p^{\frac{2}{3}}$.

Pour le premier fer de l'usine de MM^rs^ Dupont et Dreyfus on a $n : p^{\frac{2}{3}} = 1,572$. D'un autre côté, celui que nous avons déduit par voie de transformation du fer rectangulaire à un cinquième de base a donné $n : p^{\frac{2}{3}} = 1,345$.

Nous aurons donc, à employer ce dernier, un avantage qui sera donné par le rapport

$$1,345 : 1,572 = 0,856.$$

Toute autre comparaison se ferait avec la même facilité, et l'on verrait combien il serait avantageux d'employer, pour le même objet, le profil Dupont et Dreyfus N° 2 pour lequel $n : p^{\frac{2}{3}} = 0,935$.

214.—Comparaison entre les pièces en fer et les pièces en bois. — La considération du coefficient économique permet également de comparer à priori les prix de revient auxquels conduiraient l'emploi de matériaux différents. Ainsi pour deux pièces rectangulaires, l'une en bois aux $\frac{2}{3}$ de base, l'autre en fer au $\frac{1}{5}$ de base, on a trouvé

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{2,8345}{R^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}}, \qquad \frac{\omega'}{\mu} = \frac{1,9310}{R'^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{2,8345}{1,9310}\left(\frac{R}{R'}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,6694\left(\frac{R}{R'}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

On fait ordinairement $R = 0,6 \times 10^6$; $R' = 6 \times 10^6$, ce qui ramène la relation précédente à

$$\frac{\omega'}{\omega} = 0,6694 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,6694 \times 0,2154 = 0,1442.$$

L'emploi du fer réduisant la section aux 0,1442 de celle du bois, on pourra, dès lors, juger de l'économie relative en calculant les prix correspondants à ce rapport.

Si l'on admet que le mètre cube de bois coûte 100 francs, et le mètre cube de fer $40 \times 78 = 3120$ francs correspondant au prix de 40^f^ les 100 kilogrammes, la dépense du fer comparée à celle du bois sera $\frac{0,142 \cdot 3120}{100}$ ou 4,43 fois plus grande.

On réduirait cette proportion à $0,69 \times 4,43 = 3,06$ en employant le fer à T du N° 205 et on pourrait la réduire encore en se servant d'un fer pour lequel on aurait $n : p^{\frac{2}{3}} = 1$.

215.—Détermination des dimensions transversales lorsque la compression longitudinale n'est pas nulle. — Quand le solide doit en outre résister à une compression longitudinale N, cette force, répartie sur toute l'étendue de la section ω, vient

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

s'ajouter aux forces développées par la flexion en chacun des éléments de cette section et, pour que le plus grand effort moléculaire développé ne dépasse pas la limite indiquée par la pratique, il faut satisfaire à la condition plus complexe

$$R = \frac{\nu\mu}{I} + \frac{N}{\omega}, \qquad (1)$$

dans laquelle μ et N devront toujours être comptés avec le même signe.

Cas où la compression longitudinale est constante. — En désignant par R' le plus grand effort moléculaire développé par mètre carré, sous l'action du moment fléchissant μ, et par R'' l'effort constant par mètre carré développé sous l'action de la compression N, on a d'une manière tout à fait générale pour tout solide qui répond aux conditions du problème

$$R' = \frac{\nu\mu}{I}, \quad \text{et} \quad R'' = \frac{N}{\omega},$$

et par suite, en remarquant que $R' + R''$ ne peut sans inconvénient dépasser R

$$R = R' + R'' = \frac{\nu\mu}{I} + \frac{N}{\omega}.$$

Cette relation fait voir qu'on peut considérer le solide comme s'il était formé de la réunion de deux autres devant exister séparément, l'un au maximum du moment μ, l'autre à la compression longitudinale constante N.

Le premier de ces solides devra être choisi de manière à satisfaire au moment μ de la manière la plus économique. Quant à la pression N, par cela même qu'elle transmet son action d'une manière uniforme, toute solution à cet égard est également économique et exige la même augmentation de section. Par suite, cette augmentation de section due à l'influence du terme $\frac{N}{\omega}$, peut être obtenue soit par une augmentation en hauteur seulement, faite dans le rapport de 1 à m, soit par une augmentation en largeur, soit enfin par une augmentation proportionnelle en hauteur et en largeur, ce qui donne les trois relations distinctes,

$$R = \frac{m\nu\mu}{m^3 I} + \frac{N}{m\omega}, \quad \text{d'où} \quad RI\omega m^2 - NIm - \nu\mu\omega = 0;$$

$$R = \frac{\nu\mu}{mI} + \frac{N}{m\omega}, \quad \text{d'où} \quad RI\omega m - NI - \nu\mu\omega = 0;$$

$$R = \frac{m\nu\mu}{m^4 I} + \frac{N}{m^2\omega}, \quad \text{d'où} \quad RI\omega m^3 - NIm - \nu\mu\omega = 0;$$

et l'on a ainsi, dans chacune des trois hypothèses, l'équation qui donne la valeur de m.

On peut encore déterminer la section du solide en se donnant à l'avance les rapports qui devront exister entre la hauteur inconnue c et les autres dimensions de la section; car en posant alors

$$\omega = nc^2, \quad \frac{I}{\nu} = pc^3,$$

n et p étant des quantités déterminées, l'équation (1) prend la forme

$$R = \frac{\mu}{pc^3} + \frac{N}{nc^2}, \quad \text{d'où} \quad Rpnc^3 - pNc - \mu n = 0, \qquad (2)$$

expression dans laquelle il suffit de remplacer N par sa valeur donnée en μ par le maximum de cette quantité pour avoir l'équation qui fait connaître la valeur de c.

Cas où la compression longitudinale est variable. — Lorsque la compression N est variable dans l'étendue de l'une des tranches d'un solide soumis à la flexion, on ne peut immédiatement indiquer l'abscisse pour laquelle se présentera la réaction élastique la plus grande, et qui ne doit en aucun cas dépasser R. On peut, sans faire la recherche de cette abscisse, obtenir approximativement une solution convenable,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en mettant pour μ et pour N leurs plus grandes valeurs dans l'équation (1) et en y remplaçant ensuite chacune des dimensions de la section par sa valeur en fonction de l'une d'elles, ce qui fournit une relation finale d'où l'on déduit la valeur de l'inconnue restante.

La solution ainsi obtenue satisfait encore au problème lorsque le maximum de N ne correspond plus à celui de μ, et il y a généralement peu d'intérêt à chercher une solution plus exacte.

Voici cependant la méthode rigoureuse que l'on peut suivre. Les quantités μ et N étant variable dans l'étendue de la tranche que l'on considère, on peut toujours poser

$$\mu = \varphi(x), \qquad N = \psi(x);$$

la relation (2) devient alors

$$R p u c^3 - p \psi(x) c - u \varphi(x) = 0. \qquad (3)$$

Pour trouver la valeur limite que doit avoir c, il suffit évidemment de prendre la dérivée de c par rapport à x ce qui donne

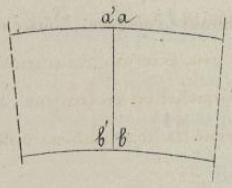
$$\frac{dc}{dx} = \frac{u\varphi'(x) + pc\psi'(x)}{3Rpuc^2 - p\psi'(x)};$$

et en posant

$$u\varphi'(x) + pc\psi'(x) = 0, \qquad (4)$$

la valeur de x tirée de cette dernière relation et mise ensuite dans l'équation (3) donne l'équation finale du troisième degré qui fait connaître la valeur de c.

216. — Résistance au glissement transversal.



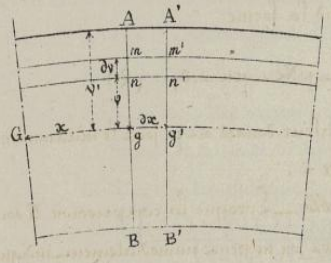
— On a vu précédemment qu'en chaque section, telle que ab, agit une force verticale T, désignée sous le nom d'effort tranchant, qui tend à rompre la pièce en faisant glisser ab sur a'b' comme le montre la figure.

Cet effort de glissement transversal ne pourra toutefois se produire si la section ω est suffisante et atteint au moins la valeur pour laquelle on a $\frac{T}{\omega} = R_1$, T étant le plus grand des efforts tranchants et R_1 la résistance par mètre carré que la pièce peut opposer au glissement transversal, c'est-à-dire au cisaillement.

217. — Résistance au glissement longitudinal.

— Il faut encore vérifier si la pièce fléchie peut résister à un autre effort des forces extérieures, celui qui tend à produire le glissement longitudinal d'une couche de fibres par rapport à celle avec laquelle elle est en contact, glissement résultant de ce que les fibres sont d'autant plus comprimées ou plus allongées qu'elles sont plus éloignées de la couche des fibres neutres.

Pour calculer cet effort de glissement longitudinal, dans le cas seulement où la tension longitudinale N est nulle, et où, par conséquent, la ligne neutre se confond avec la ligne moyenne, il faut considérer deux sections normales très voisines AB, A'B'; et entre ces deux sections, une couche horizontale de fibres dont la hauteur soit dv, la largeur z, et la longueur dx. Si R est la résistance longitudinale par mètre carré sur l'élément situé à la distance v de la ligne moyenne, l'effort longitudinal sur l'élément z dv est R z dv; et comme on a ici $R = \frac{vM}{I}$,



il en résulte

$$Rz\,dv = \frac{Mz\,dv}{I}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Lorsqu'on passe de l'élément projeté en mm, à celui qui est projeté en m'n', le moment fléchissant μ devient μ + dμ, la résistance R devient R', et l'effort longitudinal sur la section élémentaire projeté en m'n' est

$$R'z\,dv = \frac{(\mu+d\mu)zv\,dv}{I};$$

La résultante des actions Rz dv et R'z dv étant

$$(R-R')z\,dv = -\frac{d\mu z v\,dv}{I},$$

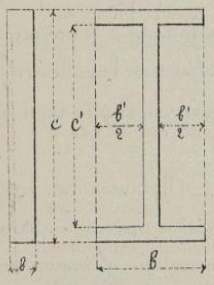
cette force est évidemment celle qui tend à faire glisser le prisme mm m'n' sur la surface projetée en nn', dans un sens qui dépend de la courbure de la pièce. En désignant cette force par dF, et en remplaçant dμ par la valeur connue $-T\,dx$, il vient

$$dF = \frac{T\,dx}{I} z v\,dv,$$

quantité qui croît comme v et qui montre que la force élémentaire de glissement atteint son maximum en AA'. La force totale qui tend à produire le glissement du solide AA'gg' sur la surface projetée en gg' étant la somme des forces dF, qui tendent à faire glisser l'un sur l'autre tous les prismes élémentaires compris entre AA' et gg', cette force totale a pour expression

$$F = \frac{T\,dx}{I}\int_0^{v'} z v\,dv.$$

En désignant par R_2 la résistance au glissement par mètre carré sur la surface projetée en gg' et par $b_0\,dx$ l'aire de cette surface, on a



$$R_2 = \frac{F}{b_0\,dx} = \frac{T}{I b_0}\int_0^{v'} z v\,dv. \qquad (1)$$

Cas d'une section rectangulaire. — On a ici

$$z = b = b_0 = \text{Constante},\quad v' = \frac{c}{2},\quad I = \frac{1}{12}bc^3,\quad \int_0^{v'} z v\,dv = b\int_0^{\frac{1}{2}c} v\,dv = \frac{1}{8}bc^2,$$

et par suite

$$R_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{bc} = \frac{3}{2}\frac{T}{\omega}.$$

Cas d'une section **I** *à semelles égales.* — On a $b_0 = b - b'$, $I = \frac{1}{12}(bc^3 - b'c'^3)$ et l'intégrale (1) est la somme de deux intégrales :

L'une, prise entre les limites $v = 0$ et $v = \frac{c'}{2}$, avec $z = b - b' = b_0 =$ constante, intégrale dont la valeur est $\frac{1}{3}(b - b')c'^2$.

L'autre, prise entre les limites $v = \frac{c'}{2}$ et $v = \frac{c}{2}$, avec $z = b =$ constante, intégrale qui a pour valeur $\frac{1}{8}b(c^2 - c'^2)$.

Il résulte de là, réductions faites,

$$R_2 = \frac{3}{2}\times\frac{T(bc^2 - b'c'^2)}{(bc^3 - b'c'^3)(b - b')};$$

expression qu'on peut écrire

$$R_2 = \frac{3}{2}\times\frac{T}{\omega}\frac{(bc^2 - b'c'^2)(bc - b'c')}{(bc^3 - b'c'^3)(b - b')} = \frac{3}{2}\frac{T}{\omega}\left(1 + \frac{bb'(c^2 + c'^2)(c - c')}{(bc^3 - b'c'^3)(b - b')}\right)$$

La quantité comprise dans la grande parenthèse est évidemment plus grande que l'unité ; si on la représente par m, l'expression de R_2 prend la forme $R_2 = \frac{3}{2}\frac{mT}{\omega}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

218. — Comparaison entre les diverses résistances moléculaires.

Il faut d'abord remarquer que si, dans la formule $R = \frac{\varphi\mu}{I}$ on pose

$$\frac{1}{\varphi} = pc^3 \quad \text{et} \quad c^2 = \frac{\omega}{n},$$

cette formule devient, par l'élimination de c^2 et de $\frac{I}{\varphi}$,

$$R = \frac{p}{n} \times \frac{\mu}{c\omega}.$$

Cela posé, les valeurs de R, R_1, et R_2 sont :

section rectangulaire, $\quad R = \frac{p}{n}\frac{\mu}{c\omega}, \quad R_1 = \frac{T}{\omega}, \quad R_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\omega}.$

section I à semelles égales, $\quad R = \frac{p}{n}\frac{\mu}{c\omega}, \quad R_1 = \frac{T}{\omega}, \quad R_2 = \frac{3}{2}\frac{mT}{\omega}$

Si R', R'_1, R'_2 désignent les limites qu'on ne doit pas dépasser dans la pratique, il faut, pour que le solide résiste convenablement aux efforts auxquels il est soumis, prendre la plus grande des valeurs ω fournies par les relations suivantes :

Section rectangulaire $\quad \omega \geqq \frac{p}{n}\frac{\mu}{cR'}, \quad \omega_1 \geqq \frac{T}{R'_1}, \quad \omega_2 \geqq \frac{3}{2}\frac{T}{R'_2}$;

Section I à semelles égales, $\quad \omega \geqq \frac{p}{n}\frac{\mu}{cR'}, \quad \omega_1 \geqq \frac{T}{R'_1}, \quad \omega_2 \geqq \frac{3}{2}\frac{mT}{R'_2}$;

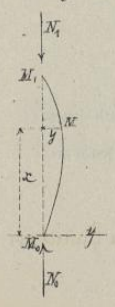
on l'on doit se demander, si, pour la détermination de la section ω, la valeur ω est plus ou moins grande que la valeur ω_2. Il n'y a pas à cet égard de solution générale ; une poutre en bois ou en fer pouvant être considérée comme composée de fibres longitudinales dont un faisceau de cordes peut donner l'idée, on doit généralement avoir

$$\frac{2}{3}R'_2 < R'_1, \qquad \text{d'où} \quad \omega_2 > \omega_1 ;$$

inégalité qui doit subsister encore lors même que la matière qui forme le solide est homogène, auquel cas on a $R'_1 = R'_2 = R'$.

Observation. — Les sections habituellement employées et indiquées dans les albums satisfont pour la plupart, à la condition relative au glissement longitudinal, condition qui détermine le minimum de largeur au milieu de la hauteur de la section. On doit faire remarquer cependant que l'agrandissement de la section en hauteur, en diminuant les intensités des forces qui constituent le moment résistant, éloigne la possibilité d'un glissement longitudinal, et que toute charge uniformément répartie sur toute l'étendue de la section est absolument sans action sous ce rapport.

219. — Pièces chargées dans le sens de leur longueur.



— Les pièces longues sur lesquelles on a constaté, dans l'étude de la compression, une flexion notable, doivent être examinées à ce point de vue lorsqu'elles servent de supports ; mais la théorie de ce mode de déformation laissant encore beaucoup à désirer, on se bornera, ici à présenter quelques notions théoriques qui sont, dans une certaine mesure, vérifiées par l'expérience.

Etant ainsi donnée, une pièce verticale chargée d'un poids N_1 et assujettie à ce que ses deux points extrêmes restent constamment sur une même verticale, le point M_0 étant le seul en lequel puisse s'exercer la réaction de l'appui inférieur, si le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

poids de la poutre est négligeable, cette réaction peut être assimilée à une force N_0 égale et contraire à N_1, et le problème à résoudre est la détermination de la forme de la ligne moyenne après la flexion.

220.—Condition générale d'équilibre. Pour que le problème puisse recevoir une solution, il faut d'abord chercher si les actions extérieures se font équilibre. Ces actions sont dues dans le cas le plus général, aux deux forces N_0 et N_1 égales et directement opposées, appliquées aux points M_0 et M_1, et à deux couples μ_0 et μ_1, dans le cas où le solide est encastré en M_0 et en M_1.

Les forces égales et opposées N_0 et N_1 étant séparément en équilibre il doit en être de même des deux couples qui doivent ainsi exister simultanément. L'un d'eux ne pourrait subsister sans l'autre, et par conséquent il n'y a lieu que d'examiner deux cas distincts ; celui où il n'y a d'encastrement ni en M_0 ni en M_1, et celui où il y a encastrement en ces deux points.

Si la pièce reste rectiligne, les moments μ_0 et μ_1 sont nuls dans le cas de l'encastrement, et les seules forces N_0 et N_1 étant dans le prolongement l'une de l'autre, il n'y aurait aucune raison, pour que la poutre s'infléchît dans un sens plutôt que dans une autre, si les sections extrêmes de la poutre avaient pour centres respectifs les points d'application des forces N_0 et N_1. La forme de la ligne moyenne ne peut donc être étudiée qu'en admettant une première flexion, qu'on peut supposer ici dans le plan de la figure.

221.—Équation de la ligne moyenne. Quelle que soit la forme de la ligne moyenne, le moment μ, par rapport à un point quelconque M, des forces extérieures situées au dessus de ce point, a pour expression

$$\mu = \mu_1 - N_1 y_1$$

ou d'une manière générale

$$\mu = -Ny,$$

y étant une nouvelle ordonnée comptée par rapport à la direction d'une force verticale N en laquelle on peut toujours composer la force primitive N_1 ainsi que la force inconnue du couple μ_1 qui tient compte de l'encastrement s'il y a lieu.

La valeur $-Ny$, mise dans la relation connue $EIf''(x) = \mu$, donne

$$EIf''(x) = -Ny, \quad \text{où} \quad EIf'(x)f''(x)\,dx = -Nyf'(x)\,dx,$$

c'est-à-dire

$$EIf'(x)\,df'(x) = -Ny\,dy.$$

En intégrant et en remplaçant ensuite $f'(x)$ par $\frac{dy}{dx}$, il vient,

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -Ny^2 + C, \quad \text{d'où} \quad dx = \sqrt{EI}\,\frac{dy}{\sqrt{C - Ny^2}}.$$

Cette dernière relation donne, par une seconde intégration,

$$x = \sqrt{\frac{EI}{N}}\,\arcsin\left(y\sqrt{\frac{N}{C}}\right) + C', \quad \text{d'où} \quad y = \sqrt{\frac{C}{N}}\,\sin\left[(x - C')\sqrt{\frac{N}{EI}}\right] \qquad (1)$$

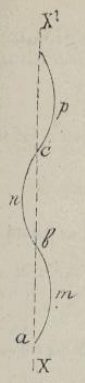
Cette équation, dans laquelle C et C' sont indéterminées, peut se ramener à une forme plus simple ; car, si l'on transporte l'origine au point de l'axe des x pour lequel on a $x = C'$, et si l'on pose ensuite

$$\sqrt{\frac{C}{N}} = D, \qquad \sqrt{\frac{N}{EI}} = A,$$

D étant une indéterminée et A une quantité connue, l'équation (1) devient

$$y = D\sin(Ax).$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Discussion de la courbe. — Il est facile de reconnaître que la courbe considérée au point de vue purement analytique, comme sinusoïde rapportée à la droite XX' qui n'est autre que l'axe du cylindre sur lequel serait tracée l'hélice dont cette sinusoïde serait la projection, et que l'on pourrait pour cette raison, appeler l'axe de la courbe.

L'origine est un point tel que a sur cet axe ; et dans la longueur d'un pas la courbe est formée de deux sinuosités amb, bnc, de même forme et de sens contraires. Les points situés sur l'axe ont pour abscisses,

$$x = \frac{n\pi}{A},$$

de sorte que la longueur du pas est mesurée par la quantité $\frac{2\pi}{A}$

L'ordonnée maximum est positive ou négative et numériquement égale à l'indéterminée D ; les valeurs correspondantes de x sont données par la relation

$$x = \frac{(2n+1)\pi}{2A}$$

222. — Partie de la sinusoïde avec laquelle se confond la ligne moyenne. — L'équation de la sinusoïde répondant aux deux cas déjà spécifiés du problème de la poutre chargée debout, l'axe de cette poutre doit se confondre, dans toute sa longueur, avec une partie de la sinusoïde ; et l'on doit rechercher séparément cette position suivant qu'il n'y a que des pointes d'appui ou des encastrements verticaux.

1° — *Appuis simples.* — Dans le moment N y la distance y est comptée à partir de la droite $M_0 M_1$; et comme cet axe est resté le même pour l'équation simplifiée on doit en conclure que le point M_0 se confond avec l'origine des coordonnées ; M_0 et M_1 sont respectivement les extrémités d'un demi-pas de la courbe, et le nombre des sinuosités de sens contraires est égal à n. Il faut donc que la longueur l de la poutre soit égale à n demi-pas, c'est-à-dire

$$l = n\pi\sqrt{\frac{EI}{N}}, \quad \text{d'où} \quad N = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}.$$

La plus petite de ces valeurs de N correspond à $n = 1$, d'où résulte

$$N = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

formule qui donne les résultats suivants :

Section carrée $\quad I = \frac{1}{12}c^4, \quad N = \frac{\pi^2 E c^4}{12 l^2}.$

Section circulaire $\quad I = \frac{1}{4}\pi r^4, \quad N = \frac{E\pi^3 r^4}{4 l^2}.$

2° — *Double encastrement vertical.* — La poutre est alors terminée en deux pointes telles que m et p pour lesquelles la tangente est verticale et distante l'un de l'autre d'un nombre entier de pas, ce qui donne

$$l = 2n\pi\sqrt{\frac{EI}{N}}, \quad \text{d'où} \quad N = \frac{4n^2\pi^2 EI}{l^2}.$$

La plus petite valeur de N correspond à $n = 1$ et a pour expression

$$N = \frac{4\pi^2 EI}{l^2},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce l'on voit qu'elle est quadruple de la valeur correspondante dans le cas des appuis simples. On en déduit les valeurs suivantes :

Section carrée $\quad I = \frac{1}{12} c^4, \quad N = \frac{E\pi^2 c^4}{3l^2}.$

Section circulaire $\quad I = \frac{1}{4}\pi r^4, \quad N = \frac{E\pi^2 c^4}{l^2},$

3°. — Dans le cas où l'encastrement aurait lieu seulement à la partie inférieure, le solide ne pourra être en équilibre s'il n'est en outre soumis à l'action d'une force horizontale qui résultera souvent de son mode de liaison avec d'autres supports verticaux.

223. — **Observation sur la théorie précédente.** — La théorie qui précède ne suffit pas complétement à déterminer la charge que peut supporter un poteau ou une colonne, parce qu'un tel support ne se trouve jamais dans les conditions mathématiques qui ont été admises, dans l'un ou l'autre des cas précédents. En supposant, d'ailleurs, que la valeur de N que donnent ces formules soit, dans chaque cas particulier, la limite qu'on ne doit pas dépasser pour que la pièce chargée debout ne fléchisse pas outre mesure, il faut encore que le support ne s'écrase pas ; et comme cette condition n'entre pas dans l'analyse précédente, les formules obtenues sont impropres à faire connaître la limite de la charge des supports de petite hauteur puisqu'elles donnent N aussi grand que l'on veut en faisant l assez petit. A défaut d'une théorie plus exacte on pourra employer les formules pratiques suivantes.

224. — **Formules d'Hodgkinson pour les solides chargés debout.**

Hodgkinson a résumé ses expériences sur les solides chargés debout par les formules suivantes :

Poteaux carrés en bois. — En désignant par c le côté de la section exprimé en centimètres, et par l la hauteur exprimée en décimètres, on a :

Pour le cas de la rupture	Pour la pratique
$N = 2562 \frac{c^4}{l^2}$	$N = 256{,}2 \frac{c^4}{l^2}.$

Si l'on exprime c et l en mètres, la dernière formule devient

$$N = 25\,620\,000 \frac{c^4}{l^2}, \quad \text{d'où} \quad c = 0{,}01406 (Nl^2)^{\frac{1}{4}}.$$

La formule théorique obtenue précédemment est

$$N = \frac{\pi^2 E}{12} \cdot \frac{c^4}{l^2} = 82\,250\,000 \frac{c^4}{l^2}, \quad \text{d'où} \quad c = 0{,}01050 (Nl^2)^{\frac{1}{4}};$$

mais elle conduirait à des dimensions trop faibles.

Colonnes pleines en fonte. — Le diamètre d'étain exprimé en centimètres et la hauteur l en mètres, les formules d'Hodgkinson sont :

Pour le cas de la rupture.	Pour la pratique
$N = 10676 \frac{d^{3.6}}{l^{1.7}}.$	$N = 1067{,}6 \frac{d^{3.6}}{l^{1.7}}$

En exprimant l et d en mètres, la deuxième formule donne

$$N = 337\,600\,000 \frac{d^{3.6}}{l^{1.7}}, \quad \text{d'où} \quad d = 0{,}004\,276 (Nl^{1.7})^{\frac{1}{3.6}}.$$

La formule théorique correspondante des cylindres non encastrés est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$N = \frac{\pi^3 E}{64}\cdot\frac{d^4}{l^2} = 4\,845\,000\,000\,\frac{d^4}{l^2}, \quad \text{d'où} \quad d = 0{,}006740\,(Nl^2)^{\frac{1}{4}};$$

en elle donnerait aussi des dimensions trop faibles.

Colonnes creuses en fonte. — Une colonne creuse pouvant être considérée comme étant la différence de deux colonnes pleines de diamètres d et d', la formule précédente donne, dans ce cas,

$$N = 337\,600\,000\,\frac{d^{3,6} - d'^{3,6}}{l^{1,7}}.$$

On peut d'ailleurs simplifier le calcul en remarquant que l'épaisseur e de la colonne est généralement donnée et comprise entre $0^m,03$ et $0^m,04$. Par suite, si d_1 est le diamètre moyen, on a $d = d_1 + e$, $d' = d_1 - e$, d'où

$$N = 337\,600\,000\,\frac{(d_1+e)^{3,6} - (d_1-e)^{3,6}}{l^{1,7}}.$$

Le numérateur, développé en série, donne

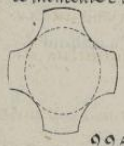
$$(d_1+e)^{3,6} - (d_1-e)^{3,6} = 7{,}2\,e\,d_1^{2,6}\left(1 + \frac{2.6.1,6}{1.2.3}\frac{e^2}{d_1^2} - \frac{2.6.1,6.0,6.0,4}{1.2.3.4.5}\frac{e^4}{d_1^4} + \dots\dots\dots\right);$$

et comme la série comprise dans la parenthèse est très convergente, il suffit de prendre le premier terme de cette série, ce qui donne, avec une approximation suffisante

$$N = 337\,600\,000 \times 7{,}2\,e\,\frac{d_1^{2,6}}{l^{1,7}}, \quad \text{d'où} \quad d_1 = 0{,}0002455\left(\frac{N\,l^{1,7}}{e}\right)^{\frac{1}{2,6}},$$

expression qui peut être facilement calculée par les logarithmes.

Section en forme de croix. — Cette forme de section, employée surtout dans les combles, en donne le moment d'inertie n'est pas égal dans tous les sens, ne rentre dans aucun des cas précédents. On calcule alors le support comme s'il était cylindrique, puis on lui donne, au moyen de nervures saillantes partant des deux extrémités, un accroissement de section tel, que le diamètre maximum, au milieu de la pièce soit environ les $\frac{5}{4}$ du diamètre calculé pour les extrémités.



225. — Observations relatives aux formules précédentes.

Les expériences d'Hodgkinson sur les poteaux chargés debout conduisent aux remarques suivantes :

1° — Dans les piliers longs, pour les mêmes dimensions transversales, la résistance à la rupture est à peu près trois fois plus grande lorsque les extrémités sont planes et perpendiculaires à la direction de l'effort, que lorsqu'elles sont arrondies. Cette remarque est d'accord avec la théorie. On a vu, en effet, que dans le cas d'encastrement aux deux extrémités, la résistance est quadruple de celle qui aurait lieu en l'absence de tout encastrement. Si l'expérience ne donne que 3 pour la valeur de ce rapport, c'est que l'encastrement n'est pas assez bien déterminé par les conditions de la pratique des constructions;

2° — Un pilier long, de dimensions transversales uniformes, dont les extrémités sont solidement fixées par des disques, ou des bases, ou par tel mode d'assemblage qui permette de considérer les deux extrémités comme parfaitement encastrées, présente la même résistance à la rupture par compression qu'un pilier de même section, mais de longueur moitié moindre, dont les extrémités seraient arrondies; ce qui revient à dire que dans ce cas la résistance à la rupture est 4 fois celle d'un pilier de mêmes dimensions lorsqu'il est libre de tourner autour de ses extrémités, et cette condition est précisément celle qui résulte de la théorie précédente.

3° — Le renflement ou l'accroissement du diamètre des colonnes, vers le milieu de leur longueur augmente seulement leur résistance dans le rapport de $\frac{1}{7}$ à $\frac{1}{8}$.

On peut, à ce qui précède, ajouter les considérations suivantes :

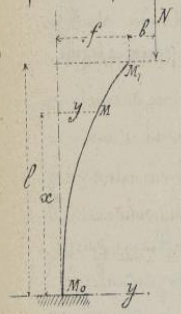
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La forme ronde se recommande par la complète symétrie de la valeur de son moment d'inertie pris par rapport à un axe quelconque, ce qui assure une égale flexibilité dans tous les sens.

La section carrée ne présente cette symétrie des valeurs du moment d'inertie que par rapport aux axes parallèles aux côtés du carré ou à ses diagonales.

En général, il faudrait qu'à section égale, la valeur de I fût la plus grande possible, mais on ne pourrait profiter de l'avantage que donnerait à cet égard un profil rectangulaire que si le sens de la flexion était à l'avance déterminé, comme par exemple pour un poteau qui devrait être maintenu entre deux parois verticales.

226. — **Prisme encastré à sa partie inférieure et chargé parallèlement à sa ligne moyenne.** — Soit M_1M_0 la position que prend la ligne moyenne lorsque la pièce est fléchie sous l'action de la force N située à la distance b du point M_1.



En admettant que le poids du solide soit négligeable par rapport à N, le moment de cette force, autour de l'axe projeté en M, a pour expression

$$\mu = N(b+f-y), \qquad (1)$$

qui donne $EIf''(x) = N(b+f-y)$,

ou $EIf'(x)f''(x)dx = N(b+f-y)f'(x)dx$;

ou encore $EIf'(x)df'(x) = N(b+f-y)dy$,

équation dont l'intégrale est

$$EI(f'(x))^2 = N[2(b+f)y - y^2].$$

La constante est nulle, car à cause de l'encastrement en M_0 on a $f'(x)=0$ pour $y=0$. En mettant pour $f'(x)$ sa valeur $\frac{dy}{dx}$, l'équation précédente donne

$$dx = \sqrt{\frac{EI}{N}} \times \frac{dy}{\sqrt{2(b+f)y - y^2}} = -\sqrt{\frac{EI}{N}} \times \frac{d\left(\frac{b+f-y}{b+f}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{b+f-y}{b+f}\right)^2}}$$

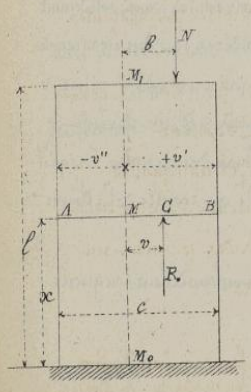
ensuite, en intégrant et en remarquant que la constante est encore nulle, puisque l'on a $y=0$ pour $x=0$, il vient

$$x = \sqrt{\frac{EI}{N}} \arccos\frac{b+f-y}{b+f};$$

d'où l'on déduit facilement $\qquad y = (b+f)\left[1 - \cos\left(x\sqrt{\frac{N}{EI}}\right)\right]. \qquad (2)$

La valeur de la flèche s'obtient évidemment en posant $y=f$ et $x=l$ dans l'équation (2), ce qui donne

$$f = \frac{b\left[1 - \cos\left(l\sqrt{\frac{N}{EI}}\right)\right]}{\cos\left(l\sqrt{\frac{N}{EI}}\right)}.$$



La valeur de f étant ainsi connue, la relation (2) permet de construire la ligne moyenne du solide après la flexion, et la relation (1) donne la valeur du moment fléchissant dans la section normale projetée en M.

227. — **Répartition des efforts dans les différentes fibres de la pièce.** — La résistance par mètre carré développée dans une fibre quelconque telle que celle qui passe par le point G, est donnée par la formule ordinaire de la flexion, qui devient ici, eu égard au signe de la compression longitudinale N,

$$R = \frac{v\mu}{I} + \frac{N}{\omega}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si la section normale projetée en AB est un rectangle ayant pour dimensions a et c, on a

$$I = \frac{1}{12} ac^3 = \frac{1}{12} c^2 \omega, \quad \mu = N(b + f - y),$$

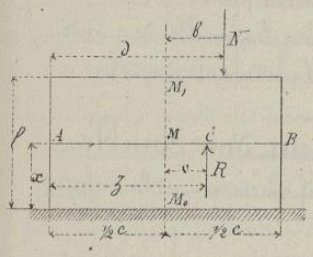
d'où

$$R = \frac{12 \nu N (b + f - y)}{c^2 \omega} + \frac{N}{\omega}.$$

228.— Cas où le solide a une très-petite longueur. — Dans le cas où la longueur du solide est très-petite par rapport à ses autres dimensions, f, et à plus forte raison y deviennent négligeables par rapport à b ; et l'on a plus simplement, pour la même section rectangulaire,

$$R = \frac{12 b \nu N}{c^2 \omega} + \frac{N}{\omega} = \frac{N}{\omega}\left(1 + \frac{12 b \nu}{c^2}\right).$$

229.— Loi de la répartition des pressions à la base des solides courts. — Les hypothèses précédentes étant admises, on voit que la résistance R par mètre carré est indépendante y, et par suite indépendante de l'abscisse x du point M ; cette résistance, variable avec ν, pour chacune des fibres qui traversent la section projetée en AB, peut donc être considérée comme étant la même dans toute l'étendue d'une même fibre longitudinale, et par suite la formule du N° précédent étant applicable à une section horizontale quelconque, cette formule exprime également la loi de la répartition des pressions à la base des solides courts. Dans ce cas, si l'on pose $b = d - \frac{c}{2}$ et $\nu = z - \frac{c}{2}$ l'expression précédente de R devient



$$R = \frac{2N}{\omega}\left[\left(\frac{6d}{c^2} - \frac{3}{c}\right)z + \left(2 - \frac{3d}{c}\right)\right],$$

valeur que l'on retrouvera en traitant de la répartition des pressions dans les constructions et de la loi dite du trapèze qui exprime les conditions de cette répartition.

Combles

230.— Objet des combles. — Les combles sont destinés à couvrir des espaces horizontaux, le plus souvent rectangulaires, au moyen de pièces de bois ou de fer, sur lesquelles repose la couverture et dont la disposition varie suivant les différents modes de construction.

Le constructeur doit pouvoir comparer ces différents modes, tant sous le rapport du prix de revient qu'au point de vue de la nature des matériaux et des facilités qu'il trouve à en assembler les différentes parties pour former un tout suffisamment stable.

On ne s'occupera ici que des combles formés de pièces rectilignes, en bois ou en fer. (fig. à la page suiv.)

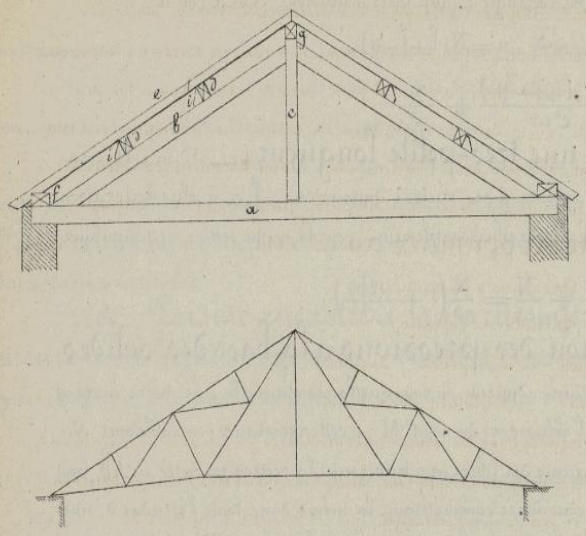
a — Entrait c — Poinçon e — Chevron g — Faîtage
b — Arbalétrier d — Panne f — Sablière i — Chantignolles

Le comble le plus simple se compose d'une série de *fermes* formées chacune de deux arbalétriers, d'un entrait et d'un poinçon. Ces fermes sont reliées entre elles par des pannes, un faîtage et deux sablières qui servent à supporter les chevrons et la couverture.

Les arbalétriers sont en bois ou en fer, simples ou armés.

Les arbalétriers simples sont souvent soutenus par des jambes de force qui en dimi-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



mem~ la portée et~ contribuem~ à en amoindrir les dimensions transversales.

Les tirants des arbalétriers sont toujours en fer comme la plupart des pièces qui doivent résister à la traction

Un arbalétrier en bois est armé n'a généralement qu'une contrefiche, également en bois. Le poinçon, formé de la même matière, doit avoir des dimensions transversales qui permettent de l'assembler avec les deux arbalétriers qui forment la ferme.

Pour les combles de grande portée on emploie souvent des poutres en fer à une et à trois contrefiches; le poinçon se réduit alors à une simple tige qui ne sert à autre chose qu'à empêcher la flexion de l'entrait.

231.— Efforts à considérer dans l'établissement d'un comble.—

Les efforts à considérer, supposés tous verticaux et distribués uniformément sur la surface du comble, sont, par mètre carré :

1°— Le poids m de la couverture

2°— Le poids m' de la charpente

3°— La charge m'' de sécurité, (pression du vent et poids accidentel de la neige).

De sorte que le poids total M par mètre carré doit être estimé à

$$M = m + m' + m''.$$

Le poids m' de la charpente n'est pas connu à priori, puisqu'il dépend évidemment des dimensions à déterminer; mais on l'introduit dans les premiers calculs pour un chiffre approximatif déduit de l'examen des constructions existantes.

232.— Valeurs approximatives à introduire dans les calculs avec l'inclinaison correspondante du comble.

	m	m'	m''	M	α
Tuiles plates	60 à 90^k	55^k	50^k	165 à 195	40 à 60°
Tuiles à emboitement	40 à 50	50	50	140 à 150	20 à 25°
Petites ardoises	30 à 35	50	50	130 à 135	23 à 45°
Grandes ardoises	25 à 35	50	50	125 à 135	18 à 23°
Zinc.	8 à 10	40	50	98 à 100	15 à 21°

La direction du vent est supposée ici verticale; mais on devra tenir compte de la plus grande intensité et de la direction la plus défavorable, si la construction était placée, sous ce rapport, dans des conditions exceptionnelles.

L'inclinaison α d'un comble est déterminé par la nature de la couverture et par le climat auquel la couverture doit être exposée. En choisissant la plus petite inclinaison compatible avec les données

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

précédentes, on diminuera la surface de couverture ainsi que la longueur des pièces inclinées.

Quant à la valeur de l'angle β dont le sinus se trouve au dénominateur des expressions de toutes les tensions des tirants, dans les poutres armées, on se borne le plus souvent à faire $\alpha - \beta = 5°$, ce qui suffit pour que l'entrait paraisse un peu relevé. Cette valeur de $\alpha - \beta$ devrait cependant être augmentée de beaucoup soit pour les combles très-bas dans lesquels il convient de conserver à l'entrait une certaine longueur, soit pour tous les cas dans lesquels il serait nécessaire de réserver une grande hauteur disponible au-dessous de l'entrait.

233. — Pièces principales à soumettre au calcul.

1° — Pièces soumises à la flexion : Arbalétriers ou pannes

2° — Pièces soumises à l'extension : Tirants ou entraits.

3° — Pièces soumises à la compression : Contrefiches, supports, etc.

4° — Pièces soumises au cisaillement : Boulons, rivets, etc.

On suppose dans ce qui suit, qu'il s'agit de l'une des fermes intermédiaires, et l'on considère toutes ces fermes comme étant également chargées ; les dimensions que l'on obtiendra pour l'une d'elles seront ensuite appliquées aux fermes de tête, bien que celles-ci soient moins chargées que les fermes intermédiaires.

234. — Calcul de l'arbalétrier. —

Les arbalétriers, qui constituent les pièces principales et les plus importantes d'un comble, supportent la presque totalité de la charge $m + m' + m''$, bien que le poids de l'entrait, lorsqu'il est en bois, soit en partie soutenu par les murs, au moins dans les dispositions les plus ordinaires. On considère les arbalétriers comme des pièces chargées uniformément dans toute leur longueur bien que la charge ne leur soit en réalité transmise de distance en distance que par l'intermédiaire des pannes.

En désignant par D la distance entre deux fermes, la charge totale d'un arbalétrier est DM ; la charge par mètre courant est $DM = p$, dont la composante normale est $p\cos\alpha$ et la composante longitudinale $p\sin\alpha$. On voit ainsi que pour une même portée la composante longitudinale augmente avec α, tandis que la composante normale diminue.

Cela posé, on peut procéder de deux manières différentes pour calculer les dimensions de l'arbalétrier.

1ère Méthode. — On prendra la formule

$$R = \frac{\nu\mu}{I} + \frac{N}{\omega}, \qquad (1)$$

et l'on obtiendra des conditions de sécurité convenables, ainsi qu'il a été dit au N° 218, en y remplaçant simultanément μ et N par le maximum de chacune de ces quantités. Les rapports qui doivent exister entre les différentes dimensions de la section ayant été fixés à l'avance, les valeurs de I et ω ne contiendront qu'une seule de ces dimensions, la hauteur par exemple, et l'on pourra la déterminer à l'aide de la formule (1).

2ème Méthode. — Si l'on veut avoir une détermination rigoureuse de la section, il faut recourir aux équations (3) et (4) du N° 215, c'est-à-dire

$$R p_1 u c^3 - p_1 c \psi(x) - u\varphi(x) = 0, \qquad (3)$$

$$p_1 c \psi'(x) + u\varphi'(x) = 0, \qquad (4)$$

dans lesquelles on met ici p_1 à la place de p pour éviter toute confusion de lettres. La valeur de x, déduite de l'équation (4) et mise ensuite dans l'équation (3), donne la relation finale qui sert à déterminer l'inconnue c, d'où l'on déduit ensuite les autres dimensions de la section.

Voici les valeurs à employer dans l'un ou l'autre cas.

	Poutre simple.	Poutre à une contrefiche	Poutre à trois contrefiches.
Pour le 1er cas	$\mu = \frac{1}{8} pl^2 \cos\alpha$.	$\mu = \frac{1}{8} pl^2 \cos\alpha$	$\mu = \frac{3}{28} pl^2 \cos\alpha$
	$N = N_1 + pl\sin\alpha$	$N_2 = N_2 + 2pl\sin\alpha$.	$N_4 = N_4 + 4pl\sin\alpha$.

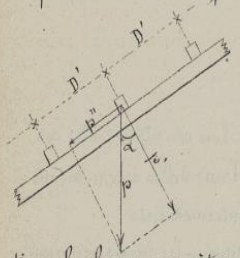
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

	Poutre simple	Poutre à une contrefiche	Poutre à trois contrefiches.
Pour le 2e cas	$\varphi(x)=\frac{1}{2}p\cos\alpha\,(x^2-lx)$	$\varphi(x)=\frac{1}{8}p\cos\alpha\,(4x^2-3lx)$.	$\varphi(x)=\frac{1}{28}p\cos\alpha\,(14x^2-11lx)$.
	$\psi(x)=N_1+p\operatorname{sin}\alpha\,(l-x)$.	$\psi(x)=N_2+p\operatorname{sin}\alpha\,(2l-x)$.	$\psi(x)=N_4+p\operatorname{sin}\alpha\,(4l-x)$.

On a d'ailleurs dans les deux cas,

$$N_1=\frac{p'}{2}\,pl\cos\alpha\operatorname{cotg}\beta, \qquad N_2=\frac{13}{8}\,pl\cos\alpha\operatorname{cotg}\beta, \qquad N_4=\frac{101}{28}\,pl\cos\alpha\operatorname{cotg}\beta.$$

235. — Calcul des pannes. — La charge verticale qui s'exerce sur une panne, en un point donné, peut se décomposer en deux forces, l'une normale et l'autre parallèle à la direction de l'arbalétrier. Sous l'influence de ces deux efforts, la panne tend à prendre une courbure autre que celle qui se produit dans le plan que l'on a considéré jusqu'ici comme le plan de flexion. On se soustrait aux difficultés qu'entraînerait cette complication en négligeant la composante p''; mais on compense cette cause d'erreur en considérant la panne comme une pièce simplement posée sur deux appuis bien qu'elle soit ordinairement prolongée de manière à reposer, sans solution de continuité, sur plusieurs fermes.



Dans ces conditions, si D' représente la distance de deux pannes consécutives, la charge par mètre courant sur chaque panne est, N° 231,

$$p=(m+m')D' \qquad \text{d'où} \qquad p'=p\cos\alpha\,;$$

et comme on a nécessairement ici $N=0$, la formule à employer pour calculer les dimensions transversales de la panne est

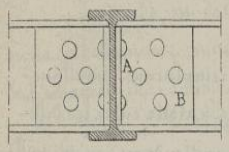
$$R=\frac{vM}{I},$$

dans laquelle on doit mettre pour M le maximum de cette valeur c'est-à-dire

$$M=\frac{1}{8}\,pl^2\cos\alpha,$$

qui correspond au point milieu de la longueur l de la pièce, cette longueur étant d'ailleurs la distance qui sépare deux fermes consécutives.

Assemblage d'une panne avec l'arbalétrier. — Lorsqu'il s'agit d'un comble en bois, les pannes sont simplement posées sur les arbalétriers et maintenues en place par des appuis, nommés chantignolles, fixés à l'arbalétrier. Pour les poutres armées en forme de I, les pannes doivent toujours être choisies de manière que leur hauteur totale soit comprise, pour la facilité de l'assemblage, entre les nervures de l'arbalétrier. Cet assemblage se fait au moyen de cornières fixées par des rivets ou par des boulons, d'une part à l'arbalétrier, d'autre part, aux deux pannes placées dans le prolongement l'une de l'autre. Le nombre et les dimensions des rivets sont déterminés par la condition que l'assemblage doit offrir une résistance égale à celle des pièces assemblées.



236. — Calcul des tirants. — Les tirants étant des pièces soumises à des efforts d'extension, la forme la plus favorable et la plus simple, pour les tirants en fer, est la forme cylindrique qui répartit plus sûrement les efforts d'une manière uniforme sur tous les éléments d'une même section transversale.

Si ω est la section que doit avoir la tige; S, la tension à laquelle elle est soumise et R la résistance par mètre carré qu'on ne doit pas dépasser dans la pratique, on a, quelle que soit la forme de la section,

$$R\omega=S$$

Pour une tige cylindrique dont le diamètre est d il vient

$$\frac{1}{4}\pi d^2R=S\,, \qquad \text{d'où} \qquad d=\sqrt{\frac{4S}{\pi R}}\,.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si l'on prend $R = 6 \times 10^6$, cette formule donne $d = 0,00036\sqrt{S}$.

On se borne souvent à calculer seulement le tirant le plus chargé pour donner ensuite aux autres le même diamètre ; cependant il peut, dans certains cas, y avoir une économie notable à calculer chaque tirant d'après les efforts auxquels il est soumis.

Les tirants en bois ne résistent que par leurs assemblages et leurs armatures. Lorsqu'ils sont employés comme entraits ils doivent être calculés par rapport à la flexion.

Boulons d'assemblage des tirants. — Ce boulon est soumis, de la part du tirant, à un effort de cisaillement ; en en admettant, comme on le fait ordinairement, que la résistance R' au cisaillement soit les 8/10 de la résistance R à l'extension, on a $R' = 0,8R$.

Lorsque les assemblages sont faits avec soin, l'effort transversal S que supporte le boulon se trouve réparti par moitié sur deux sections distinctes, et si d' est le diamètre du boulon on doit avoir

$$\frac{1}{4}\pi d'^2 \times 0,8R = \frac{S}{2}, \text{ d'où } d' = \sqrt{\frac{S}{0,4\pi R}}$$

Ce résultat, comparé à la valeur d précédente, donne

$$\frac{d'}{d} = \frac{1}{4}\sqrt{10} = 0,79, \text{ d'où } d' = 0,79\,d.$$

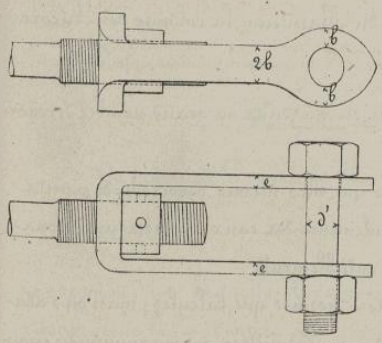
Si les assemblages n'offrent pas une précision suffisante, il sera prudent de considérer l'effort de cisaillement comme s'exerçant tout entier sur une même section, et dans ce cas le diamètre du boulon sera donné par la relation

$$\frac{1}{4}\pi d'^2 \times 0,8R = S, \text{ d'où } d' = \sqrt{\frac{S}{0,2\pi R}}$$

En comparant cette dimension au diamètre d du tirant on trouve

$$\frac{d'}{d} = \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1,12, \text{ d'où } d' = 1,12\,d.$$

Fourche qui termine le tirant. — Un tirant est souvent terminé par un enfourchement dont toutes les parties doivent résister à l'effort de traction S exercé par ce tirant. Si d' est le diamètre du boulon, e l'épaisseur de l'une des branches de la fourche et R l'effort de compression par mètre carré exercé par la portion du boulon qui est en contact avec les deux branches de la fourche, on doit avoir



$$2d'eR = S, \text{ d'où } e = \frac{S}{2d'R}$$

La dimension b est ensuite donnée par la relation

$$4beR = S, \text{ d'où } b = \frac{S}{4eR}.$$

On procède de la même manière pour déterminer les dimensions des plaques à l'aide desquelles les tirants sont assemblés soit entre eux soit avec les arbalétriers ou les contrefiches.

Moufles de tension. — Il est nécessaire que les tirants puissent être tendus pendant et après le montage à l'aide de filetages disposés dans le fond des fourches d'assemblage, ou de raccords à pas contraires réunissant les deux parties d'un même tirant. Dans ce cas il convient de disposer le filet de vis en saillie

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sur le corps du tirant de manière que le diamètre extérieur de la partie filetée soit les $10/8$ environ de celui du tirant.

237.— Calcul des contrefiches. — Ces pièces, qui sont le plus souvent en fonte et en forme de croisillons renflés vers le milieu de leur longueur, peuvent être calculées par la formule établie au N° 224, laquelle est ici

$$d = 0{,}004276\,(N l^{17})^{\frac{1}{3.6}}$$

Les contrefiches sont terminées, du côté des plaques d'assemblage, par un tenon dont les parties saillantes s'appuient contre les deux bords de ces plaques, et du côté de l'arbalétrier, soit par un autre tenon, soit par un enfourchement qui fonctionne en prenant pour surface d'appui le fond de cet enfourchement et dans lequel le boulon ne doit pas supporter l'effort de compression qui est transmis directement sur le bord de l'arbalétrier.

La fourche est ordinairement assez large pour laisser passer toute la semelle inférieure de l'arbalétrier, dont le corps se trouve renforcé par une fourrure en tôle en regard de l'enfourchement.

Il arrive souvent que les contrefiches, calculées d'après la formule précédente, paraissent un peu grêles et qu'on leur donne en réalité une section plus grande que celle qu'indique le calcul.

Les dimensions des différentes parties de la contrefiche à ses deux extrémités se calculent d'ailleurs sans aucune difficulté.

238.— Calcul des colonnes. — Lorsque les différentes fermes reposent sur des colonnes isolées, on peut calculer ces supports par les formules suivantes établies au N° 224.

Colonnes pleines	$d = 0{,}004276\,(N l^{17})^{\frac{1}{3.6}}$
Colonnes creuses	$d_1 = 0{,}0002455\left(\frac{N l^{17}}{e}\right)^{\frac{1}{2.6}}$.

Mais il ne suffit pas de donner à ces colonnes la forme cylindrique ; elles doivent être plus ou moins ornées et avoir une base et un chapiteau. Au-dessous du chapiteau, la colonne doit encore offrir une partie venue de fonte sur laquelle puissent s'assembler :

1° — Les sablières destinées à relier les colonnes entre elles, et qui, dans un grand nombre de constructions, devront constituer de véritables entablements.

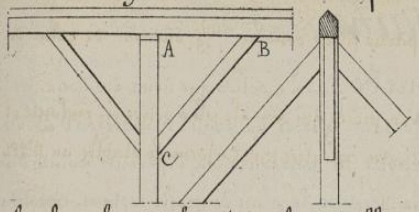
2° — Les sabots des arbalétriers, pièces fort importantes qui, elles-mêmes, serviront de pointe d'attache aux tirants. Les colonnes devront en outre servir à l'écoulement des eaux amenées au-dessous de chacune d'elle dans les chéneaux qui règnent au-dessous des entablements

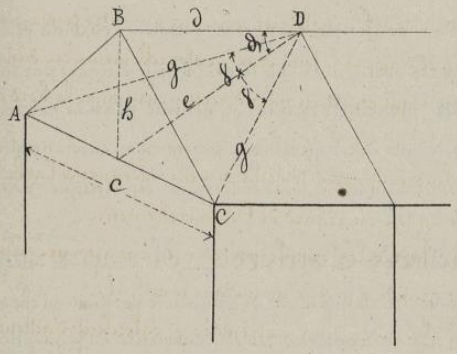
Ces accessoires indispensables seront, pour la plupart, plutôt dessinés que calculés ; mais on s'attachera à n'employer nulle part des épaisseurs de fonte de plus de 3 à 4 centimètres au maximum, des épaisseurs plus grandes conduisant presque toujours à un emploi de matière exagéré sans assurer au métal un plus grand degré d'homogénéité.

Comme pour les contrefiches on sera souvent conduit à augmenter les dimensions extérieures des colonnes pour qu'elles ne paraissent pas trop faibles.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

239. — Combles sous faite. — Contreventement. — Dans les combles en bois, chaque poinçon est accompagné de jambes de force qui, assemblées également avec le faitage, empêchent, par l'invariabilité de la longueur des trois côtés du triangle ABC, toute déformation dans le sens longitudinal. Ces pièces qui constituent, avec le faitage, le comble sous faite destiné à empêcher le roulement longitudinal du comble, sont au moins aussi importantes dans les combles en fer, bien qu'on en ait souvent négligé l'emploi.





Le fer de prétant mieux aux assemblages à boulons doit être plus particulièrement employé à la traction, et la ferme sous faite, qu'on désigne dans ce cas, plus particulièrement sous le nom de contreventement, est alors composée de tiges telles que CD et AD, qui prenant leurs points d'appuis sur les colonnes d'une ferme, viennent se réunir en un même point du faitage au-dessus d'une autre ferme.

En désignant par Π la plus grande pression horizontale par mètre carré que le vent peut exercer sur tout le pignon ABC supposé fermé, la pression sur le triangle ABC a pour expression $\Pi \frac{cb}{2}$.

Cette pression pouvant être remplacée par trois pressions égales agissant aux points A, B, C, l'action F qui s'exerce en B, suivant BD, est

$$F = \frac{1}{3}\Pi\frac{cb}{2} = \frac{1}{6}\Pi cb.$$

La composante F' de F, suivant ED, est

$$F' = \frac{F}{\cos\delta} = F\times\frac{e}{d} = \frac{1}{6}\Pi cb\times\frac{e}{d}.$$

Enfin, en désignant par F'' l'une des composantes égales, suivant AD et CD, de la force F', on a

$$F'' = \frac{F'}{2\cos\gamma} = \frac{F'}{2}\times\frac{g}{c} = \frac{F'}{2c}\sqrt{d^2+l^2} = \frac{\Pi cb}{12d}\sqrt{d^2+l^2}.$$

On déduit de là, pour le diamètre d'' de l'un des tirants AD et CD,

$$d''^2 = \frac{\Pi cb}{3\pi Rd}\sqrt{d^2+b^2},$$

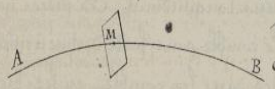
expression dans laquelle R représente toujours la résistance par mètre carré qu'on ne doit pas dépasser pour le fer soumis à un effort de traction.

Les tiges de contreventement pourront être établies aux deux extrémités du comble pour résister aux vents de sens contraires, et l'on pourra pour plus de sécurité, répéter dans les deux cas, la même disposition pour la seconde et pour l'avant-dernière ferme.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Poutre courbe.

240. — Définition de la poutre courbe. — Le solide que nous étudierons ici, sous le nom de poutre courbe, est celui que l'on obtient en faisant glisser un profil transversal Ω de



manière que son centre de gravité M, parcoure les différents points d'une courbe plane AB prise comme directrice, le plan de profil restant constamment normal à la ligne AB sans tourner autour de cette courbe, qui forme ainsi la ligne moyenne de la poutre.

On suppose que les dimensions du profil sont très petites par rapport au rayon de courbure de la ligne moyenne; et l'on admet que toutes les forces extérieures sont, ainsi que le profil, symétriques par rapport au plan de la directrice, plan qui reste, par suite, invariable et que l'on nomme plan de flexion.

Nous verrons ultérieurement que les résultats déduits des hypothèses posées sont encore applicables lorsque le profil varie d'une manière continue d'un point à un autre, tout en restant symétrique par rapport au plan de flexion.

241. — But et principe de la méthode à suivre. — Il s'agit de déterminer, pour une portion quelconque $M_0 M_1$ de la ligne moyenne, les changements de forme et de position qu'elle subira sous l'action des forces extérieures qui la sollicitent; et pour apprécier ces changements, on peut chercher séparément quelles sont pour chacune des causes de déplacement, les variations Δx_1, Δy_1 des coordonnées du point M_1, ainsi que l'angle φ_1 dont aura tourné la tangente en ce point, les quantités Δx_1 et Δy_1 devant être exprimées en fonction des actions extérieures et des valeurs Δx_0, Δy_0 et φ_0 relatives au point M_0.

242. — Causes diverses de déplacements à considérer. — Le problème ainsi posé conduit à étudier, pour le point M_1, les variations qui peuvent résulter des causes suivantes:

Déplacement de la ligne moyenne sans déformation de cette courbe.

Variation de la ligne moyenne résultant d'un changement de température.

Déformation de la ligne moyenne sous l'action des forces extérieures.

Or, lorsqu'une courbe plane se déplace d'une manière quelconque dans son plan sans éprouver aucune déformation, ce déplacement peut toujours être considéré comme résultant d'un transport de la courbe parallèlement à elle-même, dans une position donnée, et d'une rotation de cette dernière position autour d'un point quelconque du plan, le point M_0 par exemple.

Quant à la déformation résultant de l'action des forces extérieures, on peut la considérer comme étant produite par la variation de longueur et par la rotation de chacun des éléments de la ligne moyenne.

On a donc cinq causes distinctes de déplacements à considérer:

1° — Mouvement de translation de la figure.

2° — Rotation de la figure autour de l'un de ses points.

3° — Influence de la variation de température.

4° — Variation de longueur δds de chaque élément intermédiaire ds de la ligne moyenne.

5° — Rotation $d\varphi$ de chaque élément intermédiaire ds autour de la tangente à cet élément.

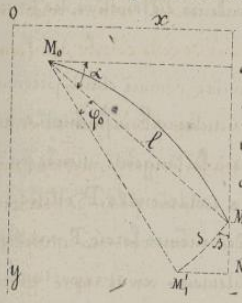
Après avoir calculé séparément les variations dues à chacune des causes précédentes, il suffira de les additionner pour avoir les variations totales désignées précédemment par Δx_1 et Δy_1.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

243.—Mouvement de translation de la figure. — Lorsque la courbe M_0M_1 se transporte parallèlement à elle-même dans une position telle que $M_0'M_1'$, les coordonnées du point M_1 subissent évidemment des variations respectivement égales à celles du point M_1 et l'on a

$$\Delta_1 x_1 = \Delta x_0 \ , \quad \Delta_1 y_1 = \Delta y_0 .$$

244.—Rotation autour du point M_0. — L'angle dont tourne la tangente menée en M_0 à la courbe M_0M_1 est évidemment égal à l'angle φ_0 dont tourne la droite qui joint les points M_0 et M_1; et comme la rotation du point M_1 autour du point M_0 est généralement très-faible, on fait une erreur négligeable en assimilant à une droite l'arc s dont la valeur est $l\varphi_0$, et l'angle $M_0M_1M_1'$ à un angle droit, ce qui donne $\beta = \alpha$, et par suite



$$NM_1' = s\sin\beta = l\varphi_0 \sin\alpha , \quad NM_1 = s\cos\beta = l\varphi_0\cos\alpha .$$

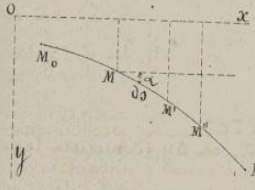
En posant $NM_1' = \Delta_2 x_1$, $NM_1 = \Delta_2 y_1$, puis remarquant que l'on a

$$x_1 - x_0 = l\cos\alpha \ , \quad y_1 - y_0 = l\sin\alpha ,$$

et que la variation $\Delta_2 x_1$ doit être prise ici négativement, il vient

$$\Delta_2 x_1 = -(y_1 - y_0)\varphi_0 \ , \quad \Delta_2 y_1 = (x_1 - x_0)\varphi_0 .$$

245.— Influence d'un changement de température. — En désignant par a le coefficient de dilatation linéaire de la matière qui forme la poutre, et par t le nombre de degrés dont la température s'est élevée ou abaissée, l'élément MM', de longueur ds, s'est allongé, pour une variation positive de t, d'une quantité $M'M''$ représentée par $at\,ds$, et les projections de ds qui étaient dx et dy ont varié de quantités exprimées par $at\,dx$ et $at\,dy$; de sorte que les variations totales de x_1 et de y_1 dans l'étendue M_0M_1, sont



$$\Delta_3 x_1 = \int_{M_0}^{M_1} at\,dx = (x_1 - x_0)at , \quad \Delta_3 y_1 = \int_{M_0}^{M_1} at\,dy = (y_1 - y_0)at .$$

246.— Déplacement dû à l'allongement de chaque élément de la courbe. — Si l'on suppose que l'élément MM' ou ds ait subi un allongement $M'M''$ représenté par ids, cet allongement pouvant être considéré comme situé dans le prolongement de ds, les projections $ds\cos\alpha$ et $ds\sin\alpha$ ont varié de quantités exprimées par $ids\cos\alpha$ et $ids\sin\alpha$; donc, pour toute la portion de la courbe comprise entre les points M_0 et M_1 les variations des coordonnées du point M_1, sont

$$\Delta_4 x_1 = \int_{M_0}^{M_1} ids\cos\alpha , \qquad \Delta_4 y_1 = \int_{M_0}^{M_1} ids\sin\alpha .$$

247.—Rotation de chaque élément intermédiaire. — L'élément ds, en tournant autour d'un axe projeté en M, d'une quantité égale à $d\varphi$, entraîne dans son mouvement toute la partie MM_1 de la courbe et les variations élémentaires qui en résultent pour x_1 et y_1 sont, d'après le N° 244, exprimées par $-(y_1 - y)\,d\varphi$ et $(x_1 - x)\,d\varphi$.

En admettant qu'il en soit de même pour tous les éléments compris entre M_0 et M_1, on peut écrire

$$\Delta_5 x_1 = -\int_{M_0}^{M_1} (y_1 - y)\,d\varphi , \quad \Delta_5 y_1 = \int_{M_0}^{M_1} (x_1 - x)\,d\varphi .$$

248.— Expressions générales des variations des coordonnées. En additionnant les déplacements partiels que subit le point M_1 sous l'influence des causes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

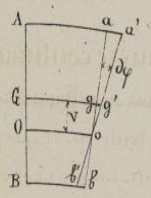
énoncées précédemment, on obtient les formules générales

$$\Delta x_1 = \Delta x_0 - (y_1 - y_0)\varphi_0 + (x_1 - x_0)\alpha t + \int_{M_0}^{M_1} i\,ds\cos\alpha - \int_{M_0}^{M_1} (y_1 - y)\,d\varphi,$$

$$\Delta y_1 = \Delta y_0 + (x_1 - x_0)\varphi_0 + (y_1 - y_0)\alpha t + \int_{M_0}^{M_1} i\,ds\sin\alpha + \int_{M_0}^{M_1} (x_1 - x)\,d\varphi,$$

dans lesquelles il faut maintenant remplacer les quantités i et $d\varphi$ par leurs valeurs en fonction des forces extérieures qui sollicitent la poutre.

Pour obtenir ces valeurs on peut, sans erreur sensible, considérer la poutre comme étant prismatique sur une longueur comprise entre une section normale quelconque AB, et une autre ab infiniment voisine.



En désignant par N la somme des composantes, parallèles à la tangente menée par le point G à la ligne moyenne Gg, de toutes les forces extérieures P, situées à droite de ce point; et par μ, la somme des moments des mêmes forces P, par rapport à l'axe projeté au point G, on peut écrire immédiatement, en se reportant aux Nos 127 à 132,

$$i = \frac{N}{E\omega}, \qquad \mu = \frac{EIi}{V}, \qquad R = \frac{V\mu}{I} - \frac{N}{\omega}.$$

Quant à l'angle des droites ab et $a'b'$ on peut le considérer comme étant égal à l'angle $d\varphi$ dont a tourné, autour de l'axe projeté en G, l'élément ds représenté sur la figure par G g; et comme on a évidemment

$$gg' = ids = Vd\varphi, \quad \text{ou} \quad \frac{i}{V} = \frac{d\varphi}{ds},$$

il en résulte

$$\mu = EI\frac{d\varphi}{ds}, \quad \text{d'où} \quad d\varphi = \frac{\mu ds}{EI}$$

Les valeurs de i et de $d\varphi$, mises dans les expressions de Δx_1 et Δy_1, donnent les deux formules finales

$$\Delta x_1 = \Delta x_0 - (y_1 - y_0)\varphi_0 + (x_1 - x_0)\alpha t + \int_{M_0}^{M_1} \frac{N\cos\alpha}{E\omega}\,ds - \int_{M_0}^{M_1} \frac{y_1 - y}{EI}\mu ds, \qquad (A)$$

$$\Delta y_1 = \Delta y_0 + (x_1 - x_0)\varphi_0 + (y_1 - y_0)\alpha t + \int_{M_0}^{M_1} \frac{N\sin\alpha}{E\omega}\,ds + \int_{M_0}^{M_1} \frac{x_1 - x}{EI}\mu ds, \qquad (B)$$

relations dans lesquelles on a, en vertu des définitions précédentes,

$$N = \Sigma P\cos\beta, \quad \mu = \Sigma M_M P,$$

β désignant l'angle de la force P avec la tangente menée par le point M à la ligne moyenne de la poutre.

249. — Expression de la rotation totale. — On vient de voir que la rotation élémentaire autour d'un point quelconque de la ligne moyenne est

$$d\varphi = \frac{\mu ds}{EI},$$

En intégrant cette expression pour tous les éléments compris entre les points M_0 et M_1, et en y ajoutant la rotation φ_0 de toute la courbe autour du point M_0, on obtient, pour la rotation totale du point M_1,

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \int_{M_0}^{M_1} \frac{\mu ds}{EI}. \qquad (C)$$

Cette relation servira, avec les formules (A) et (B) à résoudre différents problèmes relatifs à la poutre courbe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

250. — **Généralité des formules précédentes.** — Les formules (A), (B), (C), étant indépendantes de toute hypothèse particulière sur la position des points M_0 et M_1, elles s'appliquent à toute portion de la longueur de la poutre en y introduisant les notations appropriées et elles permettront, en y joignant d'autres relations résultant des conditions générales d'équilibre du système, de déterminer, pour la poutre entière ou pour une portion quelconque de cette poutre, toutes les quantités qui peuvent se présenter comme inconnues d'après les données du problème posé; la question ne présentera alors d'autre difficulté que celle qui résultera du calcul des intégrales que renferment les formules; mais on pourra, comme on le verra à la suite de cette étude, recourir aux méthodes approximatives toujours applicables à la détermination des intégrales qui ne se prêtent pas facilement aux méthodes rigoureuses du calcul.

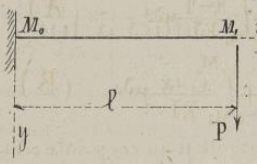
251. — **Cas où la section de la poutre varie d'une manière continue.**

Lorsque le profil transversal qui engendre une poutre courbe varie d'une manière continue, mais reste soumis à toutes les autres conditions indiquées au N° 240, toute portion de cette poutre, comprise entre deux sections transversales infiniment voisines, peut toujours être considérée comme ayant une section constante dans toute son étendue; et dans ce cas on peut y appliquer les formules précédentes pourvu que l'on tienne compte dans les calculs, de la loi suivant laquelle varient les sections.

252. — **Cas où la poutre courbe se transforme en une poutre droite.**

La poutre droite n'étant autre chose qu'une poutre dont le rayon de courbure est infini en chacun de ses points, tout ce qui précède s'y applique nécessairement, en apportant dans les formules les modifications résultant de cette circonstance.

Soit, comme exemple, une poutre droite $M_0 M_1$, encastrée en M_0, supportant dans toute sa longueur une charge p par mètre uniformément répartie et un poids P à l'extrémité M_1,



on a immédiatement $\Delta x_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $y_1 - y_0 = 0$, $x_1 - x_0 = l$, $t = 0$, $ds = dx$, $N = 0$, $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\mu = P(l-x) + \frac{1}{2}p(l-x)^2$, et les équations (B) et (C) se réduisent à

$$\Delta y_1 = \int_0^l \frac{(l-x)\mu dx}{EI} = \frac{1}{EI}\int_0^l \left[P(l-x)^2 + \frac{1}{2}p(l-x)^3\right] dx,$$

$$\varphi_1 = \int_0^l \frac{\mu dx}{EI} = \frac{1}{EI}\int_0^l \left[P(l-x) + \frac{1}{2}p(l-x)^2\right] dx ;$$

ou, en effectuant les calculs,

$$\Delta y_1 = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}Pl^3 + \frac{1}{8}pl^4\right], \qquad \varphi_1 = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}Pl^2 + \frac{1}{6}pl^3\right],$$

résultats conformes à ceux que donnent les équations (3) et (4) du N° 149 quand on y fait $x = l$.

Quant à l'équation (A) elle se réduit à une identité lorsque l'on considère $y_1 - y$ comme nul pour tous les points intermédiaires de la poutre ce qui est rigoureusement exact lorsque cette poutre n'est pas chargée; et qu'en outre on regarde Δx_1 comme étant aussi nul, ce qui est vrai approximativement en égard à cette considération que la poutre chargée ne doit prendre qu'une très-faible courbure si l'on veut qu'elle ne subisse aucune altération dans son élasticité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

253. — Conditions générales d'équilibre de la poutre courbe. —

Les actions extérieures qui sollicitent la poutre courbe sont, comme pour la poutre droite :

Les charges P supportées par les différents points de cette poutre.

Les réactions exercées par les points d'appui, décomposables, chacune, en une force S horizontale et une force Q verticale.

Les moments fléchissants existant aux points d'appui lorsqu'il y a encastrement en ces points.

Il en résulte que si M_0 et M_1 sont les points extrêmes de la poutre, les actions à considérer en ces points sont, dans le cas le plus général, S_0, Q_0, μ_0 et S_1, Q_1, μ_1.

L'équilibre entre toutes ces actions, qui s'exercent dans le plan de flexion, sera dans tous les cas, assuré par deux équations de projections faites parallèlement aux axes coordonnés et par une équation de moments par rapport à un axe perpendiculaire au plan de flexion et projeté, par exemple, au point M_0, ce qui donnera, sous une forme générale, les relations suivantes,

$$\Sigma P_x + S_0 + S_1 = 0, \qquad (D)$$

$$\Sigma P_y + Q_0 + Q_1 = 0, \qquad (E)$$

$$\Sigma M_{M_0} P + M_{M_0} Q_1 + M_{M_0} S_1 + \mu_1 - \mu_0 = 0. \qquad (F)$$

254. — Équations complémentaires. —

Si, aux deux groupes d'équations (A), (B), (C), et (D), (E), (F) on joint les relations

$$N = \Sigma P \cos\beta, \quad \mu = \Sigma M_M P, \quad R = \frac{\nu\mu}{I} - \frac{N}{\omega}$$

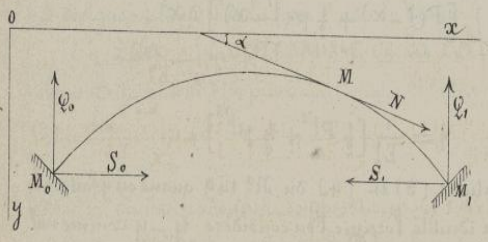
dont les deux premières ont déjà été indiquées au N° 248, on obtient un système général d'équations qui serviront à résoudre les différents problèmes que l'on peut se proposer sur la poutre courbe. Mais, pour indiquer convenablement la marche à suivre, il convient d'appliquer ces formules à quelques exemples particuliers.

255. — Poutre courbe reposant sur deux appuis situés à un même niveau. —

Les conditions posées par l'énoncé donnent d'abord

$$\Delta x_0 = 0, \quad \Delta y_0 = 0, \quad \Delta x_1 = 0 \quad \Delta y_1 = 0, \quad y_1 - y_0 = 0.$$

La poutre n'étant pas encastrée aux points M_0 et M_1 les valeurs de μ en ces points sont nulles, ce qui donne $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 0$.



Si, en outre, l'influence de la température, peut être considérée comme négligeable, on a encore $t = 0$.

Les dimensions de la poutre étant supposées connues ainsi que toutes les charges P, qu'elle supporte entre les points M_0 et M_1, les inconnues à déterminer sont les quantités S_0, Q_0, φ_0, S_1, Q_1, φ_1 ainsi que le maximum de la résistance moléculaire R par mètre carré développée dans chacune des sections normales de la poutre.

En désignant par N' la somme des composantes parallèles à la tangente en M, et par μ' la somme des moments, autour de l'axe projeté en M, de toutes les forces extérieures, autres que S_1,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

situés à droite du point M dont les coordonnées sont x et y, les relations $N = \Sigma P \cos\beta$, $\mu = \Sigma M_M P$, deviennent

$$N = N' - S_1 \cos\alpha, \qquad \mu = \mu' + S_1 (y_1 - y)$$

En mettant ces valeurs de N et de μ dans l'équation, en remarquant ensuite que le moment de la force S_1, par rapport au point M_0 est nul, et enfin en admettant que ds soit le même pour toute l'étendue de la ligne moyenne, les relations (A), (B), (C), (D), (E), (F), peuvent être mises sous la forme

$$\int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{N' \cos\alpha}{E\omega} - \frac{(y_1 - y)\mu'}{EI} \right] ds - S_1 \int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{\cos^2\alpha}{E\omega} + \frac{(y_1 - y)^2}{EI} \right] ds = 0, \qquad (1).$$

$$(x_1 - x_0)\varphi_0 + \int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{N \sin\alpha}{E\omega} + \frac{(x_1 - x)\mu}{EI} \right] ds = 0, \qquad (2).$$

$$\varphi_1 - \varphi_0 - \int_{M_0}^{M_1} \frac{\mu\, ds}{EI} = 0, \quad (3) \qquad \Sigma P_x + S_1 - S_0 = 0. \quad (5).$$

$$\Sigma M_{M_0} P - Q_1 (x_1 - x_0) = 0 \quad (4) \qquad \Sigma P_y - Q_0 - Q_1 = 0. \quad (6).$$

L'équation (4) donne Q_1 et l'équation (6) donne ensuite Q_0. Les intégrales de l'équation (1) ayant été préalablement déterminées, on déduit de cette équation la valeur S_1, et l'équation (5) permet alors de calculer S_0. Les valeurs S_1 et Q_1, étant connues on peut évaluer les intégrales des équations (2) et (3), intégrales dans lesquelles les variables N et μ contiennent implicitement S_1 et Q_1 et en déduire ensuite φ_0 de l'équation (2) puis φ_1 de l'équation (3). Enfin, les expressions

$$N = \Sigma P \cos\beta, \qquad \mu = \Sigma M_M P, \qquad R = \frac{v\mu}{I} - \frac{N}{\omega},$$

permettent d'étudier les variations de N, μ et R dans toute l'étendue de la poutre.

256. — Poutre encastrée en deux points situés à un même niveau.

On a, comme précédemment, $\Delta x_0 = 0$, $\Delta y_0 = 0$, $\Delta x_1 = 0$ $\Delta y_1 = 0$ et $y_1 - y_0 = 0$.

L'encastrement aux points M_0 et M_1 donne $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$; mais μ_0 et μ_1, ne sont plus égaux à zéro. En posant encore $t = 0$ et en admettant que les charges P soient connues ainsi que les dimensions de la poutre, les inconnues à déterminer sont S_0, Q_0, μ_0, S_1, Q_1 et μ_1.

Les équations (D), (E), (F) ne permettent, à elles seules, de dégager aucune de ces inconnues ; mais les trois quantités S_1, Q_1, μ_1, sont implicitement comprises dans les formules (A), (B), (C) et peuvent être mises en évidence, en posant

$$N = N' - Q_1 \sin\alpha - S_1 \cos\alpha, \qquad \mu = \mu' - Q_1 (x_1 - x) - S_1 (y_1 - y) + \mu_1 ;$$

on obtient alors l'ensemble des équations

$$\int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{N' \cos\alpha}{E\omega} - \frac{(y_1 - y)\mu'}{EI} \right] ds - S_1 \int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{\cos^2\alpha}{E\omega} + \frac{(y_1 - y)^2}{EI} \right] ds - Q_1 \int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{\sin\alpha \cos\alpha}{E\omega} - \frac{(y_1 - y)(x_1 - x)}{EI} \right] ds - \mu_1 \int_{M_0}^{M_1} \frac{(y_1 - y)\, ds}{EI} = 0, \quad (1)$$

$$\int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{N' \sin\alpha}{E\omega} + \frac{(x_1 - x)\mu'}{EI} \right] ds - S_1 \int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{\sin\alpha \cos\alpha}{E\omega} - \frac{(x_1 - x)(y_1 - y)}{EI} \right] ds - Q_1 \int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{\sin^2\alpha}{E\omega} + \frac{(x_1 - x)^2}{EI} \right] ds + \mu_1 \int_{M_0}^{M_1} \frac{(x_1 - x)\, ds}{EI} = 0 \quad (2)$$

$$\int_{M_0}^{M_1} \frac{\mu'\, ds}{EI} + S_1 \int_{M_0}^{M_1} \frac{(y_1 - y)\, ds}{EI} - Q_1 \int_{M_0}^{M_1} \frac{(x_1 - x)\, ds}{EI} + \mu_1 \int_{M_0}^{M_1} \frac{ds}{EI} = 0 \qquad (3)$$

$$\Sigma M_{M_0} P - Q_1 (x_1 - x_0) + \mu_1 - \mu_0 = 0, \quad (4) \qquad \Sigma P_y - Q_0 - Q_1 = 0 \quad (5) \qquad \Sigma P_x + S_0 - S_1 = 0 \quad (6)$$

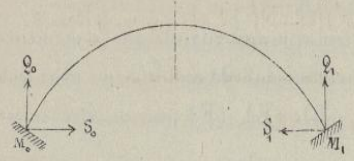
En supposant que toutes les intégrales aient été d'abord calculées, les équations (1), (2), (3), donnent les valeurs S_1, Q_1, μ_1 ; et les équations (4), (5), (6) permettent d'obtenir ensuite S_0, Q_0, et μ_0.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

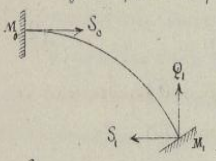
257. — Cas où la poutre est symétrique. —

Si la poutre est symétrique et chargée symétriquement par rapport au plan vertical mené par le milieu de sa longueur, perpendiculaire au plan de flexion, et si toutes les charges P sont verticales, il en résulte immédiatement

$$\Sigma P_x = 0, \qquad S_1 = -S_0, \qquad Q_1 = Q_0 = -\frac{1}{2}\Sigma P.$$



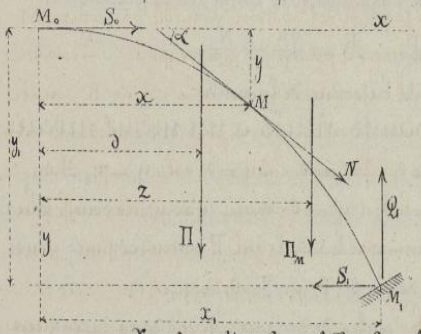
Lorsqu'il n'y a pas d'encastrement en M_0 et M_1 on a toujours $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 0$; et en outre $\varphi_1 = -\varphi_0$. Dans le cas contraire, on a $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$ et $\mu_1 = -\mu_0$.



On peut d'ailleurs, dans l'hypothèse posée, simplifier les calculs en ne considérant que la moitié de la poutre, et l'on a dans ce cas, $Q_0 = 0$, $S_1 = -S_0$, $Q_1 = -\Sigma P$; on outre le point M_0 ne peut éprouver qu'un déplacement vertical, et la tangente en ce point reste horizontale ce qui donne $\varphi_0 = 0$, mais μ_0 est différent de zéro.

258. — Calcul de la charge que peut supporter une poutre courbe donnée. —

Etant donnée une poutre courbe symétrique placée sur deux appuis invariables situés à un même niveau, la section normale de cette poutre étant constante ou variable suivant une loi déterminée, on demande quelle doit être, pour toute la longueur, et non compris le poids propre de la poutre, la charge



constante par mètre de projection horizontale que peut supporter cette poutre, pour que la résistance moléculaire par mètre carré développée dans les fibres extrêmes, ne dépasse en aucun point une limite donnée.

En ne considérant que la moitié de la poutre, et en faisant abstraction, pour une première étude, de la variation de température, les conditions de l'énoncé et du choix des axes donnent immédiatement

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \Delta x_0 = 0, \quad \Delta x_1 = 0, \quad \Delta y_1 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad t = 0, \quad Q_0 = 0 \quad \mu_1 = 0 \quad \Sigma P_x = 0$$

et les équations (A), (B), (C), (D), (E), (F) deviennent

$$\int_{M_0}^{M_1} \frac{N\cos\alpha}{E\omega}\,ds - \int_{M_0}^{M_1} \frac{(y_1 - y)\mu}{EI}\,ds = 0, \qquad (A') \qquad S_0 - S_1 = 0, \qquad (D')$$

$$\Delta y_0 + \int_{M_0}^{M_1} \frac{N\sin\alpha}{E\omega}\,ds + \int_{M_0}^{M_1} \frac{(x_1 - x)\mu}{EI}\,ds = 0, \qquad (B') \qquad \Sigma P - Q_1 = 0, \qquad (E')$$

$$\varphi_0 - \int_{M_0}^{M_1} \frac{\mu}{EI}\,ds = 0, \qquad (C') \qquad \Sigma \mathcal{M}_{M_0} P - \mu_0 - S_1 y_1 - Q_1 x_1 = 0 \qquad (F')$$

Soient : p la charge inconnue par mètre de projection horizontale,

Π le poids de la demi-poutre M_0M_1,

Π_m celui de la portion MM_1, et z l'abscisse de son centre de gravité.

On a, au point M, $N = p(x_1 - x)\sin\alpha + \Pi_m \sin\alpha - Q_1\sin\alpha - S_1\cos\alpha$,

$$\mu = \tfrac{1}{2}p(x_1 - x)^2 + \Pi_m(z - x) - Q_1(x_1 - x) + S_1(y_1 - y) ;$$

mais on a aussi $Q_1 = px_1 + \Pi$; en portant cette valeur dans les équations précédentes et en posant ensuite

$$N' = -(\Pi - \Pi_m)\sin\alpha, \qquad (1) \qquad \mu' = \Pi_m(z - x) - \Pi(x_1 - x), \qquad (2)$$

il vient

$$N = N' - px\sin\alpha - S_1\cos\alpha, \qquad (3) \qquad \mu = \mu' - \tfrac{1}{2}p(x_1^2 - x^2) + S_1(y_1 - y). \qquad (4)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ces deux dernières valeurs, mises dans l'équation (A'), donnent, après la suppression du facteur $\frac{1}{E}$, et en remarquant que ce facteur commun dans les différents termes,

$$\int_{M_0}^{M_1}\left[\frac{1}{\omega}N'\cos\alpha-\frac{1}{I}(y_1-y)\mu'\right]ds-p\int_{M_0}^{M_1}\left[\frac{1}{\omega}x\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2I}(y_1-y)(x_1^2-x^2)\right]ds-S_1\int_{M_0}^{M_1}\left[\frac{1}{\omega}\cos^2\alpha+\frac{1}{I}(y_1-y)^2\right]ds=0.$$

En désignant par c, c', c'' les trois intégrales renfermées dans cette équation, il vient

$$c-c'p-c''S_1=0, \quad \text{d'où} \quad S_1=\frac{1}{c''}(c-c'p);$$

et par suite les équations (3) et (4) deviennent

$$N=N'-px\sin\alpha-\frac{\cos\alpha}{c''}(c-c'p), \quad (5) \qquad \mu=\mu'-\frac{1}{2}p(x_1^2-x^2)+\frac{y_1-y}{c''}(c-c'p); \quad (6)$$

expressions auxquelles il faut joindre la relation

$$R=\frac{\nu\mu}{I}-\frac{N}{\omega} \qquad (7)$$

Calculs préliminaires. — On partage la longueur s de l'arc M_0M_1 en un nombre pair de parties égales, et l'on calcule, pour chaque point de division, les valeurs désignées par

$$\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ x,\ y,\ \omega,\ I,\ N',\ \mu',\ \Pi_m,\ z,$$

puis on évalue les intégrales c, c', c''.

Calcul de p. — Pour satisfaire à la condition posée par l'énoncé du problème, il est nécessaire de connaître les valeurs simultanées de N et de μ pour lesquelles la résistance moléculaire R développée dans les fibres extrêmes de la poutre est un maximum.

À cet effet il faudrait chercher à exprimer, en fonction de l'abscisse variable du point M_1, toutes les quantités qui se rapportent à la section transversale passant par ce point. Les valeurs N et μ étant alors des fonctions de la seule variable x, il en serait de même de la valeur R donnée par la relation (7), et il suffirait de déterminer le maximum de cette fonction puis de l'égaler à la valeur limite qu'on ne doit pas dépasser pour avoir la relation finale qui ferait connaître la valeur de p. Mais la question traitée ainsi conduirait à des calculs extrêmement laborieux et souvent impossibles à effectuer.

La recherche directe du maximum de R peut être remplacée par le calcul suivant fait pour chacune des sections considérées de la poutre. Les valeurs de N, μ, I et ω, relatives à l'une de ces sections étant portées dans la formule (7), on y met pour R la valeur limite imposée; puis en désignant par v' et v'' les distances de la ligne moyenne aux deux fibres extrêmes, on remplace, dans la formule, v par $-v'$ pour la fibre supérieure et v par v'' pour la fibre inférieure, ce qui donne deux relations d'où l'on peut déduire deux valeurs de p relatives à la section considérée. Le même calcul, appliqué à chacune des sections, donnera pour p une série de valeurs, et l'on adoptera finalement la plus petite de ces valeurs pour la charge constante par mètre de longueur que peut supporter la poutre dans toute son étendue.

Si les conditions du problème permettent de déterminer à priori, exactement ou approximativement la position de la section de la poutre pour laquelle R est un maximum, il suffira évidemment de faire, pour cette section seulement, les calculs qui viennent d'être indiqués pour chacun des points de division considérés.

Détermination des inconnues auxiliaires Q_1, S_1, μ_0, Δy_0 et φ_1. — La valeur p étant actuellement connue, on obtient immédiatement la réaction verticale Q_1 et la réaction horizontale S_1, au point M_1, par les formules $Q_1=px_1+\Pi_1$, $S_1=\frac{1}{c''}(c-c'p)$.

On détermine ensuite μ_0, soit à l'aide de l'équation (F'), soit en posant $x=0$ et $y=0$, dans l'équation (4). Enfin, en portant les valeurs (3) et (4) dans les relations (B') et (C'), la première

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de ces équations donne la valeur Δy_0 de la flèche au point M_0 ; la seconde fait connaître la valeur de l'angle φ_1 dont a tourné la tangente au point M_1.

On calculera de même toutes les quantités relatives à un point intermédiaire quelconque M' de la ligne moyenne, en remplaçant x_0, y_0, ..., par x', y', ..., dans les équations générales, lesquelles ne s'appliqueraient plus alors qu'à la portion M'M, de la poutre courbe donnée.

259. — Détermination approximative des intégrales contenues dans les formules relatives à la poutre courbe. — Toutes ces intégrales sont de la forme générale $\int K\,ds$, dans laquelle la valeur numérique de $K\,ds$ peut être représentée, à une échelle donnée, par l'aire d'un rectangle dont la base représenterait la valeur numérique de ds, et la hauteur la valeur numérique de K, cette dernière quantité ayant une valeur différente et facile à calculer pour chacun des points de la ligne moyenne.

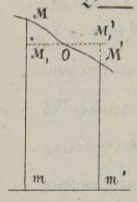
De là un moyen d'obtenir graphiquement la valeur de $\int K\,ds$. On prend sur une ligne droite une longueur $m_0 m_n$ égale à la longueur développée de l'arc $M_0 M_n$, ou s que l'on désigne ici par $M_0 M_n$. On partage cet arc ainsi que la droite $m_0 m_n$ en un même nombre de parties généralement égales entre elles, et l'on mène par tous les points de division de $m_0 m_n$ des perpendiculaires sur chacune desquelles on porte une longueur égale à la valeur numérique de K relative au point correspondant de la ligne $M_0 M_n$. En joignant par une courbe les extrémités de toutes les ordonnées ainsi construites, l'aire comprise entre cette courbe, la droite $m_0 m_n$ et les deux ordonnées extrêmes, donne la valeur de l'intégrale proposée.

Pour évaluer cette aire on peut employer plusieurs méthodes :

1° — La formule de Simpson, c'est-à-dire,

$$\int_{M_0}^{M_n} K\,ds = \frac{s}{3n}\left[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2})\right],$$

dans laquelle y_0, y_1, y_2, ..., y_n représentent les valeurs numériques de K, relatives aux points de division de la ligne moyenne, y compris les deux points extrêmes de cette ligne. On remarquera que l'emploi de cette formule, qui dispense souvent de construire la figure, exige que l'arc s soit divisé en un nombre pair de parties égales.



2° — La méthode qui consiste à décomposer l'aire en un certain nombre de trapèzes curvilignes tels que $mm'MM'$, sans qu'il soit nécessaire de partager la ligne moyenne en un nombre pair de parties égales, et à remplacer ensuite chacun d'eux par un rectangle équivalent $mm'M_1M_1'$, de même base. Pour obtenir ce résultat il suffit que le triangle OMM_1 soit égal au triangle $OM'M_1'$, et ce procédé de compensation, mis en œuvre par M^r^ Benoître pour les relevés des plans du cadastre, est aussi exact que celui de Simpson.

3° — Le planimètre polaire d'Amsler qui mesure mécaniquement les aires avec une exactitude suffisante, et dont la théorie sera indiquée dans une note spéciale.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Solides d'égale résistance par rapport à la flexion

260. — Définition et conditions de l'égale résistance. — La formule générale

$$R = \frac{v\mu}{I} = \frac{N}{\omega} \qquad (1)$$

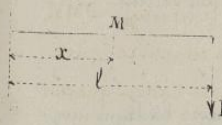
établie précédemment, est applicable à la poutre courbe comme à la poutre droite, montre que pour une même section transversale d'un solide fléchi, la valeur de la résistance moléculaire R par mètre carré varie avec la valeur de v et qu'elle devient un maximum pour la fibre extrême soit en dessus soit en dessous de la ligne moyenne.

Ce maximum de R, qui change de valeur avec la position de la section lorsque les dimensions de cette section sont constantes, ne doit, dans aucun cas, dépasser une valeur déterminée R', et il n'est pas nécessaire non plus qu'il reste en dessous de cette valeur si l'on veut, d'une part, que le solide résiste d'une manière convenable aux efforts auxquels il est soumis, et, d'autre part, qu'il n'y ait pas d'exagération dans l'emploi de la matière, double condition qui ne peut être remplie qu'au moyen d'un profil variable soumis à des conditions de continuité qui peuvent être très-différentes suivant les cas.

Un solide d'égale résistance, par rapport à la flexion, est celui pour lequel les fibres extrêmes sont soumises en tous les points de leur longueur, à une même résistance moléculaire par mètre carré.

Pour satisfaire à la condition de l'égale resistance telle qu'elle vient d'être définie il suffit de mettre, dans la formule (1), les valeurs de N et de μ en fonction de l'abscisse du point considéré de la ligne moyenne, de remplacer v par le maximum de cette variable, R, par la valeur constante qu'on ne veut pas dépasser; et enfin d'exprimer les relations qui doivent exister entre les dimensions de la section. On obtient ainsi une équation qui permet de déterminer la forme et les dimensions du solide. Les exemples suivants vont faire comprendre complétement ce qui précède.

261. — Solide d'égale résistance à section rectangulaire. — On propose de déterminer la forme que doit avoir un solide horizontal à section rectangulaire pour être d'égale résistance sur une longueur donnée l, le solide portant une charge p par mètre uniformément répartie sur toute cette longueur, et un poids P à l'extrémité de droite supposée libre.



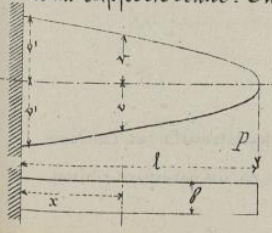
Les conditions de l'énoncé donnent $N = 0$, $I = \frac{1}{12} b c^3$,

$$\mu = \frac{1}{2} p (l-x)^2 + P(l-x),$$

et en portant ces valeurs dans l'équation (1) il vient

$$R = \frac{6v}{bc^3}\left[(2P + pl)l - 2(P + pl)x + px^2\right]. \qquad (2)$$

Ceci étant posé on peut admettre que la hauteur de la section soit variable et la base constante; ou bien la hauteur constante et la base variable; ou enfin la hauteur et la base variables, en restant entre elles dans un rapport donné. On est ainsi conduit à examiner trois cas différents.

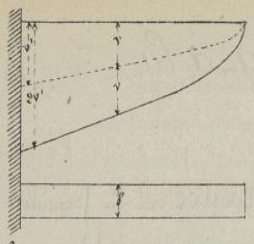


1° — *Cas où c est variable et b constant.* — En posant $c = 2v$ dans la formule D ou en déduit

$$v^2 = \frac{3}{4bR}\left[(2P + pl)l - 2(P + pl)x + px^2\right] \qquad (3)$$

équation d'une hyperbole dont l'axe transverse coïncide avec la ligne moyenne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



en dessus le sommet est situé à l'extrémité du solide.

Au lieu de donner à la poutre une forme symétrique par rapport à la ligne moyenne, comme cela résulte d'ailleurs de l'équation (3), on peut porter la hauteur totale $2v$, à partir d'une horizontale donnée, soit en dessous soit en dessous de cette droite ; la partie courbe du profil vertical est toujours une branche d'hyperbole dont l'ordonnée est $2v$ tandis que la ligne moyenne, qui était une droite dans la première figure, est ici une branche d'hyperbole dont l'ordonnée courante est v.

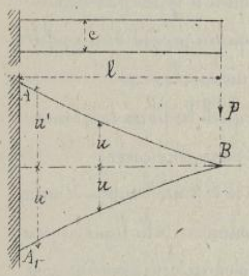
Si l'on pose $P=0$ dans l'équation (3) il vient

$$v^2 = \frac{3P}{2bR}(l-x)^2$$

qui représente un système de deux droites disposées symétriquement par rapport à la ligne moyenne du solide. Mais si l'on a $p=0$, l'équation (3) se réduit à

$$v^2 = \frac{3P}{2bR}(l-x),$$

et représente alors une parabole dont l'axe coïncide avec la ligne moyenne de la poutre.

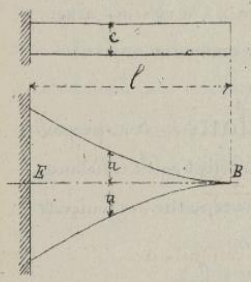


2°. — *Cas où b est variable et c constant*. En posant $b=2u$ dans l'équation (2) et y remplaçant v par $\frac{c}{2}$ on en tire

$$u = \frac{3}{2c^2R}\left[(2P+pl)l - 2(P+pl)x + px^2\right] \qquad (4)$$

équation d'une parabole qui coupe la ligne moyenne en deux points ayant pour abscisses $x=l$ $x=l+\frac{2P}{p}$,

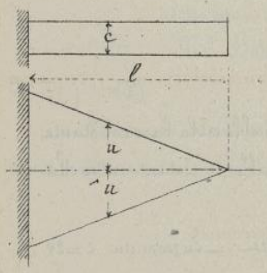
dont le sommet a pour abscisse $x=l+\frac{P}{p}$. De sorte que la courbe qui limite la projection horizontale du solide est formée de deux arcs de parabole AB, A_1B qui viennent se couper en B à l'extrémité de la poutre.



En faisant $P=0$ dans l'équation (4) il vient

$$u = \frac{3P}{2c^2R}(l-x)^2$$

qui représente toujours une parabole ; mais ici les deux branches qui limitent la projection horizontale du solide sont tangentes en B à la ligne moyenne.



Enfin, en posant $p=0$ dans l'équation (4) on obtient

$$u = \frac{3P}{c^2R}(l-x),$$

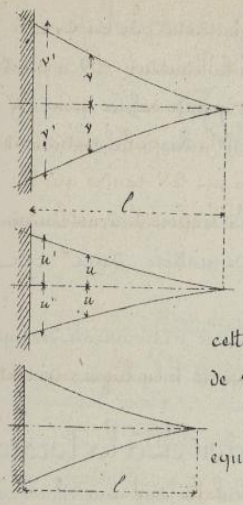
équation qui représente une droite dont l'intersection avec la ligne moyenne a pour abscisse $x=l$.

3°. — *Cas où b et c sont variables avec la condition* $b=mc$. — La formule (2) donne, en y remplaçant b par mc et ensuite c par $2v$,

$$v^3 = \frac{3}{8mR}\left[(2P+pl)l - 2(P+pl)x + px^2\right] \qquad (5)$$

Cette équation représente une courbe qu'il est facile de construire par points ; et les deux projections du solide sont limitées chacune par deux arcs qui se coupent en un premier point

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



situé à l'extrémité du solide, puis en un second point situé en dehors du solide.

En faisant séparément $P=0$ et $p=0$ dans l'équation (5), on obtient des courbes analogues à la précédente et que l'on peut construire tout aussi facilement.

262. — Solide d'égale résistance à section circulaire. — On a ici

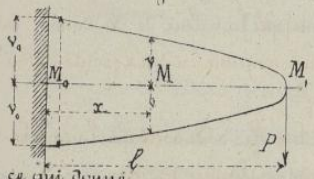
$$I=\frac{1}{4}\pi r^4;$$

cette valeur est celle de μ, mises dans la relation $R=\frac{v\mu}{I}$, donnent, à cause de $v=r$

$$r^3=\frac{2}{\pi R}\left[(2P+p)l-2(P+pl)x+px^2\right]$$

équation qui donne deux courbes symétriques comme l'indique la figure

263. — Valeur de la flèche dans un solide d'égale résistance. — On ne considère ici, pour simplifier la question, que le cas d'un solide à section rectangulaire encastré à l'une des extrémités et chargé seulement d'un poids P à l'autre extrémité. On suppose en outre que la hauteur c de la poutre est seul variable; de sorte qu'en posant $c=2v$, on a d'abord



ce qui donne

$$f''(x)=\frac{\mu}{EI},\qquad \mu=P(l-x),\qquad I=\frac{2}{3}bv^3,$$

$$f''(x)=\frac{3P(l-x)}{2Eb v^3} \qquad (1)$$

Ensuite, l'équation du profil d'égale résistance est, N° 261,

$$v^2=\frac{3P(l-x)}{2bR},$$

et devient, pour la section d'encastrement,

$$v_0^2=\frac{3Pl}{2bR},\qquad \text{d'où résulte}\qquad v^2=\frac{v_0^2(l-x)}{l}.$$

L'élimination de v entre cette dernière relation et l'équation (1) conduit à

$$f''(x)=\frac{3Pl^{\frac{3}{2}}}{2Eb v_0^2}(l-x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{Pl^{\frac{3}{2}}}{EI_0}(l-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette expression, multipliée par dx et intégrée deux fois successivement, donne pour l'équation de la ligne moyenne après la flexion,

$$y=\frac{2Pl^{\frac{3}{2}}}{3EI_0}\left[l^{\frac{3}{2}}+2(l-x)^{\frac{3}{2}}-3l^{\frac{1}{2}}(l-x)\right].$$

La flèche s'obtient en posant $x=l$ dans cette équation, ce qui donne

$$y=\frac{2Pl^3}{3EI_0}$$

valeur double de celle qui a été obtenue au N° 149 pour un solide dont la section constante serait celle que donne le solide d'égale résistance au point d'encastrement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

264.—Observation sur la préférence à donner aux solides d'égales résistance.—Dans le cas précédent, la diminution de la hauteur $2y$ à partir de $x=0$, a nécessairement diminué la résistance et donné lieu à une plus grande valeur pour Y.

On a ainsi employé moins de matière, pour obtenir une égale sécurité, mais à la condition d'admettre une plus grande déformation.

Il serait facile de rendre les deux flèches égales, en augmentant la section d'encastrement du solide d'égale résistance et l'on obtiendrait encore une notable économie de matière dans ces nouvelles conditions.

On remarquera, d'ailleurs, que dans les divers solides d'égale résistance, on trouvera des lignes également chargées dans toute leur longueur, en les faisant passer par les points homologues de toutes les sections transversales.

265.—Solide soumis simultanément à la flexion et à la torsion.

On ne possède aucun résultat d'expérience sur la résistance moléculaire due aux efforts combinés F et R de la torsion et de la flexion, mais on peut déterminer séparément ces deux valeurs, et comme le maximum de chacune d'elles s'exerce dans la fibre la plus éloignée de la ligne moyenne et que leurs directions sont perpendiculaires entre elles, on peut admettre approximativement que la valeur de X, donnée par l'équation

$$X=\sqrt{F^2+R^2},$$

est l'expression du plus grand effort moléculaire auquel le solide doit être soumis, valeur qui doit même rester toujours en dessous de la limite pratique recommandée pour les constructions. On comprend, en effet, qu'un arbre de transmission, par exemple, qui, dans toutes les positions qu'il prend pendant sa rotation, tend toujours à fléchir dans le sens de la pesanteur, doive être calculé dans des conditions de sécurité plus strictes qu'une pièce qui fléchit toujours dans le même sens, et l'on ne doit pas dépasser la valeur $X=6\times10^6$ kilogrammes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Troisième partie.

Frottemens des corps solides

ou

résistances passives.

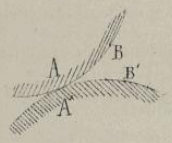
266. — **Notions générales.** — Le frottement est la résistance qui est développée au contact de deux corps, lorsque l'un d'eux se déplace par rapport à l'autre. L'existence de cette résistance est rendue manifeste dans un grand nombre de circonstances, et en particulier dans celles qui suivent :

1°. — Un mobile posé sur un plan horizontal y reste en repos, même quand il est sollicité par une action appréciable, exercée parallèlement à ce plan.

2°. — Si le mobile est d'abord en mouvement, il s'arrête bientôt, sa vitesse diminuant à mesure qu'il chemine sur le plan.

Le frottement agit donc, sur un corps en mouvement, comme une force extérieure et retardatrice de ce mouvement.

267. — **Divers genres de frottemens.** — Deux corps en contact ayant au moins un point commun, on peut considérer plusieurs circonstances spéciales dans leur déplacement relatif ainsi que dans les résistances qui naissent de ce déplacement.



Si le point A de contact pris sur l'un des corps et qui était d'abord en A, se déplace de manière à rencontrer successivement différents points situés dans une direction quelconque sur l'autre corps, on dit qu'il y a *frottement de glissement* ou simplement *glissement*.

Si le mobile se déplace de manière que le point B vienne en contact avec le point B' pour lequel on aurait AB' = AB, la résistance est dite de *roulement*.

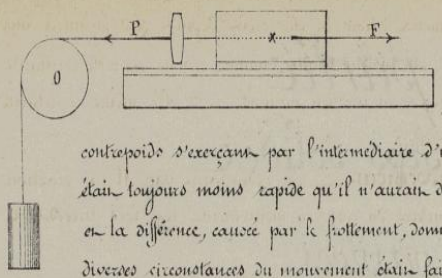
Il y a glissement et roulement simultanés lorsque la distance AB', est plus petite ou plus grande que la distance AB ; dans ce cas on dit que la résistance est *mixte*.

Ce qu'on vient de dire pour un point pourrait se répéter pour toute ligne ou toute surface commune aux deux corps, en considérant les déplacements de chacun des points de cette ligne ou de cette surface commune sous le rapport du glissement et du roulement. Dans tous les cas, la résistance développée déterminant un retard dans les mouvements qui seraient produits si elle n'existait pas, cette résistance dépensera une certaine quantité de travail qu'il sera nécessaire d'évaluer.

Il est d'ailleurs évident que si les deux corps en contact sont animés d'un mouvement commun sans que le contact cesse d'avoir lieu aux mêmes points, il n'y a aucun frottement à considérer, la résistance au mouvement ne dépendant que du déplacement relatif des deux corps.

268. — **Expériences de M. Morin.** — Pour vaincre le frottement de glissement il faut appliquer une certaine force sur le mobile ; les expériences de *Coulomb*, et ensuite celles de *M. Morin* ont eu pour but de mesurer la valeur de cette force dans les principales circonstances de la pratique. L'appareil dont *M. Morin* s'est servi se composait d'un banc horizontal sur lequel on plaçait, à poste fixe, des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



plates-bandes de diverses matières. Les corps pour lesquels on voulait déterminer le frottement reposaient sur ces plates-bandes et étaient sollicités par un contrepoids que l'on pouvait modifier à volonté, l'action de ce contrepoids s'exerçant par l'intermédiaire d'une corde guidée par une poulie. Le mouvement ainsi obtenu était toujours moins rapide qu'il n'aurait dû l'être d'après les formules fondamentales de la mécanique, et la différence, causée par le frottement, donnait la mesure de ce frottement lui-même. L'observation des diverses circonstances du mouvement était faite au moyen d'un pinceau tournant avec un disque dont le mouvement était rendu uniforme par un mouvement d'horlogerie qui laissait son empreinte sur un disque de papier collé sur la poulie de renvoi dont le mouvement était nécessairement proportionnel au chemin parcouru par le mobile.

Pour l'observation des efforts transmis par la corde, un ressort dynamométrique était disposé de manière à tracer, sur un disque mobile, et à chaque instant du mouvement, une courbe continue indiquant, par les distances de chaque point du tracé au centre de rotation du disque, les efforts enregistrés pendant la durée de l'expérience. On constatait d'ailleurs que dans toutes les expériences, le poids qui entraînait le mobile lui imprimait, dès la première période, un mouvement accéléré, et que la traction au départ était toujours plus grande que dans la marche, bien que la différence fût quelquefois très-faible. Cette circonstance tenait à ce que les corps contractent, par un contact prolongé, une certaine adhérence qui est plus grande en général que le frottement pendant la marche, et que l'on désigne improprement par *frottement au départ*. Quelques ébranlements suffisaient ordinairement pour déterminer le départ lorsque la traction correspondait à la valeur du frottement en marche.

269. — **Lois du frottement de glissement.** — Les expériences que l'on vient d'indiquer ont montré que le mouvement s'effectue toujours d'une manière régulière, après la période de départ, lorsque la pression normale exercée entre les deux surfaces en contact est constante et que le degré de poli de ces surfaces ne change pas, la nature des enduits interposés restant la même. Dans ces conditions, on constate que la tension P du ressort est elle-même constante et que le mouvement est toujours uniforme ou uniformément accéléré. Ce mouvement étant dû exclusivement à l'action d'une force Q égale à la différence entre la tension P et le frottement F, on en conclut que la différence P − F est nulle dans le cas du mouvement uniforme, constante dans le cas du mouvement uniformément varié, et par suite que le frottement F est lui-même constant dans les deux cas.

L'expérience a aussi montré que le frottement est :

1°. — Indépendant de l'étendue des surfaces en contact.

2°. — Indépendant de la vitesse du mobile.

3°. — Proportionnel à la pression normale qui existe entre les surfaces en contact ; en d'autres termes, le rapport entre la résistance au mouvement et la pression normale est constant. Ce rapport, constant pour une même substance, mais variable avec la nature du corps, est désigné sous le nom de *coefficient de frottement* et représenté ici par la lettre f.

Ces lois fondamentales sont vérifiées dans des limites très-étendues, et elles servent à calculer l'influence considérable du frottement dans le calcul de l'effet des machines.

Observation sur l'adhérence dans l'état de repos. — La résistance au déplacement relatif ne se manifeste pas seulement pendant le mouvement d'un corps qui glisse sur un autre, elle se développe

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

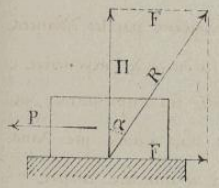
dès que la force qui tend à produire le glissement a commencé d'agir, et elle croît depuis zéro jusqu'à une certaine limite qui correspond au point de départ du mobile; cette valeur limite diminue ensuite et reste constante pendant le mouvement, ainsi qu'on l'a dit précédemment; si la pression normale reste elle-même constante et si les conditions du graissage ne se trouvent pas modifiées.

270. — **Formule du frottement de glissement.** — En désignant par Π la réaction exercée par le corps en repos suivant la normale à la surface du corps en mouvement, les lois précédentes se résument dans la formule simple

$$F = f\,\Pi$$

Le frottement F agissant toujours dans une direction perpendiculaire à celle de la réaction Π, la résultante R des forces F et Π est donnée par la relation

$$R^2 = F^2 + \Pi^2 = \Pi^2(1+f^2).$$



On a aussi, évidemment

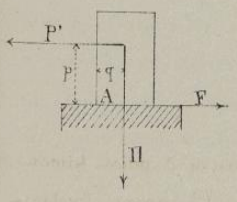
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{\Pi} = f, \qquad \sin\alpha = \frac{F}{R} = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = f_1;$$

ce qui montre que le coefficient de frottement est représenté par la tangente de l'angle que la résultante R fait avec la normale, angle que l'on nomme *angle de frottement*.

Quant au rapport représenté ici par f_1, il diffère généralement très-peu de f; ainsi pour $f = 0{,}05$ on a $f_1 = 0{,}04993$; et pour $f = 0{,}10$, on a $f_1 = 0{,}09993$.

L'examen des tables placées à la fin de ces notes fait voir que le coefficient f varie, dans des limites très-étendues, suivant la nature des corps en contact et surtout suivant la nature des enduits qu'on y applique. Pour les mêmes substances, il diminue notablement à mesure que le graissage est mieux entretenu, et sa valeur, dans le cas d'un graissage parfait, peut être abaissée jusqu'à $f = 0{,}05$. On voit ainsi toute l'importance d'un bon système de graissage et l'on s'explique pourquoi un si grand nombre d'appareils ont été proposés dans le but de mieux lubréfier les surfaces et de réduire ainsi au minimum les pertes de travail dans le frottement.

Condition pour que le mobile glisse et ne tourne pas autour de l'une des arêtes. Il ne suffit pas, pour que le glissement ait lieu, que la force motrice, parallèle au plan, soit égale ou supérieure au frottement; car en désignant par P' la force nécessaire pour que la rotation, autour de l'arête projetée en A, soit sur le point de se produire, on a, par rapport à cette arête,



$$P'p = \Pi q, \qquad \text{d'où} \qquad P' = \frac{\Pi q}{p};$$

par suite la rotation aurait lieu sans que le mobile glissât si l'on avait

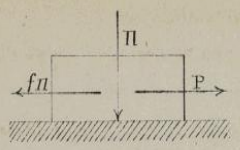
$$P' < F, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\Pi q}{p} < f\Pi, \quad \text{d'où} \quad \frac{q}{p} < f;$$

donc pour qu'il y ait glissement et non rotation, il faut que l'on ait toujours

$$\frac{q}{p} > f, \quad \text{d'où} \quad q < fp.$$

271. — **Frottement sur un plan horizontal.** — 1°. — *Cas où la force motrice P est parallèle au plan. — Équations du mouvement.* — On peut, sans rien changer aux conditions du mouvement sur le plan, transporter la force F parallèlement à elle-même et la supposer directement opposée à la force P. Si Π désigne le poids du mobile, le frottement constant F, développé en sens contraire de la force P, a pour expression fΠ, et la force φ, également constante, qui détermine le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



mouvement uniformément varié, on a

$$\varphi = P - f\Pi ,$$

d'où l'on conclut, en désignant par v_0 la vitesse initiale, supposée de même sens que la force P,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P - f\Pi}{\Pi} g , \qquad v = v_0 + \frac{P - f\Pi}{\Pi} gt , \qquad x = v_0 t + \frac{P - f\Pi}{2\Pi} gt^2 .$$

Pour $P - f\Pi = 0$, le mouvement est uniforme

Pour $P - f\Pi > 0$, le mouvement est uniformément accéléré

Pour $P - f\Pi < 0$, le mouvement est uniformément retardé

Dans ce dernier cas on détermine les conditions de l'arrêt du mobile en posant $v = 0$, ce qui donne successivement

$$t = \frac{v_0 \Pi}{(f\Pi - P)g} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{v_0^2 \Pi}{2(f\Pi - P)g} .$$

L'examen du cas particulier où la force P est de sens contraire à la vitesse initiale n'offre aucune difficulté, et il est d'ailleurs inutile de reproduire ici la discussion des équations générales relatives au mouvement uniformément varié

Travail et utilisation. — L'utilisation ou le *rendement* est le rapport entre le travail utilisé malgré l'influence du frottement et le travail réellement dépensé.

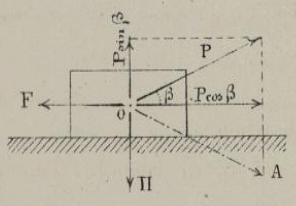
Dans le cas que l'on considère ici, le travail de la force P, pour un déplacement quelconque x dans la direction de cette force, est égal à Px; le travail réellement utilisé est $(P - f\Pi)x$; et en désignant le rendement par U, on a

$$U = \frac{P - f\Pi}{P} = 1 - \frac{f\Pi}{P} .$$

Pour $f = 0$, on aurait $U = 1$, résultat auquel doivent nécessairement satisfaire toutes les formules relatives au rendement lorsqu'on suppose que le frottement est nul.

Pour $f\Pi = P$, il viendrait $U = 0$, et dans ce cas le frottement absorberait tout le travail de la force P.

2°. — *Cas où la force motrice P fait un angle donné avec l'horizon.* — La composante de la force P, dans le sens du mouvement, est $P\cos\beta$; sa composante $P\sin\beta$, perpendiculaire au plan est, dans le cas de la figure, de sens contraire à l'action du poids Π du mobile, par suite la pression normale exercée sur le plan est $\Pi - P\sin\beta$, et le frottement F a pour expression $f(\Pi - P\sin\beta)$. La force constante φ qui détermine le mouvement est représentée, dans ce cas par



$$\varphi = P\cos\beta - f(\Pi - P\sin\beta) , \qquad (1)$$

et l'on peut, comme précédemment, établir les équations de ce mouvement.

Quant au rendement on voit immédiatement qu'il a pour expression

$$U = \frac{P\cos\beta - f(\Pi - P\sin\beta)}{P\cos\beta} = 1 - \frac{f(\Pi - P\sin\beta)}{P\cos\beta} . \qquad (2)$$

Le maximum de φ et celui de U correspondent à $\Pi - P\sin\beta = 0$, ce qui donne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\varphi = P\cos\beta\,, \qquad U = 1$$

ce la pression exercée par le mobile sur le plan étant nulle, le frottement disparaît.

On doit remarquer d'ailleurs que le mobile ne se maintient en contact avec le corps sur lequel il glisse que si l'on a $P\sin\beta < \Pi$.

Si la force P est dirigée suivant la droite OA, la valeur $\sin\beta$ change de signe et les relations (1) et (2) deviennent

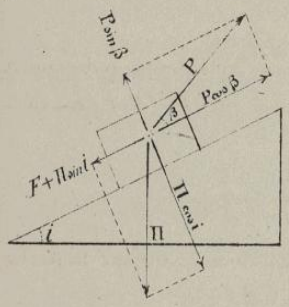
$$\varphi = P\cos\beta - f(\Pi + P\sin\beta)\,, \qquad U = 1 - \frac{f(\Pi + P\sin\beta)}{P\cos\beta}$$

Dans ces conditions, ou en l'absence de toute vitesse initiale, le mouvement se produit, ou est sur le point de naître, ou enfin le repos subsiste suivant que l'on a

$$P\cos\beta > f(\Pi + P\sin\beta)\,, \qquad P\cos\beta = f(\Pi + P\sin\beta)\,, \qquad P\cos\beta < f(\Pi + P\sin\beta).$$

272. — **Frottement sur un plan incliné.** — Le mouvement d'un mobile glissant sur un plan incliné, sous l'action de forces situées dans un plan vertical mené suivant la ligne de plus grande pente du plan donné, présente plusieurs circonstances dont les principales sont les suivantes:

1°. — *Cas où le mobile est soumis à l'action d'une force qui tend à le faire monter sur le plan incliné.* — Soit P la résultante de toutes les forces extérieures qui sollicitent un mobile dont le poids est Π. La pression normale exercée sur le plan est égale à $\Pi\cos i - P\sin\beta$, et par suite le frottement, opposé au sens du mouvement est



$$F = f(\Pi\cos i - P\sin\beta)\,.$$

Cela posé, le mouvement est ascendant si l'on a

$$P\cos\beta > \Pi\sin i + f(\Pi\cos i - P\sin\beta)$$

d'où $\varphi = P\cos\beta - \Pi\sin i - f(\Pi\cos i - P\sin\beta)$,

et $$U = 1 - \frac{f(\Pi\cos i - P\sin\beta)}{P\cos\beta - \Pi\sin i}$$

Le mouvement est descendant et le frottement change de sens si l'on a

$$\Pi\sin i > P\cos\beta + f(\Pi\cos i - P\sin\beta)\,,$$

ce qui donne $$\varphi = \Pi\sin i - P\cos\beta - f(\Pi\cos i - P\sin\beta)\,.$$

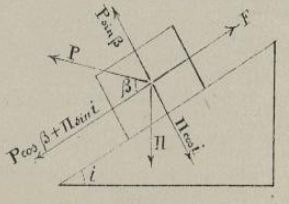
et ensuite $$U = 1 - \frac{f(\Pi\cos i - P\sin\beta)}{\Pi\sin i - P\cos\beta}$$

Dans les deux cas le maximum de U a lieu pour

$$\Pi\cos i - P\sin\beta = 0$$

parce qu'alors le frottement disparaît, la pression normale se trouvant réduite à zéro.

2°. — *Cas où l'action d'une force s'ajoute à la composante de la pesanteur pour faire descendre le mobile.* — On a ici, comme précédemment,



$$F = f(\Pi\cos i - P\sin\beta)$$

et il y a évidemment repos ou mouvement suivant que l'on a

$$P\cos\beta + \Pi\sin i \leq f(\Pi\cos i - P\sin\beta)\,,$$

ou $$P\cos\beta + \Pi\sin i > f(\Pi\cos i - P\sin\beta)\,.$$

Cette dernière hypothèse donne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\varphi = P\cos\beta + \Pi\sin i - f(\Pi\cos i - P\sin\beta),$$

en outre
$$U = 1 - \frac{f(\Pi\cos i - P\sin\beta)}{P\cos\beta + \Pi\sin i}.$$

3°. — *Cas où le mobile n'est soumis qu'à l'action de son propre poids.* — Si dans l'expression précédente de φ on suppose $P = 0$, il vient

$$\varphi = \Pi(\sin i - f\cos i).$$

Dans cette hypothèse

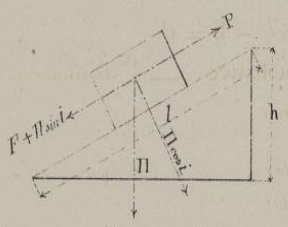
Le corps est au repos ou y persiste si l'on a $\sin i < f\cos i$, d'où $\operatorname{tg} i < f$.

Le corps glisse en descend d'un mouvement accéléré si l'on a . . . . . $\operatorname{tg} i > f$.

Enfin le mouvement est uniforme ou sur le point de naître si l'on a $\operatorname{tg} i = f$.

On voit ainsi pourquoi l'angle i, dont la tangente est f, est appelé *angle de frottement*.

4°. — *Emploi du plan incliné pour l'élévation des fardeaux.* — Pour élever un poids Π à une hauteur h il faut produire un effort égal à Π lorsque la force motrice agit directement dans le sens de la verticale et le travail dépensé est Πh. Mais si le corps glisse sur un plan incliné, il suffit, pour déterminer le mouvement ascendant et uniforme, d'un effort P, parallèle à ce plan, représenté par



$$P = \Pi\sin i + f\Pi\cos i,$$

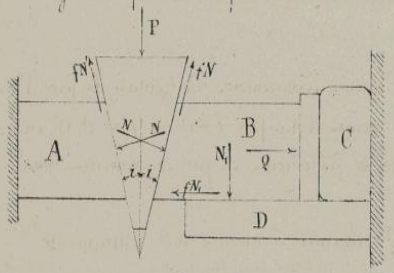
valeur toujours inférieure à Π, et d'autant plus faible que i est plus petit. Le travail dépensé dans ce cas est

$$Pl = l(\Pi\sin i + f\Pi\cos i) = \Pi h(1 + f\operatorname{cotg} i).$$

Ce travail, supérieur à Πh, est d'autant plus grand que i est plus faible.

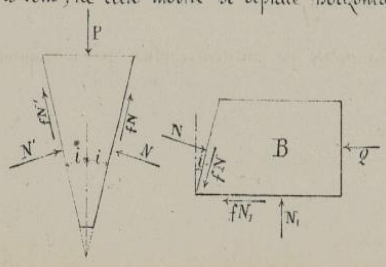
Presse à coin.

273. — *Disposition de l'appareil.* — La presse à coin se compose principalement d'un coin ayant la forme d'un prisme dont la base est un triangle isocèle, l'une des faces latérales est guidée dans



son mouvement par une pièce fixe A ayant la même inclinaison que le coin; l'autre face est en contact avec une cale mobile B de même inclinaison, et qui doit comprimer la matière située en C; la cale est d'ailleurs guidée, dans son mouvement de translation horizontal par une pièce fixe D qui l'empêche de se mouvoir dans le sens vertical sous l'influence des actions exercées par le coin.

274. — *Conditions d'équilibre du système.* — Si l'on exerce un effort P sur la tête du coin, la cale mobile se déplace horizontalement en comprimant la matière placée en C, ce qui détermine une réaction normale Q sur la face verticale de la cale. Le coin exerce, par ses deux faces, des pressions N et N' sur les pièces A et B en détermine, de la part de celles-ci, des



réactions normales respectivement égales à N et N'; le glissement qui se produit fait naître des forces de frottement fN et fN', produites par les pièces A et B sur le coin, forces

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui, dans l'état d'équilibre, donnent lieu à des réactions égales et contraires du coin sur ces deux pièces. Enfin, la pression N_1, déterminée par la cale sur l'appui fixe D, donne lieu à une réaction égale, et le glissement développe deux forces fN_1 égales et contraires, agissant respectivement sur ces deux pièces.

Pour exprimer les conditions d'équilibre du système, il suffit d'écrire que chaque partie est en équilibre sous l'influence des forces qui lui sont directement appliquées et des réactions qu'elle éprouve de la part des autres parties du système.

Pour le coin, il suffit de projeter les forces qui le sollicitent sur la direction de la force P et sur une direction perpendiculaire, ce qui donne

$$(N+N')\sin i + (N+N')f\cos i - P = 0, \qquad (N-N')(\cos i - f\sin i) = 0 .$$

On déduit de la dernière relation $N' = N$, et la première équation se réduit à

$$2N(\sin i + f\cos i) - P = 0$$

S'il s'agit de la cale, on projette les forces auxquelles elle est soumise sur deux directions l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à Q; on obtient ainsi

$$N(\cos i - f\sin i) - fN_1 - Q = 0, \quad N(\sin i + f\cos i) - N_1 = 0$$

275. — **Relation entre la force motrice et la résistance.** — L'élimination de N et de N_1 entre les trois dernières équations conduit à la relation

$$P = \frac{2Q(\sin i + f\cos i)}{(1-f^2)\cos i - 2f\sin i} = \frac{2Q(f + \operatorname{tg} i)}{1 - f^2 - 2f\operatorname{tg} i} . \qquad (1)$$

On voit que la force P est proportionnelle à Q si f et i sont constants.

Pour $f = 0$, on aurait $P = 2Q\operatorname{tg} i$, relation que l'on obtiendrait immédiatement comme condition d'équilibre si le frottement pouvait être regardé comme négligeable.

La valeur de P diminue évidemment avec f et aussi avec i; par conséquent, pour un effort P donné, il faut s'arranger pour que f soit aussi petit que possible et employer des coins d'autant plus aigus que la compression à obtenir doit être plus grande.

Pour $i = 0$, on a

$$P = \frac{2fQ}{1-f^2} ;$$

mais alors la cale a ses deux faces parallèles et n'éprouve aucun déplacement horizontal; la force P est employée exclusivement à vaincre les frottements. Si l'on avait à la fois $i = 0$ et $f = 0$, il en résulterait $P = 0$, ce qui doit être, car il n'y aurait plus de frottement et par conséquent plus de résistance à vaincre.

Pour une valeur donnée de P, la compression Q diminue à mesure que i augmente et devient nulle quand on a

$$1 - f^2 - 2f\operatorname{tg} i = 0, \text{ d'où } \quad \operatorname{tg} i = \frac{1-f^2}{2f} ;$$

pour cette valeur de i et pour les valeurs plus grandes la presse ne fonctionne plus; par conséquent, pour qu'elle puisse fonctionner on doit toujours avoir

$$\operatorname{tg} i < \frac{1-f^2}{2f} .$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

276. — **Utilisation.** — Si dy est le déplacement vertical du coin et dx le déplacement horizontal correspondant de la cale, les travaux élémentaires des forces P et Q sont Pdy et Qdx, et si l'on pose $NT = dy$, ce qui donne $dx = SN_1 = 2ST = 2\,dy\,tgi$, il vient

$$U = \frac{Qdx}{Pdy} = \frac{Q \times 2dy\,tgi}{Pdy} = \frac{2Q\,tgi}{P} = \frac{(1 - f^2 - 2f\,tgi)\,tgi}{f + tgi}.$$

Cette expression montre que U augmente à mesure que f diminue ; il est donc important d'entretenir les surfaces en contact dans un bon état de graissage.

Pour $f = 0$ on aurait $U = 1$ conformément à la vérification générale déjà indiquée.

La valeur générale de U étant nulle quand on pose, soit $i = 0$, soit $1 - f^2 - 2f\,tgi = 0$, il doit exister, entre ces limites, une valeur de i pour laquelle U est un maximum Or, on a

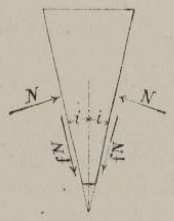
$$\frac{dU}{di} = \frac{f(1 + tg^2 i)\,(1 - f^2 - 4f\,tgi - 2tg^2 i)}{(f + tgi)^2};$$

et en posant $2tg^2 i + 4f\,tgi + f^2 - 1 = 0$, il vient $tgi = \frac{1}{2}\left(-2f \pm \sqrt{2(f^2+1)}\right)$.

La valeur négative de tgi ne convient pas à la question, car elle donnerait un angle d'acuité $2i$ plus grand que 180°. La valeur positive, mise dans l'expression de U, donne pour le maximum de l'utilisation,

$$U' = 1 + 3f^2 - 2f\sqrt{2(1+f^2)}.$$

277. — **Desserrage du coin.** — La condition du bon fonctionnement de l'appareil exige que le coin ne puisse se desserrer lorsque la force P a cessé d'agir. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la résultante des forces qui tendent à produire le desserrage soit plus petite que la résultante des forces qui s'opposent à ce mouvement, c'est-à-dire que l'on ait



$$2N \sin i < 2Nf \cos i, \quad \text{d'où} \quad tgi < f;$$

et le desserrage s'obtient alors en produisant, en dessous du coin, un choc qui sera d'autant plus faible que la différence $f - tgi$ sera elle-même plus petite.

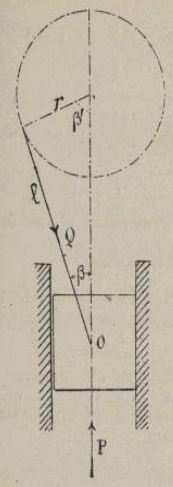
L'étude qu'on vient de faire de la presse à coin met en évidence cette propriété du frottement de maintenir les organes en prise quand la force motrice a cessé d'agir, ce qui permet, dans la pratique, d'opérer par intermittence à l'aide d'un poids qu'on fait tomber sur la tête du coin.

Glissières.

278. — **Objet des glissières.** — Cette disposition, dont le but est d'assurer le mouvement rectiligne alternatif d'une pièce mobile, peut être considérée comme un système de deux plans parallèles entre lesquels doit se mouvoir le *patin* rectangulaire ou *coulisseau* qui est lié à la pièce mobile et au centre duquel sont appliquées une force motrice développée d'une manière quelconque et une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

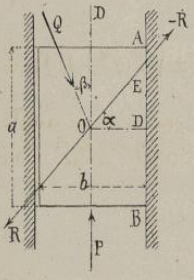
force résistante.



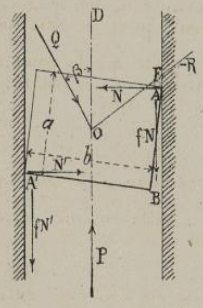
Il peut arriver que la direction de la force motrice soit constante et que celle de la résistante soit variable comme cela se présente dans l'accouplement de la tige du piston et de la bielle d'une machine à vapeur. L'inverse a lieu lorsqu'il s'agit, par exemple, de transmettre, à l'aide d'une bielle, le mouvement à la tige d'une pompe.

On ne peut déterminer le mouvement du coulisseau qu'à la condition d'admettre l'existence d'un certain jeu entre cette pièce et les joues de la glissière. Ce jeu qui est très exagéré dans la figure, permet de se rendre compte du fonctionnement des pièces.

278. — **Glissières longues et glissières courtes.** — On suppose ici que P est la force motrice, et dans ce cas, la résistance Q étant inclinée par rapport à la direction du mouvement, elle doit avoir pour effet de forcer le coulisseau à s'appliquer, par sa face AB sur la glissière de droite, d'où résultent nécessairement des réactions de cette glissière sur la pièce mobile.



En admettant d'abord que le contact ait lieu sur toute la longueur de la face AB et que le mouvement soit ascendant, on aura à considérer en chacun des points de AB des réactions normales dont la somme est N, et des réactions tangentielles dont la somme fN est dirigée en sens contraire du mouvement. Les forces P, Q, N et fN étant, abstraction faite des frottements autour de l'articulation au point O, les seules qui sollicitent le coulisseau, on en conclut que la résultante R de N et de fN doit être égale et directement opposée à la résultante des forces P et Q, cette résultante R faisant, comme toujours, avec la direction OD, un angle α qui est égal à l'angle de frottement.



Cela posé, si la direction de R vient rencontrer la glissière entre le point A et le point B, le contact aura lieu sur toute la longueur AB et il faudra, par conséquent que le patin soit assez long pour que l'on ait ED < AD, c'est-à-dire

$$\frac{b}{2} \operatorname{tg}\alpha < \frac{a}{2}, \quad \text{d'où} \quad a > b \operatorname{tg}\alpha.$$

Mais si la direction de R ne rencontre la glissière qu'en F, au-delà du patin, la résultante de P et de Q, égale à R, tend alors à le faire tourner autour de l'arête de contact projetée en A et à lui faire prendre une position oblique dans laquelle les deux sommets A et A' viendraient s'appuyer sur les glissières opposées. Dans ce cas on aurait nécessairement $a < b \operatorname{tg}\alpha$.

De là une distinction à faire entre les *glissières longues* qui satisfont à la condition $a > b \operatorname{tg}\alpha$, et les *glissières courtes* pour lesquelles on aurait $a < b \operatorname{tg}\alpha$.

279. — **Relation entre la force motrice et la résistance.** — Le mouvement étant supposé ascendant et uniforme, on doit considérer séparément les deux cas indiqués précédemment

Glissières longues. — Les forces P, Q, N et fN, projetées d'abord suivant OD, et ensuite perpendiculairement à cette direction, donnent

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$P - Q\cos\beta - fN = 0, \qquad Q\sin\beta - N = 0$$

d'où, en éliminant N,

$$P = Q(\cos\beta + f\sin\beta). \qquad (1)$$

Cette relation montre que P est proportionnel à Q si f et β sont constants.

Si f et Q sont constants, P varie avec β; et en posant successivement

$$\beta = 0, \qquad \operatorname{tg}\beta = f, \qquad \beta = 90^\circ,$$

il vient

$$P = Q, \qquad P = Q\sqrt{1+f^2}, \qquad P = Qf.$$

On peut d'ailleurs vérifier que $Q\sqrt{1+f^2}$ est le maximum de P entre les limites $\beta=0$ et $\beta=90^\circ$.

Si le mouvement était descendant, le sens du frottement serait changé; mais il est facile de voir que la relation finale entre P et Q serait la même que précédemment.

Glissières courtes. — Les forces à considérer sont d'abord P et Q; ensuite N et fN au point A, puis N' et fN' au point A'. Ces forces, projetées successivement sur OD et sur une direction perpendiculaire à OD, donnent

$$P - Q\cos\beta - f(N'+N) = 0, \qquad Q\sin\beta + (N'-N) = 0.$$

En second lieu, les moments des mêmes forces, par rapport à l'axe projeté en O, donnent

$$(N'+N)\frac{a}{2} + f(N'-N)\frac{b}{2} = 0.$$

L'élimination de $N'+N$ et de $N'-N$ entre ces trois équations conduit à

$$P = Q\left(\cos\beta + \frac{b}{a}f^2\sin\beta\right),$$

relation de la même forme que la précédente quand on pose $\frac{b}{a}f^2 = f'$; en remarquant, toutefois, que l'on a ici $f' < f$, le facteur $\frac{b}{a}f$ étant toujours inférieur à l'unité.

280. — **Utilisation.** — Pour un déplacement dy du point O dans la direction OD, le travail moteur élémentaire est Pdy; celui de la force Q, dans la même direction, est $Q\cos\beta\,dy$, d'où

$$U = \frac{Q\cos\beta\,dy}{Pdy} = \frac{Q\cos\beta}{P};$$

et en remplaçant P successivement par les deux valeurs précédentes, il vient

Glissières longues, $\qquad U = \dfrac{\cos\beta}{\cos\beta + f\sin\beta} = \dfrac{1}{1+f\operatorname{tg}\beta}$.

Glissières courtes, $\qquad U_1 = \dfrac{\cos\beta}{\cos\beta + \frac{b}{a}f^2\sin\beta} = \dfrac{1}{1+\frac{b}{a}f^2\operatorname{tg}\beta}$.

On voit que U et U_1 augmentent si f diminue, et pour $f=0$ on aurait $U=1$, $U_1=1$.

Pour $\beta=0$ on a aussi $U=1$, $U_1=1$ quel que soit f; la pression est alors nulle contre les glissières et le frottement disparaît. A mesure que β augmente, U et U_1 diminuent, ce qui montre l'inconvénient d'une grande inclinaison β; et pour $\beta=90^\circ$, on a $U=0$, $U_1=0$; tout le travail de la force motrice est alors dépensé par le frottement. On a d'ailleurs, d'après la figure du N.° 278,

$$\sin\beta = \frac{l'\sin\beta'}{l},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou pour des valeurs données de β' ou de r, l'angle β est d'autant plus petit que l'on plus grand, ce qui montre l'avantage des longues bielles, au point de vue de l'utilisation.

La relation $\frac{b}{a} f^2 < f$, indiquée précédemment, donne $U_1 > U$; cependant on préfère toujours les glissières longues aux glissières courtes, parceque dans ces dernières, le contact avec le coulisseau n'ayant lieu que par deux arêtes, les enduits peuvent être expulsés par la pression et les frottements seraient alors plus grands par suite de l'augmentation de la valeur de f.

281. — **Valeur moyenne de l'utilisation.** — Lorsqu'on veut évaluer la perte de travail due au frottement dans les glissières, il ne faut plus considérer simplement les travaux élémentaires des forces P et Q, mais bien le travail total de chacune de ces forces pendant une période entière du mouvement, c'est-à-dire les quantités exprimées d'une manière générale par

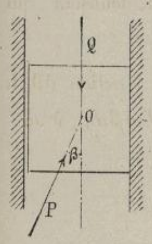
$$\int P dy \quad \text{et} \quad \int Q \cos\beta \, dy,$$

ce qui donne, pour la valeur moyenne de l'utilisation pendant cette période du mouvement,

$$U = \frac{\int Q \cos\beta \, dy}{\int P dy}.$$

Les deux termes de cette expression ne peuvent être calculés exactement ou approximativement, que si l'on connaît à l'avance les lois suivant lesquelles varient les quantités P et β, auquel cas la loi des variations de Q se trouve aussi déterminée en vertu de la relation (1) du N° 279. Les calculs nécessaires à la détermination des intégrales qui entrent dans l'expression de la valeur de U seront généralement compliqués, et l'on devra, dans la plupart des cas, recourir aux méthodes d'approximation connues.

282. — **Cas où la direction de la résistance est constante.** — Dans les glissières de la transmission à la tige du piston d'une pompe, la force motrice P fait un angle variable β avec l'axe de la glissière; la force Q, au contraire, est dirigée suivant cet axe; et la figure donne immédiatement



$$P\cos\beta - Q - fN = 0, \qquad P\sin\beta - N = 0;$$

d'où

$$Q = P(\cos\beta - f\sin\beta)$$

La valeur de l'utilisation sera ici

$$U = \frac{Q\,dy}{P\cos\beta\,dy} = \frac{\cos\beta - f\sin\beta}{\cos\beta} = 1 - f\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Cette valeur diminue quand f ou β augmente, et elle devient nulle pour

$$f\,\mathrm{tg}\,\beta = 1, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{f};$$

dans ce cas le frottement absorbe la totalité du travail moteur.

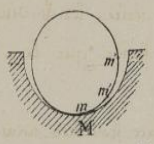
L'examen des glissières courtes donnerait lieu à une discussion semblable.

Arbres de rotation.

283. — **Tourillons et coussinets.** — Les pièces rotatives, dans les machines, sont fixées sur des arbres terminés, à leurs extrémités, par des portées cylindriques appelées *tourillons* et qui reposent sur des appuis fixes nommés *coussinets*.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le diamètre d'un coussinet doit être un peu plus grand que celui du tourillon afin de laisser, entre les organes, le jeu nécessaire pour la liberté du mouvement; par suite le contact ne peut avoir lieu que par un élément tangentiel auquel les diverses réactions doivent être rapportées.



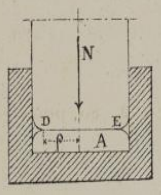
Comme dans les exemples déjà étudiés, l'un des organes est en mouvement par rapport à l'autre; et, bien que le contact puisse se maintenir sur un même élément longitudinal du coussinet, le frottement est bien de glissement parce que c'est sur une même génératrice du support, telle que celle qui est projetée en M, que viennent s'appliquer successivement les génératrices m, m', m'', ..., du tourillon mobile.

Dans l'état de repos, et en l'absence de l'action de toute force étrangère autre que le poids des organes, la génératrice inférieure du tourillon coïncide avec la génératrice inférieure du coussinet; mais, pendant le mouvement du tourillon, la résultante des réactions, normale et tangentielle, qui sont développées au contact, doit avoir la même direction que la pression exercée, en raison des forces extérieures, par le tourillon sur le coussinet. Le tourillon est donc dans son mouvement, retenu par le frottement; et, sous l'action des forces qui le sollicitent, il prend une position qu'on peut déterminer, ainsi qu'on le verra plus loin, lorsque le mouvement de rotation est supposé uniforme.

Les forces qui sollicitent un arbre soumis à un mouvement de rotation présentent plusieurs circonstances que nous allons examiner successivement, en commençant par les cas les plus simples.

284. — **Force dirigée suivant l'axe de l'arbre.** — Lorsqu'un arbre de rotation est soumis à une force qui s'exerce suivant son axe, il faut que cet arbre soit maintenu, dans le sens longitudinal, soit par une *butée*, soit par un *collet* ou *épaulement*. La pression qui en résulte détermine, dans l'état de mouvement, un frottement qui absorbe une certaine quantité de travail.

Cas où l'arbre repose sur une crapaudine. — L'extrémité inférieure de l'arbre repose dans une boîte munie d'un *grain d'acier* A. Dans cette disposition, que l'on désigne sous le nom de *pivot en crapaudine*, les surfaces en regard ne sont pas primitivement planes, mais elles présentent chacune une convexité en goutte de suif, dans le but de diminuer l'étendue du contact. Les deux courbures étant bientôt détruites par l'usé dans le voisinage du point central, on peut admettre qu'il y a contact parfait entre tous les points d'un cercle tel que DE de rayon ρ.



La pression totale N de l'arbre sur son support pouvant être regardée comme uniformément répartie sur la surface de contact $\pi\rho^2$, la pression par unité de surface est $\frac{N}{\pi\rho^2}$; et sur l'élément annulaire de rayon r et de largeur dr, la pression est

$$\frac{N}{\pi\rho^2} \times 2\pi r\,dr, \quad \text{ou} \quad \frac{2N}{\rho^2} \times r\,dr.$$

La résistance élémentaire, déterminée par le frottement, est donc égale à

$$\frac{2fN}{\rho^2} \times r\,dr,$$

et le travail élémentaire que ce frottement dépense pour un tour de l'arbre a pour expression

$$d\mathcal{C}fN = \frac{2fN}{\rho^2} \times r\,dr \times 2\pi r = \frac{4\pi fN}{\rho^2} \times r^2\,dr;$$

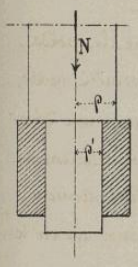
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par suite, le travail total pour un tour est

$$\mathcal{E}fN = \frac{4\pi fN}{\rho^2}\int_0^{\rho} r^2 dr = \frac{2}{3}\,2\pi\rho \times fN\,;$$

ce travail est donc le même que si la somme fN, de sens contraire au mouvement, était distribuée uniformément autour du centre suivant les tangentes à une circonférence dont le rayon ρ' serait les $\frac{2}{3}$ du rayon ρ. On voit en outre que le travail absorbé par le frottement est d'autant plus faible que le rayon est lui-même plus petit.

Cas où l'arbre est terminé par un épaulement. — La surface frottante étant représentée ici par une zône circulaire dont les rayons sont ρ et ρ' et dont la surface est $\pi(\rho^2-\rho'^2)$ il en résulte que la pression par unité de surface sur l'appui de l'arbre est



$$\frac{N}{\pi(\rho^2-\rho'^2)},$$

et que le frottement sur une zône élémentaire de rayon r et de largeur dr, a pour expression $\frac{fN\times 2\pi r dr}{\pi(\rho^2-\rho'^2)}$, ou $\frac{2fN}{\rho^2-\rho'^2}\times r dr$;

donc, le travail total dépensé par le frottement, pour une évolution de l'arbre, est

$$\mathcal{E}fN = \frac{2\pi fN}{\rho^2-\rho'^2}\int_{\rho'}^{\rho} r^2 dr = \frac{4}{3}\pi fN\frac{\rho^3-\rho'^3}{\rho^2-\rho'^2} = \frac{4}{3}\pi fN\,\frac{\rho^2+\rho\rho'+\rho'^2}{\rho+\rho'}$$

En désignant par ρ_1 le rayon moyen et par l la largeur de la zône, on a

$$\rho_1 = \tfrac{1}{2}(\rho+\rho'), \qquad l = \rho-\rho',$$

d'où l'on déduit $\rho = \rho_1 + \frac{1}{2}l$, et $\rho' = \rho_1 - \frac{1}{2}l$.

Ces valeurs, mises dans l'expression précédente, donnent

$$\mathcal{E}fN = 2\pi fN\left(\rho_1 + \frac{l^2}{12\,\rho_1}\right)\,;$$

et comme la fraction contenue dans la parenthèse est généralement petite relativement à ρ_1, on peut écrire, avec une approximation suffisante,

$$\mathcal{E}fN = 2\pi\rho_1 \times fN\,;$$

ce travail diminuant avec ρ_1, on doit donner au rayon moyen la plus petite valeur possible.

285. — **Forces parallèles à l'axe de l'arbre.** — Un arbre vertical étant posé sur un appui en B et maintenu par des colliers situés en A et en A', une pièce assemblée en H avec l'arbre porte un poids P à son extrémité. Déterminer les réactions produites sur les appuis de l'arbre en tenant compte des poids P_1 et P_2 des pièces EH et CD ainsi que du poids Π de l'arbre, et calculer le travail absorbé par le frottement dû à ces réactions lorsque l'arbre tourne autour de son axe.

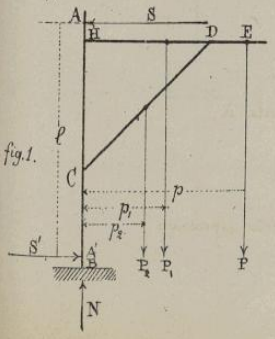
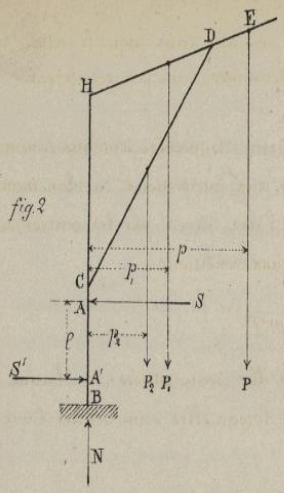


fig. 1.

Les actions des forces P, P_1 et P_2 déterminent sur les colliers de l'arbre, des pressions horizontales d'où résultent des réactions S et S' respectivement égales et opposées à ces pressions. Les mêmes forces produisent, sur l'appui B, une pression verticale qui s'ajoute au poids Π de l'arbre, ce qui donne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



lieu à une réaction verticale N égale en opposée à la pression totale exercée par cet arbre.

Le système étant en équilibre sous l'action des forces P, P_1, P_2, S, S' et N, on détermine les inconnues S, S' et N en prenant les moments des forces autour de l'axe projeté en A, et en projetant successivement les mêmes forces sur deux directions prises dans le plan de la figure, l'une horizontale, l'autre verticale, ce qui donne, figures 1 et 2,

$$Sl - Pp - P_1p_1 - P_2p_2 = 0, \quad S' - S = 0, \quad N - P - P_1 - P_2 - \Pi = 0$$

d'où $S = \frac{1}{l}(Pp + P_1p_1 + P_2p_2) = 0$, $S' = S$, $N = P + P_1 + P_2 + \Pi$;

relations qui se simplifieraient si quelques-uns des poids P_1, P_2, Π, étaient assez faibles, relativement à P, pour pouvoir être négligés.

Le mouvement de l'arbre, autour de son axe, détermine, en A et en A', des frottements tangentiels fS, fS'; et en B un frottement tangentiel fN; de sorte que si r est le rayon de chacun des tourillons A et A', et ρ le rayon de la surface frottante de la crapaudine, le travail absorbé par le frottement F pour un tour de l'arbre, et en l'absence de toute autre pression exercée sur cet arbre, a pour valeur

$$\mathcal{E}F = 2\pi rfS + 2\pi rfS' + 2\pi \times \tfrac{2}{3}\rho fN, \qquad (1)$$

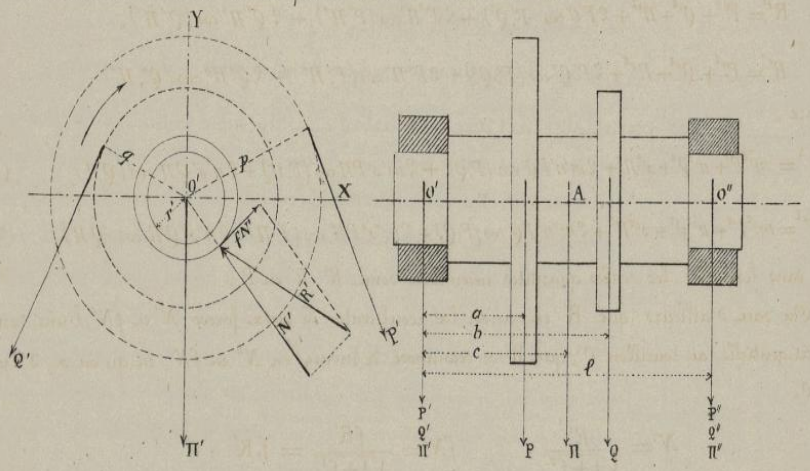
où, à cause de $S' = S$,

$$\mathcal{E}F = 4\pi f\left(rS + \tfrac{1}{3}\rho N\right).$$

On voit qu'il y a intérêt à ne donner aux rayons r et ρ que les dimensions strictement nécessaires.

Si la partie inférieure de l'arbre vertical était terminée par un épaulement, en désignant par ρ_1 le rayon moyen de la surface frottante, le dernier terme de la relation (1) devrait être remplacé par $2\pi\rho_1 fN$.

286. — **Forces situées dans des plans perpendiculaires à l'axe de l'arbre. (Treuil ordinaire).** — Le treuil se compose généralement d'un arbre horizontal terminé à ses extrémités par des tourillons reposant dans des coussinets. Cet arbre porte des roues ou des poulies sur lesquelles sont appliquées une force résistante Q et une force motrice P, situées l'une et l'autre dans des plans perpendiculaires à l'axe du treuil, les directions de ces forces étant d'ailleurs connues.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La condition la plus favorable à l'effet utile de la force inconnue P est celle dans laquelle cette force fait équilibre à la force donnée Q ainsi qu'aux réactions inconnues déterminées tant par ces forces que par le poids Π de l'appareil mobile dont le centre de gravité est en A.

On peut sans rien changer aux conditions d'équilibre du système, dans l'hypothèse d'un mouvement uniforme, remplacer la force P par deux composantes parallèles P', P'', situées aux intersections du plan mené par P parallèlement à l'axe de rotation, et des plans perpendiculaires à l'axe, menés par les centres de figure des coussinets. Ces deux composantes devront évidemment satisfaire aux conditions

$$P' = \frac{P(l-a)}{l} = m'P, \qquad P'' = \frac{Pa}{l} = m''P \;;$$

en remarquant, toutefois, que P' et P'' doivent être de même signe lorsqu'elles sont situées de chaque côté de la force P, comme le suppose ici la figure; et de signes contraires, lorsqu'elles sont situées l'une et l'autre d'un même côté de P.

On aura de même

$$Q' = \frac{Q(l-b)}{l} = n'Q\,, \qquad Q'' = \frac{Qb}{l} = n''Q\,,$$

$$\Pi' = \frac{\Pi(l-c)}{l} = s'\Pi\,, \qquad \Pi'' = \frac{\Pi c}{l} = s''\Pi\,.$$

Dans ces conditions, le treuil est en équilibre sous l'action : 1° — des forces P', Q', Π' et de la réaction R' exercée par le coussinet du tourillon O'; 2° — des forces P'', Q'', Π'' et de la réaction R'' exercée par le coussinet du tourillon O''.

L'ensemble de toutes ces forces doit avoir sa résultante de translation nulle puisque le système est en équilibre. Mais chacun des deux groupes précédents a aussi sa résultante de translation nulle; car si l'une et l'autre avaient une résultante, ces deux forces devraient aussi avoir une résultante nulle, et par suite elles devraient être égales, parallèles et opposées, ce qui ne peut pas être, les deux groupes considérés étant situés dans des plans différents et parallèles entre eux.

On en conclut que la réaction R', exercée sur le tourillon O', par le coussinet est égale, parallèle et opposée à la résultante des forces P', Q' et Π'; que, de même, la réaction R'', exercée sur le tourillon O'', est égale, parallèle et opposée à la résultante des forces P'', Q'', Π'', ce qui donne

$$R'^2 = P'^2 + Q'^2 + \Pi'^2 + 2P'Q'\cos(P',Q') + 2P'\Pi'\cos(P',\Pi') + 2Q'\Pi'\cos(Q',\Pi'),$$

$$R''^2 = P''^2 + Q''^2 + \Pi''^2 + 2P''Q''\cos(P'',Q'') + 2P''\Pi''\cos(P'',\Pi'') + 2Q''\Pi''\cos(Q'',\Pi'')\;;$$

c'est-à-dire,

$$R'^2 = m'^2P^2 + n'^2Q^2 + s'^2\Pi^2 + 2m'n'PQ\cos(P,Q) + 2m's'P\Pi\cos(P,\Pi) + 2n's'Q\Pi\cos(Q,\Pi), \quad \ldots (1)$$

$$R''^2 = m''^2P^2 + n''^2Q^2 + s''^2\Pi^2 + 2m''n''PQ\cos(P,Q) + 2m''s''P\Pi\cos(P,\Pi) + 2n''s''Q\Pi\cos(Q,\Pi), \quad \ldots (2)$$

formules dans lesquelles les seules quantités inconnues sont R', R'' et P.

On sait d'ailleurs que R' est aussi la résultante de deux forces N' et fN', l'une normale, l'autre tangentielle au tourillon O'; que R'' se décompose de même en N'' et fN'', et qu'on a, d'après le N° 270,

$$N' = \frac{R'}{\sqrt{1+f^2}}\,, \qquad fN' = \frac{fR'}{\sqrt{1+f^2}} = f_1R'\,,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$N'' = \frac{R''}{\sqrt{1+f^2}}, \qquad fN'' = \frac{fR''}{\sqrt{1+f^2}} = f_1 R''.$$

La troisième équation, nécessaire à la détermination des inconnues R', R'' et P s'obtient en prenant les moments, autour de l'axe $O'O''$, des forces P, Q, Π, R' et R''; et en remarquant, 1°. que le moment de la force Π est nul; 2°. que les moments de R' et de R'' sont respectivement égaux à ceux de fN' et de fN'', ce qui donne

$$Pp - Qq - R' f_1 r' - R'' f_1 r'' = 0. \qquad (3)$$

Résolution des équations précédentes. — Pour résoudre les équations (1), (2) et (3), on pourrait porter, dans l'équation (3) les valeurs de R' et de R'' tirées de (1) et (2); mais l'équation résultante serait du quatrième degré par rapport à l'inconnue P. Il vaut mieux employer la méthode des substitutions successives et procéder de la manière suivante :

Le terme $f_1(R'r' + R''r'')$ ayant une valeur généralement petite relativement aux valeurs de Pp et Qq, on peut poser comme première approximation,

$$Pp = Qq, \quad \text{d'où} \quad P = \frac{Qq}{p}.$$

Cette valeur de P, mise dans les relations (1) et (2) permet de calculer les valeurs correspondantes de R' et R'', que l'on substitue ensuite dans l'équation (3) ce qui fournit une seconde valeur de P plus approchée que la première. On porte cette nouvelle valeur dans les équations (1) et (2) et l'on en tire de nouvelles valeurs de R' et R'' qui, substituées dans (3) donnent une troisième valeur de P plus exacte que la seconde. Cette troisième valeur sera, dans la plupart des cas, suffisamment exacte. En général on continue jusqu'à ce que l'on ait obtenu deux valeurs successives de P dont la différence soit inférieure au degré d'approximation que l'on veut avoir; la dernière valeur de P est alors celle que l'on adopte définitivement.

Les valeurs finales de R' et de R'', déduites du dernier calcul, serviront à déterminer les pressions normales N' et N'' exercées sur les tourillons, pressions au moyen desquelles on pourra ensuite s'assurer si les rayons r' et r'' ont été introduits dans les calculs précédents avec des valeurs suffisantes.

Méthode de Poncelet pour la détermination approximative de l'effort P. — Poncelet a démontré que les radicaux de la forme $\sqrt{X^2+Y^2}$ peuvent être ramenés approximativement à la fonction du premier degré $mX + nY$, et que l'on a :

Pour $X > Y$, $\quad \sqrt{X^2+Y^2} = mX+nY = 0,96\,X + 0,04\,Y$, à $\frac{1}{25}$ près.

Dans tous les cas $\quad \sqrt{X^2+Y^2} = mX+nY = 0,83\,(X+Y)$, à $\frac{1}{6}$ près.

Cela posé, si X' et Y', X'' et Y'' sont respectivement les projections des résultantes R' et R'' sur les axes rectangulaires $O'X$, $O''Y$, on peut écrire

$$R' = \sqrt{X'^2+Y'^2} = mX'+nY',$$

$$R'' = \sqrt{X''^2+Y''^2} = mX''+nY''.$$

Mais on a évidemment

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$X' = R'\cos(R',X) = m'P\cos(P,X) + n'Q\cos(Q,X),$$

$$Y' = R'\cos(R',Y) = m'P\cos(P,Y) + n'Q\cos(Q,Y) + s'\Pi,$$

$$X'' = R''\cos(R'',X) = m''P\cos(P,X) + n''Q\cos(Q,X),$$

$$Y'' = R''\cos(R'',Y) = m''P\cos(P,Y) + n''Q\cos(Q,Y) + s''\Pi$$

expressions de la forme

$$X' = \alpha' P + \beta', \qquad X'' = \alpha'' P + \beta'',$$

$$Y' = \alpha_1' P + \beta_1', \qquad Y'' = \alpha_1'' P + \beta_1'',$$

dans lesquelles $\alpha', \beta', \alpha_1', \beta_1', \alpha'', \beta'', \alpha_1'', \beta_1''$, sont des quantités connues. Il en résulte

$$R' = m(\alpha' P + \beta') + n(\alpha_1' P + \beta_1'), \qquad (1\text{ bis})$$

$$R'' = m(\alpha'' P + \beta'') + n(\alpha_1'' P + \beta_1''). \qquad (2\text{ bis})$$

valeurs du premier degré en P, en qui, substituées dans la relation (3) fournissent une équation également du premier degré par rapport à P, ce qui permet de déterminer facilement la valeur de cette inconnue.

La quantité P étant calculée, on obtiendra ensuite les valeurs de R' et de R'' à l'aide des équations (1) et (2) ou (1 bis) et (2 bis).

Utilisation. — Les forces P, R', R'' ayant été calculées, soit par la méthode des substitutions successives, soit par la méthode approximative de Poncelet, le travail de la force Q, pour un tour, est $Q \times 2\pi q$; celui de la force P est $P \times 2\pi p$, et le rapport de ces quantités donne

$$U = \frac{Qq}{Pp} = \frac{Qq}{Qq + f_1(R'r' + R''r'')}.$$

Cette valeur montre que, quel que soit le mode de transmission des forces, par poulies, engrenages ou manivelles, on ne doit donner aux rayons des tourillons que les dimensions strictement nécessaires pour qu'ils puissent résister aux pressions normales N' et N'' auxquelles ils sont soumis; on devra, par conséquent, chercher à réduire au minimum les intensités de ces pressions, en dirigeant autant que possible les forces P et Q en sens contraires.

Cas où les forces P et Q sont verticales. — Dans cette hypothèse on a

$$\cos(P,Q) = 1, \qquad \cos(P,\Pi) = 1, \qquad \cos(Q,\Pi) = 1;$$

les équations (1) et (2) sont alors de la forme

$$R'^2 = (m'P + n'Q + s'\Pi)^2, \qquad R''^2 = (m''P + n''Q + s''\Pi)^2,$$

d'où

$$R' = m'P + n'Q + s'\Pi, \qquad R'' = m''P + n''Q + s''\Pi,$$

résultats évidents d'eux-mêmes, puisque toutes les forces sont parallèles entre elles. Ces valeurs mises dans la relation (3) donnent une équation du premier degré par rapport à P; les calculs se trouvent ainsi beaucoup simplifiés, et l'on n'a plus besoin de recourir aux méthodes d'approximation.

Cas où la force motrice est donnée, la force résistante étant inconnue. — Dans cette hypothèse les équations (1), (2) et (3) subsistent sans aucune modification; et l'on emploierait pour calculer Q, R' et R'' les procédés dont on s'est servi pour déterminer P, R' et R''.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

287. — **Forces situées d'une manière quelconque par rapport à l'axe de l'arbre.** Si indépendamment de la force résistante Q considérée au N.° précédent, la force motrice P doit être employée à vaincre une ou plusieurs forces T dont les directions sont obliques par rapport à l'axe du treuil, on décomposera chacune d'elles en deux forces rectangulaires; l'une, N_1 parallèle à l'axe; l'autre Q_1, située dans un plan perpendiculaire à cet axe.

La force Q_1 pourra être remplacée par deux composantes parallèles Q_1', Q_1'' agissant directement sur les tourillons O' et O''.

La force N_1 pourra être remplacée, suivant ce qui a été dit au N.° 285, par un système équivalent de trois forces: 1.° — Deux pressions Q_2', Q_2'' égales et de sens contraires, normales aux tourillons O' et O'', et situées dans le plan de l'axe et de la force N_1; 2.° — Une force égale à N_1, de même sens, située dans l'axe de l'arbre, force qui détermine une réaction égale et contraire de la part de la butée de l'arbre.

La réaction totale R' du tourillon O' sera alors égale et contraire à la résultante des forces P', Q', Q_1', Q_2', en Π. La réaction R'' sera la résultante de $P''Q''$, Q_1'', Q_2'' en Π''. De sorte qu'en désignant, d'une manière générale, les composantes par F, et deux quelconques d'entre elles par F_1 et F_2, on aura

$$R'^2 = \Sigma F'^2 + 2\Sigma F_1' F_2' \cos(F_1', F_2'),$$

$$R''^2 = \Sigma F''^2 + 2\Sigma F_1'' F_2'' \cos(F_1'', F_2'').$$

Quant à l'équation des moments autour de l'axe OO'', elle sera, dans le cas d'un épaulement, en attendu que les moments de Π et N sont nuls,

$$Pp - Q_1 q_1 - f_1(R'r' + R''r'') - f N_1 \rho_1 = 0,$$

le terme $f N_1 \rho_1$ devant être remplacé par $f N_1 \times \frac{2}{3}\rho$ lorsque l'arbre sera terminé par un pivot.

Le calcul des quantités P, R' et R'' se fera d'ailleurs comme au N.° 286 par la résolution des trois équations précédentes.

288. — **Observation sur la position des points de contact.** — On a admis, dans la théorie précédente que toutes les forces situées dans des plans perpendiculaires à l'axe de l'arbre de rotation peuvent être remplacées par un système équivalent formé de deux groupes agissant respectivement dans des plans perpendiculaires à l'axe et passant par les centres de figure des tourillons. Cette hypothèse n'est permise que si chaque tourillon est en contact sur toute une génératrice avec le coussinet correspondant. Or, les deux groupes de forces n'étant généralement pas identiques dans leur mode d'action sur les tourillons, le jeu réel, quoique très-faible, qui existe entre chaque tourillon et son coussinet permet à l'arbre de prendre une petite déviation, d'où il résulte que le contact d'un bout et de l'autre n'a plus lieu que par un seul point. Pour que le contact puisse se faire, de part et d'autre, sur toute une génératrice, il faut admettre que l'un des coussinets a été déplacé d'une petite quantité tout en conservant un parallélisme complet avec le tourillon.

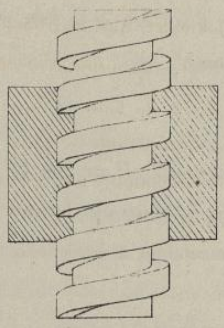
De la Vis.

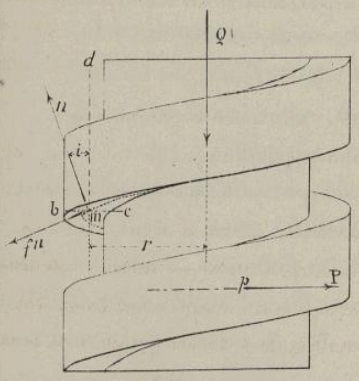
289. — **Objet de la vis.** — La vis a pour objet de vaincre des résistances considérables à l'aide d'une force relativement faible. Elle emprunte ses moyens d'action au treuil et au plan incliné. Sa surface est celle d'un héliçoïde gauche dont la génératrice fait un angle constant avec l'axe du cylindre qui sert de noyau et s'appuie constamment sur une hélice tracée à la surface de ce cylindre. Le filet de la vis

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

est dit carré ou triangulaire suivant que la coupe faite par l'axe affecte, sur la saillie de la vis, la forme d'un carré ou d'un triangle. La vis tourne dans un écrou qui présente des saillies ou des creux correspondant aux creux ou aux saillies du filet.

290. — **Vis à filet carré chargée d'un poids en tournant dans son écrou.** — Un couple Pp, appliqué à une vis dont l'écrou est fixe, agit dans une direction perpendiculaire à l'axe de cette vis et doit vaincre une résistance Q appliquée sur la tête de la vis. On demande de déterminer la relation qui doit exister entre les forces P et Q en tenant compte du frottement.





La vis s'appuie sur son écrou par la surface hélicoïdale de son filet; et comme la profondeur du pas est ordinairement petite relativement au diamètre de la vis, on peut regarder les réactions normales élémentaires qui s'exercent sur une génératrice telle que bc comme étant sensiblement égales et parallèles entre elles, de sorte que la résultante n de ces réactions est une force normale qui s'exerce en un point m milieu de la droite bc et à une distance r de l'axe de la vis. Cette réaction n fait avec la verticale qui passe en m un angle connu i, et détermine un frottement fn dirigé suivant la tangente à l'hélice au point m. Tous les points de cette hélice étant dans des conditions identiques, on en conclut que la somme des réactions normale est Σn pour toute l'étendue de la surface hélicoïdale en contact avec l'écrou, et que la somme des résistances tangentielles est Σfn ou $f\Sigma n$.

Conditions d'équilibre. — En projetant toutes les forces du système sur l'axe de la vis, en prenant ensuite les moments de ces forces par rapport au même axe et remarquant que les forces n et fn sont, avec la droite md, dans un même plan tangent au cylindre de rayon r, on obtient

$$Q - \Sigma n\cos i + f\Sigma n\sin i = 0, \qquad Pp - \Sigma nr\sin i - f\Sigma nr\cos i = 0;$$

d'où, en éliminant Σn

$$Pp = \frac{Qr(f\cos i + \sin i)}{\cos i - f\sin i} = \frac{Qr(f + \operatorname{tg} i)}{1 - f\operatorname{tg} i},$$

On voit que pour une même résistance donnée Q, le couple moteur Pp augmente avec f, ce qui doit être. La valeur de Pp augmente aussi avec i; et pour $\operatorname{tg} i = \frac{1}{f}$, on aurait $P = \infty$ dans ce cas, la vis ne pourrait plus soulever la charge quelle que fût l'intensité de la force motrice; il faut donc que l'on ait toujours $\operatorname{tg} i < \frac{1}{f}$. Au point de vue du plus grand effet à produire avec un couple donné Pp, la valeur la plus favorable de i serait $i = 0$, d'où résulterait $Pp = Qr$, mais alors le filet formerait une surface plane perpendiculaire à l'axe, et la vis tournerait sans monter.

Utilisation. — Le travail de la force P, pour un tour de la vis, est $2\pi Pp$, si h est la hauteur du pas, le travail de la force Q est Qh ou $Q \times 2\pi r \operatorname{tg} i$; il en résulte

$$U = \frac{2\pi rQ\operatorname{tg} i}{2\pi Pp} = \frac{(1 - f\operatorname{tg} i)\operatorname{tg} i}{f + \operatorname{tg} i},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour $f=0$, on a $U=1$ ce qui est évident. La valeur de U devient nulle quand on pose, soit $tgi=0$, soit $1-ftgi=0$; il faut donc que l'on ait $tgi>0$ et $tgi<\frac{1}{f}$. D'ailleurs le maximum de U est facile à obtenir, car on a

$$\frac{dU}{di}=\frac{f(1+tg^2i)(1-2ftgi-tg^2i)}{(1+tgi)^2},$$

et la condition $tg^2i+2ftgi-1=0$, donne

$$tgi=-f\pm\sqrt{1+f^2}.$$

La valeur négative doit être rejetée, car elle donnerait $i>90°$; l'inclinaison des filets serait alors changée de sens et la rotation de la vis ferait descendre le poids Q au lieu de le faire monter. La valeur positive de tgi, mise dans l'expression de U, donne pour le maximum,

$$U'=1+2f^2-2f\sqrt{1+f^2};$$

et comme f^2 est ordinairement très-petit, on peut prendre approximativement $U'=1-2f$.

Desserrage de la vis. — Le moment qui tend à produire le desserrage, lorsque le couple moteur Pp a cessé d'agir, est évidemment égal à $\Sigma n\sin i\times r$, et le moment qui s'oppose à ce mouvement a pour valeur $\Sigma fn\cos i\times r$. On en déduit les conséquences suivantes :

1°. — La vis se desserre d'elle-même, le couple moteur n'agissant plus, si l'on a

$$\Sigma n\sin i\times r>\Sigma fn\cos i\times r,\quad \text{d'où}\quad tgi>f.$$

2°. — Le desserrage est sur le point de se produire, dans les mêmes circonstances, si l'on a

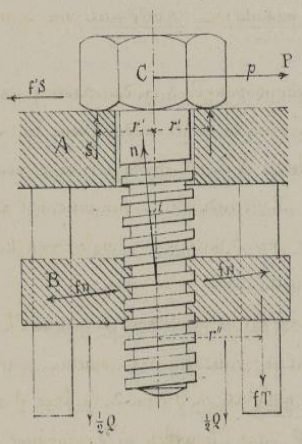
$$\Sigma n\sin i\times r=\Sigma fn\cos i\times r,\quad \text{d'où}\quad tgi=f.$$

3°. — La vis ne peut se desserrer sans l'action d'un couple moteur quand on a

$$\Sigma n\sin i\times r<\Sigma fn\cos i\times r,\quad \text{d'où}\quad tgi<f;$$

dans ce cas l'action nécessaire pour produire le desserrage est d'autant plus faible que tgi diffère moins de f; par suite cette action doit être d'autant plus énergique que tgi est plus petit.

291. — *Vis à écrou guidé servant à la manœuvre des vantaux.* — Lorsqu'on se sert d'une vis retenue sur un collet A pour surmonter une résistance Q dont le point d'application doit s'élever sans participer au mouvement de rotation de la vis, on munit l'écrou B de deux oreilles qui glissent dans des rainures et qui donnent lieu à un frottement pendant le soulèvement du vantail, frottement auquel il faut ajouter celui de la tête de la vis sur la pièce fixe A. Les forces à considérer sont :



Au contact de A et de C, sur une circonférence moyenne de rayon r', une pression normale S et un frottement tangentiel $f'S$.

Au contact de l'écrou et de la rainure, à une distance r'' de l'axe de la vis, une pression normale T et un frottement vertical $f''T$ dirigé de haut en bas.

Au contact de la vis et de l'écrou, à une distance r de l'axe de la vis, une somme de pressions normales Σn et des frottements tangentiels correspondants $f\Sigma n$.

Enfin la force motrice P tangente à une circonférence de rayon p, et la résistance Q agissant sur l'écrou mobile est dirigée suivant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'axe de la vis.

En considérant séparément l'équilibre de la vis et de l'écrou on peut écrire immédiatement

Pour la vis, $S - (\cos i - f \sin i)\Sigma n = 0$, $\quad Pp - f'Sr' - r(\sin i + f\cos i)\Sigma n = 0$,

Pour l'écrou, $Q + f''T - (\cos i - f\sin i)\Sigma n = 0$, $\quad Tr'' - r(\sin i + f\cos i)\Sigma n = 0$,

relations qui donnent successivement

$$S = \frac{Pp(1-f\operatorname{tg} i)}{f'r'(1-f\operatorname{tg} i) + r(f+\operatorname{tg} i)}, \qquad T = \frac{Qr(f+\operatorname{tg} i)}{r''(1-f\operatorname{tg} i) - f''r(f+\operatorname{tg} i)}$$

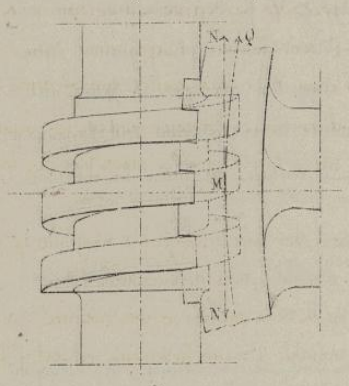
$$Pp = Qr'' \times \frac{f'r'(1-f\operatorname{tg} i) + r(f+\operatorname{tg} i)}{r''(1-f\operatorname{tg} i) - f''r(f+\operatorname{tg} i)}, \qquad U = \frac{r\operatorname{tg} i}{r''} \times \frac{r''(1-f\operatorname{tg} i) - f''r(f+\operatorname{tg} i)}{f''r'(1-f\operatorname{tg} i) + r(f+\operatorname{tg} i)}$$

En faisant $f' = 0$ et $f'' = 0$ dans les valeurs de Pp et de U, on retrouve les relations qui ont été établies au début de l'étude sur la vis.

Observation. — On n'a pas tenu compte, dans ce qui précède, du frottement latéral de la vis, parceque la force motrice agit habituellement à la manière d'un couple; mais s'il en était autrement, les réactions pourraient être calculées de la même manière que pour le treuil.

292. — **Vis à filet triangulaire.** — La théorie du frottement de la vis triangulaire qui est le plus généralement employée, si ce n'est pour les vis de pressoirs et de balanciers, comporterait les mêmes observations que pour la vis à filet carré, mais il faudrait en outre tenir compte de l'inclinaison des réactions normales par rapport à l'axe, ces réactions étant alors perpendiculaires aux génératrices inclinées de la surface hélicoïdale de la vis.

293. — **Engrenage à vis sans fin.** — Un arbre, que l'on suppose ici vertical, est denté suivant une hélice qui engrène avec la denture d'une roue dont l'axe est perpendiculaire à celui de l'arbre, et dont la jante est creusée de manière à s'appliquer exactement contre l'arbre fileté. Le système étant mis en mouvement par l'action des forces qui le sollicitent, le contact de la vis avec la roue détermine un frottement de glissement et un frottement de roulement; mais ce dernier peut être considéré comme négligeable par rapport au premier, et les conditions du problème sont analogues à celles que présente une vis ordinaire qui se meut dans son écrou.



L'ensemble des réactions normales et des réactions tangentielles qui se développent au contact de l'arbre et de la roue peut être remplacé par deux forces équivalentes N et fN appliquées au point M situé approximativement sur la perpendiculaire commune à l'axe de la vis et à celui de la roue, la force N faisant un angle connu i avec la verticale menée par le point M, et la force fN étant tangente à l'hélice qui passe en ce point.

Cas où la vis conduit la roue. — En désignant par p la distance du point M à l'axe de la vis, et par q la distance du même point à l'axe de la roue, on peut toujours admettre, pour simplifier les calculs que p est le bras de levier de la force P appliquée à la vis, et q celui de la force Q appliquée à la roue. On obtient alors la relation qui lie les forces P et Q, dans l'hypothèse où le mouvement est uniforme,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en écrivant que la vis et l'écrou sont séparément en équilibre sous l'action des forces qui les sollicitent, ce qui donne, en prenant les moments successivement autour des deux axes,

$$Pp - N\sin i \times p - fN\cos i \times p = 0, \qquad Qq - N\cos i \times q + fN\sin i \times q = 0 ;$$

en par suite

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin i + f\cos i}{\cos i - f\sin i} = \frac{tgi + f}{1 - f tgi}, \qquad (1)$$

relation qui se réduirait à $\frac{P}{Q} = tgi$ si l'on ne tenait pas compte du frottement.

La formule (1) montre que, pour une résistance donnée Q, la force P doit être d'autant plus grande que $f tgi$ diffère moins de l'unité, par suite le fonctionnement n'est possible que si l'on a

$$f tgi < 1, \quad \text{d'où} \quad tgi < \frac{1}{f}.$$

Quant à la valeur de U, on a, comme pour la vis en l'écrou,

$$U = \frac{2\pi p tgi \times Q}{2\pi P p} = \frac{Q\, tgi}{P} = \frac{(1 - f tgi)\, tgi}{tgi + f},$$

valeur qui se réduit à zéro quand on pose soit $i = 0$, soit $1 - f tgi = 0$, ce qui donne

$$U = \frac{1-f}{1+f} \quad \text{pour} \quad tgi = 1.$$

On trouverait d'ailleurs facilement que le maximum de U correspond à $tgi = -f + \sqrt{1+f^2}$, et qu'il a pour valeur $U' = 1 + 2f^2 - 2f\sqrt{1+f^2}$, ou sensiblement $U' = 1 - 2f$.

Cas où la roue conduit la vis. — Lorsque la force Q devient motrice, on obtient la relation qui lie les deux forces en renversant le rapport précédent et en changeant le signe de f, ce qui donne immédiatement

$$\frac{Q}{P} = \frac{1 + f tgi}{tgi - f}.$$

Le fonctionnement n'est possible dans ce sens que pour $tgi > f$ et l'on voit que, pour une valeur donnée de P, la force nécessaire pour vaincre cette résistance doit être d'autant plus grande que tgi diffère moins de f. Donc, pour que le système puisse fonctionner dans les deux sens, il faut que tgi soit compris entre f et $\frac{1}{f}$, condition comparable à celle que présente la vis à écrou dont l'engrenage actuel ne diffère, quant à l'écrou, qu'en ce que le déplacement du point de contact détermine la rotation de la roue autour de son axe.

La valeur de U, dans le cas où Q est la force motrice, a pour expression

$$U = \frac{tgi - f}{(1 + f tgi)\, tgi}$$

valeur qui devient nulle, soit pour $tgi = f$, soit pour $tgi = 0$, et dont le maximum, qui correspond à $tgi = f + \sqrt{1+f^2}$, est

$$U' = \frac{1}{1 + 2f^2 + 2f\sqrt{1+f^2}}, \text{ ou approximativement, } U' = \frac{1}{1+2f}.$$

La vis sans fin est rarement employée dans ces conditions.

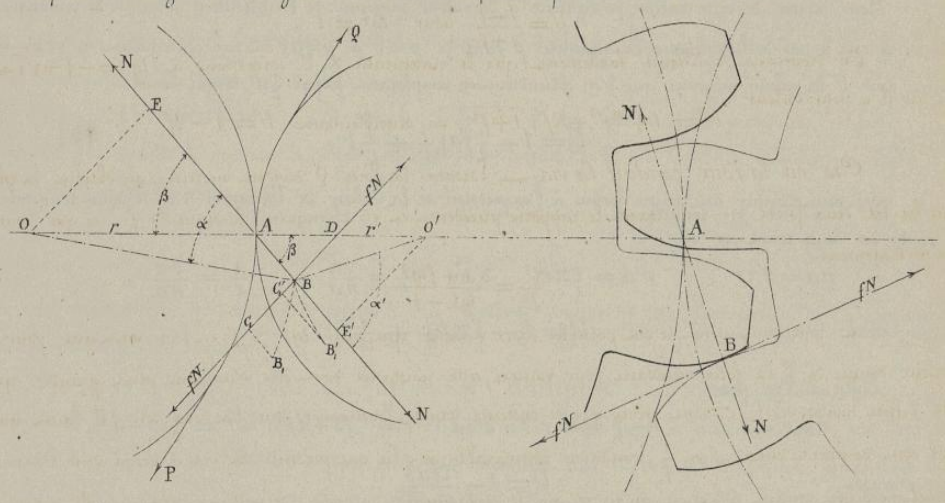
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Engrenages.

294. — **Nature du frottement.** — Tous les engrenages, à l'exception de celui de *White*, dit engrenage helicoïdal, donnent lieu, au contact réciproque des dents, à un frottement mixte de roulement et de glissement, résultant de ce que le point de contact ne reste pas, dans le mouvement, sur les circonférences primitives, condition qui serait nécessaire pour qu'il n'y eût pas de glissement. Mais il résulte de ce qui sera dit ultérieurement que la résistance au roulement est négligeable par rapport au frottement de glissement, parce que les dents en contact sont formées de corps durs et polis, et que le chemin parcouru par le point d'application de la résistance au roulement est toujours beaucoup moins grand que celui qui est parcouru dans le sens du glissement.

On admet, pour l'étude du frottement des engrenages, que la normale commune au point de contact des dents passe par le point de tangence des deux circonférences primitives; dans cette hypothèse, il y a lieu de considérer séparément le cas des engrenages extérieurs et celui des engrenages intérieurs.

295. — **Engrenages cylindriques extérieurs.** — *Cas où le contact des dents a lieu après la ligne des centres.* — Une roue O, mise en mouvement par une force motrice P, conduit une roue O' destinée à vaincre une force résistante Q, et l'on suppose, pour simplifier les calculs, que les bras de levier des forces P et Q sont respectivement égaux aux rayons r et r' des circonférences primitives des deux roues.



La pression normale N exercée en B par la roue O détermine, de la part de la roue O', une réaction égale et contraire, ainsi qu'un frottement tangentiel fN dont il s'agit de distinguer le sens. Or, lorsque les circonférences primitives tournent d'une même quantité ds, le point B de la roue O vient en B_1, le même point B de la roue O' vient en B'_1, et l'on a

$$BB_1 = ds \times \frac{OB}{r}, \qquad BB'_1 = ds \times \frac{O'B}{r'}.$$

Ces longueurs infiniment petites, projetées sur la tangente commune au point B donnent

$$\left.\begin{aligned} BC_1 &= BB_1 \cos\alpha = \frac{ds}{r}\, OB\cos\alpha = \frac{ds}{r}\, BE = \frac{ds}{r}\, DO\cos\beta, \\ BC'_1 &= BB'_1 \cos\alpha' = \frac{ds}{r'}\, O'B\cos\alpha' = \frac{ds}{r'}\, BE' = \frac{ds}{r'}\, DO'\cos\beta, \end{aligned}\right\} \quad \text{d'où} \quad \frac{BC_1}{BC'_1} = \frac{DO}{DO'} \times \frac{r'}{r}.$$

Ce rapport étant plus grand que l'unité, on en conclut $BC_1 > BC'_1$; le sens du glissement relatif est donc comme ainsi que celui de la force fN qui agit toujours en sens inverse du mouvement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si le point D se trouvait à la droite du point O', les deux longueurs BC, et BC', étant de sens contraires à partir du point B, il est évident que le glissement aurait encore lieu de B à C,

Cela posé, les équations d'équilibre pour les deux roues sont

$$Pr = Nr\sin\beta + fN(r\cos\beta + p)\,, \qquad Qr' = Nr'\sin\beta + fN(r'\cos\beta - p)\,, \qquad (1)$$

d'où, en éliminant N,

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin\beta + f(\cos\beta - \frac{p}{r'})}{\sin\beta + f(\cos\beta + \frac{p}{r})} = 1 - \frac{fp(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'})}{\sin\beta + f(\cos\beta + \frac{p}{r})}\,,$$

relation qui se réduirait évidemment à $P = Q$ si l'on avait $f = 0$.

L'angle β étant très-voisin de 90°, on peut poser $\sin\beta = 1$, $\cos\beta = 0$, en négliger ensuite, au dénominateur, la fraction $\frac{p}{r}$ qui est ordinairement très-petite relativement à l'unité; il vient alors

$$\frac{Q}{P} = 1 - fp\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\,.$$

Utilisation. — Pour un chemin ds parcouru sur chacune des circonférences primitives des deux roues, le travail de la force Q est Qds; celui de la force P est Pds, et l'on a

$$U = 1 - fp\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\,.$$

Pour passer de cette valeur particulière à la valeur moyenne de l'utilisation, il suffit de remarquer que si a est le pas de l'engrenage, la quantité p varie de $p = 0$ à $p = a$; on peut par conséquent admettre pour U la valeur moyenne que l'on obtiendrait en remplaçant p par $\frac{1}{2}a$, ce qui donne

$$U = 1 - \tfrac{1}{2}fa\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\,. \qquad (2)$$

On peut donner une autre forme à l'expression de la valeur de U, car si n et n' sont les nombres de dents des deux roues, on a

$$na = 2\pi r\,, \qquad n'a = 2\pi r' \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{r} = \frac{2\pi}{na}\,, \qquad \frac{1}{r'} = \frac{2\pi}{n'a}\,,$$

et par suite

$$U = 1 - f\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)\,.$$

Enfin, si l'on pose

$$r + r' = s\,, \qquad r - r' = d\,, \qquad \text{d'où} \quad r = \tfrac{1}{2}(s+d), \quad r' = \tfrac{1}{2}(s-d)\,,$$

on a aussi

$$U = 1 - \frac{2fas}{s^2 - d^2}\,.$$

Ces formules montrent que le rendement augmente :

1° — Si r et r' augmentent, a restant constant.

2° — Si n et n' augmentent, r et r' restant constants.

3° — Si la différence $r - r'$ diminue, la somme $r + r'$ restant constante.

La seconde condition rentre d'ailleurs dans la première; et l'on voit qu'il convient d'augmenter le nombre des dents, en réduisant leur largeur, jusqu'à la limite imposée par les règles de la résistance des matériaux.

Quant à la pression normale N, au moyen de laquelle on pourra calculer l'épaisseur à donner aux dents, on la déduit de la formule (1) qui donne pour $\sin\beta = 1$,

$$N = \frac{Q}{1 - \frac{fp}{r'}}\,, \quad \text{ou approximativement} \quad N = Q\,.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cas où le contact des dents a lieu avant la ligne des centres. — Lorsque le contact des dents se fait avant la ligne des centres, on reconnaît facilement que les équations d'équilibre sont de la forme

$$Pr = Nr\sin\beta - fN(r\cos\beta - p), \qquad Qr' = Nr'\sin\beta - fN(r'\cos\beta + p),$$

ce qui conduit à la même formule que précédemment ou à la même valeur de U.

Il faut toutefois remarquer que la conduite avant la ligne des centres peut donner lieu à des arcs-boutements que l'on peut éviter en diminuant autant que possible l'angle de la tangente extrême avec la ligne des centres.

Cas où le contact des dents a lieu simultanément avant et après la ligne des centres. — Ce cas ne présente pas plus de difficultés que les deux précédents, et l'on obtient toujours pour U la valeur donnée par la formule (1).

296. — *Engrenages cylindriques intérieurs.* — La question des engrenages intérieurs, traitée comme celle des engrenages extérieurs, conduirait facilement à l'expression

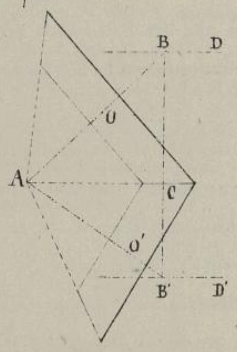
$$U = 1 - \frac{fa}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = 1 - f\pi\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right).$$

On voit ainsi, qu'au point de vue des frottements, ces engrenages sont plus favorables que les autres ; mais les difficultés de l'exécution limitent beaucoup l'emploi que l'on en fait ; en ils ne sont en réalité que très-rarement utilisés dans les machines.

297. — *Crémaillères.* — Si dans les valeurs de U des deux numéros précédents on fait $r' = \infty$, ce qui revient à supposer que la circonférence primitive de la roue conduite devient une ligne droite, on trouve, pour les deux cas

$$U = 1 - \frac{fa}{2r} = 1 - \frac{f\pi}{n}.$$

La crémaillère doit être, à ce point de vue, considérée comme un cas particulier de l'engrenage cylindrique intérieur ou extérieur.

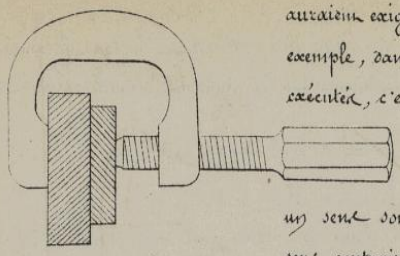


298. — *Engrenages coniques.* — Poncelet, à qui l'on doit la théorie du frottement dans les engrenages, a fait remarquer que cette théorie s'applique immédiatement aux engrenages coniques en contact le long de l'arête AC, si, sans changer la forme ou la position des dents, on les considère comme appartenant à deux roues cylindriques dont les axes seraient BD et B'D' et les rayons BC = r, B'C = r'. Dans ces conditions la formule (2) du N° 295 est directement applicable aux engrenages coniques.

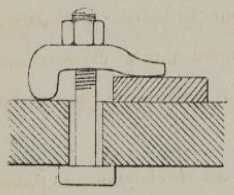
Applications du frottement.

299. — *Utilité du frottement.* — Le frottement est, comme on l'a vu précédemment, une cause de perte de travail dans un grand nombre de circonstances ; mais il est aussi, dans beaucoup de cas, d'une utilité incontestable ; et, sans parler du rôle qu'il remplit en modérant tous les mouvements et en assurant la stabilité de tous les objets dont nous nous servons, il a été utilisé dans les applications plus directes de la mécanique pour résoudre, d'une manière simple, certains problèmes qui autrement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

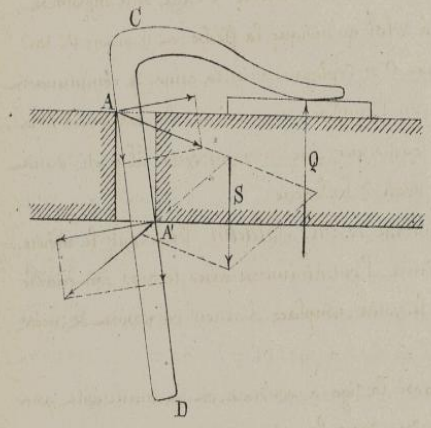


auraient exigé des dispositions plus compliquées. Ainsi, par exemple, dans la presse à coin ou dans la vis, convenablement exécutée, c'est le frottement qui maintient le serrage, malgré les plus grands efforts qui tendraient à le détruire; certains organes qui peuvent fonctionner dans un sens sont arrêtés par le frottement dans tout mouvement en sens contraire, et quelques-unes de ses applications sont indiquées dans les numéros suivants.



300. — **Serre-joint en griffe à écrou.** — Ces deux dispositions, qui sont des applications du frottement déterminé entre une vis et son écrou, servent à obtenir une solidarité suffisante entre une pièce mobile et son support pour qu'aucune action extérieure ne puisse produire un déplacement relatif. Le serre-joint a l'avantage de pouvoir s'appliquer sans qu'il soit nécessaire de prendre d'autre point d'appui qu'à l'extérieur des pièces à assembler. La griffe à écrou, plus solide que le serre-joint, est employée particulièrement pour la fixation des pièces sur les tables à rainures des machines-outils.

301. — **Valet de menuisier.** — Le valet de menuisier, destiné à maintenir solidement les pièces de bois sur un établi, par le simple frottement d'une tige de fer sur les angles d'un taillon percé dans la table, est un exemple très-simple de l'utilité du frottement dans les applications usuelles.



On obtient le serrage de la pièce sur l'établi en appliquant un coup de maillet sur la tête du valet. La réaction Q qui en résulte, et qui tend à desserrer le valet, détermine en A et A' des réactions N et N' normales à la tige CD ainsi que des frottements fN et fN' de sens contraire au mouvement de bas en haut qui tend à se produire.

La résultante R de N et de fN, et la résultante R' de N' et fN' pouvant être remplacées par une nouvelle résultante S, si le valet était sur le point de se desserrer, il faudrait qu'il y eût équilibre entre S et Q, le poids du valet pouvant être considéré comme négligeable; par suite il faudrait que les deux forces S et Q fussent égales et directement opposées, ce qui n'a généralement pas lieu, eu égard à la disposition de la figure ainsi qu'à la valeur de f qui doit évidemment être la plus grande possible.

302. — **Encliquetage Dobo.** — Lorsqu'une pièce de machine doit se mouvoir seulement dans un sens, on se sert habituellement d'un organe particulier appelé *cliquet* et qui vient s'appliquer, *fig.* 1 et 2, contre des saillies de la pièce mobile pour la retenir malgré les efforts qui tendraient à la faire mouvoir dans le sens contraire. Mais ces dispositions, qu'on nomme *encliquetages à rochet*,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

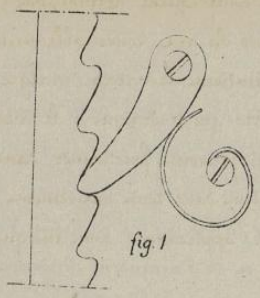


fig. 1

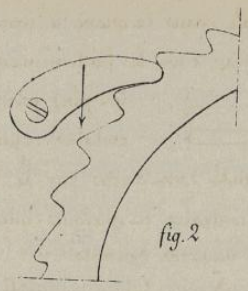


fig. 2

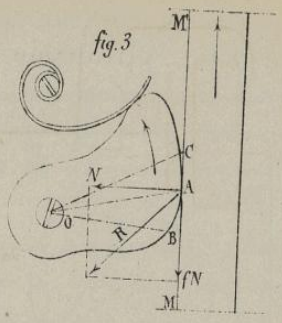


fig. 3

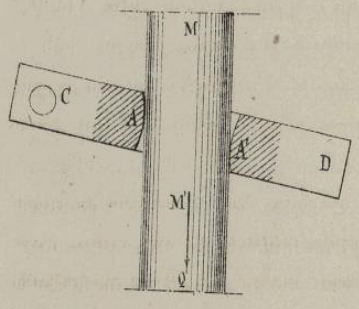
ne peuvent agir que pour des positions déterminées de la tige en mouvement ; pour des positions intermédiaires, le retour du mobile peut toujours se produire d'une fraction de dent plus ou moins grande. On évite cet inconvénient par les encliquetages à frottement dans lesquels l'arc-boutement se produit pour une position quelconque sans permettre aucun recul.

L'encliquetage Dobo, fig. 3, est fondé sur l'intervention d'une came qui, en obéissant au frottement résultant de la pression, vient s'arc-bouter contre la tige mobile lorsqu'elle tend à se mouvoir dans un sens, tout en permettant le mouvement en sens contraire.

La came, exécutée comme l'indique la figure, est faiblement appliquée contre la tige à l'aide d'un ressort dont l'action assure le contact en A. Lorsque la tige MM' se meut dans le sens de la flèche, le frottement entraîne la came si, pour les points voisins A et B, on a OB < OA. Le mouvement de la tige en sens contraire est impossible si pour le point C voisin de A, on a OC > OA. Dans ce cas, le contact de plus en plus intime qui se produit détermine une pression normale N et un frottement fN dont la résultante R peut toujours passer en dessous du point O si la came est convenablement disposée. Dans cette hypothèse la force R tend à faire tourner la came dans un sens opposé à celui qu'indique la flèche, et le rayon OC tend à remplacer OA, ce qui ne pourrait avoir lieu que si le point O se déplaçait ou si la came se comprimait.

L'encliquetage Dobo se fait généralement double ; on l'emploie souvent dans les transmissions par poulies ou autres organes de rotation qui ne doivent fonctionner que dans un sens. Il a été dans ces derniers temps employé avec avantage dans certaines pièces d'horlogerie.

303. — **Encliquetage Saladin.** — L'encliquetage de M. Saladin, fondé sur le même principe, est complété par les organes nécessaires pour produire l'entraînement dans le sens convenable. L'organe de retenue est une broche CD à anneau, dont le poids remplace l'action du ressort de mise en prise de Dobo.



L'anneau embrasse la tige à conduire, et la maintient pour l'empêcher de descendre, dans les mêmes conditions que précédemment, si ce n'est que le contact en A' sert à empêcher la tige de fléchir.

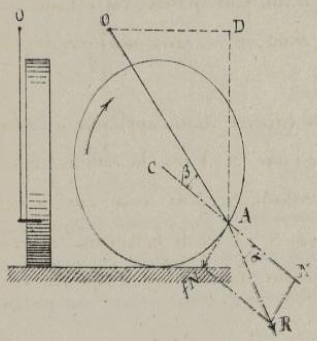
L'appareil de relevage agit par l'intermédiaire d'un organe semblable que l'on manœuvre par un levier et qu'il est inutile de représenter par une figure spéciale, puisque l'on voit qu'en relevant parallèlement à elle-même la broche CD, on enlèverait en même temps la tige MM' avec sa charge Q.

L'encliquetage de M. Saladin a été aussi appliqué aux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

organes de rotation), le principe de son fonctionnement est toujours le même et repose sur un arc-boutement produit par une pièce retenue également en prise par le frottement.

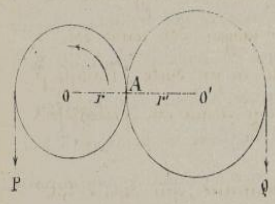
304. — **Arcanseur.** — L'arcanseur-cale de M^r^ *Blatin* est destiné à empêcher les voitures de reculer sur une rampe si le cheval cesse de faire un effort suffisant dans le sens de la marche.



Le sabot de l'arcanseur, formé d'un simple crochet A articulé en O, n'exerce aucune influence sur la marche directe ; mais en cas de recul, dans le sens indiqué par la flèche, les réactions N et fN développées au contact de la roue et de l'arcanseur tendent à déterminer l'entraînement de ce dernier dans le sens du mouvement en arrière de la roue, ou dans le sens de la résultante R de ces deux réactions, ce qui ne saurait avoir lieu que par suite de l'extension ou de la rupture de la tige OA de l'arcanseur qui devient ainsi la cause réelle de l'arc-boutement.

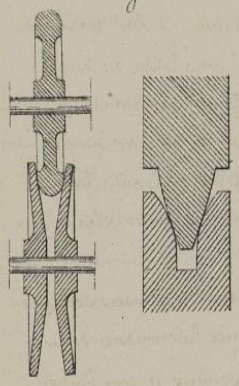
Pour que l'appareil fonctionne il suffit que l'on ait $\alpha < \beta$, car la force R tend alors à faire tourner l'arcanseur dans le sens même du mouvement de la roue pendant le recul.

305. — **Roues de friction.** — On se sert, dans certaines circonstances, et même dans plusieurs machines de précision, pour vaincre une résistance Q à l'aide d'une force motrice P, de galets pressés l'un contre l'autre de manière qu'il n'y ait pas de glissement au point de contact ; il suffit dans ce cas, de développer au contact des deux roues, une pression normale N assez grande pour que l'on ait



$$fNr' > Qr', \text{ ou même } fNr' = Qr', \text{ d'où } N = \frac{Q}{f}.$$

Cette pression N, beaucoup plus grande que Q, détermine des frottements considérables sur les tourillons, et l'on ne doit se servir de ces roues que pour transmettre de petits efforts ; dans le cas contraire on emploie des poulies de grand rayon fonctionnant à de grandes vitesses. Ces conditions se trouvent à peu près réalisées dans les transmissions par poulies et courroies, mais alors le coefficient f se trouve remplacé par un coefficient plus favorable résultant de la nature des corps en contact et de la flexibilité du cuir qui permet à la courroie d'embrasser de grands arcs sur les circonférences.



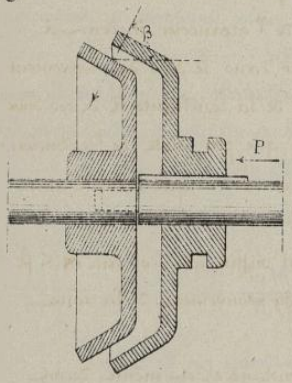
306. — **Roue à coin.** — Lorsqu'on a recours aux transmissions par friction on peut obtenir de bons effets de la disposition dite *engrenage à coin*, dans laquelle l'une des roues présente, sur tout son pourtour, une saillie à double biseau que la pression exercée entre les deux axes engage dans une rainure pratiquée dans la jante de l'autre roue. Cette disposition ne convient que pour de faibles efforts à transmettre.

M^r^ *Sellers* de Philadelphie a fait une application heureuse du même principe dans les transmissions à vitesses variables des différents organes d'un tour. La roue à rainure est remplacée par deux plateaux légèrement convexes, rapprochés par un ressort, et qui embrassent la saillie

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

excentrique de la circonférence de l'autre roue. En approchant ou en éloignant l'un des axes, on modifie la longueur du rayon de la circonférence de ce contact de manière à satisfaire à une variation très-grande dans le rapport des vitesses.

307. — **Cônes de friction.** — Le frottement de glissement est plus directement mis en jeu dans la transmission par cônes de friction, l'étendue des surfaces en contact étant plus grande. On obtient l'adhérence nécessaire à la transmission du mouvement entre les deux cônes, en exerçant une pression suffisante P sur le manchon mobile parallèlement à l'axe de rotation.



La résistance Q qu'il s'agit de vaincre étant appliquée à l'arbre du manchon à une distance q de l'axe, si N est la somme des réactions normales exercées au contact des deux roues sur la circonférence moyenne de rayon r, et si fN est le frottement correspondant, tangent à cette circonférence, la condition d'équilibre est donnée par la relation

$$fNr = Qq \quad , \quad \text{d'où} \quad N = \frac{Qq}{fr} \quad .$$

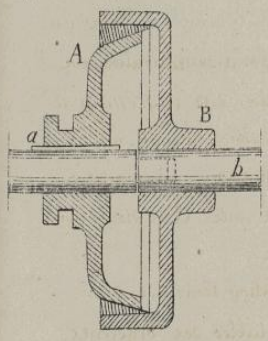
Chacune des réactions élémentaires qui constituent la somme N donne lieu à une composante dirigée suivant l'axe, et l'on a pour la somme des composantes

$$P = N\cos\beta = \frac{Qq\cos\beta}{fr} \quad ;$$

c'est la pression qu'il faut exercer, dans le sens de l'axe, pour établir une adhérence suffisante et transmettre un travail déterminé, pression d'autant plus faible que le rayon moyen des cônes est plus grand et que $\cos\beta$ est plus petit. Si cependant $\cos\beta$ était trop faible et par suite, l'angle β trop grand, la pression agirait moins rapidement pour produire l'embrayage, ce qui est quelquefois un inconvénient.

En désignant par e la distance, mesurée suivant la normale commune, qui sépare les surfaces pendant le non fonctionnement, la quantité, mesurée suivant l'axe, dont il faut faire avancer le cône pour établir la solidarité est $\frac{e}{\cos\beta}$.

On observe, en général, que les cônes de friction fonctionnent mieux lorsque les surfaces des organes qu'il faut rendre solidaires sont déjà en mouvement; il est alors plus facile d'atteindre progressivement la pression P pendant que le manchon tourne.



Dans les machines composées d'organes groupés à côté les uns des autres, avec une parfaite solidarité entre les guides, l'installation des cônes de friction ne présente aucune difficulté, parce qu'il est facile de maintenir le manchon et son arbre à leurs places malgré la poussée P. Il n'en est pas de même pour les arbres de transmission qui peuvent fléchir et qu'il faut en outre retenir à leurs extrémités par des buttoirs ou des pointes solidement fixées.

On a évité cet inconvénient dans les transmissions du Conservatoire des Arts-et-Métiers en faisant agir les cônes en sens contraires, de manière que la poussée soit équilibrée par l'arbre lui-même. Le cône A glisse sur l'arbre, au moyen d'un prisonnier a, sous l'action

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'une vis, jusqu'à ce qu'il soit convenablement pressé sur la paroi conique du manchon B qui est complétement calé sur l'arbre b auquel le mouvement doit être transmis.

308. ___ **Freins à friction.** ___ Les freins sont des appareils destinés à dépenser en frottement des quantités de travail quelquefois considérables lorsqu'il s'agit d'arrêter rapidement un mouvement à partir de l'instant où cesse l'action accélératrice. On obtient ce résultat en produisant des pressions sur l'un des organes mobiles du système et en déterminant ainsi un frottement supplémentaire qui finit par annuler la vitesse acquise. La question à résoudre, dans tous les cas qui peuvent se présenter, consiste à déterminer la pression nécessaire pour que le travail de frottement qui en résulte puisse, pendant un parcours donné, détruire la puissance vive que possède le système à l'instant considéré.

Cas où le mobile est animé d'un mouvement rectiligne continu. ___ Si M est la masse du système, v_0 sa vitesse à l'instant considéré, N la somme supposée constante des réactions normales déterminées par le frein et e le chemin correspondant à l'arrêt du mobile, on doit avoir

$$fNe = \tfrac{1}{2} M v_0^2 ,$$

équation d'où l'on tire, soit $N = \dfrac{M v_0^2}{2fe}$, soit $e = \dfrac{M v_0^2}{2fN}$,

suivant qu'on se donne e ou N. Le temps nécessaire à l'arrêt du mobile est donné par la relation

$$v_0 = \frac{fNt}{M} , \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{M v_0}{fN}$$

Dans la plupart des freins de chemin de fer, où, malgré la cessation de la force motrice, le train continue à se mouvoir en vertu de la puissance vive acquise par la masse totale du système, on arrive à arrêter le mouvement des roues et à transformer ainsi le frottement de roulement sur les rails en un frottement de glissement bien plus énergique que le premier. On ajoute souvent à l'effet de la résistance au glissement en introduisant, sous les roues, des sabots en bois pour lesquels la valeur de f est plus grande; ils agissent plus efficacement que les bandages sur les rails humides, et ils évitent d'ailleurs tout usé sur les cercles des roues. L'application de ces sabots se fait aussi aux roues des voitures ordinaires.

Cas où il s'agit d'un volant ou de tout autre organe de rotation. ___ Si M est la masse de tout le système en mouvement, ρ son rayon de gyration et ω_0 la vitesse angulaire qu'il possède à l'instant considéré, sa puissance vive à cet instant est $\frac{1}{2} M \rho^2 \omega_0^2$; et si le frottement tangentiel fN, déterminé par le serrage, s'exerce sur une circonférence donnée de rayon r, on peut le remplacer par un frottement équivalent fN' agissant à la distance ρ de l'axe de rotation et lié au premier par la relation

$$fN'\rho = fNr , \qquad \text{d'où} \qquad fN' = \frac{r}{\rho} fN .$$

Le chemin parcouru par le point d'application de la force fN', supposée constante, étant désigné par e, on a

$$\tfrac{1}{2} M \rho^2 \omega_0^2 = fN'e = \frac{r}{\rho} fNe ,$$

relation qui donne, soit $N = \dfrac{M \rho^3 \omega_0^2}{2fer}$, soit $e = \dfrac{M \rho^3 \omega_0^2}{2fNr}$,

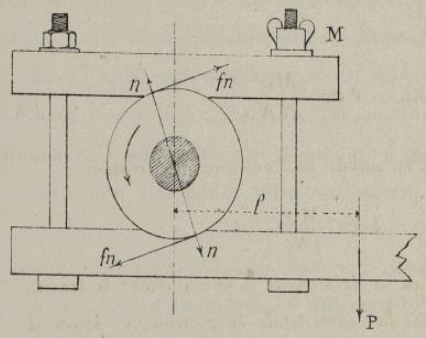
suivant qu'on suppose e ou N connu. Le temps nécessaire à l'arrêt du mobile s'obtient en posant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\rho\omega_0 = \frac{r}{\rho}\times\frac{fN}{M}t, \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{M\rho^2\omega_0}{fNr}.$$

Il résulte de ce qui précède qu'en donnant à N une valeur suffisante, on peut rendre t et ℓ aussi petits qu'on le veut; rien n'empêche donc de construire des freins d'une énergie extrême; mais l'emploi peut en devenir nuisible par suite de l'intensité des forces d'inertie qui se trouvent ainsi développées.

309. ___ **Frein dynamométrique de Prony.** ___ On a supposé jusqu'ici que toute cause accélératrice est supprimée à partir du moment où le frein commence à agir; mais on peut évidemment se placer dans des conditions telles que le frein soit seulement employé à dépenser en frottements l'action motrice exercée sur un arbre de rotation et à maintenir uniforme le mouvement de cet arbre. C'est ce qu'a proposé *de Prony* dans le but de déterminer expérimentalement le travail fourni par un moteur à un arbre de transmission.



A cet effet une poulie, dite poulie de frein, est fixée solidairement sur l'arbre moteur, et la jante de cette poulie est serrée, pendant la marche entre deux mâchoires, de manière à empêcher autant que possible toute accélération ou tout retard dans le mouvement.

En chaque point de contact des mâchoires avec la surface de la poulie se développent des réactions normales n et des frottements tangentiels fn; les forces n se font équilibre deux à deux par suite des conditions de symétrie dans lesquelles fonctionne l'appareil, les actions fn s'ajoutent au contraire et donnent lieu à une somme fN d'où résulte un travail de frottement qui, dans l'état de mouvement uniforme, doit être égal à celui de la force motrice. On a donc, en désignant par T le travail inconnu de cette force motrice pour un tour de l'arbre et par r le rayon de la poulie

$$T = fN\times 2\pi r = fNr\times 2\pi.$$

On détermine fNr en rendant les mâchoires mobiles autour de l'axe, et en les retenant par une force dont le moment soit précisément égal à celui du frottement et dirigé en sens contraire. Si P est cette force extérieure et l son bras de levier, le moment de la force P doit, dans le cas où le mouvement est uniforme, être égal au moment du frottement. On a donc, par rapport à l'axe de rotation de l'arbre

$$fN\times r = Pl, \quad \text{d'où} \quad T = P\times 2\pi l.$$

Lorsque les poids des divers organes qui composent le frein ne se font pas équilibre autour du centre O de rotation, il est nécessaire de tenir compte de ce défaut d'équilibre dans l'évaluation de la force P. Par exemple, si a est la distance de l'axe de rotation à la verticale passant par le centre de gravité du frein dont le poids est p, et si P est le poids placé dans le plateau que porte le bras du frein, le moment qui doit faire équilibre au moment du frottement est $Pl + pa$; et comme on peut poser $pa = p_1 l$, il en résulte

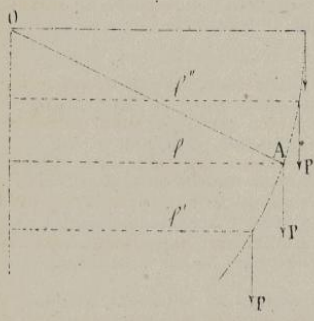
$$Pl + pa = Pl + p_1 l = (P + p_1)l,$$

ce qui donne alors pour l'expression du travail moteur correspondant à un tour de l'arbre,

$$T = (P + p_1)\times 2\pi l.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Observation sur le meilleur mode de fonctionnement. — Si le travail moteur était constant, et si le frottement donnait toujours lieu à la même résistance malgré l'échauffement qu'il détermine sur les parois en contact, il suffirait de régler avec soin le poids et de livrer ensuite l'appareil à lui-même ; mais ces conditions éminemment favorables ne sont jamais réalisées dans la pratique et il faut constamment surveiller l'opération et serrer ou desserrer au besoin l'écrou M pour rétablir l'horizontalité du bras de levier. Il faut aussi aider à la régularité du frottement et lubréfier d'une manière continue les surfaces en contact, soit avec de l'eau de savon, soit avec du suif en branches dont les alvéoles s'ouvrent successivement sous l'action de la chaleur et assurent ainsi un graissage uniforme et incessamment renouvelé.

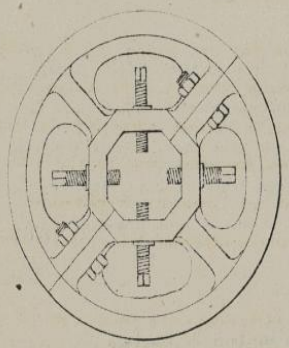


Il convient aussi de placer le bras de levier du poids P à la partie inférieure de la poulie, ce qui permet au frein de fonctionner automatiquement, et de se régler de lui-même entre certaines limites. Si, en effet, la charge P devient à un instant prépondérante, son point d'application s'abaisse, d'où résulte une diminution dans la valeur du moment Pl qui devient Pl' ; dans le cas contraire le point A se relève, et le bras de levier augmente en devenant l'', de manière qu'on peut livrer le frein à lui-même quelquefois pendant plusieurs heures sans avoir à y toucher.

Si le poids P était suspendu à la traverse supérieure, on verrait facilement que le moment de ce poids diminuerait ou augmenterait à la moindre déviation, dans les conditions mêmes où il serait désirable qu'il augmentât ou diminuât.

Il est, dans tous les cas, nécessaire de limiter les oscillations du levier par des buttoirs établis à peu de distance de la position moyenne. Ces buttoirs aident beaucoup au réglage, et ils mettent l'opérateur à l'abri des accidents que pourrait amener soit la chute accidentelle des poids, soit l'entraînement du levier en cas de grippement.

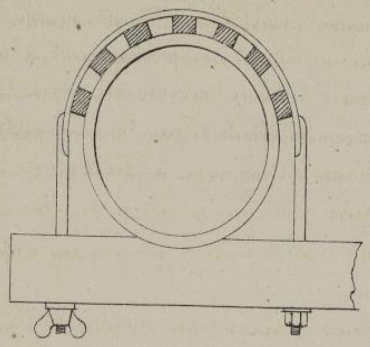
Formes diverses du frein de Prony dans ses applications. — Le frein de Prony se prête de la manière la plus efficace à la détermination de la puissance des machines ; il constitue l'appareil le plus simple, le plus sûr et le moins dispendieux pour les essais des machines à vapeur et des moteurs hydrauliques de grande puissance. On l'établit ordinairement sous deux formes différentes.



Lorsqu'il s'agit de mesurer un grand travail, on se sert d'une poulie de frein en deux pièces, calée sur l'arbre moteur d'une manière parfaitement concentrique, à l'aide des vis de serrage qui sont indiquées sur la figure. La jante de la poulie est alors munie de deux rebords entre lesquels frotte la garniture de bois dont le collier est muni.

L'autre forme dispense de la construction d'une poulie spéciale. On se sert alors de l'une des poulies de la machine ou même du volant s'il est parfaitement tourné, et il suffit de former le frein avec une bande de fer feuillard aux extrémités de laquelle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



on soude les pattes filetées. De distance en distance on fixe au feuillard, par des rivets, des cales en bois, garnies de rebords qui embrassent la jante du volant et qui servent à maintenir en place le collier du frein lorsqu'il est serré par ses boulons sur le levier. Ce levier est ordinairement formé d'un madrier ou d'une pièce de bois de moindre échantillon.

Avec la poulie spéciale on n'obtient en général l'équilibre qu'en serrant très-fortement les mâchoires du frein.

Sur les volants on dispose relativement d'une surface plus grande; le frottement par mètre carré est moindre et il agit dans de meilleures conditions.

Nous avons calculé, pour un grand nombre d'expériences, la résistance, par mètre carré de surface de contact, développée par le frottement. En désignant cette surface par A, la valeur du frottement par mètre carré est $\frac{fN}{A} = \frac{Pl}{Ar}$, et nous avons trouvé ainsi que le frottement par mètre carré avait varié, dans les meilleures expériences, de 500 à 1000 kilog. pour les freins en feuillard, et de 4000 à 6000 kil. pour les poulies spéciales de moindre diamètre. Ces chiffres permettent de calculer, pour chaque essai, les dimensions des freins qu'il conviendra d'employer.

Résultats numériques d'un essai fait avec une poulie spéciale sur une machine à vapeur établie par M.r Farcot à l'atelier de la manutention militaire du quai de Billy. — Le graissage était entretenu avec de l'eau de savon, et le frein s'est maintenu en parfait équilibre pendant quatre heures.

Frein : $P = 1200^k$, $l = 3^m,000$

Nombre de tours : Par minute ..... 50,000 ; Par seconde 0,833

Poulie : Diamètre $0^m,594$; Largeur $0^m,144$; Surface $0^{m.q}.270$

Surface frottante couverte par les mâchoires ..... $0^{m.q}.234$

Frottement par mètre carré de surface frottante ..... 5880 kilog.

Travail : Pour un tour ..... $2\pi lP = 2261,95$ kilogrammètres.

Par seconde ..... $2261,95 \times 0,833 = 1884,90$ kilogrammètres.

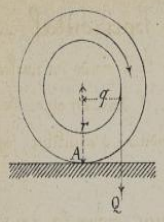
Résistance au roulement.

310. — **Notions générales.** — Lorsqu'un corps, terminé par une surface courbe, roule sur un plan horizontal et que la cause qui a produit le mouvement vient à cesser, ce corps devrait évidemment continuer à se mouvoir sur le plan, et d'une manière uniforme, si aucune action ne venait modifier sa vitesse; mais il n'en est pas ainsi, et l'on constate que le roulement détermine, aux points de contact des deux corps, une résistance qui ralentit le mouvement et qui finit par l'annuler complètement.

Le mode d'action de la résistance au roulement a été déterminé expérimentalement, d'abord par Coulomb et ensuite par M.r Morin.

311. — **Expériences de Coulomb.** — Coulomb, en suspendant des poids à un fil enroulé sur une poulie fixée concentriquement à un rouleau cylindrique plus ou moins chargé a, le premier,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



déterminé les lois de la résistance au roulement. Il a mesuré le poids Q nécessaire pour maintenir le rouleau dans un état de mouvement bien sensiblement uniforme, et il a reconnu que la résistance au roulement, ainsi estimée, est proportionnelle à la réaction normale N exercée par le plan sur le cylindre et inversement proportionnelle au rayon q de la poulie. De sorte qu'en désignant par δ un coefficient dépendant de la nature des substances en contact, la résistance au roulement est exprimée par une relation de la forme

$$Q = \frac{\delta N}{q},$$

relation qui subsiste soit que l'on ait $q < r$, ou $q = r$, ou enfin $q > r$.

Coulomb a même déterminé, d'après cette formule, les valeurs de δ pour des rouleaux en gayac en cylindre roulant sur des semelles en chêne. Ces valeurs sont : pour le gayac, $\delta = 0{,}00048$; pour l'orme, $\delta = 0{,}00081$.

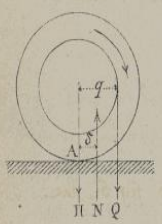
312. ___ **Expériences de M.r Morin.** ___ Les expériences peu nombreuses de Coulomb avaient été faites principalement pour servir à ses études sur la raideur des cordes ; mais M.r Morin entreprit, vers 1833, une série d'expériences nouvelles sur un plus grand nombre de substances et avec les ressources que lui donnaient, pour la détermination expérimentale des mouvements produits, les moyens d'observation qu'il avait déjà appliqués à la recherche des coefficients de frottement. Il a ainsi reconnu l'exactitude de la loi de Coulomb, en mettant en outre en évidence l'influence de la longueur l de la ligne de contact, particulièrement dans les corps mous. Lorsque cette longueur du contact est moindre, l'impression produite par le rouleau sur le support est plus marquée et le coefficient δ de roulement augmente, comme le constatent les résultats suivants déduits de la loi de Coulomb.

Chêne sur peuplier
$$\begin{cases} l = 0^{m},200, & \delta = 0{,}000\,876. \\ l = 0^{m},100, & \delta = 0{,}001\,190. \\ l = 0^{m},050, & \delta = 0{,}001\,890. \end{cases}$$

313. ___ **Interprétation du coefficient de roulement.** ___ La formule du N.° 311 peut s'écrire

$$Qq = N\delta ; \qquad (1)$$

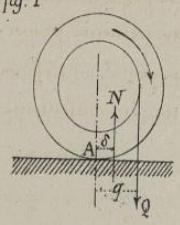
en sous cette forme qui se prête de la manière la plus avantageuse aux calculs, elle exprime que, par rapport à l'axe projeté en A, il y a équilibre de moments, à chaque instant du mouvement, supposé uniforme, entre la force Q qui détermine ce mouvement et la réaction normale N du plan. Pour qu'il en soit ainsi, il faut nécessairement admettre que cette réaction normale s'exerce, non pas au point A situé sur la verticale du centre de gravité du rouleau, mais bien en un point A' placé à droite de A et à une distance de ce point représentée par la valeur du coefficient δ. Cette position du point A' tient évidemment à ce que les corps en contact se sont mutuellement comprimés en se touchant suivant une zone d'une certaine étendue dans laquelle se trouve le point d'application A' de la réaction N du plan sur le rouleau. On conçoit en effet que si le mobile n'était en contact que par la seule arête qui rencontre la verticale de son centre de gravité, ce mobile, dans l'état de repos, serait dans des conditions d'équilibre instable, et la moindre action qui le solliciterait à droite ou à gauche du point A suffirait pour détruire cet équilibre, ce qui est contraire aux faits observés.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

314. — Conditions d'équilibre d'un cylindre roulant sur un plan horizontal. —

fig. 1



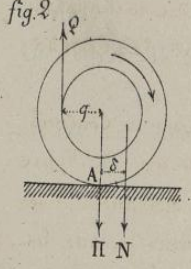
1°. — *Cas où la force Q est verticale.* — Si l'on désigne par Π le poids du rouleau et de sa charge, les forces Π et Q qui le sollicitent étant verticales, il doit en être de même de la réaction N exercée par le plan, et l'on a comme première condition d'équilibre, fig. 1,

$$N = \Pi + Q \ ;$$

cette valeur de N, mise dans l'équation (1) du N° précédent, donne, pour la condition d'équilibre des moments, autour de l'axe projeté en A,

$$Qq = (\Pi + Q)\delta \ , \qquad \text{d'où} \qquad Q = \frac{\Pi\delta}{q-\delta} \ .$$

fig. 2

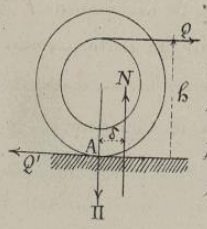


Si la force Q, toujours verticale, était dirigée de bas en haut, on aurait évidemment, fig. 2,

$$N = \Pi - Q, \text{ et } Qq = (\Pi - Q)\delta \ , \qquad \text{d'où} \qquad Q = \frac{\Pi\delta}{q+\delta} \ .$$

On voit ainsi que la résistance au roulement est plus grande dans la première hypothèse que dans la seconde.

fig. 3



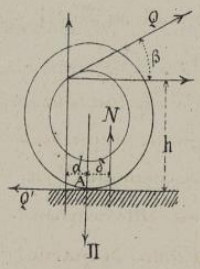
2°. — *Cas où la force Q est horizontale.* — Lorsque la force Q est horizontale, l'équation d'équilibre des moments, autour de l'axe projeté en A, est de la forme

$$Qh = N\delta \ ;$$

mais alors la réaction totale R exercée par le plan est oblique comme la résultante des forces Π et Q ; cette réaction R pouvant être remplacée par deux composantes N et Q', l'une normale et l'autre parallèle au plan, il faut, à la condition d'équilibre des moments, ajouter les deux équations de projections.

$$N = \Pi \qquad Q' = Q \ .$$

fig. 4



3°. — *Cas où la force Q est oblique par rapport au plan.* — Dans cette hypothèse, on peut, fig. 4, remplacer la force Q par une composante horizontale $Q\cos\beta$ et par une composante verticale $Q\sin\beta$, ce qui donne d'abord les deux équations de projections

$$N = \Pi - Q\sin\beta \ , \qquad Q' = Q\cos\beta \ .$$

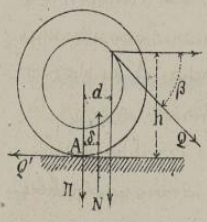
En prenant ensuite les moments autour de l'axe projeté en A, il vient

$$Qh + Q\sin\beta \times d = N\delta \ ;$$

cette dernière relation donne, en y remplaçant N par sa valeur,

$$Q = \frac{\Pi\delta}{h + (d+\delta)\sin\beta}$$

fig. 5



Si la force Q, toujours oblique, était dirigée de haut en bas, fig. 5, les équations d'équilibre seraient alors

$$N = \Pi + Q\cos\beta, \qquad Q' = Q\cos\beta \qquad Qh + Q\sin\beta \times d = N\delta$$

et en y remplaçant N par sa valeur dans la dernière équation, on en déduirait

$$Q = \frac{\Pi\delta}{h + (d-\delta)\sin\beta}$$

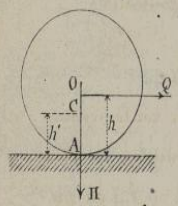
Comme dans le premier cas, la résistance au roulement est plus grande lorsque la force Q

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

est dirigée de haut en bas que dans l'hypothèse contraire.

315. — **Comparaison entre la résistance au roulement et la résistance au glissement.** — Il résulte de l'inspection des tables qui donnent les valeurs de δ et de f que la résistance $\frac{\delta N}{q}$ en un point de contact de deux corps est généralement très-faible relativement à la résistance fN au même point de contact surtout si la quantité q n'est pas très-petite; et cette résistance au roulement est ordinairement négligeable par rapport à fN, ce qu'on s'explique facilement en remarquant que la résistance au glissement peut être regardée comme étant due aux aspérités des surfaces en contact, lesquelles forment des obstacles qui doivent être détruits ou franchis pour que le mouvement relatif puisse avoir lieu, circonstances qui ne se présentent pas, à beaucoup près, au même degré dans le cas d'un simple mouvement de roulement.

316. — **Condition pour qu'un corps roule ou qu'il glisse.** — Un corps rond, placé sur un plan horizontal, étant sollicité par une force horizontale Q appliquée à une certaine hauteur h au-dessus du plan, si Q_1 est la force nécessaire pour déterminer le glissement et Q_2 la force qui produit le roulement, on a



$$Q_1 = f\Pi, \qquad Q_2 = \frac{\delta\Pi}{h}$$

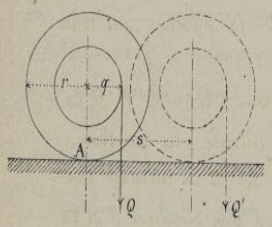
ce qui conduit aux conséquences suivantes :

Condition du glissement, $\quad f\Pi < \frac{\delta\Pi}{h}$, $\quad$ d'où $\quad h < \frac{\delta}{f}$;

Condition du roulement, $\quad \frac{\delta\Pi}{h} < f\Pi$, $\quad$ d'où $\quad h > \frac{\delta}{f}$.

Donc, si l'on détermine un point C tel qu'il satisfasse à la condition $h' = \frac{\delta}{f}$, il y a glissement ou roulement suivant que le point d'application de la force motrice est situé au-dessous ou au-dessus du point C.

317. — **Travail de la résistance au roulement.** — Le chemin parcouru par la force verticale Q, dans sa direction propre, se mesure évidemment par le déroulement x du fil correspondant au développement s du rouleau sur le plan. Ces deux arcs s et x étant liés entre eux par la relation



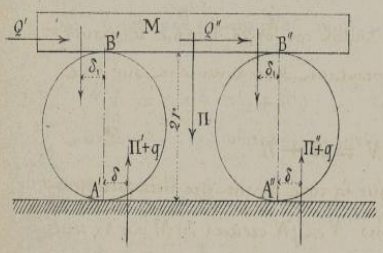
$$\frac{x}{s} = \frac{q}{r}, \quad \text{qui donne} \quad x = \frac{qs}{r},$$

on en conclut que le travail de la résistance Q, supposée verticale et constante, a pour expression

$$T = Q \times \frac{qs}{r},$$

valeur qui se réduit à $T = Qs$ pour $q = r$.

318. — **Transport des fardeaux sur rouleaux.**



Le transport sur rouleaux, employé surtout pour le déplacement des pièces très-lourdes, est une application immédiate des avantages de la résistance au roulement par rapport au frottement de glissement.

Si une charge Π est placée sur deux rouleaux dont les poids respectifs sont égaux à p, l'un des rouleaux porte

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

une portion Π' de cette charge, et l'autre, la différence $\Pi - \Pi'$ ou Π''. Soit Q' l'effort de traction qu'il faudrait appliquer à la pièce M dans la direction B'B'' pour vaincre la résistance au roulement en A' et en B'. Soit de même Q'' l'effort nécessaire pour vaincre la résistance en A'' et en B''. Le mouvement étant supposé uniforme chaque rouleau est en équilibre sous l'action des forces qui le sollicitent; par suite, en prenant les moments des forces de chaque système par rapport aux axes projetés en A' et en A'' il vient

$$Q' \times 2r = (\Pi' + p)\,\delta + \Pi'\delta_1, \qquad Q'' \times 2r = (\Pi'' + p)\,\delta + \Pi''\delta_1 .$$

En additionnant membre à membre, puis en posant $Q' + Q'' = Q$, et en négligeant les termes $p\delta$ qui sont relativement très-petits, on obtient

$$Q \times 2r = \Pi(\delta + \delta_1), \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{\Pi(\delta + \delta_1)}{2r} .$$

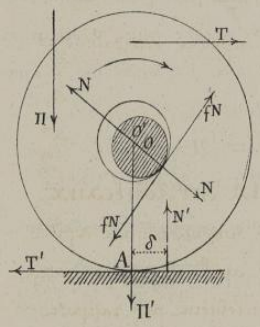
La force nécessaire pour faire glisser le fardeau serait $Q_1 = f\Pi$, et la quantité $\frac{\delta + \delta_1}{2r}$ est, dans les cas ordinaires, toujours beaucoup plus petite que f. Il est facile de voir que le chemin parcouru horizontalement par la pièce M est double du chemin décrit par les centres des rouleaux.

Roulement et glissement considérés simultanément.

319. — *Tirage des voitures à un essieu.* — Lorsque le glissement et le roulement ont lieu au même point de contact, comme cela se passe pour les engrenages par exemple, la résistance au roulement peut être négligée relativement au frottement de glissement ainsi qu'on l'a vu précédemment. Mais il n'en est plus de même lorsque le glissement et le roulement se développent simultanément sur un même organe et des points différents, comme par exemple dans le mouvement d'une voiture, où une résistance au roulement sur le sol a lieu à la circonférence extérieure des roues pendant que les boîtes qui portent les moyeux des roues se déplacent autour des fusées de l'essieu en déterminant un frottement de glissement plus ou moins considérable.

Il convient d'examiner séparément le cas où la voiture roule sur un sol horizontal et celui où elle se meut sur un plan incliné, en admettant dans les deux cas, pour simplifier la question, que toute la charge de la voiture est concentrée sur une seule roue.

1°. — *Cas où le sol est horizontal.* — Les forces à considérer sont : le poids Π de la voiture et le poids Π' de la roue; la force T qui détermine le mouvement du véhicule, la réaction horizontale T' développée au contact de la roue et du sol et la réaction normale N' du sol sur la roue cette force agissant à une distance δ de la verticale qui passe en A; la pression N exercée par la fusée sur la roue, et la réaction égale et contraire de la roue sur la fusée; enfin les deux forces tangentielles fN égales et contraires relatives à la fusée et à la roue.



L'équilibre devant exister entre toutes ces forces lorsque le mouvement est rendu uniforme, on a, en projetant successivement sur une verticale et sur une horizontale,

$$T' = T, \qquad N' = \Pi + \Pi' .$$

La résultante $\sqrt{\Pi^2 + T^2}$ des forces Π et T qui agissent sur la roue devant être nécessairement égale et directement opposée à la résultante $\sqrt{N^2 + f^2N^2}$ des réactions N et fN exercées en M par la roue

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sur la fusée, il en résulte

$$T^2 + \Pi^2 = N^2 + f^2 N^2 .$$

Quant aux forces T', N', N et fN qui agissent sur la roue, on a, pour l'équation des moments par rapport à l'axe de cette roue dont le rayon est r, celui de la boîte étant r',

$$Tr = N'\delta + fNr'$$

L'élimination de T', N' et N entre les équations précédentes donne, en posant $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = f_1$,

$$Tr = (\Pi + \Pi')\delta + f_1 r' \sqrt{T^2 + \Pi^2} .$$

C'est au moyen de cette formule que M. Morin a trouvé la valeur du coefficient de traction δ dans chaque cas particulier où la valeur de la force T était mesurée directement. Cette valeur de δ ayant été ainsi déterminée pour les différents cas qui peuvent se présenter, on peut considérer T comme une inconnue; et pour en avoir une valeur suffisamment approchée pour la pratique, on peut négliger sous le radical la valeur de T généralement petite relativement à Π, ce qui donne

$$T = \frac{(\Pi + \Pi')\delta}{r} + \frac{f r' \Pi}{r} .$$

Le premier terme de la valeur de T représente l'influence de la résistance au roulement, et le second terme, celle de la résistance au glissement. On voit en outre qu'il y a intérêt à augmenter le rayon de la roue et à diminuer celui de la boîte de cette roue.

Détermination de l'arête de contact de l'essieu et de la boîte. — Soit α l'angle que fait la verticale OA avec la direction de la force N; si l'on projette verticalement et horizontalement les forces T', N', N et fN qui sollicitent la roue, on obtient les deux équations

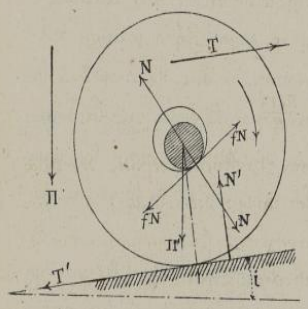
$$N' - N\cos\alpha + fN\sin\alpha = 0 , \qquad T' - N\sin\alpha - fN\cos\alpha = 0$$

qui donnent, eu égard aux relations $N' = \Pi + \Pi'$, $T' = T$,

$$\cos\alpha = \frac{\Pi + \Pi' + fT}{(1+f^2)N} , \qquad \sin\alpha = \frac{T - f(\Pi + \Pi')}{(1+f^2)N}$$

expressions pour lesquelles la valeur de N est donnée par la relation $N^2 + f^2N^2 = T^2 + \Pi^2$.

2e. — *Cas où le sol est incliné.* — Le mouvement étant d'abord supposé ascendant, le poids Π agit par ses deux composantes, l'une $\Pi\cos i$, perpendiculaire au plan incliné, l'autre, $\Pi\sin i$, parallèle à ce plan et qui tend à faire descendre la voiture. Le poids Π' de la roue peut se décomposer de même en $\Pi'\cos i$ et $\Pi'\sin i$. Cela posé, les conditions d'équilibre du système sont données par les équations



$$T = T' + (\Pi + \Pi')\sin i , \qquad N' = (\Pi + \Pi')\cos i ,$$
$$N^2 + N^2 f^2 = T^2 + \Pi^2 - 2T\Pi\sin i , \qquad T'r = N'\delta + fNr' .$$

En éliminant T', N' et N, puis en posant $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = f_1$, on trouve

$$Tr = (\Pi + \Pi')\delta\cos i + (\Pi + \Pi')r\sin i + f_1 r' \sqrt{\Pi^2 + T^2 - 2T\Pi\sin i}$$

Si l'on néglige, comme précédemment, la valeur de T sous le radical en qu'on remplace $\cos i$ par l'unité, on obtient la formule suivante, suffisamment exacte pour la pratique,

$$T = \frac{(\Pi + \Pi')\delta}{r} + (\Pi + \Pi')\sin i + \frac{f r' \Pi}{r}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

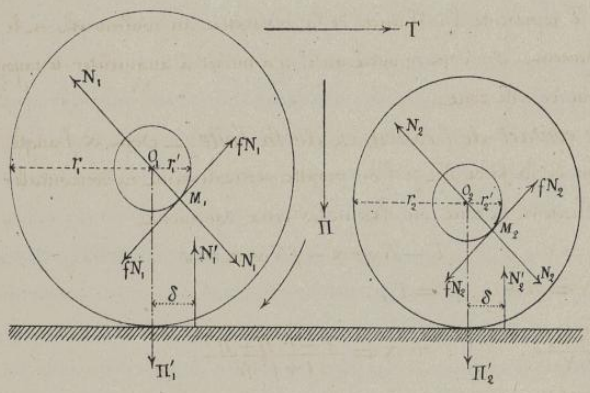
Le premier terme de cette valeur représente l'influence du roulement, le second, celle de la pente; et le troisième, l'influence du frottement de l'essieu sur la boîte. On voit comme précédemment qu'il y a avantage à augmenter la valeur de r et à diminuer celle de r'.

La formule précédente, établie dans le cas d'une rampe, s'applique au cas d'une pente en y changeant le signe de $\sin i$, ce qui donne

$$T = \frac{(\Pi+\Pi')\delta}{r} - (\Pi+\Pi')\sin i + \frac{f_1 r' \Pi}{r} \; ;$$

et s'il arrive que la partie négative du second membre l'emporte sur la partie positive, il faudra, pour diminuer l'effort que fait le cheval pour retenir la voiture serrer les roues avec des freins ou les faire porter sur des sabots. Les rampes fatiguent donc les chevaux sans qu'on trouve à la descente une compensation au surcroît de dépense qu'il a fallu faire pendant l'ascension.

320. — **Tirage des voitures à deux essieux sur un sol horizontal.** — Les considérations précédentes sont applicables à une voiture à deux essieux en supposant que le poids Π de la voiture soit appliqué en un point dont la verticale passe entre les centres des deux roues.



Le poids Π se décompose alors en une somme de deux poids Π_1 et Π_2, l'un porté par la roue O_1, l'autre par la roue O_2.

On peut concevoir l'effort de traction T comme étant la somme de deux forces T_1 et T_2 dont l'une serait appliquée au train d'arrière et l'autre au train d'avant.

Les autres forces du système étant suffisamment indiquées sur la figure, on peut écrire immédiatement, en remarquant que δ est le même pour les deux roues

$$T_1 = \frac{1}{r_1}\left[(\Pi_1+\Pi_1')\delta + f_1 r_1' \sqrt{T_1^2+\Pi_1^2}\right], \qquad T_2 = \frac{1}{r_2}\left[(\Pi_2+\Pi_2')\delta + f_1 r_2' \sqrt{T_2^2+\Pi_2^2}\right].$$

En négligeant T_1 et T_2 sous les radicaux il vient, à cause de $T_1+T_2=T$,

$$T = \delta\left(\frac{\Pi_1+\Pi_1'}{r_1} + \frac{\Pi_2+\Pi_2'}{r_2}\right) + f_1\left(\frac{\Pi_1 r_1'}{r_1} + \frac{\Pi_2 r_2'}{r_2}\right).$$

Les deux termes du second membre montrent comme précédemment l'influence séparée des deux genres de frottement et l'on voit encore qu'il y a avantage à augmenter les rayons des roues.

321. — **Expériences sur le tirage des voitures.** — Les expériences fondamentales sur le tirage des voitures ont été faites par M. Morin, à Metz et à Paris, en interposant entre le crochet d'attelage et les chevaux un dynamomètre de traction dont l'objet était de déterminer, aussi exactement que la nature du sujet le comportait, l'effort moyen développé par un attelage pour transporter une voiture chargée d'un poids donné sur une route dont l'état était chaque fois constaté. M. Morin est parvenu à déterminer relativement au tirage, l'influence de la charge, des diamètres des roues et des fusées, de la largeur des jantes et de l'état de la route. Il a prouvé que la résistance à la traction satisfait très

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

approximativement aux indications suivantes :

1° — Sur les routes en empierrement solide et sur les routes pavées, la résistance est proportionnelle au poids transporté, inversement proportionnelle au diamètre des roues, et à peu près indépendante de la largeur de la jante ; elle croît avec la vitesse mais d'autant moins que la voiture est mieux suspendue.

La formule $Q = \frac{\delta \Pi}{r}$, établie par Coulomb, est conforme à cette première conclusion.

M. Dupuit était arrivé, par d'autres moyens d'expérimentation, à la formule $Q = \frac{\delta \Pi}{r^{\alpha}}$ dans laquelle α serait une quantité plus petite que l'unité mais qui s'en rapprocherait de plus en plus, suivant M. Tiberi, à mesure que la route devient plus dure. Les résultats obtenus par M. Morin prouvent que la formule de Coulomb rend mieux compte de l'ensemble des faits, et qu'elle s'étend même bien au-delà des limites pour lesquelles elle avait été vérifiée directement.

2° — Sur les substances compressibles telles que les terres, le sable et le gravier, la résistance diminue à mesure que la largeur de la jante augmente.

3° — Sur les terrains mous la résistance est indépendante de la vitesse.

Les tables relatives à la traction, données par M. Morin, montrent que dans les cas les plus extrêmes le rapport entre le tirage et la charge varie de $\frac{1}{7}$ à $\frac{1}{60}$. Sur une bonne route pavée ou macadamisée, ce rapport varie de $\frac{1}{20}$ à $\frac{1}{50}$.

Nous pourrions ajouter à ce qui précède les résultats de nombreuses expériences que nous avons faites pour déterminer la résistance de divers véhicules à la traction. Disons seulement que dans la comparaison faite à l'occasion d'un système d'omnibus à quatre roues, proposé par M. Sauvage, entre ce véhicule et un omnibus ordinaire, nous avons reconnu que le tirage était exactement diminué dans le rapport indiqué par la loi de Coulomb, c'est-à-dire, en raison inverse du diamètre des roues. Dans la pratique on ne diminue les diamètres du train d'avant que pour permettre à la voiture de tourner dans une courbe en engageant l'une des roues sous la caisse.

Des expériences faites sur le bitume comprimé de la place du Palais-Royal présentent un certain intérêt en ce qu'elles montrent l'influence de la température extérieure sur les chaussées construites en matières bitumineuses. Deux séries d'expériences faites avec un omnibus chargé, l'une en août 1859, à 6h du matin, et l'autre au mois de janvier 1860, ont donné les résultats suivants :

Pavé, ... $\delta = 0,0062$	..... $\delta = 0,0064$		
Macadam, ... $\delta = 0,0107$	Août ..... $\delta = 0,0150$	Janvier.	
Bitume, ... $\delta = 0,0300$	..... $\delta = 0,0096$		

L'augmentation de δ pour le macadam, dans la seconde série, provenait d'un moins bon état d'entretien de la voie. Pour le bitume, la première valeur de δ, beaucoup plus grande que la seconde, était due à la profondeur de l'impression produite par la roue, la matière se trouvant un peu ramollie pendant la saison chaude.

Conséquences relatives à la détérioration des routes. — M. Morin a encore déduit de ses expériences sur le tirage des voitures les conséquences suivantes :

La proportionnalité des charges aux largeurs des jantes est trop favorable aux jantes larges qui se trouvent ainsi trop peu chargées. Pour des charges égales, l'augmentation de la largeur des jantes a peu d'influence au-delà d'une largeur de 0m,12, mais les dégradations à égalité de parcours

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sont notablement plus grandes pour des largeurs plus petites. L'agrandissement du diamètre des roues est tout aussi favorable à la conservation des routes qu'à la traction. Quant à l'influence de la vitesse, les voitures suspendues allant au trot ne fatiguent pas les routes plus que les voitures non suspendues allant au pas.

322. — **Expériences relatives au tirage des voitures sur les chemins de fer.** — Un certain nombre d'expériences ont été faites séparément par MM. Morin, Poirée, Tresca et Briogne, Gouin et Lechatelier sur des voies de fer desservies soit par des chevaux, soit par des locomotives. Les résultats principaux de ces expériences, consignées dans une table placée à la fin de l'étude sur le frottement, montrent l'influence, sur la valeur du coefficient de traction, soit de l'état de la voie, soit de la disposition adoptée pour atténuer le frottement autour des fusées des essieux.

323. — **Comparaison entre la résistance au roulement et le frottement de glissement dans les roues de wagons.** — Si l'on veut appliquer aux roues de wagons d'un train de chemin de fer les considérations qui ont été présentées sur le tirage des voitures, il faut employer la formule du N° 319 en négligeant Π' qui est petit relativement à Π, ce qui donne

$$T = \frac{\Pi \delta}{r} + \frac{f_1 r' \Pi}{r},$$

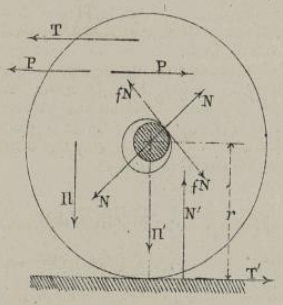
expression dans laquelle on peut admettre que le coefficient δ, pour un cercle en fonte ou en fer roulant sur un rail en fer, varie de 0,0035 à 0,0012 suivant que les surfaces sont rugueuses ou polies.

En prenant par exemple $\delta = 0,002$, puis $r = 0^m,50$, $r' = \frac{1}{10} r$ et $f_1 = 0,025$, il vient

$$\frac{\delta}{r} = 0,004, \qquad \frac{f_1 r'}{r} = 0,0025 ;$$

ce qui montre que la résistance au roulement sur les rails est plus grande que le frottement de glissement autour des fusées des essieux, et la différence est d'autant plus sensible que r' est plus petit. Mais il en serait autrement si r' était suffisamment grand, et il pourrait arriver que la résistance au roulement fût tout à fait négligeable par rapport à celle de glissement.

324. — **Traction d'une locomotive sur une voie de fer.** — *1°. Cas où la voie est horizontale.* — La locomotive est placée sur un essieu complètement solidaire avec les roues et mobile dans une boîte fixée à la voiture. Dans l'état de repos le contact a lieu entre l'essieu et le tourillon, à la partie supérieure de celui-ci ; mais il n'en est pas ainsi pendant le mouvement, et le contact a lieu dans ce cas en un point que l'on sait déterminer quand on connaît l'ensemble et la direction de chacune des forces qui agissent sur la roue.



Les forces à considérer sont : la résistance horizontale T qui provient de ce que la locomotive est destinée à traîner un certain nombre de wagons plus ou moins chargés ; le poids Π de la locomotive et le poids Π' de la roue dont le rayon est r ; la réaction normale N' exercée par le rail sur la roue agissant à une distance δ du point A ; la résistance horizontale T' exercée tangentiellement à la roue ; les forces normales et tangentielles N et fN exercées réciproquement au point de contact du tourillon avec le coussinet formé par la boîte à graisse. Enfin, l'action de la vapeur détermine : 1° Sur la surface du piston, une pression P,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

supposée horizontale, qui se transmet, par l'intermédiaire de la tige du piston et de la bielle, à la roue motrice en un point situé à une distance ρ du centre de cette roue; 2° sur le fond du cylindre, une pression égale et opposée à P. On suppose ici que l'action de la force P sur la roue est dirigée de gauche à droite, et par suite que la pression égale et contraire qui agit sur la voiture est, comme la traction T, dirigée de droite à gauche.

Équilibre de l'ensemble. — Les forces extérieures T, Π, Π', N et T', étant projetées sur deux directions, l'une horizontale et l'autre verticale, donnent

$$T' = T, \qquad N' = \Pi + \Pi'.$$

Équilibre de la voiture. — Les actions exercées par la voiture sur la fusée de l'essieu sont les forces rectangulaires $(T+P)$ et Π; celles de la fusée sur la voiture sont la réaction normale N et le frottement fN. En écrivant que les résultantes de ces deux groupes de forces sont égales entre elles on forme l'équation

$$(T+P)^2 + \Pi^2 = N^2 + f^2 N^2$$

Équilibre de la roue. — Les forces qui sollicitent la roue sont, d'une part la réaction N', la force tangentielle T' et la pression P due à l'action de la vapeur, d'autre part la pression normale N exercée par la voiture sur la fusée de l'essieu dont le rayon est r' et le frottement correspondant fN. Les moments de ces forces, pris par rapport à la roue donnent la relation

$$P\rho = T'r + N'\delta + fNr'$$

L'élimination de T', N' et N entre les équations précédentes donne

$$P\rho = Tr + (\Pi + \Pi')\delta + \frac{fr'}{\sqrt{1+f^2}}\sqrt{\Pi^2 + (T+P)^2}$$

La valeur $T+P$, généralement petite relativement à Π, peut être négligée et l'on a

$$P\rho = Tr + (\Pi + \Pi')\delta + fr'\Pi.$$

Cette relation permet de calculer la pression P quand on connaît la valeur de la traction T. Or, si l'on désigne par Π_1 le poids des wagons à remorquer, par Π_1' le poids des roues de ces wagons, par r_1 les rayons des roues et par r_1' ceux des fusées la valeur de T se déduit, d'après le N° 319, de la relation

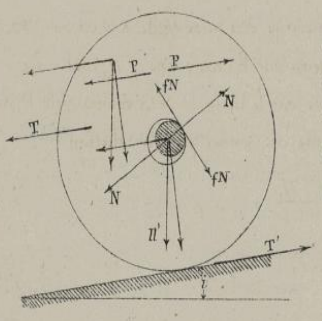
$$Tr_1 = (\Pi_1 + \Pi_1')\delta + f_1 r_1' \Pi_1,$$

qui donne, en négligeant Π_1',

$$T = \frac{(\delta + f_1 r_1')\Pi_1}{r_1}$$

On voit facilement comment la valeur de Pρ doit être modifiée si la charge Π est supportée par plusieurs essieux moteurs dont toutes les roues ont alors le même diamètre.

Cas où la voie est inclinée. — Lorsque la voie fait un angle donné i avec l'horizon, on peut remplacer le poids Π par deux composantes, l'une, $\Pi\cos i$, perpendiculaire à la direction des rails; l'autre, $\Pi\sin i$, parallèle à cette direction. Le poids Π' de la roue se décompose de même en $\Pi'\cos i$ et $\Pi'\sin i$. En supposant que le mouvement soit ascendant, les conditions d'équilibre sont



$$T' = T + (\Pi + \Pi')\sin i, \qquad N' = (\Pi + \Pi')\cos i,$$

$$N^2 + f^2 N^2 = \Pi^2 + (T+P)^2 - 2\Pi(T+P)\sin i, \qquad P\rho = T'r + N'\delta + fNr';$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On déduit de ces relations une équation contenant un radical sous lequel on peut négliger la quantité $T+P$, et l'on obtient alors

$$Pp = [T + (\Pi + \Pi')\sin i]\, r + (\Pi + \Pi')\,\delta + f_1 r' \Pi .$$

La valeur de T qu'il faut porter dans cette équation pour en déduire ensuite la pression P, est donnée, d'après le N° 319, par la relation

$$T r_1 = (\Pi_1 + \Pi_1')\, r_1 \sin i + (\Pi_1 + \Pi_1')\,\delta + f_1 r_1' \Pi_1 ,$$

d'où, en négligeant Π_1',

$$T = \Pi_1 \sin i + \frac{(\delta + f_1 r_1')\,\Pi_1}{r_1}$$

325. — **Poids adhérent. — Conditions qu'il doit remplir.** — Les roues des locomotives prenant leur point d'appui sur la surface des rails, il pourrait arriver que la traction T fût assez grande pour que les roues, bien que calées sur l'essieu, puissent tourner sur elles-mêmes en glissant sur les rails sans déterminer l'avancement du train. Pour que les roues deviennent motrices il faut qu'elles éprouvent de la part des rails, une résistance au glissement suffisante pour les empêcher de tourner sur elles-mêmes sans avancer ; autrement dit, il faut que les rails agissent sur les roues comme feraient les dents d'une crémaillère fixe sur un engrenage, lequel ne pourrait tourner autour de son axe qu'en prenant en même temps un mouvement de translation parallèle à la crémaillère. On obtient une résistance de glissement suffisante pour empêcher les roues motrices de patiner en les chargeant d'un poids considérable auquel on a donné le nom de *poids adhérent*, et il convient d'intéresser à cette action la plus grande partie du poids de la machine.

Pour déterminer les conditions que doit remplir le poids adhérent, il faut considérer séparément le cas d'une voie horizontale et celui d'une voie inclinée.

Cas où la voie est horizontale. — En désignant par Π_a le poids adhérent dont les roues motrices sont chargées, la résistance au glissement des roues sur les rails est $f'\Pi_a$; et si T est l'effort de traction que la machine doit exercer sur le train, il faut, pour que le mouvement puisse se produire, que l'on ait

$$f'\Pi_a > T, \quad \text{et à la limite} \quad f'\Pi_a = T,$$

c'est-à-dire

$$f'\Pi_a \geqq \frac{(\delta + f_1 r_1')\,\Pi_1}{r_1}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\Pi_a}{\Pi_1} \geqq \frac{\delta + f_1 r_1'}{f' r_1} .$$

On doit remarquer que la valeur f' du coefficient de frottement sur les rails est généralement grande par rapport à f_1. D'après les expériences de M. Poirée on peut prendre pour f' les valeurs suivantes :

Rails humides, $f' = 0{,}13$. Rails secs, $f' = 0{,}30$ Moyenne, $f' = 0{,}20$.

La valeur f_1 pour les tourillons peut, dans le cas d'un bon graissage, être prise égale à 0,04 ou 0,05.

Cas où la voie est inclinée. — Ici la résistance au glissement sur les rails est $f'\Pi_a \cos i$; la charge à remorquer se compose de l'effort de traction T qu'il faut exercer sur le train et de la composante $\Pi_a \sin i$ du poids adhérent ; de sorte que la condition que doit remplir le poids adhérent est donnée par la relation

$$f'\Pi_a \cos i \geqq \Pi_a \sin i + \Pi_1 \sin i + \frac{(\delta + f_1 r_1')\,\Pi_1}{r_1} ,$$

d'où

$$\frac{\Pi_a}{\Pi_1} \geqq \frac{\sin i}{f' \cos i - \sin i} + \frac{\delta + f_1 r_1'}{r_1 (f' \cos i - \sin i)} .$$

Cette relation exige évidemment que l'on ait

$$f' \cos i - \sin i > 0 , \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tg} i < f' ;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on voit en outre que, pour un poids adhérent donné Π_a, la charge Π_1 que peut remorquer la locomotive doit être d'autant plus faible que $f'\cos i$ diffère moins de $\sin i$; et si l'on avait $f'\cos i - \sin i = 0$, ce qui donnerait $\operatorname{tg} i = f'$, la machine ne pourrait plus traîner aucune charge.

C'est pour cette raison que sur les voies de fer les locomotives ne peuvent fonctionner sur des rampes trop inclinées, et que sur les routes la limite de l'adhérence est rapidement atteinte.

Valeurs du rapport entre le poids adhérent et le poids remorqué, pour quelques trains de la ligne du Nord.

Π_a, poids adhérent. Π_m poids moteur (locomotive et tender).
Π_u. poids utile remorqué. $\Pi_u + \Pi_m$, poids total remorqué.

Désignation des locomotives.		Poids exprimé en tonnes. Π_a	Π_m	Π_u	Vitesse en kilomètres par heure.	Diamètres des roues motrices.	Valeur du rapport $\frac{\Pi_a}{\Pi_u+\Pi_m}$	Moyennes.
Locomotives à voyageurs.	Clapeyron	10,0	40	80	72	1,80	0,085	0,092
	Crampton	12,6	50	96	72	2,10	0,082	
	Engerth	25,0	48	192	45	1,80	0,096	
	Petit Mamouth	26,5	46	192	45	1,42	0,111	
	Petiet (4 cyl.)	21,0	45	192	45	1,60	0,089	
Locomotives à marchandises.	Mamouth	26,5	46	300	25	1,60	0,077	0,069
	du Creuson	32,0	55	450	25	1,40	0,063	
	Engerth	44,0	66	670	25	1,25	0,060	
	Forte rampe	45,0	45	550	25	1,06	0,075	

326. — **Machines de traction sur les routes ordinaires.** — La condition de l'adhérence est moins gênante sur les routes que sur les voies de fer parce que le coefficient f' est alors beaucoup plus grand; mais la dépense relative à un même transport est en même temps augmentée dans une proportion considérable.

Les dernières expériences que nous avons faites sur la locomotive de M.r Lotz, qui a fonctionné récemment à Paris ont donné, pour le coefficient de traction $\frac{T}{\Pi_1} = \frac{\delta + f_1 r'}{r}$, une valeur de 0,050 à 0,055. Il faut d'ailleurs remarquer que la vitesse de ces locomotives est nécessairement très-limitée.

Quant au coefficient $\frac{\Pi_a}{\Pi_1}$ d'adhérence sur les routes ordinaires, coefficient dont les valeurs limites sont données au N.° précédent, on obtient les résultats suivants, dans l'hypothèse $f' = 0,20$,

Valeurs données de $\operatorname{tg} i$ ..... 0,00 0,05 0,10 0,15.

Valeurs correspondantes du coefficient d'adhérence .... 0,25 0,67 1,50 4,00.

Dans ces conditions, l'inclinaison pour laquelle on aurait $\operatorname{tg} i = 0,20$ ne permettrait plus à la locomotive seule d'avancer. Lorsque le sol est mouillé la valeur f devient plus faible et par suite plus défavorable.

En admettant que sur une route bien entretenue, le coefficient de traction puisse être réduit à 0,04 on doit remarquer que chaque cheval vapeur devrait dépenser une partie de son travail pour remorquer le mécanisme qui le constitue. Si une machine de 30 chevaux pesait, par exemple, 10 000 kilog. chaque cheval vapeur pèserait 10.000 : 30 = 333 kilog. et l'effort de traction correspondant serait de 333 × 0,04 = 13 kil. environ.

A la vitesse de 1 mètre par seconde, chaque cheval vapeur se trouverait ainsi réduit, quant à la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

traction du poids remorqué, à 75 − 13 = 62 kilogrammètres, ou aux 4/5 environ. A une vitesse de 3 mètres, plus de la moitié du travail transmis aux roues motrices, serait employé à la traction de la locomotive, et à une vitesse de 5 mètres, la machine en serait réduite à se transporter toute seule.

On peut estimer que chaque cheval-vapeur dans une locomotive de grande exploitation, sur voie de fer, pèse 250 kilog. et à raison d'un coefficient de 0,004 la traction correspondante s'abaisserait à 1 kilog. au lieu de 13. Cette énorme disproportion montre bien que la traction à la vapeur sur les routes de terre ne peut être avantageuse que pour les exploitations temporaires, dans lesquelles l'économie de la traction sur voie de fer ne compenserait pas les charges résultant des frais de premier établissement.

327. — **Dispositions proposées pour augmenter l'adhérence.** — Sur les chemins de fer on augmente momentanément l'adhérence en versant du sable sur les rails, on obtient aussi le même résultat, mais d'une manière permanente, au moyen d'un rail central sur les faces latérales duquel s'appuient deux roues horizontales par l'intermédiaire de ressorts ou de leviers. L'effet ainsi produit, que l'on a récemment désigné sous le nom d'adhérence par laminage, peut être augmenté sans qu'il soit nécessaire d'exagérer le poids de la machine motrice, parceque la pression sur le rail central peut alors être déterminée par des organes articulés, reliés au crochet de traction.

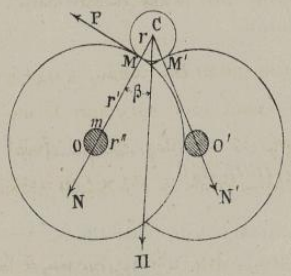
Sur les routes on a cherché à augmenter l'adhérence par l'emploi de bandages en caoutchouc recouverts de plaques de tôle. On peut aussi parvenir à remorquer une charge plus grande avec une même locomotive routière, en faisant cheminer cette locomotive sur le sol mais en faisant porter le poids des wagons sur des longrines ou sur des rails.

328. — **Emploi des galets dans les transmissions de mouvement.** — Les galets sont de petites roues montées sur des essieux fixes ou mobiles que l'on interpose entre deux corps ; ils donnent lieu à des résistances de roulement et de glissement moins favorables que les rouleaux, mais ils offrent l'avantage de se maintenir toujours dans une position déterminée les uns par rapport aux autres et sont, à ce point de vue, commodes pour les manœuvres qui doivent souvent se répéter dans les mêmes conditions.

Les galets, lorsqu'ils sont d'un petit diamètre, ou d'ailleurs, comme les roulettes des meubles, l'inconvénient de donner lieu souvent à la formation de méplats qui les empêchent de tourner aussi librement et qui les rendent quelquefois plus nuisibles qu'utiles.

On peut employer avantageusement les galets dans plusieurs circonstances et notamment dans les deux cas suivants :

1° *Tourillons à galets.* — Pour diminuer le frottement dans les appareils de précision on fait quelquefois reposer les tourillons d'un arbre horizontal sur les jantes de deux galets symétriques, mobiles autour de deux axes O et O'. Pendant la rotation de l'arbre C, il se produit en M et en M' des résistances de roulement ; et en O et O' des résistances de frottement. Le poli des surfaces permettant de négliger δ par rapport à f malgré les différences de parcours respectifs en ces points, si N est la réaction normale en M, réaction transmise aussi en m, et si P est la réaction tangentielle du tourillon sur le galet, l'équation des moments autour de l'axe projeté en O donne



$$Pr' = fNr'', \quad \text{d'où pour les deux galets,} \quad 2P = \frac{2fNr''}{r'}.$$

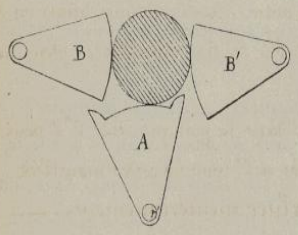
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ces deux forces N pouvant être considérées comme les composantes égales de la charge Π du tourillon, on a $\Pi = 2N\cos\beta$, et par suite

$$2P = \frac{r''f\Pi}{r'\cos\beta}.$$

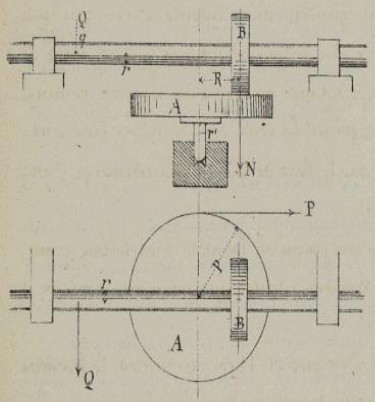
Si le tourillon tournait dans un coussinet, la force tangentielle P' développée au point de contact aurait pour expression $P' = f\Pi$. La comparaison des valeurs $2P$ et P' donne

$$\frac{2P}{P'} = \frac{r''}{r'\cos\beta};$$



on voit que ce rapport est d'autant plus favorable que β est plus voisin de 90° et que r'' est plus petit par rapport à r'. Cette disposition, la plus avantageuse, a été utilisée pour la suspension des cloches au moyen d'un galet principal A dont le centre est placé sur la même verticale que le centre du tourillon, et de deux galets latéraux B et B' destinés seulement à maintenir la stabilité du système qui est ici appliqué à un mouvement de rotation alternatif.

2°. — *Transmission par galets de friction.* — La résistance au roulement peu, comme le frottement de glissement être utilisé dans les transmissions pour déterminer la solidarité entre deux organes de rotation. Elle offre même cette particularité remarquable que le rapport des vitesses et le sens du mouvement de l'organe conduit peuvent, au moyen de dispositions très simples, être rendus variables, pendant la marche, avec une certaine facilité.



Soit un disque A de rayon p, sollicité par une force P. Ce disque, en tournant sur lui-même, peut entraîner le galet B de rayon R' destiné à vaincre une résistance Q appliquée à une distance q de l'arbre, pourvu que l'on détermine, entre les deux organes, une pression suffisante pour qu'il n'y ait pas glissement. En désignant cette pression limite par N, la réaction tangentielle correspondante par fN, et en appelant δ le bras de levier de la résistance au roulement sur le disque, l'équilibre des moments, pour le disque et pour le galet, donne les deux relations

$$Pp = fNR + \tfrac{2}{3}fNr', \qquad fNR' = Qq + fNr + N\delta;$$

d'où, en éliminant N,

$$\frac{Pp}{Qq} = \frac{fR + \frac{2}{3}fr'}{fR' - fr - \delta};$$

on voit que pour un même effet à produire, le moment moteur doit augmenter lorsque les quantités R, r, et r' augmentent et lorsque R' diminue. Quant à la valeur de U, elle est évidemment

$$U = \frac{Qqds}{Ppds} = \frac{fR' - fr - \delta}{fR + \frac{2}{3}fr'}.$$

Des cordes et des courroies dans les machines.

329. — **Notions générales.** — Les cordes et les courroies sont, en raison de leur flexibilité et de leur légèreté, fréquemment employées pour transmettre des actions à distance. Les cordes sont formées de fils

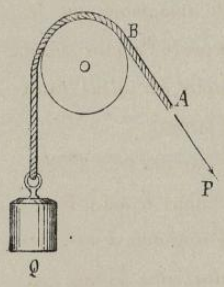
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de chanvre, dits fils de carret, qui, réunis par la torsion, constituent les torons dont l'ensemble forme la corde elle-même. Ces diverses torsions ont pour but de rendre les fils solidaires de manière que chacun d'eux résiste lorsqu'on exerce sur la corde un effort dans le sens de la longueur. La constitution même des cordes doit être considérée, au point de vue qui nous occupe, comme une application utile du frottement, application qui s'étend encore aux nœuds que l'on fait avec les cordes et qui résistent aux plus grands efforts par suite du frottement mutuel des différents brins.

Les courroies sont généralement en cuir, quelquefois en caoutchouc ou en gutta-percha, et elles sont exclusivement employées à transmettre le mouvement d'une poulie à une autre. Depuis quelque temps on se sert, pour cet objet, de cordes en chanvre et en fil de fer, lorsqu'il s'agit d'établir des transmissions en plein air, quelquefois jusqu'à des distances de plusieurs kilomètres.

La charge, par millimètre de section, qu'on ne doit pas dépasser dans la pratique, est : $0^k,2$ pour les courroies; 3^k pour les cordes blanches; $2^k,50$ pour les cordes goudronnées, et 2^k pour les cordes mouillées.

330. — **Raideur des cordes. — Comment on peut l'évaluer numériquement.** — Lorsqu'on veut élever un poids ou vaincre une résistance quelconque Q à l'aide d'une corde enroulée sur un cylindre ou une poulie mobile autour de son axe, on constate que l'effort moteur P, nécessaire pour déterminer le mouvement et le maintenir uniforme, surpasse la résistance Q d'une quantité plus grande que celle qui provient de l'essieu, de la poulie ou du cylindre sur ses appuis. On en conclut que l'enroulement de la corde donne lieu à une certaine résistance qui constitue ce que l'on nomme la raideur de cette corde, résistance qui peut être regardée comme provenant, soit du travail nécessaire pour ployer la corde, soit de la courbure que prend cette corde, et de laquelle il résulte que le bras de levier de la résistance Q est plus grand que celui de la force motrice P.



La raideur commence à se manifester au point où la corde s'infléchit pour s'enrouler, tandis que l'opération du redressement n'entre que pour une part à peine appréciable dans le travail dû à la raideur.

Coulomb a conclu de ses expériences sur la raideur des cordes que si D est, en mètres, le diamètre de la poulie ou du cylindre augmenté de celui de la corde, Q la tension de cette corde avant le point où la raideur commence à se produire, A et B deux coefficients indépendants de la nature et de l'état de la corde, la résistance T à l'enroulement est de la forme

$$T = \frac{A + BQ}{D},$$

expression dans laquelle A est, d'après Coulomb, le coefficient de la raideur naturelle de la corde, et B le coefficient de raideur dû à la résistance Q.

En désignant par q le rayon du cylindre ou de la poulie, augmenté de celui de la corde, on a $D = 2q$, et par suite

$$T = \frac{A + BQ}{2q}, \qquad \text{d'où} \qquad Tq = \frac{A + BQ}{2};$$

ce qui montre que le moment Tq de la raideur de la corde a pour valeur $\frac{1}{2}(A + BQ)$; et c'est sous cette forme qu'on peut l'introduire dans les calculs relatifs aux appareils dans lesquels on emploie les cordes comme moyens de transmissions de mouvement.

M. Morin a dressé une table qui donne les valeurs de A et de B pour la plupart des cordes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

employées dans les machines. Les principaux résultats de cette table sont indiqués à la suite des notes sur le frottement.

331. ___ **Influence de la raideur des cordes et du frottement dans les machines.**

Équilibre du treuil ordinaire. ___ En conservant les notations adoptées précédemment pour la théorie du treuil, mais en remarquant que la quantité q qui représente le bras de levier de la force résistante est ici égale au rayon du tambour augmenté de celui de la corde, les équations (1), (2) et (3) du N° 286 deviennent, quand on y tient compte, pour l'équation (3), du moment résistant dû à la raideur de la corde

$$R'^2 = m'^2P^2 + n'^2Q^2 + s'^2\Pi^2 + 2m'n'PQ\cos(P,Q) + 2m's'P\Pi\cos(P,\Pi) + 2n's'Q\Pi\cos(Q,\Pi), \quad (1)$$

$$R''^2 = m''^2P^2 + n''^2Q^2 + s''^2\Pi^2 + 2m''n''PQ\cos(P,Q) + 2m''s''P\Pi\cos(P,\Pi) + 2n''s''Q\Pi\cos(Q,\Pi), \quad (2)$$

$$Pp = Qq + \tfrac{1}{2}(A + BQ) + R'f_1r' + R''f_1r'',$$

relations dont on déduit les valeurs de P, R' et R'' soit par la méthode des substitutions successives, soit par la méthode de Poncelet, ainsi qu'on l'a indiqué précédemment.

Lorsque les forces P et Q sont verticales comme la force Π, la dernière équation subsiste sans modification, mais les deux premières se réduisent à

$$R' = m'P + n'Q + s'\Pi, \qquad R'' = m''P + n''Q + s''\Pi,$$

et le calcul des inconnues P, R' et R'' reçoit alors une grande simplification.

Équilibre d'une poulie simple. ___ On suppose que le déroulement de la corde a lieu sans glissement et l'on établira ultérieurement les conditions pour que ce glissement ne puisse avoir lieu.

Pour obtenir les équations de la poulie il suffit de poser $m' = m'' = \frac{1}{2}$, $n' = n'' = \frac{1}{2}$, $r' = r''$ dans les équations (1) et (2), puis de négliger le poids Π, ce qui donne, pour la réaction totale R des deux appuis,

$$R = 2R' = 2R''.$$

Les équations d'équilibre sont alors

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(P,Q), \qquad Pp = Qq + \tfrac{1}{2}(A + BQ) + Rf_1r',$$

relation qu'on aurait pu d'ailleurs déduire immédiatement d'une figure analogue à celle du N° 230, en remarquant que le bras de levier p de la force motrice est égal au rayon de la poulie, que le bras de levier q de la résistance doit être égal au rayon de la poulie augmenté de celui de la corde, et qu'enfin la quantité r' est le rayon de l'œil ou du tourillon de la poulie.

Lorsque les forces P et Q sont parallèles entre elles, les deux équations précédentes se réduisent à

$$R = P + Q, \qquad Pp = Qq + \tfrac{1}{2}(A + BQ) + (P + Q)f_1r',$$

d'où

$$P = \frac{A}{2(p - f_1r')} + \frac{B + 2(q + f_1r')}{2(p - f_1r')}Q,$$

expression de la forme

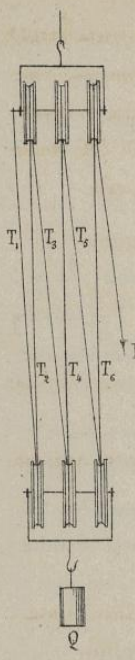
$$P = \alpha + \beta Q,$$

dans laquelle les quantités α et β peuvent être calculées quand on se donne le diamètre de la poulie ainsi que le diamètre et la nature de la corde employée.

Équilibre de la moufle. ___ Les moufles, nommées aussi palans, sont formées de deux systèmes de poulies de même diamètre, montées respectivement sur un même axe. Une corde fixée à un point de la chape supérieure entoure toutes ces poulies successivement et se termine par un dernier brin descendant sur lequel agit la force motrice. On peut négliger le poids de la corde

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ainsi que celui des poulies en supposer que les brins rectilignes sont sensiblement parallèles entre eux.



Pour trouver les tensions T des divers brins de la corde, il suffit d'appliquer, en passant de l'un à l'autre, la formule $P=\alpha+\beta Q$, en ayant soin de substituer la seconde valeur de T dans la troisième, celle-ci dans la quatrième et ainsi de suite. On obtient de cette manière, en supposant qu'il y ait n brins non compris celui sur lequel agit la force motrice P,

$$T_1 = \qquad\qquad = \alpha\frac{\beta^0-1}{\beta-1}+\beta^0 T_1 \ ,$$

$$T_2=\alpha+\beta T_1 \qquad = \alpha\frac{\beta^1-1}{\beta-1}+\beta^1 T_1 \ ,$$

$$T_3=\alpha+\beta T_2=\alpha(1+\beta)+\beta^2 T_1 \qquad = \alpha\frac{\beta^2-1}{\beta-1}+\beta^2 T_1 \ ,$$

$$T_4=\alpha+\beta T_3=\alpha(1+\beta+\beta^2)+\beta^3 T_1 \qquad = \alpha\frac{\beta^3-1}{\beta-1}+\beta^3 T_1 \ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_n=\alpha+\beta T_{n-1}=\alpha(1+\beta+\beta^2+\cdots\cdots+\beta^{n-2})+\beta^{n-1}T_1 = \alpha\frac{\beta^{n-1}-1}{\beta-1}+\beta^{n-1}T_1 \ ,$$

$$P=\alpha+\beta T_n = \alpha(1+\beta+\beta^2+\cdots\cdots+\beta^{n-1})+\beta^n T_1 = \alpha\frac{\beta^n-1}{\beta-1}+\beta^n T_1 \ . \qquad (1)$$

En ajoutant membre à membre les n premières égalités et en remarquant que l'on a nécessairement $T_1+T_2+T_3+\cdots\cdots+T_n=Q$, il vient

$$Q=\left(\frac{\beta^n-1}{\beta-1}-n\right)\frac{\alpha}{\beta-1}+\frac{\beta^n-1}{\beta-1}T_1 \qquad (2)$$

L'élimination de T_1 entre (1) et (2) donne

$$P=\alpha\left(\frac{n\beta^n}{\beta^n-1}-\frac{1}{\beta-1}\right)-\frac{(\beta-1)\beta^n}{\beta^n-1}Q \ ,$$

ce qui permet de calculer la force motrice P nécessaire pour élever un fardeau Q.

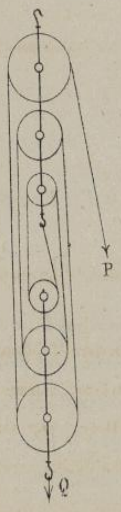
On peut d'ailleurs obtenir l'une quelconque des tensions en fonction de la résistance Q; il suffit pour cela d'éliminer T_1 entre la valeur de Q et celle de la tension considérée.

Si le frottement et la raideur de la corde étaient assez faibles pour pouvoir être négligés, les tensions des n brins qui supportent le poids Q seraient égales entre elles et l'on aurait

$$P=T=\frac{Q}{n} \ .$$

L'utilisation, dans le cas de la mouffle, est donnée par la formule

$$U=\frac{Q\,dx}{P\,dy}$$



et comme le raccourcissement de chaque brin est égal au chemin dy divisé par le nombre des brins on a

$$dx=\frac{dy}{n} \quad \text{d'où} \quad U=\frac{Q}{nP} \ .$$

Poncelet a trouvé que pour le palan des pontonniers, on a ordinairement $U=0,60$ et ce faible rendement fait connaître l'importance des pertes de travail résultant de l'emploi des mouffles.

Équilibre des palans à poulies inégales. — On désigne plus ordinairement sous le nom de palans des appareils dans lesquels des poulies de rayons différents sont montées sur des axes parallèles dans une même chape.

La relation à établir entre la force motrice et la résistance n'est plus aussi simple que dans le cas précédent parce que les quantités α et β changent de valeur quand on passe d'une poulie à une autre d'un diamètre différent, et l'on doit préalablement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

calculer toutes ces quantités pour les différents diamètres donnés. Si α_2 et β_2, α_3 et β_3, ..., α_n et β_n sont les valeurs ainsi calculées, on peut toujours écrire

$$T_1 = T_1, \qquad T_2 = \alpha_1 + \beta_1 T_1, \qquad T_3 = \alpha_2 + \beta_2 T_2 = \alpha'_2 + \beta'_2 T_1, \ldots\ldots,$$

$$T_n = \alpha'_{n-1} + \beta'_{n-1} T_1, \qquad P = \alpha'_n + \beta'_n T_1. \qquad (1)$$

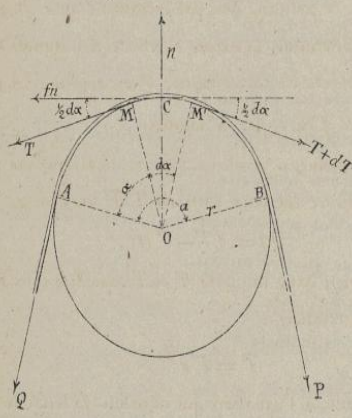
La somme des n premières égalités donne

$$Q = \Sigma T = \Sigma \alpha + \Sigma \beta T_1 \qquad (2)$$

en l'élimination de T_1 entre (1) et (2) donne la relation demandée entre P et Q.

M.r Morin a constaté par une expérience directe que pour un palan à quatre brins, chargé de 532 kilogrammes l'effort moteur devait être P = 154 kilogrammes. Le calcul donnerait P = 160 kilog. valeur peu différente de la première ce qui montre que l'on peut appliquer avec confiance les formules précédentes relatives aux moufles et aux palans.

332. — **Frottement d'une corde ou d'une courroie sur un cylindre.** — On suppose qu'il s'agit ici d'une corde ou d'une courroie assez flexible pour que l'influence de la raideur puisse être considérée comme négligeable, et l'on demande quelle doit être, eu égard au frottement, l'intensité de la force P qu'il faut exercer à l'une des extrémités de la corde pour vaincre une résistance à l'autre extrémité, le cylindre étant supposé immobile.



La tension variable de la courroie ayant une valeur T en un point M de l'arc AB, cette tension est T + dT au point M' infiniment voisin de M. Si n est la réaction normale en fn la réaction tangentielle exercées au point C, milieu de MM', par le cylindre sur la courroie, les forces T, T + dT, n et fn, projetées sur OC et sur une direction perpendiculaire, donnent les deux équations d'équilibre

$$n - (T + dT)\sin\tfrac{1}{2}d\alpha - T\sin\tfrac{1}{2}d\alpha = 0,$$

$$fn - T\cos\tfrac{1}{2}d\alpha - (T + dT)\cos\tfrac{1}{2}d\alpha = 0,$$

d'où, en éliminant n,

$$\frac{dT}{2T + dT} = f\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}d\alpha;$$

et comme on peut remplacer $2T + dT$ par $2T$ et $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}d\alpha$ par $\frac{1}{2}d\alpha$, il vient

$$\frac{dT}{T} = f\,d\alpha \qquad \text{d'où} \qquad \log T = f\alpha\log e + C$$

En prenant cette intégrale entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = a$ qui correspondent à $T = Q$ et $T = P$, on obtient

$$\log\frac{P}{Q} = fa\log e = \log e^{fa}, \quad \text{d'où} \quad \frac{P}{Q} = e^{fa},$$

ou enfin, en posant arc AB = s, $\qquad P = Qe^{fa} = Qe^{\frac{fs}{r}}$,

ce qui montre que pour des valeurs données de Q et de r, l'intensité de la force P croît rapidement à mesure que l'arc s enveloppé par la corde augmente. Ainsi, en enroulant plusieurs fois une corde sur un cylindre fixe, un homme seul peut, en agissant à l'une des extrémités, maintenir en équilibre un poids considérable qui serait suspendu à l'autre extrémité.

La formule précédente, dont l'exactitude a été vérifié par M.r Morin, a servi à déterminer la valeur de f pour les cordes et courroies employées dans les machines. Les résultats obtenus sont indiqués à la fin du frottement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

333. — **Freins flexibles.** — On peut utiliser le travail dépensé par le frottement d'un corps flexible sur un cylindre en mouvement pour détruire la puissance vive que possède la masse du système à un instant donné et arrêter le mouvement du cylindre. Il résulte en effet de la formule du N° précédent que si Q est la tension du brin résistant et P celle du brin moteur, la différence des deux tensions, due au frottement tangentiel total est

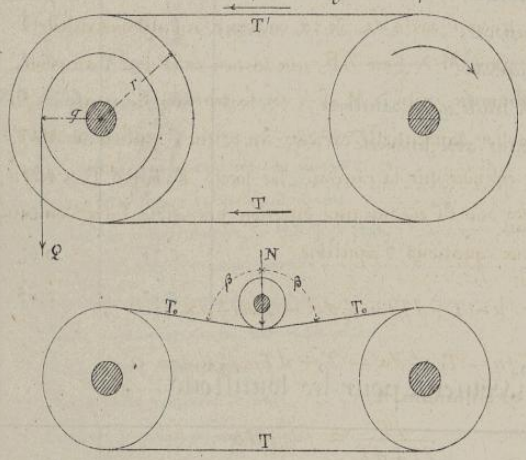
$$P - Q = Qe^{\frac{fs}{r}} - Q = Q\left(e^{\frac{fs}{r}} - 1\right) ;$$

en cette valeur, mise à la place de fN dans les formules du N° 308, donne

$$e_1 = \frac{M\rho^2\omega_0^2}{2Qr\left(e^{\frac{fs}{r}} - 1\right)} , \qquad t_1 = \frac{M\rho^2\omega_0^2}{r\left(e^{\frac{fs}{r}} - 1\right)} ,$$

expressions dans lesquelles e_1 est le chemin parcouru par un point situé à la distance ρ de l'axe, à partir de l'instant où agit le frein jusqu'à celui de l'arrêt du mobile, et t_1 le temps correspondant à ce parcours. Cette application du frottement est réalisée dans les poulies de freins. La courroie est alors remplacée par un fer feuillard, ou même, dans certains cas, par des pièces de bois juxtaposées sur un fer feuillard.

334. — **Transmissions par courroies.** — Dans les transmissions par courroies, on a ordinairement deux poulies qui sont enveloppés par une même courroie ; cette courroie doit avoir une tension au moment du repos sans quoi il n'y aurait pas d'adhérence et par suite, pas de frottement, l'une des poulies ne pourrait donc pas entraîner l'autre. Il s'agit de déterminer la valeur de cette tension initiale dans l'hypothèse où la résistance Q est appliquée à une distance q du centre de rotation.



Le moment résistant Qq est alors équilibré par la différence des deux tensions T, T', et l'on a

$$Qq = (T - T')r ,$$

expression dans laquelle T et T' sont liés entre eux par la relation

$$T = T'e^{\frac{fs}{r}} .$$

Quant à l'équation qui introduit la tension initiale T_0, elle est fournie par un fait d'expérience d'après lequel la somme des tensions de deux courroies est la même soit pendant le mouvement, soit pendant le repos. Or au repos les deux brins ont la même tension T_0, on a donc $2T_0 = T + T'$.

L'élimination de T et T' entre les trois équations précédentes donne

$$T_0 = \frac{Qq\left(e^{\frac{fs}{r}} + 1\right)}{2r\left(e^{\frac{fs}{r}} - 1\right)} .$$

Cette tension initiale qui, pour un même rayon r, varie avec f et s, est facile à produire avec de longues courroies que l'on raccourcit à la longueur convenable. Si la tension n'est pas suffisante, on se sert d'un galet tendeur que l'on pousse contre la courroie, ce qui revient à exercer sur celle-ci un effort normal dont la valeur est

$$N = 2T_0 \cos\beta ;$$

et en augmentant N on arrive à donner à T_0 une valeur assez grande pour qu'il n'y ait pas de glissement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Coefficients à employer dans les applications.

I. — Frottement de glissement entre surfaces planes.

(f_0, valeur au départ. — f, valeur pendant le mouvement)

Indication des surfaces en contact.	Etat des surfaces.	f_0	f
Chêne sur chêne	Fibres parallèles ; surfaces sans enduit	0,62	0,48
	Fibres parallèles ; surfaces frottées de savon sec	0,44	0,16
Chêne sur chêne	Fibres perpendiculaires ; surfaces sans enduit	0,54	0,34
	Fibres perpendiculaires ; surfaces mouillées d'eau	0,71	0,25
	Bois debout ; surfaces sans enduit	0,43	0,19
Fer sur chêne	Fibres parallèles ; surfaces sans enduit	0,62	0,26
	Fibres parallèles ; surfaces mouillées d'eau	0,65	0,21
Fonte sur fonte	Surfaces un peu onctueuses	0,16	" "
Fer sur fonte	Surfaces un peu onctueuses	0,19	0,18
Fonte sur bronze	Surfaces un peu onctueuses	" "	0,15
Métal sur bois	Surfaces graissées à l'huile et au saindoux	0,15	0,07 à 0,08
Métal sur métal	Surfaces avec enduit sans cesse renouvelé	" "	0,04 à 0,05
Cuir tanné sur chêne	Surfaces sans enduit	0,43	0,35
	Surfaces mouillées d'eau	0,79	0,29
Calcaire sur calcaire	Surfaces sans enduit	0,75	0,67
Brique sur calcaire	Surfaces sans enduit	0,67	0,65

II. — Frottement de glissement pour les tourillons.

Indication des surfaces en contact.	Etat des surfaces.	f
Métal sur métal	Surfaces très-peu onctueuses et commençant à se roder	0,25
	Surfaces onctueuses	0,14 à 0,16
	Graissage ordinaire à l'huile ou au saindoux	0,07 à 0,08
	Graissage continu	0,04 à 0,05
Fer sur gayac	Surfaces onctueuses	0,19
	Surfaces enduites d'huile ou de saindoux	0,11

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

III. — Résistance au roulement. —

(*l*, longueur de la bande de contact. — *f*, coefficient de roulement.)

Indication des surfaces en contact.	*l*	*f*
Fer sur sapin	0,020	0,00242
Chêne sur peuplier	0,200	0,00088
Chêne sur peuplier	0,100	0,00119
Chêne sur peuplier	0,050	0,00189
Chêne sur cuir	0,216	0,00121
Chêne sur plâtre	0,120	0,00082
Fonte sur fer ; surfaces brutes	" "	0,0035
Fonte sur fer ; surfaces polies	" "	0,0012
Roue en fer sur route empierrée	" "	0,0145
Roue en fer sur route pavée	" "	0,0090

IV. — Rapport du tirage à la charge dans la traction des véhicules. $\frac{T}{\Pi}$.

Nature de la voie.	Chariots au pas.	Charettes au pas.	Voitures suspendues au trot.
Recotement en très bon état	0,031	0,024	0,038
Recotement solide recouvert de gravier	0,094	0,080	0,116
Sol en terre ferme recouvert de gravier	0,091	0,080	0,073
Sol en terre ferme recouvert de sable	0,110	0,085	0,138
Route en empierrement en très bon état	0,014	0,014	0,024
Route en empierrement humide	0,024	0,019	0,037
Route en empierrement dégradée	0,059	0,024	0,044
Route en empierrement très mauvaise	0,066	0,052	0,082
Route pavée ordinaire	0,014	0,011	0,026
Route pavée couverte de boue	0,018	0,013	0,020
Tablier de pont en madriers	0,020	0,014	0,024

Omnibus, trains de Wagons, &ª... (vitesses diverses).

Bitume comprimé. Omnibus chargé, en été,	0,0300
Bitume comprimé. Omnibus chargé, en hiver,	0,0096
Rails plats, couverts de poussière	0,0102
Rails plats, sans poussière	0,0032
Rails plats, mouillés d'eau	0,0053
Rails américains formant sillon	0,0085
Rails à champignon, boîtes à graisse (train de grande vitesse)	0,0072
Rails à champignon, boîte à huile (train de grande vitesse)	0,0052
Rails à champignon, boîte à galets	0,0037

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

V. — Coefficients A et B de la raideur des cordes.

Nombre de fils.	Cordes blanches.			Cordes goudronnées.		
	Diamètres.	A	B	Diamètres.	A	B
6	$0^{m},0089$	$0^{k},010\ 6038$	0, 002 678	$0^{m},0105$	$0^{k},021\ 201$	0, 002 512 992
9	0,0110	0, 022 5207	0, 003 267	0,0129	0, 041 143	0, 003 769 488
12	0,0127	0, 038 8476	0, 004 356	0,0149	0, 067 314	0, 005 025 984
15	0,0141	0, 059 5845	0, 005 445	0,0167	0, 097 712	0, 006 282 480
18	0,0155	0, 084 7314	0, 006 534	0,0183	0, 138 339	0, 007 538 976
21	0,0168	0, 114 2883	0, 007 623	0,0198	0, 183 193	0, 008 795 472
24	0,0179	0, 148 2552	0, 008 712	0,0211	0, 234 276	0, 010 051 968
27	0,0190	0, 186 6321	0, 009 801	0,0224	0, 291 586	0, 011 308 464
30	0,0200	0, 229 4190	0, 010 890	0,0236	0, 355 125	0, 012 564 960
33	0,0210	0, 276 6159	0, 011 979	0,0247	0, 424 891	0, 013 821 456
36	0,0220	0, 328 2228	0, 013 068	0,0258	0, 500 886	0, 015 077 952
39	0,0228	0, 384 2397	0, 014 157	0,0268	0, 534 108	0, 016 334 448
42	0,0237	0, 444 6666	0, 015 216	0,0279	0, 671 559	0, 017 590 944
45	0,0246	0, 509 5035	0, 016 335	0,0289	0, 766 237	0, 018 847 440
48	0,0254	0, 578 7504	0, 017 424	0,0298	0, 867 144	0, 020 103 936
51	0,0261	0, 652 4075	0, 018 513	0,0308	0, 974 278	0, 021 360 432
54	0,0268	0, 730 4742	0, 019 602	0,0316	1, 078 641	0, 022 616 928
57	0,0276	0, 812 9511	0, 020 691	0,0326	1, 207 231	0, 023 873 424
60	0,0283	0, 899 8380	0, 021 780	0,0334	1, 333 050	0, 025 129 920

VI. — Frottemens des courroies et des cordes sur des tambours.

Indication des substances en contact.	f	Indication des substances en contact.	f
Courroie ordinaire sur tambour en bois . .	0,47	Courroie humide sur poulie en fonte	0,38
Courroie neuve sur tambour en bois	0,50	Courroie blanche sur poulie en bois	0,22
Courroie ordinaire sur poulie en fonte	0,28	Cordes (d'après M.r Lebas)	0,22

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Quatrième partie.

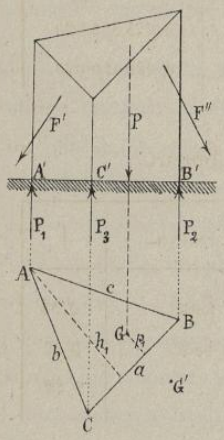
Stabilité des Constructions.

335. — **Considérations générales.** — Les principes généraux de la mécanique d'un système matériel permettent de résoudre le problème de la stabilité des constructions. On comprend, en effet, que pour assurer cette stabilité il suffit que toutes les forces qui sollicitent le système se fassent équilibre en tenant compte toutefois des conditions de liaison qui doivent exister entre les différentes parties de la construction.

Le mot stabilité doit être compris ici dans son acception absolue. On ne pourrait, en effet, se contenter, dans les applications, des conditions de l'équilibre que l'on appelle stable et qui consiste dans la certitude du retour d'un corps à sa première position dont on l'aurait d'abord écarté; il faut, au contraire, que la position de toutes les parties de la construction soit assurée d'une manière invariable, malgré l'action des forces extérieures que l'on peut prévoir et qu'il faut aussi faire entrer dans les conditions de premier établissement.

336. — **Stabilité d'un solide reposant sur un plan.** — Le cas d'un solide posé sur un plan présente plusieurs circonstances qu'il convient d'examiner successivement.

Cas où le solide repose par trois points A, B, C sur un plan. — Supposons d'abord que toutes les forces $F', F'', \ldots$, qui sollicitent le corps, indépendamment de celles qui proviennent du plan de repos, aient une résultante P et que cette résultante soit normale au plan, ce qui a lieu par exemple lorsque le corps, soumis seulement à l'action de la pesanteur, est posé sur un plan horizontal. Dans cette hypothèse, si la direction de la résultante vient rencontrer le plan en un point G situé dans l'intérieur du triangle ABC, il est évident que la force P détermine aux points A, B, C, des pressions P_1, P_2, P_3 qui donnent lieu, de la part des appuis, à des réactions respectivement égales et contraires, et l'on doit avoir



$$P_1 + P_2 + P_3 = P . \qquad (1)$$

En second lieu, la condition d'équilibre exige que le corps ne puisse tourner sous l'action des forces P, P_1, P_2, P_3, autour d'aucune des trois arêtes formées par les côtés du triangle ABC, et que, par suite, les sommes des moments de ces forces, pris successivement par rapport aux droites AB, BC, AC, soient séparément nulles, ce qui donne

$$P_1 h_1 = P p_1 , \qquad P_2 h_2 = P p_2 , \qquad P_3 h_3 = P p_3 ,$$

d'où

$$P_1 = \frac{P p_1}{h_1} , \qquad P_2 = \frac{P p_2}{h_2} , \qquad P_3 = \frac{P p_3}{h_3} .$$

Ces trois valeurs satisfont bien à l'équation (1), car en les additionnant il vient

$$P_1 + P_2 + P_3 = P\left(\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3}\right) ;$$

or, en désignant par δ la surface du triangle ABC on a séparément

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$ah_1 = bh_2 = ch_3 = 2s\,, \quad (2) \qquad ap_1 + bp_2 + cp_3 = 2s\,, \quad (3)$$

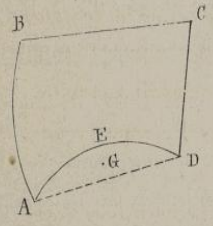
et les valeurs de a, b, c, tirées des relations (2) puis substituées dans la relation (3) montrent que la valeur de la parenthèse est égale à l'unité.

Si la direction de la résultante P venait rencontrer le plan d'appui en un point G' situé en dehors du triangle ABC, il ne pourrait y avoir équilibre, quant à la rotation autour de BC, que si P_1 était négatif, ce qui revient à dire que dans ce cas le point A devrait être retenu sur le plan d'appui par un moyen quelconque.

Lorsque la résultante P est oblique par rapport au plan d'appui on peut la décomposer en trois forces P_1, P_2, P_3 parallèles à sa direction et les considérations précédentes montrent encore qu'il ne peut y avoir équilibre que si la direction de P vient rencontrer le plan en un point situé dans l'intérieur du triangle ABC. Cette condition nécessaire n'est d'ailleurs pas suffisante, car si l'on remplace la force P par deux composantes, l'une P' perpendiculaire au plan et l'autre P'', parallèle à ce plan, il faut encore que l'on ait, eu égard au frottement, $P'' \leqq Pf$; c'est-à-dire qu'il faut que le corps ne puisse glisser sur le plan d'appui.

Cas où les points d'appui sont en ligne droite. — Lorsque le triangle ABC se réduit à une droite l'équilibre ne peut exister si la résultante des forces extérieures ne vient rencontrer cette droite entre ses deux points extrêmes. On ne saurait même dire que, si cette condition est satisfaite, le solide est dans une position vraiment stable, puisque le moindre mouvement, même accidentel, déterminé par un tassement, un simple ébranlement ou tout autre circonstance, aurait évidemment pour effet de placer le solide dans une position d'instabilité manifeste. C'est pour obvier à ce danger d'instabilité que, même dans le cas où le corps repose sur son appui par un plus grand nombre de points ou même par une surface continue, il est convenable de se tenir un peu éloigné de la limite de stabilité correspondant au cas où la résultante des forces extérieures passerait par l'un des points du contour précédemment indiqué.

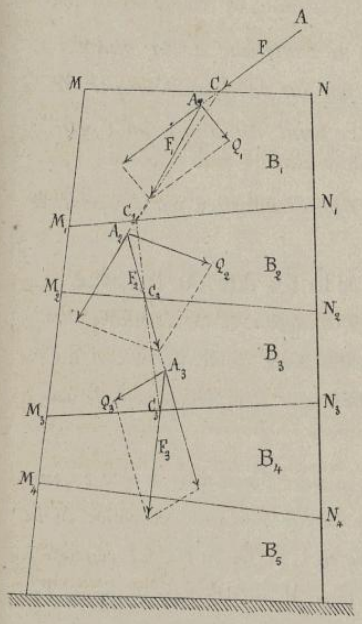
Cas où le nombre des points d'appui est plus grand que trois. — Quand il y a plus de trois points d'appui on peut toujours construire un polygone convexe comprenant tous ces points, et les considérations déjà présentées exigent que, pour assurer la stabilité, au point de vue de la rotation autour de l'un quelconque des côtés du polygone, la résultante de toutes les forces qui sollicitent le solide rencontre, comme précédemment, le plan de repos dans l'intérieur du polygone. Si la surface de contact était, par exemple, limitée par le contour ABCDEA, la condition précédente pourrait encore être satisfaite si cette résultante passait par le point G compris entre la limite AED de cette surface et la droite AD qui joint les deux extrémités de la partie convexe AED. Quant aux pressions exercées sur les différents éléments de la surface de contact, dans le cas où il y a plus de trois points d'appui, elles ne sauraient être déduites des seules conditions d'équilibre entre les forces extérieures et les réactions, et il faudra rechercher spécialement les règles de cette répartition de la pression totale. D'ailleurs, quel que soit le mode de répartition de cette pression, il faut, pour que la construction se maintienne dans un état permanent, que la pression par mètre carré ne dépasse en aucun point R kilogrammes, le nombre R étant donné par l'expérience pour chaque nature de matériaux.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

337. — **Conditions de stabilité d'un système de matériaux juxtaposés. Principe général de Moseley.** — Les conditions générales de la stabilité d'un système de matériaux juxtaposés ont été exprimées par Moseley sous la forme la plus complète de la manière suivante.

Considérons un massif quelconque de matériaux, supposons-le décomposé en parties distinctes par des plans M_1N_1, M_2N_2, ..., également quelconques, formant comme une série de plans de joints consécutifs et proposons-nous de déterminer les conditions que doivent remplir les forces qui sollicitent ce massif pour qu'il soit dans des conditions suffisantes de stabilité.



Soit F la résultante des forces extérieures transmises à la surface MN en C le point d'application de cette résultante. Le solide B_1 sollicité par la force F est en outre soumis à des forces extérieures particulières, et soit Q_1 la résultante de ces dernières forces. Si la stabilité de la construction est réalisée, le solide B_1 est séparément en équilibre; par conséquent la résultante F_1 des forces F et Q_1 doit être égale et directement opposée à la résultante des réactions exercées par B_2 sur B_1, par suite la direction de F_1 doit couper le joint M_1N_1 en un point C_1 situé entre M_1 et N_1; il faut de plus, pour que tout glissement soit évité, que F_1 fasse, avec la normale en C_1, un angle plus petit que l'angle α du frottement.

Pareillement si on compose F_1 qui exerce son action sur le solide B_2 avec Q_2 résultante des autres forces extérieures qui agissent sur B_2, la résultante F_2 de F_1 et de Q_2 doit rencontrer le joint M_2N_2 à l'intérieur du massif, et l'angle de F_2 avec la normale au point C_2 doit être plus petit que l'angle de frottement; en continuant de la sorte pour toutes les parties juxtaposées on obtient des résultantes successives F_3, F_4, F_5, ..., qui doivent toutes remplir les conditions que l'on vient d'indiquer pour les deux premières résultantes.

On peut d'ailleurs, sans passer par les valeurs intermédiaires $F_1, F_2, \ldots$, obtenir la valeur et la direction de la résultante F_n sur le joint M_nN_n en construisant directement la résultante de l'ensemble des forces F, Q_1, Q_2, ..., Q_n; et dans le cas où $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ sont des poids, on peut les remplacer par leur somme Π transportée au centre de gravité du système $B_1, B_2, \ldots, B_n$, puis combiner le poids Π avec la force F, ce qui donne la résultante cherchée, et c'est ainsi que l'on agit ordinairement dans les applications.

Ligne des pressions. — Si l'on joint successivement les points $C, C_1, C_2, \ldots$, d'intersection des résultantes partielles $F, F_1, F_2, \ldots$, avec les joints, on forme une ligne brisée appelée primitivement par Moseley *ligne des résistances*, mais désignée maintenant sous le nom de *ligne des pressions*.

Ligne des directions. — Les portions $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots$, des résultantes partielles $F, F_1, F_2, \ldots$, forment par leur ensemble une ligne brisée, appelée *ligne des directions*.

Courbe des pressions et courbe des directions. — Si l'on interpose, suivant une loi géométrique déterminée, entre toutes les faces de joints successifs une suite de plans intermédiaires infiniment rapprochés, et si l'on admet que les forces qui agissent sur chacun des solides compris entre ces nouveaux plans soient infiniment petites, comme dans le cas par exemple où elles représenteraient seulement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les poids respectifs de ces solides infinitésimaux, la ligne des pressions se transforme alors en une courbe continue que l'on appelle *courbe des pressions*, et les intersections de cette courbe avec les joints successifs du massif sont les *centres de pression*. Dans ces conditions, la ligne des directions est l'enveloppe, c'est-à-dire le lieu des intersections successives de toutes les résultantes, lesquelles sont alors des tangentes à la *courbe des directions*. De sorte que la direction de la pression en un point donné de la courbe des pressions est la tangente menée par ce point à la courbe des directions.

Énoncé des conditions de stabilité. — D'après ce qui précède le principe général de Moseley peut s'énoncer de la manière suivante : Pour qu'un système de matériaux juxtaposés et sans liaison entre eux soit complètement stable,

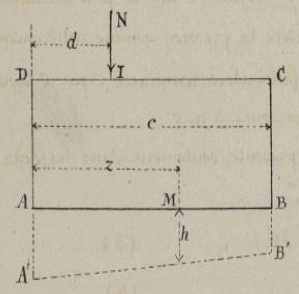
1°. — *La courbe des pressions doit couper tous les joints à l'intérieur de la masse.*

2°. — *Toute tangente menée à la courbe des directions par un point quelconque de la courbe des pressions doit former avec la normale au joint en ce point un angle plus petit que l'angle de frottement.*

3°. — *La pression ne doit dépasser en aucun point la limite indiquée par l'expérience pour la résistance des matériaux.*

338. — **Mode de répartition des pressions. — Énoncé de la loi dite du trapèze.** — Pour que l'on puisse juger si une construction donnée est bien établie sous le rapport de la résistance des matériaux, il faudrait connaître la loi de la répartition des pressions entre deux corps pressés l'un contre l'autre, et sous ce rapport on est réduit à faire une hypothèse que l'on désigne sous le nom de *loi du trapèze*.

Soit ABCD un solide dont la base, supposée rectangulaire, a pour dimensions b et c, et soit N la composante normale de la résultante des forces qui agissent sur la face supérieure du solide. Si la force N exerce son action uniformément sur toute la longueur b projetée en I, la loi du trapèze consiste à admettre qu'en chaque élément rectangulaire tel que celui qui est projeté en M dans la base d'appui, la pression par mètre carré sur cette base est proportionnelle à la hauteur correspondante h mesurée dans le trapèze ABB'A'.



On a vu d'ailleurs au N°. 229 comment cette loi de la répartition des pressions se déduit de la théorie de la flexion d'un solide courbe, chargé parallèlement à sa longueur, et l'on a obtenu la formule générale

$$R = \frac{2N}{\omega}\left[\left(\frac{6d}{c^2} - \frac{3}{c}\right)z + \left(2 - \frac{3d}{c}\right)\right], \qquad (1)$$

qui exprime la relation entre la pression R par mètre carré de chaque fibre normale à la surface projetée en AB et la résultante N appliquée à une distance d de l'extrémité D de la pièce. Cette formule est bien celle de la loi du trapèze, puisque l'on voit immédiatement que la pression R est une fonction du premier degré de la variable z, fonction qui est ainsi représentée par une ligne droite inclinée par rapport à l'axe AB des z.

Discussion de la formule (1). — Il s'agit d'examiner comment varie la pression normale R en un point donné de la surface de base eu égard à la situation de la résultante N; et pour cela il suffit de faire varier d depuis $d = \frac{1}{2}c$ jusqu'à $d = 0$; les valeurs qu'on obtiendra ainsi

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pour R se reproduiront évidemment d'une manière symétrique en faisant ensuite varier d depuis $d=\frac{1}{2}c$ jusqu'à $d=c$.

1°. — *Soit d'abord* $d=\frac{1}{2}c$. — La formule (1) donne $R=\frac{N}{\omega}$, quel que soit z, ce qui montre que la pression par mètre carré est uniformément répartie sur toute la base d'appui du solide.

2°. — *d compris entre* $\frac{1}{3}c$ *et* $\frac{1}{2}c$. — Il est facile de voir que toutes les valeurs de R sont positives. La plus grande est celle qui correspond à $z=0$ et qui s'exerce par conséquent sur l'élément rectangulaire projeté en A; la plus petite est celle pour laquelle on a $z=c$ et qui s'exerce sur l'élément projeté en B. Ces valeurs extrêmes, ainsi que celle qui correspond à $z=\frac{1}{2}c$ sont d'ailleurs

$$z=c\,, \qquad z=\tfrac{1}{2}c\,, \qquad z=c\,.$$

$$R=\frac{2N}{\omega}\left(2-\frac{3d}{c}\right), \qquad R=\frac{N}{\omega}\,, \qquad R=\frac{2N}{\omega}\left(\frac{3d}{c}-1\right).$$

3°. — $d=\frac{1}{3}c$. — Cette hypothèse conduit aux résultats suivants :

$$z=0\,, \qquad z=\tfrac{1}{2}c\,, \qquad z=c\,;$$

$$R=\frac{2N}{\omega}\,, \qquad R=\frac{N}{\omega}\,, \qquad R=0\,;$$

et l'on voit que le maximum de R, qui correspond à $z=0$, est double de la pression moyenne $\frac{N}{\omega}$, tandis que la pression sur l'élément projeté en B est nulle.

4°. — $d<\frac{1}{3}c$. — Dans ce cas, la valeur z' qui correspond à l'élément superficiel pour lequel on aurait $R=0$, s'obtient en posant

$$\left(\frac{6d}{c^2}-\frac{3}{c}\right)z'+\left(2-\frac{3d}{c}\right)=0\,, \qquad \text{d'où} \qquad z'=\frac{c}{3}\times\frac{2c-3d}{c-2d}\,.$$

A partir du point dont l'abscisse est z' les valeurs de R seraient toutes négatives, de sorte qu'en désignant par S la somme des valeurs positives de R et par S' celle des valeurs négatives, on devrait avoir $N=S-S'$; et comme il est évident que les valeurs négatives de R ne sauraient être admises, il en est forcément de même pour les valeurs positives et la formule (1) est complètement inapplicable à la surface dont la largeur est c dans l'hypothèse où l'on a $d<\frac{1}{3}c$. Dans ce cas on fait abstraction de toute la partie du solide qui excède la longueur $3d$, et l'on considère la pression comme entièrement répartie sur une longueur $c'=3d$; la formule (1) dans laquelle il faut alors remplacer c par c' devient applicable à la portion ω' de la surface de base dont les dimensions sont b et c'.

En résumé, le maximum à considérer pour la valeur de R se présente seulement dans les deux circonstances suivantes, où l'on suppose pour plus de simplicité $b=1^m$.

Pour $d>\frac{1}{3}c$, $$R=\frac{2N}{\omega}\left(2-\frac{3d}{c}\right)=\frac{2N}{c}\left(2-\frac{3d}{c}\right)\,, \qquad (3)$$

Pour $d\leqslant\frac{1}{3}c$, $$R=\frac{2N}{\omega}=\frac{2N}{c'}=\frac{2N}{3d}\,, \qquad (4)$$

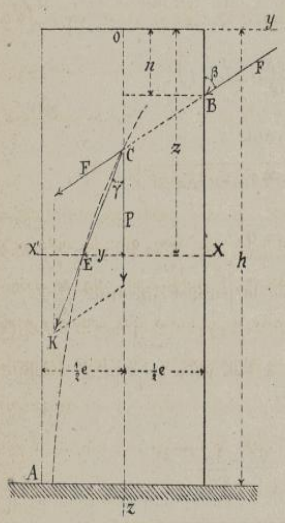
et l'on devra toujours s'arranger pour que la valeur de R déduite, soit de la formule (3), soit de la formule (4) ne puisse en aucune circonstance, dépasser la pression R' par mètre carré relative à la résistance pratique admise, suivant les cas, pour les matériaux employés.

339. — *Stabilité d'un mur vertical soumis à l'action d'une force extérieure.* — Faisons d'abord l'application des principes précédents à la recherche des conditions de stabilité d'un mur vertical à base rectangulaire qui reçoit une poussée oblique tendant à produire le renversement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On admet ici que la poussée exerce uniformément son action sur une certaine longueur b projetée en B et l'on désigne par F la valeur de cette poussée pour un mètre de longueur du mur, de sorte que la partie de la construction sur laquelle agit la force F est un parallélipipède droit dont la hauteur est h et dont la base a un mètre de longueur et une largeur égale à e.

Equation de la courbe des pressions. — Soit XX′ un joint horizontal quelconque ; P, le poids de la partie du mur située au-dessus de ce joint, et OD la verticale qui passe par le centre de gravité de la construction ; les forces F et P se rencontrent au point C situé sur cette verticale, et leur résultante CK vient couper le joint XX′ en un point E qui est le centre de pression sur ce joint.



Pour que le système soit en équilibre il faut que la résultante des réactions exercées par la partie du mur située au-dessous de XX′ soit égale et directement opposée à la résultante des forces F et P ; d'où il résulte que la somme des moments de F et de P, autour de l'axe projeté en E, doit être nulle, ce qui donne, en remplaçant pour plus de commodité la force F par ses deux composantes $F\cos\beta$ et $F\sin\beta$,

$$(P+F\cos\beta)y - F\sin\beta \times CD = 0 .$$

En désignant par Π le poids du mètre cube de maçonnerie, on a $P = \Pi e z$; puis en remarquant que l'on a aussi

$$CD = OD - OM - MC = z - n - \tfrac{1}{2} e \operatorname{cotg}\beta ,$$

il vient $(\Pi e z + F\cos\beta)y - F\sin\beta\,(z - n - \tfrac{1}{2} e \operatorname{cotg}\beta) = 0$,

d'où
$$y = \frac{(z - n - \frac{1}{2} e \operatorname{cotg}\beta) F\sin\beta}{\Pi e z + F\cos\beta} \qquad (1)$$

Cette équation, pour laquelle l'origine des coordonnées est en O, est le lieu des points E ou la courbe des centres de pression ; c'est une hyperbole équilatère dont la partie inférieure se rapproche du parement extérieur du mur à mesure que l'ordonnée z augmente ; par conséquent c'est à la base du mur que le centre de pression est le plus rapproché du parement extérieur. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que les deux asymptotes de l'hyperbole sont, l'une verticale, l'autre horizontale, et qu'elles ont pour équations

$$y = \frac{F\sin\beta}{\Pi e} , \qquad z = -\frac{F\cos\beta}{\Pi e} .$$

Si la force F est perpendiculaire au mur on a $\beta = 90°$, et l'équation (1) devient

$$y = \frac{(z-n)F}{\Pi e z} ,$$

qui est toujours l'équation d'une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes coordonnés et c'est encore à la base du mur que le centre de pression approche le plus du parement extérieur.

Dans le cas où l'on aurait $\beta > 90°$, la partie supérieure du mur tendrait à être soulevée par la composante verticale de F, et il faudrait alors que le poids de cette partie du mur fût suffisant pour faire équilibre à cette composante.

Lorsque la force F est la seule que l'on ait à considérer avec le poids variable P pour chacune des assises, la résultante de F et de P passe toujours par le même point C en lequel se réduit la ligne des directions telles qu'elle a été définie par Moseley.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Détermination de l'épaisseur du mur. — Lorsque le mur a une hauteur h, la plus grande valeur y' de la variable y est donnée par la relation (1) qui devient alors

$$y' = \frac{(h - n - \frac{1}{2}e\cot g\beta)F\sin\beta}{\Pi eh + F\cos\beta} \; ; \qquad (2)$$

et si l'on y posait $y' = \frac{1}{2}e$, la valeur de e qu'on déduirait de l'équation (2) serait l'épaisseur strictement nécessaire à la stabilité du mur. Mais on conçoit que dans ces conditions le moindre effort ajouté à la force F suffirait pour faire sortir la courbe des pressions du plan de base du mur, lequel pourrait alors être renversé en tournant autour de l'arête projetée en A. Il est donc nécessaire que le centre de pression soit, conformément à la première règle de Moseley, situé à une certaine distance d du point A, dans ce cas en posant

$$\frac{1}{2}e = y' + d \; , \qquad \text{il vient} \qquad y' = \frac{1}{2}e - d,$$

et cette valeur mise dans l'équation (2) donne

$$e = \frac{1}{\Pi h}\left[\Pi dh - F\cos\beta + \sqrt{F^2\cos^2\beta + \Pi^2 d^2 h^2 + 2\Pi h(h-n)F\sin\beta}\right].$$

On peut aussi déterminer l'épaisseur e du mur en s'imposant la condition que la distance d, qu'on nomme module de stabilité, soit une fraction donnée de cette épaisseur; il suffit pour cela de poser $d = me$, m étant une fraction dont la valeur doit toujours être inférieure à $\frac{1}{2}$, mais qui doit être égale à $\frac{1}{3}$ au moins, si l'on veut que la pression totale sur le plan de base soit répartie sur tous les points de cette base; on a alors

$$\frac{1}{2}e = y' + me \; , \qquad \text{d'où} \qquad y' = \frac{1}{2}e - me \; ;$$

cette valeur, portée dans l'équation (2), donne

$$e = \frac{1}{\Pi h(1-2m)}\left[-(1-m)F\cos\beta + \sqrt{(1-m)^2F^2\cos^2\beta + 2\Pi h(1-2m)(h-n)F\sin\beta}\right].$$

Les deux valeurs précédentes de e se simplifient quand on a $\beta = 90°$.

Condition relative à la résistance des matériaux. — Lorsque l'épaisseur d'un mur a été calculée au moyen de l'une des formules précédentes, ou bien lorsque cette épaisseur était donnée à priori, on a constaté que la courbe des pressions passe constamment dans l'intérieur de la maçonnerie et que dans la base d'appui cette courbe est située à une distance d de l'arête projetée en A, il faut encore s'assurer si la pression par mètre carré n'est en aucun point de cette base, supérieure à celle que peuvent supporter les matériaux qui entrent dans la construction.

En désignant par N la composante de la résultante F' des forces P et F qui exercent leur action sur le plan de base du mur, on a

$$N = \Pi eh + F\cos\beta \; ;$$

et si R' représente la pression par mètre carré qu'il ne faut pas dépasser pour les matériaux employés, on doit avoir, en remplaçant c par e dans les formules (3) et (4) du N° 338 :

Pour $d > \frac{1}{3}e$, $\qquad \frac{2N}{e}\left(2 - \frac{3d}{e}\right) \leq R'$, $\qquad$ d'où $\quad N \leq \frac{e^2R'}{2(2e-3d)}$.

Pour $d \leq \frac{1}{3}e$, $\qquad \frac{2N}{3d} \leq R'$, $\qquad$ d'où $\quad N \leq \frac{3dR'}{2}$.

Si ces conditions ne se trouvent pas remplies, on en conclut que l'épaisseur du mur est trop faible;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cette épaisseur serait au contraire trop forte si le maximum de la pression par mètre carré sur la base se trouvait de beaucoup inférieur à la valeur de R'. Dans ces deux cas il faudrait modifier les données du problème et recommencer les calculs.

Condition relative au glissement. — En désignant par γ l'angle de la résultante CK avec la normale menée par le point E au plan XX' on a

$$tg\,\gamma = \frac{KH}{CH} = \frac{F\sin\beta}{\Pi ez + F\cos\beta};$$

et si α est l'angle de frottement sur le plan XX', angle dont la tangente est égale au coefficient de frottement f, c'est-à-dire à 0,76 dans les cas les plus ordinaires, on doit avoir, d'après la seconde loi de Moseley, pour la condition du non glissement sur le plan XX',

$$\gamma < \alpha, \qquad tg\,\gamma < f, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{F\sin\beta}{\Pi ez + F\cos\beta} < f.,$$

expression dans laquelle il suffit de poser $z=h$ pour avoir la condition du non glissement sur le plan de base du mur. Cette relation s'obtient d'ailleurs directement en remarquant que la composante normale et la composante horizontale de la force CK ayant respectivement pour valeurs

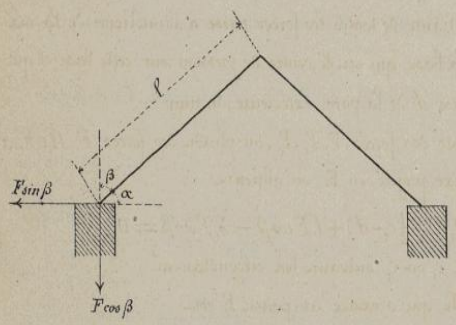
$$F\sin\beta \qquad \text{et} \qquad \Pi ez + F\cos\beta$$

la force qui tend à produire le glissement est $F\sin\beta$, et la résistance à ce mouvement a pour valeur $f(\Pi ez + F\cos\beta)$. Par suite, le glissement devient impossible quand on a

$$F\sin\beta < f(\Pi ez + F\cos\beta); \quad \text{d'où} \quad \frac{F\sin\beta}{\Pi ez + F\cos\beta} < f, \text{ comme précédemment.}$$

Observation sur la stabilité des fondations. — Il ne suffit pas que le mur soit stable dans toute la partie qui dépasse le sol, il faut encore qu'il repose sur une fondation bien établie, et à cet effet il faudra souvent lui donner un empatement suffisant pour que le poids de la construction soit réparti sur une assez grande surface. On connaît en général, d'après la nature des matériaux, la charge par mètre carré qu'il ne faut pas dépasser dans la pratique.

Application des formules précédentes à un mur supportant une toiture. — On a vu au N° 189 que si p est la charge par mètre courant répartie uniformément sur un arbalétrier de longueur l, la charge totale exercée sur le mur est pl, et la poussée horizontale à laquelle résiste l'entrait est $\frac{1}{2} pl\,\mathrm{cotg}\,\alpha$. Si ces deux actions s'exercent uniformément sur une longueur b du mur, leurs valeurs, pour un mètre de longueur, sont $\frac{pl}{b}$ et $\frac{pl\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{2b}$; et si l'on suppose que la ferme soit dépourvue d'entrait, les quantités désignées dans les formules précédentes par $F\cos\beta$ et $F\sin\beta$ seront de la forme

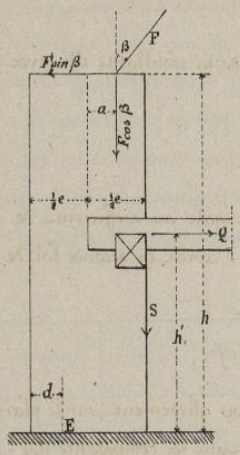


$$F\cos\beta = \frac{pl}{b}, \qquad F\sin\beta = \frac{pl\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{2b} = \frac{pl\,tg\,\beta}{2b}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations précédentes et en y posant au besoin $\Pi = 0$, on aura les formules nécessaires à la détermination complète de la stabilité du mur.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

340. — **Mur portant un plancher.** — Dans un grand nombre de cas, particulièrement dans les constructions ou dans les constructions très-élevées, on se sert utilement des planchers pour relier entre eux les murs de face d'un même bâtiment. Les solives peuvent alors aider à la stabilité en déterminant une traction Q dont il convient de tenir compte ainsi que de la charge S que le plancher fait porter sur le mur. Les diverses parties sont alors assemblées soit en un cours de sablières ou agrafées au mur; et pour assurer la stabilité de la construction il suffit d'exprimer la condition de l'égalité entre les moments des forces F, P, Q, S du système par rapport à l'axe projeté en E en situé à la distance d que l'on veut laisser entre le centre de pression de l'assise inférieure et la face extérieure du mur.



On a ainsi, en admettant que F, P, Q, S représentent les efforts relatifs à un mètre de longueur du mur,

$$Qh' + \Pi e h\left(\tfrac{1}{2}e - d\right) + S(e-d) + \left(a + \tfrac{1}{2}e - d\right) F\cos\beta - hF\sin\beta = 0,$$

relation d'où l'on déduira facilement l'épaisseur e.

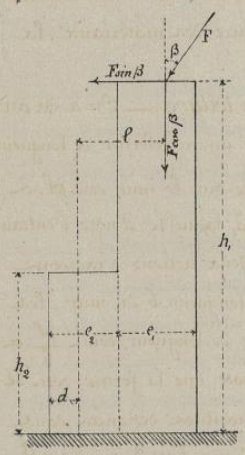
La condition relative à la résistance des matériaux sur l'assise inférieure du mur dépend, comme on sait, de la valeur de la composante normale N au point E et l'on aura en ce point

$$N = \Pi e h + F\cos\beta + S.$$

Enfin, on écrira que le glissement sur l'assise inférieure du mur est impossible en posant la condition

$$F\sin\beta - Q < f(\Pi e h + F\cos\beta + S).$$

341. — **Mur avec contreforts.** — On ajoute quelquefois à la stabilité d'un mur on le renforçant, sur une partie de sa hauteur, par des saillies nommées contreforts, placées à des distances égales les unes des autres et l'on admet que ces contreforts produisent le même effet qu'un contre-mur continu de même hauteur et de même volume. La question est ainsi ramenée à celle de l'examen d'un mur composé de deux épaisseurs e_1 et e_2 sur des hauteurs h_1 et h_2 comme l'indique la figure.



Soient P_1 et P_2 les poids respectifs de chacun de ces murs par mètre courant; pour assurer la stabilité, il suffit d'écrire comme précédemment, la condition nécessaire pour que la résultante de toutes les forces passe à l'intérieur de la maçonnerie en un point E de la base qui est le centre de pression sur cette base et qui doit être situé à une distance d de la paroi extérieure du mur.

En prenant les moments des forces F, P_1, P_2, ou plutôt des forces F, $\Pi_1 e_1 h_1$, $\Pi_2 e_2 h_2$, par rapport à l'axe projeté en E, on obtient

$$\Pi_1 e_1 h_1\left(\tfrac{1}{2}e_1 + e_2 - d\right) + \Pi_2 e_2 h_2\left(\tfrac{1}{2}e_2 - d\right) + lF\cos\beta - h_1 F\sin\beta = 0,$$

équation dont on déduirait e_1 ou e_2 suivant les circonstances.

La composante normale de la résultante totale qui s'exerce au point E est

$$N = \Pi_1 e_1 h_1 + \Pi_2 e_2 h_2 + F\cos\beta;$$

cette valeur servira à déterminer la condition relative à la résistance des matériaux; ensuite la composante horizontale $F\sin\beta$ servira avec la valeur de N à écrire la condition du non glissement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Poussée des terres. — Murs de revêtement.

342. — **Talus naturel des terres.** — Les terres, exposées aux influences atmosphériques, sont sujettes à s'ameublir et à rouler sur les pentes trop escarpées jusqu'à ce que, par l'agglomération des débris, la surface extérieure ait pris une inclinaison définitive que l'on appelle le *talus naturel* des terres, et qui se mesure par l'angle que fait la ligne de plus grande pente avec le plan horizontal. Ce talus des terres est celui que l'on doit nécessairement leur donner dans les travaux de terrassement, si l'on veut être assuré contre les chances d'éboulements ultérieurs. En désignant par α l'angle du talus naturel, qui est aussi l'angle de frottement, on peut, d'après l'observation, former le tableau suivant :

Désignation des substances	α	$f = \operatorname{tg}\alpha$	Désignation des substances	α	$f = \operatorname{tg}\alpha$
Sable fin et sec, ...	31°	0,600	Sable léger, ...	39°	0,810
Sable très-fin, ...	33°	0,649	Terre non cohérente, très-sèche, ...	39°	0,810
Sable de rivière, ...	33°	0,649	Terre ordinaire, sèche et pulvérisée, ..	47°	1,072
Sable fin, bien sec, ...	34°	0,674	Même terre, légèrement humectée, .	54°	1,376
Grès pulvérisé	34°	0,674	Sol très-dense et très-compacte, ...	55°	1,428

Poids moyen du mètre cube pour les terres, les sables et les maçonneries.

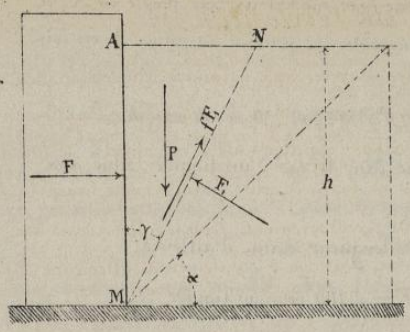
Terre végétale, ...	1400.[K]	Sable terreux	1700.[K]
Terre franche	1500.	Sable pur	1900.
Terre argileuse, ...	1600.	Maçonnerie de moellons, ...	2240
Glaise	1900.	Maçonnerie de briques, ...	1870

Dans les applications, l'angle α du talus naturel devra, autant que possible, être déterminé par une expérience directe, et les valeurs précédentes ne devront être employées que si l'on ne peut recueillir sur place aucune donnée sur la valeur réelle de cet angle. L'examen des localités voisines permettra souvent d'en trouver la valeur par observation.

343. — **Mur vertical de revêtement soutenant un terre-plein horizontal.** — Les murs sont fréquemment employés pour soutenir les terres au-dessus d'un niveau déterminé ; on les nomme alors murs de revêtement ou murs de soutènement. Lorsqu'on veut ainsi maintenir les terres sous un angle plus grand que celui du talus naturel, elles exercent sur le mur qui les retient une poussée dont il importe de connaître la valeur ; et pour cela on admet que la masse de terre tend à se diviser suivant un plan incliné en glissant sur ce plan et par suite à entraîner le mur dans son mouvement si celui-ci n'offre pas une résistance suffisante pour s'opposer à ce mouvement.

Poussée horizontale du terre-plein. — Soit MN le plan suivant lequel on suppose que le bloc indéfini AMN est sur le point de se détacher et γ l'angle de ce plan avec la verticale AN. Les forces qui sollicitent le prisme AMN sont : 1° — Le poids P de ce prisme. 2° — La réaction normale F du mur, égale et directement opposée à la pression exercée par le prisme AMN sur ce mur.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



3° La réaction normale F_1 de la partie restante du massif, réaction égale et directement opposée à la pression du prisme sur cette partie restante. 4° Enfin le frottement fF_1 développé dans le plan MN au contact du prisme AMN et du massif restant.

Les forces P, F, F_1 et fF_1 projetées successivement sur la direction MN et sur une direction perpendiculaire donnent pour l'équilibre du système :

$$P\cos\gamma - F\sin\gamma - fF_1 = 0, \qquad P\sin\gamma + F\cos\gamma - F_1 = 0 .$$

En éliminant F_1 entre ces deux relations et en posant $f = \operatorname{tg}\alpha$, il vient

$$F = \frac{P(\cos\gamma - f\sin\gamma)}{\sin\gamma + f\cos\gamma} = P\operatorname{cotg}(\alpha+\gamma) .$$

Si Π_1 est le poids d'un mètre cube de terre, le poids P du massif AMN, pour un mètre de profondeur, est

$$P = \Pi_1 \times \tfrac{1}{2} AN \times AM = \tfrac{1}{2}\Pi_1 h^2 \operatorname{tg}\gamma , \qquad \text{et par suite} \qquad F = \tfrac{1}{2}\Pi_1 h^2 \operatorname{tg}\gamma \operatorname{cotg}(\alpha+\gamma) .$$

Détermination du prisme de plus grande poussée. — La formule précédente donnerait la valeur de F dans chaque cas particulier si l'on connaissait la valeur correspondante de γ ; mais il n'en est pas ainsi et lors même que la séparation des terres aurait lieu suivant un plan comme on l'a admis précédemment, la situation de ce plan dépendrait de circonstances diverses relatives à l'état des terres et qui ne peuvent être déterminées, même approximativement. On voit d'ailleurs que si l'angle γ augmente, le volume et par conséquent le poids de la terre qui exerce la pression F va aussi en augmentant, et l'on serait conduit à admettre que la poussée devient alors plus grande si l'augmentation de l'angle γ ne diminuait en même temps la tendance au glissement du bloc de terre sur le plan de séparation. L'hypothèse la plus convenable consiste alors à adopter, comme l'a fait Prony, l'angle qui correspondrait à la plus grande poussée des terres, c'est-à-dire celui pour lequel F serait un maximum.

A cet effet, on peut écrire

$$\operatorname{tg}\gamma \operatorname{cotg}(\alpha+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}(\alpha+\gamma)} = \frac{\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma)}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma} , \qquad (1)$$

et la dérivée du second membre, égalée à zéro, donne

$$\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma)(1-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma) - \operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma)}{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma)^2} = 0 , \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} .$$

Le radical doit être pris avec le signe + seulement, l'angle γ devant nécessairement être inférieur à 90°. La valeur de $\operatorname{tg}\gamma$, mise dans le second membre de (1), donne successivement

$$\operatorname{tg}\gamma \operatorname{cotg}(\alpha+\gamma) = \left(-\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}\right)^2 = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) ;$$

par suite, le maximum de F a pour expression

$$F = \tfrac{1}{2}\Pi_1 h^2 \operatorname{tg}^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) ; \qquad (2)$$

et l'on voit ainsi que l'angle $45^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ qui correspond au prisme de plus grande poussée est la moitié de l'angle complémentaire de α.

Centre de poussée des terres. — La somme des poussées horizontales sur une hauteur x, comptée à partir du point A, étant égale à $\frac{1}{2}\Pi_1 x^2 \operatorname{tg}^2(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)$, la poussée sur l'élément dx

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

est $\Pi_1 x\,dx\,tg^2(45°-\frac{1}{2}\alpha)$ et le moment de cette poussée élémentaire, par rapport à l'axe projeté en A, a pour valeur $\Pi_1 x^2\,dx\,tg^2(45°-\frac{1}{2}\alpha)$; donc, si h' est la distance du centre de poussée au point A, on doit avoir

$$\tfrac{1}{2}\Pi_1 h^2 tg^2(45°-\tfrac{1}{2}\alpha)\times h' = \Pi_1 tg^2(45°-\tfrac{1}{2}\alpha)\int_0^h x^2\,dx = \tfrac{1}{3}\Pi_1 h^3 tg^2(45°-\tfrac{1}{2}\alpha),\quad \text{d'où}\quad h'=\tfrac{2}{3}h\ ;$$

ce qui montre que le centre de poussée des terres est, comme dans le cas d'un liquide, situé aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur h à partir du niveau supérieur du terre-plein.

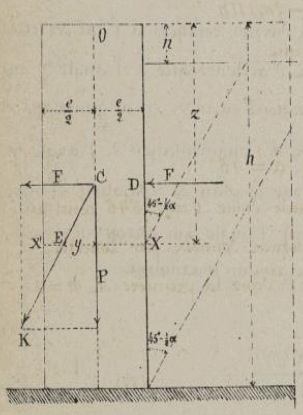
La poussée totale sur la hauteur h, et pour un mètre de longueur, étant d'ailleurs,

$$F=\tfrac{1}{2}\Pi_1 h^2 tg^2(45°-\tfrac{1}{2}\alpha)\ \text{pour un terre-plein.}\quad \text{et}\quad F=\tfrac{1}{2}\Pi h^2\ \text{pour un liquide},$$

on doit remarquer que bien que Π_1 soit plus grand que Π dans tous les cas où il s'agit d'une pression d'eau, la seconde expression est plus grande que la première eu égard au frottement f dont la valeur est $tg\,\alpha$ et qu'ainsi la poussée de l'eau qui s'introduirait entre le mur et le terrain aurait toujours pour effet d'augmenter la poussée dans une proportion notable.

Équation de la courbe des pressions. — La poussée F du terre-plein sur la portion du mur située au-dessus d'une assise quelconque XX' a pour expression

$$F=\tfrac{1}{2}\Pi_1 (z-n)^2 tg^2(45°-\tfrac{1}{2}\alpha),$$



et le centre de cette poussée est situé en un point D pour lequel on a $Dx=\frac{1}{3}(z-n)$; de sorte que le centre de pression sur le plan XX' est le point E de rencontre de ce plan avec la résultante de deux forces dont l'une est la force F et l'autre le poids Πez de la portion du mur au-dessus de XX'. Les moments de ces deux forces, par rapport à l'axe projeté en E, donnent pour l'équation de la courbe des pressions

$$\Pi ezy-\tfrac{1}{2}\Pi_1 (z-n)^2 tg^2(45°-\tfrac{1}{2}\alpha)\times\tfrac{1}{3}(z-n)=0,$$

d'où

$$y=\frac{\Pi_1 (z-n)^3 tg^2(45°-\frac{1}{2}\alpha)}{6\Pi ez}\ ; \qquad (3)$$

on voit que y augmente en même temps que z et qu'ainsi le centre de pression E s'éloigne de l'axe du mur à mesure que l'assise considérée se rapproche de la base, de sorte que c'est pour cette base que la tendance à la rotation est la plus grande.

Dans le cas où l'on a $n=0$ la valeur de F et celle de y se réduisent à

$$F=\tfrac{1}{2}\Pi_1 tg^2(45°-\tfrac{1}{2}\alpha)\,z^2,\qquad y=\frac{\Pi_1 tg^2(45°-\frac{1}{2}\alpha)}{6\Pi e}\,z^2,$$

et la dernière est une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe des y.

Équation de la courbe des directions. — On peut, pour plus de simplicité dans les calculs, considérer seulement le cas où l'on a $n=0$. D'après ce qui a été dit au N° 327, la courbe des directions est le lieu des intersections successives des résultantes telles que CK. Or, cette droite CK, passant par le point C dont les coordonnées sont $y'=0$ et $z'=\frac{2}{3}z$, a pour équation

$$y=m(z-z'),$$

et le coefficient d'inclinaison m de cette droite a pour expression

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$m = \frac{\Pi_1 tg^2(45° - \frac{1}{2}\alpha)}{2\Pi e}\, z = \frac{3\Pi_1 tg^2(45° - \frac{1}{2}\alpha)}{4\Pi e}\, z' = kz'$$

d'où il résulte $y = kz'(z - z')$;

La dérivée prise par rapport à z' et égalée à zéro donne

$$kz - 2kz' = 0 \qquad \text{d'où} \qquad z' = \tfrac{1}{2} z \ ;$$

en portant cette valeur de z' dans l'expression de y il vient, pour la courbe des directions,

$$y = \tfrac{1}{4} k z^2$$

qui est encore une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe des y.

Détermination de l'épaisseur du mur. — Si l'on pose $z = h$ dans l'équation (3) et qu'on y remplace, comme au N° 339, y par $\frac{1}{2}e - d$, il vient

$$\frac{1}{2}e - d = \frac{\Pi_1 (h-n)^3 tg^2(45° - \frac{1}{2}\alpha)}{6\Pi e h}, \qquad \text{d'où} \qquad e = \frac{1}{3\Pi h}\left[3\Pi h d + \sqrt{9\Pi^2 h^2 d^2 + 3\Pi\Pi_1 h (h-n)^3 tg^2(45° - \tfrac{1}{2}\alpha)}\right]. \quad (4)$$

Si l'on veut que la surépaisseur d soit une fraction donnée m de l'épaisseur e, il faut poser $d = me$, et il vient alors

$$\frac{1}{2}e - me = \frac{\Pi_1 (h-n)^3 tg^2(45° - \frac{1}{2}\alpha)}{6\Pi e h}, \qquad \text{d'où} \qquad e = \sqrt{\frac{\Pi_1 (h-n)^3 tg^2(45° - \frac{1}{2}\alpha)}{3(1-2m)\Pi h}}. \quad (5)$$

En posant $n = 0$ et $m = \frac{1}{4}$ dans cette dernière formule il vient

$$e = h\, tg(45° - \tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt{\frac{2\Pi_1}{3\Pi}}$$

Soit par exemple $h = 6^m$, $\Pi_1 = 1500$ kilog., $\Pi = 2250$ kilog. et $\alpha = 45°$

On a $45° - \frac{1}{2}\alpha = 22°30'$, $tg(45° - \frac{1}{2}\alpha) = 0{,}414$, et la formule donne $e = 1^m{,}646$ résultat sensiblement égal à celui qu'on déduirait des tables de coefficients pratiques données par Poncelet.

Quand on pose $n = 0$, dans les formules (4) et (5), puis $d = 0$ dans la première et $m = 0$ dans la seconde, les deux valeurs de e se réduisent à

$$e = h\, tg(45° - \tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt{\frac{\Pi_1}{3\Pi}}, \quad (6)$$

formule qui donnerait la valeur de l'épaisseur strictement nécessaire à la stabilité du mur dans l'hypothèse $n = 0$.

Condition relative à la résistance des matériaux. — En procédant comme au N° 339, et en remarquant que la composante normale de la résultante des pressions sur l'assise inférieure du mur est ici $N = \Pi e h$, on devra avoir :

Pour $d > \frac{1}{3}e$, $\quad \frac{2N}{e}\left(2 - \frac{3d}{e}\right) \leq R'$, $\quad$ d'où $\quad N \leq \frac{e^2 R'}{2(2e - 3d)}$.

Pour $d \leq \frac{1}{3}e$, $\quad \frac{2N}{3d} \leq R'$, $\quad$ d'où $\quad N \leq \frac{3dR'}{2}$.

Condition relative au glissement. — On pourrait pour résoudre la question conformément aux indications de Moseley, faire intervenir la courbe des directions, mais il est plus simple de remarquer que la force qui tend à faire glisser le mur sur sa base est la composante horizontale $\frac{1}{2}\Pi_1 (h-n)^2 tg^2(45 - \frac{1}{2}\alpha)$, tandis que le frottement qui s'oppose à ce mouvement a pour expression $f\Pi e h$, d'où

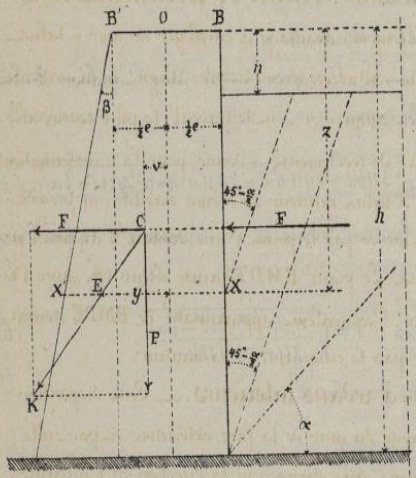
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

il résulte que le glissement devient impossible quand on a

$$\tfrac{1}{2}\Pi(h-n)^2 tg^2(45°-\tfrac{1}{2}\alpha) < f\Pi eh .$$

344. — *Mur de revêtement à talus extérieur.* — Il est avantageux de donner aux murs de revêtement un talus extérieur qui, avec une moindre largeur au sommet, permette de résister plus efficacement à la rotation.

En désignant par P le poids de la portion du mur située au-dessus d'une assise quelconque XX' et par F la poussée correspondante des terres, on a



$$F = \tfrac{1}{2}\Pi_1(z-n)^2 tg^2(45°-\tfrac{1}{2}\alpha), \qquad P = \Pi(ez+\tfrac{1}{2}z^2 tg\beta),$$

et la distance v du centre de gravité du poids P à la verticale qui passe par le milieu de BB' est donnée par la relation

$$\tfrac{1}{2}\Pi z^2 tg\beta\left(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{3}z tg\beta\right) = vP$$

d'où

$$v = \frac{\Pi\left(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{3}z tg\beta\right)z^2 tg\beta}{2P}.$$

Equation de la courbe des pressions. — La résultante CK des forces F et P rencontre l'assise XX' en un point E, qui est le centre de pression sur cette assise; et en prenant, comme précédemment, les moments des forces P et F par rapport à l'axe projeté en E, il vient

$$P(y-v) - F'\times\tfrac{1}{3}(z-n) = 0 ,$$

d'où, en remplaçant v, F et P par leurs valeurs,

$$y = \frac{3\Pi\left(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{3}z tg\beta\right)z^2 tg\beta + \Pi_1(z-n)^3 tg^2(45°-\tfrac{1}{2}\alpha)}{3\Pi(2ez+z^2 tg\beta)}, \qquad (1)$$

Calcul de l'épaisseur du mur. — En posant $z=h$ dans l'équation et en y remplaçant y par $\tfrac{1}{2}e+h tg\beta-d$, on en déduit

$$e = \frac{1}{3\Pi h}\left[-3\Pi h(h tg\beta-d)+\sqrt{9\Pi^2h^2(h tg\beta-d)^2-3\Pi h\left(2\Pi h^3 tg^2\beta-3\Pi d h^2 tg\beta-\Pi_1(h-n)^3 tg^2(45°-\tfrac{1}{2}\alpha)\right)}\right] \qquad (2)$$

Cette valeur étant l'épaisseur au sommet, l'épaisseur à la base sera alors $e+h tg\beta$

Si l'on veut que la surépaisseur d à la base soit une fraction donnée m de cette même épaisseur à la base il faut remplacer, dans (1), z par h et y par $\tfrac{1}{2}e+h tg\beta-m(e+h tg\beta)$, ce qui donne

$$e = \frac{1}{6\Pi h(1-2m)}\left[-3\Pi h^2 tg\beta(2-3m)+\sqrt{9\Pi^2h^4 tg^2\beta(2-3m)^2-12\Pi h(1-2m)\left(\Pi h^3 tg^2\beta(2-3m)-\Pi_1(h-n)^3 tg^2(45°-\tfrac{1}{2}\alpha)\right)}\right]. \qquad (3)$$

En posant $\beta=0$ dans les formules (1), (2) et (3) on retrouve les valeurs (3), (4) et (5) du N° 343

Enfin en posant $n=0$ dans les formules (2) et (3), puis $d=0$ dans la première et $m=0$ dans la seconde, les valeurs de e se réduisent à

$$e = h\left[-tg\beta+\sqrt{\frac{\Pi tg^2\beta+\Pi_1 tg^2(45°-\tfrac{1}{2}\alpha)}{3\Pi}}\right],$$

formule qui donne la valeur strictement nécessaire à la stabilité dans l'hypothèse $n=0$

Condition relative à la résistance des matériaux. — La composante normale de la

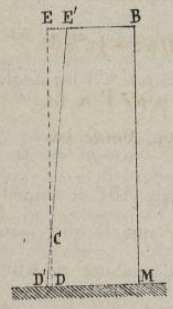
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

résultante des pressions sur l'assise inférieure du mur étant $N = \Pi(eh + \frac{1}{2}h^2 tg\beta)$, on doit avoir

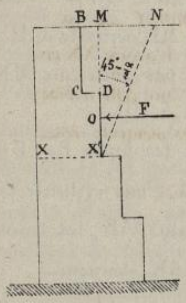
$$\frac{2N}{c}\left(2 - \frac{3d}{c}\right) \leq R', \text{ pour } d > \frac{1}{3}c, \quad \text{et} \quad \frac{2N}{3d} \leq R', \text{ pour } d \leq \frac{1}{3}c.$$

Condition relative au glissement. — On voit immédiatement que le glissement ne peut se produire quand on a

$$\frac{1}{2}\Pi_1(h-n)^2 tg^2(45° - \tfrac{1}{2}\alpha) < f\Pi(eh + \tfrac{1}{2}h^2 tg\beta).$$



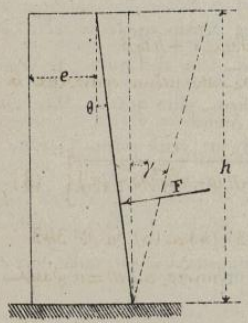
345. — **Transformation d'un mur vertical de revêtement en un mur à talus extérieur.** — Il y a toujours avantage à employer un mur à talus extérieur pour lequel le centre de gravité est nécessairement plus éloigné de la verticale de l'arête extérieure de la base. Celui auquel on doit le travail le plus considérable qui ait été fait sur la stabilité des murs de revêtement, a donné, pour la transformation d'un mur vertical $BMDE$ en un mur à talus extérieur de même stabilité, un procédé qui consiste à prendre $CD' = \frac{1}{9}ED$, et à mener par le point C une droite DE' ayant l'inclinaison que l'on veut donner au talus. Le profil $BMD'E'$ ainsi obtenu est, avec l'économie de matière qu'indique la figure, l'équivalent approximatif de $BMDE$, toutes les fois que la base du talus n'excède pas le cinquième de la hauteur.



346. — **Murs de revêtement à redans intérieurs.** — Cette disposition a pour effet d'éloigner le centre de gravité du mur de la face extérieure, et par suite d'en éloigner aussi la courbe des pressions sans changer ni la direction ni l'intensité des poussées. Le prisme rectangulaire de terre $BMDC$ se trouvant entièrement supporté par la face supérieure CD du premier redan, la poussée qui s'exerce au-dessus de XX', par exemple, est seulement celle du prisme MNX', et son point d'application est en O, comme précédemment, au tiers de la hauteur MX'.

347. — **Mur de revêtement à talus intérieur.** — Si l'on applique à un prisme de terre terminé par un mur à talus intérieur, les considérations qui ont été développées pour un prisme terminé par un mur vertical, on trouve que le prisme de plus grande poussée est celui dont le plan de rupture fait avec la verticale un angle $\gamma = (45° - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\alpha)$, et pour lequel le maximum de la poussée correspondante est

$$F = \frac{\Pi_1 h^2}{2\cos\theta} \times \frac{\sin^2(45° + \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin^2(45° + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\alpha)}$$



Pour $\theta = 0$ il vient $F = \frac{1}{2}\Pi_1 h^2 tg^2(45° - \frac{1}{2}\alpha)$ comme au N° 343.

La poussée inclinée F peut être remplacée par sa composante horizontale $F\cos\theta$ et par sa composante verticale $F\sin\theta$, ce qui donne

$$F\cos\theta = \frac{1}{2}\Pi_1 h^2 \frac{\sin^2(45° + \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin^2(45° + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\alpha)}, \qquad F\sin\theta = \frac{1}{2}\Pi_1 h^2 tg\theta \frac{\sin^2(45° + \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin^2(45° + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\alpha)}.$$

Cette dernière force s'ajoute au poids P du mur et le centre de pression sur la base est l'intersection de cette base avec la résultante des deux forces

$$F\cos\theta \quad \text{et} \quad P + F\sin\theta = \Pi_1 h(e + \tfrac{1}{2}h tg\theta) + F\sin\theta.$$

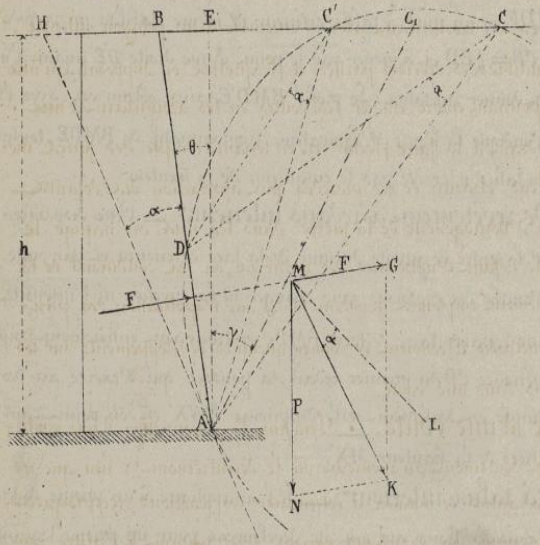
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il serait facile de voir que l'emploi d'un talus intérieur conduit à une économie dans la construction, tout en conservant au mur une stabilité égale à celle d'un mur vertical.

Les mêmes considérations seraient d'ailleurs applicables si l'on avait en même temps un talus extérieur dont l'inclinaison sur la verticale serait θ'; la valeur de F étant toujours la même, le poids P du mur serait alors

$$P = \Pi h \left(e + \tfrac{1}{2} h \operatorname{tg}\theta + \tfrac{1}{2} h \operatorname{tg}\theta'\right).$$

Détermination graphique du prisme de plus grande poussée. — On peut, par des considérations de pure géométrie, démontrer que la valeur $\gamma = 45° - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\alpha$ est celle qui correspond au prisme de plus grande poussée dans le cas d'un talus intérieur. Soit AC un plan de rupture quelconque autre que celui qui correspond au prisme de plus grande poussée, et soit CD une droite faisant avec CA un angle α égal à celui du talus naturel des terres.



La réaction normale F du mur et le poids P du prisme de terre ABC se rencontrent en un point M; et pour que le glissement soit sur le point de se produire suivant AC il faut que la résultante MK de F et de P fasse avec la droite ML, normale à AC un angle égal à α, et par suite que MK soit perpendiculaire à CD.

Si l'on représente les forces P et F par les droites MN et MG, l'une verticale, l'autre perpendiculaire au talus AB, les triangles semblables BDC, MGK donnent

$$BD = \frac{BC \times F}{P} = \frac{F \times BC}{\frac{1}{2}\Pi h \times BC} = \frac{2F}{\Pi h},$$

ce qui montre que le maximum de F correspond au maximum de BD. Si l'on décrit sur AD un segment capable de l'angle donné α, la circonférence qui passe par les trois points A, D, C, vient couper BC en un second point C' qu'il suffit de joindre au point A pour avoir un second prisme BAC' dont la poussée serait égale à celle du prisme BAC. Or, il est facile de voir que si les points C et C' se rapprochent l'un de l'autre, le point D se rapproche en même temps du point A, et par suite la longueur BD devient plus grande. Par conséquent le maximum de BD a lieu lorsque les points C et C' se confondent en un seul point C_1 situé sur BC, auquel cas la circonférence devient tangente en C_1 à la droite BC; mais cette circonférence est aussi tangente à la droite AH qui fait avec AB un angle égal à l'angle donné α, donc le plan de rupture AC_1 qui correspond au maximum de F est celui pour lequel la circonférence est tangente à la fois aux deux droites HA et HB; et par suite on obtient le point C_1 en prenant $HC_1 = HA$.

On a maintenant $HAB = \alpha$, $HBA = 90° + \theta$ $AHB = 180° - \alpha - (90° + \theta) = 90° - \theta - \alpha$,

puis $AC_1H = HAC_1 = \frac{1}{2}\left[180° - (90° - \theta - \alpha)\right] = 45° + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\alpha$,

et enfin $EAC_1 = \gamma = 90° - (45° + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\alpha) = 45° - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\alpha$.

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Stabilité des Voûtes.

348. — **Notions préliminaires.** — Les règles posées par Moseley sur la stabilité des constructions supposent la connaissance complète des forces qui agissent dans l'un quelconque des plans de joint; mais il n'en est plus ainsi lorsqu'il s'agit d'une voûte fermée dont aucune des faces de joint n'est soumise à l'action de forces extérieures qui soient toutes déterminées.

Avant Coulomb on avait déterminé les dimensions des maçonneries d'après l'observation des constructions existantes et en considérant la clef ou les voussoirs voisins comme pouvant glisser entre les plans de joints adjacents, à la manière d'un coin, hypothèse qui conduisait déjà à admettre que la voûte devrait tourner autour d'une arête de l'extrados pour que le coin pût se déplacer. Plus tard on a considéré les voûtes comme présentant trois sections dangereuses : l'une au sommet, l'autre à la naissance et la troisième à l'un des joints intermédiaires; en assimilant alors l'ensemble à un polygone articulé, on cherchait à déterminer les conditions d'équilibre des diverses parties en lesquelles on supposait qu'une voûte pouvait ainsi se fractionner. Enfin on pourrait encore étudier les voûtes en les assimilant à une poutre courbe soumise à une charge qui tendrait à la faire fléchir et en tenant compte des forces moléculaires développées par la déformation. Mais chacun de ces procédés fait abstraction des défauts d'exécution des plans de joint et des défauts d'homogénéité de la pierre : dans les uns on néglige le frottement; dans les autres, l'adhérence ou le défaut d'adhérence des matières, on les conditions de la répartition des pressions. Les méthodes actuellement employées reposent toutes sur l'application des principes de Moseley; mais, avant d'indiquer ces méthodes, il convient de donner quelques développements sur les conditions de stabilité et la courbe des pressions dans une voûte.

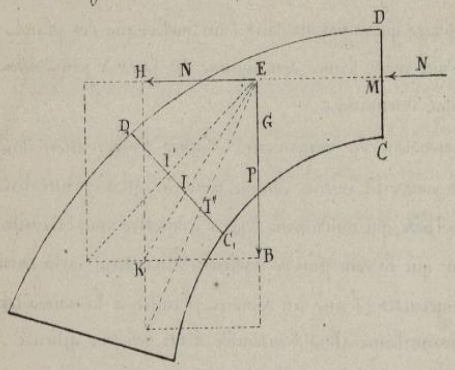
349. — **Conditions de stabilité d'une voûte.** — Pendant la construction d'une voûte, les voussoirs reposent sur un cintre, et c'est seulement au moment où le décintrement a lieu que ces voussoirs se trouvent pressés les uns contre les autres de manière à déterminer des réactions réciproques plus ou moins grandes et dont les intensités comme les directions varient d'un instant à l'autre pendant cette période décisive du travail. Si les maçonneries ont été bien exécutées, si le décintrement a lieu au moment convenable et avec toutes les précautions nécessaires, cet effet variable des réactions successives, au moment où la voûte est livrée à elle-même, se produit sans qu'il y ait extérieurement de variations notables dans la forme et la disposition des voussoirs, et la stabilité de la voûte est assurée si le mouvement s'arrête aussitôt que toutes les conditions indiquées au N° 337 se trouvent satisfaites.

350. — **Considérations générales sur les centres et courbes de pression dans une voûte.** — Etant donné le profil d'une voûte à l'intrados et à l'extrados ainsi que la surcharge que doit porter cette voûte, la détermination de la courbe des pressions exige que l'on connaisse au moins, pour un joint donné, le point d'application, la direction et l'intensité de la résultante des pressions sur ce joint, et en outre, l'ensemble et la direction des forces extérieures qui sollicitent la voûte.

S'il s'agit par exemple, comme c'est le cas le plus ordinaire, d'une voûte symétrique et symétriquement chargée par rapport au plan vertical mené suivant CD perpendiculairement au plan de tête, il est évident par le fait même de la symétrie, que la résultante N des poussées, sur le joint hypothétique CD doit être horizontale et perpendiculaire à la face de ce joint.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour obtenir un point de la courbe des pressions lorsque la force N est donnée ainsi que son point d'application M, il faut considérer un second joint C_1D_1, déterminer le poids P et le centre de gravité G de la portion de voûte comprise entre le nouveau plan de joint et la clef, mener la verticale GE passant par le point G, puis chercher la résultante EK des deux forces N et P, appliquées au point E. Le point I où cette résultante coupe la face de joint est le point cherché de la courbe de pression, ou ce qui revient au même, le centre de pression sur le joint C_1D_1.



Si P restant constant la poussée N augmente sans que sa direction cesse de passer par le point M, le côté EH du rectangle construit sur les deux forces devenant plus grand tandis que le côté EB reste constant, le point I se trouve transporté en I', ce qui revient à dire, eu égard à la forme de la voûte, que la courbe de pression se relève et s'approche de l'extrados. Si au contraire la poussée N diminue, la courbe s'abaisse et se rapproche de l'intrados. On est ainsi conduit à considérer spécialement, pour chaque point tel que M, une *courbe de plus grande poussée* et une *courbe de moindre poussée*.

Si, sans changer ni le profil ni la position du centre de gravité, le poids P venait à augmenter, le point I viendrait en I'' en se rapprochant de l'intrados, comme dans le cas où la poussée diminue.

Si P et N augmentaient ou diminuaient dans le même rapport la courbe de pression resterait la même, les côtés EB et EH du rectangle EBKH conservant entre eux le même rapport.

Enfin il est facile de voir que le point I se rapprochera soit de l'extrados soit de l'intrados, si sans changer les intensités de N et de P, le point M se rapprochait soit du point D, soit du point C.

En faisant ainsi varier les forces N et P ainsi que le point M autant que le permettent les données de la construction, on obtient autant de courbes de pression qu'on le veut, et l'on peut s'assurer si quelques-unes de ces courbes sont entièrement comprises dans le massif de maçonnerie.

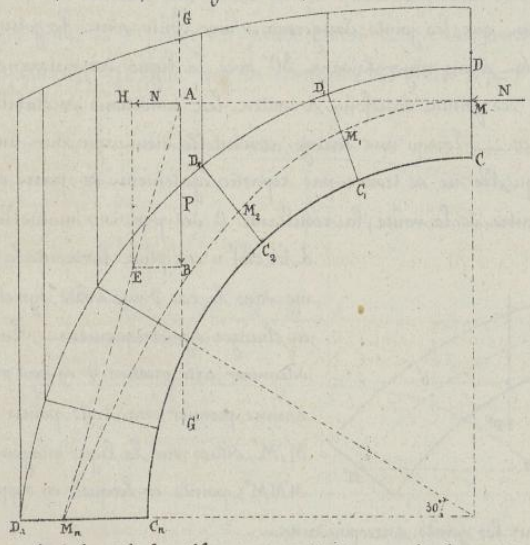
351. — *Vérification de la stabilité d'une voûte.* — Pour qu'une voûte soit stable il faut que son épaisseur soit plus grande que celle qui convient à l'état d'équilibre mathématique, la courbe des pressions peut alors y prendre une infinité de positions dont chacune dépendra soit du tassement des matériaux, soit de la surcharge accidentelle de la voûte, et l'on conçoit en se reportant aux considérations du N° précédent qu'il doit y avoir une courbe de plus grande poussée et une courbe de moindre poussée entre lesquelles doit se trouver comprise celle qui devra se réaliser dans une construction pour que toutes les conditions de stabilité indiquées par Moseley soient toujours satisfaites.

Beaucoup de travaux analytiques ont été publiés sur la stabilité des voûtes; les plus importants sont ceux de Lamé et Clapeyron en 1823, de M^r^ Yvon-Villarceau en 1851 et de M^r^ Carvallo en 1882; ils peuvent être consultés avec intérêt; mais les études de Méry, publiées en 1840 sur cette même question, l'ont conduit à rechercher la position que peut prendre la courbe des pressions dans un grand nombre de voûtes existantes, et il en a déduit une méthode de vérification purement graphique dont il a constaté la sûreté

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par de nombreuses applications. Cette méthode consiste à rechercher, par des essais successifs, s'il existe, dans une voûte donnée, une ou plusieurs courbes hypothétiques satisfaisant à toutes les conditions de stabilité de la construction. De son côté, M. Durand-Claye a exposé récemment une méthode de vérification qui évite les tâtonnements inhérents à celle de Méry et qui conduit directement à toutes les solutions du problème en éliminant toutes les combinaisons qui ne pourraient convenir à la stabilité de la voûte. Nous allons exposer successivement ces deux méthodes.

352. — **Méthode de Méry.** — On commence par déterminer le poids P ainsi que la verticale GG' du centre de gravité de la demi-voûte et de sa surcharge. On prend ensuite un point M sur le joint vertical CD, et un point M_n sur le joint C_nD_n. L'horizontale menée par le point M rencontre la verticale GG' en un point A que l'on joint au point M_n, et après avoir pris, sur GG', à partir du point A, une longueur AB proportionnelle au poids P de la demi-voûte, on mène, par le point B, une horizontale qui rencontre AM_n au point E. La droite EB, ou son égale AH, représente alors la pression résultante en normale N qui correspond au point M; et la droite AE est la résultante oblique qui correspond au point M_n, résultante dont la composante N_n, normale au joint C_nD_n, est évidemment égale à P. Cela fait, et avant d'aller plus loin, il faut s'assurer, au moyen des formules (3) et (4) du N° 338, si les longueurs MD et M_nD_n sont suffisantes pour que les pressions aux points D et D_n ne dépassent pas la limite R par mètre carré, à laquelle doivent résister les matériaux, limite que l'on fixe habituellement au dixième de la charge de rupture.



Lorsque cette première condition sera remplie, on prend un certain nombre de joints tels que C_1D_1, C_2D_2, ... $C_{n-1}D_{n-1}$; puis en tenant compte de la surcharge qu'on suppose divisée par des plans verticaux passant par les arêtes de l'extrados, on détermine le poids et la verticale du centre de gravité du premier voussoir, de l'ensemble des deux premiers voussoirs, de l'ensemble des trois premiers, et ainsi de suite. La pression normale N sur le premier joint étant connue, on procède alors comme au N° 337 et l'on obtient les centres de pression M_1, M_2, ... M_{n-1} ainsi que les composantes normales N_1, N_2, ... N_{n-1} des pressions résultantes qui s'exercent en ces points, puis on s'assure, comme précédemment, si la pression par mètre carré sur les arêtes les plus fatiguées des joints considérés ne dépasse pas la limite R.

Comme il faut aussi qu'il ne puisse se produire aucun glissement entre deux voussoirs quelconques, on s'assure, pour chacun des joints, et spécialement pour le joint de naissance, si l'angle α formé par la résultante des pressions sur ce joint et par la normale correspondante satisfait à la condition $\operatorname{tg}\alpha < f$, le coefficient f étant, comme on l'a dit précédemment, égal à 0,76 environ.

Si toutes les conditions précédentes ne se trouvent pas remplies, on modifie la position des points M et M_n en se guidant sur les considérations présentées au N° 350 et l'on recommence l'épure en se servant des poids déjà calculés ainsi que des verticales relatives aux centres de gravité correspondants.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

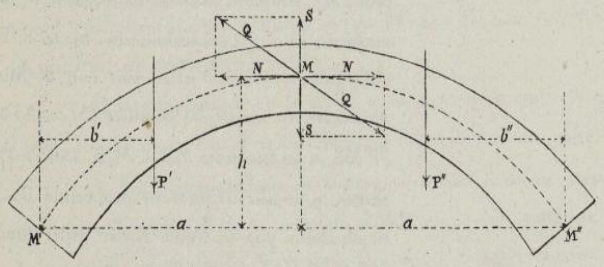
Si aucune courbe de pression ne peut être tracée dans les conditions indiquées ci-dans l'hypothèse de matériaux dont la résistance est donnée, on modifie quelques-unes des données de la question et l'on fait une nouvelle épure.

Lorsque la voûte repose sur des piédroits, la courbe des pressions doit être continuée jusqu'à la base de cette partie de la construction dont le poids se combine alors avec celui de la demi-voûte, et toutes les conditions de stabilité doivent y être également satisfaites.

Il est facile de concevoir, d'après tout ce qui a été dit précédemment, que la disposition la plus favorable pour une voûte est celle dans laquelle on pourrait tracer une courbe de pression telle que la pression limite sur l'arête la plus fatiguée de chaque joint soit la même pour tous les joints de la voûte et pour les assises des piédroits.

Il convient de remarquer, en terminant, que les joints dangereux d'une voûte sont : le joint de naissance, le joint de clef et le joint correspondant à un rayon faisant 30° avec la ligne des naissances, et l'on devra particulièrement s'assurer que ces joints satisfont à toutes les conditions de stabilité.

Cas d'une charge non symétrique. — Lorsqu'une charge accidentelle vient agir sur une portion déterminée d'une voûte symétrique et qu'elle ne se trouve pas répartie également de part et d'autre du plan vertical qui passe par le centre de la voûte, la résultante Q des pressions mutuelles à la clef n'est plus horizontale comme dans le cas d'une voûte symétrique et chargée symétriquement. Pour déterminer cette pression Q on peut prendre comme premier essai trois points M', M, M'', situés sur la ligne moyenne M'MM'', points en lesquels on suppose que s'exercent les résultantes des pressions sur les joints correspondants.



Si l'on remplace la force Q par deux composantes N et S, l'une horizontale et l'autre verticale, la demi-voûte M'M est en équilibre sous l'action des réactions N et S dues au solide MM'', de la réaction exercée par l'appui au point M' et de la force P' égale au poids de la demi-voûte et de sa surcharge, ce qui donne, en prenant les moments autour de l'axe projeté en M'

$$P'b' - Nh - Sa = 0 \quad . \qquad (1)$$

On trouvera de même pour l'équilibre de la demi-voûte MM'', en prenant les moments autour de l'axe projeté en M'',

$$Nh - P''b'' - Sa = 0 \quad . \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$N = \frac{P'b' + P''b''}{2h}, \qquad S = \frac{P'b' - P''b''}{2a}, \quad \text{d'où} \quad Q = \sqrt{N^2 + S^2} \quad .$$

Pour $P'b' = P''b''$, on aurait $S = 0$, et la résultante Q, égale alors à N, serait horizontale comme dans le cas d'une charge symétriquement répartie sur la voûte.

L'intensité et la direction de la force Q étant connues, on pourra tracer une première courbe de pression et s'assurer si elle satisfait aux conditions de stabilité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les valeurs N et S dépendent évidemment des positions de M', M et M'' sur leurs joints respectifs, positions qui déterminent les valeurs de b', b'', a et h ; par suite N et S changent de valeur quand on déplace les points M', M et M''; mais si ces déplacements sont très-faibles, les variations qui en résultent pour N et S sont elles-mêmes très faibles et peuvent être négligées dans un nouvel essai d'une courbe de pression.

353. — Méthode de M^r Durand-Claye. — Cette méthode repose sur la solution des questions suivantes :

1^ère Question. — *Déterminer les courbes représentatives des pressions normales compatibles avec l'équilibre géométrique de la voûte.* — Soit CDD$_1$C$_1$ une portion de la voûte comprise entre le joint CD à la clef et un autre joint quelconque C$_1$D$_1$; soit en outre P le poids de cette portion de la voûte et de sa surcharge et GG' la verticale qui passe par le centre de gravité de l'ensemble. Pour qu'une poussée N, normale en un point donné A du joint CD, puisse donner lieu à une courbe de pression passant par un autre point donné A$_1$ du joint C$_1$D$_1$, il faut que la résultante des forces N et P passe par le point A$_1$.

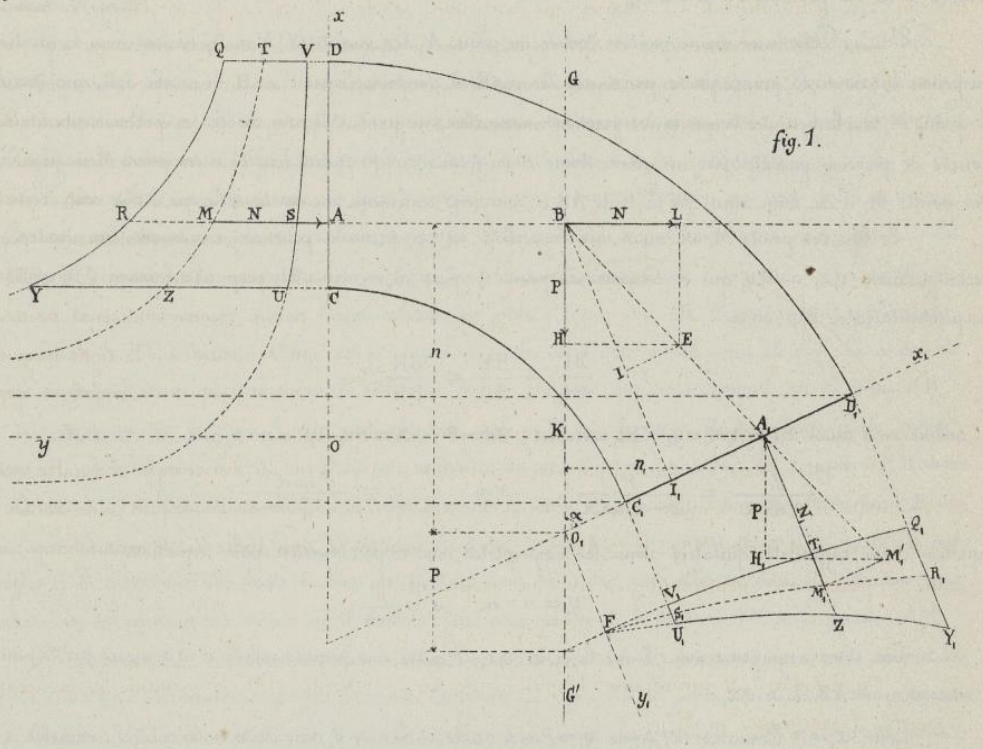


fig. 1.

Pour que cette condition soit remplie il suffit de mener par le point A une horizontale qui rencontre la verticale GG' au point B, joindre les points A$_1$ et B, puis prendre BH = P et construire le rectangle BHEL ; la ligne BL ou son égale EH est la mesure de la force N appliquée en A, la ligne BE est la mesure de la pression oblique appliquée en A$_1$, et en prenant A$_1$M'$_1$ = BE on a la mesure de la réaction oblique exercée en A$_1$ sur le voussoir CDD$_1$C$_1$, réaction dont la composante normale N$_1$ est représentée par A$_1$M$_1$. Cela posé, il faut considérer deux cas.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1°. — Pour une même position donnée du point A_1, les quantités N et N_1 varient évidemment avec la position du point A; et si l'on fait varier ce point entre les limites C et D, la pression normale N varie elle-même entre des limites telles que CZ et DT, et la courbe TZ que décrit le point M est le lieu des sommets des pressions normales à la clef compatibles avec l'existence d'une courbe de pression passant par un point donné A_1 du joint C_1D_1. Quant au lieu des points M_1 représentant les sommets des pressions normales conjuguées avec les pressions correspondantes du lieu du point M, il est tout entier sur la droite A_1Z_1, et comprend seulement une partie telle que T_1Z_1, de la longueur de cette droite.

L'équation du lieu des points M peut s'obtenir en prenant pour axes coordonnés les droites rectangulaires Ox et Oy dont la seconde passe par le point A_1; les triangles semblables BA,K, BEH donnent $BK \times EH = A_1K \times BH = n_1P$, et comme on a $BK = OA = x$, $EH = AM = y$, il en résulte

$$xy = n_1P, \qquad (1)$$

équation d'une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes et dans laquelle n_1 est un paramètre variable avec la position du point A_1.

2°. — Pour une même position donnée du point A_1, les quantités N et N_1 varient avec la position du point A_1, et si ce point passe par toutes les positions comprises entre C_1 et D_1 la courbe S_1R_1 que décrit le point M_1 est le lieu des sommets des pressions normales au joint C_1D_1 compatibles avec l'existence d'une courbe de pression passant par un point donné A du joint de clef. Quant au lieu des points M conjugués des points M_1, il est tout entier sur la droite AR et comprend seulement une partie telle que RS de cette droite.

Le lieu des points M_1 est aussi une hyperbole, car en prenant pour axes coordonnés les droites rectangulaires O_1x_1 et O_1y_1 qui se coupent au point O_1, puis en menant BI_1 perpendiculaire à C_1D_1 et EI perpendiculaire à BI_1, on a

$$\frac{BI}{BI_1} = \frac{BE}{BA_1} = \frac{BH}{BK};$$

et comme on a aussi $BI = A_1M_1 = y_1$, $BI_1 = n\sin\alpha$, $BH = P$, $BK = BO_1 - O_1K = n - x_1\cos\alpha$, il en résulte

$$\frac{y_1}{n\sin\alpha} = \frac{P}{n - x_1\cos\alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad y_1 = \frac{P\sin\alpha}{1 - \frac{x_1}{n}\cos\alpha}, \qquad (2)$$

équation d'une hyperbole équilatère dont les asymptotes ont respectivement pour équations

$$y_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{n}{\cos\alpha}.$$

Ces deux asymptotes sont, l'une la droite O_1x_1; l'autre, une perpendiculaire à O_1x_1 menée par le point d'intersection de AB et de O_1x_1.

Pour $x_1 = 0$ l'équation (2) donne $y_1 = P\sin\alpha$; cette valeur de y_1 étant indépendante de la variable n qui définit la position du point A, on voit que toutes les courbes analogues à la courbe (2) passent par le même point F dont l'ordonnée O_1F est égale à la projection de la force P sur l'axe des y_1.

2ème Question. — *Déterminer les aires représentatives de toutes les pressions normales compatibles avec l'équilibre géométrique de la voûte.* — Si au lieu d'opérer sur le point A_1 pour obtenir la courbe TZ, on fait les mêmes constructions en choisissant les points extrêmes C_1 et D_1 du joint C_1D_1, on obtient deux autres hyperboles équilatères VU et QY dont les équations ne diffèrent de l'équation (1) que par la valeur de n_1. Ces hyperboles, qui ont toutes deux pour asymptotes verticales la ligne CD, et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

respectivement pour asymptotes horizontales les droites passant par les points C_1 et D_1, comprenant entre elles toutes les autres courbes relatives aux centres de pression situés entre C_1 et D_1, d'où il résulte que l'aire VUYQ comprise entre ces deux hyperboles extrêmes est le lieu des extrémités de toutes les droites représentatives des pressions qui peuvent être exercées sur le joint CD et qui sont compatibles avec l'existence d'une courbe de pression rencontrant le joint C_1D_1 entre les points C_1 et D_1.

Si l'on construit de même pour le joint C_1D_1 les deux courbes limites V_1Q_1 et U_1Y_1 se rapportant, l'une, à des pressions exercées en D, l'autre, à des pressions exercées en C, l'aire $V_1U_1Y_1Q_1$ est le lieu des extrémités de toutes les droites représentatives des pressions qui peuvent être exercées sur le joint C_1D_1 et qui sont compatibles avec l'existence d'une courbe de pression rencontrant le joint CD entre les points C et D.

En examinant sur la figure 1 les positions respectives des lettres relatives aux contours des aires VUYQ et $V_1U_1Y_1Q_1$, on reconnaît facilement que les points V et V_1 par exemple, sont les sommets de deux pressions normales conjuguées, en ce qu'il en est de même des points T et T_1, Q et Q_1, R et R_1, Y et Y_1, et ainsi de suite.

Pour $\alpha = 90°$, l'équation (2) donne $y_1 = P$ et l'aire $V_1U_1Y_1Q_1$ se réduit à la droite horizontale représentée par cette équation ; P est alors le poids de la demi-voûte et de sa surcharge, et l'on aurait pu dire à priori que, quelle que soit la forme de la courbe des pressions, la réaction verticale du joint horizontal de la culée est nécessairement égale au poids même de la demi-voûte et de sa surcharge.

Il est utile de remarquer que les deux aires précédentes n'ont réellement qu'une seule et même signification, car toute pression limitée à l'un des joints de la première a son homologue en un point de la seconde et réciproquement, ce qui permet de négliger, dans les applications, l'une ou l'autre de ces aires conjuguées et de ne tenir compte que de l'aire relative au joint C_1D_1 par exemple. Cependant l'application de la méthode de M.r Durand-Claye exige que l'on sache construire sur le joint de clef la pression normale conjuguée d'une pression normale telle que N_1 par exemple, qui serait donnée sur le joint C_1D_1. Pour cela, on mène par le point A_1 une verticale A_1H_1 égale à P ; par le point H_1 une horizontale, et par le point M_1, parallèlement à C_1D_1, une droite qui rencontre la précédente au point M'_1. La longueur $H_1M'_1$ donne alors la mesure de la force correspondante MA, appliquée sur le joint CD, suivant l'horizontale du point B déterminé par la rencontre de $A_1M'_1$ avec la verticale du centre de gravité. Ces constructions sont justifiées par les règles de la composition des forces ; et bien qu'effectuées dans un autre ordre elles ne sont en définitive que la reproduction des constructions mêmes qu'il faudrait faire pour passer de la pression AM à la pression A_1M_1.

3.ème Question. — *Déterminer les courbes limitatives de toutes les pressions normales compatibles avec la résistance des matériaux qui forment la voûte.* — Soit CD le joint dont l'épaisseur en C et la longueur égale à un mètre ; si N est la résultante normale des pressions exercées sur ce joint, d la distance du point D au point d'application A de la force N et R la pression limite par mètre carré qu'on ne doit pas dépasser pour l'élément le plus chargé du joint, on doit avoir, d'après le N.° 338,

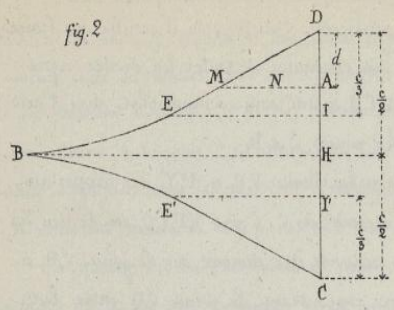
$$\text{Pour } d \leq \tfrac{1}{3}c\,, \qquad R = \frac{2N}{3d}\,, \qquad \text{d'où} \qquad N = \frac{3Rd}{2}\,, \qquad (3)$$

$$\text{Pour } d \text{ compris entre } \tfrac{1}{3}c \text{ et } \tfrac{1}{2}c\,, \qquad R = \frac{2N}{c}\left(2 - \frac{3d}{c}\right), \qquad \text{d'où} \qquad N = \frac{c^2R}{2(2c-3d)}\,, \qquad (4)$$

formules qui donnent pour chaque centre de pression sur le joint CD la valeur limite que ne doit en aucun cas dépasser la résultante N eu égard aux conditions de résistance des matériaux de la construction.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fig. 2



La relation (3) étant du premier degré par rapport aux quantités N et d considérées comme variables, on voit que toutes les pressions limites qui peuvent s'exercer sur le premier tiers du joint CD, c'est-à-dire dans l'intervalle DI, sont représentées par les ordonnées d'une droite DE qui passe au point D et dont le coefficient d'inclinaison est $\frac{3}{2}R$. La relation (3) donne d'ailleurs $N = 0$ pour $d = 0$ et $N = \frac{1}{2}cR$ pour $d = \frac{1}{3}c$.

La relation (4) considérée de même par rapport aux variables N et d, montre que toutes les pressions N qui peuvent s'exercer dans l'intervalle IH, compris entre $\frac{1}{3}c$ et $\frac{1}{2}c$, sont les ordonnées d'une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont CD et l'E'. Il est d'ailleurs facile de voir que cette hyperbole se raccorde au point E avec la droite DE, car pour $d = \frac{1}{3}c$, les relations (3) et (4) donnent la même valeur $N = \frac{1}{2}cR$; et en outre pour $d = \frac{1}{3}c$ le coefficient d'inclinaison de la tangente à l'hyperbole est égal au coefficient d'inclinaison $\frac{3}{2}R$ de la droite DE.

Pour $d = \frac{1}{2}c$ l'équation (4) donne $N = cR$, valeur double de celle qui correspond au point I. On verrait facilement que le coefficient d'inclinaison de la tangente en B est égal à GR.

D'après ces indications le contour DEB est facile à tracer, et l'on pourra même souvent remplacer la courbe EB par une droite joignant les points E et B.

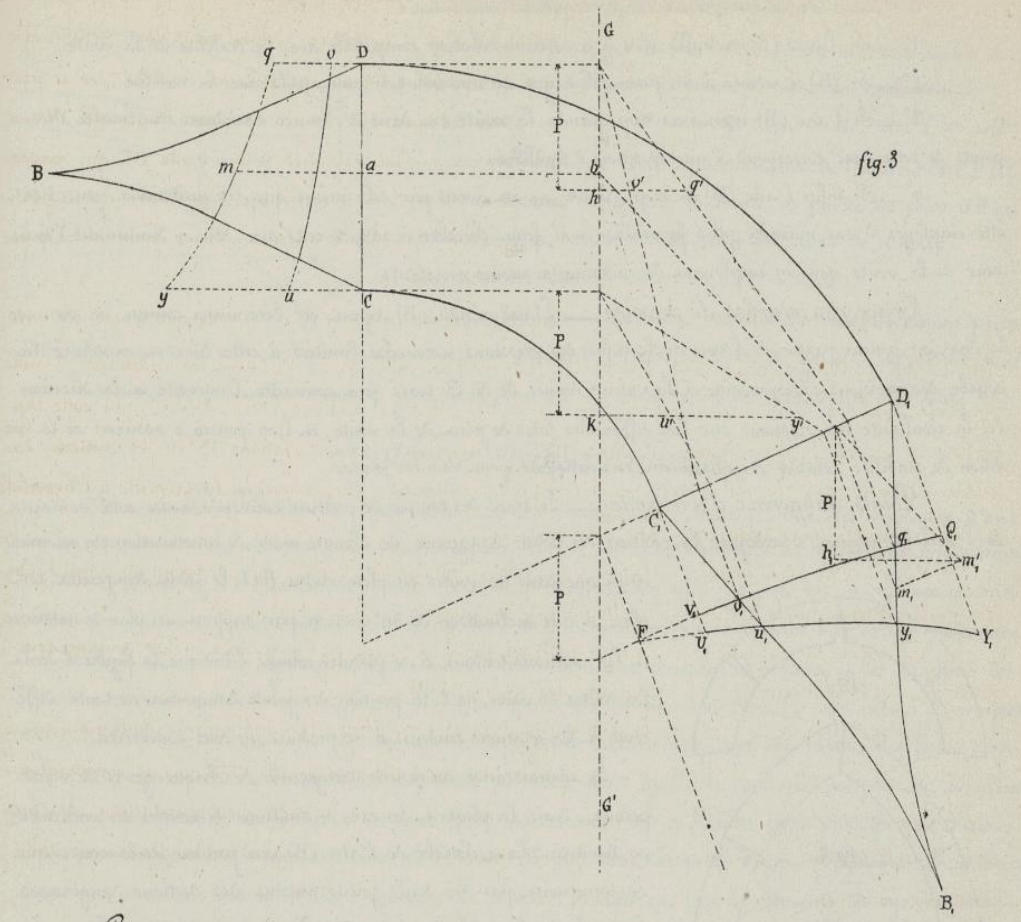
Ce qu'on vient de dire pour la portion DH de la face du joint CD, s'appliquant identiquement à la portion CH, on peut en conclure qu'il y a pour cette partie CH une courbe CE'B, qui est symétrique de DEB, et qu'ainsi l'aire DEBE'C est le lieu des extrémités de toutes les lignes représentatives des pressions N qui peuvent être appliquées sur les divers points de CD, eu égard à la résistance des matériaux employés.

En répétant pour le joint C_1D_1 la construction que l'on vient de faire pour le joint CD, et en posant $C_1D_1 = c_1$, les deux valeurs principales à construire seront $N_1 = \frac{1}{2}c_1R$ qui correspond à $d = \frac{1}{3}c_1$ et $N_1 = c_1R$ qui correspond à $d = \frac{1}{2}c_1$. Les aires ainsi construites sur CD et sur C_1D_1 sont entièrement indépendantes l'une de l'autre, puisque chacune d'elles ne concerne que le joint par rapport auquel elle a été tracée.

Application des tracés précédents à la vérification de la stabilité d'une voûte. — Si l'on construit sur le joint C_1D_1, fig. 3, les aires $V_1U_1Y_1Q_1$ et $C_1B_1D_1$ indiquées sur les fig. 1 et 2, la partie $v_1u_1y_1q_1$ commune à ces deux aires représente évidemment, pour le joint C_1D_1, le lieu des sommets de toutes les pressions normales compatibles à la fois avec l'équilibre géométrique et avec la résistance des matériaux de la voûte.

Ensuite si l'on construit l'aire CBD sur le joint CD, et si l'on détermine pour ce joint l'aire $vuyq$ conjuguée de l'aire $v_1u_1y_1q_1$ relative au joint C_1D_1, il n'y aura d'autres pressions de stabilité sur le joint CD que celles qui seront comprises à la fois dans l'aire CBD et dans l'aire $vuyq$; en désignant par (A) la partie commune à ces deux aires, on peut dire que cette aire résidu (A) contient pour le voussoir CDC_1D_1, pris isolément, toutes les solutions compatibles à la fois avec l'équilibre géométrique et avec la résistance des matériaux.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Pour construire l'aire $vuyq$ conjuguée de l'aire $v_1u_1y_1q_1$, on remarque d'abord que tous les points des deux courbes v_1q_1 en u_1y_1 sont respectivement leurs conjugués sur les perpendiculaires menées au joint CD par les points C en D ; les droites vq en uy conjuguées des courbes v_1q_1 en u_1y_1 se construisent ainsi très-facilement comme l'indique la figure en prenant $Dv = hv'$, $Dq = hq'$, $Cu = ku'$, $Cy = ky'$. Ensuite, pour obtenir la ligne qmy, conjuguée de $q_1m_1y_1$, il suffit évidemment, puisque les extrémités q en y sont déjà connues, de prendre un ou deux points intermédiaires entre q_1 en y_1 en de déterminer leurs conjugués par la construction donnée précédemment, construction qui est reproduite ici pour le point m_1. En prenant de même un ou plusieurs points entre v_1 en u_1 on construira les points conjugués correspondants de la courbe vu.

En considérant ensuite le premier joint CD avec une autre face de joint C_2D_2, on peut construire de la même manière l'aire (A_1) qui contient toutes les solutions relatives à la stabilité du solide CDC_2D_2 considéré comme un voussoir unique.

On peut opérer de même pour toutes les autres faces de joint ; en désignant par (B) la partie commune à toutes les aires résidus (A), (A_1), (A_2), …, (A_n), l'aire finale (B) contient les sommets de toutes les pressions normales compatibles avec les conditions de stabilité sur toutes les faces de joint. Cette aire finale donne donc l'ensemble de toutes les solutions, en il ne pourrait en exister d'autres.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On déduit de ce qui précède les conséquences suivantes :

1° — Si l'aire (B) est nulle, il n'y a aucune solution compatible avec la stabilité de la voûte.

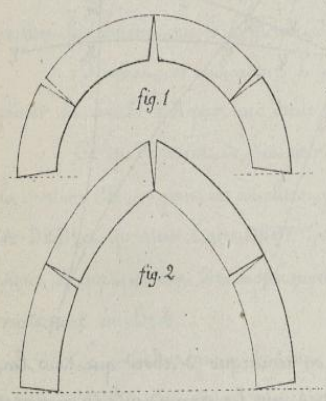
2° — Si (B) se réduit à un point, il n'y a qu'une solution compatible avec la stabilité.

3° — Si l'aire (B) n'est pas trop grande, la voûte est dans de bonnes conditions, et chacun des points de cette aire correspond à une position d'équilibre.

4° — Si enfin l'aire (B) est trop grande, on est averti par cela même que les matériaux pourraient être employés d'une manière plus favorable, et il faut chercher à réduire cette aire, soit en diminuant l'épaisseur de la voûte, soit en employant des matériaux moins résistants.

Tracé des courbes de pression. — L'aire résidu (B) ayant été déterminée comme on vient de le dire, on pourra partir de l'une quelconque des pressions normales limitées à cette aire et construire la courbe des pressions correspondante à la valeur donnée de N. Ce tracé fera connaître l'intensité et la direction de la résultante des pressions sur les différentes faces de joint de la voûte, et l'on pourra s'assurer si la condition de stabilité relative au glissement est satisfaite pour tous les joints.

Points dangereux d'une voûte. — Le tracé des courbes de pression correspondantes aux sommets de l'aire (B) permet d'assigner la position des points dangereux de chaque mode de construction. On reconnaît ainsi que dans les voûtes en plein-cintre, fig. 1, le joint dangereux est placé à une inclinaison de 30° environ par rapport au plan de naissance, et les rotations tendent à se produire comme l'indique la figure. Dans les voûtes en ogive, fig. 2, la position des joints dangereux est toute différente, et les rotations tendent à se produire en sens contraires.



La connaissance des points dangereux de chaque genre de voûte permet, dans la plupart des cas, de diminuer le nombre des opérations, en limitant la recherche de l'aire (B) aux portions de la voûte qui se terminent par les seuls joints voisins des sections dangereuses. L'emploi de la méthode permet d'ailleurs de poursuivre les constructions pour les divers joints des piédroits et de compléter ainsi l'étude de toutes les conditions de stabilité que comporte la construction tout entière.

La courbe des pressions ne peut être normale à tous les joints. — Les conditions les plus favorables à la construction d'une voûte seraient évidemment les suivantes :

1° — Les pressions devraient être normales aux plans de joint, ce qui éviterait toute tendance au glissement.

2° — La courbe des pressions devrait passer par le milieu de chaque joint, parce qu'en vertu de la loi du trapèze la pression serait alors uniformément répartie sur la face entière du joint.

3° — La pression sur l'arête la plus chargée de chaque joint devrait être la même pour tous les joints.

Mais ces conditions ne peuvent pas être réalisées, et l'on peut démontrer que la première, considérée isolément, ne peut même pas être satisfaite.

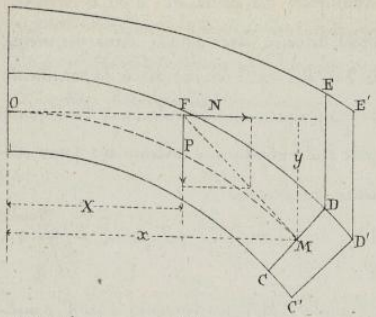
Pour chaque point tel que M de la courbe de pression sur un joint CD, l'équation des moments autour de l'axe projeté en M donne

$$P(x-X) = Ny \quad , \qquad \text{ou} \qquad PX = Px - Ny \quad ,$$

d'où, en différentiant et en tenant compte de ce que N est la réaction constante sur le joint de tête,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$d(PX) = Pdx + xdP - Ndy .$$



Si l'on admet que la courbe des pressions est tangente à la droite FM qui détermine le point M, on aura également $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{N}$, ou $Pdx = Ny$; par suite $d(PX) = xdP$.

Or dP étant le poids correspondant de l'élément $CDE\,E'D'C'$ et m la distance horizontale du centre de gravité du poids dP au point M, on a, d'après la définition du centre de gravité,

$$d(PX) = dP(x+m) = xdP + mdP ,$$

et en substituant cette valeur de $d(PX)$ dans l'équation précédente il vient $mdP = 0$, ce qui exigerait que dP fût nul, ou que le centre de gravité de dP fût situé sur la verticale du point M, ce qui ne peut avoir lieu car la construction ne serait plus une voûte.

Systèmes funiculaires.

354. — **Conditions de stabilité.** — Les chaînes et les cordes peuvent être employées d'une manière permanente dans certains genres de construction ; dans ce cas elles constituent des systèmes dits *funiculaires*, qui doivent satisfaire à des conditions spéciales de stabilité. On sait en effet que pour qu'un système matériel, sollicité par des forces données, puisse être en équilibre il faut que partout où s'exerce une action quelconque, il se développe une réaction égale et contraire à cette action : or ceci ne pourrait se produire si les directions des forces données devaient avoir pour effet de comprimer ou de fléchir un corps dont la résistance à la compression ou à la flexion pourrait être regardée comme négligeable relativement aux intensités des forces considérées. Ainsi une corde sollicitée à ses extrémités par deux forces égales et contraires ne pourrait se maintenir dans une position stable que si ces deux forces agissaient l'une et l'autre pour produire une tension et non pour rapprocher les deux extrémités de la corde. Il faut donc, lorsqu'il s'agit de systèmes funiculaires, ajouter aux conditions fondamentales d'équilibre la condition spéciale que tous les éléments du système soient constamment tendus, ce qui est le contraire des constructions en maçonnerie, qui ne peuvent résister qu'à des efforts de compression.

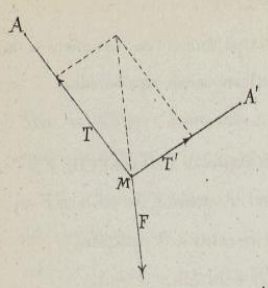
Comme dans tous les systèmes matériels soumis à des efforts donnés on doit, pour les systèmes funiculaires tenir compte des conditions relatives à la résistance des matériaux employés ; ainsi une corde tendue par deux forces égales et contraires appliquées à ses extrémités n'est dans des conditions stables que si elle peut résister en toutes ses sections à l'effort de traction auquel elle est soumise, effort qui permet dès lors de déterminer les dimensions de la section transversale quand on connaît la valeur de la tension par mètre carré à laquelle la corde peut résister d'une manière permanente.

Le poids de la corde peut aussi intervenir dans les conditions de stabilité ; mais on néglige cette influence lorsque les efforts exercés sont un peu grands comme cela se présente presque toujours.

Il convient maintenant d'examiner quelques cas très simples avant de passer aux conditions générales de stabilité des systèmes funiculaires.

355. — **Corde fixée par ses deux extrémités et tendue par une force intermédiaire.** — Si la corde était simplement tirée par les deux bouts, il suffirait, pour l'équilibre, que les deux forces fussent égales et directement opposées ; mais si la corde est tendue par l'action d'une force intermédiaire F, cette force détermine, dans les deux brins MA et MA' deux tensions T et T', et l'on peut regarder le système comme étant

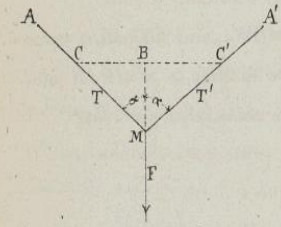
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



constitué par les trois forces T, T' et F appliquées au point M ; d'où il résulte que dans l'état d'équilibre, ces trois forces doivent être situées dans un même plan et que l'une quelconque d'entre elles doit être égale et opposée à la résultante des deux autres, ce qui permet de déterminer graphiquement les valeurs de T et T' quand on connaît l'intensité et la direction de la force F. En projetant d'ailleurs ces forces sur la direction de F puis sur une perpendiculaire on obtient

$$F + T\cos(F,T) + T'\cos(F,T') = 0\,, \quad (1) \qquad T\sin(F,T) - T'\sin(F,T') = 0\,,$$

relation d'où l'on déduirait aussi T en T'



Si la direction de F est bissectrice de l'angle AMA', les tensions T et T' sont égales entre elles ; on a dans ce cas BC = BC', et la relation (1) donne

$$F = 2T\cos\alpha\,,$$

ce qui montre qu'avec une force F relativement très faible on pourrait exercer de très grands efforts longitudinaux sur une corde tendue si l'angle α était suffisamment grand. Pour $\alpha = 90°$, on aurait évidemment F = 0

Si la corde AMA' était extensible et que sous l'action de la force F on eût CM = m × CB, les points C et C' étant considérés comme fixes, la formule précédente serait encore applicable, car on aurait alors

$$\cos\alpha = \frac{MB}{MC} = \frac{\sqrt{m^2-1}}{m}\,, \qquad \text{et par suite} \qquad F = 2T\frac{\sqrt{m^2-1}}{m}\,,$$

ce qui pour $m = 1$, c'est-à-dire pour une corde inextensible donnerait $F = 0$ comme précédemment.

L'équilibre subsisterait encore si l'on remplaçait la force F par plusieurs forces appliquées sur un même nœud et dont la résultante serait égale à F et dirigée dans le plan des deux brins de la corde.

356. — **Assemblage à anneau.** — Si la force F agit en M sur la corde AMA' par l'intermédiaire d'un anneau mobile supposé sans frottement, on peut en faisant varier la direction de cette force, obtenir autant de positions d'équilibre qu'on le veut. Le point M décrit alors une ellipse, *fig. 1*, dont les points d'attache A et A' sont les foyers, et l'anneau se déplace, pour arriver à la position d'équilibre, jusqu'à ce que la direction de F divise en deux parties égales l'angle AMA' des deux rayons vecteurs. Lorsque la force F est verticale, comme dans le cas d'un poids P, l'anneau glisse jusqu'au point le plus bas de l'ellipse.

fig. 1

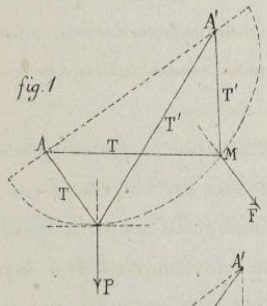
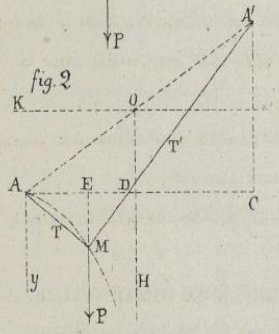


fig. 2



Dans ce cas, si l'on fait varier la longueur du cordon, le lieu des points tels que M, *fig. 2*, est une hyperbole dont l'équation peut s'obtenir en prenant le point A pour origine des coordonnées, et pour axes l'horizontale et la verticale de ce point ; car en posant AC = 2a et A'C = 2b, les triangles semblables EMD, A'CD donnent, à cause de ED = AE = x,

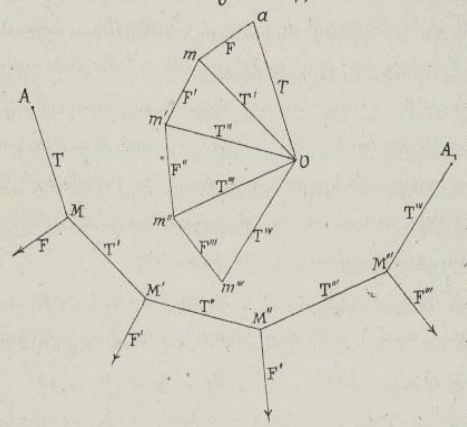
$$\frac{EM}{ED} = \frac{A'C}{DC}\,, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x} = \frac{2b}{2a-2x}\,, \quad \text{d'où} \quad xy + bx - ay = 0\,, \quad (1)$$

équation d'une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les droites OK et OH menées par le point O milieu de AA', parallèlement aux droites AC et A'C.

Si les points A et A' sont situés sur une même horizontale on a $b = 0$ et l'équation (1) se réduit à $x = a$ qui représente une droite verticale passant par le point O milieu de AA'.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

257. — **Cas général : plusieurs forces intermédiaires.** — Le polygone funiculaire se compose ici d'une suite de cordons AM, MM', ..., M''A$_1$, tendus par les forces intermédiaires F, F', F'' et F''', et l'on détermine les conditions d'équilibre en partant de celles qui sont relatives à l'équilibre de trois forces concourantes. Ainsi, la tension T du brin MM' doit être égale et opposée à la résultante des forces T et F qui s'exercent au point M, et par suite le cordon MM' doit être dans le plan de F et T. Ce même cordon MM' exerçant la tension T' sur le point M', la tension T'' du brin M'M'' doit faire équilibre aux forces F' et T' et le cordon M'M'' doit être situé dans le plan de T' et F' et ainsi de suite.



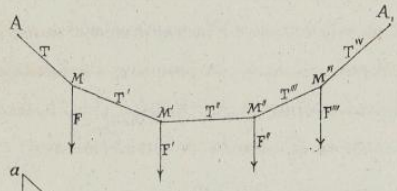
Polygone de Varignon. — Si toutes les forces qui composent le système sont en équilibre en soi, on les dispose en grandeur et en direction les unes à la suite des autres, elles doivent former un polygone fermé qui est connu sous le nom de polygone de Varignon.

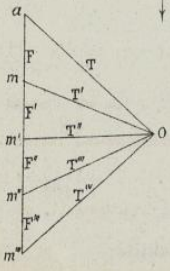
A cet effet, si d'un point O pris arbitrairement on mène Oa égal et parallèle à T, puis que du point a on mène am égal et parallèle à F, la droite menée par le point m parallèlement à T' doit aboutir au point O et être égale à la tension T'. Cette même tension T', considérée maintenant comme s'exerçant sur le point M', doit être comptée comme partant du point O et aboutissant au point m, en menant alors mm' égal et parallèle à F', la droite menée par m' parallèlement à T' doit aboutir au point O et être égale à la tension T''. En continuant ainsi pour les autres forces du système, la dernière tension doit aboutir au point O et par suite le polygone doit être fermé, ce qui est la première condition d'équilibre. Le contour du polygone se trouve ainsi formé par les forces F, F', F'', F''' et par les deux tensions extrêmes T et T''', tandis que les diagonales représentent les tensions intermédiaires T', T'' et T'''.

Comme seconde condition de stabilité, il faut que chaque cordon soit tendu sans toutefois que la tension soit supérieure à celle qu'il peut supporter sans détérioration, en raison de sa section transversale.

Les règles tirées du polygone de Varignon sont, pour la stabilité des systèmes funiculaires, de même ordre que celles de la courbe des pressions de Moseley par rapport aux matériaux juxtaposés.

258. — **Cas où toutes les forces intermédiaires sont verticales.** — Le cas le plus important du polygone funiculaire pour les applications est celui dans lequel toutes les forces intermédiaires F, F', ..., sont verticales. Ce cas donne lieu aux conséquences suivantes :





1°. — Le polygone est tout entier dans le plan vertical qui passe par les points extrêmes A et A$_1$; car le plan (T,F) est le même que le plan (T',F') ; celui-ci est le même que le plan (T'',F''), et ainsi de suite.

2°. — Les projections horizontales de deux tensions consécutives, et par suite deux tensions quelconques, sont égales entre elles.

3°. — La somme des projections verticales de deux tensions quelconques est égale à la somme des forces parallèles intermédiaires.

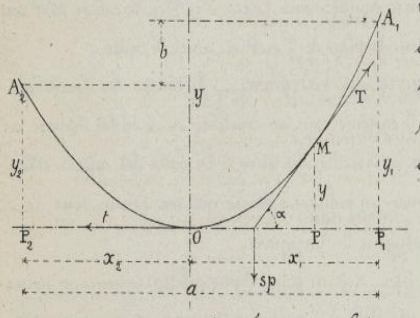
4°. — Les directions de deux cordes quelconques se rencontrent sur la verticale du centre de gravité de toutes les forces verticales intermédiaires.

5°. — La construction du polygone de Varignon montre que les côtés am, mm', m'm'', ..., qui représentent les forces intermédiaires F, F', F'', F''', sont tous sur une même verticale am'''.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

259. — **Équilibre d'un fil pesant inflexible.** — Un fil pesant, flexible et inextensible, soutenu par ses deux extrémités, peut être assimilé à un polygone funiculaire infinitésimal sollicité par des forces verticales, et la courbe qu'affecte ce fil dans l'état d'équilibre, présente plusieurs circonstances d'après la loi suivant laquelle varie le poids du fil. On se bornera à examiner ici les deux cas suivants :

1°. — *Cas où le poids du fil est proportionnel à la longueur de l'arc.* — **Chaînette.** — Soit O l'origine des coordonnées prise au point le plus bas de la courbe, s la longueur d'un arc tel que OM et p le poids par mètre courant du fil. L'arc s dont le poids est ps étant sollicité au point O par la tension horizontale t, et au point M par la tension T dirigée suivant la tangente en ce point, les trois forces t, T et ps qui agissent sur cet arc doivent se faire équilibre, et l'on a, en projetant successivement sur ox et sur oy,



$$t = T\cos\alpha\,, \quad (1) \qquad sp = T\sin\alpha\,, \quad (2)$$

En éliminant T entre (1) et (2) et en posant ensuite $\frac{t}{p} = \frac{1}{m}$, il vient

$$s = \frac{1}{m}\operatorname{tg}\alpha\,, \quad (3) \qquad \text{d'où} \qquad ds = \frac{1}{m}\,d\operatorname{tg}\alpha\,; \quad (4)$$

et comme on a en coordonnées rectangulaires,

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}\,,$$

il en résulte

$$dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{m}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)\,, \qquad dx = \frac{1}{m}\cdot\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\,,$$

d'où

$$x = \frac{1}{m\log e}\log\left[\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]+c\,.$$

Pour $x=0$, on a $\frac{dy}{dx}=0$, d'où $c=0$, et par suite

$$mx\log e = \log\left[\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right], \quad \text{ou} \quad e^{mx} = \frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,,$$

équation d'où l'on déduit successivement

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{mx}-e^{-mx}\right), \quad (5) \qquad dy = \frac{1}{2}\left(e^{mx}-e^{-mx}\right)dx\,, \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2m}\left(e^{mx}+e^{-mx}\right)+c$$

Pour $x=0$, on a $y=0$ et $c=-\frac{1}{m}$, ce qui donne finalement pour l'équation de la Chaînette

$$y = \frac{1}{2m}\left(e^{mx}+e^{-mx}\right)-\frac{1}{m}\,, \qquad (6)$$

courbe qui est symétrique par rapport à l'axe oy, car aux valeurs x et $-x$ correspond la même valeur de y.

Il reste maintenant à déterminer la quantité m au moyen des données qui sont : La longueur du fil $A_1OA_2 = OA_1 + OA_2 = s_1+s_2 = s$; la distance $P_1P_2 = x_1+x_2 = a$; et enfin la différence $y_1-y_2 = b$.

Or, si à l'équation (6) on joint la relation (3) en y remplaçant $\operatorname{tg}\alpha$ ou $\frac{dy}{dx}$ par la valeur (5), il vient

$$s = \frac{1}{2m}\left(e^{mx_1}-e^{-mx_1}\right)\,, \qquad y = \frac{1}{2m}\left(e^{mx}+e^{-mx}\right)-\frac{1}{m}\,;$$

ce qui donne, en y faisant successivement $x=x_1$ et $x=x_2$,

$$s_1 = \frac{1}{2m}\left(e^{mx_1}-e^{-mx_1}\right), \quad (7) \qquad s_2 = \frac{1}{2m}\left(e^{mx_2}-e^{-mx_2}\right), \quad (8)$$

$$y_1 = \frac{1}{2m}\left(e^{mx_1}+e^{-mx_1}\right)-\frac{1}{m} \quad (9) \qquad y_2 = \frac{1}{2m}\left(e^{mx_2}+e^{-mx_2}\right)-\frac{1}{m}\,. \quad (10)$$

Si dans la somme (7)+(8) et dans la différence (9)−(10) on remplace x_2 par $a-x_1$, il en résulte

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$s_1+s_2=S=\frac{1}{2m}\left[(1-e^{-ma})e^{mx_1}-(1-e^{ma})e^{-mx_1}\right], \qquad y_1-y_2=b=\frac{1}{2m}\left[(1-e^{-ma})e^{mx_1}+(1-e^{ma})e^{-mx_1}\right],$$

d'où $$s+b=\frac{1}{m}(1-e^{-ma})e^{mx_1}, \qquad s-b=-\frac{1}{m}(1-e^{ma})e^{-mx_1};$$

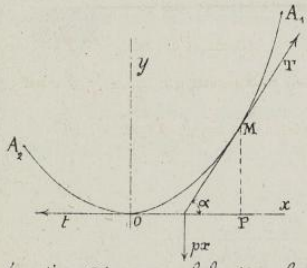
en multipliant ces deux expressions membre à membre on trouve

$$m^2(s^2-b^2)e^{ma}=(1-e^{ma})^2, \qquad \text{ou} \qquad me^{\frac{ma}{2}}(s^2-b^2)^{\frac{1}{2}}=1-e^{ma},$$

équation d'où l'on peut déduire m par des substitutions successives.

La valeur m étant ainsi calculée, on aura d'abord $t=\frac{p}{m}$, ensuite les quantités α, s, T en y relatives à un point quelconque M dont l'abscisse est x se calculeront par les formules (5), (3), (1) et (6).

2°. — *Cas où le poids du fil est proportionnel à la projection horizontale de l'arc. — Parabole.* — Soit toujours O le point le plus bas de la courbe, et p le poids d'un mètre de projection horizontale du fil; le poids de l'arc



OM dont la projection est x a pour valeur px. Cet arc étant en équilibre sous l'action des forces T, t et px, on a, en projetant successivement sur ox et sur oy,

$$t=T\cos\alpha, \qquad (1) \qquad\qquad px=T\sin\alpha. \qquad (2)$$

En éliminant T il vient

$$\frac{px}{t}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}, \qquad \text{ou} \qquad dy=\frac{p}{t}\,x\,dx,$$

ce qui donne $$y=\frac{p}{2t}x^2,$$

équation d'une parabole dont le sommet est en O et dont l'axe coïncide avec l'axe des y.

Pour déterminer la tension t, il suffit de remarquer que le fil est fixé en un point A_1, pour lequel on a $y=h$, $x=l$, ce qui donne

$$h=\frac{pl^2}{2t} \qquad \text{d'où} \qquad t=\frac{pl^2}{2h}.$$

Ponts suspendus. — (Application des systèmes funiculaires.)

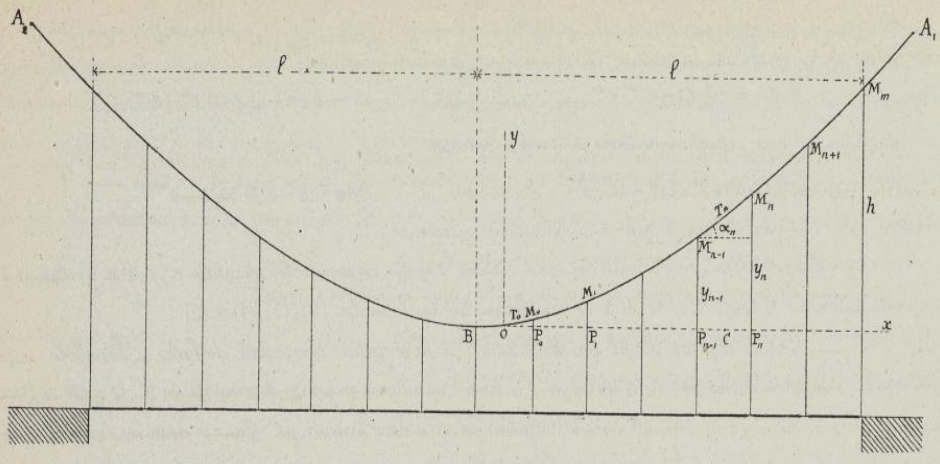
260. — *Disposition générale.* — Les ponts suspendus sont ceux dont le tablier est soutenu, au moyen de tiges verticales équidistantes, par des chaînes flexibles solidement attachées à des points fixes. Ce mode de construction permet, avec une moindre dépense, de soutenir des tabliers d'une grande longueur et c'est cette diminution de la dépense qui a, pendant quelque temps, conduit les constructeurs à établir de nombreux ponts suspendus que l'on remplace, pour la plupart aujourd'hui par des dispositions offrant un plus grand caractère de stabilité.

Pour déterminer les conditions d'équilibre d'un pareil système, que l'on peut assimiler à un polygone funiculaire auquel toutes les propriétés du N°. 258 sont évidemment applicables, on fait ordinairement abstraction du poids de la chaîne, de celui des tiges, et l'on suppose que chaque tige supporte la moitié du poids de chacune des parties du tablier comprises entre cette tige et les deux tiges voisines.

261. — *Equation de la courbe qui passe par les sommets du polygone.* — Soit B le point le plus bas du polygone $BM_0M_1M_2\ldots$, qui forme les côtés successifs de la chaîne, et soient en outre deux axes coordonnés ox, oy, l'un horizontal, l'autre vertical et passant par le milieu du côté BM_0.

La projection verticale $T_n\sin\alpha_n$ de la tension T_n qui s'exerce au point M_{n-1}, est (N°. 258, 3°.) égale à la projection verticale $T_0\sin\alpha_0$ de la tension T_0, augmentée du poids de la portion du tablier comprise entre le point O et le point C milieu de $P_{n-1}P_n$; on a donc, en désignant par p le poids par mètre courant du tablier, supposé horizontal,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



$$T_n \sin\alpha_n = T_0 \sin\alpha_0 + p x_{n-1} + p \times \tfrac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) = T_0 \sin\alpha_0 + \tfrac{1}{2} p (x_n + x_{n-1}) \ ;$$

et comme on a aussi (N.° 258, 2.°) $\qquad T_n \cos\alpha_n = T_0 \cos\alpha_0 = t = \text{constante},$

il en résulte, en divisant la première expression par la seconde,

$$\operatorname{tg}\alpha_n = \operatorname{tg}\alpha_0 + \frac{p}{2t}(x_n + x_{n-1}) \ ; \quad \text{et à cause de} \quad \operatorname{tg}\alpha_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

il vient

$$y_n - y_{n-1} = \operatorname{tg}\alpha_0 (x_n - x_{n-1}) + \frac{p}{2t}(x_n^2 - x_{n-1}^2) \ .$$

En faisant, dans cette formule, successivement $n=1$, $n=2$, ..., $n=n$, on obtient

$$y_1 - y_0 = \operatorname{tg}\alpha_0 (x_1 - x_0) + \frac{p}{2t}(x_1^2 - x_0^2) \ ,$$

$$y_2 - y_1 = \operatorname{tg}\alpha_0 (x_2 - x_1) + \frac{p}{2t}(x_2^2 - x_1^2) \ ,$$

. . . . . .

$$y_n - y_{n-1} = \operatorname{tg}\alpha_0 (x_n - x_{n-1}) + \frac{p}{2t}(x_n^2 - x_{n-1}^2) \ .$$

Ces n formules ajoutées membre à membre donnent, en supprimant l'indice n,

$$y - y_0 = \operatorname{tg}\alpha (x - x_0) + \frac{p}{2t}(x^2 - x_0^2) \ , \qquad (1)$$

équation d'une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe des y, et qu'on ramène à une forme plus simple en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes ainsi qu'on peut le faire dans les deux cas suivants :

1.° — Si α_0 n'est pas nul, on peut transporter l'origine au point B dont les coordonnées sont $-x_0$, $-y_0$, et l'équation (1) devient, en y remplaçant $\operatorname{tg}\alpha_0$ par $\frac{y_0}{x_0}$,

$$y = \frac{y_0}{x_0} x + \frac{p}{2t}(x^2 - 2x_0 x) \ , \qquad (2) \ , \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y_0}{x_0} + \frac{p}{t}(x - x_0) \ ,$$

ce qui, pour $x = 0$, donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_0}{x_0} - \frac{p}{t} x_0 \ ;$$

et pour exprimer que le point B est le sommet de la courbe, il suffit de poser

$$\frac{y_0}{x_0} - \frac{p}{t} x_0 = 0, \quad \text{d'où} \quad y_0 = \frac{p x_0^2}{t} \ ;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cette valeur de y_o mise dans la relation (2) donne pour l'équation demandée,

$$y = \frac{p}{2t} x^2 .$$

Pour déterminer le paramètre ainsi que la tension horizontale t, il suffit de connaître un seul point de la courbe, par exemple le point M_m dont les coordonnées sont $x = l$, $y = h$, ce qui donne

$$h = \frac{p}{2t} l^2 , \quad \text{d'où} \quad \frac{p}{2t} = \frac{h}{l^2} \quad \text{et} \quad t = \frac{pl^2}{2h} .$$

2°. — Si α_o est nul, on a $\operatorname{tg} \alpha_o = 0$, $y = 0$, et l'équation (1) devient

$$y = \frac{p}{2t} (x^2 - x_o^2) .$$

Le sommet de la courbe est alors placé sur l'axe des y et situé au-dessous du point 0, à une distance $b = \frac{p}{2t} x_o^2$, de sorte qu'en y transportant l'axe des x, l'équation de la courbe se réduit, comme précédemment, à

$$y = \frac{p}{2t} x^2 .$$

On obtient le paramètre ainsi que la tension horizontale t en remarquant que la courbe passe par le point M_m, pour lequel on a $x = l$, $y = h + \frac{p}{2t} x_o^2$, ce qui donne

$$h + \frac{p}{2t} x_o^2 = \frac{p}{2t} l^2 , \quad \text{d'où} \quad \frac{p}{2t} = \frac{h}{l^2 - x_o^2} \quad \text{et} \quad t = \frac{p(l^2 - x_o^2)}{2h} .$$

262. — **Inclinaison, longueur et tension d'un côté quelconque du polygone.** On peut, en partant de l'équation de la courbe, calculer les valeurs de y qui correspondent aux abscisses x_{n-1} et x_n ; l'inclinaison α_n, la longueur c_n et la tension T_n du côté $M_{n-1} M_n$ sont alors données par les relations

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} , \quad c_n = \sqrt{(y_n - y_{n-1})^2 + (x_n - x_{n-1})^2} \quad \text{et} \quad T_n \cos \alpha_n = t , \quad \text{d'où} \quad T_n = \frac{t}{\cos \alpha_n} .$$

263. — **Longueur de la chaîne.** — Pour déterminer la longueur totale de la chaîne, il suffira d'additionner les longueurs de tous les côtés, mais cette longueur totale diffère peu de l'arc de parabole correspondant, et il est plus simple de calculer approximativement la longueur de cet arc.

L'équation de la courbe est de la forme $y = ax^2$, d'où $dy = 2ax\,dx$; en portant dy dans l'expression générale de ds et en développant en série il vient

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx (1 + 4a^2 x^2)^{\frac{1}{2}} = dx (1 + 2a^2 x - 2a^4 x^4 + \dots) .$$

La valeur de ds se présentant ainsi sous la forme d'une série convergente dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, on peut presque toujours se contenter des deux premiers termes en écrire

$$ds = dx (1 + 2a^2 x^2) , \quad \text{d'où} \quad s = x + \tfrac{2}{3} a^2 x^3 ,$$

expression dans laquelle on a suivant les cas

$$a = \frac{h}{l^2} , \quad \text{ou} \quad a = \frac{h}{l^2 - x_o^2} = \frac{h}{l^2 - \frac{d^2}{4}} ,$$

en désignant par d la distance entre deux tiges successives. Sous cette dernière forme on voit que même dans le second cas, on a approximativement $a = \frac{h}{l^2}$, en négligeant $\frac{d^2}{4}$ par rapport à l^2. En portant cette valeur de a dans l'expression de s et en y remplaçant x par l, on trouve finalement

$$s = l + \tfrac{2}{3} \frac{h^2}{l} .$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cinquième partie.

Machines en mouvement.

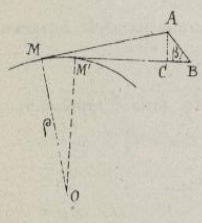
Dynamique des systèmes matériels.

364. — **Rappel du principe de D'Alembert.** — Les questions relatives à la stabilité des constructions peuvent toujours être résolues, comme on l'a vu précédemment par l'application des conditions générales de l'équilibre à un système matériel à l'état de repos, mais il n'en est plus ainsi lorsque les points matériels dont se compose le système sont à l'état de mouvement varié; il faut alors, conformément au principe de D'Alembert, introduire dans les équations d'équilibre les termes provenant des forces d'inertie, et il convient de considérer spécialement les deux cas suivants:

1°. — *Mouvement de translation.* — On sait que si m est la masse d'un point matériel dont l'accélération est $\frac{dv}{dt}$, la force d'inertie qui a pour expression $i = m\frac{dv}{dt}$, est dirigée en sens contraire du mouvement; dans le cas d'un mouvement commun de translation de tous les points du système, toutes les forces i étant de même direction et correspondant à une accélération commune $\frac{dv}{dt}$, on a nécessairement, en désignant par M la masse de tous les éléments matériels qui constituent le système,

$$\Sigma i = \frac{dv}{dt}\Sigma m = M\frac{dv}{dt}.$$

2°. — *Mouvement de rotation autour d'un axe.* — En tournant autour de l'axe projeté en O, le point M, animé d'une vitesse acquise $v = MA$, arrive dans le temps dt en M' après avoir parcouru le chemin $MM' = vdt$. Pendant ce temps la vitesse a varié d'une quantité $adt = AB$ correspondant à une accélération a dans la direction AB, et telle que le point B se trouve sur la tangente en M'. Si l'on projette AB sur $M'B$, les deux vitesses MA et AB peuvent se composer en une seule MB dont la différence BC avec $M'B$ est la représentation de l'accroissement final dv de la vitesse. On a ainsi



$$adt\cos\beta = BC = dv, \qquad \text{d'où} \qquad a\cos\beta = \frac{dv}{dt},$$

$$adt\sin\beta = AC = MM'\frac{MA}{OM} = vdt\frac{v}{\rho}, \qquad \text{d'où} \qquad a\sin\beta = \frac{v^2}{\rho}.$$

L'accélération a a donc pour projection tangentielle $\frac{dv}{dt}$, et la force tangentielle d'inertie ψ qui pourrait la déterminer a pour valeur

$$\psi = m\frac{dv}{dt}.$$

La projection de l'accélération suivant le rayon est $\frac{v^2}{\rho}$; de sorte que la force normale χ qui pourrait la déterminer a pour valeur

$$\chi = m\frac{v^2}{\rho}.$$

Si w est la vitesse angulaire du point m, on a $v = w\rho$, d'où $dv = \rho dw$, et par suite

$$\psi = m\rho\frac{dw}{dt}, \qquad \chi = mw^2\rho.$$

On voit ainsi que tout mouvement de rotation peut être considéré comme dû à deux forces ψ et χ, l'une tangentielle, l'autre normale, qui déterminent la direction et la vitesse du point M à chaque instant du mouvement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

365 ___ **Équations générales du mouvement de rotation.** ___ Pour déduire du principe de D'Alembert les équations générales du mouvement de rotation, il suffit d'introduire au nombre des forces à considérer les composantes tangentielle et normale des forces d'inertie, ce qui donne, en choisissant l'axe de rotation pour axe des z avec deux autres axes perpendiculaires

$$\Sigma F_x + \Sigma \psi_x + \Sigma \chi_x = 0\,, \qquad \Sigma F_y + \Sigma \psi_y + \Sigma \chi_y = 0\,, \qquad \Sigma F_z = 0\,,$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{ox} F + \Sigma \mathcal{M}_{ox} \psi + \Sigma \mathcal{M}_{ox} \chi = 0\,, \quad \Sigma \mathcal{M}_{oy} F + \Sigma \mathcal{M}_{oy} \psi + \Sigma \mathcal{M}_{oy} \chi = 0\,, \quad \Sigma \mathcal{M}_{oz} F + \Sigma \mathcal{M}_{oz} \psi = 0\,,$$

Ces six équations peuvent être considérées comme les équations du mouvement de rotation; car déduites des six équations fondamentales d'équilibre, elles expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les forces auxquelles le système est soumis et qui comprennent toutes les forces d'inertie, satisfassent au principe de D'Alembert.

366. ___ **Expression de l'accélération angulaire.** ___ Si F est la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, de l'une quelconque des forces extérieures du système et r la distance de cette projection à l'axe, le moment de F est Fr, et la somme des moments pour toutes les forces semblables est ΣFr. Pour un point quelconque M du système on doit considérer en outre les deux forces d'inertie ψ et χ; le moment de la première est $\psi\rho$; celui de la seconde est nul puisque cette force dirigée suivant le rayon du point M, rencontre l'axe des moments. En exprimant qu'il y a équilibre de moments entre les forces F et les forces ψ et χ de tous les points du système, il vient

$$\Sigma Fr = \Sigma \psi\rho = \Sigma m\rho \frac{dw}{dt} \times \rho = \frac{dw}{dt} \Sigma m\rho^2\,, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{\Sigma Fr}{\Sigma m\rho^2}\,.$$

ce qui montre que l'accélération angulaire est égale au quotient que l'on obtient en divisant la somme des moments des forces extérieures par le moment d'inertie du solide pris par rapport à l'axe de rotation. Les moments Fr peuvent être les uns positifs et les autres négatifs; mais les moments des forces d'inertie entrent tous avec le même signe parceque ces forces sont toutes de sens contraire au mouvement de rotation.

367. ___ **Expression de la vitesse angulaire.** ___ En désignant par $d\sigma$ le chemin parcouru à l'unité de distance de l'axe pendant le temps dt avec la vitesse acquise w, on a

$$d\sigma = w\,dt\,, \quad \text{ou} \quad w = \frac{d\sigma}{dt}\,; \quad \text{et à cause de} \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\Sigma Fr}{\Sigma m\rho^2}\,, \quad \text{il vient} \quad w\,dw = \frac{\Sigma Fr}{\Sigma m\rho^2}\,d\sigma\,,$$

formule qui permet d'obtenir w par une intégration quand on connaît les valeur de F en fonction de σ.

368. ___ **Travail et puissance vive de rotation.** ___ Chaque point d'application d'une force telle que F, qui exerce son action à la distance r de l'axe de rotation, parcourt dans le temps dt un chemin $ds = rw\,dt$, d'où il résulte que le travail élémentaire de toutes les forces F est

$$d\mathcal{E} = \Sigma Frw\,dt = w\,dt\,\Sigma Fr\,; \qquad \text{et comme on a, (N° 366),} \qquad \Sigma Fr = \frac{dw}{dt} \Sigma m\rho^2\,,$$

il en résulte $\quad d\mathcal{E} = \Sigma m\rho^2 \times w\,dw\,, \quad$ d'où $\quad \mathcal{E} = \Sigma m\rho^2 \times \frac{1}{2} w^2 + C = \frac{1}{2} \Sigma m\rho^2 (w^2 - w_o^2)\,,$

w_o étant la vitesse à l'instant où l'on commence à compter le travail. La quantité $\frac{1}{2} \Sigma m\rho^2 w^2$ exprimant la puissance vive d'un point de masse m et dont la vitesse est ρw, on voit que dans tout mouvement de rotation le travail dépensé se mesure par l'accroissement de la puissance du mobile. Si l'on avait $w < w_o$, $\mathcal{E}$ serait négatif et représenterait l'excès du travail dépensé par le mobile lui-même pendant la période de ralentissement du mouvement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

369. — **Détermination de l'accélération angulaire en tenant compte du frottement.** — Le frottement, dans le mouvement de rotation, est, comme on sait, proportionnel à la pression normale N exercée sur chacun des tourillons de l'arbre. Dans la plupart des machines la pression normale développée par les forces centrifuges est généralement faible et peut être négligée; mais il n'en est pas de même de celle qui résulte de l'action des forces d'inertie tangentielles.

Soit, pour l'un des tourillons de l'arbre, Q la résultante des forces extérieures du système, q son bras de levier, ψ la force tangentielle d'inertie, R la résultante de Q et de ψ et α l'angle de ces deux forces.

La pression exercée sur le tourillon étant N, le frottement qui en résulte est, (N° 286), $fN = f_1 R$, en en désignant par r le rayon du tourillon, le moment de fN est $f_1 rR$; de sorte qu'on a

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\Sigma Fr}{\Sigma m\rho^2} = \frac{Qq - f_1 rR}{\Sigma m\rho^2} = \frac{Qq - f_1 r\sqrt{Q^2 + \psi^2 \pm 2Q\psi\cos\alpha}}{\Sigma m\rho^2}.$$

Si M est la masse du mobile et ρ' la distance de son centre de gravité à l'axe de rotation on a (N° 364, 2°)

$$\psi = M\rho'\frac{dw}{dt};$$

cette valeur, mise dans l'expression précédente donne

$$\frac{dw}{dt} = \frac{Qq - f_1 r\sqrt{Q^2 + (M\rho'\frac{dw}{dt})^2 \pm 2QM\rho'\frac{dw}{dt}\cos\alpha}}{\Sigma m\rho^2},$$

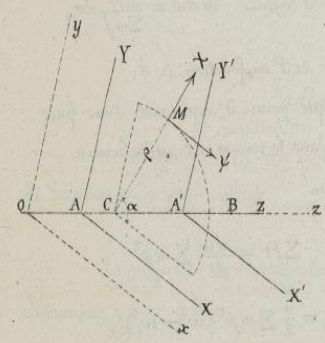
équation d'où l'on déduirait la valeur de l'accélération angulaire $\frac{dw}{dt}$.

Si Q et ψ sont parallèles on a $\cos\alpha = 1$ et la dernière équation devient

$$\frac{dw}{dt} = \frac{Qq - f_1 r(Q \pm M\rho'\frac{dw}{dt})}{\Sigma m\rho^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{Q(q - f_1 r)}{\Sigma m\rho^2 \pm f_1 rM\rho'}.$$

Le terme dû au frottement doit toujours être pris avec le signe — puisqu'il constitue une résistance, et l'on prend le signe supérieur de la parenthèse lorsque les forces Q et ψ agissent dans le même sens.

370. — **Réaction des appuis dans le mouvement varié de rotation.** — Un système matériel soumis à des forces données étant animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe AA', il s'agit de déterminer les réactions que doivent exercer les appuis pour maintenir cet axe dans une position invariable.



Un déplacement quelconque de l'axe pouvant toujours être représenté par un déplacement longitudinal et par la rotation de cet axe autour de l'un de ses points, on peut empêcher le déplacement longitudinal en exerçant une réaction Z suivant la direction de l'axe AA' par un obstacle placé en un point tel que B et l'on empêche la rotation autour d'un axe autre que AA' au moyen de deux collets ou coussinets placés en deux points quelconques de l'axe, par exemple en A et A' à des distances données $OA = a$, $OA' = a'$ d'un point O pris pour origine des distances.

Les réactions exercées en A et en A' par les coussinets sont l'action des forces données. Et ces forces d'inertie ψ et χ peuvent être exprimées par leurs composantes X et Y, X' et Y' respectivement parallèles à deux axes rectangulaires Ox et Oy menés perpendiculairement à la direction AA' prise pour axe des z, en désignant par α l'angle de Ox avec le rayon ρ mené du point M à l'axe Oz parallèlement au plan xOy, par z la distance OC, puis en projetant les forces $\Sigma F, \psi, \chi, X, X', Y, Y'$ et Z successivement sur Ox, Oy, Oz, et en prenant ensuite les moments des mêmes forces par rapport à ces axes, on obtient les six équations d'équilibre suivantes :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\Sigma F_x + X + X' + \Sigma\psi \sin\alpha + \Sigma\chi\cos\alpha = 0\ ,$$
$$\Sigma F_y + Y + Y' - \Sigma\psi\cos\alpha + \Sigma\chi\sin\alpha = 0\ ,$$
$$\Sigma F_z + Z = 0,$$
$$\Sigma M_x F - Ya - Y'a' + \Sigma\psi\cos\alpha\times z - \Sigma\chi\sin\alpha\times z = 0,$$
$$\Sigma M_y F + Xa + X'a' + \Sigma\psi\sin\alpha\times z + \Sigma\chi\cos\alpha\times z = 0,$$
$$\Sigma M_z F - \Sigma\psi\times\rho = 0\ ;$$

et comme on a d'ailleurs

$$\cos\alpha = \frac{x}{\rho}\ ,\quad \sin\alpha = \frac{y}{\rho}\ ,\qquad \psi = m\rho\frac{dw}{dt}\ ,\qquad \chi = m\omega^2\ ,$$

les quantités $\frac{dw}{dt}$ et w ayant une même valeur pour tous les points du système animé d'un mouvement commun de rotation, on peut écrire les équations précédentes sous la forme

$$\Sigma F_x + X + X' + \frac{dw}{dt}\Sigma my + \omega^2\Sigma mx = 0\ , \qquad (1)$$
$$\Sigma F_y + Y + Y' - \frac{dw}{dt}\Sigma mx + \omega^2\Sigma my = 0\ , \qquad (2)$$
$$\Sigma F_z + Z = 0\ , \qquad (3)$$
$$\Sigma M_x F - Ya - Y'a' + \frac{dw}{dt}\Sigma mxz - \omega^2\Sigma myz = 0\ , \qquad (4)$$
$$\Sigma M_y F + Xa + X'a' + \frac{dw}{dt}\Sigma myz + \omega^2\Sigma mxz = 0\ , \qquad (5)$$
$$\Sigma M_z F - \frac{dw}{dt}\Sigma m\rho^2 = 0\ ; \qquad (6)$$

relations qui serviront, dans chaque cas particulier, à déterminer les inconnues du problème. Les valeurs de Z et de $\frac{dw}{dt}$ seront fournies par les équations (3) et (6); les quatre autres équations serviront à calculer X, Y, X' et Y'.

On voit d'ailleurs que l'équation (6), qui donne

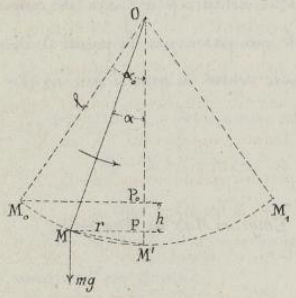
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\Sigma M_z F}{\Sigma m\rho^2}\ ,$$

est, sous une forme plus générale, la reproduction de la valeur de $\frac{dw}{dt}$ donnée au N.° 366.

Les équations précédentes se simplifient lorsque quelques-unes des quantités Σmx, Σmy, Σmyz, Σmxz sont nulles; et dans le cas particulier où l'on a $\Sigma mxz = 0$, $\Sigma myz = 0$, on dit que le système est rapporté à ses axes principaux d'inertie.

Théorie du pendule.

371. — **Pendule simple.** — Un point matériel M, de masse m, attaché à l'extrémité d'un fil inextensible et sans masse, oscille sous l'action de la pesanteur et décrit un arc de cercle en partant d'une position initiale M_0. Déterminer la vitesse de ce point à un instant quelconque du mouvement et calculer la durée d'une oscillation.



Vitesse du mobile. — La valeur de l'accélération angulaire (N.° 366) devient ici

$$\frac{dw}{dt} = \frac{mg\times l\sin\alpha}{ml^2} = \frac{g\sin\alpha}{l}\ , \qquad (1)$$

d'où $dw = \frac{g\sin\alpha\,dt}{l}$, et $dv = l\,dw = g\sin\alpha\,dt$.

Mais en remarquant que l'angle α diminue lorsque t augmente, on a aussi $v\,dt = -l\,d\alpha$, ce qui donne, en éliminant dt,

$$v\,dv = -gl\sin\alpha\,d\alpha\ , \qquad \text{d'où} \qquad v^2 = 2gl\cos\alpha + C\ .$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Au point M_0 pour lequel $v=0$, on a $\alpha=\alpha_0$ ce qui donne

$$0 = 2gl\cos\alpha_0 + C, \qquad \text{d'où} \qquad C = -2gl\cos\alpha_0 ,$$

et par suite

$$v^2 = 2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0), \qquad \text{d'où} \qquad v = \sqrt{gl}\times\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\alpha_0)}, \qquad (2)$$

valeur qui augmente à mesure que α diminue à dont le maximum correspond à $\alpha=0$. A partir de la position M', l'angle α devient négatif mais $\cos\alpha$ reste positif à diminue, de sorte que v va aussi en diminuant jusqu'à ce que l'on ait $\alpha=-\alpha_0$. La vitesse v est alors nulle et le pendule occupe, à la fin de sa course ascendante, la position symétrique de celle qu'il avait au départ. La figure donne d'ailleurs

$$\cos\alpha = \frac{OP}{l}, \quad \cos\alpha_0 = \frac{OP_0}{l}, \quad \text{d'où} \quad \cos\alpha-\cos\alpha_0 = \frac{OP-OP_0}{l} = \frac{h}{l}, \quad \text{et par suite} \quad v = \sqrt{2gh},$$

ce qui montre que la vitesse au point M, dans le sens de la tangente, est égale à celle qui résulterait de la chute verticale du mobile tombant d'une hauteur correspondante h.

Durée d'une oscillation. — La relation $vdt = -l\,d\alpha$ donne, en remplaçant v par la valeur (2),

$$dt = -\frac{l\,d\alpha}{\sqrt{gl}\times\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\alpha_0)}} = -\sqrt{\frac{l}{g}}\times\frac{d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\alpha_0)}}, \qquad \text{d'où} \qquad t = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int\frac{d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\alpha_0)}}.$$

L'intégrale du second membre pourrait être obtenue par un développement en série; mais le calcul se fait plus simplement lorsque α_0 est très-petit, car la corde M_0M' diffère alors très-peu de l'arc correspondant, et l'on peut écrire, avec une approximation suffisante,

$$\overline{M_0M'}^2 = 2OM'\times P_0M', \quad \text{c'est-à-dire} \quad l^2\alpha_0^2 = 2l(l-l\cos\alpha_0), \quad \text{ou} \quad \alpha_0^2 = 2(1-\cos\alpha_0);$$

On aurait de même $\alpha^2 = 2(1-\cos\alpha)$, et par suite $\alpha_0^2-\alpha^2 = 2(\cos\alpha-\cos\alpha_0)$, ce qui donne

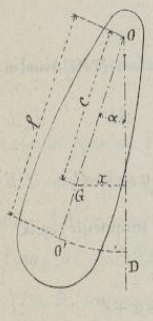
$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}} = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int\frac{d\frac{\alpha}{\alpha_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\arccos\frac{\alpha}{\alpha_0} + C.$$

En intégrant entre les limites $\alpha=\alpha_0$ et $\alpha=0$, qui donnent $\arccos\frac{\alpha_0}{\alpha_0}=0$ et $\arccos\frac{0}{\alpha_0}=\frac{1}{2}\pi$, il vient pour la durée d'une demi-oscillation, $t=\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, et pour la durée T de l'oscillation entière,

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}; \qquad (3)$$

ce qui montre que la durée de l'oscillation est indépendante de l'amplitude lorsque celle-ci est très-petite ainsi qu'on l'a admis dans le calcul précédent.

372. — **Pendule composé.** — Dans le pendule composé les parties qui composent la masse oscillante sont généralement distribuées symétriquement par rapport au plan d'oscillation et par rapport au plan perpendiculaire qui passe par l'axe de suspension; en outre les appuis sont supposés n'exercer aucun frottement pendant le mouvement.



Soit m la masse et mg le poids d'un élément situé à la distance ρ de l'axe de suspension projeté en O et r la distance de cet élément à la verticale qui passe par le point O. Soit en outre M la masse et Mg le poids de tout le système dont le centre de gravité est en G; l'accélération angulaire est (N° 366)

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\Sigma mgr}{\Sigma m\rho^2};$$

et comme on a, d'après la propriété du centre de gravité, $\Sigma mgr = Mgx = Mgc\sin\alpha$,

il en résulte

$$\frac{dw}{dt} = \frac{Mgc\sin\alpha}{\Sigma m\rho^2};$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cette valeur comparée à l'expression (1) du N.° précédent, montre que le pendule composé oscille, dans l'hypothèse d'une très-petite amplitude, comme un pendule simple dont la longueur l satisferait à la condition

$$\frac{g\sin\alpha}{l} = \frac{Mgc\sin\alpha}{\sum m\rho^2}, \qquad \text{d'où} \qquad l = \frac{\sum m\rho^2}{Mc}; \qquad (1)$$

en portant cette valeur de l dans la formule (3) du N.° précédent, on a, pour la durée d'une oscillation

$$T = \pi\sqrt{\frac{\sum m\rho^2}{gMc}}.$$

Centre d'oscillation. — Le point O étant le centre de suspension du pendule composé, et G le centre de gravité de la masse qui le constitue, le point O', de la droite OG, pour lequel on a $OO' = l$ s'appelle le *centre d'oscillation* du pendule; ce point considéré comme faisant partie du pendule, se mène comme il le ferait s'il appartenait à un pendule simple de longueur l. Ce même point, dont la position fait connaître la marche du pendule, possède plusieurs propriétés remarquables.

1.° — Le centre d'oscillation est plus éloigné du centre de suspension que le centre de gravité. En effet, si $\sum m\rho'^2$ est le moment d'inertie du système par rapport au centre de gravité, on a (N.° 143)

$$\sum m\rho^2 = \sum m\rho'^2 + Mc^2 = MR^2 + Mc^2, \quad \text{d'où} \quad l = \frac{\sum m\rho^2}{Mc} = \frac{MR^2+Mc^2}{Mc} = c + \frac{R^2}{c};$$

et comme R^2 est essentiellement positif, on a $l > c$. La relation précédente donne aussi $O'G = l - c = \frac{R^2}{c}$.

2.° — Pour une même masse pendulaire, le produit des distances OG et $O'G$ est constant, car on a $OG \times O'G = c \times \frac{R^2}{c} = R^2$. Cette relation démontre la réciprocité des centres de suspension et d'oscillation; car si l'on prend l'un ou l'autre de ces points pour centre de suspension, la distance du centre d'oscillation au centre de gravité doit satisfaire à la relation $OG \times O'G = R^2$.

On peut, pour un pendule quelconque de masse M, déterminer un axe de suspension tel que les oscillations autour de cet axe se fassent dans un temps donné. On a, en effet,

$$l = c + \frac{R^2}{c}, \quad \text{ou} \quad c^2 - lc + R^2 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad c = \tfrac{1}{2}\left(l \pm \sqrt{l^2 - 4R^2}\right),$$

expression dans laquelle l est déterminé quand on se donne la durée de l'oscillation. Le produit des deux racines étant égal à R^2, on voit que ces racines sont les valeurs des distances réciproques des centres de suspension et d'oscillation au centre de gravité.

Réactions exercées par les points de suspension. — Plusieurs cas sont à considérer:

1.° — Si le pendule est soumis en chaque instant à l'action d'une seule force F on doit avoir, par raison de symétrie et pour une position quelconque, $\sum mz = 0$. Ensuite, si M est la masse totale et c la distance de son centre de gravité à l'axe de suspension, on a $\sum mx = Mc$. On doit aussi remarquer que, pour tout point m' dont les coordonnées seraient x', y', z', il y a toujours un autre point m'' dont les coordonnées sont x', y' et $-z'$, ce qui suffit pour démontrer que l'on doit avoir séparément $\sum mxz = 0$ et $\sum myz = 0$. Les équations (1), (2), ..., (6) du N.° 370 deviennent alors

$$F_x + X + X' + Mc\omega^2 = 0, \qquad F_y + Y + Y' - Mc\frac{dw}{dt} = 0, \qquad F_z + Z = 0,$$

$$M_xF - Ya - Y'a' = 0, \qquad M_yF + Xa + X'a' = 0, \qquad M_zF - \frac{dw}{dt}\sum m\rho^2 = 0,$$

et elles suffisent pour déterminer, dans toutes les positions, les valeurs de X, X', Y, Y', Z et $\frac{dw}{dt}$ lorsque la force unique F est connue.

2.° — Si le pendule est soumis seulement à l'action de la pesanteur on a $F_x = P$, $F_y = 0$, $F_z = 0$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$M_x F = 0$, $M_y F = 0$, $M_z F = Pl\sin\alpha$, et les formules précédentes se simplifient.

3°. — Dans le cas où le pendule est considéré à l'état de repos initial, on a, pour F quelconque,

$$F_x + X + X' = 0, \qquad F_y + Y + Y' - Mc\frac{dw}{dt} = 0, \qquad F_z + Z = 0,$$
$$M_x F - Ya - Y'a' = 0, \qquad M_y F + Xa + X'a' = 0, \qquad M_z F - \frac{dw}{dt}\sum m\rho^2 = 0.$$

et si l'on suppose que la force F n'est autre que le poids P, ces équations se réduisent à

$$P + X + X' = 0, \qquad Y + Y' = 0, \qquad \frac{dw}{dt} = 0$$

On peut se demander s'il serait possible de déterminer la force F de telle manière que les réactions qui résulteraient de la seule action de la pesanteur ne fussent pas modifiées par l'introduction de cette force F dans le système. A l'inspection des équations on voit immédiatement qu'il faudrait pour cela que l'on eût $F_x = 0$ et $F_z = 0$, c'est-à-dire que la force fût parallèle à l'axe des y et que l'on eût aussi $M_x F = 0$, $M_y F = 0$. La seconde équation et la sixième donneraient alors, en désignant par λ la distance de la force F à l'origine des coordonnées et en remplaçant F_y par F,

$$F = Mc\frac{dw}{dt}, \qquad F\lambda = \frac{dw}{dt}\sum m\rho^2, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = \frac{\sum m\rho^2}{Mc}.$$

Cette seule condition étant remplie les six équations sont satisfaites et l'on en conclut ainsi à reconnaître que les réactions ne sont pas modifiées par l'intervention de la force F, si cette force est horizontale, située dans le plan d'oscillation et appliquée en un point D sur la verticale du point de suspension à la distance λ de ce point.

Centre de percussion. — Le point D dont on vient de déterminer la position est désigné sous le nom de *centre de percussion*, et l'on voit d'ailleurs que la valeur de λ est égale à la longueur l du pendule simple qui oscillerait dans les mêmes conditions que le pendule composé, ce que l'on énonce aussi en disant que dans le pendule le centre de percussion se confond avec le centre d'oscillation.

373. — **Pendule balistique.** — C'est sur la propriété du centre de percussion qu'est fondée la théorie du pendule balistique de Robins, à l'aide duquel on détermine la vitesse d'un projectile qui vient choquer un lourd pendule en son centre de percussion dans les conditions indiquées précédemment.

Soit M' la masse du projectile et v sa vitesse au moment du choc ; ce corps agit sur le pendule et se meut ensuite avec lui de manière à n'avoir plus, à la fin du choc, qu'une vitesse égale à celle qui a été communiquée au point choqué et qu'on peut exprimer par $v' = lw$. Si F est l'effort variable développé au contact, on a, pour l'accroissement de la quantité de mouvement, d'après la théorie du choc,

$$M'v - M'v' = \int_0^\theta F\,dt \;;$$

puis $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{Fl}{\sum m\rho^2}$, ou $dw = \dfrac{Fl\,dt}{\sum m\rho^2}$, d'où $w = \dfrac{l}{\sum m\rho^2}\displaystyle\int_0^\theta F\,dt = \frac{l}{\sum m\rho^2}(M'v - M'v')$;

donc la vitesse angulaire du pendule, à la fin du choc, est égale à la quantité de mouvement du corps choquant avant le choc, divisée par le moment d'inertie total après le choc.

En remplaçant v' par lw dans l'expression précédente, on en déduit facilement

$$v = \frac{w}{M'l}(\sum m\rho^2 + M'l^2)$$

expression à l'aide de laquelle il serait facile de calculer la vitesse initiale v du projectile si la vitesse angulaire w du pendule était connue à la fin du choc. A cet effet on remplace w par une quantité qui puisse être observée pendant le fonctionnement de l'appareil ; pour y parvenir il faut remarquer que si P est le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

poids total du système, la puissance vive dépensée pour une certaine élévation h du centre de gravité est (N° 368),

$$Ph = \frac{1}{2} w^2 (\Sigma m\rho^2 + M'l^2), \quad \text{d'où} \quad w = \sqrt{\frac{2Ph}{\Sigma m\rho^2 + M'l^2}}, \quad \text{et par suite} \quad v = \frac{1}{M'l}\sqrt{2Ph(\Sigma m\rho^2 + M'l^2)},$$

de telle manière que l'on peut connaître v par l'observation de h et par la détermination de l et de la quantité $\Sigma m\rho^2 + M'l^2$.

Ces deux quantités peuvent être obtenues par une expérience directe en faisant osciller le pendule, chargé de la masse supplémentaire M', et en déterminant la durée T d'une oscillation par la formule

$$T = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{\Sigma m\rho^2 + M'l^2}{gM'c}},$$

d'où $\Sigma m\rho^2 + M'l^2 = \frac{4gcM'T^2}{\pi^2}$, et $l = \frac{4T^2}{\pi^2}$.

En se ménageant les moyens de faire varier le centre de percussion, à l'aide de poids supplémentaires placés au-dessous du récepteur, M. Morin est parvenu à construire les pendules balistiques actuels dans lesquels l'acuité des couteaux se conserve très-bien malgré l'intensité des chocs, et qui ne donnent lieu à aucune réaction appréciable sur les appuis. Le même principe a été appliqué au canon pendule avec lequel on cherche à apprécier l'effet du recul déterminé par l'action des gaz, et qui doit s'exercer, pour les mêmes motifs, aussi près que possible du centre de percussion.

Des marteaux.

374. — **Notions préliminaires.** — Aucune application des formules qui précèdent ne saurait présenter plus d'intérêt que la théorie des marteaux telle qu'elle a été donnée par Poncelet. Les déductions de cette théorie, qui permet de tenir compte des frottements et des chocs qui peuvent se produire dans les pièces oscillantes, sont d'ailleurs en tout conformes aux faits observés.

On distingue trois sortes de marteaux :

1° — Les marteaux frontaux qui sont relevés par les cames, en avant du marteau proprement dit. Ce sont les plus lourds : ils pèsent de 2.500 à 5.000^k, et ils battent de 50 à 100 coups par minute.

2° — Les marteaux à soulèvement ou à l'allemande qui sont relevés entre l'axe et la tête : ils pèsent de 300 à 400^k, et battent de 70 à 200 coups par minute.

3° — Les martinets ou marteaux à bascule, du poids de 40 à 80^k, et qui frappent de 200 à 400 coups par minute. Le relèvement se fait à l'extrémité de la tige au-delà du centre de rotation.

Le relèvement se fait dans tous les cas au moyen de cames disposées symétriquement autour d'un arbre dit arbre à cames, et qui comprend l'arbre même et tout son attirail, la roue à cames et les cames elles-mêmes qui sont disposées de telle manière que, dans tous les cas, le plan tangent suivant la génératrice de contact entre la came et le manche du marteau passe par le centre d'articulation de ce dernier.

375. — **Périodes successives du fonctionnement.** — Trois périodes distinctes :

1° — Pendant la rotation de l'arbre à cames, l'une de ces cames vient choquer le manche du marteau, et il se produit aussitôt des compressions et des réactions moléculaires qui précèdent l'élévation du marteau. On ne connaît pas l'intensité des forces ainsi développées, mais on sait qu'elles cessent de se produire au bout d'un temps très-court après lequel le marteau ne s'est pas encore soulevé d'un angle appréciable. Poncelet désigne cette

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

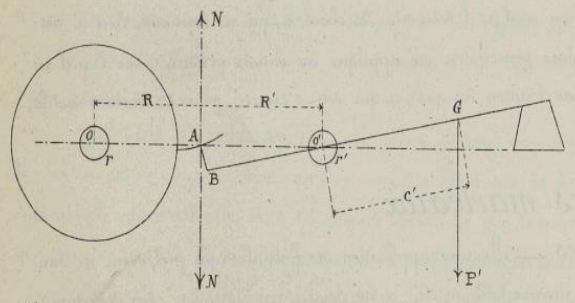
période sous le nom de période de choc et de compression.

2°. — Vient ensuite la période pendant laquelle le marteau est soulevé par la came et où, par conséquent, les points en contact se déplacent simultanément, la came continuant à agir sur le manche sans mettre en jeu de nouvelles forces d'inertie. C'est la période d'élévation proprement dite.

3°. — La came, après avoir abandonné le marteau qui retombe, continue de se mouvoir sans avoir à vaincre d'autres résistances que celles qui sont développées sur ses tourillons et jusqu'à ce que la came suivante reproduise, par rapport au manche, les mêmes phases que précédemment.

La théorie étant à peu près identique pour les trois sortes de marteaux, on l'établira pour le marteau du dernier genre et l'on indiquera ensuite les modifications à apporter au calcul pour que la méthode puisse s'appliquer aux deux autres genres.

376. — Théorie des martinets ou marteaux à bascule. — *Travail dépensé pendant la première période.* — Au moment du choc, la came A vient rencontrer la queue du marteau, indiquée ici par la ligne brisée ABO', et cette came est construite de telle manière que la réaction N, variable pendant toute la durée du choc, reste toujours perpendiculaire au rayon OA.



L'accélération angulaire $\frac{dw'}{dt}$ du marteau est donnée par la formule du N°. 369, en prenant pour mesure de la pression sur le tourillon O', la seule force N qui est, pendant toute la durée du choc, très-grande par rapport aux autres forces du système. On a donc, en désignant par M' la masse du marteau dont le centre de gravité est en G', et par m l'une quelconque des masses élémentaires, située à la distance ρ' de l'axe O',

$$\frac{dw'}{dt} = \frac{N(R' - fr')}{\Sigma m\rho'^2 + fr'M'c'} \qquad (1)$$

Les mêmes notations, employées sans indice, pour représenter les quantités correspondantes par rapport à l'arbre à cames et à ses accessoires, donnent, en considérant la seule pression due à l'effort N dans l'évaluation du frottement,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{N(R + fr)}{\Sigma m\rho^2} \quad ;$$

relation qui suppose d'ailleurs que le centre de gravité de l'arbre est situé en O, au centre de figure. Le frottement fN a ici le même signe que N, parce qu'il concourt, avec cette force, à retarder le mouvement de la came.

Ces deux relations simultanées donnent, en les divisant membre à membre,

$$dw\,\Sigma m\rho^2 = \frac{R + fr}{R' - fr'}\left(\Sigma m\rho'^2 + fr'M'c'\right) dw' \quad ;$$

en posant, pour simplifier, $\Sigma m\rho^2 = \mu R^2$, $\Sigma m\rho'^2 = \mu' R'^2$, les masses primitives étant remplacées par les masses fictives μ et μ', l'expression précédente peut s'écrire

$$\mu R^2 dw = \frac{1 + \frac{fr}{R}}{1 - \frac{fr'}{R'}}\left(1 + \frac{fr'M'c'}{\mu' R'^2}\right)\frac{R}{R'}\,\mu' R'^2 dw' \quad ; \qquad (2)$$

et si l'on représente par K les deux premiers facteurs du second membre, dont la valeur est constante pour un même marteau, il vient, en divisant ensuite par R^2,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\mu\, dw = K\,\frac{R'}{R}\,\mu'\, dw' \qquad (3)$$

Si Ω est la vitesse angulaire de l'arbre à cames avant le choc, ω sa vitesse angulaire après le choc, et ω' la vitesse angulaire correspondante du marteau, on a, pour la vitesse commune des points de contact, $R\omega = R'\omega'$, et en intégrant l'équation (3) il vient

$$\mu\,(\Omega - \omega) = K\,\frac{R'}{R}\,\mu'\omega' = K\mu'\omega\,, \quad \text{d'où} \qquad \omega = \frac{\mu\,\Omega}{\mu + K\mu'} \qquad (4)$$

En désignant par Ω' la vitesse angulaire moyenne pendant le choc, on peut aussi écrire

$$\Omega' = \tfrac{1}{2}\,(\Omega + \omega)\,; \qquad (5)$$

et si l'on élimine séparément Ω et ω entre (4) et (5), il en résulte, en fonction de Ω'

$$\omega = \frac{2\mu\,\Omega'}{2\mu + K\mu'}\,, \qquad \text{et} \qquad \Omega = \frac{2(\mu + K\mu')\,\Omega'}{2\mu + K\mu'}\,.$$

Le travail dépensé par l'arbre à cames à chacun des chocs, ayant pour expression $\frac{1}{2}\,\mu R^2(\Omega^2 - \omega^2)$, si l'on y remplace ω et Ω par les valeurs précédentes il vient

$$\tfrac{1}{2}\,\mu R^2(\Omega^2 - \omega^2) = \frac{2K\mu\mu' R^2 \Omega'^2}{2\mu + K\mu'}\,.$$

Pour passer de ce travail absorbé pendant la durée d'un choc, à la valeur du travail dépensé par seconde, il suffit de multiplier l'expression précédente par le nombre n de cames de la roue et par le nombre $\frac{l}{60}$ des tours que fait l'arbre par seconde, ce qui donne

$$\mathcal{C}_1 = \frac{nl}{60} \times \frac{2K\mu\mu' R^2 \Omega'^2}{2\mu + K\mu'}\,.$$

Poncelet fait remarquer que le coefficient constant K diffère en général très peu de l'unité. Pour un marteau frontal qu'il cite on a $K = 1{,}006$, et pour un marteau à soulèvement $K = 1{,}004$. Cette remarque permettra d'estimer approximativement l'utilisation pendant la première période.

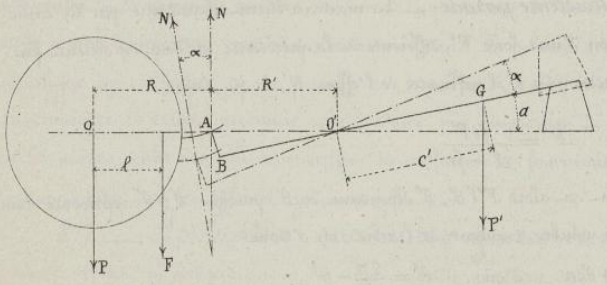
Travail dépensé pendant la deuxième période. — Après la période du choc, la came entraîne le marteau dans son mouvement, la vitesse des deux organes reste commune au point de contact et les forces d'inertie cessent d'être en jeu. Il suffit donc de déterminer, dans la seconde période, la somme des travaux dépensés pour vaincre le poids du marteau et les frottements sur les différents points de contact.

Considérons d'abord le marteau dont le poids est P et soit toujours N l'effort exercé par la came. Dans la position initiale, la ligne qui représente l'axe du manche du marteau fait avec l'horizontale un angle α qui augmente successivement pendant la levée d'un angle variable α.

La pression sur l'axe du marteau est donnée par la résultante des deux forces P et N au centre de rotation. Si l'arbre a tourné d'un angle α, la force N, perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact, est inclinée d'un angle α par rapport à la verticale de sa position primitive ; la pression au centre de rotation est alors égale à

$$\sqrt{(P' + N\cos\alpha)^2 + (N\sin\alpha)^2}\,,$$

et l'on peut, suivant les indications de Poncelet, poser, comme au N° 286



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\sqrt{(P'+N\cos\alpha)^2+(N\sin\alpha)^2} = 0{,}96\,(P'+N\cos\alpha)+0{,}4\,N\sin\alpha\,. \qquad (6)$$

Pendant cette période du mouvement il y a égalité entre les travaux virtuels, ce qui donne

$$NR'd\alpha = P'c'\cos(a+\alpha)\,d\alpha + fr'\left[0{,}96\,(P'+N\cos\alpha)+0{,}4\,N\sin\alpha\right]d\alpha\,.$$

On pourrait intégrer cette équation si l'on connaissait la loi des variations de N, mais on arrive à un résultat suffisamment exact en considérant N comme différant peu d'une valeur moyenne N' que l'on peut substituer à cette variable, et l'on a alors, α' étant le maximum de α,

$$N'R'\alpha' = P'c'\left[\sin(a+\alpha')-\sin a\right]+fr'\left[0{,}96\,(P'\alpha'+N'\sin\alpha')+0{,}4\,N'(1-\cos\alpha')\right],$$

d'où l'on tire, pour N', en y posant $c'\left[\sin(a+\alpha')-\sin a\right]=h$

$$N' = \frac{P'(h+0{,}96\,fr'\alpha')}{R'\alpha'+fr'\left[0{,}96\sin\alpha'+0{,}4\,(1-\cos\alpha')\right]}\,.$$

Soit maintenant F l'effort moteur exercé à une distance l du centre de l'arbre à cames, P le poids de cet arbre et tout ce qui l'attirait; la pression sur les tourillons est, à chaque instant, déterminée par les trois forces P, F et N, cette dernière agissant en sens contraire des deux autres. En égard au petit angle que font entre elles ces trois forces, on peut admettre que la pression est égale à la somme $F+P-N$.

Il y a, à chaque instant, égalité entre les travaux virtuels de F et des résistances suivantes:

1°. — L'effort résistant N du marteau agissant à la distance R du centre de rotation.

2°. — Le frottement développé au contact de la came et du marteau, et qui peut être représenté par

$$\tfrac{1}{2}\,fN\left(\tfrac{1}{R}+\tfrac{1}{R'}\right)R'\alpha'$$

en le considérant comme ayant lieu entre deux dents d'engrenage dont le pas est $R'\alpha'$.

3°. — Le frottement $f(F+P-N)$ sur le tourillon de l'arbre à cames.

On a donc, pour un déplacement angulaire $d\theta$,

$$Fl\,d\theta = NR\,d\theta + \tfrac{1}{2}fN\left(\tfrac{1}{R}+\tfrac{1}{R'}\right)R'\alpha'R\,d\theta + fr(F+P-N)\,d\theta\,.$$

Si l'on substitue aux quantités N et F, variables pendant la levée, la valeur moyenne N' obtenue précédemment, et la valeur moyenne F' qu'il s'agit de déterminer, puisque l'on intègre entre les limites 0 et θ', en observant que dans le second terme du second membre on a $R'\alpha'=R\theta'$, on trouve

$$F'l\theta' = N'R\theta'+\tfrac{1}{2}fN'\left(\tfrac{1}{R}+\tfrac{1}{R'}\right)R'^2\theta'^2+fr\theta'(F+P-N'), \quad \text{d'où} \quad F' = \frac{1}{l-fr}\left[N'R+\tfrac{1}{2}fN'\left(\tfrac{1}{R}+\tfrac{1}{R'}\right)R'^2\theta'+fr(P-N')\right];$$

par suite, le travail dépensé pendant la levée est pour chaque came, $F'l\theta'$, et le travail par seconde est

$$\mathcal{C}_2 = \frac{nt}{60}\,F'l\theta'\,,$$

θ' étant l'angle total de déplacement de la came pendant toute la durée de la levée du marteau.

Travail dépensé pendant la troisième période. — Le marteau étant abandonné par la came, l'arbre continue à se mouvoir seul sous l'action d'une force F'', différente de la précédente, et dont on obtient facilement la valeur en supprimant dans l'expression de F', l'influence de l'effort N', ce qui donne

$$F'' = \frac{frP'}{l-fr}$$

La mesure du travail correspondant est alors $F''l\theta''$, θ'' dépendant de θ', puisque $\theta'+\theta''$ représente l'angle compris entre deux cames successives, en nombre n autour de l'arbre; on a donc

$$2\pi = (\theta'+\theta'')n\,, \quad \text{d'où} \quad \theta' = \frac{2\pi}{n}-\theta'\,,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et le travail dépensé, en moyenne, pendant la troisième période, a pour expression

$$\mathcal{E}_3 = \frac{nl}{60}\, F''l\left(\frac{2\pi}{n} - \theta'\right).$$

Travail total dépensé par le marteau. — On obtient ce travail en additionnant les trois quantités $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$, ce qui donne

$$\mathcal{E} = \frac{nl}{60}\left[\frac{2K\mu\mu' R^2\Omega^2}{2\mu + K\mu'} + F'l\theta' + F''l\left(\frac{2\pi}{n} - \theta'\right)\right]. \qquad (7)$$

Le premier terme est de beaucoup le plus important, et l'on voit qu'il dépend des masses μ et μ' par lesquelles on a remplacé les masses réelles M et M', en les concentrant respectivement aux extrémités des rayons R et R'. La masse μ', toujours beaucoup plus petite que μ, est, en général, peu différente de $\frac{1}{30}\mu$ pour les marteaux frontaux, et égale à $\frac{1}{12}\mu$ environ pour les marteaux à soulèvement. Il en résulte qu'on peut, sans erreur notable, négliger μ' au dénominateur du premier terme lequel se réduit alors à $K\mu' R^2\Omega'^2$, ou simplement à $\mu' R^2\Omega'^2$, si l'on admet que K diffère peu de l'unité. Cette dernière valeur est précisément au double de celle qui représente le travail emmagasiné dans le marteau après le choc, et l'on voit ainsi que la perte de travail pendant le choc est peu différente de la moitié du travail dépensé pour le produire.

Utilisation. — Le travail utilisé pour effectuer l'opération industrielle à laquelle le marteau est employé, est celui que peut développer le marteau en retombant. On a désigné précédemment par h la hauteur à laquelle il est élevé pendant la période de soulèvement; mais il doit encore s'élever ensuite, en vertu de la vitesse acquise, d'une hauteur h' à partir du moment où il est abandonné par la came. A ce moment, le point qui était en contact avec la came est animé d'une vitesse peu différente de Ω', ce qui correspond à une vitesse angulaire du marteau mesurée par $\frac{R\Omega'}{R'}$, et le travail $P'h'$ nécessaire pour élever le marteau à la hauteur h' devant être égal à la puissance vive acquise, on a

$$P'h' = \tfrac{1}{2}\mu' R'^2\left(\frac{R\Omega'}{R'}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\mu' R^2\Omega'^2, \quad \text{d'où} \quad h' = \frac{\mu' R^2\Omega'^2}{2P'}.$$

La valeur de h' étant ainsi calculée, le travail que fournit la chûte du marteau est $P'(h+h')$, et en comparant ce travail utile au travail dépensé, on a pour l'utilisation

$$U = \frac{P'(h+h')}{\mathcal{E}}$$

valeur qui doit être considérée comme différant peu de $\frac{1}{2}$ si l'on tient compte des remarques faites précédemment.

Travail nécessaire pour produire un effet déterminé. — Si l'on examinait, dans la fabrication du fer par exemple, l'effet produit par chaque chûte de marteau, on pourrait recueillir des coefficients très-utiles pour l'établissement des marteaux destinés au même usage. En désignant par a et b les dimensions transversales de la panne du marteau, et par c la profondeur de l'impression produite sur un fer déterminé et chauffé à une température approximativement connue, le volume de l'impression est abc, et en appliquant à ce volume un coefficient m, on peut écrire $mabc = P'(h+h')$. La valeur de m déduite de cette relation ferait connaître le travail nécessaire pour produire une impression de 1^{mq} sur un fer de même nature et chauffé dans les mêmes conditions. La considération du coefficient m fournirait une notion exacte et fort utile de la résistance opposée par les différents genres de fabrication.

377 — *Application aux autres genres de marteaux.* — La formule (7) du N.° précédent ne met en évidence aucun des signes relatifs aux sens dans lesquels agissent les résistances passives;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

elle est, sous sa forme définitive, applicable à tous les genres de marteaux, à la condition toutefois, que les quantités K, F', F'' qui y entrent, soient calculées convenablement eu égard aux éléments qui forment ces quantités.

La valeur de K a peu d'importance puisqu'elle diffère peu de l'unité; cependant il convient de remarquer que, pour les marteaux frontaux ou les marteaux à soulèvement, on serait conduit à changer le signe du terme $f'M'c'$ dans la formule (1), et par suite, le signe du second terme de la parenthèse dans la formule (2). Le terme $N\cos\alpha$ qui entre dans la formule (6) devrait être changé de signe s'il s'agissait d'un marteau soulevé du côté de la panne, et la pression correspondante sur les tourillons de l'arbre à cames serait alors $P+F+N$. Tous ces changements de signes donneraient nécessairement des valeurs différentes pour F' et F''.

378. — **Observation sur le centre de percussion des marteaux.** — Au point de vue de l'action de la came, il serait utile que le choc eût lieu au centre de percussion du manche du marteau, et cette condition ne pourrait être satisfaite que dans les marteaux frontaux et dans les marteaux à soulèvement dont le point d'attache a toujours lieu, par rapport au centre d'articulation, du même côté que le centre de gravité. Mais, eu égards aux ébranlements déterminés par le fonctionnement, le choc qui a lieu lors du frappage est surtout à considérer, et l'on est arrivé, par l'enseignement même de la pratique, à faire que la distance R' soit très-peu différente de la longueur l donnée par la formule (1) du N° 372, laquelle devient ici, en considérant le marteau comme un pendule et en y appliquant les relations spéciales de la question

$$l=\frac{\mu' R'^2}{M'c'}, \quad \text{qui pour} \quad l=R' \quad \text{donne} \quad R'=\frac{M'c'}{\mu'};$$

et Poncelet, qui a vérifié expérimentalement, sur un marteau frontal toutes les conséquences de la théorie qui précède, a constaté que l'on avait pratiquement donné à R' la valeur $R'=1^m,62$, alors que le calcul précédent eût conduit à $R'=1^m,80$. Il est inutile d'insister sur l'importance de cette vérification.

379. — **Pilons mus par des cames.** — Le fonctionnement des pilons mus par des cames présente, comme celui des marteaux, trois périodes distinctes, et la marche à suivre pour calculer les différentes quantités de travail dépensées est la même avec cette différence que la puissance vive du pilon est représentée par $M'v'^2$ au lieu de $\mu' R'^2\omega^2$. On arrive d'ailleurs par la même suite de raisonnements, à la formule

$$\mathcal{C}=\frac{nt}{60}\left[\frac{2K'\mu M'R^2\Omega^2}{2\mu+KM'}+F'l\theta+F''l\left(\frac{2\pi}{n}-\theta\right)\right],$$

dans laquelle M' représente la masse entière du pilon, augmentée dans la proportion nécessaire pour tenir compte des frottements dans les guides.

Le coefficient K' s'obtient en négligeant, dans la valeur de K relative aux marteaux le terme dû au frottement sur le tourillon de rayon r', et en y faisant ensuite $c'=0$ parceque le centre de gravité du pilon a toujours un mouvement parallèle et égal à celui du point de contact. On trouve ainsi

$$K'=1+\frac{fr}{R}.$$

Quant aux valeurs de F' et F'', elles s'obtiennent beaucoup plus simplement en tenant compte seulement des frottements relatifs aux points de contact de la came et aux tourillons de l'arbre.

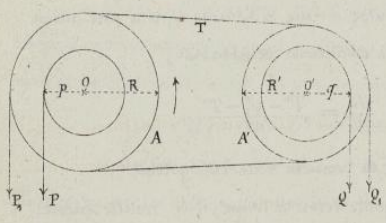
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Organes de rotation employés dans les machines.

380. — **Considérations générales.** — Les machines employées dans les ateliers renferment toujours des organes de rotation quand elles doivent fonctionner d'une manière continue, parce qu'il serait impossible de soumettre aucun de ces organes à un mouvement rectiligne continu. Lorsque le mouvement rectiligne est nécessaire, il est alternatif, et ce sont encore des organes rotatifs qui sont chargés d'en opérer le changement aux moments convenables. On voit ainsi que les organes de rotation, considérés dans leur rôle général, ont une importance prépondérante dans les machines; et avant d'étudier chacun d'eux en particulier il convient d'examiner les conditions générales de leur fonctionnement.

1°. — *Réactions mutuelles des organes rotatifs.* — Lorsque deux corps animés de mouvements de rotation sont liés l'un à l'autre d'une manière quelconque, comme cela se présente, par exemple, dans les transmissions par courroies ou par engrenages, toute variation de la vitesse de l'un d'eux doit nécessairement amener, entre les points en contact, des réactions analogues à celles que présente la première période du fonctionnement des marteaux, et l'intensité de ces réactions mutuelles, égales et de signes contraires, doit toujours être limitée de telle sorte qu'il n'en puisse résulter aucune altération des deux organes en mouvement.

2°. — *Transmission entre deux organes de rotation.* — Soient A et A' deux organes de rotation, réunis par une courroie par exemple, l'un d'eux étant soumis à l'action d'une force motrice P, et l'autre devant vaincre une résistance Q. Si T est la tension de la courroie à un instant donné, les accélérations angulaires sont (N° 366), en remarquant que la force T, résistante pour la poulie A, est motrice pour la poulie A',



$$\frac{dw}{dt} = \frac{Pp - TR}{\sum m\rho^2}, \quad (1) \qquad \frac{dw'}{dt} = \frac{TR' - Qq}{\sum m\rho'^2}. \quad (2)$$

Si la courroie est supposée inextensible, la vitesse commune de l'un des points de contact est

$$Rw = R'w', \quad \text{d'où} \quad R\,dw = R'\,dw'; \quad (3)$$

en éliminant dw et dw' entre (1), (2) et (3) on a

$$\frac{R(Pp - TR)}{\sum m\rho^2} = \frac{R'(TR' - Qq)}{\sum m\rho'^2}, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{RPp\sum m\rho'^2 + R'Qq\sum m\rho^2}{R^2\sum m\rho'^2 + R'^2\sum m\rho^2}, \quad (4)$$

En posant, comme pour les marteaux, $\sum m\rho^2 = \mu R^2$, $\sum m\rho'^2 = \mu' R'^2$, et ensuite $Pp = P_1 R$, $Qq = Q_1 R'$, les formules (1), (2) et (4) peuvent s'écrire plus simplement

$$\frac{dw}{dt} = \frac{P_1 - T}{\mu R}, \qquad \frac{dw'}{dt} = \frac{T - Q_1}{\mu' R'}, \qquad T = \frac{P_1\mu' + Q_1\mu}{\mu + \mu'};$$

enfin, la valeur de T, variable avec P_1 et Q_1, étant substituée dans les expressions de $\frac{dw}{dt}$ et $\frac{dw'}{dt}$, donne encore

$$\frac{dw}{dt} = \frac{P_1 - Q_1}{R(\mu + \mu')}. \qquad \frac{dw'}{dt} = \frac{P_1 - Q_1}{R'(\mu + \mu')}.$$

Si la courroie qui relie les deux mobiles était une courroie sans fin, T serait alors la différence entre les tensions des deux brins. Les valeurs de $\frac{dw}{dt}$ et de $\frac{dw'}{dt}$ seraient encore les mêmes dans le cas d'une transmission par engrenages, T représentant alors la réaction exercée sur chacune des dents en contact.

Pour $P_1 = Q_1$, les formules précédentes se réduisent à

$$\frac{dw}{dt} = 0, \qquad \frac{dw'}{dt} = 0, \qquad T_1 = Q_1,$$

ce qui doit être, l'accélération étant nulle lorsque le travail moteur est égal au travail résistant.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si P_1 est plus grand ou plus petit que Q_1 on peut poser $P_1 = Q_1 + P_2$ la quantité P_2 étant positive ou négative suivant les cas, ce qui donne

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P_2}{R(\mu+\mu')}, \qquad \frac{dw'}{dt} = \frac{P_2}{R'(\mu+\mu')}, \qquad T = Q_1 + \frac{P_2}{1+\frac{\mu}{\mu'}}.$$

Lorsque P_2 est positif, les valeurs de $\frac{dw}{dt}$, $\frac{dw'}{dt}$ et T sont aussi positives et le mouvement s'accélère dans le sens du mouvement positif. Dans le cas contraire $\frac{dw}{dt}$ et $\frac{dw'}{dt}$ sont négatives, les vitesses primitives vont en diminuant et finissent par devenir nulles. Quant à la valeur de T, qui est alors plus petit que P_1, elle peut aussi devenir négative. Si l'on veut que T soit maintenu entre des limites peu étendues il faut que le rapport $\frac{\mu}{\mu'}$ soit très-grand, c'est-à-dire que μ soit très-grand relativement à μ'. On satisfait à cette condition par l'emploi des volants qui ne sont autre chose que des anneaux d'un grand poids, placés dans les transmissions, aux points sur lesquels les plus grandes variations de vitesse sont à craindre.

3°. — *Cas d'un plus grand nombre de mobiles.* — Pour déterminer les réactions produites entre les organes de rotation s'il y en a plus de deux, il vaut mieux recourir à la valeur de $\frac{dw}{dt}$ cette accélération étant la même pour les points correspondants de deux mobiles reliés entre eux par un engrenage ou une courroie. Si l'une des poulies ou l'un des engrenages est soumis à un effort P et à une action résistante T, on a, pour cet organe, en adoptant les notations précédentes,

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{dw}{dt} = \frac{P_1 - T}{\mu}.$$

Si la roue conduite, sur laquelle agit l'action motrice T, est soumise à une résistante Q_1' et à une action résistante T', on a, pour cette roue et pour les suivantes, supposées dans des conditions semblables,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{T - Q_1' - T'}{\mu'}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{T' - Q_1'' - T''}{\mu''}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{T'' - Q_1''' - T'''}{\mu'''};$$

mais il est évident qu'il n'y a pas à considérer de tension résistante pour la dernière roue du système.

Toutes ces valeurs de $\frac{dv}{dt}$ étant égales entre elles, si on les ajoute terme à terme, il en résulte encore des valeurs égales entre elles, ce qui donne, en posant $T''' = 0$ dans la dernière

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P_1 - T}{\mu}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{P_1 - Q_1' - T'}{\mu+\mu'}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{P_1 - Q_1' - Q_1'' - T''}{\mu+\mu'+\mu''}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{P_1 - Q_1' - Q_1'' - Q_1'''}{\mu+\mu'+\mu''+\mu'''}.$$

La dernière de ces expressions permet de déterminer $\frac{dv}{dt}$; et cette quantité étant connue, les autres équations conduisent aux valeurs des tensions successives T, T' et T'', quand on connaît la force motrice ainsi que toutes les résistances agissant sur chacun des mobiles. S'il y avait plusieurs forces motrices on les introduirait dans les équations avant de les additionner, pour arriver à la valeur de $\frac{dv}{dt}$.

4°. — *Expression générale de la puissance vive.* — Tous les mouvements de rotation d'un système composé de treuils ou de poulies, réunis par des engrenages ou des courroies, restant constamment proportionnels, si on désigne par w la vitesse angulaire de l'un quelconque des mobiles, les vitesses de tous les autres peuvent être représentées par $K'w$, $K''w$, ..., les coefficients K', K'', ... puisés dans les conditions géométriques du système, pouvant d'ailleurs être plus grands ou plus petits que l'unité; en représentant par m', m'', ..., les masses élémentaires de chacun des mobiles, placés à des distances ρ', ρ'', ..., des axes de rotation respectifs, la puissance vive de l'un d'eux est exprimée d'une manière générale par

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m'\rho'^2 w'^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma m'\rho'^2 K'^2 w^2 = \tfrac{1}{2} w^2 K'^2 \Sigma m'\rho'^2;$$

en écrivant une expression semblable pour chacun des autres mobiles et en y additionnant on trouve

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\tfrac{1}{2}w^2(K'^2\Sigma m'\rho'^2 + K''^2\Sigma m''\rho''^2 + K'''^2\Sigma m'''\rho'''^2 + \dots) ,$$

quantité que l'on peut toujours égaler à un produit $\tfrac{1}{2}w^2M^2R^2$, dans lequel M est une masse fictive concentrée en un anneau d'un rayon donné R. Le facteur M^2R^2 est d'ailleurs une quantité constante sur laquelle la vitesse n'a aucune influence et qui dépend uniquement des conditions matérielles de chacun des mobiles et des relations géométriques de leur mode de liaison.

5°. — *Expression générale de toutes les résistances en fonction d'une résistance unique.* La composition de toutes les résistances en une seule peut s'effectuer par un procédé analogue au précédent, à la condition de tenir compte, pour chacune d'elles, de la relation entre la vitesse de son point d'application par rapport au mobile auquel toutes les résistances sont rapportées.

Si par exemple le mobile doit vaincre une résistance S' appliquée à une distance r' de son centre de rotation, et si w' est la vitesse de rotation de son axe, le travail élémentaire de cette résistance est $S'r'dw' = S'r'K'dw$, et la somme de tous les travaux correspondants peut s'exprimer par

$$dw(K'S'r' + K''S''r'' + \dots) = Qq\,dw , \qquad \text{d'où} \qquad K'S'r' + K''S''r'' + \dots = Qq .$$

Les coefficients $K', K'', \dots$, sont les rapports des diverses vitesses angulaires à la vitesse angulaire du mobile auquel on suppose qu'est appliquée la seule résistance Q. A l'aide de ces simplifications, l'étude complète du mouvement des corps tournants peut se faire sur un mobile unique par rapport auquel toutes les puissances vives et toutes les résistances auraient été évaluées.

6°. — *Condition pour que la vitesse soit périodique.* — Si l'on considère, dans un système, composé exclusivement d'organes de rotation, la vitesse w, le travail moteur T_m et le travail résistant T_r comme des variables dépendant du temps, le principe général des puissances vives peut s'écrire sous la forme

$$\Sigma\tfrac{1}{2}m\rho^2w^2 - \Sigma\tfrac{1}{2}m\rho^2w_0^2 = T_m - T_r , \quad \text{ou encore} \quad \tfrac{1}{2}MR^2(w^2 - w_0^2) = T_m - T_r . \qquad (1)$$

Sous cette forme, on voit que w augmente pendant toute la période dans laquelle on a $T_m > T_r$, et l'influence inverse se traduit par une diminution de vitesse. Le maximum de w a donc lieu lorsque $T_m - T_r$ cesse de croître et le minimum lorsque $T_m - T_r$ cesse de diminuer; de sorte que ces valeurs extrêmes correspondent aux instants pour lesquels on a $d(T_m - T_r) = 0$ ou $dT_m = dT_r$. On les distingue en examinant le signe de la dérivée seconde. L'expression (1) montre aussi que w reprend la même valeur toutes les fois que, pour la durée entière d'une certaine période, on a $T_m = T_r$, ce qui permet de reconnaître, pour les organes rotatifs, les positions pour lesquelles la vitesse repasse par les mêmes états de grandeur, et à partir desquelles le mouvement est nécessairement périodique, si les travaux moteurs et résistants continuent à se développer dans le même ordre et dans les mêmes conditions. Il suffit, dans ce cas, d'étudier une des périodes comprenant toutes les variations pour connaître le mouvement de tout le système. Cette condition de la périodicité dans les mouvements est en quelque sorte la condition fondamentale de la plupart des machines à organes rotatifs. Si elle n'était pas satisfaite, le mouvement continuerait indéfiniment à s'accélérer, ou finirait par s'arrêter, ce qui ne doit se présenter qu'au moment de l'arrêt de la machine.

381. — **Objet des volants dans les machines.** — On vient de voir que, dans les mouvements de rotation, les écarts de vitesse, pour une période donnée, peuvent être calculés par la formule générale

$$\tfrac{1}{2}MR^2(w''^2 - w'^2) = T_m - T_r ,$$

qui montre que, pour les mêmes variations de travail, la différence $w''^2 - w'^2$ est d'autant plus petite que MR^2 est plus grand. De là l'utilité de placer, sur l'un des arbres de rotation, un organe spécial nommé *volant*, dont le moment d'inertie doit être calculé de manière à restreindre les variations de la vitesse dans le mouvement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

périodique de rotation. Le volant d'une machine à vapeur, par exemple, n'a donc pas pour objet unique de déterminer le passage des points morts en lesquels l'action motrice est nulle ; il a encore et surtout pour objet de régulariser la vitesse en accumulant de la puissance vive lorsque le travail moteur est supérieur au travail résistant, pour la restituer lorsque l'effet contraire se produit ; et par une augmentation convenable du moment d'inertie MR^2, il permet de satisfaire à cette condition que la différence $w''-w'$ entre la plus grande et la plus petite vitesse angulaire soit toujours inférieure ou au plus égale à une fraction donnée $\frac{1}{n}$ de la vitesse angulaire moyenne ω, le nombre n étant ce que l'on nomme le *coefficient de régularisation*.

Il résulte de là qu'en posant $w''-w'=\frac{\omega}{n}$ et $w''+w'=2\omega$, ce qui donne $w''^2-w'^2=\frac{2\omega^2}{n}$, et en désignant par Π le poids Mg que doit avoir le volant pour satisfaire à la condition posée, l'équation précédente, dans laquelle R est le rayon de gyration de la masse M, peut s'écrire

$$\Pi R^2\omega^2 = gn(T_m-T_r) = 9{,}8088\,n(T_m-T_r).$$

Si en outre n' est le nombre de tours de l'arbre par minute, T le travail moteur, supposé égal au travail résistant pour un tour de l'arbre, et N le nombre de chevaux de 75 kilogrammètres par seconde, on a $n'T=4500N$, et la dernière équation peut se mettre sous la forme

$$\Pi R^2\omega^2 = 9{,}8088\times 4500\,\frac{T_m-T_r}{T}\times\frac{nN}{n'}, \quad \text{ou finalement,} \quad \Pi R^2\omega^2 = 44140\,\frac{T_m-T_r}{T}\times\frac{nN}{n'}. \qquad (1)$$

Les dimensions que doit avoir un volant dépendent nécessairement des circonstances que présentent les variations des efforts moteurs et résistants. Le plus souvent, le mouvement de rotation est déterminé par l'intermédiaire d'une ou de plusieurs manivelles qui peuvent varier dans leur mode d'action, et c'est de ce genre de mouvement qu'il est surtout utile de s'occuper.

Le problème général du calcul d'un volant comprend les questions suivantes :

1°. — Condition de périodicité.

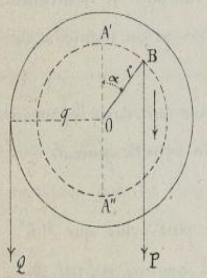
2°. — Position des organes pour les vitesses extrêmes.

3°. — Valeur de la différence T_m-T_r pour l'intervalle compris entre les vitesses extrêmes.

4°. — Dimensions d'un volant satisfaisant à la condition de régularisation demandée.

382. — **Volant d'une manivelle à simple effet.** — Une force P d'intensité et de direction constantes, agissant à l'extrémité d'une manivelle de longueur r, pendant la moitié de la rotation de cette manivelle, doit vaincre une résistance Q appliquée à une distance q de l'axe de rotation ; on demande de déterminer toutes les conditions du mouvement de cette manivelle.

1°. — *Condition de périodicité.* — Pour que le mouvement soit le même à deux périodes séparées par un certain temps, il faut et il suffit que pendant ce temps le travail moteur ait été égal au travail résistant, et si l'on veut que la période corresponde à une révolution entière, il faut estimer séparément les deux travaux correspondants à cette révolution et les égaler entre eux. Or le travail total de la force motrice P se mesure par l'intégrale du produit de cette force, supposée constante, par la somme des projections des chemins parcourus par le point auquel elle est appliquée, c'est-à-dire par $2r$, attendu que cette force P n'agit, par hypothèse, que pendant le déplacement de A' en A'', et non pendant le déplacement de A'' en A'. Ce travail, pour un tour, est donc $T=P\times 2r$.



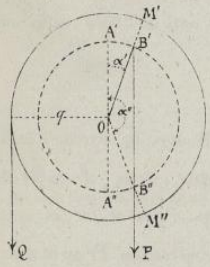
Quant à la résistance Q dont le point d'application se meut constamment dans la direction même de la tangente à la circonférence de rayon q, le travail,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pour un tour, est mesuré par $Q \times 2\pi q$ et la condition du retour régulier des mêmes vitesses, aux mêmes positions est exprimée par

$$2Pr = 2\pi Qq. \qquad (1)$$

2°. — *Position de la manivelle correspondant aux limites inférieure et supérieure de la vitesse.* — On sait, par ce qui précède, que ces limites correspondent aux positions pour lesquelles il y a égalité entre les travaux élémentaires, ou équilibre momentané entre les forces extérieures qui sont ici les deux forces parallèles P et Q. Il suffit par conséquent d'écrire que leurs moments sont égaux, ce qui donne, en représentant par α l'angle de la verticale et de la position cherchée,



$$Pr \sin\alpha = Qq \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2), divisées membre à membre, donnent immédiatement

$$\sin\alpha = \frac{1}{\pi} = 0,31831 ;$$

valeur à laquelle correspondent les angles

$$\alpha' = 18°33'40'', \qquad \alpha'' = 180° - \alpha' = 161°26'20''.$$

On obtient ainsi les positions B' et B'', du bouton de la manivelle, qui satisfont à la condition proposée, et l'on reconnaît que le maximum de vitesse a lieu en B'', lorsque la force P a agi sur la manivelle depuis B' jusqu'en B''.

3°. — *Valeur de $T_m - T_r$.* — Le travail moteur dépensé dans l'intervalle B'B'' est

$$T_m = P \times B'B'' = P \times 2r\cos\alpha' = 0,9430 \times 2Pr ,$$

le travail correspondant de la résistance Q a pour expression

$$T_r = Q \times \text{arc } M'M'' = Q \times 2\pi q \frac{\alpha'' - \alpha'}{360} = 0,3969 \times 2\pi Qq = 0,3969 \times 2Pr ;$$

d'où il résulte

$$T_m - T_r = 0,5511 \times 2Pr .$$

4°. — *Dimensions du volant.* — Les valeurs de T et de $T_m - T_r$, mises dans l'équation (1) du N°. précédent, donnent, en effectuant les calculs,

$$\Pi R^2\omega^2 = 24325 \frac{nN}{n'} , \qquad (3)$$

expression qui servira à calculer soit Π, soit R quand on se donnera l'une de ces quantités ainsi que les valeurs n, n' et N. Le calcul des dimensions du volant s'achèvera ensuite facilement.

383. — **Volant d'une manivelle à double effet.** — La manivelle à double effet ne diffère de la précédente qu'en ce que l'effort moteur P exerce son action, supposée toujours de direction et d'intensité constantes, successivement dans deux sens opposés. La période de cessation du travail moteur se trouve alors supprimée, les écarts de vitesse sont beaucoup moindres, et l'on arrive, en suivant la même marche, à la valeur

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi} , \quad \text{d'où} \quad \alpha' = 39°32'20'' , \quad \text{et} \quad \alpha'' = 140°27'40'' .$$

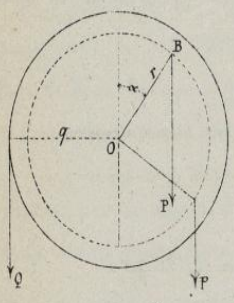
La période d'accélération est ainsi restreinte entre ces deux limites et les mêmes variations se reproduisent pendant la course ascendante de la manivelle. Le travail, pour un tour, étant ici égal à 4Pr, peut être également représenté par $\frac{4500\,N}{n'}$ et l'on arrive à la formule finale

$$\Pi R^2\omega^2 = 4647 \frac{nN}{n'} .$$

La valeur (3) du N°. précédent, comparée à celle que l'on vient d'obtenir, montre que pour un même rayon R et une même valeur de ω, les poids des deux volants seraient entre eux dans le rapport $\frac{24325}{4647} = 5,23$; c'est-à-dire que, pour une même régularité dans le mouvement, le poids du volant de la manivelle à double effet ne serait que le cinquième environ du poids de la manivelle à simple effet.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

384. — **Volant de deux manivelles à double effet.** — Lorsque deux machines à vapeur sont accouplées sur un même arbre moteur, on fait agir leurs manivelles à angle droit, l'une par rapport à l'autre, afin que les points morts de l'une correspondent toujours à la période de plus grande action de l'autre. Cette combinaison produit une assez grande régularité dans le mouvement, surtout si l'on suppose, comme on le fait ici, l'effort moteur P constant et de direction constante sur chaque bouton de manivelle. L'action simultanée de ces deux manivelles conduit, comme précédemment, à résoudre les quatre questions suivantes :



1° — Le travail moteur par tour est $T = 8Pr$, soit $4Pr$ sur chaque manivelle, comme dans le cas précédent; le travail résistant est toujours égal à $2\pi Qq$, et la condition de périodicité est exprimée par l'égalité

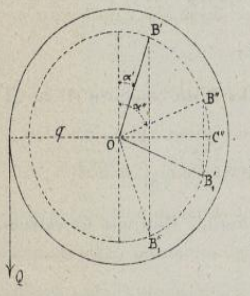
$$8Pr = 2\pi Qq .$$

2° — Pour déterminer l'angle α que fait la manivelle OB avec la direction de la force P, dans les positions de la plus grande et de la plus petite vitesse, il suffit de remarquer que le travail élémentaire de cette manivelle est $Pr \sin\alpha \, d\alpha$, et que celui de la seconde manivelle, au même instant, a pour expression $Pr\cos\alpha \, d\alpha$; on a donc, pour la position cherchée,

$$Qq\,d\alpha = Pr \sin\alpha \, d\alpha + Pr\cos\alpha \, d\alpha , \qquad \text{ou} \qquad \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{Qq}{Pr} = \frac{4}{\pi} ,$$

ce qui donne $\sin\alpha = \dfrac{4 \pm \sqrt{2\pi^2 - 16}}{2\pi}$, d'où $\sin\alpha' = 0,3288620$, $\sin\alpha'' = 0,9443780$.

Cette double valeur de $\sin\alpha$ montre qu'il y a, dans le premier quadrant, deux angles complémentaires α' et α'' dont les valeurs sont $\alpha' = 19°12'$, $\alpha'' = 70°48'$ et qui satisfont à la condition du maximum et du minimum de la vitesse.



3° — Lorsque la manivelle OB' passe du point B' au point B'', et la manivelle OB'_1 de la position B'_1 à la position B''_1, le travail des deux manivelles, dans cet intervalle, a pour expression $T_m = P(B'C' - B''C'') + P(B''_1C' - B'_1C'') = 2Pr(\cos\alpha' - \sin\alpha')$, c'est-à-dire $T_m = 2Pr(0,9444 - 0,3289) = 2Pr \times 0,6155$; et comme on a, en même temps,

$$T_r = 2\pi Qq \frac{\alpha'' - \alpha'}{360} = 2\pi Qq \times 0,1433 = 2Pr \times 0,5732 ,$$

on en conclut pour la période considérée,

$$T_m - T_r = 0,0423 \times 2Pr .$$

4° — Les valeurs de T et de $T_m - T_r$, mises dans l'équation (1) du N° 381, donnent

$$\Pi R^2\omega^2 = 467 \frac{nN}{n'} .$$

Ce résultat, comparé à la valeur $\Pi R^2\omega^2$ du N° précédent, montre que le poids du volant pour deux manivelles à double effet ne serait que le dixième du premier, ce qui fait voir combien est avantageuse la disposition généralement adoptée de deux manivelles à angle droit.

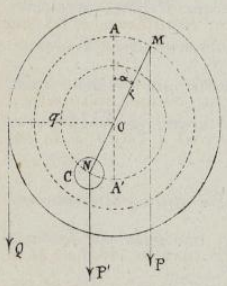
385. — **Volant d'une manivelle à simple effet avec contrepoids.** — Les volants, dont le poids Π est quelquefois considérable, déterminent sur leurs tourillons des frottements dont le travail $f\Pi \times 2\pi r$, par tour peut diminuer notablement l'effet utile du moteur. On diminue le poids Π et par suite la perte de travail $f\Pi \times 2\pi r$, en disposant, sur certains points de la masse rotative, des contrepoids qui agissent comme force résistante pendant qu'ils s'élèvent en obéissant au mouvement général de rotation du système, et comme force motrice lorsqu'ils redescendent.

Pour que le contrepoids puisse servir, avec le volant, à régulariser le travail du moteur, il faut qu'il soit soulevé pendant la période de plus grande action de la force motrice, et qu'il descende au contraire pendant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la période de moindre action. On en conclut que dans le cas d'une manivelle à simple effet, le contrepoids C doit être placé à l'extrémité d'un rayon r' opposé au rayon r de la manivelle.

Les forces en présence sont alors : la force motrice P et la résistance Q, agissant respectivement dans les conditions indiquées au N.° 382, et l'action P' du contrepoids C.



La condition de périodicité reste la même que dans le cas du N.° cité parceque la rotation complète du poids P' comprenant à la fois une élévation du contrepoids à une hauteur 2r' et une chute précisément égale, donne lieu à deux travaux successifs qui se compensent si l'on considère le fonctionnement de la machine pour un tour. On a donc

$$2Pr = 2\pi Qq .$$

Lorsque le bouton de manivelle passe de A en M, le point d'application du poids P' passe de A' en N, et comme son action est résistante dans la position de la figure, on a, pour la condition d'équilibre correspondant à l'égalité entre les travaux élémentaires ;

$$Pr\sin\alpha = Qq + P'r'\sin\alpha , \qquad \text{d'où} \qquad \sin\alpha = \frac{Qq}{Pr - P'r'} = \frac{Pr}{\pi(Pr - P'r')} .$$

On peut disposer de P'r' de manière à obtenir une très-grande régularité, en écrivant

$$P'r' = \frac{1}{2}Pr \qquad \text{d'où} \qquad \sin\alpha = \frac{2Pr}{\pi Pr} = \frac{2}{\pi} ,$$

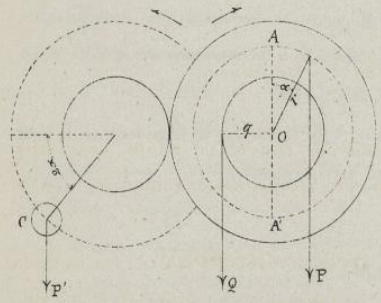
comme dans le cas de deux manivelles.

Le moment d'inertie du volant est alors donné par la formule

$$(\Pi R^2 + P'r'^2)\,\omega^2 = 4647\,\frac{nN}{n'}$$

dont le second membre a été calculé au N.° 383. On voit ainsi que l'action d'un contrepoids appliqué à une manivelle à simple effet équivaut à l'emploi d'une manivelle à double effet, ce qui permet de réduire, dans une grande proportion, le poids du volant.

386. — **Volant d'une manivelle à double effet avec contrepoids.** — Pour que le contrepoids agisse sur une manivelle à double effet à l'instant le plus favorable, il me convient plus qu'il soit appliqué dans le prolongement de la manivelle, car il descendrait pendant que l'effort moteur P, changeant de signe, ferait remonter cette manivelle, et l'on aurait alors un plus grand excès de travail moteur.



On est ainsi obligé de mettre le contrepoids sur un arbre de vitesse angulaire double ; et pour que la descente de ce contrepoids ait lieu lorsque le bouton de manivelle est en A ou en A' c'est-à-dire dans les positions pour lesquelles le travail moteur de la force P est un minimum, il faut placer le contrepoids de manière qu'il ait, aux mêmes moments, sa plus grande action motrice, ce qu'on obtient en le plaçant dans la position indiquée par la figure. La détermination des conditions de régularité exigerait dans ce cas des calculs plus compliqués ; il suffit d'avoir indiqué le principe de compensation qui en résulte et qui n'est d'ailleurs pas utilisé dans les applications.

On doit d'ailleurs ajouter ici que l'emploi des contrepoids présente un inconvénient, celui de mettre en jeu l'action des forces centrifuges que développent, dans des directions variables, ces masses non équilibrées autour de l'axe de rotation. Cette action doit être prise en considération dans les machines dont les bâtis n'offrent pas toute la rigidité nécessaire, ou qui ne seraient pas pourvues de fondations suffisantes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

387. — Volant d'une manivelle dans le cas d'une force motrice d'intensité et de direction variables (méthode graphique). — Le calcul d'un volant qui doit fonctionner dans des conditions déterminées est, comme on vient de le voir, une question facile à résoudre lorsque l'effort moteur a une intensité et une direction constantes, et que le travail résistant est aussi constant pendant une révolution entière de l'arbre. Le problème est plus compliqué et les calculs sont beaucoup plus pénibles lorsque l'effort exercé sur le bouton de la manivelle est à la fois variable d'intensité et de direction, comme cela se présente dans les machines à vapeur où la pression, exercée sur le piston, est transmise au bouton de la manivelle par l'intermédiaire d'une bielle. Pour résoudre alors les quatre questions posées au N°. 381, on peut procéder de la manière suivante :

Soit P la pression, constante ou variable, exercée alternativement sur le piston d'une machine à double effet, et transmise, par la tige

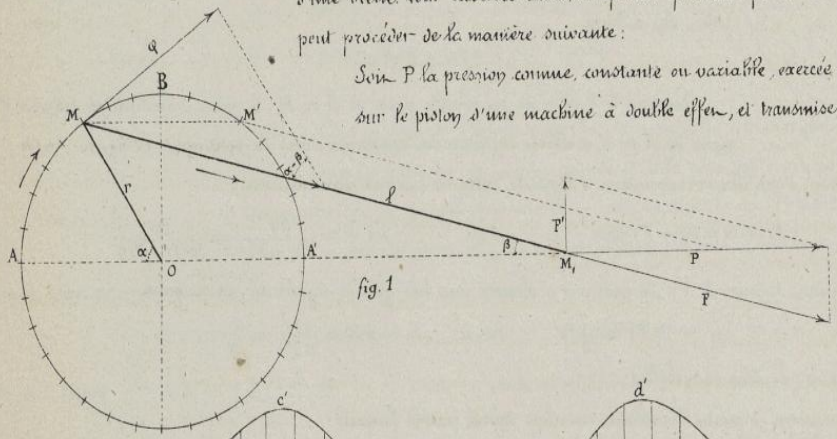


fig. 1

du piston, à l'extrémité M_1 de la bielle MM_1. Cette pression P, appliquée en M_1, peut se décomposer en deux forces, l'une $F = \frac{P}{\cos\beta}$ dirigée suivant le prolongement de MM_1 ; l'autre $F' = P\,tg\beta$ normale à la direction des guides et ne déterminant, sur ceux-ci qu'un travail de frottement qu'on suppose ici négligeable.

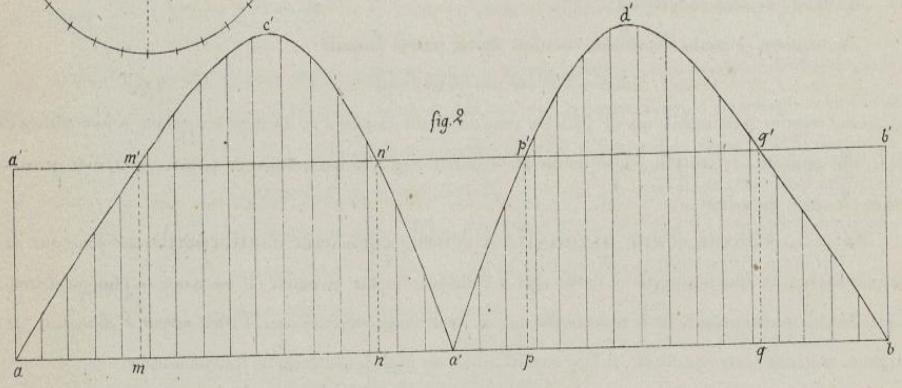


fig. 2

Pour une révolution entière du point M, comptée à partir du point A, le travail de la force motrice F, transportée au point M, est, en désignant par ds l'arc élémentaire parcouru par ce point

$$T = \int_0^{2\pi r} F\cos(F, ds)\,ds = \int_0^{2\pi r} \varphi\,ds \quad , \qquad (1)$$

φ représentant la projection $F\cos(F, ds)$ de la force F sur la tangente en M.

Or, on a $\qquad \varphi = F\sin(\alpha-\beta) = P\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} = P(\sin\alpha - \cos\alpha\, tg\beta)$;

et si l est la longueur de la bielle, r étant celle de la manivelle, on a aussi

$$\sin\beta = \frac{r\sin\alpha}{l} \quad , \text{ d'où } \quad tg\beta = \frac{r\sin\alpha}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}} \quad \text{et par suite, } \quad \varphi = P\sin\alpha\left(1 - \frac{r\cos\alpha}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}}\right); \qquad (2)$$

la force tangentielle φ peut ainsi être évaluée, pour toutes les valeurs de α, soit par le calcul comme le montre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'expression (2), soit par une construction graphique comme l'indique la figure 1.

La valeur φ', correspondante au point M' symétrique de M par rapport à OB, s'obtient en remplaçant α par $180-\alpha$ dans l'expression de φ, ce qui donne $\varphi' = P\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$; on a donc, pour une même valeur de P, $\varphi' < \varphi$.

Pour évaluer graphiquement le travail moteur T indiqué par la formule (1), on prend, sur une ligne droite, fig. 2, une longueur ab égale à la circonférence développée $2\pi r$; cette longueur ab représente le chemin parcouru, dans une révolution, par le point d'application de la force variable φ. On partage la circonférence et la droite en un même nombre de parties égales; par les points de division de cette droite on élève des perpendiculaires sur lesquelles on porte les valeurs correspondantes de φ, et on joignant ensuite par une courbe les extrémités de toutes les ordonnées ainsi construites, les aires $am'c'n'a'$ et $a'p'd'q'b$ comprises entre cette courbe et la droite ab représentent la valeur du travail moteur T pour une révolution de la manivelle.

Si l'on mène une droite $a'b'$ parallèle à ab, de telle manière que le rectangle $abb'a'$ soit équivalent à la somme des aires $am'c'n'a'$, $a'p'd'q'b$, la surface de ce rectangle représente le travail résistant, et l'ordonnée aa' donne l'intensité de la résistance constante Q qui doit être opposée à la force variable φ pour satisfaire à la condition de périodicité.

La figure 2, complétée par la construction du rectangle $abb'a'$, permet de comparer facilement le travail moteur et le travail résistant pour une révolution de la manivelle. Ainsi:

Au point a, correspondant au point mort A de la figure 1, le travail moteur est nul.

De a en m, le travail résistant l'emporte sur le travail moteur, la vitesse diminue.

Au point m, le travail moteur élémentaire est égal au travail résistant: la vitesse devient un minimum.

De m en n, le travail moteur est prépondérant, la vitesse va constamment en croissant et atteint son maximum au point n pour lequel le travail moteur élémentaire est de nouveau égal au travail résistant. Enfin l'aire $m'c'n'm'$ exprime l'excès $T_m - T_r$ du travail moteur sur le travail résistant pour la totalité de cette période d'accélération et la mesure de cette aire jointe à celle qui représente le travail moteur total T, permet immédiatement de calculer le volant par la formule (1) du N° 181, laquelle est

$$\pi R^2 \omega^2 = 44140 \frac{T_m - T_r}{T} \times \frac{nN}{n'}.$$

A partir du point n, le travail moteur diminue et devient nul au point a' qui correspond au second point mort, puis les phases précédentes se reproduisent pour la demi-révolution suivante.

Lorsque la force P est constante, comme on l'a supposé pour la construction de l'épure, les aires $am'c'n'a'$ et $a'p'd'q'b$ sont symétriques par rapport à la verticale du point a', et l'excès $T_m - T_r$ est le même pour chaque demi-révolution; mais cet excès n'est généralement plus le même lorsque P est une quantité variable comme cela se présente dans la machine à détente; si ce cas était celui que l'on eût à considérer, ce serait la plus grande des deux expressions $T_m - T_r$ qu'il faudrait introduire, avec la valeur de T, dans la formule précédente pour calculer le volant.

La méthode précédente s'appliquerait encore au cas où la force résistante serait variable suivant une loi déterminée à chaque révolution. La droite $a'b'$ de la figure 2 serait alors remplacée par une courbe dont la forme devrait d'abord être déduite de la loi de succession des efforts résistants, et qui devrait également comprendre une aire égale à celle qui représente le travail moteur pour un tour entier.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

388. — Causes principales de perturbation dans le mouvement des machines.

Les causes de perturbation, dans le fonctionnement des machines, ont été l'objet d'études spéciales de la part de MM. Le Chatelier et ensuite de M. Yvon-Villarceau. On se bornera ici à quelques indications succinctes.

Perturbations déterminées par les forces centrifuges. — Toute masse M, de poids P, tournant autour d'un axe horizontal à l'extrémité d'un rayon r, développe une force centrifuge $\frac{Mv^2}{r}$ qui peut toujours être représentée par une force horizontale $\frac{Mv^2}{r}\cos\alpha$ et par une force verticale $\frac{Mv^2}{r}\sin\alpha$.

Si la masse M n'est pas symétrique d'une autre masse égale et symétriquement placée, chacune des forces $\frac{Mv^2}{r}\cos\alpha$ et $\frac{Mv^2}{r}\sin\alpha$ tend à déterminer une pression sur l'axe et à changer la position du contact entre les tourillons et les coussinets. Si le jeu laissé entre ces organes est un peu grand, on entend souvent une succession de chocs qui sont dus à cette cause, et qui ont lieu sur chacun des rayons correspondant à la position du bouton excentré de la manivelle. L'effet est surtout sensible lorsqu'il s'agit de deux machines attelées à un même arbre par l'intermédiaire de bielles agissant sur des manivelles calées à angle droit. La composante horizontale F_1 et la composante verticale F_2 de la force centrifuge sont alors

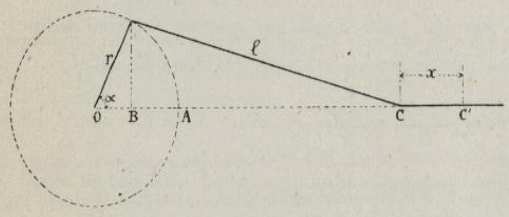
$$F_1 = \frac{Mv^2}{r}(\cos\alpha + \sin\alpha) \qquad F_2 = \frac{Mv^2}{r}(\cos\alpha - \sin\alpha),$$

et l'on pourrait étudier les variations de ces quantités, pour une même vitesse v, par rapport à l'angle α.

On évite facilement l'influence de ces pressions irrégulières en plaçant, dans le prolongement de chaque manivelle, un contrepoids dont l'effet serait égal et de signe contraire. On peut aussi faire usage d'un contrepoids unique placé dans le prolongement du rayon bissecteur de l'angle des manivelles.

Perturbations déterminées par l'inertie des organes en mouvement. — Dans la plupart des machines, les organes rotatifs sont généralement accompagnés d'organes à mouvements alternatifs dont l'inertie influe sur les conditions du fonctionnement pendant les périodes d'accélération ou de retard, relativement au mouvement de chacun d'eux. Ces forces d'inertie étant, à chaque instant du mouvement, de la forme $i = M\frac{du}{dt}$, si α est l'angle de rotation considéré, on a $rd\alpha = vdt$, et par suite,

$$i = M\frac{v}{r}\frac{du}{d\alpha}.$$



On peut ainsi calculer la valeur de i, dans chaque cas particulier, pour toutes les positions que prend l'organe en mouvement.

S'il s'agit par exemple d'une machine à vapeur horizontale, en représentant le déplacement du piston par une variable x, à partir de l'un des points morts, la vitesse u du point C est $u = \frac{dx}{dt}$, et comme on a

$$x = C'C = OA + AC' - OB - BC = r + l - r\cos\alpha - \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{d\alpha} = r\sin\alpha\left(1 + \frac{r\cos\alpha}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}}\right),$$

il en résulte $u = \frac{dx}{dt} = \frac{v\,dx}{r\,d\alpha} = v\sin\alpha\left(1 + \frac{r\cos\alpha}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}}\right)$ puis $\frac{du}{d\alpha} = v\left[\cos\alpha - \frac{l^2r(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + r^3\sin^4\alpha}{(l^2 - r^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}\right]$.

Cette valeur de $\frac{du}{d\alpha}$, substituée dans l'expression de i donne

$$i = \frac{Mv^2}{r}\left[\cos\alpha + \frac{l^2r(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + r^3\sin^4\alpha}{(l^2 - r^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}\right], \qquad (1)$$

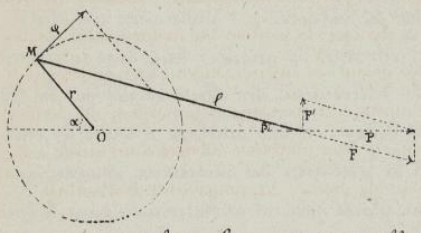
relation qui permet d'étudier l'influence de la force d'inertie dans chacune des positions des organes.

Si l était très-grand relativement à r, on pourrait négliger la partie fractionnaire de (1) en écrivant approximativement $i = \frac{Mv^2}{r}\cos\alpha$, valeur dont la discussion n'offrirait aucune difficulté.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Perturbations relatives aux intensités et aux directions des forces motrices. — L'effet de la pesanteur sur les pièces dont le mouvement est alternativement ascendant et descendant, détermine, dans l'action des forces motrices ou résistantes, des variations périodiques qui produisent des perturbations plus ou moins grandes suivant le poids des organes.

L'action alternative de la force motrice P, sur le piston d'une machine à vapeur, peut aussi avoir une influence au point de vue de la stabilité de la machine. Cette force, qui agit à la fois sur le couvercle en sur le piston agit en même temps, par l'intermédiaire de celui-ci, sur la bielle et sur la manivelle.



En procédant comme au N.° 387, on trouve

$$F' = P \operatorname{tg} \beta \,, \qquad \varphi = P \sin \alpha \left(1 - \frac{r \cos \alpha}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} \right) .$$

L'action de la force φ sert uniquement à vaincre les résistances propres de la machine motrice et celle des opérateurs qu'elle conduit, tandis que la force F' tend à déplacer les glissières lorsqu'elles ne sont pas reliées d'une manière invariable avec les fondations.

Perturbations dans le mouvement des locomotives. — Dans les machines locomotives, toutes les inégalités que peut déterminer l'action des forces ne sont pas contrebalancées par la fixité des attaches comme dans les machines fixes, on peut indiquer plusieurs genres de perturbations qui imposent aux voyageurs certaines gênes et qui produisent, sur le matériel, une plus prompte détérioration.

Le mouvement de *tangage* qui a lieu à intervalles réguliers, et qui consiste en secousses successives dirigées soit de l'avant à l'arrière, soit de l'arrière à l'avant. Ce mouvement est principalement déterminé par l'action de la vapeur sur les couvercles des cylindres horizontaux. Le tangage est remplacé par des oscillations verticales lorsque les cylindres sont eux-mêmes verticaux.

Le *roulis* est le mouvement de rotation qui se produit autour d'un axe longitudinal ; il est dû à la succession de l'action de la vapeur dans les cylindres placés à droite et à gauche de la machine.

Le mouvement de *galop* est caractérisé par la rotation, autour d'un axe transversal ; il est évidemment dû au changement de sens de l'action de chacun des appareils moteurs.

Enfin, le mouvement de *lacet*, le plus fréquent de tous, est celui qui correspond à la rotation, autour d'un axe vertical, et il est dû, pour une grande part, à ce que les machines ne sont pas exactement placées dans le plan vertical des roues qui forment les seuls points d'appui. Les oscillations transversales que l'on observe quelquefois, se confondent le plus souvent avec le mouvement de lacet.

Il résulte de ce qui précède qu'il convient autant que possible de contrebalancer toutes les pièces rotatives par des contrepoids, et l'on peut ainsi placer des masses supplémentaires dans les positions les plus convenables pour s'opposer à la plupart des perturbations qui viennent d'être indiquées. S'il s'agit du mouvement de lacet, par exemple, on comprend que des masses placées à la droite de la machine pourront s'opposer aux perturbations déterminées par les pièces placées à gauche et réciproquement. Les masses additionnelles nécessaires pour amoindrir chacune des perturbations, pourront ensuite être remplacées par d'autres masses en plus petit nombre, et calculées de manière à produire le même effet que les premières. C'est ainsi que l'on est arrivé à améliorer successivement le fonctionnement des locomotives par l'addition d'un petit nombre de contrepoids répondant aux causes principales de perturbation.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

389. — Considérations générales sur l'établissement des machines. —

1° — *Machines retenues par leur fondations.* — Les observations qui précèdent suffisent pour indiquer la marche à suivre dans le calcul d'une machine quelconque. En partant de la résistance utile que la machine est destinée à vaincre, il faut considérer isolément les organes successifs dans l'ordre de leur action les uns sur les autres en tenant compte des réactions exercées par les supports, les articulations, et les liaisons de chacun d'eux avec le précédent et avec le suivant. On obtiendra ainsi pour chaque pièce mobile, des conditions d'équilibre distinctes à l'aide desquelles on pourra déterminer les valeurs de l'accélération angulaire, de la vitesse et des réactions, en tenant compte des forces d'inertie, constantes ou variables dans leurs intensités ou leurs directions. Les réactions mises en évidence par ces calculs déterminent les efforts exercés sur les bâtis et sur les supports qui forment la partie fixe de la machine et qui doivent dès lors satisfaire à toutes les conditions de stabilité en tenant compte de celles qui sont relatives à la résistance des matériaux. Quant aux améliorations que des contrepoids ou des volants convenablement placés pourraient introduire dans le fonctionnement général de la machine, elles seront étudiées séparément par des méthodes analogues à celles qui ont été indiquées précédemment.

2° — *Machines non retenues par des fondations.* — Les considérations qui précèdent sont applicables à une machine non retenue par des fondations; mais il faut en outre que la machine elle-même satisfasse dans son ensemble à toutes les conditions déduites des règles de stabilité.

Quant aux améliorations que l'emploi des volants ou des contrepoids pourrait apporter dans le fonctionnement régulier de la machine, elles devront être examinées avec plus de soin encore, dans le but de faire disparaître autant que possible les causes de perturbation les plus nuisibles à l'objet que l'on se propose par l'emploi de la machine.

Modérateurs.

390. — Objet des modérateurs. — Les modérateurs sont destinés, dans les diverses machines motrices, à satisfaire à la condition fondamentale de l'égalité de durée entre chacun des tours de l'arbre moteur. Ils opèrent, entre certaines limites, en augmentant ou en diminuant l'action motrice, de manière à ramener l'arbre moteur à la même vitesse à chaque révolution.

Leur fonctionnement est déterminé par les changements de vitesse qui se produisent dans un sens ou dans l'autre, aussitôt qu'il y a excès de travail moteur. S'il s'agit d'un moteur hydraulique, par exemple, le modérateur ouvre ou ferme, suivant les besoins, les orifices d'amenée. S'il s'agit d'une machine à vapeur, il peut opérer de la même manière en produisant un étranglement permanent dans la conduite, ou même encore en arrêtant tout passage à la vapeur au moment où la quantité déjà admise est suffisante pour développer la quantité de travail nécessaire à un coup de piston.

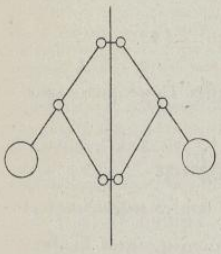
Le modérateur est l'accessoire obligé du volant dans toutes les conditions où l'on veut obtenir une grande régularité de marche. Il peut, à lui seul, rétablir la condition de périodicité dans les machines qui ne sont pas munies de volants.

Les rôles des deux organes sont très-distincts: Le volant régularise la marche de la machine pendant la durée d'une révolution; le modérateur fixe la durée de cette révolution en limitant l'action motrice à celle qui est nécessaire. Malgré cette distinction entre l'objet des deux appareils, on désigne encore très-souvent les modérateurs sous le nom de régulateurs.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

391. — Mode de fonctionnement des modérateurs à force centrifuge.

Modérateur de Watt. — Le modérateur à force centrifuge ou à boules, de Watt, se compose, en principe, de deux bras symétriques, articulés à charnières sur un arbre vertical, auquel on imprime un mouvement de rotation. Ce mouvement développe, dans les bras articulés et dans les boules, une force centrifuge qui les fait tourner autour des charnières horizontales; en s'éloignant de l'axe, elles sont soulevées par cette action et elles entraînent en même temps un manchon lié à l'obturateur qui doit agir sur la conduite d'introduction de l'eau ou de la vapeur dans la machine motrice.

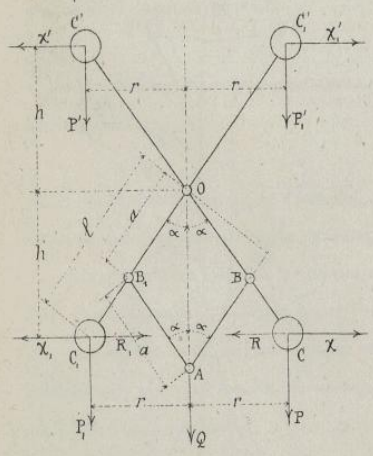


Lorsque les boules sont ainsi parvenues à une position d'équilibre, pour une vitesse angulaire ω de l'arbre, l'augmentation ou la diminution momentanée de cette vitesse fait varier la position du manchon, et par suite celle de l'obturateur que ce manchon conduit. Par exemple, si le mouvement de la machine motrice vient à s'accélérer par suite de la prépondérance du travail moteur sur le travail résistant, les boules se soulèvent et ferment en partie l'orifice d'introduction par le soulèvement du manchon, et dans ce cas la vitesse ne peut plus être la même que précédemment, puisque chaque position des boules correspond à une vitesse de rotation différente.

Le modérateur de Watt, réduit à ces conditions, ne peut donc pas fournir une vitesse de régime absolument constante; et l'appareil tout en limitant les grands écarts de vitesse d'une manière efficace, ne remplit pas son office d'une manière absolument géométrique. Il répond suffisamment bien à la plupart des nécessités de l'industrie; mais à mesure que les machines ont été perfectionnées, on a exigé du modérateur des conditions de plus en plus précises, et c'est ce qui a donné lieu aux diverses formes de modérateurs qui ont été appliquées dans ces derniers temps, bien que les dispositions adoptées n'aient pas toujours été assez simples pour être véritablement pratiques et efficaces.

392. — Théorie des modérateurs à force centrifuge. —

Pour comprendre les principaux systèmes de modérateurs dans une même formule, on suppose que l'appareil est composé de quatre boules placées deux à deux sur une même tige, à une même distance du point O, et qu'elles tournent simultanément autour de l'axe vertical OA. Les deux tiges sont liées entre elles par un quadrilatère symétrique OBAB$_1$ dont la forme est ordinairement, comme dans la figure, celle d'un losange. Au point A agit une force verticale Q qui représente le poids du manchon augmenté ou diminué de la résistance verticale à vaincre. Les deux boules inférieures, égales entre elles, sont sollicitées indépendamment de leurs poids, par deux forces horizontales R et R$_1$, égales et directement opposées, tandis que les boules supérieures ne sont soumises qu'à l'action de leurs poids respectifs supposés aussi égaux entre eux.



Aux forces qu'on vient d'énumérer il faut ajouter les forces centrifuges X que le mouvement de rotation détermine sur chacune des boules, forces qui sont représentées par $\frac{P}{g}\omega^2 r$ pour chacune des boules inférieures et par $\frac{P'}{g}\omega^2 r$ pour chacune des boules supérieures, ω étant la vitesse angulaire du système à l'instant considéré.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La force Q pouvant être remplacée par deux composantes égales chacune à $\frac{Q}{2\cos\alpha}$, en dirigeant suivant les axes des bielles AB et AB$_1$, si l'on admet que l'appareil se maintienne en mouvement sans changer de forme, à la même vitesse ω, et que le poids des tiges puisse être considéré comme négligeable ainsi que les frottements des articulations, il faut qu'il y ait équilibre entre toutes les forces qui agissent sur l'une des tiges rigides, la tige CC' par exemple. Par suite, en prenant les moments, autour de l'axe projeté en O, des forces $\frac{P}{g}\omega^2 r$, $\frac{P'}{g}\omega^2 r$, P, P', R et $\frac{Q}{2\cos\alpha}$ qui sollicitent cette tige, et en ayant égard au sens de chaque force, on obtient facilement l'équation d'équilibre

$$\frac{P}{g}\omega^2 rh + \frac{P'}{g}\omega^2 rh - Pr + P'r - Rh - Qa\sin\alpha = 0, \qquad (1)$$

formule applicable aux différents systèmes de modérateurs et qui permettra de calculer l'une quelconque des quantités qui y entrent quand on connaîtra toutes les autres.

393. — Examen des principaux modérateurs à force centrifuge. —

Modérateur primitif de Watt. — Ce modérateur n'avait que les deux boules inférieures et les forces R n'existaient pas; ces hypothèses donnent P'=0 et R=0; en les introduisant dans la formule (1) et en remarquant que l'on a $h = l\cos\alpha$, $r = l\sin\alpha$, on en déduit

$$\omega^2 = \frac{g(Pl + Qa)}{Pl^2\cos\alpha} = \frac{g}{l\cos\alpha}\left(1 + \frac{Qa}{Pl}\right), \qquad (2)$$

expression qui se réduirait à $\omega^2 = \frac{g}{l\cos\alpha} = \frac{g}{h}$, si Q était assez faible pour pouvoir être négligé relativement à P.

La valeur de ω variant avec celle de α, le modérateur de Watt ne peut régler d'une manière absolue, à la même vitesse ω, pour différentes positions du manchon, c'est-à-dire pour différentes conditions d'admission du fluide moteur; en outre il n'est pas isochrone par rapport à des quantités variables de travail moteur. Ce modérateur ne répond ainsi à son objet que d'une manière insuffisante, et il doit être rejeté dans un grand nombre de circonstances.

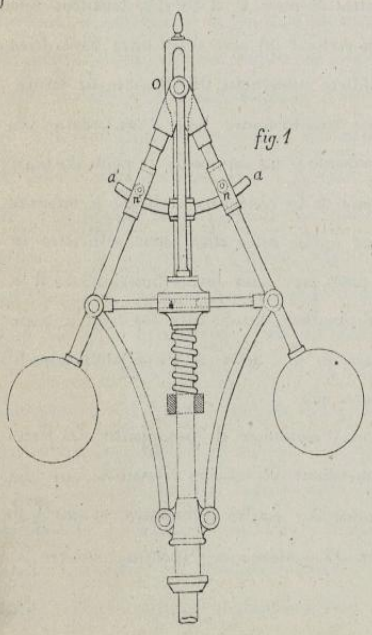


fig. 1

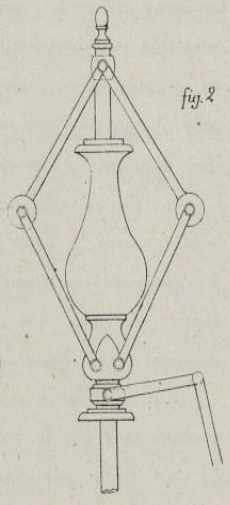


fig. 2

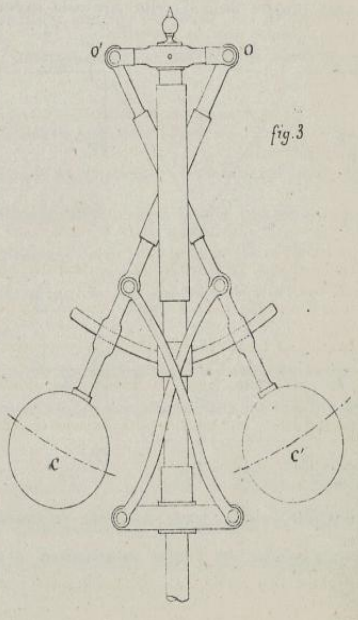


fig. 3

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Moderateur à masse centrale. — La formule (2) montre que, sans changer les valeurs de l et a, on peut augmenter la vitesse ω en augmentant la valeur de Q et en diminuant celle de P. On peut ainsi (*fig. 2*) reporter la presque totalité du poids en une masse centrale qui tourne avec les bras en à laquelle on peut, sans crainte de détérioration, imprimer une vitesse angulaire beaucoup plus grande qu'aux modérateurs ordinaires. En faisant varier Q au moyen de poids additionnels, le même modérateur peut être employé pour des vitesses angulaires très différentes. Le modérateur de Porter ou modérateur américain, qui fonctionne très bien, est fondé sur ce principe.

Modérateurs paraboliques. — En posant toujours $P'=0$ et $R=0$ comme dans le cas de la formule (2), on voit que le modérateur pourrait se régler à une vitesse constante ω, c'est-à-dire être isochrone, si P et Q restaient constants, la hauteur $l\cos\alpha$ ou h restait aussi constante. Il n'est pas possible de satisfaire à cette condition si les boules se meuvent suivant un arc de cercle; mais pour que h fût constant il suffirait de forcer les tiges à rester normales à une parabole que décriraient les boules, la propriété caractéristique de cette courbe consistant en ce que la sous-normale est constante.

Par exemple, on réalise cette condition, *fig. 1*, au moyen de deux guides courbes a, a' constants de manière à assurer le déplacement parabolique des boules: de n en o et de n' en o les tiges sont alors composées de deux parties dont l'une forme douille, et les longueurs no et $n'o$ peuvent varier librement d'après les positions que prennent les points n et n' sur l'arc $a\,a'$.

Le modérateur de M. Farcot conduit au même résultat, *fig. 3*, au moyen de centres d'articulation o et o' placés respectivement du côté opposé à celui de la boule qui y est suspendue, et l'on obtient approximativement, dans les limites de la course que les boules peuvent effectuer la réalisation du mouvement parabolique sans employer des guides de translation qui donnent toujours lieu à des résistances notables de frottement; il suffit pour cela que l'arc de cercle décrit par le point C autour du centre O, se confonde sensiblement avec un arc de parabole.

Modérateurs à contrepoids, à deux ou à quatre boules. — *Condition d'isochronisme.*

On a déjà vu que la valeur de ω, dans le cas d'un pendule à deux boules, et dans l'hypothèse $R=0$, est donnée par la formule

$$\omega^2 = \frac{g(Pl+Qa)}{Pl^2\cos\alpha}.$$

Si l'on suppose maintenant, dans la formule (1), $R=0$ et $P'=P$, il vient, pour le pendule à quatre boules,

$$\omega^2 = \frac{gQa}{Pl^2\cos\alpha}\quad;$$

on il faut remarquer que l'emploi des quatre boules égales et symétriquement placées rend le modérateur indépendant de l'action de la pesanteur, ce qui est absolument nécessaire dans pour les modérateurs des machines marines qui ne peuvent rester dans une position fixe, que pour les modérateurs à axe horizontal dans lesquels les forces centrifuges sont équilibrées par l'action d'un ressort.

Cela posé, on obtient un modérateur isochrone toutes les fois que, dans chacune des expressions précédentes, on peut rendre le numérateur proportionnel au dénominateur, c'est-à-dire, quand on peut satisfaire à la condition

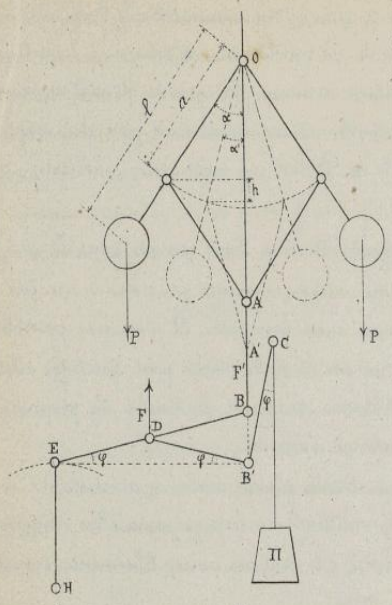
$$Pl + Qa = K\cos\alpha\quad, \qquad (3)$$

ou

$$Qa = K\cos\alpha\quad, \qquad (4)$$

K étant un coefficient constant qu'il s'agit de déterminer pour chacune des dispositions adoptées.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



On est arrivé à résoudre le problème de plusieurs manières, mais généralement par l'emploi d'un contrepoids agissant sur le point A par l'intermédiaire de leviers convenablement disposés.

L'une des solutions données par Foucault s'applique au modérateur à deux boules. La tige verticale AB tend à être soulevée par l'action du levier BE dont l'extrémité E est mobile sur un arc de cercle ayant son centre en H. Le soulèvement de ce levier s'obtient au moyen du contrepoids Π dont l'action est transmise en D, au milieu de BE par l'équerre CB'D, mobile autour du point B' situé sur la verticale AB et sur l'horizontale qui passe par la position moyenne du point E.

Soit F l'action transmise par l'équerre au point D, et F' celle que reçoit le point B par l'intermédiaire du levier BE. En prenant les moments des forces F' et F par rapport à l'axe projeté en E, puis les moments des forces Π et F' par rapport à l'axe projeté en B', on obtient, en supposant CB'=b et B'D=DE=DB=c,

$$F' \times 2c = F \times c \quad , \qquad F \times c \cos\varphi = \Pi \times b \sin\varphi \quad , \quad \text{d'où} \quad F' = \frac{b}{2c} F \operatorname{tg}\varphi \ .$$

Si α' est la plus petite valeur que doit prendre l'angle variable α, et si B' et B sont pour l'extrémité de la tige OA, les positions respectivement correspondantes aux valeurs α' et α, on a évidemment

$$B'B = A'A = 2h = 2a(\cos\alpha' - \cos\alpha) \ ;$$

en outre, la valeur moyenne de la distance variable B'E étant sensiblement égale à BE ou 2c, on peut écrire

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{BB'}{B'E} = \frac{2h}{2c} = \frac{a}{c}(\cos\alpha' - \cos\alpha) \ ,$$

ce qui donne, en substituant dans l'expression de F', et en y posant pour simplifier, b=2a et c=a,

$$F' = \Pi(\cos\alpha' - \cos\alpha) \ .$$

Si p est la charge appliquée directement en A, on a

$$Q = p - F' = p - \Pi(\cos\alpha' - \cos\alpha)$$

cette valeur de Q, mise dans la relation (3) relative au modérateur à deux boules, donne

$$Pl + a[p - \Pi(\cos\alpha' - \cos\alpha)] = K\cos\alpha \quad , \quad \text{ou} \quad Pl - a(p - \Pi\cos\alpha') + (a\Pi - K)\cos\alpha = 0 \ ,$$

équation à laquelle on satisfait évidemment, quel que soit α, en posant séparément

$$Pl - a(p - \Pi\cos\alpha') = 0 \quad \text{et} \quad a\Pi - K = 0$$

La première de ces équations donne la valeur de Π ; la seconde donne ensuite celle de K.

Pour déterminer K lorsqu'il s'agit d'un modérateur à quatre boules égales, il faut porter la valeur précédente de Q dans l'équation (4) ce qui donne

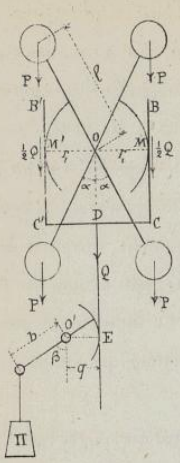
$$a[p - \Pi(\cos\alpha' - \cos\alpha)] = K\cos\alpha \quad , \quad \text{ou} \quad a(p - \Pi\cos\alpha') + (a\Pi - K)\cos\alpha = 0 \ ,$$

puis poser séparément

$$a(p - \Pi\cos\alpha') = 0 \quad \text{et} \quad a\Pi - K = 0 \ ,$$

relations qui donnent les valeurs de Π et de K.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



La condition de l'isochronisme a été réalisée d'une manière encore plus simple par Girard. Les tiges des boules supérieures portent deux arcs dentés, de rayons r_1, qui engrènent avec des crémaillères BC, B'C' réunies par une traverse horizontale CC', et le cadre BCC'B', qui s'abaisse lorsque les boules s'écartent, tend constamment à être relevé par un contrepoids Π qui agit sur une tige DE au moyen d'un arc denté de rayon q.

L'effort Q, exercé en D suivant l'axe de la tige DE, se répartit par moitié en M et en M', et le moment de $\frac{1}{2}Q$ en chacun de ces points est $\frac{1}{2}Qr_1$. En mettant cette valeur à la place de $Qa \sin\alpha$ dans l'équation générale (1), puis en faisant dans cette équation $P' = P$, $R = 0$, $h = l\cos\alpha$, $r = l\sin\alpha$, et en négligeant le poids du cadre qui peut d'ailleurs être équilibré, on en déduit

$$\omega^2 = \frac{gQr_1}{2Pl^2 \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{gQr_1}{Pl^2 \sin 2\alpha} .$$

Les deux efforts Π et Q se faisant équilibre, on a nécessairement

$$\Pi b \sin\beta = Qq \quad , \quad \text{ou} \quad Q = \frac{\Pi b \sin\beta}{q} \quad , \quad \text{d'où} \quad \omega^2 = \frac{\Pi b g r_1 \sin\beta}{Pl^2 q \sin 2\alpha} .$$

Pour que cette valeur de ω^2 soit constante, il suffit que le numérateur varie avec α comme le dénominateur, ce que l'on obtient en faisant $r_1 = 2q$, et par suite $\beta = 2\alpha$, d'où $\sin\beta = \sin 2\alpha$, ce qui donne finalement, pour la valeur constante de ω

$$\omega^2 = \frac{\Pi b g}{Pl^2} .$$

Modérateurs à ressorts. — On pourrait encore obtenir une valeur constante de ω, si, Q étant nul, on pouvait disposer de R de manière que l'on eût toujours $R = K\sin\alpha$, car la formule (1) donnerait alors, dans le cas de quatre boules égales,

$$\omega^2 = \frac{gR}{2Pl\sin\alpha} = \frac{gK}{2Pl} .$$

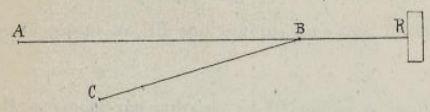
Cette solution serait facilement réalisée en déterminant l'effort R, au moyen d'un ressort à boudin dont la tension varierait comme $l\sin\alpha$, et c'est ce qui aurait lieu si ce ressort, fixé par une de ses extrémités sur l'horizontale de l'une des boules, était placé dans des conditions telles qu'il se détendit jusqu'à l'axe du modérateur, en l'absence de toute compression. Pour toute autre position, sa tension serait alors proportionnelle à son raccourcissement ou à $l\sin\alpha$.

394. — **Durée d'une révolution.** — En désignant par t la durée en secondes d'une révolution on a $2\pi = \omega t$; en en mettant pour ω, dans cette expression, chacune des valeurs qui s'appliquent aux différents systèmes qui ont été examinés précédemment on peut calculer tous les éléments qui doivent entrer dans la construction d'un modérateur à force centrifuge. On détermine ainsi les valeurs de P, de Q ou de R les plus convenables pour chacun des effets que l'on veut obtenir avec le modérateur.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Note sur le planimètre d'Amsler.

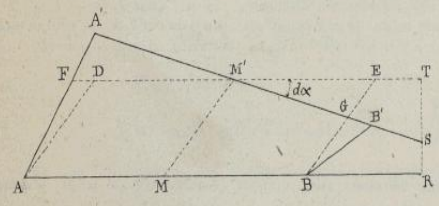
395. **Principe de l'appareil.** — Le planimètre polaire, indiqué au N.° 259 et qui permet d'obtenir avec une grande précision l'aire d'une surface plane terminée par un contour quelconque, se compose



d'un très-petit nombre d'organes : AB et BC sont deux tiges articulées en B. Le point C de la tige BC est fixé, au moyen d'une pointe chargée d'un poids en un point invariable du plan de l'aire à mesurer. Le point A de la tige AB est promené successivement sur tous les points du contour, et la roulette R, qui roule sur le papier pendant ce déplacement, indique, par le nombre de ses révolutions, que l'on apprécie sur son limbe divisé, l'aire comprise dans le contour. Ce nombre de révolutions doit être, dans chaque cas, multiplié par un coefficient qui varie suivant la position qu'occupe le point B sur la tige BR et qui sera ultérieurement déterminé.

Dans cette opération, le point B décrit toujours un arc de circonférence autour du point C, mais la théorie de l'instrument peut être établie indépendamment de la nature de cette courbe.

396. **Théorie du planimètre.** — On peut se rendre compte du mode d'évaluation du planimètre polaire par les considérations suivantes. La droite AB, de longueur constante, étant assujettie à s'appuyer à la fois sur deux courbes AB', BB', soit A'B' une position très-voisine de AB. Pour



évaluer la surface de l'élément superficiel ABB'A', il suffit de joindre les milieux M et M' des côtés AB et A'B' ; de mener, par M', une parallèle à AB, puis, par A et B, des parallèles à MM', ce qui donne

$$ABB'A' = ADEB + A'M'F - EM'G + ADF - BB'G \ .$$

Les triangles égaux A'M'F, EM'G se compensent, et les triangles ADF, BB'G peuvent être négligés comme étant des infiniment petits d'ordre supérieur, ce qui réduit l'égalité précédente à

$$ABB'A' = ADEB = AB \times TR = AB(SR + ST) \ ;$$

ou à cause de $ST = M'T \times d\alpha = MR \times d\alpha$, on peut écrire

$$ABB'A' = AB \times SR + AB \times MR \times d\alpha \ .$$

Or, le terme $AB \times SR$, proportionnel à SR pour tous les éléments de la surface, est celui qui est directement enregistré par l'instrument, dont la roulette tourne constamment de quantités proportionnelles à SR, soit dans un sens, soit dans un autre ; on peut donc indiquer l'intégrale de ce terme par un nombre n de tours qui dépend de la grandeur du rayon de cet organe.

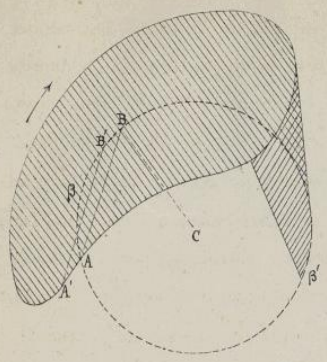
L'aire comprise entre les deux courbes décrites simultanément par les points A et B est donc, dans tous les cas,

$$S = n + p\alpha \ ,$$

la quantité p étant encore un coefficient constant pour le même instrument et la même longueur AB.

Pour appliquer cette formule, il faut distinguer deux cas suivant que le pôle C de l'instrument est situé à l'intérieur ou à l'extérieur de l'aire à mesurer.

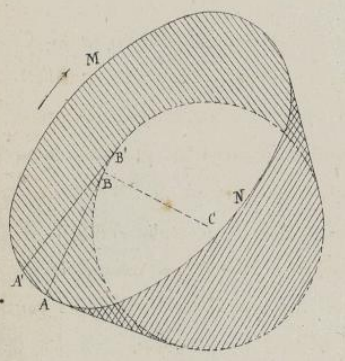
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Cas où le pôle est à l'extérieur de l'aire. — Dans ce cas l'instrument mesure successivement tous les quadrilatères tels que ABB'A' qui forment l'aire totale qu'il s'agit d'évaluer.

Si la pointe A marche dans le sens indiqué par la flèche les positions extrêmes du point B sont en β et en β', et tous les angles décrits qui ont été décrits en passant de β en β' sont parcourus en sens contraire de β' en β. L'angle total α de la formule est donc nul et l'aire comprise est directement donnée par la valeur de n.

On voit séparément sur la figure l'aire dont les diverses parties sont successivement additionnées et celle qui se trouve ensuite déduite de cette somme dans le voisinage du point β'; cette aire accessoire est indiquée par un double système de hachures.



Cas où le pôle est à l'intérieur de l'aire. — On voit ici, par la disposition de la figure, que la tige AB revient à sa position primitive en décrivant un angle total 2π de telle sorte que le tour $p\alpha$ a pour valeur $2\pi p$. L'aire comprise entre les deux courbes est alors exprimée par $n + 2\pi p$; mais pour avoir l'aire comprise dans la courbe AMN, considérée isolément il faut encore y ajouter la surface du cercle $\pi \times \overline{BC}^2$, ce qui donne, pour la surface totale $n + 2\pi p + \pi \times \overline{BC}^2$. A cet effet, la valeur numérique $2\pi p + \pi \times \overline{BC}^2 = n'$ qui est constante pour toutes les opérations est inscrite sur l'instrument et la surface totale est alors $n + n'$.

Pour l'intelligence de la figure on a appliqué des hachures dans un sens sur les parties de la surface qui sont additionnées par l'instrument, et des hachures en sens contraire sur les parties qui correspondent à une rotation inverse de la roulette. Les parties couvertes de deux systèmes de hachures sont successivement additionnées et retranchées dans l'évaluation définitive.

Valeurs des coefficients. — Dans l'instrument tel qu'il est habituellement construit et monté pour mesurer les surfaces en centimètres carrés, le diamètre de la roulette est 0^m,019 ; sa circonférence est divisée en 100 parties égales dont on lit les dixièmes sur un vernier, le nombre des tours entiers de la roulette est enregistré sur un cadran supplémentaire mû par une vis sans fin, et chaque tour de cette roulette correspond à

$$\int AB \times SR = AB \times \pi d = 0^m,168 \times 0,0597 = 0^{m^2},01 .$$

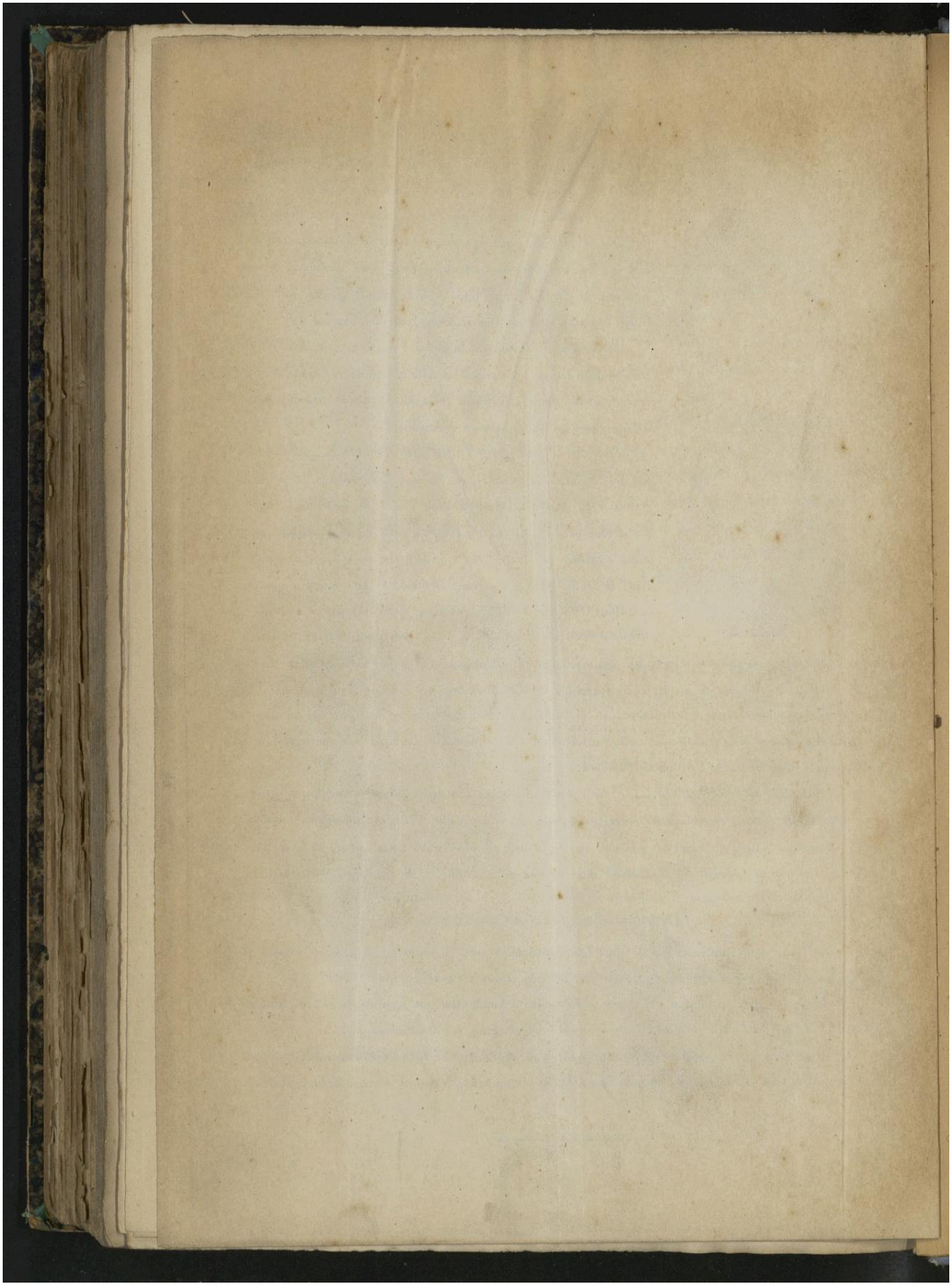
En déterminant plusieurs fois de suite la même surface avec l'instrument on retrouve presque toujours le même chiffre à moins d'une division près ou d'un centimètre carré.

Lorsque le pôle est placé à l'intérieur de la surface il faut ajouter, au résultat précédent, la valeur $AB \times MR \times 2\pi + \pi \times \overline{BC}^2 = 0^{m^2},20844$. C'est le nombre qui est gravé sur l'instrument.

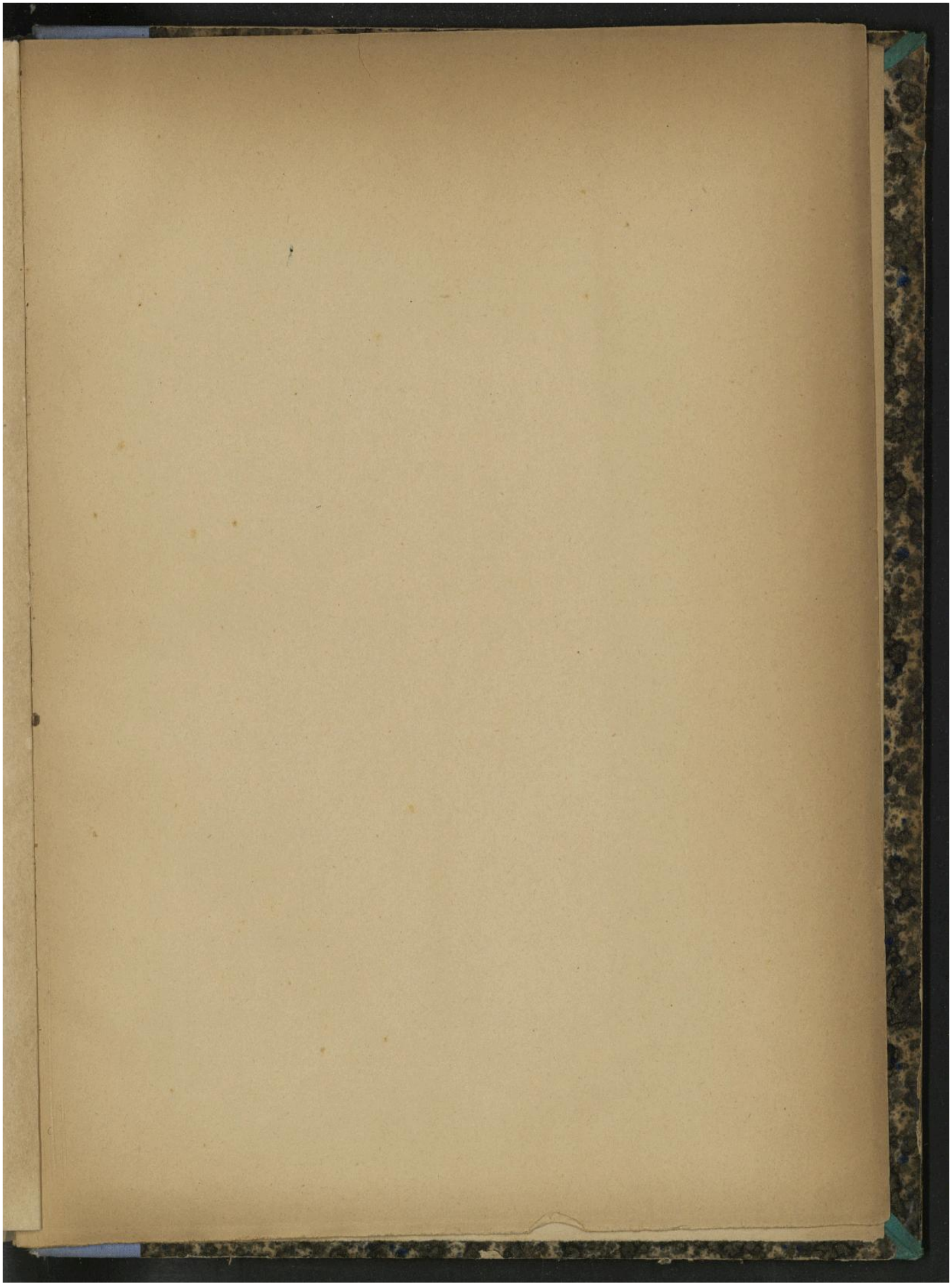
Avec un de ces instruments on mesure facilement une surface de 2500 centimètres carrés, en une seule opération, dans les circonstances les plus favorables et en plaçant le pôle dans l'intérieur de la surface.

BIBLIOTHÈQUE CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS
C'HAM

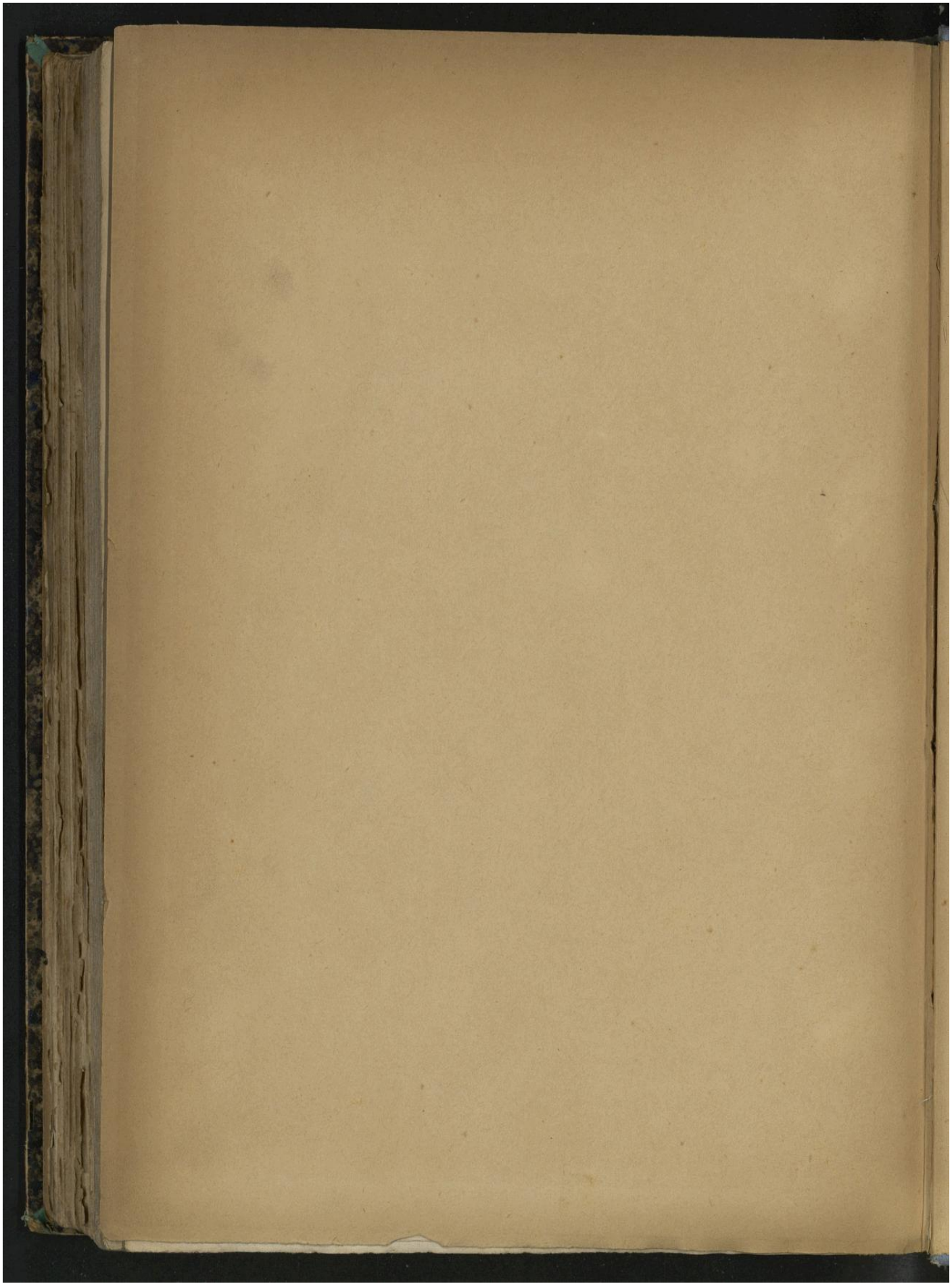
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



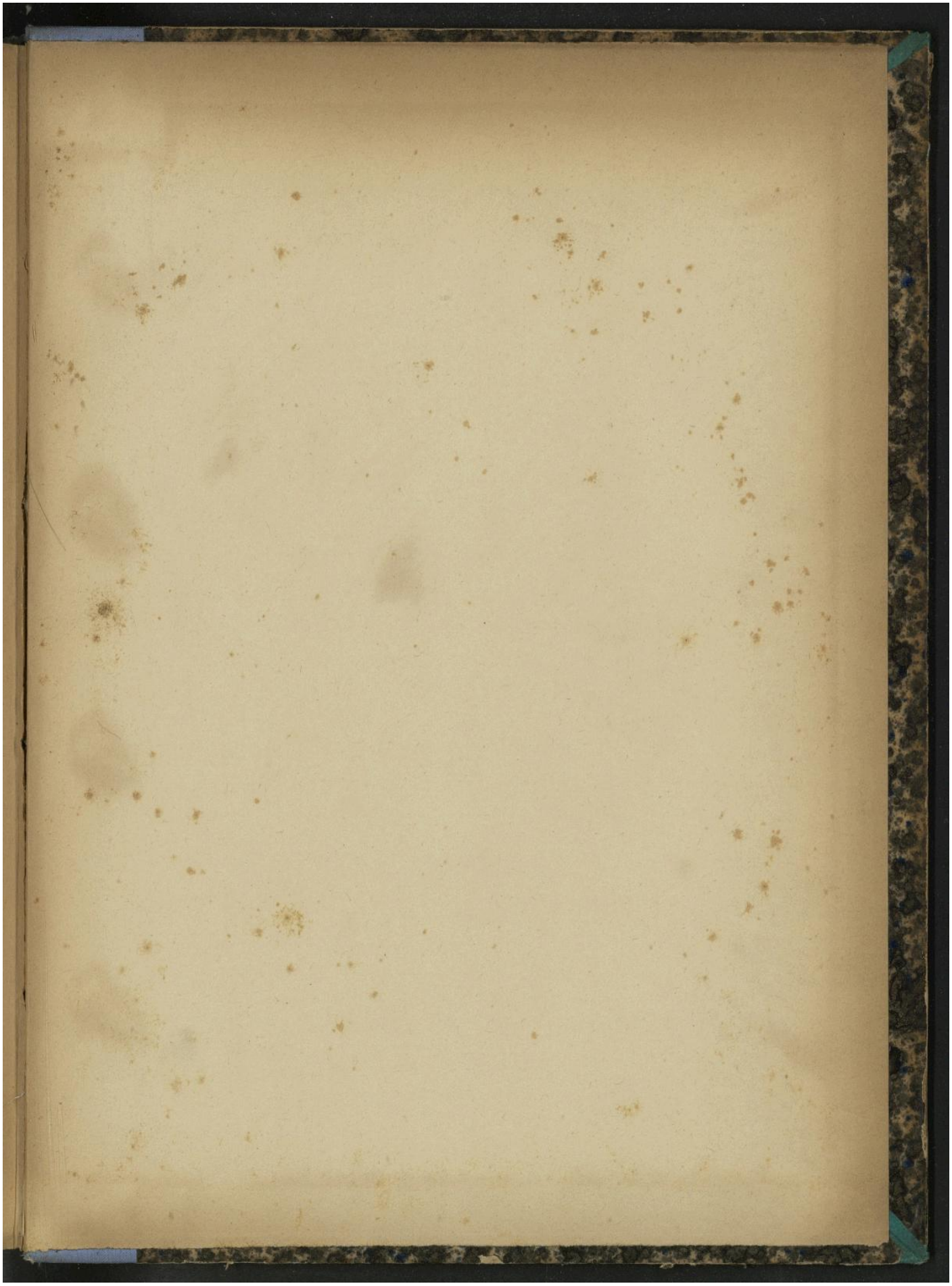
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires