le cnam le Cnum

Conditions d’utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- Le Conservatoire numérique communément appelé le Cnum constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d’œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s’inscrit dans le cadre de la loi nº 78-753 du 17 juillet 1978 :

- **la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue (Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - http://cnum.cnam.fr)**
- **la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l’objet d’une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.**

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- **les reproductions de documents protégés par le droit d’auteur, uniquement consultables dans l’enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l’autorisation préalable du titulaire des droits.**

4- Pour obtenir la reproduction numérique d’un document du Cnum en haute définition, contacter cnum(at)cnam.fr

5- L’utilisateur s’engage à respecter les présentes conditions d’utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d’une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d’utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

NOTICE DE LA GRANDE MONOGRAPHIE	
Auteur(s) ou collectivité(s)	Borgnis, Giuseppe-Antonio
Auteur(s)	Borgnis, Giuseppe-Antonio (1781-1863)
Titre	Traité complet de mécanique appliquée aux arts, contenant l'exposition méthodique des théories et des expériences les plus utiles pour diriger le choix, l'invention, la construction et l'emploi de toutes les espèces de machines
Adresse	Paris : Bachelier, 1818-1823
Collation	10 vol. : ill. ; in-4
Nombre de volumes	10
Cote	CNAM-BIB 4 Dy 4 Res
Sujet(s)	Génie mécanique -- 19e siècle Technologie -- 19e siècle Dessin industriel -- 19e siècle
Permalien	https://cnum.cnam.fr/redir?4DY4
LISTE DES VOLUMES	Composition des machines
	Mouvemens des fardeaux
	Des machines employées dans les constructions diverses
	Des machines hydrauliques
	Des machines d'agriculture
	Des machines employées dans diverses fabrications
	Des machines qui servent à confectionner les étoffes
	Des machines imitatives et des machines théâtrales
	Théorie de la mécanique usuelle
	Dictionnaire de mécanique appliquée aux arts

NOTICE DU VOLUME	
Auteur(s) volume	Borgnis, Giuseppe-Antonio (1781-1863)
Titre	Traité complet de mécanique appliquée aux arts, contenant l'exposition méthodique des théories et des expériences les plus utiles pour diriger le choix, l'invention, la construction et l'emploi de toutes les espèces de machines
Volume	Théorie de la mécanique usuelle, ou introduction à l'étude de la mécanique appliquée aux arts
Adresse	Paris : Bachelier, 1821
Collation	1 vol. (XII-360 p.) : ill., 5 pl. (gr.s.c.) ; 26 cm
Nombre de vues	376
Cote	CNAM-BIB 4 Dy 4 (9) Res
Thématique(s)	Machines & instrumentation scientifique
Typologie	Ouvrage
Note	Tome 9 du "Traité complet de mécanique appliquée aux arts"
Langue	Français

Date de mise en ligne	**14/09/2005**
Date de génération du PDF	**23/01/2024**
Permalien	https://cnum.cnam.fr/redir?4DY4.9

THÉORIE

DE LA

MÉCANIQUE USUELLE.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

IMPRIMERIE DE FAIN, PLACE DE L'ODÉON.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4° Py 4 (5)

THÉORIE

DE LA

MÉCANIQUE USUELLE,

OU

INTRODUCTION

A L'ÉTUDE DE LA MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX ARTS;

Contenant les principes de statique, de dynamique, d'hydrostatique et d'hydrodynamique, applicables aux arts industriels; la théorie des moteurs, des effets utiles des machines, des organes mécaniques intermédiaires, et l'équilibre des supports.

Par M. J. A. BORGNIS,

INGÉNIEUR, MEMBRE DE PLUSIEURS ACADÉMIES.

CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS

PARIS,

BACHELIER, LIBRAIRE, QUAI DES AUGUSTINS.

1821.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le but de cet ouvrage est d'exposer avec clarté et simplicité la théorie de la mécanique immédiatement applicable aux arts industriels, de combiner cette théorie avec les résultats des expériences les plus accréditées, et de la développer d'une manière méthodique.

Nous avons divisé cet ouvrage en quatre livres, dont le premier contient les principes fondamentaux de la statique, de la dynamique, de l'hydrostatique et de l'hydrodynamique. Ce n'est point un traité complet de ces quatre branches importantes des sciences physico-mathématiques, que nous nous sommes proposé de donner, mais seulement la série des notions qui doivent guider l'ingénieur, le constructeur, et en général toute personne qui par goût ou par état s'occupe de machines. Ainsi nous avons omis tout ce qui se rapporte à la haute physique, à l'astronomie, et aux recherches purement rationnelles; c'est dans les ouvrages célèbres de *Lagrange*, de *Laplace*, de *Prony*, de *Poisson*, que l'on doit puiser ces connaissances élevées qui honorent l'esprit humain.

Dans le second livre nous avons développé la théorie des moteurs, celle des résistances qui dérivent des effets utiles que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les machines produisent, et enfin celle des résistances passives, c'est-à-dire des résistances qui absorbent en pure perte une portion plus ou moins grande de la quantité d'action transmise.

Le troisième livre traite des parties intermédiaires des machines qui servent, 1°. à transmettre le mouvement à la partie mobile qui doit produire l'effet utile; 2°. à modifier le mouvement, soit dans sa nature, soit dans sa direction, soit dans sa vitesse; et 3°. à corriger avec plus ou moins de perfection les irrégularités du mouvement communiqué par le moteur.

Le dernier livre contient des notions sur l'équilibre des murs de revêtement, des piliers et des voûtes; et un résumé des expériences faites par plusieurs savans pour déterminer la résistance des matériaux.

On trouvera à la fin du volume une table des pesanteurs spécifiques de différentes matières; et deux autres tables qui contiennent les vitesses correspondantes à des chutes données, calculées en pieds et en mètres.

Le signe ** indique tous les articles dans lesquels nous avons employé le calcul différentiel et intégral.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS CE VOLUME.

LIVRE PREMIER.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MÉCANIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Statique.

ARTICLE PREMIER.

ARTICLE II.

Compositions et décompositions des forces.

ARTICLE III.

ARTICLE IV.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ARTICLE V.

Théorie du levier, du plan incliné et de la tension des cordes.

CHAPITRE II.

Dynamique.

ARTICLE PREMIER.

ARTICLE II.

CHAPITRE III.

Hydrostatique.

CHAPITRE IV.

Hydrodynamique.

ARTICLE PREMIER.

ARTICLE II.

Du choc et de la résistance des fluides.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

LIVRE DEUXIÈME.

CHAPITRE PREMIER.

Des moteurs.

ARTICLE PREMIER.

ARTICLE II.

ARTICLE III.

ARTICLE IV.

ARTICLE V.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE II.

Des effets utiles des machines et des résistances qui en résultent.

ARTICLE PREMIER.

ARTICLE II.

ARTICLE III.

Des effets utiles qui résultent de la percussion, de la pression et du frottement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE III.

Des résistances passives.

LIVRE TROISIÈME.

CHAPITRE PREMIER.

Transmission du mouvement, et modification de la vitesse.

CHAPITRE II.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

LIVRE QUATRIÈME.

De la solidité dans les constructions.

CHAPITRE PREMIER.

Équilibre des murs et des voûtes.

CHAPITRE II.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Pag. 20,	lig. 2, *en remontant*.	de la résistance,	*lisez* de la résultante.
23,	— 2.	force *M*.,	— force *P*.
41,	— 4.	Article IV,	— Article V.
60,	— 20.	Pl. II, fig. 1.	— Pl. II, fig. 1. *a*.
61,	— 2.	la diagonale *NB*,	— la diagonale *MB*.
73,	— 11.	tang. *DMB*,	— tang. *CMB*.
Id.	— 1, *en remontant*.	$BMD = 0$,	— $MBC = 0$.
80,	— 1.	masse de cet élément,	— masse de ces élémens.
82,	— 10.	par ∂dgs,	— par $\partial z dgs$.
84,	— 11.	Pl. II, fig. 7,	— Pl. II, fig. 6.
254,	— 1.	supposée appliquée,	— supposé appliqué.
290,	— 11.	la portion *MB*,	— la portion *mb'*.
295,	— 1.	le cercle *MN'*,	— le cercle *MM*.
300,	— 12.	lorsqu'on les compte,	— lorsqu'on les compare.
331,	— 12.	sur le point,	— sur le joint.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

THÉORIE

DE LA

MÉCANIQUE USUELLE.

1. La mécanique est la science de l'équilibre et du mouvement des corps. Lorsqu'on l'envisage dans toute sa généralité, on lui donne le nom de *mécanique universelle*, *rationnelle* ou *spéculative;* mais si l'on ne s'occupe que de la partie de cette même science qui est immédiatement applicable aux arts industriels, alors on l'appelle *mécanique usuelle*.

2. La mécanique usuelle se subdivise elle-même en deux parties : l'une *technique*, a pour but l'examen des machines et des détails de construction qui leur sont relatifs; l'autre *théorique*, renferme les diverses méthodes de calculer leurs effets, de déterminer les dimensions, les formes et les dispositions les plus avantageuses de chacune des parties qui les composent. Cet ouvrage contient la partie théorique de la mécanique usuelle; la partie *technique* est exposée dans les huit volumes de notre *Traité complet de mécanique appliquée aux arts*.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

LIVRE PREMIER.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MÉCANIQUE.

Notions préliminaires.

3. On appelle *solide* un corps dont les molécules adhérentes les unes aux autres ne cèdent qu'avec peine à leur séparation; si les molécules n'ont qu'une très-faible adhérence et sont susceptibles d'obéir au plus léger effort, le corps dont elles sont les parties se nomme *fluide* ou *liquide*.

Le corps est *raide* ou *inflexible* lorsqu'on ne saurait le plier ou courber; il est *flexible* ou *souple* quand il a la propriété contraire.

On dit qu'un corps est *dur* ou *incompressible*, lorsqu'il ne se prête à aucun changement de volume. Le terme *dureté* est plus particulièrement employé pour les corps solides, et celui d'*incompressibilité* pour les fluides.

L'*élasticité* est la propriété qu'ont certains corps compressibles de reprendre leur première manière d'être lorsque la compression cesse. La *mollesse* est la propriété opposée. La nature n'offre aucun corps parfaitement dur, parfaitement élastique ou parfaitement mou.

4. Un corps est en mouvement lorsqu'il change de position relativement aux divers points fixes de l'espace; c'est-à-dire, lorsque dans deux instans successifs les distances du corps à chacun des points de l'espace varient.

5. Les corps, en général, ne peuvent passer du repos au

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mouvement ou du mouvement au repos que par l'effet d'une cause étrangère à laquelle on donne le nom de *force*, de *puissance*, de *moteur*, ou de *résistance*.

6. La propriété qu'ont tous les corps (soit en repos, soit en mouvement) de persévérer dans l'état où ils sont, s'appelle *loi d'inertie*.

7. Tous les corps terrestres ont une tendance à se mouvoir vers le centre de la terre; on donne le nom de *pesanteur* ou de *gravité* à cette propension des corps terrestres. L'expérience nous apprend que l'action de la pesanteur est continue, non-seulement sur tous les corps, mais encore sur toutes leurs molécules en particulier.

8. Le poids d'un corps est le résultat de toutes les impulsions que la pesanteur imprime aux diverses particules de ce corps. Ainsi on ne doit point confondre la pesanteur avec le poids; la première est la force qui sollicite toutes les particules du corps à se rapprocher du centre de la terre; le poids n'est que le résultat de toutes ces impulsions.

9. On appelle *masse* d'un corps la quantité de matière qu'il contient; il ne faut pas confondre le *volume* d'un corps avec sa masse. Le volume est l'espace apparent qu'il occupe, c'est-à-dire, l'extension de ce même corps en longueur, largeur et profondeur. L'expérience démontre que tous les corps sont plus ou moins *poreux*, c'est-à-dire, que tous ont un plus ou moins grand nombre d'espaces vides entre leurs particules; et qu'ils ont des quantités de matière bien différentes sous des volumes égaux.

10. Le rapport du poids d'un corps à son volume, se nomme *pesanteur spécifique*. Soit P la pesanteur spécifique, p le poids, et v le volume d'un corps, on aura $P = \frac{p}{v}$.

11. Le rapport de la masse d'un corps à son volume se

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

nomme *densité.* Si l'on a deux corps et qu'on nomme M, m leurs masses; V, v leurs volumes; et D, d leurs densités, l'on aura la proportion

$$D : d = \frac{M}{V} : \frac{m}{v};$$

d'où il résulte :

1°. Que $M : m = DV : dv$; c'est-à-dire, que les masses sont en raison composée des densités et des volumes;

2°. Que si $D = d$ l'on aura $M : m = V : v$; c'est-à-dire, qu'à densités égales les masses des deux corps sont en raison directe de leurs volumes;

3°. Que si $M = m$, $D : d = v : V$; c'est-à-dire, que les masses étant égales, les densités des substances sont en raison inverse des volumes;

4°. Que si $V = v$; $D : d = M : m$; c'est-à-dire, qu'à volumes égaux les densités sont en raison directe des masses.

12. Les forces ou les puissances qui agissent sur un corps lui impriment ou tendent à lui imprimer le mouvement; dans le premier cas, on les appelle *forces motrices;* dans le second, *forces de pression.* Les vitesses qui résultent des premières s'appellent *vitesses réelles;* les vitesses que les secondes tendent à produire s'appellent *vitesses virtuelles.*

13. Toute force en action, quelle que soit sa nature, transporte ou tend à transporter une certaine quantité de matière, d'un endroit de l'espace à un autre endroit, pendant un certain temps; ainsi l'effet de cette force est la vitesse communiquée à toutes les particules de la masse, et doit être indiqué par le produit de la masse par la vitesse : on donne à ce produit le nom de *quantité de mouvement.* La force de pression est représentée par le produit de la masse par la vitesse qu'elle tend à lui communiquer; et la force motrice est représentée par le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

produit de la masse par la vitesse qu'elle lui communique réellement.

14. On considère dans une force, 1°. sa grandeur, ou l'intensité de l'effort qu'elle fait pour mouvoir le corps ou le point du corps auquel elle est appliquée; 2°. sa direction, c'est-à-dire, la ligne droite suivant laquelle elle tend à mouvoir le point du corps sur lequel elle agit.

15. Lorsque plusieurs forces appliquées à un même corps se contrebalancent et se détruisent réciproquement, de manière qu'il ne résulte aucun mouvement, elles sont alors en équilibre. L'équilibre diffère du simple repos en ce qu'il suppose l'exercice virtuel de plusieurs forces qui se combattent; tandis que le second dépend de l'absence de toutes forces.

16. La théorie de la mécanique se subdivise ordinairement en quatre parties, dont la première, qui a pour objet l'équilibre des corps solides, se nomme *statique;* la seconde, à laquelle on donne le nom de *dynamique*, determine les propriétés et les effets du mouvement des corps solides; la troisième, nommée *hydrostatique*, a pour but l'équilibre des corps fluides; et enfin la dernière, que l'on appelle *hydrodynamique*, examine ce qui est relatif au mouvement des corps fluides. Nous admettrons cette subdivision, et nous consacrerons un chapitre à chacune des quatre parties que nous venons d'indiquer.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE PREMIER.

Statique.

ARTICLE PREMIER.

Propositions générales.

17. DEUX forces sont égales lorsqu'étant appliquées en sens contraire à un même point, ou aux extrémités d'une droite inflexible, elles se font équilibre.

18. Une force est double, triple..... d'une autre, lorsqu'elle est capable de faire équilibre à deux, à trois..... forces qui agiraient dans le même sens et seraient égales à cette dernière.

On donne le nom de *résultante* à une force qui fait équilibre à plusieurs autres forces appliquées au même corps; ces dernières se nomment *composantes*.

19. Si on applique à un même point et suivant la même direction plusieurs forces égales entre elles, et si l'on prend l'une quelconque de ces forces pour unité, la force multiple sera exprimée par un nombre égal à celui des forces ajoutées.

On peut représenter une force par une ligne droite prise sur sa direction, et sa force multiple par une ligne droite multiple de la première; par ce moyen on indique tout à la fois la quantité d'action de la force et le sens suivant lequel cette action s'exerce. Ainsi, si deux forces P et Q (Pl. I, fig. 1) exercent une traction sur le point A, et que la seconde soit double de la première, on prend à volonté, sur la direction AP de la force P, la partie AB pour représenter cette force; puis, pour représenter l'autre force Q, l'on prend sur la direction AQ la longueur AC double de AB.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On aura ainsi la proportion

$$P : Q = AB : AC.$$

Ce mode de représenter les forces est d'un grand usage en mécanique.

20. Lorsqu'une force, appliquée à un point déterminé d'un corps, tire ou pousse ce corps suivant une direction quelconque, il est permis de changer le point d'application de la force et de le transporter en un point quelconque de sa direction, pourvu que l'on suppose ce dernier point lié au premier par une droite inflexible; car tous les points qui sont sur cette droite ne pouvant ni se rapprocher ni s'éloigner les uns des autres, aucun d'eux ne peut se mouvoir suivant cette droite, sans faire mouvoir tous les autres de la même manière que si la force leur était immédiatement appliquée.

21. On peut évidemment, sans altérer l'état d'un système de forces appliquées à un corps, y introduire ou en supprimer des forces en équilibre.

22. Lorsque plusieurs forces sont appliquées en même temps à un même point, il en résulte, ou que ce point reste en repos, ou qu'il se meut par un seul chemin, lui étant impossible de suivre plusieurs directions à la fois; de sorte qu'il se meut de la même manière que s'il était poussé ou tiré par une force unique dirigée suivant ce chemin, et capable du même effet. Ainsi il existe toujours une force unique dont l'action équivaut à celle d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point et agissant suivant des directions quelconques, et c'est cette force unique qui (comme nous l'avons déjà dit) se nomme la *résultante*.

23. L'opération par laquelle on cherche la résultante des forces appliquées à un même point, à une même ligne ou à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

un même corps, se nomme *composition des forces;* l'opération inverse se nomme *décomposition des forces.*

24. Il est évident que la résultante de plusieurs forces qui agissent sur la même droite, dans le même sens, est égale à leur somme; et il est également évident que si les forces agissent sur la même droite, mais les unes en sens opposé des autres, dans ce cas la résultante est égale à l'excès de la somme de celles qui agissent dans un sens sur la somme de celles qui agissent en sens opposé.

Article II.

Composition et décomposition des forces.

Forces parallèles.

25. *Si aux extrémités d'une droite inflexible AB* (Pl. I, fig. 2), *sont appliquées deux forces P et Q, dont les directions soient parallèles entre elles, et qui agissent dans le même sens,*

1°. *La direction de la résultante R de ces deux forces est parallèle aux droites AP, BQ, et est égale à leur somme;*

2°. *Cette résultante partage la ligne AB en deux parties réciproquement proportionnelles aux deux forces, de manière que l'on a*

$$P : Q = BO : AO$$

1°. Il est évident que l'on ne changera rien à l'état du système des forces en y introduisant deux nouvelles forces p et q égales, et agissant en sens opposés sur la direction de la ligne AB; de sorte que la résultante des quatre forces, p, q, P, Q, sera la même que la résultante des deux seules forces primitives P, Q. On supposera que S soit la résultante particulière des deux forces p, P, et que T soit celle des deux autres q, Q.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Quelles que soient les directions des deux nouvelles forces S et T, ces directions, étant prolongées, se réuniront en un point C, où l'on pourra supposer (20) que les deux forces S et T sont appliquées; l'on mènera par ce point une ligne FG, parallèle à la droite AB, et l'on pourra décomposer chacune des forces S et T en deux forces dirigées suivant FG et CR. Les forces suivant FG, étant égales à p et q, et dirigées en sens contraire, se détruisent; les forces suivant CR s'ajoutent et sont égales à $P + Q$.

Cette première partie de la démonstration est entièrement dépendante du principe énoncé (20);

2°. Il s'agit maintenant de déterminer le point O par lequel passe la résultante R, et de prouver que $P : Q = BO : AO$. Soient MC, CN des lignes proportionnelles aux forces p, P; mC, Cn des lignes proportionnelles aux q, Q. On aura, à cause de la similitude des triangles CNr, CAO; Cnv, COB, les proportions suivantes :

$$P : p = CO : OA; \; q : Q = BO : CO.$$

Si l'on multiplie par ordre en observant que $p = q$, on aura

$$P : Q = BO : OA.$$

26. L'on déduit de cette proposition fondamentale les corrollaires suivans :

1°. Si $P = Q$, $BO = OA$, c'est-à-dire que, si les forces parallèles sont égales, la résultante passe par le milieu de la ligne AB;

2. Lorsqu'une force unique R est appliquée à un point O d'une droite inflexible AB, on peut toujours la décomposer en deux autres P, Q, qui (étant appliquées à deux points A et B, donnés sur la même droite et étant dirigés parallèlement à OR produisent le même effet), en partageant la force R en

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

deux parties réciproquement proportionnelles aux droites AO et OB;

3°. Si deux forces, dont les directions sont parallèles et qui agissent en sens contraires, sont égales entre elles, leur résultante devient nulle, de sorte qu'il est impossible de leur faire équilibre au moyen d'une force unique; mais on pourra, au moyen de deux forces, obtenir cet équilibre.

27. Si un nombre quelconque de forces parallèles (Pl. 1, fig. 3) P, Q, R, S, etc., agissent dans un même sens, leurs points d'application étant liés entre eux d'une manière invariable, on détermine leur résultante de la manière suivante :

On détermine d'abord la résultante T des deux forces P et Q, et l'on aura

$$T = P + Q\,;\ P + Q : Q = AB : AE \ (25),$$

ainsi les forces P et Q se trouvent remplacées par la force T dont on connaît la valeur et le point d'application E. On réunit (au moyen de la droite EC), ce point au point d'application C de la force R; on compose les forces T et R, et leur résultante sera déterminée par l'équation

$$V = T + R = P + Q + R,$$

et par la proportion

$$P + Q + R : R = EC : EF.$$

En continuant de la même manière, l'on trouvera la résultante générale de toutes les forces, en quelque nombre qu'elles soient, et la grandeur de cette résultante sera toujours égale à la somme de toutes ces forces.

28. Si parmi les forces parallèles dont on veut déterminer la résultante, les unes agissent dans un sens, et les autres en

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sens contraire, on détermine d'abord la résultante particulière de celles qui agissent dans le premier sens, et ensuite la résultante particulière des autres. Par-là, toutes les forces sont réduites à deux autres agissant en sens opposés. La résultante de ces deux dernières, qui sera aussi la résultante générale, sera égale à l'excès de la somme des forces qui agissent dans un sens sur la somme de celles qui agissent en sens contraire.

Le point par lequel passe la résultante des forces parallèles se nomme *centre des forces parallèles*. Si les forces, sans cesser d'être parallèles et sans changer de grandeurs ni de points d'application, prenaient une autre direction, le centre de ces forces serait toujours le même, puisque les proportions qui déterminent la position de ce centre seront toujours les mêmes.

Forces concourantes.

29. *La résultante des deux forces P, Q* (Pl. I, fig. 4), *comprises dans un même plan sera représentée en direction et en grandeur, par la diagonale du parallélogramme construit sur la direction de ces forces.* Cette proposition très-importante sert de base à toute la mécanique, et elle est désignée par le nom de *principe du parallélogramme des forces.*

Nous démontrerons d'abord que la résultante est dirigée suivant la diagonale, et nous ferons voir ensuite qu'elle est représentée en grandeur par cette ligne :

1°. Prenons sur les directions AP, AQ des forces P et Q, les longueurs AB, AC, proportionnelles à ces forces, de manière que $P : Q = AB : AC$. Supposons que la force Q soit appliquée au point C et qu'au même point C soient appliquées deux forces p et q, égales entre elles, *directement opposées*, et chacune égale à la force Q. Il est évident que l'effet

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des quatre forces P, Q, p, q, sera le même que celui des deux forces primitives P, Q, puisque les deux autres p et q se détruisent.

Les forces égales Q et q auront une résultante particulière S, dont la direction CS (à cause de l'égalité des forces) divisera nécessairement l'angle qCQ, en deux parties égales.

Les directions AP, Cp, des deux autres forces P et p, étant parallèles, elles doivent avoir une résultante T (25), qui leur soit parallèle et qui passe par un point H, tel qu'on ait $P : p = HC : HA$. Le point K où les directions des deux résultantes particulières T et S se coupent, devra appartenir évidemment à la résultante générale des quatre forces P, p, Q, q et conséquemment des forces primitives P, Q. Observons que $HC = HK$, car le triangle CHK est isocèle parce que, à cause du parallélisme des lignes HT, Cp, les angles alternes DCK et HKC sont égaux; et nous avons dit précédemment que la direction de la résultante S, des forces Q, q, coupe l'angle que font les directions de ces forces en deux portions égales; donc les angles DCK et HCK sont égaux, et conséquemment l'angle HCK est égal à l'angle HKC, et $HK = HC$; or, on a la proportion $P : Q = HC : HA$, donc on aura $P : p$ ou $Q = HK : HA$. Du point B tirons BD parallèle à AC, nous aurons

$$P : Q = AB : AC = CD : AC;$$

donc

$$CD : AC = HK : HA;$$

et cette proportion ne peut avoir lieu si les trois points A, K, D ne se trouvent sur une même ligne droite qui est la diagonale du parallélogramme $ABCD$;

2°. Soient AB, AC (Pl. I, fig. 5), deux composantes; la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diagonale AD du parallélogramme $ABCD$, construit sur les côtés AB et AC, représente la direction de la résultante ; il s'agit maintenant de démontrer que la longueur de cette même diagonale représente la grandeur de la résultante.

Si l'on applique suivant le prolongement AR de la résultante une force R qui lui soit égale et contraire, cette force fera équilibre aux deux composantes représentées par AB, AC; or, les trois forces AB, AC et R, étant en équilibre autour du point A, il est évident que l'une quelconque des trois est égale et directement opposée à la résultante des deux autres ; ainsi si l'on prend sur le prolongement de AB une partie $AG = AB$, la force AG sera en direction et en grandeur la résultante de la force AC, et de la force R qui agit suivant AR; mais AG est égale et parallèle à DC; il s'ensuit que la droite CG est aussi égale et parallèle à AD, et conséquemment au prolongement AR : si donc l'on tire une droite par les points G et R, la figure $ACGR$ sera un parallélogramme. Donc, puisque la résultante des forces AC et R est représentée en grandeur par la diagonale AG du parallélogramme $ACGR$, il faut que la force R soit représentée par le côté AR; car si elle était ou plus grande ou plus petite, en construisant un parallélogramme sur cette force et sur le côté AC, sa diagonale ne coïnciderait point avec AG; ainsi l'on a $R = AR = AD$, et la résultante des deux forces AB, AC, est représentée en grandeur comme en direction par la diagonale AD.

3o. Les deux composantes, P et Q et leur résultante R (Pl. I, fig. 6), étant représentées respectivement par les droites AB, AC, AD ou AB, BD, AD, il s'ensuit que $P : Q : R = AB : BD : AD$; mais les côtés AB, BD, AD, du triangle ABD, sont entre eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés ;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Donc on aura :

$$P : Q : R = Sin.\ ADB : Sin.\ BAD : Sin.\ ABD,$$

et $P : Q : R = Sin.\ DAC : Sin.\ BAD : Sin.\ BAQ.$

31. On démontre en trigonométrie que dans un triangle ABD (Pl. I, fig. 7),

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 \pm 2AB \times BD.\ Cos.\ ABD;$$

ainsi, si deux forces composantes P, Q, sont représentées par les côtés AB, BD, et leur résultante R par le côté AD, l'on aura l'équation suivante :

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 \pm 2PQ\ Cos.\ (P, Q)};$$

$Cos.\ (P, Q)$ indique ici le cosinus de l'angle formé par les directions des deux forces P, Q.

32. Si d'un point quelconque D (Pl. I, fig. 6), pris sur la direction AR de la résultante des deux forces P, Q, on abaisse des perpendiculaires DE, DF, sur les directions de ces deux forces; ces perpendiculaires seront entre elles réciproquement comme les forces P et Q.

Les deux triangles EDB et CDF sont semblables, parce qu'ils sont rectangles, et que l'angle EBD est égal à l'angle DCF; donc

$$DC : DB = DF : DE;$$

mais $P : Q = AB : AC = DC : BD$;
il s'ensuit que $P : Q = DF : DE$.

33. On détermine avec facilité la résultante d'un nombre quelconque de forces P, Q, R, etc., dont les directions concourent en un même point (Pl. I, fig. 8).

L'on prend d'abord sur les directions de toutes les forces des parties AB, AC, AD, etc., proportionnelles à leurs grandeurs; puis on compose les deux forces P, Q, en for-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mant le parallélogramme $ABFC$, dont la diagonale AF représente la résultante particulière.

On compose ensuite cette résultante T avec la force R, et en construisant le parallélogramme $AFGD$, on aura une nouvelle résultante particulière V, représentée par la diagonale AG.

En continuant toujours de la même manière, on trouvera enfin la direction et la grandeur de la résultante générale de toutes les forces P, Q, R, etc., en quelque nombre qu'elles soient.

34. Si les directions d'un nombre quelconque de forces P, Q, R, etc., comprises dans un même plan, ne concourent point à un même point, voici comment on détermine leur résultante (Pl. I, fig. 9).

Soient PA, QB, RC, etc., les directions des forces P, Q, R, etc.; on prend d'abord sur toutes les directions les parties Aa, Bb, Cc, proportionnelles à leur grandeur; on prolonge ensuite les directions des deux forces P, Q, jusqu'à ce qu'elles se soient rencontrées; du point de rencontre E, on porte sur les directions des forces P, Q, les parties $EF = Aa$, $EG = Bb$, et l'on achève le parallélogramme $EFeG$, dont la diagonale Ee représentera en grandeur et en direction la résultante T des forces P, Q.

On prolonge les directions des deux forces T et R jusqu'à ce qu'elles se rencontrent; puis on porte du point de rencontre H sur ces directions les parties $HI = Ee$, $HK = Cc$, l'on achève le parallélogramme, et l'on obtient la détermination en grandeur et en direction de la résultante V des trois forces P, Q, R, etc.

En continuant ainsi de suite l'on parviendra à déterminer la résultante générale de toutes les forces proposées, en quelque nombre qu'elles soient.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

35. *Si trois forces dont les directions concourent en un point sont représentées par les trois arêtes contiguës d'un parallélipipède; leur résultante le sera par la diagonale menée du point de concours au sommet de l'angle opposé* (Pl. I, fig. 10).

Soient les forces P, Q, S, représentées en direction et en grandeur par les lignes AB, AC, AE. On pourra substituer aux deux forces P, Q (placées dans le même plan), leur résultante particulière représentée par la diagonale AD du parallélogramme $ABDC$. Mais si par AD et par AE on fait passer un plan, sa section avec le parallélogramme $EFHG$, sera une ligne droite EH, égale et parallèle à AD; donc $EADH$ est un parallélogramme, et la résultante des forces AD et AE sera représentée par la diagonale AH de ce parallélogramme, laquelle est en même temps la diagonale du parallélipipède.

La valeur de cette résultante R des trois forces concourantes P, Q, S, sera exprimé par l'équation.

$$R = \sqrt{[P^2 + Q^2 + S^2 + 2PQ\,Cos.\,(P, Q) + 2PS\,Cos.\,(P, S) + 2QS.\,Cos.\,(Q, S)}.$$

Lorsque les trois forces P, Q, S sont perpendiculaires entre elles, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + S^2}$.

36. Le théorème que nous venons de démontrer donne le moyen de trouver la résultante d'un nombre quelconque de forces qui auraient dans l'espace des directions quelconques.

On décomposera chacune des forces en trois autres forces concourantes perpendiculaires entre elles, de manière que toutes les forces P, Q, R, etc., seront décomposées en trois systèmes de forces telles, que toutes les forces d'un même système seront parallèles entre elles; or en général, toutes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les forces d'un même système se réduiront à une seule force de même direction ; donc toutes les forces P, Q, R, etc., auront trois résultantes parallèles à trois droites rectangulaires fixes et déterminées de position par rapport à ces forces.

Nommant S, S', S'', etc., les forces qui agissent sur un point déterminé, et menant par ce point trois droites fixes et perpendiculaires entre elles, chacune des forces primitives S, se décomposera en trois, p, q, r, dirigées suivant les droites rectangulaires.

Nommant de même p', q', r', les trois forces composantes de la force S'; p'', q'', r'', les trois forces composantes de la force S'', etc.; la résultante de toutes les forces S, S', S'', sera la diagonale du parallélipipède rectangle, dont les trois côtés adjacens au même angle seront,

Pour le premier, $p + p' + p'' +$ etc.
Pour le second, $q + q' + q'' +$ etc.
Pour le troisième, $r + r' + r'' +$ etc.
Donc la résultante aura pour expression,

$$X = \sqrt{(p + p' + p'' + \text{etc.})^2 + (q + q' + q'' + \text{etc.})^2 + (r + r' + r'' + \text{etc.})^2}.$$

37. L'équation $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + S^2}$ donne la valeur de la résultante de trois forces concourantes perpendiculaires l'une à l'autre, lorsque la valeur de ces forces est connue. Si au contraire la force R est donnée, et qu'il s'agisse de la décomposer en trois forces rectangulaires P, Q, S, qui fassent avec elle des angles donnés a, b, c, les valeurs des forces demandées seront déterminées par les trois équations,

$$P = R.\,Cos.\,a,\ Q = R.\,Cos.\,b,\ S = R.\,Cos.\,c.$$

Si $S = o$, c'est-à-dire, que si R n'est plus que la résul-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tante de deux seules forces rectangulaires P, Q; alors on fait usage des équations suivantes :

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad P, = R. \ Cos. \ a, \quad Q = R. \ Cos. \ b,$$
$$Cos. \ a = \tfrac{P}{R}, \ Cos. \ b = \tfrac{Q}{R}.$$

38. Lorsque le point auquel sont appliquées des forces quelconques est libre, c'est-à-dire, lorsqu'il n'est point assujetti à une surface donnée; pour qu'il y ait équilibre, il faut que leur résultante soit nulle; mais si ce point est assujetti à rester sur une surface donnée, il ne sera plus nécessaire pour l'équilibre que la résultante de ces forces soit nulle; il suffira qu'elle soit perpendiculaire à la surface, afin que ce point ne puisse glisser dans aucun sens. La force perpendiculaire sera, dans ce cas, détruite par la résistance de la surface, qui par conséquent équivaudra à une force égale et contraire à la force détruite.

Article III.

Des momens.

39. On appelle *moment* d'une force le produit de sa grandeur par sa distance d'un point fixe, ou bien le produit de sa grandeur par la distance de son point d'application à un plan donné; ainsi on distingue deux espèces de *momens*, l'un par rapport à un point fixe, le second par rapport à un plan. Les momens de première espèce sont indépendans des points d'application des forces dont la direction est constante. Ceux de la seconde espèce ont la propriété de ne pas changer, quoique les forces varient de direction.

40. Lorsque l'on considère les momens de plusieurs forces par rapport à un même point, ce point se nomme *centre* des momens.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Forces parallèles.

41. *Si aux extrémités d'une droite AB* (Pl. I, fig. 11), *sont appliquées deux forces P, Q, parallèles et agissant dans le même sens, et si par le point d'application C de leur résultante on mène une droite DE dirigée d'une manière quelconque, les momens des forces P, Q, par rapport à la droite DE, seront égaux; c'est-à-dire, que si l'on abaisse des points A, B sur DE, les perpendiculaires AD, BE, on aura*

$$P \times AD = Q \times BE.$$

Les triangles rectangles semblables, ACD, ECB, donnent la proportion $BC : AC = BE : AD$; mais $P : Q = BC : AC$ (25); donc

$$P : Q = BE : AD \text{ et } P \times AD = Q \times BE.$$

42. *Le moment de la résultante de deux forces parallèles par rapport à une ligne déterminée est égal à la somme ou à la différence des momens de ces forces.*

Soient deux forces P, Q (Pl. I, fig. 12, 13), parallèles et dirigées dans le même sens, appliquées à la droite AB, il s'agit de démontrer que, 1°. si du point F pris sur le prolongement de AB, on mène une droite FH dans un plan quelconque, et que des points d'application A, B, C, des forces P, R, Q, l'on abaisse sur FH, les perpendiculaires AG, CI, BH, on aura

$$R \times CI = Q \times BH + P \times AG.$$

Par le point C soit mené DE égale, et parallèle à GH, nous aurons d'abord, par le théorème précédent, $P \times AD = Q \times BE$. Mais nous savons d'autre part (25) que la résultante R doit être égale à la somme des composantes; ainsi $R = P + Q$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par CI, l'on aura

$$R \times CI = P \times CI + Q \times CI = P \times GD + Q \times HE,$$

parce que par construction $CI = GD = HE$; *mais* $GD = AD + AG$; *donc on aura*

$$R \times CI = P \times AD + P \times AG + Q \times HE,$$

et en substituant $Q \times BE$ au lieu de $P \times AD$, on aura

$$R \times CI = P \times AG + Q\,(HE + BE) = P \times AG + Q \times BH;$$

2°. Si Le point F est pris entre A et B (Pl. I, fig. 13), $R \times CI = Q \times BH - P \times AG$, parce que dans ce second cas $GD = AD - AG$.

Il résulte de ce théorème que

$$CI = \frac{Q \times BH \pm P \times AG}{P + Q}$$

43. Si la ligne FH (Pl. I, fig. 12 et 13) coïncidait avec la droite AB, dans ce cas l'on aura

$$R \times CF = Q \times BF \pm P \times AF;$$

c'est-à-dire, que lorsque deux forces P, Q, dont les directions sont parallèles, et qui agissent dans le même sens, sont appliquées à une droite inflexible, le moment de leur résultante par rapport à un point fixe, pris sur cette droite ou sur son prolongement, est égal à la somme ou à la différence des momens des forces composantes; il est égal à la somme, si le point se trouve sur le prolongement de la droite, et il est égal à la différence lorsque ce point se trouve sur la droite même.

44. *Le moment de la résistance de deux forces parallèles et qui agissent dans le même sens, par rapport à un plan,*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sera égal à la somme ou à la différence des momens des deux composantes (Pl. I, fig. 14 et 15).

Soient les forces P, Q appliquées aux points A, B de la droite AB; du point F pris sur cette droite (fig. 14), ou sur le prolongement de cette droite (fig. 15) étant mené un plan MN, et étant abaissé, des points d'application A, B, C, des perpendiculaires sur le plan, il s'agit de démontrer que

$$R \times CI = Q \times BH \pm P \times AG.$$

Les trois droites AG, BH, CI étant perpendiculaires au même plan, et ayant toutes les trois leur origine aux points A, B, C d'une même droite FB, elles se trouvent dans un même plan mené par AB; ce plan coupe le plan MN, et les points F, G, I, H se trouvent sur l'intersection de ces deux plans; la ligne d'intersection FH coupe les droites AG, BH, CI à angles droits. Cela posé, on voit que la démonstration du théorème précédent (42) est entièrement applicable à ces cas, et l'on en déduit que

$$R \times CI = Q \times BH \pm P \times AG.$$

45. Si un nombre quelconque de forces parallèles, agissent dans le même sens, et sont toutes placées du même côté d'un plan quelconque parallèle à leur direction, le moment de leur résultante sera égal à la somme de toutes les forces par rapport au plan.

Soient P, P', P'', etc., les forces composantes, d, d', d'', etc., leur distance du plan. Si l'on prend les deux premières forces en particulier et qu'on les *compose*, l'on aura (44) $Rr = Pd + P'd'$ (en appelant R la résultante, et r sa distance du plan). Si l'on combine avec R une troisième force P'', l'on obtiendra une nouvelle résultante R', et l'on aura

$$R'r' = Rr + P''d'' = Pd + P'd' + P''d''.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en continuant le même procédé, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la dernière composante, on trouvera que le moment de la résultante est égal à la somme des momens de toutes les composantes quel que soit leur nombre.

46. Si les forces sont situées de part et d'autre du plan auquel elles se rapportent, alors *le moment de la résultante est égal à l'excès de la somme des momens des forces qui sont situées d'un côté du plan sur la somme des momens des forces qui sont situées de l'autre côté.*

Par le théorème précédent, de chaque côté du plan on aura une résultante particulière dont le moment sera égal à la somme des momens de ses composantes; soient S, V, ces deux résultantes, et s, v, leurs distances respectives du plan. Si l'on compose les deux forces S, V et que du point d'application de leur résultante, on abaisse une perpendiculaire sur le plan, on aura alors (en appelant Y la nouvelle résultante et y sa distance du plan) $Yy = Ss - Vv$ (44).

Forces qui concourent à un même point.

47. *Si deux forces P, Q* (Pl. I, fig. 16), *concourent en un point A, les momens de ces forces par rapport à un point quelconque D, pris sur la direction de la résultante R sont égaux.*

Si du point D on abaisse les perpendiculaires DB, DC sur les directions des forces P, Q, l'on aura

$$P : Q = DC : DB \ (29)$$

et conséquemment $P \times DB = Q \times DC$.

Si l'on applique sur le prolongement de la force R la force S qui lui soit égale et opposée, les trois forces S, P, Q, seront en équilibre, et l'une d'elle pourra être prise indifféremment pour

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la résultante des deux autres; si donc du point M pris sur la direction de la force M, l'on abaisse des perpendiculaires MN, ML sur les directions de S et de Q, l'on aura

$$S \times MN = Q \times ML \text{ et comme } S = R,\ R \times MN = Q \times ML.$$

48. *Le moment de la résultante des deux forces concourantes, par rapport à un point pris dans le plan de leurs directions, est égal à la somme des momens des composantes, si le point est pris en dehors de l'angle fait par leurs directions, et est égal à leur différence lorsque ce point est placé en dedans de cet angle* (Pl. I, fig. 17 et 18).

Soit D le centre des momens (40), on mènera la droite AD; puis l'on décomposera la force de P en deux autres forces p, p' dirigées, l'une suivant la ligne AD, et l'autre suivant AQ; à cet effet, ayant représenté la force P par la partie AF de sa direction, on complète le parallélogramme $AGFH$.

Du point D on tire des perpendiculaires DB, DC, DE sur les directions des forces P, Q, R, l'on aura alors d'un côté

$$P \times DB = p' \times DC,$$

et de l'autre

$$R \times DE = (Q \pm p')\,DC = Q \times DC \pm p' \times DC,$$

et substituant $P \times DB$ au lieu de $p' \times DC$, l'on aura

$$R \times DE = Q \times DC \pm P \times DB.$$

49. On doit remarquer que lorsque le *centre des momens* est placé hors de l'angle que font entre elles les directions des composantes, les forces P, Q tendent à faire tourner le point A autour de ce centre; et qu'au contraire, lorsque le centre des momens est placé en dedans de l'angle, les forces tendent à faire tourner le point A dans des sens opposés.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

50. *Si un nombre quelconque de forces qui ont des directions différentes sont situées dans un même plan, et si d'un point pris dans ce plan on abaisse des perpendiculaires sur leurs directions et sur celle de la résistance, le moment de cette résultante est égal à la somme des momens des forces composantes, lorsque toutes ces forces tendent à donner un mouvement de rotation dans le même sens; mais si quelques-unes de ces forces tendent à faire tourner en sens contraire; dans ce cas, le moment de la résultante est égal à la somme des momens des unes, moins la somme des momens des autres.*

Soient P, P', P'', P''', etc., les composantes, qui tendent à faire tourner dans un même sens; p, p', p'', p''', etc., les distances respectives de chacune d'elles du centre des momens, ces distances sont représentées par les perpendiculaires tirées du centre des momens sur les directions (prolongées s'il le faut) de chacune des forces. Si l'on *compose* deux forces P, P' en particulier, et que R soit leur résultante particulière, on aura (48)

$Rr = Pp + P'p'$ (r étant ici la distance de la force R au centre des momens). Si ensuite l'on compose les deux forces R, P'', l'on aura

$$R'r' = Rr + P''p'' = Pp + P'p' + P''P'' \text{ et ainsi de suite.}$$

On effectue la même opération pour toutes les forces qui tendent à faire tourner dans le sens opposé (si ces forces existent); alors toutes les forces primitives sont remplacées par deux seules qui tendent à faire tourner le système en sens opposé; or le moment de la résultante de ces deux (48), est égal à la différence des momens des deux composantes, donc en remplaçant le moment de chacune de ces deux forces par les mo-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mens de toutes les forces partielles qui les composent l'on aura le résultat énoncé.

Article iv.

Centre de gravité.

51. La *pesanteur* ou *gravité*, c'est-à-dire, la force qui sollicite les corps à se rapprocher du centre de la terre, exerce son action sur toutes les parties de matière, dans des directions *verticales*, c'est-à-dire perpendiculaires à la surface de la terre. Quoique ces verticales ne soient point effectivement parallèles, puisque leurs directions se réunissent au centre de la terre, néanmoins la distance du point de concours étant incomparablement plus grande que les dimensions des corps que l'on considère ordinairement, il s'ensuit que l'on peut sans erreur sensible considérer ces verticales comme parallèles dans toute l'étendue d'un même corps.

52. Nous regarderons désormais un corps pesant comme un assemblage de molécules, auxquelles sont appliquées des forces égales, parallèles et dirigées dans le même sens. Toutes ces forces ont une résultante égale à leur somme et parallèle à leur direction commune; le point par lequel passe cette résultante, s'appelle centre de *gravité* ou d'*inertie*. La théorie des forces parallèles nous apprend que quelle que soit la position que l'on donne au corps, cette résultante passe toujours par le centre de gravité, car en variant la position du corps, on n'altère point la grandeur des forces qui agissent sur ses molécules; et elles changent seulement de direction sans cesser d'être parallèles entre elles.

53. Si l'on suspend un corps pesant à un point fixe, il suffit pour l'équilibre que la droite, qui joint ce point et le centre de gravité, soit verticale. Car le poids d'un corps étant une force

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

verticale appliquée à son centre de gravité, sa direction coïncidera avec la droite qui joint le centre et le point fixe; par conséquent cette force sera détruite par la résistance de ce dernier point comme si elle y était immédiatement appliquée.

54. La propriété que nous venons d'expliquer, donne le moyen de déterminer par l'expérience le centre de gravité d'un solide de figure quelconque. On le suspend successivement dans trois positions différentes, et au moyen d'un fil à plomb suspendu à côté du corps, on trace sur la surface de ce corps la ligne de section d'un plan vertical passant par son point de suspension. On trace de cette manière, en mettant le corps en équilibre dans trois sens différens, trois profils qui fournissent six intersections sur la surface du corps, et déterminent les extrémités de trois axes qui se rencontreront en un point commun qui sera le centre de gravité.

55. Toutes les fois qu'on a un système de molécules pesantes égales deux à deux, et placées symétriquement autour d'un point, de manière que les droites qui les joignent se coupent mutuellement en deux parties égales, ce point qui est le centre de figure sera en même temps le centre de gravité. Il en résulte que, 1°. le centre de gravité d'une droite (*a*) est au milieu de sa longueur;

2°. Le centre de gravité de la surface et celui du contour d'un parallélogramme, sont dans son centre de figure, c'est-à-dire, au point d'intersection de ses deux diagonales;

3°. Le centre de gravité de l'aire d'un cercle, et celui de sa circonférence, sont au centre du cercle;

(*a*) Lorsqu'on parle du centre de gravité d'une ligne, ou d'une surface (qui par elles-mêmes sont dénuées de pesanteur), l'on suppose que tous leurs points sont chargés de poids égaux, ou tirés par des forces égales et parallèles.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4°. Le centre de gravité de la surface d'un polygone régulier ou symétrique, et celui de son périmètre, sont au centre de figure;

5°. Le centre de gravité de la surface totale d'un parallélipipède, et celui de sa solidité, sont dans son centre de figure, c'est-à-dire, dans l'intersection de deux quelconques de ces quatre diagonales, ou au milieu d'une d'entre elles;

6°. Le centre de gravité de la surface convexe d'un cylindre droit ou oblique, terminé par deux bases parallèles, celui de la surface totale de ce cylindre, et celui de sa solidité, sont dans le milieu de la longueur de son axe;

7°. Le centre de gravité de la surface d'une sphère, et celui de sa solidité, sont au centre de la sphère.

Des centres de gravité des corps terminés par des droites ou des plans.

56. *Trouver le centre de gravité de l'aire d'un triangle rectiligne,* soit le triangle ABC (Pl. I, fig. 19.); on divise les côtés AB et BC en deux parties égales aux points D et E; puis des sommets A et C, l'on mène les droites AE et CD; enfin l'on mène la droite ED, qui doit être parallèle à AC, à cause que les côtés BA et BC sont coupés proportionnellement par cette droite. Le centre de gravité se trouve à l'intersection G des droites AE et CD: or les triangles CGA et EGD sont semblables, parce que leurs angles correspondans sont égaux; donc

$$AG : GE = CA : DE;$$

Mais les deux autres triangles semblables, ACB, et DEB, donnent

$$CA : DE = AB : BD = 2 : 1;$$

donc,

$$AG : GE = 2 : 1; \text{ et } AG = 2\,GE,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et par conséquent

$$GE = \tfrac{1}{3} AE \text{ et } AG = \tfrac{2}{3} AE;$$

c'est-à-dire, que le centre de gravité du triangle ABC est placé aux deux tiers de la ligne AE, à partir du sommet.

57. *Trouver le centre de gravité de l'aire du polygone rectiligne $ABCDE$* (Pl. I, fig. 20), *composé d'un nombre quelconque de côtés.*

On divisera l'aire du polygone en triangle, et on déterminera les centres de gravité respectifs de chaque triangle; puis on mènera une droite FG qui réunira les centres de gravité des deux premiers triangles BAC et CAD, et l'on trouvera sur cette droite le centre de gravité I du système des deux triangles, en divisant la droite FG en deux parties réciproquement proportionnelles aux aires des deux triangles.

On réunit le point I au centre de gravité H du triangle suivant, et l'on divise la droite IH en deux parties réciproquement proportionnelles aux aires du quadrilatère $ABCD$, et du triangle DAE; le point K sera alors le centre de gravité du système des trois triangles.

En continuant ainsi de suite, quel que soit le nombre des triangles, on trouvera le centre de gravité du polygone proposé.

58. *Trouver le centre de gravité de la solidité d'une pyramide triangulaire $ABCD$* (Pl. I, fig. 21).

On commence par déterminer le centre de gravité de la base BDC, lequel se trouve en F aux deux tiers de DE, à partir du point D. L'on mène ensuite la droite AF qui traversera les centres de gravité de toutes les tranches élémentaires parallèles à la base BDC, et dont on peut supposer que la pyramide est composée : il est évident que le centre de gravité de cette pyramide doit se trouver sur la droite AF.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Par la même raison, ayant déterminé le centre de gravité d'une des faces *ABC*, et ayant mené la ligne *DG*, le centre de gravité de la pyramide devra se trouver sur cette ligne ; et par conséquent, il ne pourra être situé qu'en *H*, point d'intersection des deux lignes *AF* et *DG*.

Menons *GF*; cette droite sera parallèle à *AD*, et sa longueur sera le tiers de cette ligne ; car elle coupe *ED* et *EA* au tiers de leurs longueurs respectives. Les triangles semblables *GHF* et *AHD* donnent la proportion

$$AH : HF = AD : GF = 3 : 1 ;$$

donc

$$HF = \tfrac{1}{3}\, AH = \tfrac{1}{4}\, AF ;$$

ainsi le centre de gravité d'une pyramide triangulaire *ABCD*, est placé aux trois quarts de *AF*, à partir du sommet.

59. *Le centre de gravité d'une pyramide à base quelconque, se trouvera aussi placé sur la droite menée, du sommet au centre de gravité de la base, et aux trois quarts de cette droite, à partir du sommet.*

Si l'on suppose que la pyramide soit divisée en un nombre infini de tranches parallèles à sa base, il est évident que la ligne menée du sommet au centre de gravité de cette base, passera par les centres de gravité respectifs de toutes les tranches, et que par conséquent, le centre de gravité de la pyramide se trouvera sur cette ligne.

Supposons maintenant que la base de la pyramide soit partagée en triangles par des diagonales, et que par ces diagonales et par le sommet on ait mené des plans, ces plans partageront la pyramide en autant de pyramides triangulaires qu'il y a de triangles dans la base. Or, les centres de gravité respectifs de de ces pyramides triangulaires se trouvent aux trois quarts des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

lignes qui vont, du sommet de la pyramide, au centre de gravité de leurs bases : donc ils divisent ces lignes proportionnellement, et ils se trouvent dans un même plan parallèle à la base, et c'est dans ce plan que doit se trouver le centre de gravité du système des pyramides triangulaires, c'est-à-dire, le centre de gravité de la pyramide proposée, lequel sera, par conséquent, placé aux trois quarts de la droite, qui part du sommet, et va aboutir au centre de gravité de la base.

60. Un corps terminé par des surfaces planes peut toujours être décomposé en pyramides ou en prismes dont on sait trouver les centres de gravité respectifs; ainsi on pourra toujours, à l'aide de la théorie de la composition des forces parallèles, en déterminer le centre de gravité.

Méthodes générales de trouver les centres de gravité des courbes, des aires, et des solides.

** 61. On suppose que les courbes, les aires et les solides dont on veut déterminer la position du centre de gravité, sont divisés en une infinité de parties, toutes soumises également à la pesanteur. Ainsi toutes ces parties sont sollicitées par des forces parallèles, et il s'agit de déterminer la position de la résultante par rapport à des axes donnés. Ainsi, ce que nous avons dit en parlant des forces parallèles est applicable à ce cas.

** 62. Soit un arc de courbe CM dont on cherche le centre de gravité (Pl. I, fig. 22); supposons que AX soit l'axe des abscisses perpendiculaire à celui des ordonnées AY. Nommons AP, x; PM, y; CM, s; menons l'ordonnée pm infiniment rapprochée de PM; la distance du centre de gravité de l'arc CM à l'axe AY, sera exprimée par $\frac{\int x\,ds}{s}$, et celle à l'axe AX, par $\frac{\int y\,ds}{s}$;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mais on sait par la théorie des courbes que $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc les valeurs des distances $\frac{\int xds}{s}$ et $\frac{\int yds}{s}$ deviendront

$$\frac{\int x\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\int \sqrt{(dx^2+dy^2)}} \text{ et } \frac{\int y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\int \sqrt{(dx^2+dy^2)}}$$

Exemple :

** 63. Soit l'arc de cercle CDM (Pl. I, fig. 23) dont on cherche le centre de gravité ; nommons AP, x ; PM, y ; l'arc CDM, s ; le rayon AM, a ; $Pp = ab$ sera exprimée par dx ; bM par dy, et Ma par ds. Les triangles semblables Mab, AMP donnent la proportion $ds : dx = a : y$, d'où on tire $ds = \frac{adx}{y}$; substituant cette valeur dans la formule $\frac{\int yds}{s}$ qui exprime la distance du centre de gravité à l'axe des abscisses, l'on aura

$$\frac{\int adx}{s} = \frac{ax}{s} = a\,\frac{2x}{2s}$$

résultat qui nous apprend que cette distance est quatrième proportionnelle à l'arc, à la corde et au rayon.

** 64. L'on détermine le centre de gravité d'une surface de la manière suivante. Soit la surface $BCMP$ (Pl. I, fig. 22) dont on veut déterminer le centre de gravité.

Le petit trapèze $PMpq$ indique un élément infiniment petit de cette surface. Nommons, comme ci-dessus, AP, x ; PM, y ; Pp, dx ; rm, dy.

La surface du trapèze élémentaire $PMpq$, ou plutôt du parallélogramme $PMrp$, est exprimée par ydx ; le centre de gravité de ce petit parallélogramme est placé évidemment au milieu de la ligne qt qui divise le parallèlogramme en deux parties égales : donc la distance de ce centre à l'axe AX sera égale à $\frac{1}{2}y$, et celle à l'axe AY sera égale à x ; d'après cela la distance du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

centre de gravité de la surface $BCMP$ à l'axe AY sera $\frac{\int yxdx}{\int ydx}$ et celle à l'axe AX, $\frac{\frac{1}{2}\int y^2dx}{\int ydx}$; les intégrales étant prises depuis C, jusqu'en M.

Exemple :

** 65. Trouver le centre de gravité d'un trapèze $ABCD$ (Pl. I, fig. 24). Nommons AD, a; BC, b; GE, h; GP, x; Pp, dx; PM, y; et menons Ar parallèle à GE; les triangles semblables AsB et ArM donnent cette proportion

$$As : sB = Ar : rM,$$

c'est-à-dire,

$$h : \frac{b-a}{2} = x : y - \frac{a}{2}$$

donc,

$$y = \frac{ah + (b-a)x}{2h}$$

par conséquent,

$$yxdx = \frac{ahxdx + (b-a)x^2dx}{2h} \text{ et } ydx = \frac{ahdx + (b-a)xdx}{2h}$$

ainsi, si nous nommons X la distance du centre de gravité, à l'axe des y, nous aurons

$$X = \frac{\int yxdx}{\int ydx} = \frac{\int[ahxdx + (b-a)x^2dx]}{\int[ahdx + (b-a)xdx]} = \frac{\frac{1}{2}ahx^2 + \frac{1}{3}(b-a)x^3 + C}{ahx + \frac{1}{2}(b-a)x^2 + C'}$$

Mais ici les constantes C et C' sont nulles, parce que chacune des intégrales est zéro lorsque $x = o$. ainsi

$$X = \frac{3ahx^2 + 2(b-a)x^3}{6ahx + 3(b-a)x^2};$$

si l'on fait $x = h$ pour avoir la position du centre de gravité du trapèze entier, l'on aura

$$X = \frac{3ah^3 + 2(b-a)h^3}{6ah^2 + 3(b-a)h^2} = \frac{a + 2b}{3(a+b)}h.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Autre exemple :

**66. Trouver la distance du centre de gravité d'un segment de cercle BAM (Pl. I, fig. 25) au centre C du même cercle. Nommons AP, x; PM, y; et le rayon CM, $\frac{a}{2}$; on a par la propriété du cercle $y = \sqrt{(ax - xx)}$; ainsi la surface du trapèze élémentaire $PMpm$, ydx, sera exprimée par $dx\sqrt{(ax - xx)}$.

Observons en outre que la distance CP de l'axe PM au centre du cercle est $\frac{a}{2} - x$; il faut substituer cette valeur au lieu de x dans la formule $\frac{\int xydx}{\int ydx}$, parceque dans notre cas on ne cherche point la distance du centre de gravité à l'axe PM, mais au point C pris sur le prolongement de l'axe AP. En faisant les substitutions indiquées, on obtient

$$\frac{\int\left[\left(\frac{a}{2} - x\right) dx \sqrt{(ax - xx)}\right]}{\int ydx} = \frac{\int\left[\left(\frac{a}{2} - x\right) dx \sqrt{(ax - x^2)}\right]}{\frac{1}{2} BAM}$$

Si l'on fait $ax - xx = z$, on aura

$$dz = (a - 2x)\, dx \text{ et } \tfrac{1}{2}\, dz = \left(\tfrac{a}{2} - x\right) dx.$$

substituant ces valeurs, $\int \left[\left(\frac{a}{2} - x\right) dx \sqrt{(ax - x^2)}\right]$ se change en $\int \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{3} z^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (ax - xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} y^3$; il n'y a point de constante à ajouter, parce que l'intégrale s'évanouit quand $x = o$; ainsi la distance du centre de gravité du segment BAM, au centre C, est $\frac{\frac{1}{3}y^3}{\frac{1}{2}BAM}$; cette expression peut se changer en $\frac{\frac{1}{24}8y^3}{\frac{1}{2}BAM} = \frac{\frac{1}{12}(2y)^3}{BAM}$; mais $2y$ représente BM, corde de l'arc BAM; ainsi *la distance du centre du cercle au centre de gravité de l'un des segmens est égal au douzième du cube de la corde, divisé par la surface du segment.*

** 67. Le centre de gravité d'un solide dont les élémens ont leurs centres respectifs de gravité sur une même ligne droite se détermine de la manière suivante. (Pl. I, fig. 26.)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Soit $MCDN$ la coupe d'un solide fait par un plan qui passe par le plan AX des abscisses. Que l'on suppose maintenant qu'un autre plan perpendiculaire à celui-ci passe par la double ordonnée MPN, nous nommerons Q la surface de la coupe produite par le passage de ce dernier plan; si maintenant l'on fait passer par la double ordonnée mpn (infiniment rapprochée de la précédente MPN), un troisième plan parallèle au second, il en résultera une tranche élémentaire dont l'épaisseur sera mesurée par la perpendiculaire Pr, menée d'un plan à l'autre.

Cela posé, nommons AP, x; PM, y; Pp sera exprimée par dx, le triangle rectangle Ppr donne cette proportion :

$$1 : Sin.\, Ppr = Pp : Pr;$$

nommons φ l'angle Ppr, et nous aurons

$$Pr = dx\, Sin\, \varphi.$$

Pr, multiplié par Q, donne la solidité de la tranche élémentaire du solide; ainsi $Qdx\, Sin.\, \varphi$ exprimera la valeur de cette tranche, dont le centre de gravité sera éloigné du point A de $AP = x$, ainsi la formule $\frac{\int Q\, Sin.\, \varphi\, x dx}{\int Q\, Sin.\, \varphi\, dx}$ exprimera la distance du centre de gravité du solide, au même point A; l'intégrale étant prise depuis B jusqu'en P. En divisant cette formule par la quantité $Sin\, \varphi$, elle se réduira à $\frac{\int Qxdx}{\int Qdx}$.

**68. Si le solide dont on veut déterminer le centre de gravité est un solide de révolution, et si, de plus, l'on suppose les coordonnées rectangulaires.

Soit Mm (Pl. I, fig. 26) une partie élémentaire de la courbe génératrice CM que nous nommerons S; soit π le rapport de la circonférence au rayon; AP, x; PM, y; On trouvera que la surface élémentaire engendrée par la rotation de Mm, sera exprimée par $\pi y dS$. Le centre de gravité de cette surface est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

au centre du cercle décrit par PM, et la distance de ce centre au point A est égale à x; ainsi la distance du centre de gravité de la surface engendrée par CM au point A est $\frac{\int \pi xy dS}{\int \pi y dS} = \frac{\int xy dS}{\int y dS}$ prise sur l'axe AX.

On détermine le centre de gravité du solide lui-même en substituant, dans la formule $\frac{\int Qxdx}{\int Qdx}$ trouvée précédemment, la valeur de Q, laquelle, dans ce cas est égale à $\frac{1}{4}\pi y^2$; cette formule deviendra alors $\frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$.

Exemple :

** 69. Déterminer le centre de gravité d'une calotte sphérique. (Pl. I, fig 25.)

Soit BAM le profil de cette calotte; nommons AP, x; PM, y; et CA, a. Les propriétés du cercle donnent $y^2 = 2ax - x^2$; en substituant cette valeur dans la formulle $\frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$ l'on obtient

$$\frac{\int(2ax^2dx - x^3dx)}{\int(2axdx - x^2dx)} = \frac{\frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4}{ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right)} = \frac{8a - 3x}{12a - 4x}\,x,$$

distance du centre de gravité cherché au point A.

Autre exemple :

** 70. Déterminer le centre de gravité d'un *paraboloïde* dont l'équation de la courbe génératrice est $y^2 = px$.

L'on substitue dans la formule $\frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$, px, au lieu de y^2 et l'on obtient $\frac{\int px^2 dx}{\int pxdx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x$.

Méthode de Simpson.

71. Cette méthode a pour but de déterminer les centres de gravité des surfaces et des solides quelconques soumis ou non à une loi susceptible d'être exprimée par une équation.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Soit la surface $ABCD$ (Pl. I, fig. 27) terminée par la courbe pp''''''; il faut d'abord en mesurer la surface; à cet effet, l'on divise l'axe AD en un nombre arbitraire de parties égales, et par les points de division A, A, A, etc., on élève des perpendiculaires Ap, Ap', Ap'', etc. Chacun des espaces compris entre deux divisions (tel que l'espace $pAAp''$), est composé d'un trapèze et d'un segment compris entre la droite pgp'', et l'arc de courbe $pp'p''$, les divisions A, A, étant supposées très-petites, l'on pourra regarder l'arc $pp'p''$ comme appartenant à une parabole dont pgp'', sera une double ordonnée. Nommons h l'intervalle constant entre les parallèles Ap, Ap', Ap'', ect., que nous nommerons t, t', t'', etc.; l'aire du trapèze $pAAp''$ sera $h(t + t'')$, et l'aire du segment parabolique sera $\frac{2}{3}$ du parallélogramme qui aurait la droite $p'g$ pour base, et pour hauteur $2h$.

72. Pour déterminer la valeur de la droite pgp', menons la ligne pm parallèle à AD, on aura

$$p'g = Ap'' - Al - lg;$$

mais à cause de la similitude des triangles pmp'' et plg, et à cause de l'égalité des divisions AA, AA, l'on a

$$lg = \tfrac{1}{2}\, mp'' = \tfrac{1}{2}(Ap'' - Ap) = \tfrac{1}{2}(t'' - t).$$

donc

$$p'g = t' - t - \tfrac{1}{2}(t'' - t) = t' - \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2}t'';$$

multipliant cette quantité par $2h$, et prenant les deux tiers du produit, la surface du segment parabolique, sera

$$\tfrac{2}{3}h\,(2t' - t - t'');$$

ajoutant cette surface à celle du trapèze, l'on aura

$$\tfrac{h}{3}\,(t + 4t' + t'')$$

pour la surface de l'aire comprise entre les parallèles Ap et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ap''. L'on trouvera de la même manière que les surfaces comprises entre Ap'' et Ap''''; entre Ap'''' et Ap'''''', etc., sont exprimées par

$$\tfrac{h}{3}(t''+4t'''+t'''');\ \tfrac{h}{3}(t''''+4t'''''+t''''''),\text{ etc.}$$

en ajoutant toutes ces surfaces, l'expression de la surface totale sera

$$\tfrac{h}{3}(t+4t'+2t''+4t'''+2t''''+4t'''''+t''''''+etc.)$$

Ainsi pour mesurer une aire plane terminée par une courbe quelconque, il faut partager la surface donnée par une ligne qui la traverse; on divise cette ligne en un nombre pair de parties égales, et, à chaque point de division on mène une double ordonnée qui se termine de part et d'autre au périmètre de la figure. Puis, 1°. l'on additionne la première et la dernière ordonnée; 2°. l'on additionne la seconde, la quatrième, et en général toutes les ordonnées qui occupent une place distinguée par un nombre pair, et on multiplie leur somme par quatre; 3°. l'on additionne la troisième, cinquième ordonnées, etc, et l'on multiplie leur somme par deux; on ajoute ces trois sommes, on les multiplie par le tiers de la distance constante d'une ordonnée à l'autre, et le produit final sera la surface de l'aire proposée.

73. Voici maintenant comment on détermine le centre de gravité de cette surface. Le centre de gravité du segment parabolique $\tfrac{2}{3}h(2t'-t-t'')$ est évidemment sur la ligne $p'g$, ainsi il est éloigné de Ap de la longueur de $AA = h$; ainsi le moment de ce centre, par rapport à l'axe Ap, sera $\tfrac{2}{3}h^2(2t'-t-t'')$.

74. Le centre de gravité du trapèze rectiligne est éloigné du même axe Ap de $\tfrac{2}{3}h\left(\frac{t+2t''}{t+t''}\right)$, et, multipliant sa surface

$h(t+t'')$ par cette longueur, l'on aura $\frac{1}{3}h^2(t+2t'')$. Ajoutant à cette quantité le produit $\frac{1}{3}h^2(2t'-t-t'')$ trouvé précédemment, et divisant leur somme par la somme des surfaces, conformément aux règles des mouvemens des forces parallèles, l'on aura

$$\frac{\frac{h^2}{3}(4t'+2t'')}{\frac{h}{3}(t+4t'+t'')}=h\left(\frac{4t'+2t''}{t+4t'+t''}\right)$$

pour la distance du centre de gravité du trapèze mixtiligne $App'p''A$ à l'axe Ap; et le produit de cette distance par sa surface totale $\frac{h}{3}(t+4t'+t'')$ sera $\frac{h^2}{3}(4t'+2t'')$, pareillement l'on aura la distance de gravité du centre de la surface $Ap''p'''p''''A$ de la ligne Ap'', exprimée par

$$h\left(\frac{4t'''+2t''''}{t''+4t'''+t''''}\right)$$

et la distance du même centre de la ligne Ap sera

$$h\left(\frac{4t'''+2t''''}{t''+4t'''+t''''}\right)+2h=h\left(\frac{2t''+12t'''+4t''''}{t''+4t'''+t''''}\right)$$

qui multiplié par la surface $\frac{h}{3}(t''+4t'''+t'''')$, donne

$$\frac{h^2}{3}(2t''+12t'''+4t'''')$$

Par un procédé semblable, l'on trouve que le produit de la surface $Ap''''p'''''p''''''A$ par la distance de son centre de gravité à l'axe Ap, sera

$$\frac{h^2}{3}(4t''''+20t'''''+6t'''''').$$

75. Ajoutant ensuite les produits

$$\frac{h^2}{3}(4t'+2t''),\ \frac{h^2}{3}(2t''+12t'''+4t''''),\ \frac{h^2}{3}(4t''''+20t'''''+6t''''''),$$

et divisant le tout par

$$\frac{h}{3}(t+4t'+2t''+4t'''+2t''''+,\text{etc.}),$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

somme des surfaces partielles, l'on aura

$$h\left(\frac{4t' + 4t'' + 12t''' + 8t'''' + 20t''''' + 6t''''''}{t + 4t' + 2t'' + 4t''' + 2t'''' + 4t''''' \times t''''''}\right) =$$

$$h\left(\frac{0.t + 1.4t' + 2.2t'' + 3.4t''' + 4.2t'''' + 5.4t''''' + 6t''''''}{t + 4t' + 2t'' + 4t''' + 2t'''' + 4t''''' + t''''''}\right).$$

Les termes du dénominateur de cette fraction sont les mêmes qui entrent dans la mesure de la surface (72), et les termes du numérateur sont la suite des termes du dénominateur, multipliés par la suite naturelle des nombres 0, 1, 2, 3, etc.

76. Pour déterminer le centre de gravité d'un solide de révolution, il faut substituer à chaque ordonnée Ap, Ap', etc. (Pl. I, fig. 27) la surface du cercle qu'elle engendrerait dans sa révolution; c'est-à-dire, il faut l'élever au carré et la multiplier par $\frac{1}{2}\pi$ (π étant le rapport du diamètre à la circonférence). Ainsi la distance du centre de gravité du solide de révolution, au plan qui renferme le cercle engendré par la première ordonnée Ap, est en divisant haut et bas par $\frac{1}{2}\pi$.

$$h\left(\frac{0.t^2 + 1.4t^{2\prime} + 2.2t^{2\prime\prime} + 3.4t^{2\prime\prime\prime} + 4.2t^{2\prime\prime\prime\prime} + 5.4t^{2\prime\prime\prime\prime\prime} + 6t^{2\prime\prime\prime\prime\prime\prime}}{t^2 + 4t^{2\prime} + 2t^{2\prime\prime} + 4t^{2\prime\prime\prime} + 2t^{2\prime\prime\prime\prime} + 4t^{2\prime\prime\prime\prime\prime} + t^{2\prime\prime\prime\prime\prime\prime}}\right), \text{ etc.}$$

Si le solide n'est pas un solide de révolution, alors les sections équi-distantes ne seront plus des cercles, mais des figures que l'on déterminera séparément par la méthode (72); nommons s, s', s'', s''', etc., les surfaces de ces figures, alors la distance du centre de gravité au plan que renferme la première section, doit être

$$\left(\frac{0.s + 1.4s' + 2.2s'' + 3.4s''' +,}{s + 4s' + 2s'' + 4s''' +,}\right) \text{ etc.}$$

En prenant de cette manière la distance du centre de gravité à trois plans perpendiculaires entre eux, on aura la position de trois autres plans, dont l'intersection commune donne le point même où se trouve le centre de gravité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Méthode centrobarique de Guldin.

** 77. Nous avons trouvé précédemment que la formule $\frac{\int y ds}{s}$ exprime la distance du centre de gravité d'une courbe s à l'axe des y. Nommons Y cette distance, et substituons $2\pi ds$ et $2\pi s$ au lieu de ds et de s, nous aurons $Y = \frac{\int 2\pi y ds}{2\pi s}$ et $2\pi Ys = \int 2\pi y ds$. Or $2\pi Y$ est la circonférence dont Y est le rayon; c'est celle que décrirait le centre de gravité autour de l'axe des x, si l'on faisait tourner la courbe sur cet axe : $\int 2\pi y ds$ est l'expression de l'aire de la surface qu'engendrerait l'arc de courbe s par cette révolution; donc *la surface de révolution engendrée par une courbe donnée autour d'un axe, est égale au produit de la longueur de l'arc générateur par la circonférence décrite par son centre de gravité.*

** 78. Ce théorème donne un moyen fort simple de trouver l'aire engendrée par la révolution d'une courbe quelconque, quand on connaît l'équation et le centre de gravité de la courbe génératrice.

**On démontre également que *le solide qu'une courbe a engendré par sa révolution autour d'un axe, a pour volume le produit de l'aire génératrice par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Si l'on nomme Y la distance du centre de gravité de l'aire d'une courbe à l'axe des y, on aura $Y = \frac{\int y^2 dx}{2\int dx}$ (64), si l'on introduit 2π rapport de la circonférence au diamètre dans cette formule, et qu'on lui donne la forme $Y = \frac{\int \pi y^2 dx}{2\pi \int y dx}$, on aura

$$2\pi Y . \int y dx = \int \pi y^2 dx ;$$

or le dernier membre de cette équation exprime la surface d'un solide engendré par la rotation de la courbe autour de l'axe

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des x, et le premier membre est le produit de la ligne génératrice par la circonférence que son centre de gravité décrit autour de cet axe.

ARTICLE IV.

Théorie du levier, du plan incliné, et de la tension des cordes.

Du levier.

78. Un *levier* est en général un corps de figure quelconque retenu par un point fixe, et sur lequel agissent deux forces, à l'une desquelles on donne le nom de *puissance*, et à l'autre celui de *résistance*.

Le point d'appui fixe, pouvant avoir trois positions différentes par rapport aux points d'application de la puissance et de la résistance, on distingue trois espèces de levier; celui de première espèce a le point d'appui fixé entre les points d'application des deux forces; dans celui de seconde espèce, la résistance occupe une place intermédiaire entre le point d'appui et la puissance; et enfin, dans celui de troisième espèce, c'est la puissance qui est placée entre le point d'appui et la résistance.

Les parties comprises entre le point d'appui et le point d'application des forces, se nomment les bras de levier de ces forces.

79. Quelle que soit la forme d'un levier (Pl. I, fig. 28), on peut toujours le remplacer mentalement par un levier coudé $b\,A\,c$, formé par les perpendiculaires abaissées du point d'appui sur les directions des forces, en prenant les points b et c où ces perpendiculaires viennent tomber pour les points d'application des forces.

80. Nous avons vu (32) que lorsque deux forces P, Q concourent en un point M, il faut pour le cas d'équilibre que les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

forces P, Q, soient entre elles réciproquement comme les perpendiculaires Ab, Ac, abaissées, du point A par où passe leur résultante sur leur direction, c'est-à-dire, qu'il faut que l'on ait

$$P : Q = Ac : Ab.$$

81. Pour qu'il y ait équilibre dans le levier, et qu'il ne puisse glisser sur le point d'appui, il faut nécessairement que la résultante des forces P, Q, passe par le point d'appui ; ainsi ce point supportera une pression égale à la valeur de cette résultante, que l'on déterminera aisément en prenant, sur les directions des forces P, Q, les parties ML, et MN, proportionnelles à leurs grandeurs et achevant le parallélogramme $MLDN$; alors on aura (30)

$$P : Q : R = ML : MN \text{ ou } LD : MD. =$$
$$\text{Sin. } QMR : \text{Sin. } PMR : \text{Sin. } PMQ.$$

Ainsi la charge que soutient le point d'appui sera exprimée par une des deux équations,

$$R = \frac{P \times \text{Sin. } PMQ}{\text{Sin. } QMR} \qquad \text{ou} \qquad R = \frac{Q \times \text{Sin. } PMR}{\text{Sin. } QMR};$$

si les forces P, Q, sont parallèles, alors $R = P + Q$ (25) ; donc, dans ce cas, la charge du point d'appui sera égale à la somme de la puissance et de la résistance.

82. Puisque $P : Q = Ac : Ab$, pour que l'équilibre ait lieu, il faut $P \times Ab = Q \times Ac$. On voit donc 1°. que quelque petite que soit la puissance Q, on peut toujours, au moyen d'un levier, la mettre en équilibre autour d'un point d'appui A avec une autre force P donnée de grandeur et de direction ; car la direction de la force P, étant connue, la distance Ab, de cette direction au point d'appui, sera connue également, et l'on con-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

naîtra le moment $P \times Ab$; il suffira donc de donner à Ac une telle valeur que $Q \times Ac = P \times Ab$. 2°. Si Ac est connu, on déterminera la valeur de Q au moyen de l'équation

$$Q = \frac{P \times Ab}{Ac}.$$

83. Si un nombre quelconque de forces sont appliquées simultanément à un levier, alors pour qu'il y ait équilibre, il faut (50) que la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner le levier dans un sens, soit égale à la somme des forces qui tendent à le faire tourner en sens contraire.

84. Lorsqu'on veut avoir égard à la pesanteur du levier, il faut supposer que deux forces, dont les directions sont verticales, sont appliquées aux centres de gravité de ses deux bras.

Du plan incliné.

85. Si une force, dont la direction est perpendiculaire à un plan incliné, agit sur un point matériel, placé sur ce plan, il est évident que toute son action est détruite par la résistance du plan ; car il n'y a pas de raison pour que ce point se meuve plutôt dans un sens que dans un autre. Donc, pour qu'un système de forces retienne un point matériel en équilibre sur un plan, il faut que la résultante de ces forces soit perpendiculaire à ce plan.

86. Soit un corps pesant XV (Pl. I, fig. 30) retenu sur un plan incliné par une force Q ; son poids agit comme une force verticale P, concentrée au centre de gravité K de ce corps ; il est nécessaire, et il suffit pour l'équilibre que la résultante R du poids du corps P et de la force donnée Q, soit dirigée suivant la perpendiculaire KD ; cette résultante exprimera la pression que le plan incliné éprouve.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si nous comparons les forces Q, P, nous aurons

$$Q : P = Sin.\ PKR : Sin.\ RKQ = AB\ Sin.\ PKR : AB\ Sin.\ RKQ;$$

mais le triangle rectangle ABC donne

$$AB : BC = 1 : Sin.\ BAC, \text{ ou } Sin\ PKR,$$

donc

$$AB\ Sin.\ PKR = BC, \text{ et } Q : P = BC : AB\ Sin.\ RKQ.$$

Quand la direction KQ de la puissance Q est parallèle au plan, alors elle est perpendiculaire à KR et $Sin.\ RKQ = 1$; l'on aura donc dans ce cas $Q : P = BC : AB$, c'est-à-dire que *la puissance sera à la résistance comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.*

$$P : R = Sin.\ RKQ : Sin.\ PKQ \text{ et } Q : R = Sin.\ PKR : Sin.\ PKQ,$$

donc,

$$R = \frac{P \times Sin.\ PKQ}{Sin.\ RKQ} \text{ ou } R = \frac{Q \times Sin.\ PKQ}{Sin.\ PKR}$$

et ces deux équations serviront à déterminer la pression que supporte le plan incliné.

Machine funiculaire.

87. Une corde ABC (Pl. I, fig. 29) étant attachée d'un côté à un corps mobile M, de l'autre à un point fixe, et une force donnée P étant appliquée au point B de cette corde, si l'on décompose la force P en deux autres p' p'' dirigées suivant le prolongement de CB et de AB, la force p' est détruite par la résistance du point fixe C; pour savoir maintenant quelle sera la valeur de la force p'' qui tend à faire avancer le corps M, j'observe que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$p'' : P = Sin.\ p'BP : Sin.\ p'Bp'' = Sin.\ CBP : Sin.\ ABC$,

donc,

$$p'' = \frac{P \times Sin.\ CBP}{Sin.\ ABC},$$

d'où il s'ensuit que lorsque la corde ABC sera peu infléchie au point A, c'est-à-dire, lorsque l'angle ABC sera très peu différent de deux droits, son sinus sera très-petit, et la force p'' très-grande par rapport à la force P. On peut donc, au moyen des cordes, mettre une force médiocre en état d'exercer une très-grande action. Lorsqu'une corde est fortement tendue en ligne par deux forces qui agissent en sens contraire à ses extrémités A et C, la plus petite force P appliquée au point A la pliera dans ce point, et lui fera faire un angle ABC. Ainsi il est rigoureusement impossible de tendre une corde pesante en ligne droite, à moins qu'elle ne soit verticale; car les poids des parties qui la composent peuvent être regardés comme des forces appliquées à cette corde, et qui doivent nécessairement l'écarter de la ligne droite.

CHAPITRE SECOND.

Dynamique.

ARTICLE PREMIER.

Mouvement uniforme, et mouvement uniformément accéléré.

88. On dit que le mouvement est *uniforme* lorsque le mobile parcourt des espaces égaux en temps égaux; il est au contraire *varié* lorsque le mobile n'a pas mis le même temps à parcourir chaque espace égal.

89. Dans le cas du mouvement uniforme, deux mobiles ont des vitesses égales lorsque l'espace parcouru par le premier est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

égal à l'espace parcouru en même temps par le second. Si au contraire les espaces parcourus par les deux, en même temps, sont inégaux, ou bien si l'un parcourt le même espace que l'autre en un temps plus court, on en conclut que celui-là a plus de vitesse, auquel correspond une moindre durée de temps, ou bien un plus grand espace, c'est-à-dire, que les vitesses sont en raison inverse des temps, et directe des espaces. Ainsi, si on nomme V, v, les vitesses des deux corps, T, t, le temps qu'ils emploient à parcourir le même espace, et E, e, les espaces parcourus en même temps, l'on aura

$$V : v = t : T = E, e;$$

et si entre les espaces et entre les temps il y a des inégalités,

$$V : v = \frac{E}{T} : \frac{e}{t}, \text{ et } \frac{V}{v} = \frac{E}{e} \times \frac{t}{T}.$$

Si le corps qui a la vitesse v parcourt l'unité d'espace dans l'unité de temps, on aura alors

$$v = 1 ; e = 1 ; t = 1 ;$$

et l'équation $\frac{V}{v} = \frac{E}{e} \times \frac{t}{T}$, deviendra $\frac{V}{1} = \frac{1E}{1.T}$ et $V = \frac{E}{T}$ d'où l'on conclut que la vitesse est égale à l'espace divisé par le temps, ou plus rigoureusement que le rapport de la vitesse d'un mobile, à la vitesse d'un autre mobile qui parcourt l'unité d'espace dans l'unité de temps, est égal au rapport direct des espaces multiplié par le rapport inverse des temps.

90. Un mobile a un mouvement uniformément accéléré, lorsqu'en temps égaux il reçoit des accroissemens égaux de vitesse; ainsi le mouvement d'un corps grave qui tombe librement vers la surface de la terre, est uniformément accéléré; car la pesanteur qui agit sans interruption pendant toute la durée de son mouvement, lui communique à chaque instant un nouveau degré de vitesse.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

91. La force qui produit un mouvement accéléré, c'est-à-dire, la force qui agit sur le mobile sans interruption se nomme *force accélératrice*. Dans le mouvement uniformément accéléré, la force accélératrice est constante, c'est-à-dire, elle agit constamment de la même manière sur le mobile dont elle augmente la vitesse d'une quantité égale en temps égaux pendant toute la durée du mouvement.

92. Si on suppose qu'un corps grave animé d'une vitesse initiale a tombe librement, et si l'on nomme g la quantité constante de vitesse que la gravité ajoute dans chaque unité de temps à la vitesse initiale a; $a+g$ sera la vitesse à la fin de la première unité de temps; $a+2g$, $a+3g$, etc., à la fin de la deuxième, de la troisième, etc., nous aurons à la fin d'un temps t une vitesse v exprimée par $a+gt$.

** 93. Nommons e l'espace parcouru par le mobile dans le temps t; si l'on suppose que t augmente d'une quantité infiniment petite dt, e augmentera aussi de de, qui exprimera l'espace parcouru dans le temps infiniment petit dt. En considérant donc pendant cet instant le mouvement comme uniforme et dû à la vitesse v, dont le mobile est animé à la fin du temps t, on aura

$$v = \frac{de}{dt} \text{ et } v = a + g(t+dt);$$

donc

$$\frac{de}{dt} = a + g(t+dt) \text{ et } de = adt + gtdt + dt^2,$$

et négligeant le dernier terme, on aura

$$de = adt + gtdt,$$

d'où on tire en intégrant $e = at + \frac{gt^2}{2} + C$. C est une constante arbitraire qui dépend de la position du mobile à l'instant où l'on fixe l'origine du temps, et cette constante s'évanouit lorsque l'espace e commence à l'origine du temps.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Lorsque la vitesse initiale $a = o$ et prenant aussi $C = o$ on aura $e = \frac{gt^2}{2}$. Cette équation nous apprend :

1°. Que l'espace parcouru croît comme le carré du temps employé à le parcourir.

2°. Que si l'on considère l'espace parcouru dans la première unité de temps, alors $t = 1$ et $e = \frac{g}{2}$, et comme l'unité est arbitraire, la gravité communique à un mobile, dans un temps quelconque, une vitesse capable de lui faire parcourir un espace double de celui qu'il a parcouru dans ce même temps.

94. Les équations $v = gt$ et $e = \frac{gt^2}{2}$ expriment les circonstances du mouvement d'un corps grave qui tombe librement (abstraction faite de la résistance de l'air).

En retirant la valeur de t de ces deux équations, l'on a

$$t = \frac{v}{g} \text{ et } t = \sqrt{\frac{2e}{g}} \text{ donc } \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{2e}{g}} \text{ et } v = \sqrt{\frac{2g^2e}{g}} = \sqrt{2ge}.$$

Cette équation $v = \sqrt{2ge}$, dont on fait un grand usage en mécanique, donne le moyen de déterminer la vitesse acquise par le mobile, quand il est tombé librement d'une hauteur donnée. Pour en faire usage, il faut substituer au lieu de g sa valeur donnée par l'expérience. L'on a reconnu par diverses expériences faites avec beaucoup de précision à Paris, qu'un corps parcourt dans la première seconde de sa chute, un espace égal à 4,9044 mètres, ou à 15,1 pieds; donc $\frac{g}{2} = 4^m,9044$ et $v = \sqrt{9^m,808 \times 2e}$.

Lorsqu'un corps est lancé verticalement du bas en haut, alors la pesanteur devient une *force retardatrice ;* c'est-à-dire, elle diminue continuellement la vitesse par les mêmes degrés qu'elle l'augmenterait pendant la chute de ce corps.

95. La pesanteur d'un corps placé sur un plan incliné, se décompose en deux forces; l'une perpendiculaire au plan, l'autre dirigée suivant ce plan. Cette dernière est la seule qui produise

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le mouvement; car la résistance du plan incliné détruit entièrement la première. Nommons l la longueur du plan, h sa hauteur, g la pesanteur absolue du corps, et P sa pesanteur relative, décomposée suivant ce plan, nous aurons

$$P : g = h : l \text{ et } P = g \times \tfrac{h}{l};$$

il faudra donc substituer $g \times \frac{h}{l}$, au lieu de g dans les équations

$$v = gt\,;\ e = \tfrac{gt^2}{2};\ v = \sqrt{2ge},$$

qui deviendront, dans ce cas,

$$v = \tfrac{gh}{l}.t\,;\ e = \tfrac{gh}{2l}t^2;\ v = \sqrt{\tfrac{2ghe}{l}}.$$

Si l'on veut connaître le temps que le mobile emploie pour parvenir au point le plus bas, on tirera la valeur de t de l'équation $e = \frac{gh}{2l}.t^2$, en supposant $e = l$, et l'on aura

$$t = \sqrt{\tfrac{2l^2}{gh}}.$$

Lorsqu'on emploie ces équations, l'on fait abstraction des frottemens et de la résistance de l'air.

96. En supposant $e = l$, l'équation $v = \sqrt{\frac{2ghe}{l}}$ se réduit à $v = \sqrt{2gh}$, qui nous apprend que *la vitesse acquise, quand le corps a parcouru toute la longueur du plan incliné, est la même que s'il fût tombé verticalement de la hauteur du plan : de sorte que si l'on suppose plusieurs plans inclinés qui aient la même hauteur, mais des inclinaisons différentes, les corps pesans qui parcourront la longueur de ces plans, auront tous acquis des vitesses égales, lorsqu'ils seront parvenus au plan horizontal.*

97. *Toutes les cordes CA, CM, CN* (Pl. I, fig 31) *inscrites dans un même cercle, et aboutissant à une même extrémité C du diamètre vertical CB, sont parcourues en même*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

temps par des corps pesans qui partent ensemble du point C
Nommons *CB*, b; *CA*, l; et menant l'horizontale *AD*, nommons *CD*, h. Les propriétés du cercle donnent $l^2 = bh$; substituons cette valeur de l^2 dans l'équation $t = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}}$ trouvée précédemment, et nous aurons $t = \sqrt{\frac{2b}{g}}$ quantité indépendante de la longueur de la corde *CA*, et qui exprime le temps de la chute par le diamètre *CB*.

ARTICLE II.

Communication des mouvemens.

98. On donne en général le nom de *quantité de mouvement* au produit d'une masse par une vitesse. Il est évident que si deux corps durs, ayant même masse, viennent à la rencontre l'un de l'autre avec des vitesses égales, et suivant des directions opposées, il est évident, dis-je, que ces deux corps s'arrêteront subitement après le choc : l'expérience démontre que le mouvement sera encore détruit si on vient à augmenter la masse de l'un, pendant que l'on augmentera en même proportion la vitesse de l'autre; de sorte qu'il y aura anéantissement de mouvement toutes les fois que les quantités de mouvement des deux corps seront égales, c'est-à-dire, toutes les fois que les masses seront en raison inverse des vitesses. Soient M, m les masses des deux corps, V, v leurs vitesses; il faut pour l'anéantissement du mouvement, que $MV = mv$, et que $M : m = v : V$.

La quantité de mouvement se nomme aussi *force de percussion*, en tant qu'elle est anéantie par le choc. En général, les forces dont l'action est instantanée ont pour mesure la quantité de mouvement qu'elle produisent.

99. Si l'on veut comparer deux forces qui agissent instantanément sur les mobiles, on trouvera *qu'elles sont en-*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tre elles, en raison composée des masses auxquelles ces forces sont appliquées, et des vitesses qu'elles leur impriment, en supposant que ces vitesses sont les mêmes en grandeur et en direction pour tous les points d'un même corps.

Soient P, Q les forces; m, m' les masses; v, v' les vitesses; désignons par M la masse d'un troisième corps, par T la force qui lui imprimerait la vitesse v, et par S celle qui lui imprimerait la vitesse v'.

Puisque les forces P, T communiquent des vitesses égales aux masses m et M, elles seront, entre elles, comme ces masses; on a donc $P : T = m : M$; par la même raison, l'on aura $Q : S = m' : M$. D'ailleurs les forces T, S agissant sur un même corps doivent être proportionnelles aux vitesses qu'elles impriment: donc

$$T : S = v : v'.$$

Si l'on substitue dans cette dernière proportion les valeurs de S et de T données par les deux premières, l'on aura, en faisant les réductions convenables,

$$P : Q = mv : mv'.$$

100. On appelle *forces mouvantes* ou *forces motrices*, les forces appliquées aux machines pour vaincre des résistances ou produire des mouvemens quelconques. L'agent qui produit ces forces se nomme *moteur*.

Quelle que soit la nature des forces motrices, on peut toujours comparer l'effet qu'elles produisent à celui d'un poids. Or la valeur d'un poids est exprimée par la masse du corps multipliée par la gravité, qui est la force accélératrice agissant continuellement sur les molécules de cette masse. Cette force accélératrice est exprimée par la vitesse que le corps pesant acquiert dans un

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

temps donné divisé par ce même temps; si l'on nomme t ce temps, v la vitesse qui lui correspond, m la masse du corps, P le poids, l'on aura

$$P = \frac{mv}{t} = \frac{me}{t^2};$$

e étant l'espace parcouru dans le temps t : ainsi toute force motrice d'un corps pourra être représentée par la masse de ce corps multipliée par une force accélératrice, et sa valeur pourra être indiquée par une quantité réductible à $\frac{mv}{t}$ ou $\frac{me}{t^2}$.

101. Les quantités de mouvement, les forces accélératrices et les forces motrices peuvent, ainsi que les vitesses, être représentées par des portions de lignes droites, prises sur leurs directions et proportionnelles à ces forces, et être soumises aux mêmes *compositions* ou *décompositions*.

102. On peut évaluer l'effort qu'un moteur exerce de deux manières différentes. La première consiste à déterminer le poids auquel cet effort peut faire équilibre, et alors ce n'est qu'une force de pression à laquelle on donne le nom de force morte; et la valeur de cette force sera représentée, ainsi que le poids, par la masse du corps multipliée par la force accélératrice.

103. La seconde manière d'évaluer la force d'un moteur, est de représenter l'effet produit par un poids élevé à une hauteur plus ou moins grande, dans un temps donné. Soit P le poids, M la masse, H la hauteur à laquelle P a été élevé, g la gravité. La force qui a dû être employée pour élever le poids P à la hauteur H, sera PH; mais H étant un espace parcouru, peut être exprimé par le produit d'une vitesse V et d'un temps T : donc $H = TV$; mais $P = gM$; donc $PH = gVTM$; nous avons vu (93) que la gravité g est représentée par la vitesse V que le grave acquiert dans un temps donné, divisée par le temps T, donc $PH = V^2M$; ainsi

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la force PH est égale au produit d'une masse par le carré d'une vitesse, et c'est à ce produit que l'on a donné le nom de *force vive*. Ce sont les forces vives qu'on a besoin de considérer, lorsqu'il s'agit d'évaluer l'effet d'une machine, ou de comparer entre eux les effets que l'on peut attendre de différentes machines.

104. Une force vive peut en général être représentée de deux manières, ou par le produit d'une force motrice, par une ligne, c'est-à-dire PH, ou par le produit d'une masse par le carré d'une vitesse, c'est-à-dire MV^2. Carnot a donné, à l'espèce de force vive représentée de la première manière, le nom de *force vive latente*, et il a conservé à l'autre le nom de *force vive* proprement dite.

105. On distingue dans les machines deux espèces de mouvement; dans la première, le moteur ne communique le mouvement aux parties mobiles que par degrés insensibles, et lorsque ce mouvement a acquis toute l'intensité dont il est susceptible, les parties mobiles se meuvent avec uniformité dans le même sens; ou bien s'il y a des changemens de direction, ou des variations dans l'intensité de l'effort exercé, ces changemens se font par degrés insensibles.

La seconde espèce de mouvement se distingue en ce que les communications se font par des chocs plus ou moins violens, et en ce que les changemens de direction ou d'intensité se font d'une manière brusque et instantanée.

106. On a un exemple de la première espèce de mouvement, dans les machines mues par des moteurs qui ne produisent que des *forces mortes* ou de *pression*, tels que les animaux qui exercent une traction quelconque. On observe, dans ce cas, que, dans les premiers instans, la puissance du moteur étant un peu supérieure à la résistance, il naît un petit mouvement qui s'accélère peu à peu par les impulsions continues du mo-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

teur, qui, lui-même, est obligé de prendre un mouvement accéléré, afin de rester attaché au corps auquel il imprime le mouvement. Cette accélération consomme une partie de son effort; de sorte qu'il agit avec moins d'énergie sur la machine; et le mouvement de celle-ci, s'accélérant de moins en moins, finit par devenir uniforme. Alors l'effort de l'animal est employé en partie à mettre la masse même en mouvement, et l'autre partie est transmise à la machine. C'est cette dernière seulement qui produit l'effet de la machine, et l'effet peut toujours être comparé à un poids élevé à une certaine hauteur, et représenté par une force vive.

107. La seconde espèce de mouvement a lieu dans toutes les machines à percussion, et dans celles où sont employés des mouvemens *alternatifs* ou *de va et vient* rectilignes ou circulaires.

108. Dans les mouvemens de première espèce, la force vive du moteur se transmet à la résistance sans déperdition. Dans ceux, au contraire, de seconde espèce, il y a toujours une déperdition d'autant plus forte, que les chocs sont plus violens, ou que les changemens de direction et d'intensité sont plus brusques. Pour démontrer cette vérité importante, examinons ce qui a lieu lorsque deux corps durs viennent à se choquer mutuellement.

109. Lorsque deux ou plusieurs corps agissent les uns sur les autres, l'un n'acquiert aucune force nouvelle qui ne soit perdue par un autre dans la même direction; de sorte qu'il y a toujours égalité entre l'action et la réaction : d'où il suit que, quoique par le choc le mouvement passe d'un corps à un autre, néanmoins la somme de leur quantité de mouvement, dans une direction donnée, est toujours la même.

Cette loi importante de la nature est une conséquence nécessaire de la loi d'inertie (6); car, comme par celle-ci un corps persévère dans son état de repos ou de mouvement uniforme

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en ligne droite, jusqu'à ce qu'il soit affecté de quelque cause externe; de même, la somme des quantités de mouvement d'un nombre quelconque de corps, estimées dans une direction donnée, demeure la même, malgré les chocs, jusqu'à ce que quelque cause externe vienne les déranger.

110. Soient m, m' les masses de deux corps durs qui se choquent; v, v' leurs vitesses avant le choc, ces corps, étant par supposition dénués d'élasticité, continueront à se mouvoir, après le choc, avec une vitesse commune u, comme s'ils ne formaient qu'un seul et même corps, composé de la masse $m+m'$.

La force capable de communiquer à la masse $m+m'$ cette vitesse u, est évidemment $(m+m')u$; mais cette force doit être égale à $mv \pm m'v'$, c'est-à-dire, à la différence des quantités de mouvement primitives des deux corps, si leurs directions étaient, avant le choc, en sens contraire, et égale à leur somme, dans la supposition que les directions soient dans le même sens, et cela parce que *l'action doit être égale à la réaction*. Ainsi

$$(m+m')u = mv \pm m'v' \text{ et } u = \frac{mv \pm m'v'}{m+m'},$$

si le corps m' était en repos, $v' = o$, et on a alors $u = \frac{mv}{m+m'}$.

111. Démontrons maintenant que dans *le changement brusque qui s'opère par le choc des corps durs, la partie de la force vive qui est détruite est équivalente à la somme des forces vives perdues ou gagnées par les mobiles.*

Reprenons l'équation $(m+m')u = mv \pm m'v'$; multiplions les deux membres par $2u$, il en résultera

$$(m+m')2u^2 = 2mvu \pm 2m'v'u;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

retranchons cette nouvelle équation de l'équation identique

$$mv^2 + m'v'^2 + (m + m')\,u^2 = mv^2 + m'v'^2 + (m + m')\,u^2,$$

il vient

$$mv^2 + m'v'^2 - (m + m').\,u^2 = mv^2 + m'v'^2 - 2u\,(mv \pm m'v') + (m + m')\,u^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$mv^2 + m'v' - (m + m')\,u^2 = m\,(v-u)^2 + m'\,(u \pm v')^2.$$

Or, la somme des forces vives, avant le choc, est évidemment $mv^2 + m'v'^2$, et $(m + m')\,u^2$ après le choc ; ainsi

$$mv^2 + m'v'^2 - (m + m')\,u^2$$

est la force vive perdue ; et l'équation précédente nous apprend que cette force vive perdue est égale à

$$m\,(v-u)^2 + m'\,(u \pm v')^2,$$

c'est-à-dire, à la somme des forces vives dues aux vitesses perdues ou gagnées par les mobiles. Carnot a démontré que ce théorème a lieu, quel que soit le nombre des corps qui agissent les uns sur les autres.

112. Si la communication de mouvement se fait par degrés insensibles, il est évident qu'alors $m\,(v-u)^2 + m'\,(u \pm v')^2$ devient une quantité très-petite, c'est-à-dire, qu'alors la somme des forces vives se conserve sans altération sensible. Il n'en est pas de même lorsque les communications de mouvement se font par des chocs. Dans ce cas, il y a toujours déperdition de forces vives. Il résulte évidemment de ce que nous venons de dire, que pour obtenir des machines le plus grand effet possible, il est important qu'elles soient construites, autant que l'on peut, de manière que le mouvement ne se communique que par de-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

grés insensibles, et que lorsqu'il doit changer de direction ou d'intensité, ce changement ne se fasse que par degrés insensibles; il faut donc éviter soigneusement les chocs et les mouvemens alternatifs lorsque la nature de la machine le permet. Ainsi, un des perfectionnemens les plus utiles que l'on puisse introduire dans une machine (en supposant toujours que l'objet auquel cette machine est destinée ne s'y oppose pas invinciblement), c'est de substituer, 1°. les pressions aux percussions; 2°. les mouvemens circulaires continus aux mouvemens alternatifs, quelle que soit leur nature; 3°. quand on ne peut pas supprimer ces mouvemens alternatifs, il faut diminuer autant que possible la vitesse des mobiles qui en sont affectés, surtout dans les momens où ont lieu les changemens de direction en sens contraires.

113. Ces améliorations utiles produiront, lorsqu'elles seront praticables, non-seulement l'avantage important d'éviter la déperdition des forces vives; mais en outre ceux 1°. de rendre la machine plus solide, en supprimant les ébranlemens qui tendent à la disloquer; 2°. de donner aux mouvemens plus de régularité et de douceur; 3°. d'éviter le bruit incommode que les percussions occasionent.

114. Il importe essentiellement de ne donner en général aux machines et aux mobiles qui les composent que la vitesse purement nécessaire pour qu'elles produisent, d'une manière satisfaisante, leur effet. La vitesse superflue consommerait en pure perte une portion de l'effort du moteur; car, nous le répétons, cet effort se décompose toujours en deux portions, dont la première est uniquement destinée à mettre en mouvement la masse du moteur et de la partie sur laquelle il agit, et ne se propage point à la résistance; et c'est la portion d'effort dont il s'agit qu'on doit essayer de diminuer autant que la nature de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la machine le permet. Lorsque nous nous occuperons de la théorie des moteurs, nous aurons occasion de revenir sur ces considérations importantes.

115. Lorsque des corps parfaitement durs se choquent, ils marchent toujours de compagnie après le choc : il n'en est pas de même des corps parfaitement élastiques; ils se séparent après le choc avec une vitesse relative égale à celle qu'ils avaient dans le sens opposé immédiatement avant le choc. En effet, dans le choc, ces mobiles se compriment et s'aplatissent, et en se comprimant ils perdent graduellement leurs vitesses; la compression cesse aussitôt que ces vitesses sont détruites; alors l'élasticité des corps leur fait reprendre les formes primitives qu'ils avaient; mais, en reprenant ces formes, les vitesses qu'ils avaient perdues leur sont restituées en sens contraire; de sorte que si l'élasticité est parfaite, les corps reprennent des vitesses exactement égales, et contraires à celles que la compression leur avait fait perdre.

116. Soit m, m' les masses de deux corps élastiques qui viennent se choquer, et qui, avant le choc, ont les vitesses v, v' dirigées dans le même sens. Au premier instant du choc, les deux mobiles se pressent jusqu'à ce qu'ils aient acquis une vitesse commune u : alors le corps m a perdu la vitesse $v-u$, et le corps m' a gagné la vitesse $u-v'$; un instant après, l'élasticité agit et repousse les deux corps en sens contraire; de sorte que le corps m, repoussé en arrière avec une vitesse égale à celle que la compression lui avait d'abord fait perdre, aura perdu en totalité la vitesse $2(v-u)$; tandis qu'au contraire, l'autre corps m' aura gagné en totalité celle $2(u-v')$. Ainsi, si l'on désigne par V et V' les vitesses de m, m', après le choc, on aura

$$V = v - 2(v-u) = 2u - v; \quad V' = v' + 2(u-v') = 2u - v'.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

117. Si l'on substitue au lieu de u la valeur $\frac{mv - m'v'}{m + m'}$ (110), on aura

$$V = \frac{v(m - m') - 2m'v'}{m + m'} \text{ et } V' = \frac{-v'(m + m') + 2mv}{m + m'}.$$

En supposant $m = m'$, l'on aura

$$V = -v' \text{ et } V' = v,$$

c'est-à-dire que *lorsque deux corps élastiques qui ont des masses égales se choquent en allant dans le même sens, ils échangent leurs vitesses dans le choc, et continuent ensuite de se mouvoir dans le même sens.*

118. Si le corps m' est en repos au moment du choc, alors $v' = o$, et les formules précédentes deviennent

$$V = \frac{v(m - m')}{m + m'} \text{ et } V' = \frac{2mv}{m + m'}.$$

On voit que dans ce cas, si $m = m'$, $V = o$ et $V' = v$; c'est-à-dire que *le corps choquant devra rester en repos, et le corps choqué se mouvra avec la vitesse qu'avait le premier.*

119. Si l'on suppose que plusieurs corps élastiques ayant des masses égales soient placés l'un à côté de l'autre sur une ligne droite, et que le premier corps frappe le second avec la vitesse v dirigée suivant la ligne droite sur laquelle se trouvent tous les corps dont il s'agit, il en résultera : 1°. que tous les corps intermédiaires entre le premier et le dernier resteront en repos; 2°. que ce dernier seulement se mettra en mouvement avec une vitesse égale à v; car le premier corps communique cette vitesse v au second, qui la transmet au troisième, celui-ci au quatrième, et ainsi de suite.

Quand les deux mobiles vont en sens contraire, il faut

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

changer dans les formules précédentes le signe de v', et l'on aura

$$V = \frac{v(m - m') + 2m'v'}{m + m'} \text{ et } V' = \frac{v'(m + m') + 2mv}{m + m'}.$$

Si l'on effectue sur ces équations des opérations analogues à celles que nous avons indiquées (111), l'on aura

$$mV^2 + m'V'^2 = 4u^2(m + m') - 4u(mv + m'v') + mv^2 + m'v'^2;$$

mais

$$u = \frac{mv - m'v'}{m + m'} \text{ et } u(m + m') = mv + m'v';$$

donc,

$$mV^2 + m'V'^2 = mv^2 + m'v'^2;$$

ce qui signifie que *dans le choc de deux corps parfaitement élastiques, la somme de leurs forces vives est la même avant et après le choc.*

120. Nous avons vu (116) que $V = 2u - v$, et $V' = 2u - v'$. En retranchant la seconde équation de la première, l'on trouve $V - V' = v' - v$; c'est-à-dire qu'*après le choc, la vitesse relative de deux corps élastiques est égale à leur vitesse relative avant le choc, mais prise en sens contraire.*

121. *Lorsqu'un corps élastique frappe obliquement un plan fixe, il se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.* (Pl. 2, fig. 1.)

Soit A le corps élastique lancé contre CD avec une vitesse AM; cette vitesse peut être décomposée en deux autres, dont l'une indiquée par MN sera perpendiculaire à CD, et l'autre MC sera dirigée suivant le plan CD. L'effet de la force MN sera (en vertu de l'élasticité) de faire remonter le mobile de M en N; quand à l'autre force MC, elle n'éprouve aucun obstacle à son effet entier. Ainsi le mobile, parvenu au point M, est soumis à l'action de deux forces qui lui communiquent les vi-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tesses MN et $MC = MD$. Complétons le parallélogramme $MNBD$, et tirons la diagonale NB qui sera la résultante des vitesses de ces deux forces. Les deux parallélogrammes $MNBD$ et $CMNA$ sont égaux; donc l'angle d'*incidence* AMN est égal à l'angle de réflexion BMN.

** 122. *Quoique le choc de deux corps change la vitesse de chacun d'eux, il n'apporte cependant aucune altération dans la vitesse de leur centre de gravité, qui est la même immédiatement avant et après la rencontre des deux mobiles.*

Nommons e, e' les distances variables des centres des deux mobiles m, m', à un point fixe choisi arbitrairement sur la ligne qu'ils décrivent; et x la distance du centre de gravité de ces deux corps au même point. Nous aurons

$$x = \frac{me + m'e'}{m + m'}.$$

Si l'on différentie cette équation par rapport au temps t, l'on aura

$$(m + m')\frac{dx}{dt} = m\frac{de}{dt} + m'\frac{de'}{dt}.$$

il faut observer que $\frac{de}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$, expriment les vitesses des deux mobiles au bout du temps t, et $\frac{dx}{dt}$ exprime la vitesse correspondante de leur centre de gravité. L'on aura la valeur de cette vitesse avant le choc, en substituant v, v' au lieu de $\frac{de}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$; alors en nommant y la vitesse du centre de gravité, la dernière équation devient $y = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$. Cette valeur de y est identique à celle que nous avons désigné précédemment par u. De même, l'on aura la vitesse y' du centre de gravité après le choc, en mettant dans la même équation V, V', à la place de $\frac{de}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$; et l'on aura

$$y' = \frac{mV + mV'}{m + m'}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si les deux mobiles ne sont point élastiques, les deux vitesses V et V', après le choc, sont égales entre elles, et l'on a

$$V' = V = u.$$

d'où il résulte que $y' = u$, et par conséquent que $y = y'$.

Mais dans le cas où ces deux mobiles sont parfaitement élastiques, on a (116)

$$V = 2u - v,\ V' = 2u' - v';$$

substituant ces valeurs dans l'équation de y' l'on aura

$$y' = \frac{2mv - um + 2m'v' - um'}{m + m'} = \frac{2(mv + m'v')}{m + m'} - \frac{(m + m')u}{m + m'};$$

mais $\frac{mv + m'v'}{m + m'} = y$; donc $y' = 2y - u$; observons que $y = u$; conséquemment $y' = y$.

123. Cette propriété remarquable qu'offre le choc des corps durs et celui des corps élastiques est un cas particulier d'un principe général connu sous le nom de *principe de la conservation du mouvement du centre de gravité*, et qui consiste en ce que l'action réciproque de différens corps d'un système qui agissent les uns aux autres, soit en se choquant, soit de toute autre manière, n'altère pas le mouvement du centre de gravité.

Mouvement d'un corps choqué, retenu par un axe fixe.

124. Lorsqu'un corps solide, ou un système de corps liés entre eux d'une manière invariable, est assujetti à se mouvoir autour d'un axe fixe, chacun des points de ce corps ou de ce système de corps se mouvra nécessairement dans un cercle perpendiculaire à l'axe fixe, et qui aura pour rayon la distance de ce point à cet axe; de plus, les arcs de cercle décrits par tous ces points dans le même temps seront d'un même nombre de degrés. On nomme *vitesse angulaire* le quotient de la vitesse

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de chaque point par sa distance à l'axe fixe. Cette vitesse angulaire est la même pour tous les points du corps ou du système de corps qui tourne autour d'un axe fixe, et cela pour un instant déterminé.

125. La théorie du mouvement d'un corps choqué, retenu par un axe fixe, se déduit avec facilité, en se servant d'un principe très-fécond connu sous le nom de *principe de d'Alembert*. Voici en quoi il consiste.

Soit un système de corps m, m', m'', etc., liés entre eux d'une manière quelconque; supposons qu'on applique à chacun de ces corps des forces qui imprimeraient au premier la vitesse v, au second la vitesse v', etc., si ces corps étaient indépendans; mais, en vertu de la liaison invariable qui les réunit, les vitesses v, v', v'', etc., seront altérées dans leurs grandeurs et dans leurs directions, c'est-à-dire, que les corps m, m', m'', perdront ou gagneront des vitesses; ainsi chaque vitesse v, v', v'', sera décomposée en deux $p, u; p', u'; p'', u''$, dont la première sera la vitesse perdue ou gagnée, et la seconde la vitesse qui a effectivement lieu. Il en résulte qu'il faut qu'il y ait nécessairement équilibre, dans le système, entre les quantités de mouvement perdues ou gagnées $mp, m'p', m''p''$; car si ces forces ne se faisaient point équilibre, u, u', u'', ne seraient plus les vitesses qui ont effectivement lieu; ce qui serait contre l'hypothèse.

On peut substituer aux forces $mp, m'p', m''p''$, qui doivent se faire équilibre, les composantes de chacune d'elles; ainsi l'on regardera la force mp comme la résultante de deux autres forces; savoir : 1°., mv prise dans sa direction; 2°. mu prise en sens contraire de sa direction. De même $m'p'$ sera la résultante de $m'v'$, $m'u'$; et $m''p''$ celle des forces $m''v''$, $m''u''$. Ainsi *il y a équilibre dans le système entre les quantités de mouvement* $mv, m'v', m''v''$, etc., *imprimées aux mobiles, et les quantités*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de mouvement mu, $m'u'$, $m''u''$, etc., *qui ont effectivement lieu; chacune de ces dernières étant prise en sens contraire de sa direction.*

126. Au moyen de ce principe, par lequel les lois du mouvement des corps sont réduites à celles de leur équilibre, on peut mettre en équation tout problème de dynamique, et obtenir des expressions analytiques qui indiquent la liaison des parties du système, ainsi que l'équilibre entre les forces imprimées et celles qui ont lieu, prises en sens opposé; on en déduit les équations d'équilibre entre les vitesses données v, v', v'', etc., et les vitesses inconnues u, u', u'', etc., qu'il s'agit de déterminer.

127. Quand un corps, étant assujetti à un axe fixe, reçoit un choc ou une impulsion, et qu'on veut déterminer sa vitesse angulaire V, on supposera, 1°. que le corps est composé d'un certain nombre de masses partielles m, m', m'', etc., réunies entre elles d'une manière invariable; 2°. que des forces données en grandeur et en direction agissent simultanément sur toutes ces masses, de manière que si elles étaient libres et indépendantes, elles acquérraient les vitesses v, v', v'', etc.

Nommons r, r', r'', etc., les distances connues des masses m, m', m'', etc., à l'axe de rotation; rV, $r'V$, $r''V$, etc., seront les vitesses de ces masses qui auront effectivement lieu; car, supposons que u, u', u'' soient ces mêmes vitesses, nous aurons (124)

$$V = \frac{r}{u} = \frac{r'}{u'} = \frac{r''}{u''}, \text{ etc.}$$

Il y aura (125) équilibre, dans le système, entre les forces mv, $m'v'$, $m''v''$, etc., prises dans leur direction, et les forces mrV, $mr'V$, $m''r''V$, etc., prises en sens contraire de leurs directions.

Menons par chacun des points d'application des forces mv,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$m'v'$, $m''v''$, des plans perpendiculaires à l'axe fixe; décomposons ensuite chaque force en deux autres : ces composantes seront, les unes parallèles à l'axe, et les autres dirigées dans les plans perpendiculaires à cet axe; nommons ω, ω', ω'', etc., les angles que les directions de ces dernières font dans le plan où elles sont tracées; nous aurons

$$mv\, Cos.\, \omega,\ m'v'\, Cos.\, \omega',\ m''v''\, Cos.\, \omega'', \text{ etc.},$$

pour leur expression.

A l'égard des forces mrV, $m'r'V$, $m''r''V$, etc., nous observerons qu'elles sont tangentes aux cercles décrits autour de l'axe avec les rayons r, r', r'', etc., et qu'elles tendent toutes à faire tourner le système dans le même sens, savoir, dans le sens opposé au mouvement de rotation qui a réellement lieu : leurs momens par rapport à l'axe seront

$$mr^2V,\ m'r'^2V,\ m''r''^2V, \text{ etc.};$$

la somme de ces momens sera

$$V\,(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 +, \text{ etc.});$$

indiquons $mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2$, etc., par Σmr^2,

la somme des momens sera $V.\ \Sigma mr^2$.

Il se peut que parmi les forces $mv\, Cos.\, \omega$, $m'v'\, Cos.\, \omega'$, $m''v''\, Cos.\, \omega''$, etc., il y en ait qui tendent à faire tourner le système dans un sens, et les autres dans le sens opposé; dans ce cas, elles formeront deux sommes de momens, et il faudra soustraire la plus petite de la *plus grande*. Supposons qu'elles tendent toutes à faire tourner le système dans le même sens, soient p, p', p'', etc., les perpendiculaires abaissées du centre de rotation sur leurs di-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rections projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe; la somme des momens sera

$$mvp\ Cos.\ \omega + m'v'p'\ Cos.\ \omega' + m''v''p''\ Cos.\ \omega'', \text{ etc.},$$

que nous indiquerons par $\Sigma mvp\ Cos.\ \omega$.
Nous aurons

$$V.\Sigma mr^2 = \Sigma mvp.\ Cos.\ \omega, \quad et \quad V = \frac{\Sigma mvp.\ Cos.\ \omega}{\Sigma mr^2}.$$

Supposons que les vitesses v, v', v'', etc., soient toutes égales, parallèles entre elles et dirigées dans des plans perpendiculaires à l'axe fixe ; dans ce cas, les angles ω, ω', ω'' s'évanouiront,

$$Cos.\ \omega = Cos.\ \omega' = Cos.\ \omega'' \ldots . \text{etc.} = 1,$$

et la somme

$$mvp\ Cos.\ \omega + m'v'p'\ Cos.\ \omega' + m''v''p''\ Cos.\ \omega'' +, \text{ etc.},$$

se réduira à

$$(mp + m'p' + m''p'' +, \text{ etc.})\, v.$$

De plus, si l'on mène par l'axe fixe un plan parallèle à la direction de la vitesse v, les lignes p, p', p'', etc., seront égales aux perpendiculaires abaissées des points m, m', m'', etc., sur ce plan ; d'où il résulte (par les propriétés du centre de gravité) qu'en désignant par h la perpendiculaire abaissée du centre de gravité du système m, m', m'', etc., sur le plan susdit, et nommant M la somme des masses m, m', m'', etc., nous aurons

$$(mp + m'p' + m''p'' + \text{etc.})\, v = Mhv, \text{ et } V = \frac{Mhv}{\Sigma mr^2}.$$

Si l'on suppose les masses m, m', m'', etc., infiniment petites et formant un corps solide continu dont elles sont les élémens matériels, en désignant par dm l'expression différentielle de l'un quelconque de ces élémens, et par r sa distance à l'axe fixe, la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

somme Σmr^2 se changera dans l'intégrale $\int r^2 dm$, qui devra être étendue à la masse entière du corps; alors la vitesse angulaire sera $V = \frac{Mhv}{\int r^2 dm}$.

** 128. Souvent il importe de déterminer l'effort que l'axe fixe éprouve par le choc exercé contre le corps assujetti à tourner autour de cet axe. Cet effort est dû aux quantités de mouvement perdues ou gagnées dans le choc par chaque élément matériel du corps; ainsi, on le déterminera, dans chaque cas, en cherchant la résultante de ces quantités de mouvement.

Soit le corps R (Pl. II, fig. 1) assujetti à tourner autour de l'axe fixe CD qui sera aussi celui des z, et soient conséquemment CZ, CY, CX, les axes des coordonnées. Supposons qu'une masse M, animée de la vitesse v, vienne choquer ce corps suivant la direction GH, qui passe par le centre de gravité G de la masse M, et qui est comprise dans le plan YCX, perpendiculaire à l'axe fixe CD; supposons, en outre, qu'après le choc, la masse M ne se détache pas du corps choqué. Il est évident que les quantités de mouvement des élémens de la masse entière, prises en sens contraire de leurs directions, doivent faire équilibre à la force Mv, dirigée suivant GH.

Appelons dm un élément quelconque de la masse totale M', formée par la réunion des deux masses R et M, et nommons x, y, z les coordonnées de cet élément. Soit V la vitesse angulaire, et r la distance de l'élément dm à l'axe fixe; sa quantité de mouvement sera $Vr.dm$. La direction de cette force est tangente à un cercle contenu dans un plan perpendiculaire à l'axe fixe CD, et dont le rayon est r.

Si l'on décompose cette force tangentielle en trois, parallèles aux axes des x, y, z, celle des composantes, qui sera parallèle à l'axe des z (qui est aussi l'axe fixe), sera nulle.

Pour obtenir l'expression des deux autres composantes : soit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

p (Pl. II, fig. 1) la projection de l'élément dm sur le plan YCX; décrivons sur ce plan un arc de cercle avec le rayon $Cp = r$, menons une tangente au point p; elle coupera les axes CX,CY aux points n, m. Les triangles rectangles Cpn et Cpm donnent

$$Cn : Cp = 1 : Sin.\,Cnp, \text{ ou } Cos.\,pnY;\ Cm : Cp = 1 : Sin.\,Cmp, \text{ ou } Cos.\,pmX.$$

On doit observer que si le mouvement de rotation a lieu dans le sens pn, il faudra prendre la force $Vr.dm$ dans la direction contraire pm, de manière qu'en la décomposant suivant les axes CX,CY, il en résulte

$$x = r.\ Cos.\,pnY, \text{ et } y = -\ r.\ Cos.\,pmX.$$

Les composantes de la force $Vrdm$ seront

$$xV.dm \text{ et } -yV.dm;$$

ainsi en premier lieu la somme des forces parallèles à l'axe CY, sera

$$\int xV.dm, \text{ ou } V.\int x.dm.$$

Si l'on prend cette intégrale dans toute l'étendue de la masse totale M', et si l'on suppose que x' soit la valeur de x, qui correspond au centre de gravité, on aura

$$\int x.dm = M'x' \text{ et } V\int x.dm = VM'x';$$

on trouvera de même que

$$-V\int y.dm = -V'My'.$$

Donc les forces qui se font équilibre autour de l'axe fixe, sont

$$1^{\circ}.\ Mv;\ 2^{\circ}.\ VM'x';\ 3^{\circ}.\ -VM'y';$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la première est dirigée dans le plan XCY, et les deux autres sont parallèles à ce plan.

129. Les momens des forces $xV.dm$ et $-yV.dm$; par rapport au plan des x, sont

$$xzV.dm \text{ et } -yzV.dm,$$

et les sommes des forces parallèles aux deux axes sont

$$V\int xz.dm \text{ et } -V\int yz.dm.$$

Si l'on prend les intégrales $\int xz.dm$ et $\int yz.dm$ dans toute l'étendue de M', et si l'on désigne par z', z'' les distances des résultantes $VM'x'$ et $VM'y'$ au plan des x, y, l'on aura

$$VM'x'z' = V\int xz.dm, \text{ et } -VM'y'z'' = -V\int yz.dm;$$

ainsi

$$z' = \frac{\int xz.dm}{M'x'}, \text{ et } z'' = \frac{\int yz.dm}{M'y''}.$$

Ces deux dernières équations indiquent que quand

$$\int xz.dm = 0, \text{ et } \int yz.dm = 0, \text{ on aura}$$

$$z' = 0, \; z'' = 0;$$

dans ce cas, les trois forces se trouveront dans le plan des x, y, où étant en équilibre autour du point C, leur résultante doit passer par ce point; et cette résultante indiquera la percussion qu'éprouve l'axe fixe.

130. Pour que l'axe fixe n'éprouve aucune percussion, il faut évidemment que la résultante dont nous venons de parler soit égale à zéro, ce qui exige que les sommes des composantes parallèles aux axes des x et des y soient séparément nulles.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Appelons a, b les angles que fait la droite GH (Pl. II, fig. 1) avec les axes des x et des y; les composantes de la force Mv, dirigée suivant cette droite, seront

$$Mv.\,Cos.\,a\,,\ Mv.\,Cos.\,b\,;$$

ainsi, pour que la percussion soit nulle, il faudra que

$$Mv.\,Cos.\,a - VM'y' = 0, \text{ et que } Nv.\,Cos.\,b + VM'x' = 0\,;$$

mais

$$V = \frac{Mhv}{\int r^2 dm};$$

en substituant cette valeur de V dans les deux équations, elles deviendront

$$Cos.\,a.\int r^2 dm - M'hy' = 0\,;\ Cos.\,b \int r^2 dm + M'hx' = 0.$$

Si l'on divise la seconde de ces équations par la première, et que l'on multiplie tous les termes par $\frac{y'}{x'}$, l'on aura

$$\frac{y'\,Cos.\,b}{x'\,Cos.\,a} + 1 = 0.$$

$\frac{Cos.\,b}{Cos.\,a}$ exprime la tangente de l'angle HGX, et $\frac{y'}{x'}$ la tangente de l'angle $G'CX$, ($G'C$ étant la droite qui réunit au centre C la projection du centre de gravité sur le plan de x, y.) Ainsi l'équation

$$\frac{y'\,Cos.\,b}{x'\,Cos.\,a} + 1 = 0$$

signifie, d'après les principes de trigonométrie, que les droites GH et $G'C$ sont perpendiculaires, ce qui dénote que la *direction GH de la vitesse* du corps choquant doit être, avant le choc, perpendiculaire au plan qui contient l'axe fixe et le centre de gravité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si l'on élève au carré les équations

$$Cos.\,a \int r^2dm - M'hy' = 0\,;\ Cos.\,b \int r^2dm + M'hx' = 0,$$

et si on les additionne, il en résulte l'équation

$$Cos.\,^2a\left(\int r^2dm\right)^2 + Cos.\,^2b\left(\int r^2dm\right)^2 = M'^2h^2(y'^2 + x'^2)\,;$$

mais

$$Cos.\,^2a + Cos.\,^2b = 1\,;$$

donc

$$\left(\int r^2dm\right)^2 = M'^2h^2(y'^2 + x'^2) \text{ et } h = \frac{\int r^2dm}{M'\sqrt{y'^2 + x'^2}}.$$

Cette dernière équation détermine la distance à laquelle la direction de la vitesse avant le choc doit couper le plan mené par cet axe et par le centre de gravité, pour que l'axe n'éprouve point de percussion.

Le point où il faut que le choc soit imprimé perpendiculairement au plan qui passe par l'axe et par le centre de gravité pour que cet axe n'éprouve aucun effort, se nomme centre de percussion. Le centre de percussion est aussi le point où le choc s'exerce avec la plus grande intensité possible.

Momens d'inertie.

** 131. On appelle moment d'inertie d'un corps la somme de ses élémens matériels multipliés respectivement par le carré de leur distance à l'axe de rotation. Ce moment, dans les formules précédentes, est indiqué par l'intégrale $\int r^2dm$.

Le moment d'inertie d'un corps homogène terminé par une surface de révolution se détermine de la manière suivante : On divise d'abord le corps en anneaux circulaires d'une épaisseur et d'une largeur infiniment petites ; le centre de chacun d'eux doit se trouver dans l'axe, et ils seront tous compris entre des plans perpendiculaires à cet axe. Soit (Pl. II, fig. 3) AA', un

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de ces anneaux élémentaires; nous appellerons r son rayon interne; x la distance du centre C au point M, pris sur l'axe de la courbe génératrice; π le rapport de la circonférence au diamètre; la largeur de l'anneau sera exprimée par dr, et son épaisseur par dx. Cela posé, on voit que $\pi r^2 dx$ représente le volume d'un cylindre qui aurait r pour rayon, et dx pour hauteur, et $\pi(r + dr)^2 dx$ celui du cylindre dont le rayon est $r + dr$, et la hauteur dx; or le volume de l'anneau élémentaire AA' est évidemment la différence des volumes des deux cylindres, et par conséquent égal à

$$\pi(r + dr)^2 dx - \pi r^2 dx = 2\pi r dr dx + dr dr dx, \text{ ce qui réduit à } 2\pi r dr dx,$$

en négligeant $drdrdx$ infiniment petit du troisième ordre. Les distances de tous les points de l'anneau élémentaire ne différant de r que d'une quantité infiniment petite, il en résulte $2\pi\delta r^3 dr dx$ (δ étant la densité du corps).

Si l'on intègre par rapport à r, depuis $r = 0$ jusqu'à $r = CP = y$, ordonnée de la courbe génératrice, on aura $\frac{1}{2}\pi\delta y^4 dx$, moment d'inertie d'une tranche élémentaire du corps. Pour avoir enfin le moment d'inertie du corps entier, il faut intégrer par rapport à x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = MN$.

Exemple.

132. Supposons que la courbe génératrice MPN (Pl. II, fig. 3) soit une demi-circonférence, dont l'équation rapportée au point M est $y^2 = 2ax - x^2$.

Il faut substituer cette valeur de y^2 dans la formule $\frac{1}{2}\pi\delta y^4 dx$, et l'on aura

$$\tfrac{1}{2}\pi\delta(2ax - x^2)^2 dx = \tfrac{1}{2}\pi\delta(4a^2x^2dx - 4ax^3dx + x^4dx);$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et en intégrant, il résultera

$$\tfrac{1}{2}\pi\delta\left(\frac{4a^2x^3}{3} - ax^4 + \frac{x^5}{5}\right).$$

Cette intégrale s'évanouit au point M. Il suffit, pour avoir le moment d'inertie de la sphère entière, de supposer $x = MN = 2a$, et l'on aura pour résultat $\frac{8\pi\delta a^5}{15}$.

Autre exemple :

** 133. Si le solide dont on veut déterminer le moment d'inertie est un tronc de cône engendré par la rotation de la ligne AB (Pl. II, fig. 2) autour de l'axe CD; alors il faut substituer dans la formule $\frac{1}{2}\pi\delta y^4dx$ la valeur de y donnée par l'équation $y = ax + b$, dans laquelle $b = CA$, et $a =$ tang. DMB; l'on aura

$$\tfrac{1}{2}\pi\delta(ax + b)^4dx = \tfrac{1}{2}\pi\delta(a^4x^4dx + 4a^3x^3bdx + 6a^2x^2b^2dx + 4axb^3dx + b^4dx);$$

et intégrant l'on aura

$$\tfrac{1}{2}\pi\delta\left(\frac{a^4x^5}{5} + \frac{4a^3x^4b}{4} + \frac{6a^2x^3b^2}{3} + \frac{4ax^2b^3}{2} + b^4x\right).$$

En multipliant et divisant par $5a$, cette quantité devient

$$\frac{1}{10}\frac{\pi\delta}{a}(a^5x^5 + 5a^4x^4b + 10a^3x^3b^2 + 10a^2x^2b^3 + 5axb^4);$$

mais

$$a^5x^5 + 5a^4x^4b + 10a^3x^3b^2 + 10a^2x^2b^3 + 5xb^4 = (ax + b)^5 - b^5;$$

donc la formule précédente devient

$$\frac{1}{10}\frac{\pi\delta}{a}[(ax + b)^5 - b^5]$$

elle indique le moment d'inertie du tronc de cône dans lequel il ne s'agit plus que de substituer la valeur de $x = CD$.

** 134. Si l'on suppose que la droite AB est parallèle à l'axe CD, le solide engendré sera un cylindre, et $a =$ tang. $BMD = 0$; et le moment d'inertie devient $\frac{1}{2}\pi\delta xb^4$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

** 135. Quand le solide dont on cherche le moment d'inertie n'est point un solide de révolution, la valeur de ce moment d'inertie doit être alors déterminée par une triple intégration.

** 136. Soit un parallélipipède rectangle et homogène le solide dont on veut déterminer le moment d'inertie par rapport à une de ses arêtes. Nommons a, b, c les trois arêtes du parallélipipède, et supposons que ce solide soit divisé en une infinité de parties élémentaires par des plans perpendiculaires à chacune des arêtes; il est évident que le volume de l'élément qui correspond aux coordonnées x, y, z, sera $dx\,dy\,dz$, et sa masse sera $\delta.\,dx\,dy\,dz$ (δ étant la densité). La distance de cet élément à l'axe des z est égale à $\sqrt{x^2+y^2}$; ainsi, le moment d'inertie, par rapport à cet axe, sera

$$\int\int\int (x^2+y^2)\delta.dx\,dy\,dz.$$

Il faut d'abord intégrer par rapport à z, depuis $z=0$, jusqu'à $z=c$; c étant l'arête qui lui correspond. Cette première intégration donne

$$\delta c\int\int(x^2+y^2)dx\,dy;$$

en intégrant de la même manière, par rapport à y, l'on aura

$$\delta c\int\left(x^2b+\frac{b^3}{3}\right)dx;$$

et enfin la dernière intégration, par rapport à x, donnera

$$\delta c\left(\frac{a^3b}{3}+\frac{ab^3}{3}\right)=\frac{\delta cba}{3}(a^2+b^2);$$

mais δcba désigne la masse totale du corps; nommant M cette masse, $\frac{M}{3}(a^2+b^2)$ exprimera le moment d'inertie du parallélipipède par rapport à l'arête c; de la même manière l'on trouvera que $\frac{M}{3}(a^2+c^2)$ et $\frac{M}{3}(b^2+c^2)$ sont les momens d'inertie qui se rapportent aux arêtes b et c.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

** 137. Lorsque le moment d'inertie d'un corps, par rapport à un axe passant par le centre de gravité, est déterminé, il est facile d'en déduire la valeur du moment d'inertie, rapporté à tout autre axe parallèle au premier.

Soient x, y, z les coordonnées au centre de gravité, et supposons que ce soit l'axe des z qui passe par ce centre; soit a la distance du second axe au premier, r celle d'un élément dm au premier axe, r' celle du même élément au second axe; et enfin soient α et β les coordonnées du point où le second axe coupe le plan des x, y. Le moment d'inertie qui se rapporte au premier axe sera $\int r^2 dm$, et $\int r'^2 dm$ sera celui qui se rapportera au second; mais

$$r'^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2;$$

ainsi

$$\int r'^2 dm = \int (x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2)\, dm;$$

mais

$$x^2 + y^2 = r^2, \text{ et } \alpha^2 + \beta^2 = a^2;$$

donc

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm - 2\alpha \int x dm - 2\beta \int y dm + a^2 \int dm;$$

l'axe de gravité étant sur l'axe des z, il en résulte que

$$\int x dm = 0, \text{ et que } \int y dm = 0;$$

car ces intégrales, divisées par la masse du corps, représenteraient les distances du centre de gravité aux plans des y, z, et des x, z; de plus, $\int dm$ indique la masse entière du corps; ainsi, représentant cette masse par M, l'on aura

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + a^2 M.$$

Cette équation nous apprend que *le moment d'inertie, rapporté au second axe, est égal à la somme de celui qui se rapporte au premier, et de la masse du corps multipliée par la distance du centre de gravité au nouvel axe.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE TROISIÈME.

Hydrostatique.

Définitions.

138. Les fluides sont de deux genres: les uns, nommés *liquides*, tels que l'eau, le vin, etc., ont la propriété d'être incompressibles, c'est-à-dire, de ne point changer de volume, quelle que soit la compression à laquelle on les soumette ; les autres sont appelés *fluides élastiques*, parce qu'effectivement ils sont doués d'une élasticité parfaite; la compression peut leur faire changer de volume, mais ils le reprennent exactement aussitôt que cette compression cesse.

Les *fluides élastiques* se subdivisent en deux espèces : la première comprend l'*air* et les *gaz permanens*, qui conservent habituellement la forme de fluides élastiques; la seconde espèce contient les *vapeurs*, lesquelles se réduisent en *liquides* par l'abaissement de la température, ou par une forte compression.

Pressions que les fluides exercent sur les vases qui les contiennent.

139. L'expérience a prouvé que tous les *liquides*, quels qu'ils soient, ont la propriété de *transmettre également et en tout sens les pressions que l'on exerce sur une partie de leur surface;* de sorte que si un liquide étant renfermé dans un vase, on forme une ouverture en un endroit quelconque de ce même vase, qu'un piston s'adapte parfaitement à cette ouverture, et qu'une force agisse sur ce piston, l'effet exercé par cette force se fera sentir également sur toute l'étendue des parois du vase. Cette propriété caractéristique des liquides se nomme principe

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de l'égalité de pression en tout sens, et sert de base à l'hydrostatique.

140. Les pressions qu'un liquide renfermé dans un vase peut exercer sur ses parois sont de deux sortes, qu'il faut soigneusement distinguer. La première dépend de l'incompressibilité du liquide, et elle se propage uniformément à tous les points des parois du vase, quelle que soit leur position, toutes les fois qu'une force étrangère exerce une pression quelconque sur la surface du liquide. La seconde est due à la pesanteur de ce liquide, et elle est variable d'un point à un autre de ces parois.

141. La propriété qu'ont les liquides de transmettre également et en tout sens les pressions que l'on exerce sur une partie de leur surface, donne un moyen facile de transmettre l'action d'un moteur quelconque à de grandes distances; il suffit (comme M. Baader l'a proposé) d'établir un tuyau horizontal, ayant à ses extrémités des parties cylindriques verticales, dans lesquelles sont placés deux pistons, dont le premier doit recevoir l'action du moteur et la transmettre au second piston, la tige duquel communiquera avec les mobiles que l'on veut faire agir.

142. Ce même principe d'égalité de pression permet de mettre (par l'intermédiaire d'un liquide) en équilibre une petite force avec une force d'une grandeur quelconque. En effet, que l'on suppose un vase de forme quelconque, clos et entièrement rempli de liquide, qu'une ouverture A soit pratiquée dans les parois du vase, qu'un piston y soit appliqué, et qu'une force P comprime ce piston; la pression exercée par cette force sera transmise également dans toute l'étendue des parois du vase, de manière que si l'on forme un nombre quelconque n d'ouvertures égales à la première A, et que chacune d'elles ait un piston comprimé par une force égale à la force P,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans ce cas il y aura évidemment équilibre, et la force unique P pourra être prise pour la résultante de toutes les autres forces indiquées par nP. La condition de l'équilibre est que $P : nP = A : nA$. L'équilibre subsistera également si toutes les forces nP sont réunies sur un seul piston, dont la surface de la base sera nA; donc, en déterminant convenablement les bases des deux pistons, on pourra toujours, avec une puissance arbitraire P, produire une pression nP aussi grande que l'on voudra.

143. Soit (Pl. II, fig. 4) un vase A rempli de liquide, et qui n'ait d'autres ouvertures que celles qui correspondent à deux cylindres M et N superposés à ce vase. Un piston est placé dans chacun de ces cylindres. Le vase étant supposé rempli exactement par le liquide, il est évident que l'on ne pourra abaisser le piston du cylindre M, si la masse d'eau refoulée par cet abaissement ne trouve à se placer dans le cylindre N, dont elle fera remonter le piston à la hauteur exigée pour que le volume d'eau introduit en M soit égal au volume d'eau expulsé de M; ces volumes sont représentés par deux cylindres; nommons B, b, leurs bases, et H, h, leurs hauteurs. Le volume d'eau abaissé dans l'un des cylindres sera BH, et celui qui doit s'élever en même temps dans l'autre cylindre bh; il faut que $BH = bh$, et que $B : b = h : H$, c'est-à-dire, que les hauteurs soient en raison réciproque des bases; d'où il résulte que les vitesses virtuelles des deux pistons sont en raison réciproque de leurs bases : ainsi, si l'on applique des forces P, Q à ces pistons en raison réciproque des bases, leurs quantités de mouvement seront égales. C'est sur ce principe qu'est fondée la construction de la presse hydraulique inventée par Pascal, et dont on fait maintenant un grand usage.

144. Les fluides élastiques, comme les liquides, exercent

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

deux sortes de pressions; l'une est due à leur élasticité, et l'autre à leur pesanteur. L'élasticité produit à l'égard de ces fluides le même effet que produit dans les liquides la pression d'une force étrangère sur leur surface; c'est-à-dire, que l'élasticité exerce une pression uniforme sur toute l'étendue des parois des vases qui contiennent ces fluides, de la même manière que la pression uniforme est produite par l'action d'une force étrangère sur les liquides. La pression due à la pesanteur est variable d'un point à un autre des vases.

145. La force élastique d'un fluide dépend de la matière du fluide, de sa densité et de sa température. Cette force ne peut être nulle si la densité du fluide ne l'est également; ainsi, un fluide élastique ne peut être en équilibre s'il ne s'étend indéfiniment dans l'espace, jusqu'à ce que la densité soit insensible, ou bien s'il n'est contenu dans un vase fermé de toutes parts.

146. On doit remarquer que lorsqu'un liquide est placé dans un vase ouvert, et a conséquemment sa surface supérieure libre, la pression est nulle à cette surface dans le cas de l'équilibre, et cette surface est de *niveau*, c'est-à-dire, elle est plane et horizontale.

** 147. Examinons maintenant quelle est la pression qu'un liquide homogène exerce, en vertu de sa pesanteur, sur les parois du vase qui le contient. Soient g sa pesanteur, δ sa densité, h la hauteur du niveau du liquide au-dessus de la base b du vase, et P la pression totale que cette base supporte.

La pression doit être nulle à la surface supérieure de niveau; et au-dessous de cette surface, elle doit être égale pour tous les points qui sont à la même profondeur.

Supposons que la masse du fluide soit partagée en une multitude de parties élémentaires, par des plans parallèles à des coordonnées rectangulaires x, y, z; (l'axe des z est vertical); la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

masse de cet élément, que nous nommerons dm, sera $dm = \delta.\, dx\, dy\, dz$. Supposons que p soit la pression verticale qui s'exerce sur l'unité de surface de la base supérieure $dx\, dy$ de la partie élémentaire $dx\, dy\, dz$. Cette pression varie suivant la profondeur; de sorte que lorsque z devient $z + dz$, p devient $p + \frac{dp}{dz} . dz$, et cette valeur indique la pression verticale supportée par la face inférieure de l'élément $dx\, dy\, dz$; soit Zdm la résultante des forces verticales qui agissent sur cet élément, il faut pour qu'il reste en équilibre que la différence des pressions verticales et contraires soit égale à Zdm, c'est-à-dire, que

$$Zdm = \left(p + \frac{dp}{dz}\, dz\right) dx\, dy - pdx\, dy = \frac{dp}{dz}\, dz\, dx\, dy.$$

De même, si l'on nomme q et r les pressions latérales que l'élément $dx\, dy\, dz$ supporte suivant le sens des y et celui des x, on trouvera

$$\frac{dq}{dy}\, dy\, dx\, dz = Ydm,\ \frac{dr}{dx}\, dx\, dz\, dy = Xdm.$$

Si l'on substitue dans ces équations la valeur de dm, l'on aura

$$\frac{dp}{dz} dxdydz = Z\delta.\, dxdydz\,;\ \frac{dq}{dy} dydxdz = Y\delta . dxdydz\,;$$

$$\frac{dr}{dx} dxdydz = X\delta . dxdydz\,;$$

$$\text{ou } \frac{dp}{dz} = Z\delta\,;\ \frac{dq}{dy} = Y\delta\,;\ \frac{dr}{dx} = X\delta\,;$$

ou bien encore

$$dp = Z\delta dz\,;\ dq = Y\delta dy\,;\ dr = X\delta dx.$$

Si l'on suppose que les pressions p, q, r sont égales ou ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite, on aura, en ajoutant ces trois équations,

$$dp = \delta\, (Zdz + Ydy + Xdx).$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

** 148. Cela posé, si l'on prend le niveau du liquide contenu dans un vase pour le plan des x, y, alors

$$Ydy = 0, \text{ et } Xdx = 0, \ Z = g, \text{ et } dp = \delta g dz;$$

d'où l'on tire en intégrant $p = \delta gz$. Cette intégrale n'a point de constante arbitraire, parce que la pression p, étant nulle au niveau du liquide, alors $z = o$.

La valeur $p = \delta gz$ est la même pour tous les points placés à la même profondeur; ainsi chaque point de la base b supporte la pression $p = \delta gh$; mais cette base, étant horizontale, tous ses points doivent être également pressés, donc sa pression totale sera $P = \delta ghb$.

** 149. Il faut observer dans cette équation que bh est le volume d'un prisme ayant pour base la base b du vase, et pour hauteur la hauteur h du même vase. Ainsi *la pression que supporte la base du vase ne dépend pas de la figure de ce vase; mais uniquement de l'aire de sa base et de sa hauteur.*

150. Il résulte de cette proposition que si l'on a deux vases, dont l'un s'élargisse en s'élevant, et l'autre au contraire se rétrécisse, de manière que leurs capacités soient bien différentes, leurs bases éprouveront néanmoins des pressions égales, pourvu que dans les deux vases les bases et les hauteurs soient égales. Ainsi on pourra, avec une très-petite quantité d'eau, comprimer également une surface donnée comme avec une très-grande.

151. La pression qu'un liquide exerce en vertu de sa pesanteur, augmentant au fur et à mesure que les profondeurs augmentent, il s'ensuit que les tuyaux verticaux, destinés à contenir de l'eau, doivent avoir une plus grande épaisseur dans les parties inférieures que dans les parties supérieures. Nous examinerons dans le dernier livre de cet ouvrage quelle est l'épais-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

seur que, dans les divers cas, l'on doit donner aux tuyaux de conduite et aux tuyaux de pompe.

** 152. Cherchons maintenant la pression exercée par un liquide sur une surface plane qui n'est point de niveau. Tous les points de cette surface n'étant point également pressés, pour avoir la résultante des pressions supportées par tous les points de la surface donnée, on décompose cette surface en élémens infiniment petits. Soit ds un de ses élémens, et z sa distance au niveau de l'eau dans le vase, la pression sur cet élément sera exprimée par $\delta g ds$; comme les pressions de tous les élémens sont des forces parallèles entre elles et perpendiculaires à la paroi, leur résultante sera exprimée par $\delta g \int zds$; mais l'intégrale de $\int zds$ est égale à Sz' (S désignant l'aire de la paroi, et z' la *profondeur* de son centre de gravité au-dessous du niveau de l'axe); donc la pression totale sur cette paroi sera égale à $\delta gSz'$. Conséquemment cette pression est égale au poids d'un prisme d'eau qui aurait pour base la paroi, et pour hauteur la distance de son centre de gravité au niveau de l'eau. Il résulte de cela que si l'on fait tourner cette paroi autour de son centre de gravité, les pressions qu'elle éprouvera dans les diverses positions seront égales.

153. Un effet remarquable, dépendant de la pression des parois, a lieu dans un vase contenant un liquide; si l'on y fait une ouverture latérale au-dessous du niveau de l'eau, et que le vase soit posé sur un plan horizontal où il puisse avoir un mouvement de translation, l'eau sortira par l'ouverture, et le vase glissera en sens opposé. Pour expliquer ce fait, supposons que AB (Pl. II, fig. 5.) soit un vase prismatique posé sur le plan horizontal MN, ce vase n'est ouvert que par le haut, et il contient un liquide en équilibre. Supposons que ce vase soit divisé en une infinité de tranches horizontales; les élémens qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

composent chaque tranche, se trouvant à une même profondeur sous le niveau du liquide, éprouveront des pressions horizontales égales, lesquelles s'exerceront de dedans en dehors sur chaque élément. Si l'on subdivise en outre les tranches horizontales par une infinité de lignes parallèles, il est évident que les pressions que supporteront les deux élémens placés aux extrémités d'une même ligne, seront égales, agiront en sens opposés, et se contre-balanceront; de sorte que toutes les composantes horizontales des pressions que supportent les parois du vase, étant deux à deux égales et contraires, elles se détruisent toutes mutuellement, et la base ne peut en recevoir aucune impulsion parallèlement au plan sur lequel il est posé. Mais si on fait une ouverture *aa* à une des parois sous le niveau du liquide, l'eau s'écoulera; la partie du vase *bb*, directement opposée à ce trou, continuera à être soumise à une pression qui n'est plus contre-balancée du côté de l'ouverture; l'équilibre sera rompu, et le vase sera mis en mouvement par cette pression dans le sens de sa direction. La valeur de la force motrice, dont nous venons de parler, dépend de la grandeur de l'ouverture et de la hauteur du liquide au-dessus du centre de gravité de l'aire de l'ouverture; la force sera constante quand le niveau sera entretenu constamment à la même hauteur, et elle diminuera lorsque le niveau s'abaissera. Si le vase était attaché à une règle horizontale, fixée à un axe vertical, le vase tournerait autour de cet axe, en vertu de la pression non contre-balancée.

154. Segner, Bolton, Manoury, et plusieurs autres mécaniciens, ont construit des machines hydrauliques d'après ce principe. Daniel Bernoulli proposa d'en faire l'application aux bateaux, pour suppléer à l'action des rames et du vent.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Centre de pression.

155. Le *centre de pression* d'une paroi est le point où la pression totale peut être censée appliquée, c'est-à-dire, le point par lequel passe la résultante de la somme des pressions de tous les élémens de la paroi. La théorie des forces parallèles sert à déterminer le centre de pression, lequel se confond évidemment avec le centre de gravité, lorsque tous les élémens de la paroi éprouvent des pressions égales ; mais lorsque les pressions augmentent avec les profondeurs, le centre de pression sera toujours plus bas que le centre de gravité.

** 156. Soit l'aire du trapèze $ABCD$ (Pl. II, fig. 7) dont on veut déterminer le centre de pression. Supposons 1°. que les lignes AB, CD, sont horizontales; 2°. que le niveau du liquide est indiqué par la ligne Nn ; 3°. supposons que les côtés convergens AC, BD, du trapèze sont prolongés jusqu'au point de concours K, et que de ce point soit tirée la ligne KH perpendiculaire aux côtés horizontaux AB, CD ; 4°. qu'un plan vertical passe par les lignes Nn, KH, et coupe le fond du vase sur la ligne Ff; 5°. que le trapèze $ABCD$ est partagé en une infinité de tranches parallèles et horizontales $mrr'm'$. Cela posé, il est évident que la pression sera la même sur tous les points de chaque tranche élémentaire. Nommons x la distance d'une tranche élémentaire à la ligne AB; dx sera alors la distance des lignes rm, $r'm'$. On aura la valeur de rm en établissant cette proportion, $rm : AB = hK : HK$, qui donne $rm = \frac{AB \times hK}{HK}$; en faisant $AB = t$, et $HK = y$, $HL = l$, $CD = n$; on aura d'abord $rm = \frac{t(y-x)}{y}$; quand $x = HL = l$, $rm = CD = n$, et alors on aura $n = \frac{ty - tl}{y}$, et $y = \frac{tl}{n-t}$; substituant cette valeur de y dans l'équation $rm = \frac{ty - tx}{y}$, elle pren-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dra cette forme $rm = \frac{tl - tx + nx}{l}$; cette quantité, multipliée d'abord par dx, indiquera la surface de l'élément $rmm'r'$, et ce produit étant ensuite multiplié par δgz (152), l'on aura la pression que cet élément éprouve, qui sera

$$\frac{\delta gz}{l}(tl - tx + nx)\,dx;$$

Si on multiplie par x et si on intégre cette quantité, prise depuis $x = o$ jusqu'à $x = HL = l$, il en résultera l'expression de la somme des pressions que chaque élément éprouve, multipliée par sa distance à la droite AB, et cette somme (par la théorie des forces parallèles) sera égale à la pression totale multipliée par la distance de la résultante, qui est ici le centre de pression, à la même droite AB; donc en appelant X cette distance inconnue, l'on aura

$$X\int\frac{\delta g}{l}(tl - tx + nx)\,zdx = \int\frac{\delta g}{l}(tl - tx + nx)\,zx\,dx.$$

Dans cette équation, z indique la distance de l'élément $rmm'r'$ au niveau Nn du liquide. Pour déterminer la valeur de z, nommons a l'angle KTf qui mesure l'inclinaison du trapèze sur le fond du vase, et b la distance de la ligne AB au niveau du liquide; élevons les perpendiculaires hg, HG à la ligne de niveau Nn, et du point h tirons la droite he parallèle à Ff; faisons $Ge = b$; et l'angle $eHh =$ l'angle $KTf. = aeH = Hh\ Sin.\ eHh = x\ Sin.\ a$; donc

$$z = Ge + eH = b + x\ Sin.\ a.$$

L'équation précédente prend, en substituant cette valeur, la forme suivante :

$$X\int\frac{\delta g}{l}(tl - tx + nx)(b + x\ Sin.\ a)\,dx = \int\frac{\delta g}{l}(tl - tx + nx)(b + x\ Sin.\ a)\,xdx,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou bien

$$X = \frac{\int (tl - tx + nx)\,(b + x\, Sin.\, a)\, dx}{\int (tl - tx + nx)\,(b + x\, Sin.\, a)\, xdx},$$

il faut intégrer cette équation entre les limites $x = o$ et $x = l$ après avoir effectué les multiplications indiquées, et il en résultera

$$X = \frac{2lb\,(t + 2n) + l^2\,(t + 3n)\, Sin.\, a}{6b\,(t + n) + 2l\,(t + 2n)\, Sin.\, a},$$

quand $X = o$, le trapèze est horizontal, et l'équation précédente se réduit à

$$X = \frac{l\,(t + 2n)}{3\,(t + n)};$$

l'on voit que cette valeur de X est la même que celle qui indique la distance du centre de gravité du trapèze au côté AB (65); ainsi, dans ce cas, le centre de gravité coïncide avec le centre de pression.

Si $b = o$, c'est-à-dire, si la ligne CD se trouve placée dans la place qui indique le niveau du liquide, alors la valeur de X devient

$$X = \frac{l\,(t + 3n)}{2\,(t + 2n)}.$$

Cette valeur est indépendante de l'inclinaison du trapèze.

157. Lorsque $t = n$, le trapèze se change en parallélogramme, et la valeur de X se réduit à $X = \frac{2}{3} l$. Ce qui signifie *que le centre de pression d'un parallélogramme (dont le côté supérieur est dans le plan qui indique le niveau du liquide), se trouve aux deux tiers de la ligne qui réunit le milieu des deux côtés horizontaux, à partir du plan du niveau.*

158. Si $n = o$, ou si $t = o$, le trapèze se change en triangle, et on aura

$$X = \frac{l}{2}, \text{ et } X = \frac{3l}{4},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

c'est-à-dire, *que si la base du triangle se trouve dans le plan du niveau, alors le centre de pression se trouve sur le milieu de la droite qui joint le milieu de cette base au sommet; et si le sommet est dans le plan du niveau, tandis que la base est horizontale, dans ce second cas, le centre de pression se trouve aux trois quarts de la longueur de la droite qui joint le sommet au milieu de la base.*

Pressions qu'éprouvent les corps plongés dans un liquide.

** 159. Soit M le corps plongé dans un liquide. Supposons que le plan des x, y, coïncide avec le plan qui indique le niveau du liquide, et que l'axe des z soit vertical. Nommons m un élément de la surface du solide plongé, et pm la pression qu'il éprouve; il s'agit d'abord de prouver que les *pressions horizontales que le liquide exerce sur tous les élémens de la surface du corps M, se détruisent mutuellement dans chaque section horizontale.* En effet, le corps doit avoir nécessairement dans chaque section horizontale deux élémens m, et m', dont les projections sur le plan de x, z, se confondront en une seule; or ces projections superposées étant à une même profondeur sous le niveau du liquide, les deux *élémens* qui leur correspondent, doivent éprouver des pressions égales; mais ces pressions égales agissent sur la même ligne de dehors en dedans du corps et en sens opposé; donc elles doivent se détruire mutuellement, et être en équilibre.

** 160. De la même manière, chaque élément m d'une section horizontale, doit avoir un élément correspondant m'', dont la projection sur le plan des y, z, coïncide avec sa propre projection sur le même plan; les pressions sur m et m'', agissant sur la même ligne en sens opposé, doivent être nécessairement en équilibre. Ainsi les pressions horizontales que le liquide exerce

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sur tous les élémens de la surface du corps, se détruisent mutuellement.

** 161. Voyons maintenant quelle doit être la résultante dans toutes les pressions verticales. Dans ce cas, l'élément m doit se rapporter au plan de x, y, qui, comme nous l'avons supposé, coïncide avec le plan qui indique le niveau du liquide. Supposons le solide divisé en tranches élémentaires verticales; l'élément m d'une quelconque de ces tranches, aura un autre élément m''', dont la projection sur le plan x, y, se confondra avec la sienne; mais ces deux élémens ne se trouvant point à égale profondeur, la pression supportée par l'un sera plus forte que celle que le second éprouvera; nommons p', p'', les pressions des deux élémens m, m''', dont les projections égales seront indiquées par c. La pression p', qui s'exerce sous l'élément inférieur, agit de bas en haut, et tend évidemment à le soulever, tandis que la pression p'' agit du haut en bas, et tend à abaisser l'élément m'''; ces deux forces, agissant en sens contraire sur la même ligne, leur résultante sera exprimée par $(p' - p'')\,c$.

** 162. Si le liquide est homogène, et si nous nommons l la ligne verticale qui réunit les élémens m et m''', alors $p' - p''$, $= \delta g l$, et la différence des pressions sera $\delta g l c$, c'est-à-dire, elle sera égale au poids d'un volume de liquide représenté par un prisme dont la base serait c, et la hauteur l. En partageant ainsi le corps en une infinité de prismes verticaux, chaque prisme sera poussé verticalement par une force égale au poids du prisme liquide dont il tient la place, de manière que *la résultante de toutes les pressions verticales, sera égale au poids entier de la masse fluide remplacée par le corps; et cette résultante passera par le centre de gravité du liquide déplacé.*

163. Quand le corps n'est pas entièrement plongé dans le li-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

quide, dans ce cas, *la résultante des pressions verticales du fluide est égale au poids de la masse du fluide déplacé par la partie plongée, et cette résultante passera toujours par le centre de gravité de cette masse.*

164. Les pressions exercées par un liquide sur le corps plongé, tendent à le soulever de bas en haut, avec une force égale au poids du liquide déplacé. Mais le poids du corps est une force verticale qui agit du haut en bas, et qui est en opposition avec celle due à la poussée du liquide; donc, comme le volume du liquide déplacé, et celui du corps sont les mêmes, il en résulte que si leurs densités sont égales, il y aura équilibre entre les deux forces; mais toutes les fois que les densités seront différentes, le corps fera effort pour monter ou descendre, suivant que sa propre densité sera plus petite ou plus grande que celle du liquide, et pour l'empêcher de monter ou de descendre, il faudra employer une force égale à la différence de son poids, à celui du liquide déplacé.

Balance hydrostatique.

165. Il résulte du principe que nous venons d'énoncer, *qu'un corps plongé en tout ou en partie dans un fluide, y perd une partie de son poids, égale au poids du fluide qu'il déplace.* Ce principe a donné origine à la mémorable invention d'Archimède, connue sous le nom de *balance hydrostatique*, au moyen de laquelle on détermine la gravité spécifique des corps, c'est-à-dire, le rapport de leur densité à celle du fluide dans laquelle on les immerge. Pour effectuer cette détermination, on pèse successivement les corps dans le vide et dans l'eau. Nous disons que les corps doivent être pesés dans le vide; car en les pesant dans l'air, on ne saurait obtenir une exacte précision, à moins qu'ils ne soient de même volume; en effet, s'ils

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ont des volumes différens, ils déplacent des quantités d'air différentes, et leurs poids sont inégalement diminués par ce fluide.

166. La construction d'une balance hydrostatique ne diffère point essentiellement de celle d'une balance ordinaire, mais il faut qu'elle soit très-exacte, et si l'on n'était point parfaitement assuré de son exactitude, et que l'on ne pût s'en procurer de meilleure, alors il faudrait mettre en usage le moyen qu'on emploie quand on veut trouver le poids exact d'un corps avec une balance fausse. Voici en quoi consiste ce moyen : on place le corps X, dont on veut déterminer le poids, dans un quelconque des deux bassins, et on met dans l'autre bassin un poids P, tel qu'il y ait équilibre; puis on transporte le corps X dans l'autre bassin, et l'on place dans le premier un poids p qui lui fasse équilibre. Supposons que d, d' soient les distances du point d'appui aux points de suspension des bassins, nous aurons (par la théorie du levier) les deux équations.

$$X = \frac{Pd'}{d} \text{ et } X = \frac{pd}{d'};$$

en multipliant ces deux équations nous aurons

$$X^2 = Pp \times \frac{d'd}{dd'} = Pp, \text{ donc } X = \sqrt{Pp},$$

c'est-à-dire *que le poids cherché est moyen proportionnel entre les deux poids connus P et p.*

167. Lorsque l'on a reconnu l'exactitude de la balance, on peut déterminer la pesanteur spécifique d'un corps solide de la manière suivante : 1°. on met de l'eau distillée dans un vase on place ce vase dans un des plateaux de la balance, et dans l'autre plateau on met un poids qui lui fasse équilibre; 2°. on place le corps solide sur le plateau qui soutient le vase, et l'on ajoute de l'autre côté le poids nécessaire pour rétablir l'équili-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

bre : ce poids sera celui du corps dans l'air. (Pour plus d'exactitude, cette opération devrait être effectuée dans le vide comme nous l'avons dit); 3°. on introduit le corps dans le vase qui contient l'eau; ce vase étant toujours placé sur le même plateau et le second plateau contenant les poids qu'on y a mis précédemment, on sera alors obligé, pour établir l'équilibre, d'ajouter un nouveau poids du côté du vase, qui sera (166) égal au poids du volume d'eau déplacé par le corps; 4°. l'on divisera le poids du corps par ce dernier poids, et l'on aura le rapport entre la gravité spécifique du corps et celle d'un volume d'eau égal au sien.

168. Lorsqu'on forme une table des pesanteurs spécifiques (telle que celle qui est annexée à cet ouvrage), l'on prend pour terme de comparaison l'eau distillée dont la pesanteur spécifique est représentée par l'unité; de sorte que, pour connaître le le poids d'un volume déterminé d'une substance dont la gravité spécifique est indiquée dans la table, il faut multiplier le nombre mis dans la table à côté de cette substance, par le poids d'un volume égal d'eau; pour cela, il faut connaître préalablement le poids d'une mesure déterminée d'eau distillée.

Un pied cube d'eau distillée pèse. .	70 livres.
Le pouce cube.	5 gros, 13 $\frac{1}{7}$ grains.
Le décimètre cube.	1 kilogramme.
Le centimètre cube.	1 gramme.

169. Ainsi, si l'on veut savoir par exemple le poids d'un pied cube de fer, l'on cherchera dans la table le nombre qui lui correspond; l'on trouvera 7, 8, en multipliant ce nombre par 70, poids d'un pied cube d'eau, l'on aura 546, donc le pied cube de fer pèse 546 livres (ancien poids).

De même veut-on connaître le poids d'un décimètre cube de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cuivre, l'on multipliera le nombre 8,876 qui lui correspond dans la table par 1, et l'on aura pour résultat que le décimètre cube de cuivre pèse 8 kilogrammes, 876 grammes.

170. Le rapport de la gravité spécifique de l'eau distillée à la pesanteur spécifique d'une autre substance, varie suivant la température : voilà pourquoi avant de se servir de la balance hydrostatique, il est bon d'observer les degrés de température. Pour rapporter ensuite les résultats des expériences faites, à une autre température quelconque, il faut connaître les lois des dilatations des diverses substances.

171. Des expériences faites par Gay-Lussac, et quelques autres physiciens distingués, démontrent que chaque degré de température donne à peu près la même augmentation de volume, et que pour 100 degrés de température du thermomètre centigrade,

L'eau se dilate de.	0,037000
L'alcohol..	0,087000
Le verre blanc.	0,000830
Le mercure.	0,001650
Le fer.	0,001258
Le cuivre	0,001700

On choisit ordinairement la température de 18 degrés du thermomètre centigrade pour effectuer les expériences relatives à la détermination des gravités spécifiques.

172. Quand il s'agit de déterminer la pesanteur spécifique des liquides, on peut encore se servir de la balance hydrostatique; on renferme alors le liquide, que l'on veut soumettre à l'expérience, dans un vase dont on connaît le poids; on le pèse dans l'air (ou mieux dans le vide); puis on le submerge dans l'eau, de la manière indiquée (167).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On peut aussi employer le moyen suivant; on prend un flacon, dont on cherchera successivement le poids, vide, plein d'eau, et rempli du liquide que l'on veut soumettre à l'expérience. Soient p, p', p'' les poids qui correspondront à ces trois déterminations; $p'-p$ est le poids de l'eau; $p''-p$ est celui du liquide, et le rapport des pesanteurs spécifiques est

$$\frac{p''-p}{p'-p}.$$

173. L'*aréomètre* est un instrument à l'aide duquel on peut déterminer la pesanteur spécifique des liquides (Pl. II, fig. 7). Il est en général composé d'un globe de verre A, surmonté d'un tube B, et portant un poids F à sa partie inférieure. Lorsque cet instrument est destiné à des opérations qui n'exigent point une grande exactitude, le tube de l'aréomètre porte un certain nombre de divisions, au moyen desquelles on reconnaît qu'un liquide est plus dense qu'un autre; mais la graduation de ces instrumens tels qu'on les trouve ordinairement, n'indique pas précisément de combien la densité du premier surpasse celle du second.

174. Mais lorsqu'on veut, au moyen de l'aréomètre, déterminer rigoureusement le rapport des pesanteurs de deux fluides, alors on place à la partie supérieure du tube un petit plateau C sur lequel on puisse placer des poids, et on trace sur le tube un trait qui indique le degré d'immersion constante qu'il faut faire prendre à l'instrument; de manière que, pour s'en servir, il suffit de placer sur le plateau autant de petits poids qu'il en faut pour que l'aréomètre s'enfonce jusqu'au trait marqué.

175. Ce dernier aréomètre déplace toujours un volume égal de liquide; ainsi les pesanteurs spécifiques seront proportionnelles aux poids de l'instrument dans les diverses expériences.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Soient P', P les pesanteurs spécifiques de deux fluides; v le volume que l'instrument déplace dans l'une et dans l'autre ; p et $p \pm p'$ les poids de l'instrument, nécessaires pour le faire immerger d'une même quantité, l'on aura

$$p = Pv \text{ et } p \pm p' = P'v\,;$$

ainsi

$$\frac{P'}{P} = \frac{p \pm p'}{p}.$$

176. C'est par la détermination des pesanteurs spécifiques de divers métaux qu'Archimède a pu résoudre le fameux problème proposé par Hiéron, roi de Syracuse. Il s'agissait de reconnaître si sa couronne était composée d'or pur, ou d'un mélange d'or et d'argent, et cela sans l'endommager aucunement.

Supposons que P et P' indiquent les pesanteurs spécifiques de l'or et de l'argent, que p, p' indique le poids du mélange des deux métaux dans le vide et dans l'eau, et que x soit le poids de l'or contenu dans la couronne.

Le poids de l'eau que x déplacerait sera égal à $\frac{x}{P}$, et celui qui serait déplacé par l'argent $\frac{p-x}{P'}$; p', poids du mélange dans leau, doit être égal à la somme de $\frac{x}{P}$ et de $\frac{p-x}{P'}$;
donc

$$p' = \frac{x}{P} + \frac{p-x}{P'}, \text{ et } x = \frac{P(p - p'P')}{P - P'}.$$

Sil n'y avait eu que de l'or on aurait eu $x = p$, et $P = \frac{p}{p'}$.

Des liquides contenus dans des vases communiquant entre eux.

177. Lorsqu'un liquide est en équilibre dans un vase, ouvert à sa partie supérieure, il faut que sa surface libre soit de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

niveau, et que les préssions soient nulles à cette surface. Mais quand un liquide homogène est en équilibre dans plusieurs vases communiquant entre eux, dont chacun est ouvert dans sa partie supérieure, il faudra que le fluide s'élève à la même hauteur, et qu'il ait le même niveau dans tous ces vases. En effet, s'il y avait un vase dans lequel le fluide s'élevât à une plus grande hauteur que dans les autres, la pression ne saurait être nulle à la surface libre du fluide dans ceux-ci, et elle y serait proportionnelle à la distance de cette surface au niveau le plus élevé, de manière que l'équilibre ne pourrait subsister, à moins que le vase dans lequel le liquide est à une plus grande hauteur, fût seul ouvert par le haut, et que tous les autres fussent fermés à la surface supérieure du liquide.

178. Soient (Pl. II, fig. 8), ABC, DEF, des vases communiquant entre eux, contenant de l'eau, dont les surfaces mm, nn, doivent se trouver de niveau; versons dans ABC, au-dessus de l'eau, un autre fluide, dont la densité soit δ' et dans DEF également un fluide dont la densité soit δ''.

La pression que le nouveau fluide exercera sur la surface mm de l'eau, sera égale à $\delta' a h'$ (a étant cette surface, et h' la hauteur de la colonne du fluide superposé à l'eau); de même la pression exercée sur la surface nn sera égale à $\delta'' a' h''$; or, pour que ces pressions ne troublent point l'équilibre de l'eau, il faut qu'elles soient entre elles comme les surfaces a et a'; c'est-à-dire que

$$\delta' a h' : \delta'' a' h'' = a : a',$$

ainsi

$$\delta' a a' h' = \delta'' a a' h'', \text{ et } \delta' h' = \delta'' h'';$$

donc

$$\delta : \delta'' = h'' : h'.$$

Il faut donc que *les hauteurs des deux fluides au-dessus du*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

niveau primitif soient réciproquement proportionnelles à leurs densités.

179. Par la même raison, si dans un nombre quelconque de vases communiquant entre eux qui contiennent de l'eau en équilibre, l'on verse à la fois dans chaque vase, au-dessus de l'eau, des fluides de diverses densités, il faut, pour que ces fluides n'altèrent point l'équilibre de l'eau, que les produits de leurs hauteurs verticales par leurs densités respectives, soient égaux dans tous les vases.

180. On déduit du principe que nous venons d'exposer, que si ayant deux vases communiquant entre eux (Pl. II, fig. 8), lesquels contiennent de l'eau en équilibre, l'on place sur la surface mm de l'eau, dans l'un des deux une paroi mobile susceptible de soutenir un poids, et que dans l'autre vase on verse, sur la surface de niveau nn, une colonne d'un nouveau fluide, on pourra toujours établir l'équilibre entre cette colonne et le poids (quelque grand qu'il soit) posé sur la paroi mobile, en donnant à cette colonne une hauteur convenable; mais si l'on place sur la paroi mobile un poids sans verser un nouveau fluide sur la surface nn, dans ce cas l'eau devra s'élever au-dessus de cette surface, en vertu de la pression du poids jusqu'à une hauteur nl qu'il s'agit de déterminer.

Nommons A l'aire de la surface mm; a, l'aire de la surface; nn; h, la hauteur nl; δ, la densité de l'eau; g, sa gravité; et P, le poids posé au-dessus de la surface mm. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la pression exercée par le poids P soit à la pression exercée par la colonne d'eau, dont la hauteur est nl, comme l'aire A de la surface mm, sur lequel le poids repose, est à l'aire de la surface nn; mais la pression de la colonne d'eau nl est égale au produit δgah, donc

$$P : \delta gah = A : a, \text{ et } P = \delta gAh.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

181. Si ensuite l'on ajoutait sur la paroi mobile au poids P un nouveau poids t inconnu qu'on veut déterminer, la superposition de ce poids fera abaisser le niveau mm d'une quantité que nous désignerons par y, et fera en même temps élever le niveau l d'une quantité x, de manière que la hauteur à laquelle parviendra l'eau au-dessus du niveau primitif nn sera égale à $x+y$; pour qu'il y ait équilibre, il faudra conséquemment que

$$P+t=\delta g A\,(x+y);$$

mais à cause de l'incompressibilité de l'eau, il faut que

$$y:x=a:A;$$

c'est-à-dire, il faut que l'abaissement de l'eau dans le premier vase soit à son élévation correspondante dans l'autre, en raison inverse des surfaces A et a; ainsi l'on aura $Ay=ax$, et

$$P+t=\delta g\,(A+a)\,x,$$

d'où il résulte que la valeur du poids t sera déterminée lorsqu'on aura mesuré la hauteur x.

182. Par le simple moyen de deux tuyaux de différens diamètres communiquant entre eux, on peut faire, avec un petit filet d'eau équilibre à un poids énorme. Une ingénieuse application en a été faite à de grandes balances destinées à peser la charge des grosses voitures.

183. Lorsque la pression atmosphérique s'exerce librement sur les surfaces de l'eau dans deux ou plusieurs vases communiquant entre eux, il est évident que cette pression (qui est partout uniforme et proportionnelle aux surfaces sur lesquelles elle agit) ne doit nullement troubler l'équilibre. Mais il n'en est pas de même toutes les fois que la pression diminue, ou cesse sur une des surfaces, tandis qu'elle continue à s'exercer avec la même

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

intensité sur les autres surfaces; dans ce cas, l'équilibre est rompu, et le liquide s'élève dans le vase où la pression est moindre ou nulle.

184. Soient les deux vases communiquant entre eux *ABC* et *DEF* (Pl. II, fig. 9) qui contiennent un liquide en équilibre, dont les surfaces, de niveau dans les deux vases, sont indiquées par les lignes *mm* et *nn*. Supposons qu'après avoir extrait l'air contenu dans le vase *DEF*, on ferme exactement sa partie supérieure, alors il est évident que la pression exercée par l'air sur *mm*, n'étant plus contre-balancée par une pression égale et contraire sur la surface *nn* de l'autre vase, l'équilibre sera rompu, et le liquide devra s'abaisser dans le premier vase, et s'élever en même temps dans le second; nommons h la hauteur à laquelle s'élèvera le liquide en *DEF* au-dessus du niveau primitif *nn*; a, l'aire de la surface *nn*; A, celle de la surface *mm*; et p, la pression atmosphérique. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que p soit égale à la pression que la colonne de liquide, dont la hauteur est h, exerce sur la surface *nn*; or, cette pression est indiquée par δgha (δ étant la densité du liquide, et g la gravité); donc $p = \delta gha$.

185. On voit 1°. que cette pression p ne dépend nullement de l'étendue de la surface A sur laquelle elle s'exerce, ni de la forme des vases qui contiennent le liquide.

2°. La densité de l'air étant la même, mais les densités de deux liquides soumis à sa pression étant différentes, nous aurons $\delta gha = \delta' gh'a$, et $\delta : \delta' = h' : h$; c'est-à-dire, que *l'élévation de deux liquides, en vertu de la pression atmosphérique non contre-balancée, est en raison inverse de leur densité.*

186. Ainsi, sachant que l'élévation de l'eau due à la pression atmosphérique est d'environ 10 mètres et 4 décimètres, on pourra, au moyen des tables des pesanteurs spécifiques des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

divers liquides, déterminer l'élévation de chacun d'eux due à la même cause.

187. La construction des diverses pompes aspirantes est fondée sur le principe de l'élévation du liquide dans des vases qui communiquent entre eux d'une manière quelconque, produite par la pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface du liquide dans l'un, et qui n'est point contre-balancée dans un autre.

188. Le baromètre est une application du même principe, ainsi que le siphon dont on se sert pour transvaser les liquides.

Ce dernier instrument, aussi simple qu'utile, consiste dans un tuyau recourbé, dont une branche est plus longue que l'autre. On plonge la branche la plus courte dans le liquide contenu dans le vase que l'on veut vider, puis on aspire l'air contenu dans l'autre branche; et aussitôt que cet air est expulsé, le liquide remplit le siphon, et il s'établit un écoulement par l'extrémité de la longue branche, qui dure jusqu'à ce que l'extrémité de la courte branche cesse de plonger dans le liquide.

189. Cet effet est facile à concevoir. Soit (Pl. II, fig. 10) *MN* un siphon dont la branche *M* est plongée dans le liquide contenu dans le vase *A*, et dont le niveau est indiqué par la ligne *nn*. Il est évident que si l'on extrait l'air contenu dans le siphon, le liquide montera aussitôt jusqu'au sommet *S* du siphon, pourvu que le point *S* ne soit point à une hauteur au-dessus du niveau *nn*, qui surpasse celle à laquelle la densité du liquide lui permet de parvenir, en vertu de la pression de l'air exercée sur la surface *nn*, et non contre-balancée dans le siphon. Parvenu au point *S*, le liquide redescend par la longue branche *N*, et s'écoule par son extrémité.

190. L'écoulement ne pourrait avoir lieu si l'extrémité *l* de la branche *N* du siphon se trouvait au même niveau que la surface *nn*, ou au-dessus de ce niveau; car lorsque la branche

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

N est plus basse que ce niveau, l'écoulement est continu, parce que la pression que l'air exerce à l'extrémité *l* de cette branche n'est point en équilibre avec la pression correspondante sur *nn*, car elle est surpassée par l'action d'une force étrangère que l'autre n'éprouve point, et cette force est due à la différence des deux colonnes d'eau superposées aux surfaces *nn* et *l*; or, il est évident, 1°. que l'équilibre aura lieu si les longueurs de ces deux colonnes sont égales; 2°. que la pression de l'air à l'extrémité *l* du siphon sera supérieure à la pression sur *nn*, lorsque *l* sera plus élevée que *nn*; de sorte que dans ce cas, non-seulement l'écoulement n'aura point lieu, mais le liquide que le siphon contiendra sera obligé de rétrogader et de retomber dans le vase *A*.

De la force élastique des fluides aériformes.

191. La force élastique des fluides aériformes se mesure à l'aide d'un instrument nommé *manomètre*.

Le manomètre est une espèce de baromètre dont la branche ouverte communique dans un vaisseau fermé dans lequel on place le fluide dont on veut connaître l'élasticité.

M. Gay-Lussac a fait une suite d'expériences très-importantes, dont l'objet était de déterminer les lois des dilatations des fluides aériformes. Voici les principaux résultats qu'il en déduit : 1°. la densité d'un fluide élastique, soumis successivement à diverses pressions, croît dans le même rapport que les pressions, et la force élastique est toujours proportionnelle à la densité, quand la pression ne varie pas.

2°. Tous les gaz se dilatent uniformément dans l'intervalle de la température zéro à celle de 100 degrés du thermomètre centigrade.

3°. La dilatation due à un même accroissement de tempé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rature est exactement la même pour tous les gaz, vapeurs, ou mélanges de gaz et de vapeurs.

4°. Le volume du gaz à la température de zéro étant pris pour unité, cette dilatation commune est de 0,00375 pour chaque degré de thermomètre; de sorte qu'à la température x, ce volume sera exprimé par $1 + (0,00375)\,x$.

192. Si l'on connaît la force élastique d'un fluide, c'est-à-dire la pression qu'il exerce sur une surface déterminée à la température zéro, il sera facile de déterminer la force élastique du même fluide rapportée à une température désignée par un nombre x de degrés du thermomètre centigrade; car, en nommant f la force qui correspond à la température zéro, et F celle qui correspond à la température x, l'on aura

$$F = f[1 + (0,00375)\,x].$$

En supposant que les forces élastiques d'un même fluide croissent dans le même rapport que les températures, et qu'à températures égales les densités soient les mêmes, cette dernière supposition peut être admise sans erreur sensible dans les calculs de la force élastique des fluides aériformes employés comme moteurs de machine.

193. A l'égard de l'air atmosphérique, plusieurs causes, indépendamment de la température, tendent à faire varier sa densité : tels sont les vents, la quantité de vapeurs suspendues dans l'atmosphère, etc; et cette densité diminuant au fur et à mesure que l'on monte, c'est-à-dire que l'on s'élève au-dessus du niveau de la mer, elle fournit le moyen de mesurer par approximation la hauteur des montagnes. Cet objet, quoique fort intéressant, étant étranger à notre ouvrage, nous ne nous en occuperons pas; les lecteurs qui voudraient s'en occuper doivent consulter les ouvrages de Laplace, de Ramond, de Biot et de Poisson.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE QUATRIÈME.

Hydrodynamique.

ARTICLE PREMIER.

Mouvement des liquides dans des tuyaux et dans des vases.

194. Soit (Pl. II, fig. 11) $ABCD$ un vase ayant à son extrémité un orifice NN, par lequel s'échappe un liquide contenu dans le vase. On suppose que le fluide soit divisé en une infinité de tranches perpendiculaires à l'axe XZ du vase ; et que dans le mouvement du fluide ces tranches conservent leur parallélisme, depuis la surface supérieure du fluide jusqu'à l'approche de l'orifice, auprès duquel l'expérience a démontré qu'il existe un espace EE en forme d'entonnoir, dans lequel le liquide est stagnant.

Nommons
- a l'aire de l'orifice NN.
- A l'aire de la section MM, perpendiculaire à l'axe XZ.
- b l'angle formé par l'axe XZ et la verticale XT.
- h la distance de l'orifice à la surface supérieure du liquide mesuré sur l'axe XZ.
- z la distance de la section MM au point Z de l'axe.
- v la vitesse de la tranche MM.
- u la vitesse du liquide à l'orifice NN.
- g la vitesse que la pesanteur communique au bout de l'unité de temps.
- t le temps.
- δ la densité du liquide.
- p la pression de la section MM dans le sens de l'axe XZ.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cela posé, faisons un section mm parallèle et infiniment rapprochée de MM; le volume de la tranche comprise entre les sections MM et mm sera égal à Adz, et sa masse à δAdz. Deux puissances agissent simultanément sur cette masse : 1°. la pesanteur qui la sollicite à descendre vers l'orifice NN; 2°. l'excès de la pression que le liquide environnant exerce sur les deux faces de la tranche $MM\,mm$, du haut en bas et du bas en haut.

L'action exercée par la pesanteur dans l'unité de temps est égale à

$$g\delta Adz \ Cos.\ b.$$

Celle due à la différence des deux pressions dans le sens de l'axe, sera

$$(p + dp)\,A - pA \text{ ou } Adp.$$

Les deux forces $g\delta Adz\ Cos.\ b$, et Adp agissant en sens contraire, leur résultante sera

$$g\delta Adz\ Cos.\ b - Adp\,;$$

si l'on divise cette quantité par la masse δAdz, on aura la force accélératrice, qui sera

$$\frac{g\delta Adz\ Cos.\ b - Adp}{\delta Adz}, \text{ ou bien } \frac{g\delta.dz\ Cos.\ b - dp}{\delta dz}.$$

Les molécules comprises dans la section MM emploient un instant dt à parcourir l'espace dz, c'est-à-dire à parvenir en mm. Or, la force accélératrice est égale à la vitesse divisée par le temps (94) ; donc, nommant φ cette force, nous aurons

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{ddz}{dt^2},$$

(dt étant supposé constant) ; conséquemment

$$\frac{ddz}{dt^2} = \frac{g\delta.dz\ Cos.\ b - dp}{\delta\,.\,dz}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le volume de liquide qui s'écoule pendant un temps quelconque par l'orifice *NN*, doit être évidemment égal à celui qui s'écoule en même temps par la section *MM*; mais le volume de liquide qui s'écoule pendant un instant par l'orifice est exprimé par *audt*, et celui qui s'écoule par *MM* est égal à *Adz*; donc

$$au.dt = A.dz;\ dz = \frac{audt}{A};\ \text{et } ddz = \frac{adudt}{A} - \frac{audAdt}{A^2};$$

substituant cette valeur dans l'équation

$$\frac{ddz}{dt^2} = \frac{g\delta.dz\,Cos.b - dp}{\delta.dz},$$

l'on aura

$$\left(\frac{\delta adu}{A} - \frac{\delta audA}{A^2}\right)\frac{dz}{dt} = g\delta dz\ Cos.\ b - dp.$$

L'équation $audt = Adz$ donne $\frac{dz}{dt} = \frac{au}{A}$; donc, en substituant cette valeur et faisant les réductions convenables, l'on aura

$$\frac{\delta adu}{dt} \cdot \frac{dz}{A} - \frac{\delta a^2u^2dA}{A^3} = g\delta dz\ Cos.\ b - dp;$$

Si on intègre, en supposant u constante pour un instant déterminé, on aura

$$p = g\delta z\ Cos.\ b - \frac{\delta a^2u^2}{2A^2} - \frac{\delta adu}{dt}\int\frac{dz}{A} + C.$$

Supposant $z = h$; $A = a$; et faisons $\delta = 1$, et nommons φ l'intégrale $\int\frac{dz}{A}$ prise dans toute l'étendue du fluide.

$$C = p - gh\ Cos.\ b + \tfrac{1}{2}u^2 + \frac{a\varphi du}{dt};$$

de sorte que

$$g\ Cos.\ b(z - h) + \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)\tfrac{1}{2}u^2 + \left(\varphi - \int\frac{dz}{A}\right)\frac{adu}{dt} = 0;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à la tranche supérieure $z = 0$, $\frac{\int dz}{A} = 0$, et la formule précédente se réduit à

$$-g\ Cos.\ b\ .\ h + \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)\tfrac{1}{2}u^2 + \frac{\varphi a du}{dt} = 0\ ;$$

mais l'équation $audt = Adz$ donne $dt = \frac{Adz}{au}$, l'on aura donc

$$-gAh\ Cos.\ bdz + \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)\tfrac{1}{2}Au^2dz + \varphi a^2udu = 0;$$

Nommons α la surface de la tranche élémentaire supérieure, dz' son épaisseur :

$$\alpha dz' = Adz\ ,\ \text{et}\ dz = \frac{\alpha dz'}{A}:$$

substituant cette valeur, l'on aura

$$-g\alpha h\ Cos.\ bdz' + \left(1 - \frac{a^2}{\alpha^2}\right)\tfrac{1}{2}\alpha u^2dz' + \varphi a^2udu = 0.$$

195. Si le vase était vertical, et conséquemment l'orifice horizontal, l'on aurait $Cos.\ b = 1$, et

$$-g\alpha hdz' + \left(1 - \frac{a^2}{\alpha^2}\right)\tfrac{1}{2}\alpha u^2dz' + \varphi a^2udu = 0\ ;$$

Si l'on suppose l'orifice a infiniment petit, l'on peut négliger tous les termes dans lesquels a est contenu : ainsi l'équation précédente se réduit à

$$-g\alpha hdz' + \tfrac{1}{2}\alpha u^2dz' = 0,$$

d'où l'on déduit que

$$u = \sqrt{2gh}.$$

196. On doit observer que gh exprime le poids d'un prisme de fluide qui aurait l'unité de surface pour base, et h pour hauteur; et que cette quantité gh exprime conséquemment la pression que le fluide exercerait sur l'unité de surface de l'orifice (supposé fermé). Mais toutes les fois que la hauteur h de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

surface supérieure d'un liquide, au-dessus d'une surface infiniment petite, est la même, nous savons, par les principes de l'hydrostatique, que la pression de la surface est aussi la même, quelle que soit son inclinaison; ainsi $\sqrt{2gh}$ *sera la vitesse du liquide qui sortira d'un orifice infiniment petit sous une hauteur* h, *quelle que soit l'inclinaison de cet orifice.*

Mais $\sqrt{2gh}$ exprime la vitesse qu'acquerrait un corps grave en tombant d'une hauteur h : donc *un liquide qui s'écoule par un orifice infiniment petit relativement à une section horizontale quelconque du vase, quelque soit d'ailleurs la forme et la position de cet orifice, sort avec une vitesse due à la hauteur de la surface supérieure du fluide, au-dessus de l'orifice.*

197. Il résulte de ce théorème que la vitesse d'un liquide jaillissant par un petit orifice doit le faire remonter à la même hauteur, s'il est dirigé convenablement (en faisant abstraction de la résistance de l'air).

198. Nommons s la surface d'un petit orifice : le volume d'eau qui s'en écoulera dans un temps dt sera $sdt\sqrt{2gh}$; on sait que $g = 9{,}808$; donc le volume Q de liquide qui s'écoulera dans un temps donné t, la hauteur h étant constante pendant toute la durée de l'écoulement, sera

$$Q = st\sqrt{h \times 19{,}616}$$

Si l'orifice s est un cercle dont le diamètre soit a,

$$s = 0{,}7853982a^2, \text{ et } Q = 0{,}7853982a^2t\sqrt{h \times 19{,}616}.$$

L'équation $Q = st\sqrt{2gh}$ renferme quatre quantités : 1°. Q, volume d'eau; 2°. s, surface de l'orifice; 3°. h, hauteur de la surface supérieure du liquide au-dessus de l'orifice; 4°. t,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

temps de l'écoulement. On pourra déterminer l'une d'elles d'après la connaissance des trois autres; ainsi on déduit de l'équation $Q = st\sqrt{2gh}$, les équations suivantes :

$$s = \frac{Q}{t\sqrt{2gh}};\ t = \frac{Q}{s\sqrt{2gh}};\ h = \frac{Q^2}{2s^2t^2g}.$$

199. *Les quantités* Q, Q' *de liqueurs qui sortent dans le même temps par deux orifices* s, s', *sous des hauteurs ou charges constantes* h, h', *sont entre elles comme les produits des orifices par les racines carrées des hauteurs;* car on a les deux équations

$$Q = st\sqrt{2hg};\ Q' = s't\sqrt{2h'g},$$

lesquelles donnent

$$Q : Q' = st\sqrt{2hg} : s't\sqrt{2h'g} = s\sqrt{h} : s'\sqrt{h'};$$

ainsi, connaissant par l'expérience ce qui est relatif à l'un des écoulemens, on pourra, au moyen de cette proportion, déterminer ce qui est relatif à l'autre.

**200. Lorsque le liquide qui s'écoule n'est point remplacé, la vitesse de l'écoulement diminue successivement. Soit z la hauteur dont le niveau du liquide se sera abaissé au bout du temps t; $h - z$ sera la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice, au bout du temps t, et la vitesse à l'orifice sera $\sqrt{2g(h-z)}$: cette vitesse peut être supposée constante pendant le temps dt, pendant lequel il s'écoulera une quantité de fluide égale à $sdt\sqrt{2g(h-z)}$; mais pendant cet écoulement, la surface supérieure du fluide, que nous nommerons S, s'est abaissée de dz; de manière que le volume du liquide contenu dans le vase est diminué de Sdz; mais cette quantité doit être évidemment

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

égale à $sdt\sqrt{2g(h-z)}$; donc

$$Sdz = sdt\sqrt{2g(h-z)}, \text{ et } dt = \frac{Sdz}{s\sqrt{2g(h-z)}},$$

formule qu'il faudra intégrer pour connaître les abaissemens successifs du fluide dans un vase de forme donnée.

201. La quantité Q, déterminée par la théorie que nous venons d'exposer est toujours moindre que celle qui résulte de l'expérience, à cause de la contraction que le fluide éprouve à la sortie du vase. Cette contraction dépend des directions que prennent les molécules quand elles s'approchent de l'orifice, et d'après lesquelles elles concourent toutes vers cet orifice, ce qui produit un rétrécissement qui subsiste jusqu'à une certaine distance de l'orifice; de manière que si l'on suppose cet orifice circulaire, il diminue progressivement de diamètre, et prend une forme conique jusqu'à une distance de l'orifice égale à environ une demi-diamètre.

202. L'expérience a démontré que la différence entre la dépense de liquide par un orifice très-petit, trouvée par le calcul, d'avec celle qui a lieu effectivement, est une quantité constante égale à 0,62, et que cette quantité ne varie ni avec la largeur de l'orifice, ni avec la hauteur du niveau. Ainsi la dépense effective Q devra être exprimé par $0,62 \cdot st\sqrt{2gh}$.

203. On peut, dans la pratique, se servir de cette formule pour calculer la dépense des orifices petits en comparaison de la paroi du vase dans laquelle ils sont percés; il résulte des expériences de Bossut que les dépenses calculées s'accordent avec les dépenses effectives, quand le rapport de l'aire de l'orifice à celle de la paroi n'est pas plus grand que $\frac{1}{334}$.

204. Voici les résultats importans des belles expériences de Bossut sur l'écoulement des liquides. Les détails de toutes ces expériences se trouvent exposés avec beaucoup d'ordre et de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

clarté dans l'excellent ouvrage intitulé : *Traité théorique et expérimental d'hydrodynamique, par Charles Bossut.*

PREMIÈRE TABLE.

HAUTEUR CONSTANTE DE L'EAU au-dessus de chaque orifice.	GRANDEUR et forme DE L'ORIFICE.	NOMBRE DE POUCES CUBES D'EAU fournis dans une minute.	*OBSERVATIONS.*
11 pieds 8 pouc. 10 l.	Circulaire de 6 lig. de diamètre.	2311	Le réservoir dont on s'est servi avait la forme d'un parallélipipède rectangle vertical, dont la hauteur était d'environ 12 pieds, et la base un carré de 3 pieds sur chaque côté mesurés en dedans. Les orifices étaient percés dans des plaques de cuivre dont l'épaisseur était d'environ $\frac{1}{2}$ ligne.
Idem.	Circulaire de 1 pouce de diamètre.	9281	
Idem.	Circulaire de 2 pouc. de diamètre.	37203	
Idem.	Rectangulaire de 1 pouce sur 3 lignes. . .	2933	
Idem.	Carrée de 1 pouce de côté.	11817	
Idem.	Carrée de 2 pouces de côté.	47361	
9 pieds.	Circulaire de 6 lig. de diamètre.	2018	
Idem.	Circulaire de 1 pouc. de diamètre.	8135	
4 pieds.	Circulaire de 6 lig. de diamètre.	1353	
Idem.	Circulaire de 1 pouc. de diamètre.	5436	

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

DEUXIÈME TABLE.

HAUTEUR constante de l'eau au-dessus de chaque orifice.	GRANDEUR et forme de l'orifice.	HAUTEUR d'un tuyau d'ajutage adapté à l'orifice.	DIAMÈTRE du tuyau d'ajutage.	NOMBRE de pouces d'eau dépensés en une minute.	OBSERVATIONS.
11 pieds 8 po. 10 l.	Circul. de 1 pouce de diamètre. . . .	48 lig.	1 pouce.	12274	L'eau sortait à plein tuyau.
Idem.	*Idem*.	24	1 po.	12188	
Idem	*Idem*.	18	1 po.	12168	
3 pieds 10 pouces.	Circulaire de 6 lign. de diamètre . . .	24	6 lign.	1689	
Idem.	Circulaire de 10 lignes de diamètre.	24	10 lign.	4703	
2 pieds	Circulaire de 6 lign. de diamètre.	24	6 lign.	1222	
Idem.	Circulaire de 10 lignes de diamètre.	24	10 lign.	3402	

205. Il résulte de toutes ces expériences et de quelques autres, que

1°. Les dépenses faites en temps égaux par différentes ouvertures sous une même hauteur du réservoir, sont entre elles, à peu de chose près, comme les aires des ouvertures;

2°. Les dépenses faites en temps égaux par différentes ouvertures, sous différentes hauteurs de réservoir, sont entre elles comme les racines carrées des hauteurs correspondantes de l'eau dans le réservoir au-dessus des mêmes ouvertures;

3°. En général, les quantités d'eau dépensées durant le même temps par différentes ouvertures, sous différentes hauteurs dans le réservoir, sont entre elles en raison composée des aires des ouvertures et des racines carrées des hauteurs des réservoirs;

4°. De plusieurs orifices semblables, les petits, à cause du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

frottement, donnent moins à proportion que les grands sous une même hauteur de réservoir;

5°. De plusieurs orifices d'égale surface, celui dont le périmètre est le moindre doit, à cause du frottement, donner plus d'eau que les autres sous une même hauteur de réservoir. Ainsi, les orifices circulaires sont à cet égard les plus avantageux de tous;

6°. Sous différentes hauteurs de réservoir, un même tuyau donne plus à proportion pour les grandes hauteurs que pour les petites;

7°. La hauteur du réservoir et l'orifice de sortie étant les mêmes, la dépense par un tuyau d'ajutage est à la dépense par une paroi mince comme 13 est à 10;

8°. De tous les tuyaux d'ajutage qu'on peut appliquer sur un orifice extérieur donné, dans la vue de se procurer la plus grande quantité d'eau qu'il est possible en un temps donné, le plus avantageux est celui qui a la forme que la veine fluide prend naturellement;

9°. La forme de la veine fluide contractée est celle d'un *conoïde* dont la hauteur est égale à peu près au demi-diamètre de l'orifice, et dont les diamètres des deux bases sont entre eux comme 8 est à 5 environ.

Il résulte de ce que nous venons de dire que lorsqu'il s'agit de dériver une certaine quantité d'eau d'une rivière, d'un aquéduc, etc., par un canal ou un tuyau latéral, il faut, pour obtenir l'écoulement le plus avantageux, donner à la partie antérieure du canal ou du tuyau la forme que prend la veine fluide contractée;

10°. Les dépenses par différens tuyaux d'ajutage, sous une même hauteur d'eau dans le réservoir, sont sensiblement proportionnelles aux aires des orifices ou aux carrés de leurs diamètres;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

11°. Les dépenses faites pendant le même temps par différens tuyaux d'ajutage, sous différentes hauteurs dans le réservoir, sont entre elles, à peu de chose près, comme les produits des carrés des diamètres des tuyaux par les racines carrées des hauteurs des réservoirs.

206. Dans les écoulemens des vases entretenus pleins, les dépenses par de petits orifices sont indépendantes de la figure de ces vases; il n'entre dans leur expression que la grandeur même de l'orifice, le temps de l'écoulement et la hauteur du fluide dans le réservoir. Mais pour l'écoulement des vases qui se vident sans recevoir de nouvelle eau, la formule

$$Sdz = sdt\sqrt{2g(h-z)} \; (200),$$

indique que la figure du vase est alors un élément essentiel de la dépense.

207. Il résulte des expériences de Bossut que, si l'on compare ensemble les écoulemens de deux vases prismatiques qui se vident, les temps employés par les surfaces des eaux à parcourir des hauteurs données, sont entre eux comme les produits des bases des prismes par les racines carrées des différences des hauteurs primitives et des hauteurs dernières des eaux dans les réservoirs, divisés par les aires des orifices; de sorte que si nous nommons t, t' les temps; A, A' les bases des prismes; a, a' les aires des orifices; H, H' les hauteurs primitives; h, h' les hauteurs dernières, l'on aura

$$t : t' = \frac{A\sqrt{H-h}}{a} : \frac{A'\sqrt{H'-h'}}{a'}.$$

De sorte que, connaissant par l'expérience tout ce qui regarde l'écoulement d'un vase prismatique qui se vide, on déterminera

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par cette proportion tout ce qui regarde l'écoulement d'un autre vase prismatique qui se vide aussi.

208. Bossut a trouvé que dans un réservoir parallélipipède, dans lequel la hauteur de l'eau était de 11 pieds 8 pouces, l'eau sortant par un orifice circulaire d'un pouce de diamètre, la surface supérieure de l'eau s'est abaissée de 4 pieds en 7 minutes 25 $\frac{1}{2}$ secondes.

209. Lorsqu'il s'agit de déterminer l'écoulement des fluides par des orifices verticaux d'une grandeur finie, on doit observer que la vitesse du fluide varie d'une partie de l'orifice à l'autre; mais toutes les molécules qui se trouvent à la même hauteur, ou dans un même trapèze horizontal formé par deux lignes infiniment rapprochées, peuvent être censées avoir la même vitesse, et cette vitesse est supposée due à la hauteur de la chute; c'est-à-dire proportionnelle à la racine carrée de leur distance verticale à la surface supérieure du fluide; cette double hypothèse n'est point exempte de quelque incertitude, mais c'est la seule qui conduise à des formules applicables à la pratique; d'ailleurs l'expérience a prouvé que ces formules donnent, par approximation suffisante, les quantités d'eau écoulées, en y appliquant les corrections exigées par l'effet de la contraction de la veine fluide et par les frottemens (205).

** 210. Soit (Pl. II, fig. 12) AB un vase qui contient de l'eau dont le niveau constant est indiqué par la ligne CC; DED est l'orifice par lequel l'eau doit s'écouler. Traçons la verticale ST, qui passe par le point le plus élevé de l'orifice; et traçons les deux horizontales MM', mm' infiniment rapprochées.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nommons
- EP . . . . x.
- Pp. . . . . dx.
- MM'. . . . . y.
- SE . . . . h'.
- ST. . . . . h.
- Le temps. . . . . t.
- La vitesse que la pesanteur communique au bout d'une seconde. . . . . g.

ydx indique la surface élémentaire du trapèze $Mmm'M'$; la dépense d'eau qui se fera par ce trapèze pendant le temps t, étant celle qui est due à la hauteur Sp, est exprimée par

$$t\, y\, dx \sqrt{2g\,(h'+x)}; \text{ ou } t\sqrt{2g} \times y\, dx \sqrt{h'+x},$$

en intégrant cette quantité, on aura

$$t\sqrt{2g}\left(\int y dx \sqrt{h'+x} + C\right),$$

et cette intégrale indiquera la dépense qui se fait pendant le temps t par la surface MEM'.

** 211. Supposons que l'orifice ait la forme d'un rectangle, dont les bases horizontales sont égales à a; substituant cette valeur au lieu de y, la formule précédente devient

$$t\sqrt{2g}\,\left(\int a dx \sqrt{h'+x} + C\right);$$

en effectuant l'intégration, l'on aura

$$ta\sqrt{2g} \times \tfrac{2}{3}\left[(h'+x)^{\frac{3}{2}} + C\right].$$

La constante C se détermine par la considération, que lorsque $x = o$, la quantité d'eau écoulée est nulle; ainsi, d'après cette

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

supposition, $C = h'^{\frac{1}{2}}$, nommant Q la dépense totale de l'orifice et observant que $x = h - h'$, on aura

$$Q = \tfrac{2}{3}\, ta\sqrt{2g}\,(h^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}).$$

Cette formule est celle qui est employée pour calculer le produit, pendant une seconde, d'un orifice vertical en forme de parallélogramme rectangle, dont deux côtés sont horizontaux et deux autres verticaux, en supposant constante la hauteur de l'eau au-dessus de l'orifice.

212. Puisque la vitesse de toutes les molécules du fluide qui s'écoulent par un orifice horizontal, est supposée due à la hauteur de la chute, il en résulte que la *dépense d'eau en une seconde par un orifice rectangulaire vertical, le niveau étant constant, peut être représentée par le produit d'un segment parabolique par la largeur de l'orifice.*

Soit MM' (Pl. II, fig. 13) la surface de l'eau dans un réservoir $ABCD$; nommons h une hauteur quelconque MF prise au-dessous du niveau MM', v la vitesse qu'acquerrait un corps grave en tombant librement d'une hauteur égale à MF, et g la vitesse que la pesanteur communique à un corps pesant au bout d'une seconde, on aura $v = \sqrt{2gh}$ et $v^2 = 2gh$; si nous regardons v et h comme variables, cette équation appartiendra à une parabole dont le paramètre sera égal $2g = 19^{\text{mèt}}\,616$, et dont le sommet est en M'. Soit $M'IE$ cette parabole, ces diverses ordonnées HI, FG, CE, exprimeront les vitesses correspondantes aux hauteurs $M'H$, $M'F$, $M'C$; ainsi donc, si par les extrémités H, C, supérieure et inférieure de l'orifice l'on mène les ordonnées HI, CE, elles exprimeront les vitesses des molécules liquides au sommet et au bas de l'orifice; de même que toutes les ordonnées intermédiaires indiqueront les vitesses respectives de ces molécules dans toute la hauteur de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'orifice; donc l'aire du segment parabolique *HICE*, multipliée par la largeur de l'orifice, représentera la dépense d'eau que cet orifice produit en une seconde.

213. La mesure que l'on obtient par les moyens que nous venons d'indiquer (en n'oubliant point de faire les corrections exigées par la contraction de la veine fluide et par les frottemens) suffit dans un grand nombre de cas qui n'exigent que des résultats approximatifs; mais lorsqu'il s'agit d'une évaluation rigoureuse exempte de toute incertitude, alors il faut avoir recours à des méthodes expérimentales. Parmi les diverses méthodes proposées, celle de M. de Prony semble mériter la préférence. Nous croyons qu'il ne sera pas superflu d'en donner une description détaillée, après que nous aurons fait connaître le procédé de jaugeage le plus direct. Ce procédé consiste à recueillir immédiatement le produit de la source ou du courant d'eau que l'on veut déterminer dans des récipiens dont les capacités sont déterminées. Cette opération peut s'effectuer de différentes manières suivant les circonstances locales.

214. Si la quantité d'eau est petite, on la reçoit dans des vases mobiles, pourvu que la position de l'orifice permette de les placer dessous, et de les substituer instantanément les uns aux autres.

215. Dans quelques cas, on fait couler l'eau qui sort de l'orifice dans un vaste récipient placé à côté du ruisseau à une hauteur telle que l'eau puisse s'y rendre.

216. Dans d'autres cas, on fait un barrage au bas de la chute, et on élève dans un grand récipient, par des machines hydrauliques, toute l'eau fournie par le ruisseau dans un temps donné.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Méthode pratique de jaugeage, par de Prony (*a*).

217. Dans l'état actuel de nos connaissances sur l'écoulement de l'eau par des orifices, rien de ce qui a été publié sur la contraction de la veine fluide (dit M de Prony) ne peut être appliqué avec certitude à la correction des produits théoriques par les orifices employés pour les jaugeages des courans d'eau; il est donc indispensable, en pareil cas, d'employer des méthodes pratiques, et des appareils qui fournissent immédiatement toutes les données du calcul, en faisant couler l'eau, à travers des pertuis horizontaux ou verticaux.

Il s'agit de déterminer la vitesse moyenne d'une section transversale dont on connaîtrait exactement la surface. La première condition à établir est celle de la stagnation du fluide au-dessus du barrage auquel le pertuis est adapté. Cette stagnation aura sensiblement lieu lorsqu'il existera en amont du barrage une masse d'eau très-considérable, en comparaison de la section d'eau vive du courant; dans le cas contraire, on construira un petit batardeau *A* (Pl. III, fig. 1, 2, 3, 4) à 30 ou 40 mètres du pertuis, et même à une plus grande distance, si on le juge convenable. Deux fossés ou tranchées latérales *B*, *B* seront creusées de chaque côté du canal, tant à leur origine qu'à leur extrémité. On conçoit aisément que les bricoles par lesquelles le courant passera d'un côté à l'autre du batardeau, doivent détruire en presque totalité le mouvement que la section d'eau vive tendrait à propager dans la masse fluide comprise entre le batardeau et le pertuis d'écoulement.

218. Cette première construction, et celle du barrage auquel le pertuis est adapté, étant achevées, il faut attendre que le

(*a*) La description de cette méthode est extraite du mémoire sur le jaugeage des eaux courantes, par de Prony.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fluide soit parvenu entre le batardeau et le pertuis, à une hauteur constante. Pour déterminer cette hauteur, on se servira d'un tuyau *C* de bois recourbé (fig. 3), dont la partie horizontale *h* communiquera avec l'eau, par son extrémité ouverte, entre le batardeau et le pertuis; l'autre partie verticale servira à indiquer la hauteur de l'eau au moyen d'un flotteur qui y sera plongé, et qui portera une tige dont l'extrémité répondra aux graduations d'une échelle tracée sur une règle verticale.

219. Si l'on avait une chute suffisante, on trouverait de l'avantage à faire couler l'eau par un pertuis, ou orifice horizontal. Dans ce cas l'orifice, qui doit être circulaire, serait foré au centre d'un plancher parallélogrammique porté sur quatre traverses, lesquelles seront soutenues elles-mêmes par quatre piquets ou petits pieux plantés aux angles; le barrage sera fait d'ailleurs avec toutes les précautions nécessaires pour le rendre solide et à l'épreuve de l'eau.

L'élévation du pertuis horizontal au-dessus du lit du courant inférieur, permettra de faire une mesure immédiate et précise de la section contractée. Il faudra tenir note exactement du diamètre de cette section, et de la distance du pertuis.

220. Enfin, pour déduire d'une observation directe la vitesse d'écoulement par le pertuis, on fixera dans ce pertuis l'extrémité d'un siphon de tôle ou de fer-blanc, ayant un ou deux centimètres de rayon, dont l'autre extrémité, fixée à un piquet plantée en aval du barrage, portera un tube de verre dans lequel on verra l'extrémité de la colonne de fluide refoulée par l'eau qui agit sur l'autre extrémité de la même colonne.

221. Lorsqu'on n'aura pas une chute telle qu'entre le pertuis horizontal, et le lit inférieur du courant, il y ait une distance égale à environ deux fois le diamètre du pertuis, il sera convenable de faire couler l'eau à travers un orifice vertical, auquel

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

il faudra donner la forme d'un parallélogramme rectangle à base horizontale; mais comme dans ce dernier cas, la forme de la paroi inférieure de la partie du canal qui avoisine le pertuis en amont du barrage, influe sensiblement sur la figure conoïde que le fluide affecte à la sortie du pertuis, il faudra, pour rendre les observations aussi comparables qu'il est possible, donner de la régularité et une forme constante à cette paroi inférieure; c'est à quoi l'on parviendra en adoptant deux parois factices *a*, *a*, en planches (dont on voit le plan fig. 4) qui auront leur origine aux deux côtés verticaux du pertuis, et se termineront contre le rivage.

222. La base du pertuis sera élevée de quelques centimètres au-dessus d'un petit radier que l'on pratiquera en aval du barrage, de manière qu'on puisse mesurer exactement et commodément la section contractée tant dans le sens vertical que dans le sens horizontal.

On fera dans ce cas, comme dans celui du pertuis horizontal, l'observation immédiate de la vitesse à l'aide du siphon; mais il faudra ici employer deux tuyaux ayant leurs extremités inférieures l'un au sommet, et l'autre à la base de l'orifice ; leurs extrémités supérieures seront munies de tubes de verre comme précédemment, soutenues par un piquet planté en aval du barrage.

223. M. de Prony propose un autre moyen de connaître la vitesse moyenne de l'eau à l'orifice ; ce moyen a l'avantage de s'appliquer indistinctement à un orifice quelconque, sans qu'on soit obligé de connaître ni la forme, ni les dimensions de cet orifice, ni la hauteur de l'eau au-dessus de ces diverses parties, et de n'exiger que des calculs très-simples.

224. On adaptera (Pl. III, fig. 1, 2) de petites vannes *VV*, susceptibles d'être fermées instantanément aux extrémités aval

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des tranchées ou rigoles qui conduisent l'eau du courant d'un côté à l'autre du batardeau; d'autres rigoles, qui communiqueront avec celles-ci, pourront amener l'eau en aval du barrage où se trouve le pertuis, et cette communication sera ouverte ou interceptée par de petites vannes *v*, *v*, placées à côté des précédentes.

225. On établira de plus, le long et sur les bords de la partie du canal comprise entre le batardeau et le pertuis, une suite de planches posées horizontalement et de champ, et clouées contre des piquets; il sera bon de glaiser ou de garnir de terre battue le derrière de ces planches : on les placera de telle manière que lorsque l'eau sera parvenue à une élévation constante, leur bord supérieur se trouve à peu près à fleur d'eau, et que la paroi du lit du canal soit (sur quatre ou cinq décimètres de hauteur à partir du niveau de l'eau), composée de plans verticaux, ses sections horizontales devant être, dans cet espace, égales entre elles et faciles à mesurer.

226. Toutes ces dispositions achevées, et la charge d'eau sur l'orifice étant parvenue à un état constant, on fermera subitement les vannes *VV* qui conduisent l'eau du courant d'un côté à l'autre du batardeau. Cette fermeture instantanée pourra s'opérer au moyen de poids dont on chargera les queues des vannes, qui seront tenues élevées par des arrêts susceptibles d'être enlevés d'un coup de marteau à un signal donné; on laissera alors couler cette eau dans le lit inférieur du ruisseau, en levant les vannes *v*, *v*, qui ferment la rigole conduisant à ce lit inférieur. Le fluide contenu entre le batardeau, et le barrage du pertuis qui continuera à s'échapper par ce pertuis, commencera aussitôt à baisser; mais avec un compteur à seconde et les siphons (décrits précédemment) munis de flotteurs et d'échelles divisées avec *verniers*, on observera le temps

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que les extrémités des tiges des flotteurs emploient pour parvenir aux différentes divisions des échelles. On obtiendrait une grande précision en adaptant à chaque flotteur deux tiges qui couleraient dans des anneaux fixés à une planche verticale : les sommets de ces deux tiges seraient unis par une traverse horizontale. On attacherait à cette traverse un petit ressort très-faible, avec une pointe à son extrémité, qu'on pourrait, avec le plus léger effort, faire appuyer contre une bande de papier collé sur la planche, de manière qu'elle y marquât un petit point. L'observateur, occupé à compter les secondes, n'aurait qu'à presser le ressort à chaque 5e. ou 10e. seconde, et mesurerait ensuite à loisir les distances entre les points qu'il aurait marqués.

** 227. Soient t', t'' les deux premiers temps observés à compter de l'instant où les vannes ont été subitement fermées, z', z'' les abaissemens correspondans, t et z un temps et un abaissement quelconque (z commençant à zéro lorsque $t = o$); on aura, par la méthode d'interpolation, les relations suivantes entre t et z.

$$z = \frac{t}{t'' - t'}\left(\frac{t'' - t}{t'}z' - \frac{t' - t}{t''}\right)z'',$$

d'où on déduit par la différenciation

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(t'' - 2t)z'}{(t'' - t')t'} - \frac{(t' - 2t)z''}{(t'' - t')t''};$$

mais v étant la vitesse moyenne à l'orifice, ω l'aire de cet orifice, et S l'aire de la section horizontale de la partie du canal comprise entre le batardeau et le barrage du pertuis, $\omega v dt$ est le prisme élémentaire du fluide qui s'échappe de l'orifice ω pendant l'instant dt, et qui est égal au prisme Sdz dépensé par le réservoir pendant le même instant dt, on a donc à cet instant

$$v = \frac{S}{\omega} \cdot \frac{dz}{dt};$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

substituant dans cette équation, pour $\frac{dz}{dt}$ la valeur ci-dessus, et faisant $t = o$, on a pour calculer la vitesse moyenne à l'orifice, à l'instant où les vannes de communication, entre le ruisseau en amont du batardeau et le réservoir en aval, ont été fermées, l'équation

$$v = \frac{S}{\omega} \cdot \frac{t''^2 z' - t'^2 z''}{(t'' - t')t''t'};$$

d'où on déduit aisément le produit q du courant, pendant l'unité de temps, qui a pour valeur

$$q = \frac{t''^2 z' - t'^2 z''}{(t'' - t')t''t'} S;$$

équation dans laquelle les quantités relatives à l'orifice d'écoulement, et à la charge sur cet orifice, n'entrent point.

Il est facile de s'arranger de manière que $t'' = 2t'$; alors le calcul devient encore plus simple; et on a, en faisant $t' = T$

$$q = \frac{2z' - \frac{1}{2} z''}{T} S.$$

Deux observations de temps et d'abaissement suffisent communément; mais si pour une plus grande exactitude on veut faire plusieurs autres observations qui serviront de comprobation réciproque, dans ce cas on emploie les formules suivantes, que M. de Prony a déduites des formules générales d'interpolation, publiées dans le Journal de l'École Polytechnique (troisième cahier, page 236)

Pour 1 obs. $q = \frac{1}{T} \cdot z' S.$

Pour 2 $q = \frac{1}{T} (2z' - \frac{1}{2} z'') S.$

Pour 3 $q = \frac{1}{T} \left(3z' - 3 \frac{z''}{2} + \frac{z'''}{3}\right) S.$

Pour 4 $q = \frac{1}{T} \left(4z' - 6 \frac{z''}{2} + 4 \frac{z'''}{3} - \frac{z''''}{4}\right) S.$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour 5 $q = \frac{1}{T}\left(5z' - 10\frac{z''}{2} + 10\frac{z'''}{3} - 5\frac{z''''}{4} + \frac{z'''''}{5}\right)S.$

Pour un nombre quelconque n,

$$q = \frac{1}{T}\left(nz' - \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} \cdot \frac{z''}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \cdot \frac{z'''}{3} - \ldots\ldots \pm \frac{z^{(n)}}{n}\right)S.$$

228. Cette méthode de déterminer le produit d'un courant d'eau dispense de recourir à aucune hypothèse, tant sur la loi de l'écoulement par un orifice soit vertical, soit horizontal, que sur la contraction de la veine fluide, pour laquelle on n'a aucun besoin de connaître la forme de l'orifice, de mesurer ses dimensions, et la hauteur de l'eau au-dessus de cet orifice. La section horizontale S du bassin est substituée très-avantageusement à l'aire de l'orifice, en ce que, vu la grandeur de cette section, les erreurs sur son évaluation influent infiniment moins sur le résultat, que les erreurs sur les évaluations de l'aire de l'orifice; et les moyens pour mesurer les abaissemens du fluide, sont plus exacts que ceux qu'on emploie communément.

229. Dans les cas ordinaires qui n'exigent point une exactitude scrupuleuse, on pourra simplifier cette méthode, et la réduire ainsi qu'il suit, pour jauger le produit des ruisseaux, considéré quant à la presque totalité des cas auxquels on aura à l'appliquer. *Choisissez une partie du lit du ruisseau dont on puisse prendre commodément plusieurs profils en travers, la distance ou longueur comprise entre les deux sections extrêmes étant de* 100, 200, *etc. mètres, autant que les localités le permettent. Établissez, au point le plus bas de cette longueur, un barrage avec un pertuis d'écoulement, et, au point le plus haut, une vanne disposée de manière qu'on puisse la fermer instantanément; cette vanne étant maintenue à une ouverture*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fixe, demeurera levée jusqu'à ce que l'eau ait acquis une hauteur constante, en amont du barrage; ce dont on s'assurera en examinant si les flotteurs décrits précédemment sont parfaitement stationnaires. Lorsque cette condition sera obtenue, on fermera instantanément la vanne, de manière que l'eau s'écoule par le pertuis qui est à l'autre extrémité du réservoir, sans se renouveler dans ce réservoir. On observera alors au moyen des flotteurs, les temps correspondans à différens abaissemens de l'eau.

On fera, avant ou après l'observation des abaissemens successifs de l'eau dans le réservoir, un nombre suffisant de profils, en travers du ruisseau, pour évaluer avec exactitude, par les méthodes connues du toisé des solides, les volumes d'eau écoulés qui correspondent à chacun des abaissemens, et il faudra, par conséquent, tracer sur chacun de ces profils la ligne de la plus grande hauteur à laquelle l'eau s'est élevée en amont du pertuis.

D'après toutes ces données, on calculera le produit du ruisseau, en se servant de cette formule,

$$q = \frac{1}{T}\left(nz' - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{z''}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{z'''}{3} - \ldots \pm \frac{z^{(n)}}{n}\right)$$

230. Quelle que soit la méthode que l'on emploie pour jauger les eaux courantes, il ne faut point oublier que les sources qui alimentent les rivières et les ruisseaux, ne donnent presque jamais un produit constant, de sorte que l'on ne peut ordinairement en connaître le produit moyen qu'en répétant les opérations du jaugeage un assez grand nombre de fois dans une année. Il importe aussi de connaître l'état du cours d'eau dans le temps de sécheresse, et de prendre les informations les plus exactes possible, sur la durée moyenne des sécheresses.

231. Le jaugeage d'une rivière ou d'un fleuve exige deux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

opérations : 1°. la détermination du profil ou de la section d'eau vive; 2°. la détermination de la vitesse moyenne.

232. On appelle *section d'eau vive* celle où l'on suppose que l'eau est courante dans tous ses points; elle est ordinairement moindre que la section réelle qui comprend ordinairement des espaces où l'eau est stagnante ou n'a qu'un léger mouvement. Pour avoir la section d'eau vive, il faut choisir les parties du courant où toute l'eau ne peut manquer d'être en mouvement, ou bien il faut déterminer la profondeur à laquelle l'eau cesse de participer au mouvement général du courant. On mesure ordinairement plusieurs profils dont on prend la valeur moyenne, et ces mesures se font par des sondages.

233. La vitesse d'une rivière n'est point uniforme dans une même section ; elle est ordinairement moindre vers le fond et les parois qu'à la surface, et moindre à la surface qu'à une certaine profondeur. On trouve dans l'ouvrage de M. de Prony, intitulé : *Recherches sur le mouvement des eaux courantes*, la formule suivante déduite d'un grand nombre d'expériences et qui indique la vitesse moyenne d'une rivière, d'après la connaissance de la vitesse à la surface. Soient V la vitesse à la surface, U la vitesse moyenne, cette formule indique que $U = 0{,}816458V$, qui est environ $\frac{4}{5}V$.

234. La vitesse à la surface d'une rivière se mesure ordinairement à l'aide d'un flotteur, auquel on fait parcourir (plusieurs fois) un espace dont la longueur est connue.

On se sert aussi quelquefois d'un moulinet très-léger, en fer-blanc, garni de plusieurs ailes, que l'on expose à la percussion du courant. L'on compte le nombre de tours qu'il fait en une ou plusieurs minutes. On multiplie ensuite le nombre des tours par la longueur de la circonférence développée que le moulinet décrit en un tour.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

235. La vitesse à différentes profondeurs se mesure ou à l'aide du quart de *cercle hydraulique*, ou à l'aide du *tube de Pitot*. Le quart de cercle hydraulique n'est autre chose qu'un quart de cercle gradué qu'on place et qu'on maintient dans une position verticale en se servant d'un aplomb, et au sommet de ce cercle est attaché un fil garni d'une petite boule métallique; la déviation plus ou moins grande du fil indique les vitesses diverses. Cet instrument est sujet à plusieurs inconvéniens qui le rendent moins utile que le tube de Pitot perfectionné par Dubuat. Ce n'est autre chose qu'un tube à deux branches, dont l'une horizontale doit être immergée; son orifice, qui est ouvert, doit être opposé directement au courant; l'eau entre dans cette branche et s'élève plus ou moins dans la branche verticale suivant que la vitesse du courant est plus ou moins grande. Un flotteur est placé sur la surface de l'eau dans cette dernière branche, et porte une tige qui correspond à une échelle graduée. Pour diminuer les oscillations de la colonne, Dubuat propose de terminer la partie inférieure recourbée par une surface plane, percée au centre d'un petit trou.

Soit h la hauteur de l'eau dans le tube vertical au-dessus du niveau du courant, la vitesse due à cette hauteur sera déterminée par la formule $V = \sqrt{2gh} = \sqrt{19^{\text{mèt.}}606h} = 4^{\text{mèt.}}429.\sqrt{h}$.

236. L'eau qui sort d'un réservoir pour être dirigée sur la roue d'une machine, ou bien pour servir à d'autres usages doit ordinairement être conduite au lieu de sa destination par des canaux ou par des tuyaux de conduite; le frottement que l'eau y éprouve tend à diminuer la vitesse du liquide.

Les canaux qui conduisent l'eau doivent avoir une certaine pente, pour que l'action de la pesanteur lui restitue de la vitesse à mesure qu'elle est détruite par les résistances que son mouvement éprouve; la pente qu'on leur donne communé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ment varie entre $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{400}$ de leur longueur. L'expérience a démontré que cette dernière pente donne une vitesse d'environ 2000 mètres par heure, et qu'elle suffit pour que l'eau s'écoule facilement, sans cependant dégrader les parois du canal, lorsqu'elles sont en terre. Quelques rivières n'ont pas plus de $\frac{1}{8000}$ de pente.

237. (*a*) M. de Prony a déduit la formule suivante d'un grand nombre d'observations, Si l'on nomme U la vitesse moyenne de l'eau à la sortie d'un canal, I la pente de ce canal (mesurée sur un mètre de longueur), R le rapport de l'aire du profil à son périmètre, on aura

$$U = -0{,}07 + \sqrt{0{,}005 + 3233.R.I}.$$

238. Pour les tuyaux de conduite, en désignant par U la vitesse moyenne, par Z la charge d'eau sur l'orifice inférieur de la conduite, par L la longueur du tuyau en mètres, et par D son diamètre, la formule suivante donne la valeur approximative de

$$U = -0{,}0248829 + \sqrt{0{,}000619159 + 717.857\,\frac{DZ}{L}},$$

ou plus simplement dans les cas ordinaires de la pratique, dans lesquels la vitesse n'est pas très-petite

$$U = 26{,}79\sqrt{\frac{DZ}{L}}.$$

239. Cette dernière formule apprend que les vitesses moyennes sont approximativement, en raison directe, composée des ra-

(*a*) *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes*, par M. de Prony.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cines carrées des diamètres et des charges d'eau, et inverse de la racine carrée des longueurs des tuyaux.

240. Par des expériences faites avec beaucoup de soin, M. de Prony a reconnu que les résultats donnés par la formule

$$U = -0,0248829 + \sqrt{0,000619159 + 717,857 \frac{DZ}{L}}$$

ne s'éloignaient pas de $\frac{1}{40}$ ou $\frac{1}{25}$ en plus ou moins de ceux de l'expérience.

241. Les formules précédentes supposent que la section horizontale, tant du réservoir et de la prise d'eau, que du bassin où cette eau va se rendre, sont tellement grandes par rapport à la section transversale du tuyau, que les tranches horizontales de ce fluide dans ce réservoir et ce bassin, peuvent être considérées comme immobiles, et n'ayant qu'une vitesse insensible, par rapport à celle qui a lieu dans le tuyau; elles supposent aussi que les tuyaux de conduite sont entièrement remplis d'eau.

242. En comparant les formules données par l'écoulement, dans le cas des canaux découverts et des canaux de conduite, M. de Prony a remarqué que ces formules sont non-seulement d'une seule et même forme, mais encore que les nombres constans qui entrent dans leur composition sont presque les mêmes, de manière qu'une seule formule peut servir à représenter les deux séries de phénomènes, sans qu'il en résulte une grande inexactitude dans le calcul; ce qui apprend que, quand les dimensions et les pentes de ces deux sortes de canaux sont les mêmes, il est indifférent d'employer les uns ou les autres, et qu'on doit se diriger suivant les circonstances locales qui présentent plus ou moins de facilité ou d'économie.

Voici la formule qui s'applique indistinctement aux canaux découverts et aux tuyaux :

$$U = -0,0469734 + \sqrt{\left(0,0022065 + 3041,47 \frac{DZ}{L}\right)}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

243. M. de Prony a donné plusieurs autres formules qui peuvent être d'un grand usage en pratique ; nous transcrirons quelques-unes des plus utiles :

Pour les canaux découverts.

Nommons
- g la vitesse acquise par un corps grave après une seconde de chute.
- ω l'aire de la section transversale.
- p le périmètre de cette section.
- I la pente du canal.
- Q le volume constant d'eau qui passe par la section ω.
- U la vitesse moyenne de l'eau.
- R le rapport de l'aire au périmètre de la section.

1°. $0{,}000436\,U + 0{,}003034\,U^2 = gIR = gI\frac{\omega}{p}$;

2°. . . . . $U = \frac{Q}{\omega}$;

3°. $R\omega^2 - 0{,}0000444499 \cdot \omega\frac{Q}{I} - 0{,}0003093\,14\frac{Q^2}{I} = 0.$

Cette dernière équation, contenant les quantités Q, I, ω et $R = \frac{\omega}{p}$, donne le moyen de déterminer une quelconque d'entre elles, lorsqu'on connaît les trois autres, et l'on aura les équations suivantes :

4°. . . . . $p = \frac{gI\omega^3}{0{,}000436Q\omega + 0{,}003034Q^2}$;

5°. . . . . $I = \frac{p(0{,}0000444499Q\omega + 0{,}0003093\,14Q^2)}{\omega^3}$;

6°. . . . $\omega = 0{,}000436 \pm \sqrt{\frac{[(0{,}000436)^2 + 4(0{,}003034)gRI]}{2gRI}}\,Q.$

244. Toutes ces règles de calcul ne sont pas applicables sans

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

exception à tous les canaux dans lesquels l'eau peut couler. Si les parois de ces canaux sont couvertes de plantes aquatiques, la résistance augmente sensiblement; et cet effet a encore lieu s'il y a un certain nombre de bateaux stationnés sur le canal. M. Girard a reconnu que dans ce cas il faut introduire dans les formules un coefficient de correction = 1,7, comme multiplicateur du périmètre. Ainsi l'équation 1°. deviendra

$$p \,.\, 1{,}7\,(0{,}000436U + 0{,}003034U^2) = gI\alpha.$$

245. Nous engageons le lecteur à consulter l'important ouvrage de M. de Prony, intitulé : *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes* ; il y trouvera les détails analytiques et les résultats des expériences qui ont conduit ce savant distingué à la détermination des formules que nous avons rapportées ; il y trouvera en outre des tables très-commodes pour en faciliter les calculs.

ARTICLE II.

Du choc et de la résistance des fluides.

Théorie ordinaire.

** 246. Supposons qu'un corps Q, dont la surface de la partie antérieure est égale à S, se meuve dans un fluide avec une vitesse v, et dans une direction qui fasse un angle a avec la surface S.

La vitesse du corps Q, dans le sens perpendiculaire à sa surface, sera $v\,Sin.\,a$, et il déplacera dans un instant dt un prisme de fluide égal à $Svdt\,Sin.\,a$, et dont la masse sera $\delta Svdt\,Sin.\,a$ (en nommant δ la densité du fluide).

Si l'on suppose que ce prisme puisse être assimilé à un corps parfaitement dur de même masse, rencontré et choqué par un

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

autre corps G supposé aussi parfaitement dur (110), la masse $\delta S v dt\ Sin.\ a$ acquerra la vitesse $v\ Sin.\ a$, et la quantité de mouvement $\delta S v^2 dt\ Sin.^2\ a$, qu'elle fera par conséquent perdre au corps Q. Supposons encore que le prisme fluide choqué s'anéantisse après le choc, et qu'un autre prisme fluide lui succède pour produire le même effet, l'expression $\delta S v^2\ Sin.^2 a$ (dans laquelle v est supposé variable) indiquera la quantité de mouvement instantané que la réaction du fluide a fait perdre au corps Q.

247. Si l'on substitue dans cette expression la valeur de v^2 donnée par la formule $v^2 = 2gh$ (94), elle devient

$$2\delta Sgh\ Sin.\ ^2 a;$$

d'où il résulte que la réaction, ou l'action qu'un fluide exerce contre un corps qui se meut dans ce fluide en repos, ou qui est mu par ce même fluide en mouvement, est proportionnelle à la surface antérieure du corps, à la hauteur due à la vitesse, et au carré du sinus de l'*angle d'incidence*, c'est-à-dire, de l'angle que fait la surface antérieure du corps avec la direction du mouvement.

Lorsque le choc est perpendiculaire à cette surface, la formule $2\delta Sgh\ Sin.^2\ a$ se réduit à $2\delta Sgh$, qui exprime la masse d'un prisme qui a pour base S, et h pour hauteur, multipliée par 2.

Théorie de D. George Juan.

248. La vitesse v d'un fluide qui s'échappe d'un orifice infiniment petit a, est égale à $\sqrt{2gh}$ (196); si l'on suppose que cet orifice soit fermé, il exercera sur la surface qui le bouche une pression égale à δgah (148); en substituant dans cette expression la valeur de gh donnée par l'équation $v = \sqrt{2gh}$, l'on aura $\frac{\delta a v^2}{2}$; supposons maintenant que la surface qui bouchait l'orifice infiniment petit se meuve perpendiculairement à son plan avec une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

vitesse u, dans un petit canal où le fluide ne peut entrer que d'un côté, alors la vitesse v comprise dans l'expression $\frac{\delta a v^2}{2}$ deviendra $(v \pm u)$; substituons cette nouvelle vitesse, et nommons p la pression exercée contre la surface a, nous aurons

$$p = \frac{\delta a\,(v \pm u)^2}{2}, \text{ ou bien } p = \delta a\,\frac{[(2gh)^{\frac{1}{2}} \pm u]^2}{2};$$

mais p exprime un poids, c'est-à-dire, le produit de g par une masse m; donc

$$m = \delta a\left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u}{\sqrt{2g}}\right)^2.$$

Supposons que la surface infiniment petite a soit un parallélogramme rectangle ayant pour base $d\beta$, et pour hauteur dh, et qu'un de ses côtés fasse avec l'horizon un angle f; dans cette supposition, $a = \frac{d\beta . dh}{Sin. f}$, et la valeur de m sera

$$m = \frac{\delta\,.\,d\beta dh}{Sin. f}\left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u}{\sqrt{2g}}\right)^2.$$

Si le tuyau dans lequel est supposé se mouvoir l'élément $a = \frac{d\beta dh}{Sin. f}$ faisait un angle r avec le plan de cet élément, sa vitesse u, décomposée dans le sens de la perpendiculaire à l'élément, sera $u\ Sin.\ r$; substituant cette valeur au lieu de u, l'équation précédente devient

$$m = \frac{\delta\,.\,d\beta dh}{Sin. f}\left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\ Sin.\ r}{\sqrt{2g}}\right)^2,$$

et elle exprime la pression perpendiculaire à l'élément $\frac{d\beta dh}{Sin. f}$

Veut-on maintenant avoir la valeur d'une pression m' faisant un angle t avec ce même élément, il faudra multiplier la valeur de m par $Sin.\ t$, et l'on aura

$$m' = \frac{\delta\,.\,d\beta db\ Sin.\ t}{Sin. f}\left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\ Sin.\ r}{\sqrt{2g}}\right)^2.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

** 249. Supposons maintenant que l'élément $\frac{d\beta dh}{Sin f}$ fasse partie d'un plan dont la forme est un parallélogramme rectangle, qu'il se meuve dans un liquide stagnant, que sa base horizontale soit b, et qu'il soit enfoncé dans le fluide d'une quantité h.

Le plan se mouvant avec une vitesse u $Sin.$ r, il laisse un espace vide par derrière dans lequel affluent les molécules de fluide avec la vitesse $\sqrt{2gh}$ due à la hauteur h. Ces molécules ne peuvent remplir entièrement cet espace, si la vitesse $\sqrt{2gh}$ n'est partout égale à u $Sin.$ r. Mais la vitesse $\sqrt{2gh}$ est en effet variable, et d'autant moindre que la profondeur est plus petite, de sorte qu'à la surface elle est nulle; donc, à partir du point où $\sqrt{2gh} = u\ Sin.r$, les molécules laisseront un vide dont la profondeur h' sera donnée par l'équation

$$\sqrt{2gh'} = u\ Sin.\ r.\ \text{Ainsi}\ h' = \frac{u^2\ Sin.^2 r.}{2g}.$$

Si l'on fait $m' = 0$, ou $\left(h^{\frac{1}{2}} + \frac{u\ Sin.\ r}{\sqrt{2g}}\right)^2 = 0$, pour connaître le point de la face antérieure du plan où la pression devient nulle, on aura

$$h^{\frac{1}{2}} = \frac{-u\ Sin.\ r}{\sqrt{2g}},\ \text{ou}\ h = \frac{u^2\ Sin.^2 r}{2g}.$$

250. Il résulte de ce qui précède que le fluide s'élève à la face antérieure du plan d'une hauteur égale à la hauteur dont il s'abaisse à la face postérieure. On appelle *dénivellations* le vide qui se forme à la face postérieure du plan, et l'élévation ou intumescence qui se forme simultanément à la face antérieure.

Pour avoir la pression qui s'exerce à un point donné de la surface antérieure, il faut faire $h^{\frac{1}{2}}$ négative dans l'équation générale qui donne la valeur de m'; et pour avoir la pression qui, sauf le vide, s'exercerait au point correspondant de la face pos-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

térieure, il faut faire $h^{\frac{1}{2}}$ positive; et l'on aura, dans l'un et dans l'autre cas,

$$m' = \frac{\delta \,.\, dbdh \; Sin.\, t}{Sin.\, f}\left(h \pm \frac{2u \; Sin.\, r \,.\, h^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2g}} + \frac{u^2 \; Sin.\,^2 r}{2g}\right).$$

A l'égard des dénivellations, on doit observer que la portion de la face postérieure du plan qui correspond à la cavité n'est point entièrement exempte de pression, parce que le fluide s'introduit latéralement dans cette cavité; de même l'intumescence à la partie antérieure est diminuée de toutes les molécules qui retombent latéralement. Il résulte de là une augmentation de pression à la partie postérieure, et une diminution de pression à la partie antérieure.

** 251. Intégrons l'équation précédente par rapport à b, et ensuite par rapport à h,

$$b\delta\left(\tfrac{1}{2}h^2 \pm \tfrac{4}{3}h^{\frac{3}{2}}\frac{u \; Sin.\, r.}{\sqrt{2g}} + \frac{hu^2 \; Sin.\,^2 r}{2g}\right) + C.$$

Le signe positif est pour la face antérieure, et le signe négatif pour la face postérieure.

Il est évident que si l'on supposait la pression nulle lorsque $h = 0$, en n'ayant point égard à la dénivellation, on aurait $C = 0$. Mais si on veut avoir égard à la dénivellation, C indiquera une quantité qui, pour la face antérieure, doit s'ajouter à la pression qui a lieu au-dessus du niveau du fluide, et qui, pour la face postérieure, doit se retrancher de cette pression; et on la détermine en faisant (249) $h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u \; Sin.\, r}{\sqrt{2g}} = 0$; ce qui donne $h^{\frac{1}{2}} = \mp \frac{u \; Sin.\, r.}{\sqrt{2g}}$; substituant cette valeur dans la formule précédente, on aura, toutes réductions faites,

$$C = \frac{b\delta}{6} \cdot \frac{u^4 \; Sin.\,^4 r}{4g^2},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et la pression horizontale totale sera

$$bg\left(\frac{1}{2}h^2 \pm \frac{4}{3}\,\frac{h^{\frac{3}{2}}u\ \mathrm{Sin.}\,r}{\sqrt{2g}} + \frac{hu^2\ \mathrm{Sin}^2\,r}{2g} \pm \frac{1}{6}\cdot\frac{u^4\ \mathrm{Sin.}^4\,r}{4g^2}\right).$$

252. Lorsque le côté supérieur du parallélogramme coïncide avec la surface supérieure du fluide, il n'y a pas de dénivellation à la face antérieure, et il faut, pour cette face, faire $\frac{u^4\ \mathrm{Sin.}^4\,r}{4g^2} = 0$. Mais la dénivellation subsiste toujours à la face postérieure dont la pression ne change pas de valeur.

Les dénivellations auront lieu lorsque le plan sera immobile, et que le fluide se mouvra, pourvu que son mouvement puisse être censé horizontal; dans ce cas, l'intumescence aura lieu à la face qui reçoit le choc de l'eau, et le vide à la postérieure; mais dans ce cas le vide sera diminué, vu que le barrage, occasioné par le plan immobile, produit une espèce de stagnation du côté de la face postérieure de ce plan.

253. Lorsque le plan et le fluide sont tous deux en mouvement, il faut chercher la vitesse composée de celle de la surface et de celle du fluide, qu'on substituera dans la formule à la place de u; on substituera de même, à la place de l'angle r, la valeur de l'angle que forme la direction composée avec la surface.

254. Don George Juan a fait les expériences suivantes pour s'assurer de l'exactitude de sa théorie.

Une planche de la forme d'un parallélogramme, ayant un pied de long (mesure anglaise), a été exposée perpendiculairement à l'action d'un courant dont la vitesse était de deux pieds par seconde; elle a supporté un poids de 15 livres $\frac{1}{3}$, étant submergée d'un pied juste. La même planche, enfoncée de deux pieds, a supporté un poids de 26 livres $\frac{1}{4}$, exposée à un courant de $\frac{4}{5}$ de pied de vitesse par seconde. La pression de la planche

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans la première expérience devrait être, d'après la théorie, de 20 livres $\frac{1}{2}$, et dans la seconde de 39 livres $\frac{1}{2}$.

255. D. Juan attribue l'excès des poids calculés sur ceux qui résultent de l'expérience, aux altérations (252) qu'éprouvent les dénivellations à l'avant et à l'arrière du corps, desquelles il résulte une augmentation de pression à la face postérieure, et une diminution à la face antérieure.

Mais l'expérience et la théorie sont d'accord dans les rapports que les résultats calculés et observés ont entre eux ; le rapport théorique étant 15 à 28, et celui des résultats observés 15 $\frac{1}{2}$ à 26 $\frac{1}{2}$.

256. Les résultats des deux expériences de don George Juan diffèrent à peu près d'un tiers de ceux donnés par le calcul, en sorte qu'il semblerait que les résultats théoriques doivent être diminués d'un tiers.

257. Sméaton a fait des expériences qui semblent confirmer la théorie de D. George Juan.

Sméaton ayant exposé une roue à aubes au choc d'un courant d'eau, il a reconnu que la vitesse des aubes doit être un peu moindre que la moitié de la vitesse de l'eau qui les frappe, et le même résultat se déduit de la théorie de Juan.

En effet, supposons que l'angle $r=0$, que la vitesse étant petite, on puisse négliger les termes où se trouve u^2 et u^3, et que, au lieu de h^2, on ait posé sa valeur due à la dénivellation ; cela posé, la formule trouvée précédemment peut se réduire à celle-ci $\frac{4}{3}\frac{b\delta u h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g}}$; pour appliquer cette expression au choc que les aubes éprouvent, nommons u la vitesse du courant, v celle de la roue. L'impulsion contre l'aube sera exprimée ainsi qu'il suit, $\frac{4}{3\sqrt{2g}} \cdot b\delta h^{\frac{3}{2}} \ (u-v)$; observons que $\sqrt{2g} = 8$ pieds anglais ; donc nous aurons $\frac{b\delta h^{\frac{3}{2}}(u-v)}{6}$; faisons $\frac{b\delta h^{\frac{3}{2}}}{6} = A$; nommons R le rayon de la roue, r le rayon de son arbre sur lequel on sup-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pose que s'enveloppe une corde qui soutient un poids P, l'on aura

$$RA\,(u-v)=rP+F,$$

(F indiquant la somme des résistances produites par les frottemens et autres causes tendant à diminuer l'effet actif de la machine.) De cette équation on tire la valeur de P.

$$P=\frac{RA\,(u-v)-F}{r}.$$

Multiplions des deux côtés par $\frac{r}{R}v$, et nous aurons

$$P\times\frac{r}{R}v=\frac{r}{R}\times\frac{RA\,(u-v)\,v-Fv}{r},$$

équation qui donne la valeur de l'effet $P\times\frac{r}{R}v$ de la machine. Égalant à zéro la différentielle de la valeur de cet effet, il en résulte

$$RA\,(u-2v)-F=0\text{; et }v=\tfrac{1}{2}u-\frac{F}{2RA}.$$

Ainsi la vitesse des aubes doit être un peu moindre que la moitié de la vitesse de l'eau qui les choque, pour produire le maximum d'effet.

258. D'Alembert, Condorcet et Bossut entreprirent en 1775, par ordre du gouvernement, plusieurs séries d'expériences faites avec grand soin, dont le but principal était de rechercher les lois de la résistance des fluides. Ces expériences, dont on trouve les détails circonstanciés dans le second volume de l'hydrodynamique de Bossut, furent faites sur une grande pièce d'eau, située dans l'enceinte de l'École militaire à Paris; on se servit de plusieurs bateaux de différentes dimensions et de différentes formes, qui étaient mis en mouvement par la descente d'un poids le long d'un mât, et dont le cordon était dirigé par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

plusieurs poulies de renvoi ; on a mesuré le temps du mouvement des bateaux à l'aide d'une pendule à demi-secondes.

259. On a d'abord observé que dans les premiers instans du mouvement des bateaux, la vitesse s'accélère par degrés ; tant que cette vitesse est fort petite, l'eau se détourne facilement, et coule le long des parois du corps flottant, de manière que le fluide demeure de niveau, au moins sensiblement, de l'avant à l'arrière du corps dont il s'agit ; mais à mesure que la vitesse augmente, le fluide a plus de peine à se détourner ; il s'amoncelle au-devant de la proue ; il y forme une espèce de proue fluide, qui a plus ou moins d'étendue, selon que la vitesse est plus ou moins grande, et que la proue solide a plus ou moins de largeur ; de plus, le fluide s'abaisse vers la partie postérieure du bateau ; ce double effet est d'autant plus sensible, toutes choses égales d'ailleurs, que la vitesse est plus grande ; ainsi l'augmentation de vitesse doit faire augmenter la résistance que le bateau éprouve pour diviser le fluide.

260. Voici les principaux résultats de ces belles et importantes expériences :

1°. Que les résistances d'un même corps qui divise un fluide avec différentes vitesses, sont sensiblement proportionnelles aux carrés de ces vitesses ;

2°. Que les résistances directes et perpendiculaires des surfaces planes sont sensiblement proportionnelles (pour une même vitesse) aux étendues de ces surfaces ;

3°. Que les résistances qui proviennent des mouvemens obliques ne diminuent pas à beaucoup près, toutes choses d'ailleurs égales, dans la raison des carrés des sinus des angles d'incidence ; que par conséquent la théorie ordinaire de la résistance des fluides (qui suppose que la diminution est proportionnelle à ces carrés) doit être entièrement abandonnée lorsque les an-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

gles d'incidence sont petits, puisqu'alors elle donnerait des résultats très-fautifs; mais, que pour les cas où les angles d'incidence seraient grands, comme dans l'intervalle de 50 à 90 degrés, on peut employer la théorie ordinaire comme un moyen d'approximation, en observant qu'elle donnera pour les résistances des quantités un peu moindres qu'on ne les trouverait par l'expérience, et d'autant moindres que les angles s'éloigneront davantage de 90 degrés;

4°. Que la mesure de la résistance directe et perpendiculaire d'une surface plane dans un fluide indéfini, est le poids d'une colonne de fluide qui a pour base cette surface, et pour hauteur la hauteur due à la vitesse;

5°. La résistance ou la percussion est plus grande et à peu près double, dans un coursier qui conduit l'eau contre les ailes d'un moulin, et qui n'a que la largeur purement nécessaire, de celle qui a lieu dans un canal de largeur indéfinie;

6°. Quand un bateau se meut dans un canal étroit et peu profond, la résistance varie entre des limites quelquefois très-écartées;

7°. Que la ténacité de l'eau est une résistance que l'on doit regarder comme infiniment petite, ou comme nulle par rapport à celle qu'un bateau éprouve en poussant l'eau, surtout quand sa vitesse est un peu sensible.

261. Bossut a déduit de ses expériences la formule suivante, qu'il donne pour évaluer la résistance oblique des fluides;

$$10000\ Cos.^2\, x + 3,153 \left(\frac{x}{q}\right) 3,25.$$

Dans cette formule, 10000 indique la résistance perpendiculaire et directe; x est l'angle que fait une des faces de la proue avec le plan perpendiculaire à la direction, de sorte que la résis-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tance que devrait éprouver une proue angulaire, est 10000 $Cos.^2 x$; q indique une variation de 6 degrés; x et q doivent être exprimées en parties décimales du rayon que l'on suppose $= 1$.

Cette formule (dit Bossut) est suffisamment exacte pour tous les cas où l'angle d'incidence du fluide sur les faces de la proue est un peu grand; mais elle n'est point admissible pour de petits angles; car, par exemple, lorsque l'angle d'incidence est de 12 degrés, le terme $3{,}153 \left(\frac{x}{q}\right) 3{,}25$ est trop fort de près d'un quart. La formule s'éloigne encore plus de la vérité pour de très-petits angles d'incidence.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

LIVRE SECOND.

DES MOTEURS ET DES RÉSISTANCES.

262. Une machine est un assemblage de parties mobiles, dont les unes reçoivent l'action de l'agent moteur, et d'autres, après en avoir modifié la vitesse et la direction de la manière la plus avantageuse, la transmettent à celles qui doivent produire l'*effet utile ;* c'est-à-dire, l'effet pour lequel la machine est construite.

263. La production de l'effet utile occasione inévitablement une résistance que le moteur doit vaincre. Il est une autre résistance qui, indépendamment de celle-ci, a lieu dans toute machine ; cette dernière, à laquelle on a donné le nom de *résistance passive*, ne favorise point l'effet utile, mais elle tend, au contraire, à le diminuer, et elle absorbe en pure perte une partie de l'action du moteur.

264. Le mécanicien qui veut construire une machine, ou juger une machine déjà construite, doit, avant tout, évaluer 1°. quelle est la quantité d'action que le moteur doit produire pour vaincre les deux espèces de résistances qui s'opposent au mouvement de la machine, c'est-à-dire la résistance passive et celle due à la production de l'effet utile.

2°. Quel est l'effet utile correspondant à la quantité d'action déterminée du moteur. L'objet spécial de ce livre est d'exposer les méthodes pour effectuer ces calculs. Il est divisé en trois chapitres, dont le premier traite des moteurs; le second, des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diverses espèces d'*effets utiles* et des résistances qui en dérivent; et le troisième, des résistances passives.

CHAPITRE PREMIER.

Des moteurs.

ARTICLE PREMIER.

Des moteurs et des résistances en général.

265. On doit considérer deux choses dans l'action d'un moteur appliqué à une machine, et dans celle de la résistance qui lui est opposée; 1°. la vitesse; 2°. l'effort exercé.

La vitesse, soit d'un moteur, soit de la résistance, est celle du point où ces forces sont appliquées, ou bien des points où elles sont supposées concentrées.

L'effort du moteur est celui que cet agent doit faire à chaque instant, afin que la vitesse du point auquel il est appliqué, se conserve uniforme et constante. L'effort de la résistance est celui que le moteur est obligé de détruire à chaque instant pour conserver l'uniformité du mouvement.

266. On observe dans les machines deux sortes de mouvemens; 1°. les mouvemens circulaires continus; 2°. les mouvemens alternatifs.

Les mouvemens circulaires continus sont les seuls qui puissent être exactement uniformes. L'essence des mouvemens alternatifs est de présenter une répétition périodique de *rétrogradations;* c'est-à-dire de changemens de direction dans un sens directement opposé; à chaque rétrogradation, on re-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

marque une accélération et un retardement successif de vitesse; le mouvement rétrograde ne peut avoir lieu, si le *momentum* ou quantité de mouvement, acquis par le mobile, dans le sens primitif, n'est totalement anéanti; un repos instantané succède à cet anéantissement, puis le mouvement s'accélère progressivement, diminue, s'anéantit de nouveau, se reproduit en sens contraire; et de semblables variations se répètent à chaque alternation. Il est évident que ces anéantissemens successifs de mouvement sont une des causes qui tendent à absorber en pure perte une quantité de force motrice, d'autant plus grande que les alternations sont plus rapides, et que les masses des mobiles sont plus grandes. On ne saurait donc apporter trop de soin à éviter de semblables mouvemens, lorsque la nature de la machine le permet; et si on ne peut les éviter, il faut au moins diminuer autant que possible la vitesse et la masse des parties mobiles; les mécaniciens doivent se pénétrer profondément de cette maxime fondamentale que nous ne cesserons de leur répéter.

267. Quoique tout mouvement alternatif, soit circulaire, soit rectiligne, présente une suite d'accélérations et de retardemens, les alternations néanmoins peuvent être régulières et semblables, et alors cette espèce de mouvement est susceptible d'être comparé à un mouvement uniforme. Ainsi, si nous supposons un balancier qui, en faisant des oscillations exactement semblables, parcoure à chacune d'elles un arc de cinq pieds en une seconde; son effet total, au bout de dix oscillations, sera d'avoir parcouru cinquante pieds en dix secondes, et comme l'espace parcouru pendant chaque seconde est le même, on voit qu'on peut comparer cet effet à celui produit par un mobile qui se serait mû pendant dix secondes avec une vitesse uniforme de cinq pieds par seconde.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

268. Toutes les fois qu'on applique un moteur à une machine, l'uniformité de mouvement ne peut avoir lieu qu'au bout de quelque temps; car la communication du mouvement ne doit point se faire instantanément, mais par gradations successives; il faut, en un mot, que la communication se fasse par pression, et jamais par choc. Nous avons déjà fait observer combien les chocs sont nuisibles (112) par le triple motif de la perte de forces vives qu'ils occasionent, des secousses et des ébranlemens qui disloquent la machine, et de l'irrégularité du mouvement qui en résulte.

Dans le calcul des machines, on fait abstraction de l'accélération graduelle de mouvement (qui est de courte durée), et l'on suppose que le mouvement de la machine est parvenu à l'uniformité.

269. *Lorsque le mouvement d'une machine est uniforme, l'effort du moteur doit toujours faire équilibre à celui de la résistance;* car si le premier était plus fort ou plus faible que le second, il y aurait évidemment accélération ou retardement, et alors le mouvement ne serait plus uniforme, ce qui est contre l'hypothèse.

270. Les efforts du moteur et de la résistance sont représentés par les pressions que ces forces exercent multipliée par leur vitesse respective; ainsi nommant p, p', ces pressions, et v, v', les vitesses, nous aurons $pv = p'v'$, et $p : p' = v' : v$; donc les pressions exercées par le moteur et par la résistance, sont en raison inverse de leurs vitesses virtuelles, s'il y a équilibre, et effectives, s'il y a mouvement.

271. On ne doit point confondre les efforts exercés avec les effets; les premiers sont représentés, comme nous venons de le voir, par les produits des pressions multipliés par les vitesses respectives, les seconds sont représentés par des forces vives, c'est-à-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dire, par les produits des pressions multipliées par les carrés des vitesses respectives (103); ainsi, en retenant les dénominations précédentes, p est la pression, pv l'effort exercé, et pv^2 l'effet produit. Si deux effets produits sont égaux, l'on aura $pv^2 = p'v'^2$, et $p : p' = v'^2 : v^2$, donc *les pressions sont en raison inverse des carrés des vitesses.*

272. Nous avons vu (103) que les effets produits peuvent être également représentés par le produit d'une pression p, d'une vitesse v, et d'un temps t; de sorte que l'on peut se servir indifféremment des deux expressions pv^2 et $gpvt$ (g étant la gravité). Cette dernière indique que les effets d'une machine sont directement proportionnels aux pressions, aux vitesses et aux temps; de sorte que, en nommant E, E', deux effets, nous aurons 1°. quand les temps sont égaux, $E : E' = pv : p'v'$; 2°. quand les vitesses sont égales, $E : E' = pt : p't'$; 3°. quand les pressions sont égales, $E : E' = vt : v't'$.

273. Quel que soit le moteur, il y a toujours une certaine relation entre la pression qu'il exerce et sa vitesse, qui donne un maximum d'effet, c'est-à-dire, l'effet le plus avantageux possible.

Lorsque la vitesse est nulle, c'est-à-dire, lorsque la pression s'exerce sur un obstacle immobile, celle-ci est évidemment la plus grande possible; mais si l'obstacle acquiert un mouvement, elle diminuera d'autant plus que la vitesse sera grande, de sorte qu'elle serait nulle si l'obstacle pouvait se mouvoir aussi vite que le moteur.

Entre ces deux extrêmes se trouve une certaine vitesse qui rend le produit de la pression et de la vitesse le plus grand possible : c'est ce degré de vitesse qu'il importe de déterminer.

Soit P' la pression qu'un moteur peut exercer sur un obstacle invincible; V' la vitesse qui rend nulle la pression; v une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

vitesse intermédiaire qui correspond à l'effort p. Nous aurons

$$P' : p = V'^2 : (V' - v)^2 ; \; p = P'\left(1 - \frac{v}{V'}\right)^2;$$

mais $pv = p'v'$ (269); donc,

$$p = \frac{p'v'}{v}, \text{ et } p'v' = P'\left(1 - \frac{v}{V'}\right)^2 v, \text{ ou } p' = \frac{v}{v'}P'\left(1 - \frac{v}{V'}\right)^2;$$

ou bien encore

$$1 - \frac{v}{V'} = \sqrt{\frac{p'v'}{P'v}}, \text{ et } v = V' - V'\sqrt{\frac{p'v'}{P'v}}.$$

Si nous appelons u, u' les vitesses virtuelles qui correspondent aux vitesses effectives v, v', l'on aura

$$\frac{v'}{v} = \frac{u'}{u}, \text{ et } v = \left(1 - \sqrt{\frac{p'u'}{P'u}}\right) V', \text{ ou } v\frac{u'}{u} = \left(1 - \sqrt{\frac{p'u'}{P'u}}\right) V'\frac{u'}{u};$$

ou bien

$$v' = \left(1 - \sqrt{\frac{p'u'}{P'u}}\right) V'\frac{u'}{u},$$

équation qui indiquera la vitesse de la résistance; mais pour représenter l'effet de cette résistance, il faut en multiplier la vitesse par son effort et par la durée t du mouvement (272).

Ainsi l'effet de la machine sera

$$v'p't = p't\left(1 - \sqrt{\frac{p'u'}{P'u}}\right) V'\frac{u'}{u}.$$

Il faut, suivant la théorie des *maxima* et *minima*, différencier en faisant $d(v'p't) = 0$; ce qui donnera

$$p'tV'\frac{u'}{u}\left(1 - \sqrt{\frac{p'u'}{P'u}}\right) = 0;$$

supprimant les facteurs constans, cette équation se réduit à

$$d\left[\frac{u'}{u} - \frac{u'}{u}\sqrt{\frac{p'u'}{P'u}}\right] = 0.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Faisons $\frac{u'}{u} = zz$, nous aurons

$$d\left[zz - z^3\sqrt{\frac{p'}{P'}}\right] = 0, \text{ ou } 2z = 3z^2\sqrt{\frac{p'}{P'}};\ z = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{P'}{p'}} \text{ et } z^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{P'}{p'};$$

$$\text{mais } z^2 = \frac{v'}{v};\ \text{donc } v' : v = 4P' : 9p';$$

ainsi, *pour le plus grand effet, la vitesse de la résistance doit être à celle du moteur, comme $4P'$ est à $9p'$, c'est-à-dire, comme quatre fois la pression que peut exercer le moteur, quand sa vitesse est nulle, est à neuf fois la pression donnée de la résistance.*

L'expérience a démontré que ce résultat n'est point applicable sans restriction à toutes les espèces de moteurs, comme nous le verrons en parlant de chacun d'eux en particulier.

274. Reprenons les résultats précédens, $\frac{v'}{v} = \frac{4P'}{9p'}$; et $pv = p'v'$; substituons dans le premier la valeur de p', déduite de la seconde, et nous aurons $p = \frac{4}{9}P'$; cette valeur de p étant substituée dans l'équation (273) $p = P'\left(1 - \frac{v}{V'}\right)^2$ donne $v = \frac{V'}{3}$; donc *la vitesse du moteur doit être le tiers de celle qui rend sa pression nulle pour le plus grand effet.*

Les moteurs que l'on emploie communément pour mettre en mouvement les machines sont 1°. les moteurs animés; 2° l'eau; 3°. le vent; 4°. la force expansive des fluides élastiques; 5°. les poids et les ressorts; les effets que ces moteurs produisent peuvent toujours être comparés à des poids élevés à une hauteur déterminée. En effet, s'il s'agit de moteurs animés, on peut toujours supposer que la pression ou la traction qu'ils exercent sur une machine est équivalente à celle qu'ils produiraient si, agissant de la même manière, ils tiraient une corde, qui, à l'aide de poulies de renvoi, ferait d'un côté monter un poids, et de l'autre prendrait la direction qui convient au moteur. De même l'eau et le vent font tourner un axe, et cet

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

axe peut indifféremment ou mouvoir une machine quelconque, ou faire monter un poids attaché à une corde qui s'envelopperait autour du même axe.

Les fluides élastiques exercent ordinairement leur action dans un cylindre, où ils soulèvent alternativement un piston au-dessus duquel s'élève une tige qui transmet le mouvement à un volant, sur l'axe duquel on peut supposer que s'enveloppe la corde d'un poids.

275. On prend ordinairement, lorsqu'on compare l'effet des machines, pour unité, un kilogramme élevé à un mètre de hauteur, et l'on désigne cet effet par le nom d'*unité dynamique*. De mille unités de cette espèce, on forme la *grande unité dynamique*, qui est le produit d'un mètre cube d'eau par un mètre, ou d'un kilogramme par un kilomètre.

Article II.

Des moteurs animés.

276. La quantité de mouvement produite par les *moteurs animés* qui agissent sur les machines se décompose en deux parties, dont l'une, étant employée à mettre en mouvement le corps de l'agent moteur, ne coopère point à l'effet utile de la machine.

277. L'action exercée par les *moteurs animés* est essentiellement intermittente; c'est-à-dire, elle est interrompue par des repos plus ou moins longs et plus ou moins fréquens, suivant l'intensité de l'action exercée.

278. Un *moteur animé* peut exercer une action d'autant plus grande, à chaque instant, que la durée du travail est plus courte; et réciproquement la fatigue et le besoin de repos se font sentir d'autant plus promptement que l'action exercée par le moteur est plus grande.

279. L'*effet journalier* est celui qu'un *moteur animé* peut

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

produire chaque jour sans nuire à son économie animale. Cet effet est exprimé par la *pression* ou la *traction*, multipliée par la vitesse et par le temps que dure le travail, et peut être représenté par un poids élevé à une certaine hauteur dans un temps donné.

De l'homme.

280. Le poids moyen de l'homme est évalué généralement à 70 kilogrammes.

Le plus grand effort dont l'homme est capable est celui qu'il exerce se tenant debout, et cherchant à soulever un fardeau placé entre ses jambes : cet effort est, terme moyen, de 130 kilogrammes, et quelques individus très-vigoureux peuvent élever de cette manière un poids de 300 kilogrammes.

281. La vitesse d'un homme qui court avec rapidité est d'environ 8 mètres par seconde; celle de la marche ordinaire est d'environ 1,5 mètre ; la grandeur moyenne du pas est évaluée 0,7 mètre.

282. Lorsqu'un homme court avec une certaine rapidité, il cesse, pour ainsi dire, de graviter sur le plan qu'il parcourt; en effet, son centre de gravité décrit une courbe (que l'on a reconnu être une parabole) qui a pour rayon de courbure le pied sur lequel il s'appuie en s'élançant ; il naît de ce mouvement une force centrifuge d'autant plus grande qu'il est plus rapide. Lambert a trouvé, par des essais, qu'en courant avec une vitesse de 9 à 10 pieds par seconde, on s'élance tellement que les pieds n'agissent que comme s'ils repoussaient la terre en arrière ; il faut, dans ce cas, qu'ils se meuvent avec beaucoup d'agilité, et qu'ils ne frappent la terre qu'autant qu'il est nécessaire pour conserver la vitesse.

283. Coulomb a déduit de l'observation les résultats compa-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ratifs des quantités d'action journalière que les hommes produisent en agissant de différentes manières (*a*).

En voici un résumé :

1°. La quantité journalière d'action produite par des hommes qui montent par un escalier commode sans être chargés d'aucun fardeau, est équivalente à 205 kilogrammes élevés à un kilomètre. Celle d'un homme qui monte par un escalier, étant chargé de 68 kilogrammes, est équivalente à 129 kilogrammes élevés à un kilomètre.

2°. Coulomb a calculé quelle est la charge moyenne qu'un homme devrait porter en montant par un escalier pour produire le maximum de l'effet utile journalier, et il a reconnu que cette charge est d'environ 53 kilogrammes.

3°. Les hommes qui voyagent pendant plusieurs jours sans aucune charge, peuvent parcourir facilement dans leur journée 50 kilomètres ; et des hommes chargés de 44 kilogrammes peuvent parcourir dans leur journée 18 à 20 kilomètres.

4°. En comparant la quantité d'action que les hommes exercent, en montant par un escalier sans aucun fardeau, à celles des hommes qui parcourent un chemin horizontal, on trouve que les quantités sont comme 205 est à 3500, ou à peu près comme 1 est à 17. Et si l'on compare la quantité d'action qu'un homme peut fournir dans sa journée en marchant librement à celle qu'il produit en marchant chargé d'un fardeau, on trouve que la première est à la seconde comme 5 est à 1.

5°. Un homme, dans son travail journalier, peut transporter à l'aide d'une brouette 14 $^{\text{mèt}}$, 79 cubes de terre à 29 $^{\text{mèt.}}$, 226

(*a*) Ces résultats se trouvent développés dans un mémoire important, inséré dans le recueil des mémoires les plus utiles de cet ingénieur célèbre, que M. Bachelier vient de publier.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de distance ; il porte cette masse de terre en cinq cents voyages. L'effet utile que fournit un homme qui transporte des fardeaux sur une brouette est à l'effet utile du même homme, lorsqu'il transporte les mêmes fardeaux sur son dos, comme 148 : 100.

6°. Coulomb a trouvé que la charge moyenne des brouettes, dans un atelier composé d'hommes vigoureux, est à peu près de 70 kilogrammes; et que le poids des brouettes, qui varie beaucoup, est moyennement de 30 kilogrammes.

En soutenant une brouette chargée, au moyen d'un peson, au même point où les hommes tiennent les bras, Coulomb a reconnu que la partie du poids que les hommes soutiennent est de 18 à 20 kilogrammes; que lorsque la brouette est vide, il ne portent que 5 à 6 kilogrammes; et que la force nécessaire pour pousser la brouette sur un terrain sec et uni est de 2 à 3 kilogrammes.

7°. La quantité journalière d'action des hommes qui soulèvent le *mouton* d'une *sonnette à battre les pieux* est de 19 kilogrammes, élevés 3600 fois à 11 décimètres de hauteur, ce qui donne une quantité équivalente à 75, 2 kilogrammes élevés à 1 kilomètre. En comparant cette quantité d'action à celle que produit un homme, lorsqu'il monte librement par un escalier, on trouve que la première n'est qu'un peu plus que le tiers de la seconde.

8°. La quantité d'action produite par les hommes qui frappent les pièces de monnaie avec un mouton à balancier est encore moindre. Un mouton pesant 38 kilogrammes, manœuvré par deux hommes, était élevé, dans une journée, 5200 fois à la hauteur de 4 décimètres, ce qui donne une quantité d'action journalière représentée par un poids de 39,5 kilogrammes élevés à un kilomètre, quantité qui n'est guère que la moitié de celle produite par les hommes qui battent les pilots.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Coulomb fait cependant remarquer que les hommes qui battaient monnaie, ont travaillé pendant quinze mois de suite ; au lieu que les hommes qui enfoncent des pilots passent à un autre genre de travail, lorsqu'ils sont fatigués, ce qui arrive bientôt.

9°. Coulomb ayant fait, pendant deux jours de suite, tirer de l'eau d'un puits qui avait 37 mètres de profondeur, où l'on puisait au moyen d'un double seau, l'homme a monté pendant le premier jour 125 seaux; le second 119. L'effort moyen, mesu a vec u n peson, était de 16 kilogrammes, ce qui donne une quantité d'action journalière équivalente à 71 kilogrammes, élevés à un kilomètre, quantité à peu près la même que celle produite par des hommes qui battent les pilots.

10°. Coulomb croit que la pression qu'un homme exerce sur une manivelle ne doit point être évaluée au delà de 7 kilogrammes, lorsque le travail est long et continu; et il croit que l'évaluation admise communément par les mécaniciens, qui supposent cette pression de 12 ou 13 kilogrammes, est beaucoup trop forte. La manivelle parcourt le plus souvent un cercle de 23 décimètres de circonférence; elle fait 20 tours par minute, et le nombre des tours faits dans une journée est de 72,000, ce qui donne, pour la quantité d'action journalière, 118 kilogrammes élevés à 1 kilomètre. La quantité d'action des hommes qui montent librement par un escalier, celle des hommes qui agissent sur une manivelle, et celle des hommes qui élèvent le mouton d'une sonnette, comparées ensemble, sont entre elles comme les nombres 206, 115, 75, ou approximativement comme 8, 5, 3.

11°. Le travail journalier d'un homme fort et bien exercé qui labourait la terre avec la bêche, fut le labour de 181 mètres carrés dans des terres fortes, affaissées, et ayant un degré moyen

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'humidité et de sécheresse; le laboureur enfonçait la bêche de 25 centimètres, et à chaque coup de bêche il élevait moyennement un poids de terre de 6 kilogrammes à 4 décimètres environ de hauteur. Le premier effort pour enfoncer la bêche était moyennement de 20 kilogrammes; lorsque la bêche était enfoncée de quelques centimètres, la force pour continuer à l'enfoncer n'était guère que de 12 kilogrammes, le nombre des coups de bêche, dans une journée, était d'environ 14316. L'action totale de la journée est équivalente à 96,6 kilogrammes élevés à un kilomètre.

Dans la détermination des résultats précédens, Coulomb a supposé que par un instinct naturel à tous les hommes, ils prennent sous une charge donnée la vitesse qui économise le plus leurs forces.

La table suivante présente la valeur numérique des quantités d'action journalière déterminées par Coulomb.

Le poids transporté à un kilomètre de distance, équivalent aux quantités d'action journalière suivantes, est

1°. L'homme voyageant sans charge, plusieurs jours, sur un chemin horizontal.	3500 kilog.	En totalité.
2°. L'homme parcourant un chemin horizontal, étant chargé d'un poids de 58 kilogrammes. .	1536 *id.*	En totalité.
Effet utile.	692 *id.*	
3°. L'homme montant par un escalier commode sans être chargé	205 *id.*	En totalité.
4°. L'homme montant par un escalier, chargé d'un poids de 68 kilogrammes.	129 *id.*	En totalité.
Effet utile.	56 *id.*	
5°. L'homme qui transporte des fardeaux sur une brouette; effet utile.	1022 *id.*	
6°. L'homme qui élève le mouton d'une sonnette; effet utile.	75 *id.*	

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

7°. L'homme qui frappe les pièces de monnaie, à l'aide d'un mouton à balancier; effet utile.	39 *id.*	Le travail étant continué pendant plusieurs mois.
8°. L'homme qui tire l'eau d'un puits, à l'aide d'un seau suspendu à une corde passée sur une poulie; effet utile.	71 *id.*	Travail de deux jours.
9°. L'homme agissant sur une manivelle; effet utile.	116 *id.*	Travail continu.
10°. L'homme qui laboure avec une bèche; effet utile.	96 *id.*	Travail de plusieurs jours.

284. On ne doit point oublier que l'âge, le sexe, le climat, et surtout l'habitude, occasionent de grandes variétés dans la valeur des quantités d'action journalière produites par divers individus.

L'expérience a fait connaître qu'en général la force moyenne des femmes n'est guère que les deux tiers de celle d'un homme fait, et est égale à peu près à celle d'un jeune homme de 15 à 16 ans. Péron a observé que les sauvages étaient moins forts d'un tiers que les matelots européens. Coulomb a remarqué que dans les climats où la température passe 20 degrés, les hommes ne sont pas capables de la moitié de la quantité d'action journalière qu'ils fournissent habituellement dans les climats tempérés.

285. Lambert a publié, dans les mémoires de l'académie de Berlin, pour l'année 1776, un mémoire sur la force du corps humain; la théorie, exposée dans ce savant mémoire, quoique très-ingénieuse, donne des formules qui sont trop compliquées, et dont les résultats sont en même temps trop incertains pour qu'on puisse les employer usuellement. Par conséquent, nous ne nous en occuperons point. Le lecteur qui désirerait la connaître, pourra consulter le premier volume de la nouvelle architecture hydraulique par M. de Prony.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Des chevaux.

286. On peut employer le cheval à porter des fardeaux ou à traîner; l'une et l'autre de ces deux manières d'agir ne sont point également avantageuses. Si l'on compare l'action de l'homme employé comme moteur à celle du cheval, il en résulte qu'un cheval peut communément produire, en tirant, un effet égal à celui que produiraient sept hommes; mais lorsqu'il s'agit de porter à dos un fardeau sur une pente raide, De la Hire (*a*) a observé que trois hommes, chargés chacun de 100 livres, monteront avec plus d'aisance et de vitesse qu'un cheval chargé de 300 livres.

287. L'expérience a indiqué qu'il est utile de charger à dos jusqu'à un certain point le cheval qui tire; les charretiers ont soin de disposer la charge de telle sorte, que le brancard ou le timon presse sur le dos des chevaux qui y sont attelés.

288. La meilleure disposition des traits, pendant que l'effet du tirage a lieu, est d'être parallèles au plan sur lequel se fait le tirage, ou d'avoir la même inclinaison que le chemin sur lequel roule la voiture; mais pour que les traits aient une pareille inclinaison pendant l'effort du tirage, il est nécessaire qu'ils soient un peu inclinés à l'horizon, lorsque le cheval ne fait point d'effort, parce que le poitrail du cheval s'abaissant pendant le tirage, l'extrémité antérieure des traits s'abaisse d'autant.

289. La force absolue ou la traction momentanée des chevaux de rouliers, mesurée par le *dynamomètre* de Regnier, varie entre 300 et 500 kilogrammes.

(*a*) Mémoires de l'Académie royale des sciences, pour l'année 1699.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La plus grande vitesse que prenne un cheval dans une course de peu de durée, est d'environ 15 mètres par seconde.

La vitesse au galop est d'environ	5, mètr.	5.
La vitesse au trot est d'environ	3,	5.
La vitesse au pas.	1,	7.
La longueur du pas ordinaire du cheval	0,	9.

290. La charge ordinaire d'un cheval varie entre 100 et 150 kilogrammes.

On calcule ordinairement la charge des charrettes à 700 ou 750 kilogrammes par cheval, sans y comprendre le poids de la voiture; et on évalue l'espace que la charrette parcourt, dans un chemin horizontal en bon état, à 38 kilomètres par chaque jour. La traction moyenne qu'un cheval exerce, en produisant cet effet, est d'environ 140 kilogrammes.

291. Un cheval, attelé à un manége, exerce une traction moyenne de 100 kilogrammes, et marche avec une vitesse moyenne de 0 mètres 8; la durée du travail est de quatre ou de cinq heures par jour. Les barres auxquelles les chevaux sont attelés, ont ordinairement de 5 à 7 mètres de longueur. Cette espèce de travail fatigue beaucoup les chevaux, et est capable de les ruiner promptement.

292. La quantité moyenne d'action journalière produite par un cheval qui tire une charrette, est équivalente à environ 5000 kilogrammes transportés à un kilomètre, et l'effet utile qui correspond à cette quantité d'action est équivalent au transport d'un poids de 28,500 kilogrammes à 1 kilomètre.

293. M. Guenyveau a remarqué (*a*) qu'il existe des diffé-

(*a*) Essai sur la science des machines, page 283.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rences considérables entre les quantités d'action journalière produites par des chevaux qui prennent des vitesses différentes.

En comparant la quantité d'action journalière qui se rapporte aux chevaux de rouliers avec celle des chevaux de diligence, qui vont toujours au trot, il a trouvé que ces deux quantités sont entre elles comme 5 est à 3 environ; il pense qu'il serait avantageux de ne faire marcher qu'au pas les chevaux qui exercent un effort de traction, et qu'il vaudrait mieux, à l'égard des chevaux qui font le service des machines à manége, de les faire travailler 7 ou 8 heures par jour, en les faisant marcher au pas, que de les faire aller au trot, comme on fait ordinairement pendant 4 ou 5 heures; ce qui n'empêcherait pas de donner à la résistance la vitesse convenable, au moyen de quelques légers changemens dans le rapport des leviers.

294. M. Guenyveau évalue la quantité d'action journalière totale fournie par un cheval attelé à un manége, à environ 1500 kilogrammes transportés à un kilomètre; et il paraît que l'effet utile moyen n'excède guère 600 kilogrammes transportés à 1 kilomètre.

Article III.

De l'eau employée comme moteur.

295. L'action motrice d'un courant d'eau agit sur des *organes mécaniques*, dont la disposition et la forme varient suivant les diverses circonstances locales. Les organes, habituellement employés, sont de quatre espèces; 1°. les *roues à aubes;* 2°. les *roues à augets;* 3°. les *roues à réaction;* 4°. les *machines à colonnes d'eau.*

Roues à aubes.

296. On appelle en général *roues à aubes* celles dont la circonférence est garnie d'un certain nombre de palettes dispo-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sées régulièrement à égales distances. On a donné le nom d'*aubes* à ces palettes, sur lesquelles s'exerce la force impulsive du courant.

297. On distingue plusieurs variétés de roues à aubes, dont voici les principales ; 1°. roues verticales qui se meuvent dans un coursier étroit ; 2°. roues verticales, placées sur le courant d'une rivière ; 3°. roues horizontales à aubes planes, roues horizontales à aubes recourbées.

298. D'après les expériences faites par d'Alembert, Condorcet et Bossut, dont nous avons parlé (259), il est prouvé que *la force impulsive d'un courant d'eau contre les aubes d'une roue, est plus grande dans un coursier que dans un large canal; et que, dans le premier cas, elle est à peu près le double de celle qui a lieu dans le second.*

299. On déduit de ce résultat expérimental les conséquences suivantes :

1°. On ne doit donner aux coursiers que la largeur purement nécessaire pour que la roue puisse se mouvoir sans difficulté.

2°. Lorsqu'on veut établir une machine sur le courant d'une rivière, il faut lui préparer une sorte de coursier, en la plaçant entre deux bateaux, qui ne laisseront entre eux que la distance nécessaire pour que la roue puisse se mouvoir sans empêchement.

3°. On devrait abandonner la méthode en usage sur plusieurs rivières, qui consiste à recevoir la force impulsive du courant sur deux roues placées des deux côtés d'un même bateau.

300. Les expériences que nous venons de citer, déterminent la valeur de la force impulsive directe d'un courant, dont la largeur est indéfinie, contre une surface plane ; *cette force est égale au poids d'une colonne de même fluide qui aurait pour base la surface choquée, et pour hauteur celle qui est*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

due à la vitesse avec laquelle se fait la percussion ; mais lorsque la surface qui reçoit le choc se meut dans un coursier étroit, alors la valeur de la force impulsive est double ; et conséquemment *elle est équivalente au double poids de la colonne de fluide, dont la base est égale à la surface choquée, et la hauteur est égale à celle due à la vitesse du courant.*

301. Il ne faut pas confondre la force impulsive du courant avec l'effet que la machine mue, par cette impulsion, doit produire ; nous allons démontrer que la valeur de l'*effet maximum* n'est, pour les roues verticales, que le quart de la valeur de la force impulsive que nous venons d'énoncer.

Des roues verticales.

302. Soient v la vitesse du courant ; x la vitesse des aubes ; Q la masse d'eau qui frappe les aubes pendant l'unité de temps ; $v - x$ sera la vitesse perdue dans le choc ; et $Q(v-x)^2$ la force vive qui y correspond ; la force vive du fluide avant le choc sera Qv^2, et après le choc, Qx^2 ; ainsi, la force vive communiquée à la résistance deviendra $Qv^2 - Qx^2 - Q(v-x)^2$, ou bien $2Q(vx - x^2)$.

303. Cette quantité doit être nulle quand la résistance est nulle ou infinie ; dans le premier cas, $x = v$, dans le second, $x = 0$; entre ces deux limites, il existe une valeur de x, qui rend l'expression précédente un maximum ; pour la déterminer, il faut différencier $x^2 = vx$, et l'on aura, en égalant à zero.

$$2xdx = vdx, \text{ et } x = \frac{v}{2};$$

conséquemment la force vive communiquée qui correspond au maximum est égale à $\frac{Qv^2}{2}$. *Ainsi, le plus grand effet possible des roues à aubes a lieu, lorsque la vitesse de ces aubes est*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la moitié de celle du courant, et le plus grand effet est égal à la moitié de la force vive possédée par le fluide.

304. La masse d'eau Q, qui frappe les aubes, est représentée par la surface choquée multipliée par la vitesse du courant; ainsi, si nous nommons S cette surface, $Q = Sv$; et l'expression $\frac{Qv^2}{2}$ devient $\frac{Sv^3}{2}$, ce qui indique que *les effets de deux roues à aubes sont comme les produits des surfaces qui reçoivent l'impression par les cubes des vitesses des courans; mais pour une même roue, et une même dépense d'eau, les effets sont comme les carrés des vitesses du courant.*

305. Reprenons l'expression de l'effet maximum $\frac{Qv^2}{2}$, substituons, au lieu de v^2, sa valeur gh (103), et nous aurons $\frac{Qgh}{2}$; mais Qg est le poids de la masse d'eau qui frappe les aubes dans l'unité de temps; et h est la hauteur de la chute qui correspond à la vitesse v du courant, donc *l'effet maximum des roues à aubes est égal à la moitié du produit du poids de l'eau qui agit immédiatement sur la roue, par la hauteur à laquelle est due la vitesse du courant.* Et si une roue à aubes était employée à élever de l'eau, *la limite de l'effet de la machine serait d'élever à la même hauteur la moitié de la quantité d'eau qui agit comme moteur.*

306. Ce résultat est différent de celui qu'on déduit de la théorie exposée précédemment (274); en effet, pour appliquer cette théorie aux fluides, il faudrait supposer que la portion de fluide qui frappe les aubes, puisse, après le choc, s'échapper librement, et cesser aussitôt de les comprimer. Cette supposition ne saurait être admise que dans le cas où la roue se meut dans un courant très-large; et elle s'éloignera d'autant plus de la vérité, que le canal sera plus resserré.

307. Toutes les fois qu'il s'agira de juger une machine mue

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par une roue à aubes, et de reconnaître si le moteur a été employé de la manière la plus avantageuse, il faudra prendre pour terme de comparaison *l'effet maximum* qui est, comme nous venons de le dire, équivalent à la moitié du produit du poids de l'eau qui agit immédiatement sur la roue, par la hauteur à laquelle est due la vitesse du courant, effet qui suppose que la vitesse des aubes est la moitié de celle du courant. Ainsi, une machine sera d'autant plus parfaite, que son *effet* utile se rapprochera davantage de ce maximum. Pour faire la comparaison, il faut connaître ou la vitesse du courant, ou la hauteur à laquelle cette vitesse est due; c'est cette hauteur que l'on désigne par le nom de *hauteur de la chute*.

S'il s'agit d'une machine déjà construite, ou bien d'une machine à établir auprès d'un courant dont on ne doit point changer la direction, le moyen qu'on emploie ordinairement pour déterminer la hauteur de la chute, est le tube de Pitot (perfectionné par Dubuat), dont nous avons parlé (235).

Pour effectuer cette opération avec exactitude, il ne faut pas oublier de fixer le tube à un piquet solidement établi, et d'examiner soigneusement si la branche horizontale est directement opposée au courant, et si l'autre est exactement verticale.

308. Lorsqu'il faut conduire un courant d'eau dans un endroit déterminé, on ne peut connaître quelle sera la hauteur de la chute qu'au moyen d'un nivellement. Tout ce qui regarde cette opération importante se trouve exposé avec beaucoup de soin dans le *Traité du Nivellement*, par Fabre.

309. Dans ce cas, il ne faut point confondre la hauteur effective de la chute avec la hauteur due à la vitesse qu'aura le courant. Celle-ci sera moindre que la première, et d'autant plus que le point de dérivation du canal sera éloigné du point où la machine doit être construite.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

310. La formule

$$U = -0{,}0469734 + \sqrt{(0{,}0022065 + 3041{,}47\frac{DZ}{I}} \quad (242)$$

servira à déterminer la vitesse qu'aura le courant au point où l'on veut établir la machine ; mais pour en faire usage, il faut déterminer par le *nivellement* la pente I du canal ; et par le *jaugeage*, les dimensions que doit avoir le canal.

311. Pour qu'une roue à aubes produise l'effet qu'on doit en attendre, il faut, autant qu'il est possible, empêcher que l'eau qui agit contre la surface antérieure des aubes ne reflue par derrière, après le choc, et ne ralentisse par son opposition le mouvement de la roue. Le moyen le plus simple d'obvier à cet inconvénient est d'élever la roue quelques pouces au-dessus du canal, pour y établir un petit gradin qui facilitera l'écoulement de l'eau.

Roues horizontales.

312. Soit AA (Pl. III, fig. 6) une roue horizontale ; supposons que HM indique la hauteur de la chute ; faisons passer par le point H l'horizontale BB ; tirons la ligne BL perpendiculaire à l'aube L, et supposons que la ligne CL représente la vitesse qui correspond à la force impulsive directe du fluide. Cette vitesse doit être décomposée en deux, dont l'une, représentée par DL, est perdue ; la seconde, par CD, sera donc la seule qui agira activement. Nommons a l'angle CLD ; v la vitesse du courant perpendiculaire à l'aube ; v' la vitesse relative dans le sens horizontal. Nous aurons

$$v = \frac{v'}{Sin.\, a}.$$

Substituant cette valeur de v dans les formules trouvées précédemment, il en résultera que la vitesse qui correspond au maximum est $x = \frac{v'}{2\, Sin.\, a}$. On voit que cette quantité augmente à mesure que $Sin.\, a$ diminue.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

313. Pour que les roues horizontales produisent en général le plus grand effet, il faut que l'eau soit dirigée contre les aubes par un coursier qui suive exactement la courbure d'une partie de la roue, afin qu'aucun filet d'eau ne puisse s'échapper sans avoir agi activement contre les aubes.

314. Il est utile de donner une certaine courbure aux aubes des roues horizontales; cette courbure devrait être déterminée de manière que toutes les parties du fluide puissent frapper à chaque instant la surface qui leur est opposée le plus directement possible; et, qu'après la percussion, le fluide qui a agi puisse s'échapper dans une direction horizontale. Mais il est très-difficile de remplir complétement ces deux conditions.

315. On ne donne ordinairement à ces roues qu'un diamètre d'environ un mètre et demi, et on ne les emploie guère que dans les pays de montagne où les courans d'eau sont abondans et animés d'une grande vitesse. Pour les adapter avantageusement à un moulin à monture, il faut qu'elles fassent 60 tours environ dans une minute. Ainsi, si elles ont un mètre et demi de diamètre, il faudra que la vitesse du courant soit d'environ 9 mètres par seconde, vitesse qui correspond à une hauteur de 4,13 mètres.

316. Dans ce cas, le moulin sera de la plus grande simplicité possible, parce que l'on pourra supprimer tout engrenage, et que l'on pourra adapter la meule tournante à l'extrémité supérieure de l'axe même de la roue.

317. Mais si la chute est moindre que celle que nous venons d'indiquer, et si l'on ne peut pas diminuer d'autant le diamètre de la roue, la meule n'aura point une vitesse suffisante pour donner une bonne et abondante mouture, et le moulin ne remplira qu'imparfaitement son but.

318. D'ailleurs, dans le cas même que nous venons d'indi-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

quer, si la quantité d'eau dont on peut disposer n'est point surabondante, l'on obtiendra un effet plus grand, et une mouture plus parfaite en employant une roue à augets (dont nous nous occuperons bientôt).

Expériences sur les roues à aubes.

319. Sméaton, célèbre ingénieur anglais, a fait une série d'expériences pour constater l'effet des roues à aubes. L'ouvrage de Sméaton, qui traite de cet objet a été traduit par M. Gérard.

Les résultats suivans de ces belles et utiles expériences confirment la théorie que nous avons exposée.

1°. La hauteur due à la vitesse du courant étant la même, les effets d'une roue à aubes sont à peu près comme les quantités d'eau dépensées.

2°. La dépense d'eau étant constante, l'effet est à peu près proportionnel aux hauteurs.

3°. La quantité d'eau étant constante, l'effet est à peu près comme le carré des vitesses.

4°. L'ouverture de la vanne étant constante, l'effet sera à très-peu près comme le cube de la vitesse de l'eau.

320. Quelques-unes des expériences de Sméaton indiquent que la vitesse qui correspond au maximum d'effet, est la moitié de celle du courant; mais la valeur moyenne de cette vitesse qu'on déduit de toutes ces expériences, est d'environ $\frac{30}{86}$ de celle du courant.

La valeur moyenne de l'effet utile maximum comparée à celle de l'effet dynamique de l'eau, est environ comme 10 à 3,2.

321. Les expériences de Bossut, sur les roues à aubes, lui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donnent, pour la valeur de la vitesse qui correspond à l'effet maximum, environ deux cinquièmes de la vitesse du courant, et quelquefois un peu plus.

322. D'autres expériences du même auteur, ayant eu pour but de déterminer la position la plus avantageuse des aubes, et le nombre d'aubes également le plus avantageux, ont donné les résultats suivans :

1°. Si une roue verticale reçoit l'impulsion d'un courant d'eau conduit par un coursier qui ait peu de pente, il convient de diriger les ailes au centre; au contraire, quand les coursiers ont beaucoup de pente, elles doivent être inclinées d'une certaine quantité au rayon, tant pour être frappées perpendiculairement, que pour recevoir une augmentation de force par le poids de l'eau.

Il faut observer cependant que cette action du poids de l'eau n'est jamais bien considérable, dans le cas dont il s'agit, et qu'elle peut être négligée dans les calculs.

2°. Quand le courant, dirigé par un coursier contre une roue à aubes verticales, est rapide, on peut donner 48 aubes à une roue, lorsque l'arc plongé n'excède pas 25 ou 30 degrés.

3°. Lorsque les roues agissent sur un large courant, on est dans l'usage de leur donner 8, 10 ou 12 ailes; mais d'après les expériences de Bossut, il serait avantageux de porter ce nombre jusqu'à 18.

4°. Dans les courans rapides, il est avantageux de donner aux aubes une inclinaison de 15 à 30 degrés; et lorsque la vitesse du courant est médiocre, une inclinaison un peu plus grande sera avantageuse.

Roues à augets.

323. On donne le nom de *roues à pots* ou à augets aux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

roues verticales dont la circonférence est garnie d'un certain nombre de cavités placées à distances égales. Ces cavités, que l'on appelle *augets*, *godets*, ou *pots*, sont destinées à recevoir de l'eau qu'un coursier y verse successivement; et leur forme doit être telle que lorsque la roue tourne, ils puissent retenir la plus grande quantité d'eau possible, et qu'ils ne se vident entièrement que lorsqu'ils seront parvenus au point le plus bas.

324. Les roues à augets sont mues uniquement par le poids de l'eau dont une partie de leur circonférence est chargée, lorsque l'eau entre dans les augets tangentiellement à la roue, et avec une vitesse égale à celle de la circonférence. Si la vitesse de la roue est moindre que celle de l'eau affluente, celle-ci agit à la fois par le choc et par son poids.

Premier cas.

325. Soit u la vitesse de la roue à sa circonférence; H la hauteur verticale de l'arc occupé successivement par les augets pleins d'eau. Si l'eau tombait librement, elle aurait acquis au bas de la chute H, une vitesse $\sqrt{u^2 + 2gH}$, puisqu'elle arrive sur la roue avec une vitesse u. Nommons M la masse d'eau qui agit par son poids sur la roue pendant l'unité de temps; la force vive de la force motrice qui en résultera sera $M(u^2 + 2gH)$. Puisque, suivant l'hypothèse, la roue se meut avec la même vitesse u qu'avait l'eau avant d'entrer dans les augets, l'eau sortira de ces mêmes augets avec la vitesse u, de sorte qu'il y a une perte de force vive égale à Mu^2, et la force vive communiquée à la résistance se réduit à $M2gH$. On voit par-là que le maximum d'effet de ces roues exigerait que leur vitesse de rotation fût infiniment petite, et qu'alors la force vive du moteur serait employée en totalité.

326. Il résulte de cette proposition :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1°. Qu'une certaine quantité d'eau donnée sera employée d'autant plus utilement sur une roue à augets, que celle-ci tournera plus lentement, en supposant qu'elle soit reçue en entier sur la roue.

2°. Que l'effet de la roue à augets sera d'autant plus grand que la vitesse de la roue sera moindre.

3°. Que si u est une quantité très-petite, l'effort exercé par le moteur est équivalent au poids de la masse d'eau, contenue dans les augets, multiplié par la hauteur H de l'arc occupé successivement par les augets pleins d'eau.

4°. La limite de l'effet que peut produire une certaine quantité d'eau, agissant par son poids sur une roue à augets, est égale au poids de cette masse multiplié par la hauteur de la chute ; de sorte que l'effet maximum d'une roue à augets employée à élever de l'eau, sera d'en élever, à une hauteur égale à celle de la chute, une quantité égale à celle dépensée. Ainsi le plus grand effet des roues à augets est double du plus grand effet des roues à aubes.

Il est évident que l'effet réel s'éloignera toujours plus ou moins de cet effet maximum, car il n'est pas possible de ne donner à la roue qu'une vitesse infiniment petite.

5°. Pour obtenir d'une roue à augets le plus grand effet, il faut que son diamètre soit égal à toute la hauteur de la chute ou plus grand que cette hauteur, et que l'eau entre dans les augets au niveau de la surface du réservoir.

Second cas.

327. Quand la vitesse de la roue est moindre que celle de l'eau affluente, l'action de la roue dépend du choc et du poids de l'eau.

Nommons V la vitesse de l'eau affluente, et u celle de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

roue ; la force vive totale de l'eau sera $M(V^2 + 2gH)$ (325) ; lorsqu'elle quitte les augets, elle conserve la force vive Mu^2, et le choc de l'eau occasione une perte égale à $M(V - u)^2$. L'effet produit se réduit à

$$M(V^2 + 2gH) - Mu^2 - M(V - u)^2.$$

Pour connaître la vitesse qui correspond au maximum d'effet, il faut différencier l'expression précédente par rapport à u, et égalant à zéro, l'on trouve $u = \frac{V}{2}$.

Expériences sur les roues à augets.

328. Il résulte des expériences de Sméaton,

1°. Qu'à dépense égale de force motrice, l'effet d'une roue à augets à pression simple, est double de celui d'une roue à aubes. Ce résultat est parfaitement conforme à la théorie (325).

2°. L'effet des roues à augets avec impulsion se compose de deux effets : l'un est égal à celui d'une roue à aubes qui recevrait le choc d'un courant dont la vitesse serait celle due à la hauteur représentée par la différence de niveau entre la surface du réservoir et le point où le choc s'exerce ; l'autre égal à l'effet d'une roue à augets, dont la hauteur serait la différence de niveau entre le point où le choc s'exerce et le fond du coursier.

3°. Plus une roue à augets est haute par rapport à la chute totale, et plus l'effet qu'elle produit est grand.

4°. La vitesse de la roue qui correspond au maximum d'effet est à peu près d'un mètre par seconde.

Sméaton a reconnu que le mouvement d'une roue à augets cesse en général d'être régulier, lorsque sa vitesse est au-dessous de deux pieds.

Les expériences de Bossut sur les roues à augets, ont in-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diqué que la vitesse requise par le plus grand effet est à la vitesse que la roue prendrait naturellement, si elle n'avait aucun fardeau à élever comme 1 est à 5 environ.

Roues à réaction.

329. Les roues à réaction sont en général composées d'un certain nombre de tuyaux horizontaux, communiquant tous avec un même tuyau vertical, autour duquel ils peuvent tourner. Le tuyau vertical est supposé constamment plein d'eau à la même hauteur, et chaque tuyau horizontal est percé latéralement d'une ouverture, par laquelle le liquide s'écoule. L'écoulement détermine une pression sur la paroi opposée à l'orifice (comme nous l'avons déjà expliqué) (153); et c'est cette pression qui devient la force motrice de la roue.

**330. (*a*) Nommons a la distance d'un des orifices à l'axe de rotation; u la vitesse de la roue à l'orifice; H la hauteur de la colonne contenue dans le tuyau vertical.

Chaque particule de fluide est soumise simultanément à deux actions; l'une dépendant de la force de la gravité, que nous désignerons par g; et l'autre de la force centrifuge, provenant du mouvement de rotation.

Rapportons chaque particule à des axes rectangulaires, dont celui des z coïncidera avec l'axe vertical de rotation. A une distance x de l'axe z, la vitesse sera $\frac{ux}{a}$; mais une force centrifuge est en général représentée par le carré de la vitesse divisé par le rayon de la circonférence décrite; ainsi la force centrifuge sera, dans notre cas, $\frac{u^2x}{a^2}$. Nommons p la pression motrice; cette pression est le résultat de la force centrifuge et de la force de la pesanteur qu'il faudra prendre négativement, puisqu'elle tend à

(*a*) Cette démonstration est due à M. Petit.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diminuer la coordonnée z ; on aura donc, pour une particule du fluide,

$$dp = \frac{u^2 x}{a^2}\, dx - g dz\,;$$

intégrant et observant que $p = 0$ quand $x = 0$, et $z = H$, on aura

$$p = \frac{u^2 x^2}{2a^2} + g\,(H - z);$$

ainsi à l'orifice où $z = 0$, et $x = a$, on trouve

$$p = \frac{u^2}{2} + gH;$$

et si l'on représente par H' la hauteur due à la vitesse u, on aura

$$p = g\,(H + H').$$

Maintenant, d'après la loi de l'écoulement des liquides, la vitesse produite par la pression d'une colonne d'eau d'une hauteur verticale $H + H'$ est égale à celle qu'acquerrait un corps grave en tombant de cette hauteur; ainsi l'eau sortira des tuyaux avec leur vitesse relative $\sqrt{2g(H+H')}$, et par conséquent sa vitesse absolue dans l'espace sera

$$\sqrt{2g(H+H')} - \sqrt{2gH'}.$$

La force vive perdue dans cette machine est donc

$$M\,[\sqrt{2g(H+H')} - \sqrt{2gH'}\,]^2.$$

Ainsi, pour trouver la vitesse qui convient au maximum d'effet, il faut chercher la valeur de H', qui rend un minimum l'expression

$$\sqrt{2g(H+H')} - \sqrt{2gH'}\,;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

or le coefficient différentiel de cette quantité, par rapport à H', est

$$g\left[\frac{1}{\sqrt{2g(H+H')}} - \frac{1}{\sqrt{2gH}}\right].$$

Ce coefficient étant toujours négatif, et ne devenant nul que quand H' est infini, il en résulte que, *dans les roues à réaction, il y a toujours une certaine portion de la force active perdue ; mais que cette perte diminue à mesure que la roue tourne avec une plus grande vitesse.*

331. Les roues à réaction ont donc une propriété entièrement opposée à celle des roues à augets ; car, pour obtenir le maximum d'effet dans les roues à augets, il faut que leur vitesse soit très-petite, tandis que pour les roues à réaction, il faut que la vitesse soit la plus grande possible. Il résulte de cela que l'on ne peut employer avantageusement les roues à réaction que dans les endroits où se trouvent des chutes d'eau très-élevées : et nous croyons que, dans ce cas, on pourra les substituer avantageusement aux roues horizontales à aubes. Mais si la quantité d'eau disponible est bornée, et qu'on ait intérêt à l'économiser autant que possible, alors il faudra toujours accorder la préférence aux roues à augets, qui produisent en général un plus grand effet utile.

332. Les roues à réaction devraient avoir une vitesse de rotation (mesurée aux orifices de sortie) égale à celle de l'eau qui s'écoule ; car, alors, l'eau tombera comme si son mouvement était parfaitement libre ; si la vitesse de rotation est plus grande que celle de l'écoulement, la machine entraînera nécessairement, pendant un certain temps, de l'eau qui devrait être sortie, et consommera en pure perte une portion de la force motrice ; si, au contraire, la vitesse de rotation est plus petite, l'eau jetée au dehors détruira une certaine quantité de mouvement qui sera perdu pour l'effet utile.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

333. Cette espèce de roues est sujette à des frottemens considérables, occasionés par le poids de l'eau contenue dans le tube vertical et dans les branches horizontales, et sa construction n'est pas sans difficultés.

Machines à colonne d'eau.

334. Une machine à colonne d'eau (Pl. III, fig. 7) est composée, 1°. d'un cylindre A vertical, qui renferme un piston B mobile; 2°. d'un tuyau D vertical, ou incliné, qui communique avec le cylindre, au moyen de deux tuyaux horizontaux M et N, munis chacun d'une soupape.

L'eau motrice tombe dans le tuyau D, et le remplit; si alors la communication N s'ouvre, tandis que la communication M reste fermée, il en résultera que la colonne d'eau contenue dans le tuyau D poussera le piston du bas en haut, avec une force équivalente au poids d'un cylindre d'eau qui aurait pour base la surface inférieure du piston, et pour hauteur, la distance verticale du piston au sommet du tuyau D (148). Ainsi, si nous supposons que r soit le rayon du piston, que π soit le rapport de la circonférence au diamètre, H la distance verticale du piston au sommet du tuyau; la pression exercée sur le piston en repos sera $gH\pi r^2$.

335. Le piston B s'élève en vertu de cette pression; et lorsqu'il est arrivé à la fin de sa course, la communication N se ferme; la communication M s'ouvre, et en même temps on laisse écouler (par une ouverture disposée à cet effet) l'eau qui se trouve entre le piston et la soupape du tuyau N; le piston étant alors comprimé de haut en bas descend. Quand il est parvenu au point le plus bas, la communication M se ferme, on laisse écouler l'eau qui se trouve dans le cylindre, au-dessus du piston, et l'autre communication N s'ouvre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

336. Par la répétition successive de ces effets, le piston monte et descend alternativement. Ce piston porte une tige verticale qui transmet le mouvement aux autres mobiles dont est composée la machine.

337. A chaque changement de direction du mouvement, la masse d'eau qui forme la colonne motrice doit perdre le mouvement acquis pour en prendre un nouveau après un petit intervalle. Il y a donc, à chaque coup de piston, une certaine quantité de force vive de perdue, et cette quantité sera égale au produit de la masse d'eau mise en mouvement par la vitesse qu'a le piston lorsqu'il achève sa course. Voilà pourquoi il importe essentiellement de diminuer la vitesse du piston vers le terme de son mouvement, ce qu'on obtient en diminuant peu à peu l'orifice par lequel l'eau de la colonne passe dans le cylindre.

338. Le mouvement du piston n'étant point en général uniforme, supposons que la vitesse moyenne soit v. La pression totale que le moteur exercerait, si le piston était immobile, est représentée par $\pi r^2 gH$; mais cette pression due à la pesanteur, devant être diminuée de la vitesse acquise par le piston, se réduira à $\pi r^2 H(g - v)$, lorsque le piston sera en mouvement, et l'effet produit par le piston sera $\pi r^2 H(g - v)\, v$; mais $\pi r^2 v$ indique la quantité d'eau que la machine dépense; nommant Q cette quantité, l'expression précédente devient $QgH - Qv$. On voit que cet effet sera d'autant plus grand que la vitesse du piston sera moindre. Ainsi, si la vitesse v était assez petite pour pouvoir négliger le second terme de l'expression précédente, l'effet de la machine à colonne d'eau serait égal au produit du poids de l'eau dépensée par la hauteur de la chute.

339. Ce maximum d'effet, équivalent à celui qui correspond aux roues à augets, est bien supérieur à celui qu'on peut

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

obtenir en pratique. Plusieurs causes tendent à le diminuer.

1°. Le frottement du piston dans le cylindre : Langsdorf a reconnu, par de nombreuses expériences, que la valeur moyenne de la perte occasionée par cette cause est exprimée par $0{,}30 . rH$.

2°. La difficulté que l'eau éprouve à se mouvoir dans les différens conduits, et surtout à passer par les ouvertures des soupapes et des robinets;

3°. Les pertes de forces occasionées par les mouvemens alternatifs des mobiles qui composent cette machine;

4°. Indépendamment de ces pertes, la vitesse du piston ne peut jamais être assez petite pour que l'effet de la machine puisse être confondu avec le maximum.

340. Il résulte des observations faites par M. Baillet (*a*) sur les machines à colonnes d'eau établies en Hongrie, que ces machines utilisent environ les $\frac{4}{10}$ de la force employée à les mouvoir.

341. Le rayon r du cylindre d'une machine à colonne d'eau se détermine, d'après cette considération, qu'il faut, pour que la pression soit la même à chaque coup de piston, que la hauteur H soit constante, et par conséquent qu'on ait $Q = \pi r^2 v$, ce qui donne $r = \sqrt{\frac{Q}{\pi v}}$, en supposant que la quantité d'eau motrice soit invariable.

342. Les roues à augets doivent être préférées aux machines à colonne d'eau, quand la hauteur de la chute ne surpasse pas 13 ou 14 mètres, parce que leur mouvement, étant circulaire continu, jouit d'une uniformité que ne peut avoir le mouvement alternatif des machines à colonne d'eau dans lesquelles

(*a*) Traité élémentaire des machines, par M. Hachette, deuxième édition, page 125.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les changemens fréquens de direction occasionent nécessairement des pertes qui n'ont pas lieu quand le mouvement est continu.

343. Toutes les fois que la hauteur de la chute surpasse 13 ou 14 mètres, la machine à colonne d'eau est préférable aux roues à augets, que dans ce cas l'on superpose les unes aux autres, ne pouvant se servir d'une seule, dont les dimensions seraient trop colossales. Cette superposition occasione beaucoup d'embarras et de dépense, et produit nécessairement une déperdition d'eau considérable.

344. La machine à colonne d'eau n'occupe que très-peu d'espace; elle peut recueillir sans déperdition sensible toute l'eau motrice que l'on a disponible; les tuyaux, qui renferment la colonne motrice, peuvent avoir toutes sortes de formes, être inclinés ou verticaux. La machine à colonne d'eau est surtout très-utile dans les travaux des mines, où l'on a fréquemment occasion d'utiliser une certaine quantité d'eau qui tombe d'une hauteur considérable.

Récapitulation.

345. Il résulte de ce que nous avons exposé dans cet article, que de tous les organes mécaniques destinés à recevoir l'action motrice de l'eau, le plus avantageux est la roue à augets; mais pour en obtenir tout l'effet qu'on peut en attendre, il faut, 1°. que l'eau entre dans les augets au niveau de la surface du réservoir; 2°. que son diamètre soit au moins égal à la hauteur de la chute; 3°. que sa vitesse soit petite, mais qu'elle soit telle cependant que l'arc décrit par les augets dans chaque seconde, n'ait pas moins de 0,7 mètre de longueur développée, ni guère plus qu'un mètre.

346. Lorsque la hauteur de la chute n'est point assez grande pour qu'on puisse employer une roue à augets, alors il faut re-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

courir aux roues verticales à aubes, dont le maximum d'effet n'est qu'environ la moitié de celui que peut produire une roue à augets. Pour qu'une roue verticale à aubes soit employée le plus avantageusement possible, il faut, qu'indépendamment de l'exactitude de sa construction, elle remplisse les conditions suivantes, 1°. que sa vitesse, mesurée au centre d'impulsion des aubes, soit un peu moindre que la moitié de celle du courant; 2°. qu'elle soit placée dans un coursier qui n'ait que la largeur purement nécessaire pour qu'elle se meuve librement; 3°. qu'un petit gradin soit pratiqué au point le plus bas du coursier, pour que l'eau, après avoir agi activement, ne puisse refluer derrière les aubes, et ralentir leur mouvement.

347. Les roues à aubes horizontales ne présentent un avantage bien marqué que lorsqu'elles fournissent le moyen de simplifier le mécanisme; par exemple, elles donnent aux moulins à mouture la plus grande simplicité possible, lorsque le courant d'eau qui frappe leurs aubes a une vitesse suffisante pour leur faire décrire soixante révolutions en une minute. Mais s'il s'agit d'économiser la force motrice, il faut leur préférer les roues à augets, qui, dans ce cas, doivent être aussi préférées aux roues à réaction.

348. Les roues à réaction offrent la propriété très-remarquable d'exiger la plus grande vitesse possible pour produire le maximum d'effet; propriété diamétralement opposée à celle des roues à augets, et des machines à colonne d'eau qui exigent une grande lenteur pour produire l'effet maximum.

349. Les machines à colonne d'eau, moins utiles que les roues à augets, lorsque la hauteur de la chute ne surpasse pas 13 ou 14 mètres, doivent être préférées pour les chutes plus élevées.

350. Les calculs relatifs aux organes mécaniques que nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

avons passés en revue, exigent la connaissance ou de la hauteur de la chute, ou de la vitesse qui y correspond; lorsqu'on connaît l'une de ces deux choses, l'on détermine aisément la seconde à l'aide de la formule $v=\sqrt{2gh}$. Pour faciliter cette détermination, nous avons ajouté à la fin de cet ouvrage deux tables qui donnent les vitesses correspondantes à des hauteurs déterminées, l'une en mètres, et l'autre en pieds.

ARTICLE IV.

Des fluides élastiques employés comme moteurs.

351. M. Petit, jeune savant dont les sciences déplorent la perte prématurée, a donné, dans un mémoire fort intéressant (*a*), une théorie des fluides élastiques employés comme moteurs. Cette théorie est déduite du principe des forces vives; nous allons la transcrire telle que son auteur l'a exposée.

352. Dans les fluides incompressibles, tels que l'eau, la force vive est immédiatement mesurée par le produit de la masse écoulée par le carré de la vitesse qui l'anime; mais dans les fluides élastiques, lorsqu'ils agissent en se dilatant, l'expression de cette force ne se présente pas aussi directement; on la détermine aisément de la manière suivante :

353. Imaginons que le fluide dont il s'agit soit renfermé dans un tuyau horizontal, fermé par une de ses extrémités, et contenant un piston parfaitement mobile; représentons par b la section du tuyau, et par a la longueur de la colonne cylindrique occupée par le fluide, et comprise entre le fond du tube et le piston. Appelons h la hauteur de la colonne d'eau, dont le poids ferait équilibre à l'élasticité de ce fluide, et supposons enfin que

(*a*) Ce mémoire est inséré dans la seconde édition de l'*Essai sur la composition des machines*, par MM. Lanz et Bétancourt.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le piston ne supporte aucune pression extérieure. Celle qu'il éprouve intérieurement lui communiquera un mouvement accéléré dont il est facile de former l'équation.

354. Si l'on désigne par v la vitesse acquise après un temps t, et par x la longueur du cylindre occupée au même instant par le fluide, on remarquera que son élasticité s'est réduite à $\frac{ha}{x}$, et, par conséquent, que la force motrice est égale à $g\frac{\delta hab}{x}$, g représentant l'intensité de la pesanteur, et δ la densité de l'eau ; mais la force motrice est représentée en général par

$$m\frac{dv}{dt}, \text{ ou par } m\frac{vdv}{dx};$$

m étant ici la masse du piston, on a donc

$$mvdv = g\frac{\delta hab}{x}dx.$$

Intégrant et déterminant la constante, de manière que v soit nul quand $x = a$, on trouvera

$$mv^2 = 2g\delta hab.\log.\frac{x}{a}.$$

Si le piston supportait sur sa face extérieure une pression constante, mesurée par le poids d'une colonne d'eau dont la hauteur fût h', on trouverait aisément pour la force vive

$$2g\delta b\left[ha\log.\frac{x}{a} - h'(x-a)\right].$$

Enfin, si la pression intérieure est elle-même constante, ce qui a lieu lorsqu'une nouvelle quantité de fluide vient, à chaque instant, compenser la diminution d'élasticité résultante de la dilatation, on obtient pour la force vive

$$2g\delta b(h-h')(x-a).$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ce dernier cas est évidemment celui des vapeurs dans les pompes à feu.

355. Chacun de ces trois résultats peut être présenté d'une manière un peu différente, et qui a l'avantage de se rapprocher des considérations usitées dans la pratique. On sait qu'une force vive φ est capable d'élever à une hauteur h un poids $\frac{\varphi}{2gh}$. Considérées sous ce point de vue, les expressions précédentes conduisent aux lois suivantes :

1°. Lorsqu'un fluide élastique occupant un volume a, et exerçant une pression égale à celle d'une colonne dont la hauteur est h, se dilate sans résistance extérieure, la force vive qu'il a développée lorsque son volume est devenu x, serait capable d'élever à la hauteur h le poids d'une masse d'eau, dont le volume serait $a \log. \frac{x}{a}$;

2°. Si le fluide que nous venons de considérer avait à vaincre une pression extérieure constante, mesurée par le poids d'une colonne d'eau, dont la hauteur fût h', la force vive, développée en passant du volume a au volume x, ne serait plus capable d'élever à la hauteur h que le poids d'une masse d'eau dont le volume serait

$$a \log. \frac{x}{a} - \frac{h'}{h}(x - a);$$

3°. Lorsqu'un piston se trouve soumis à deux pressions constantes, exercées en sens contraire par des fluides dont les élasticités font équilibre à des colonnes d'eau de hauteur h et h', la force vive, communiquée au piston, serait capable d'élever à la hauteur $h - h'$ le poids d'une masse d'eau, dont le volume serait égal à celui que le piston a parcouru.

356. Pour donner un exemple de l'application de ces lois, nous allons comparer entre elles les forces vives que peut pro-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

duire une même quantité de chaleur, en supposant qu'on l'emploie successivement à vaporiser de l'eau et à échauffer de l'air.

Supposons que la quantité d'eau vaporisée soit d'un gramme pris à la température de la glace fondante, réduite à l'état de vapeur à 100°. (thermomètre centigrade), elle occupera à peu près 1700 centimètres cubes, et exercera une pression égale à celle d'une colonne d'eau de 10 mètres de hauteur.

En la condensant complétement, la force vive développée sera, d'après ce que nous venons d'établir, capable d'élever à 10 mètres le poids de 1700 centimètres cubes, ou, ce qui revient au même, d'élever à un mètre un poids de 17 kilogrammes.

Or, la chaleur nécessaire pour vaporiser un gramme d'eau pourrait, d'après des expériences connues, échauffer d'un degré 666 grammes d'eau, et par conséquent pourrait communiquer le même degré de chaleur à 2500 grammes d'air sous la pression d'une colonne d'eau de 10 mètres, en supposant, conformément aux expériences de Laroche et Bérard, que, dans cet état, le calorique spécifique de l'air soit 0,267, celui de l'eau étant pris pour unité. L'élasticité de cet air augmenterait de $0^{\text{mèt.}},0375$; la force vive produite serait donc capable d'élever à $0^{\text{mèt.}},0375$ le poids d'un volume d'eau égal à celui qu'occupent les 2500 grammes d'air. Ce volume est de 1925 décimètres cubes; ainsi, réduction faite, la force vive que nous cherchons est suffisante pour élever à un mètre de hauteur un poids de $72^{\text{kilog.}},2$, résultat plus que quadruple de celui que donne la vapeur. Ce résultat indique qu'il serait utile de perfectionner les machines qui, comme le pyréolophore de MM. Niepce (*a*),

(*a*) Cette invention est décrite dans notre Traité de la composition des Machines, page 197.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ont pour moteur l'air subitement dilaté par la chaleur. On n'est pas encore parvenu à employer avec succès ces sortes de machines.

Machines à vapeur.

357. Les machines à vapeur actuellement en usage, sont de deux espèces; 1°. la machine à double effet et à pression ordinaire; 2°. la machine à forte pression et à force expansive.

358. Dans l'une et dans l'autre, la vapeur élastique agit alternativement sur la base supérieure, puis sur la base inférieure d'un piston qui se meut dans un cylindre vertical; mais dans la première espèce, l'introduction de la vapeur ne cesse que lorsque le piston est parvenu à la fin de sa course, soit en montant, soit en descendant; et la vapeur qui a produit l'ascension ou la descente, passe immédiatement au *condenseur* où elle se condense par le contact de l'eau froide.

Dans la seconde espèce, l'introduction de la vapeur cesse avant la fin de la course du piston, ce qui permet à la vapeur introduite d'utiliser, par son expansion, avant de se rendre au refrigérant, une portion de la force qui lui reste.

359. Les machines à deux cylindres, connues sous le nom de machines de Wolf, que M. Edward a importées en France, sont construites d'après le même principe que celles de la seconde espèce que nous venons d'indiquer. Voici les différences qui distinguent les machines à expansion à deux cylindres, de celles à un cylindre que l'on nomme communément machines d'Olivier Evans.

360. Dans les machines d'Olivier Evans, que nous croyons devoir être préférées parce qu'elles sont plus simples, l'introduction de la vapeur étant suspendue avant la fin de la course du piston, il achève cette course en vertu d'une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

continuation d'effort que la vapeur, introduite préalablement, exerce en se dilatant.

361. Dans les machines de Wolf, deux cylindres de capacité différente, mais ayant la même hauteur, sont placés à côté l'un de l'autre. Soient *A* et *B* (Pl. III, fig. 8) les deux cylindres dans lesquels se meuvent simultanément les deux pistons *p* et *q* dont les tiges correspondent au même balancier.

362. Le cylindre *A* étant destiné à recevoir immédiatement la vapeur motrice, a deux communications *b* et *d* avec la chaudière. (Nous avons indiqué dans la figure les divers tuyaux de communication, non pas comme ils sont disposés ordinairement dans les machines, mais de la manière que nous avons crue la plus favorable pour qu'on en comprenne aisément le jeu.) Le haut du cylindre *A* communique avec le bas du cylindre *B*, et réciproquement. Le cylindre *B* a deux communications avec le condenseur. Chaque tuyau de communication est censé garni de sa soupape.

363. Lorsque la communication de la chaudière avec le sommet du petit cylindre est ouverte, celle *h* qui joint le fond du petit cylindre au sommet du grand, et celle *c* qui va du fond du grand au condenseur, sont également ouvertes; dans le même temps, les trois autres communications *f*, *g*, *b* sont fermées, et ne s'ouvrent que lorsque les trois précédentes se ferment.

364. Cela posé, supposons que les deux pistons *p*, *q*, soient parvenus au sommet de leur course, et soient prêts à redescendre, alors la vapeur qui sort de la chaudière avec une force élastique, double ou triple de celle de l'air atmosphérique, entre au-dessus du petit piston, et le pousse vers le bas; la vapeur qui est au-dessous de ce piston, passe par le sommet du grand cylindre, au-dessus du grand piston qui sera poussé de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

même que le petit, vers le bas; enfin, la vapeur au-dessous du grand piston, passe au condenseur. Les deux pistons étant ainsi descendus au fond de leurs cylindres respectifs, toutes les communications qui avaient été ouvertes par une course de pistons, se ferment, et les autres s'ouvrent par la course en sens contraire; la vapeur qui passe de la chaudière au fond du petit cylindre, force le petit piston de s'élever; la vapeur en dessus de ce piston entre au-dessous du grand, et les deux pistons montent en même temps; enfin, ce grand piston, en s'élevant, pousse dans le condenseur la vapeur qui est au-dessus de lui.

365. Ces mouvemens simultanés et successifs des deux pistons sont produits l'un par l'action directe de la vapeur qui sort de la chaudière pour emplir le petit cylindre, et l'autre par la vapeur qui se dilate, en passant du petit cylindre dans le grand.

366. Dans la machine de Watt, à chaque coup de piston, la condensation détruit un volume de vapeur égal à celui de la capacité du cylindre, et dont la force élastique est à peu près la même que celle de la vapeur contenue dans la chaudière.

Dans les machines d'Olivier Evans et de Wolf, on économise la vapeur, en profitant de son expansion, et on ne condense la vapeur que lorsque sa force élastique a été considérablement diminuée par la dilatation.

Machine de Watt.

367. En supposant que la condensation soit parfaite, et que la température de la vapeur qui agit sur le piston soit de 100 degrés du thermomètre centigrade, ou de 80 degrés du thermomètre de Réaumur, la pression sera équivalente au poids d'une colonne d'eau de 10 mètres de hauteur, et qui aurait pour base la base du piston. Cette pression doit être multipliée par la vitesse du piston ou par l'espace qu'il parcourt en une seconde,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

lequel est communément d'un mètre; ainsi, d'après ces suppositions, l'effet de la force motrice qui correspond à chaque centimètre carré de la base du piston est d'un kilogramme élevé à un mètre par seconde; et l'effet produit en 24 heures, c'est-à-dire en 86400″, sera de 86,4 kilogrammes élevés à un kilomètre par chaque centimètre carré.

368. La quantité de vapeur nécessaire pour produire cet effet, occupe pour chaque seconde le volume d'un dixième de litre, dont le poids, 1700 fois moindre que celui d'un pareil volume d'eau, est $\frac{1}{17}$ de gramme; de manière que le poids de l'eau réduite en vapeur, serait de 5^{kilog} 882 en 24 heures.

369. D'après les expériences de MM. Clément et Désormes, il faut, pour convertir de l'eau en vapeur à la température de 100 degrés du thermomètre centigrade, $\frac{1}{12}$ de son poids de charbon de bois, $\frac{1}{8}$ de son poids de charbon de terre, et $\frac{1}{4}$ de son poids de bois.

Le prix moyen d'un kilogramme de charbon de terre (qui est le seul combustible qu'on emploie communément pour les machines à vapeur) est en France sur les houillères d'environ un centime par kilogramme.

370. L'effet que nous venons d'indiquer doit être regardé comme un maximum; les effets réels que l'on obtient des machines à vapeur lui sont inférieurs, car plusieurs causes tendent à le diminuer.

Il n'existe aucune machine dans laquelle la condensation se fasse complétement; l'eau de condensation acquiert une température assez élevée, qui, dans quelques machines, est portée jusqu'à 40 degrés, et la vapeur qui s'exhale de cette eau agit en sens contraire de la vapeur motrice dont elle détruit une portion de l'effet. Ainsi, pour calculer l'effet d'une machine à vapeur, supposons que h soit la hauteur de la colonne d'eau qui corres-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pond à la force élastique de la vapeur de la chaudière, et h' la hauteur de celle qui se rapporte à la force élastique de la vapeur qui se forme dans le condenseur, la portion utile de la pression du piston sera exprimée par $gSv(h - h')$ (g est la pesanteur spécifique de l'eau, S la surface de la base du piston, v la vitesse de ce piston).

371. Le frottement du piston moteur et des pompes, l'eau qu'il faut élever pour le service de la machine, consomment une autre portion considérable de la force motrice. La perte occasionée par toutes ces causes, diminue de près de moitié l'effet de la force motrice.

L'expérience a prouvé que dans les machines ordinaires les mieux construites, l'effet réel qui correspond à chaque centimètre carré de la base du piston est équivalent à 0 kilog. 55 élevés à un mètre en une seconde, tandis que l'effet maximum est d'un kilogramme élevé également à un mètre.

L'effet réel de la force motrice que nous venons d'énoncer correspond à environ 4 kilogrammes par pouce carré.

Les constructeurs de machines ont adopté l'usage de désigner la force d'une machine à vapeur par celle équivalente d'un certain nombre de chevaux. Ils supposent, en général, qu'un cheval exerce une traction équivalente à 87 kilogrammes, et qu'il se meut avec une vitesse d'environ 1 mètre par seconde, qui est celle que l'on donne communément au piston d'une machine à vapeur. Ainsi, d'après cette supposition, la force d'un cheval équivaut à celle d'une machine à vapeur dont le piston aurait 160 centimètres carrés, ou 22 pouces carrés environ de surface.

Lorsque l'on dit que la force d'une machine à vapeur est équivalente à la force de 4 chevaux, cela ne signifie pas que l'effet utile journalier qu'elle produira est égal à l'effet journa-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

lier de 4 chevaux. La machine à vapeur peut travailler sans interruption; c'est-à-dire, que son travail journalier peut être de 24 heures, tandis que celui d'un cheval attelé à un manége n'est que de 5 ou 6 heures. Ainsi le travail journalier total d'une machine à vapeur, dont la force est équivalente à celle de 4 chevaux, est égal au travail journalier de 16 chevaux à peu près.

372. La consommation de houille qu'exige une machine de Watt, en 24 heures, pour la force d'un cheval, est d'environ 108 kilogrammes. La consommation de l'eau nécessaire pour le service de la machine est d'environ 1600 pouces cubes par pouce carré.

Machines à expansion.

373. Les machines à expansion de Wolf et d'Olivier Evans donnent un produit bien plus avantageux.

On a reconnu par expérience que si l'on compare une machine de Watt, de la force de 10 chevaux, à une machine de Wolf, de la même force, en les supposant construites l'une et l'autre avec la même perfection, on aura les résultats moyens suivans :

Machine de Watt.

Le cylindre aura environ 17 pouces de diamètre.

L'effet de la force motrice sera, pour chaque pouce carré, équivalent à 4 kilogrammes environ.

La consommation du charbon de terre, en 24 heures de travail continu, sera d'environ 1080 kilogrammes.

La température de la vapeur sera de 84 à 85 degrés de Réaumur.

Machine de Wolf.

Le grand cylindre aura 16 pouces de diamètre.

Le petit en aura 8.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'effet de la force motrice sera équivalent à plus de 8 kilogrammes pour chaque pouce carré du petit cylindre.

La consommation du charbon de terre, le travail étant continu, sera de 600 kilogrammes en 24 heures.

La température de la vapeur sera de 97 à 112 degrés de Réaumur.

Ainsi, les machines à expansion produisent une économie dans la dépense journalière de deux cinquièmes environ.

374. Il ne faut pas confondre l'effet de la force motrice avec l'effet utile produit par la machine; le second est toujours moindre que le premier, et il ne peut être évalué, dans les divers cas, que d'après la détermination des résistances qui sont opposées à l'action de la force motrice.

375. En faisant abstraction des frottemens, les effets des machines à vapeur de même espèce sont proportionnels aux surfaces des pistons, ou aux carrés de leurs diamètres. Mais comme les frottemens et la déperdition de la vapeur ne croissent point dans la même proportion, il en résulte, qu'à égalité de circonstances, les grandes machines sont plus avantageuses que les petites.

376. Dans l'examen des machines à vapeur, on a souvent besoin de déterminer les forces expansives qui correspondent à divers degrés de température; en pareil cas, les mécaniciens se servent du tableau des expériences faites par Dalton; voici ce tableau réduit en mesures françaises (*a*).

(*a*) Nous avons extrait ce tableau du Traité élémentaire des Machines, par Hachette, seconde édition.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TEMPÉRATURE en degrés DU THERMOMÈTRE centigrade.	FORCE ÉLASTIQUE représentée par une colonne de mercure EN MILLIMÈTRE.	FORCE ÉLASTIQUE en atmosphère.
0 glace fondante.	5	»
5.	7	»
10.	9	»
15	13	»
20.	17	»
25.	23	»
30.	30	»
35.	40	»
40.	52	»
45.	69	»
50.	89	»
55.	114	»
60.	145	»
65.	183	»
70.	230	»
75.	285	»
80.	352	»
85.	432	»
90.	525	»
95.	634	»
100 eau bouillante.	760	1 atmosphère.
105.	904	1,2
110.	1066	1,4
115.	1248	1,7
120.	1449	1,9
125.	1669	2,2
130.	1908	2,5
135.	2109	2,8
140.	2356	3,1
145.	2602	3,4
150.	2896	3,8
155.	3165	4,2
160.	3423	4,5
165.	3571	4,7

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Lorsqu'on voudra se servir de cette table, il faut multiplier les nombres contenus dans la seconde colonne, par 0,013568, pour avoir, en kilogrammes, les pressions sur une surface d'un centimètre carré.

Article IV.

Du vent considéré comme moteur.

377. On donne en général le nom de moulins à vent à toutes les machines dont le moteur est la force impulsive du vent, quelle que soit d'ailleurs la nature de l'effet qu'elles doivent produire.

L'organe mécanique, qui reçoit immédiatement l'action du vent, s'appelle *volant;* on distingue deux espèces de *volans;* 1°. les volans à rotation verticale; 2°. les volans à rotation horizontale.

Volans à rotation verticale.

378. Les volans à rotation verticale sont composés d'un certain nombre de voiles étendues sur des châssis en forme d'échelles disposées régulièrement autour d'un axe tournant. La position de l'axe n'est point exactement horizontale; l'expérience a indiqué qu'il est convenable de lui donner une inclinaison de 8 à 15 degrés. Deux motifs rendent cette inclinaison avantageuse; 1°. l'on observe que la direction du vent est rarement parallèle à l'horizon, et que très-souvent elle incline de haut en bas; de sorte que l'axe, disposé comme nous venons de l'indiquer, se trouve à peu près dans la direction habituelle du vent; 2°. l'inclinaison de l'axe, et conséquemment du volant, permet de donner à la cage du moulin la forme d'un tronc de pyramide ou de cône, qui évidemment la rend plus solide.

379. Les châssis du volant, revêtus de voiles, se nomment *ailes*. Les moulins n'ont ordinairement que quatre ailes, et le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

volant présente la forme d'une croix à branches égales ; de manière qu'il reste de grands espaces vides *entre les quatre ailes.* Quelques mécaniciens ont cru qu'il serait avantageux de multiplier le nombre des ailes et de diminuer conséquemment les espaces vides ; mais l'expérience a prouvé qu'ils s'étaient trompés. D'abord le poids du volant devient excessif, et il est très-difficile de construire des axes qui aient une force suffisante pour le soutenir ; secondement, le vent, après avoir agi sur la surface extérieure des ailes du volant (qui, comme nous le dirons bientôt, ont une inclinaison déterminée par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe), est réfléchi en partie contre la surface postérieure, et conséquemment il détruit une portion considérable de la force motrice. Il importe donc essentiellement que l'éloignement et la disposition relative des ailes soient tels que le vent réfléchi par la surface antérieure des unes ne puisse point réagir sur la surface postérieure des autres.

380. Si la surface des quatre ailes du volant coïncidait avec un plan perpendiculaire à l'axe, il est évident que la force impulsive du vent ne pourrait jamais faire tourner le volant, et que l'action qu'il exercerait ne tendrait qu'à renverser le moulin ; il faut donc que la surface des ailes soit inclinée par rapport à ce plan ; mais si l'inclinaison des ailes opposées était dans le même sens, l'action du vent sur une de ces ailes tendrait à faire tourner le volant dans un sens, tandis que l'action simultanée sur l'aile opposée tendrait à le faire tourner en sens contraire ; et le volant se trouvant sollicité à tourner par des forces égales et directement opposées, devrait nécessairement être immobile.

381. Supposons maintenant que les inclinaisons des ailes opposées soient en sens contraire, alors l'impulsion que le vent exerce sur toutes ces ailes tendra à faire tourner le volant dans le même sens.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

382. L'inclinaison indispensable que doivent avoir les ailes du volant produit la perte d'une portion de la force motrice, laquelle, n'agissant point directement, doit être décomposée en deux forces, dont l'une ayant sa direction parallèle à l'axe, ne peut contribuer aucunement à sa rotation; l'autre, qui est perpendiculaire à des plans qui passent par cet axe, est la seule qui agisse activement. Parmi les diverses inclinaisons que l'on peut donner aux ailes du volant, il en est une qui est la plus avantageuse de toutes, et qu'il importe de connaître. Plusieurs géomètres distingués se sont proposé de résoudre ce problème. Les solutions que ces savans ont données sont dépendantes de la théorie ordinaire de l'impulsion des fluides (246) qui suppose que cette impulsion est proportionnelle aux surfaces, aux carrés de vitesses, et aux carrés des angles d'incidence. L'expérience a confirmé, il est vrai, que l'impulsion est proportionnelle aux carrés des vitesses; mais d'un autre côté elle a prouvé que même pour les surfaces planes, la supposition que l'impulsion est proportionnelle aux carrés des angles d'incidence s'éloigne complétement de la vérité. Cette circonstance fâcheuse rend presque inutiles les recherches ingénieuses et profondes de ces géomètres sur cet objet aussi intéressant qu'utile; l'on n'obtiendra une solution théorique de ce problème, qui puisse être mise en usage, que lorsque la théorie du choc des fluides sera rectifiée.

383. Le lecteur curieux de connaître les recherches théoriques faites sur ce sujet, doit consulter les ouvrages suivans :

L'Hydrodynamique de Bernoulli.

Le Traité de l'équilibre du mouvement des fluides, par d'Alembert.

Le cinquième volume des Opuscules du même auteur.

Un mémoire d'Euler, intitulé : *De constructione molarum*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

alatarum, inséré dans le quatrième volume des *nouveaux commentaires de Pétersbourg*.

Un mémoire de Lambert, dans *les Mémoires de l'Académie de Berlin*, *pour* 1775.

Traité des fluxions, par Maclaurin, tome II.

384. Borda a fait une série d'expériences qui sont exposées dans les Mémoires de l'Académie de Paris, pour l'année 1760. Il résulte de ces expériences, 1°. que les impulsions du vent sont proportionnelles aux carrés des vitesses; 2°. qu'elles croissent en plus grand rapport que les aires des surfaces exposées à l'action du vent; 3°. la pression du vent qui parcourt 20 pieds ($6^{\text{met.}}\frac{1}{2}$) par seconde contre une surface plane d'un pied carré (10,5 décimètres carrés) placée perpendiculairement à la direction du courant, est équivalente au poids d'une livre, ou demi-kilogramme; 4°. l'impulsion contre un plan double en surface est plus que le double du poids observé.

385. Voici les résultats principaux des expériences de Sméaton pour déterminer les effets des moulins à vent, et la meilleure forme qu'il convient de donner à leurs ailes.

Ces expériences furent faites à l'aide d'un modèle de moulin à vent dont il pouvait changer les ailes, et qu'il faisait tourner plus ou moins rapidement par des poids.

1°. Les ailes planes, inclinées sous un angle de 55 degrés, recevaient la plus grande impulsion du vent, lorsqu'elles étaient en repos, mais elles produisaient le moindre effet, lorsqu'elles étaient en mouvement.

2°. La forme la plus avantageuse est celle d'une surface gauche dont les élémens extrêmes sont inclinés sur le plan du mouvement de 70 degrés 30 minutes, et de 22 degrés 30 minutes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3°. En se servant des ailes précédemment indiquées, le rapport de la puissance à l'effet est celui de 10 à 9,2.

4°. Une variation d'un ou de deux degrés dans l'angle d'inclinaison des ailes ne produit qu'une légère différence dans l'effet, quand l'angle approche de l'ouverture de celui qui est le plus avantageux possible.

5°. Lorsque le vent agit sur une surface concave, il en résulte un avantage pour la puissance, quoique chacune des parties de l'aile ne soient pas elles-mêmes disposées de la manière la plus avantageuse.

6°. Une aile plus large doit être plus inclinée, et présente une forme plus avantageuse que si elle était parallélogrammique.

7°. Quand le vent manque d'issue pour s'échapper, l'effet est diminué.

8°. La vitesse des ailes, lorsque le moulin n'a point de résistances à vaincre, comparée à la vitesse qui correspond au maximum d'effet, est en général celui de 3 à 2 à peu près.

9°. Le rapport entre la plus grande résistance que l'impulsion exercée sur le volant puisse vaincre sans s'arrêter, et celle qui correspond au maximum d'effet, est à peu près comme 6 à 5.

10 . Les vitesses d'un volant sont proportionnelles à celles du vent.

11°. Les effets d'un même volant qui correspondent au maximum, sont un peu moindres que proportionnelles aux cubes des vitesses du vent.

12°. Quand la résistance est proportionnée de manière à donner un maximum d'effet sous une vitesse donnée, si cette vitesse augmente, les effets seront à peu près comme 10 à 27 $\frac{1}{2}$ quand elle sera double; et quand elle sera plus que double, les effets croîtront à peu près dans le rapport simple de cette vitesse.

386. Coulomb, dont les recherches précieuses ont éclairé

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

plusieurs branches de la mécanique usuelle, a fait des observations sur un grand nombre de moulins existans aux environs de Lille (*a*). Les moulins qu'il a observés ont à peu près la même forme que ceux dont on fait usage en Hollande, et qui jouissent de la réputation d'être les meilleurs que l'on connaisse.

387. Voici le détail des mesures moyennes des principales parties des moulins propres à broyer la graine de colza.

« Les volans ont, d'une extrémité d'une aile à l'extrémité d'une aile opposée, une longueur de soixante-seize pieds; la largeur de l'aile est d'un peu plus de six pieds, dont cinq sont formés par une toile attachée sur un châssis, et le pied restant par une planche très-légère; la ligne de jonction de la planche et de la toile forme, du côté frappé par le vent, un angle sensiblement concave au commencement de l'aile, et qui allant toujours en diminuant, s'évanouit à l'extrémité de l'aile. La pièce de bois qui forme le bras et soutient le châssis, est placée derrière cet angle concave. La surface de la toile forme une surface courbe, mais les constructeurs de moulins n'ont aucune règle fixe dans le tracé de cette courbure, quoiqu'ils la regardent comme le secret de l'art; il m'a paru que le plus généralement l'on s'éloignait peu de la vérité, en supposant la surface de l'aile composée de lignes droites perpendiculaires au bras de l'aile, et répondant par leurs extrémités à l'angle concave formé par la jonction de la toile et de la planche, et l'autre extrémité placée de manière qu'au commencement de l'aile, à six pieds de l'arbre, les lignes droites formeraient avec l'axe de l'arbre un angle de 60 degrés, et qu'à l'extrémité de l'aile cet angle serait de 78 à 84 degrés; en sorte qu'il augmente de 78 à 84, à

(*a*) Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1781, et Recueil des Mémoires de Coulomb, publié récemment par M. Bachelier.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mesure que l'axe de rotation est plus incliné à l'horizon; cependant le pan gauche qui formerait l'aile, d'après cette description, n'est point encore exact, et au lieu d'être terminé par une ligne droite, il l'est ordinairement, dans le côté sous le vent, par une ligne courbe, dont la plus grande concavité est de deux ou trois pouces.

» L'arbre tournant, et auquel les ailes sont fixées, s'incline à l'horizon entre 8 et 15 degrés; il est garni de sept solives de quarante-deux pouces de longueur, qui, le perçant transversalement d'outre en outre, forment quatorze taquets ou levées, ce qui lui donne la forme et le nom de *hérisson*; ces levées répondent aux mentonnets de sept pilons, qui peuvent être élevés chacun deux fois dans le temps que l'arbre fait un tour entier.

» De ces sept pilons, cinq sont de pièces de bois de chêne, ordinairement de 20 à 22 pieds de longueur sur 9 et 11 pouces d'équarissage, armés d'un sabot de fer pesant 50 ou 60 livres; ils servent à broyer la graine; ces pilons pèsent à peu près mille vingt livres chacun; les deux autres pilons ont la même longueur, mais ils n'ont que 6 à 7 pouces d'équarissage; ils sont destinés à serrer et à desserrer des coins pour extraire l'huile par une forte compression; ils peuvent peser cinq cents livres. De ces deux derniers pilons, il n'y en a jamais qu'un seul en action. Les cinq premiers agissent ensemble lorsque le vent est suffisant. »

Résultats des expériences de Coulomb.

388. L'on observait et l'on mesurait la vitesse du vent avec des plumes très-légères que ce vent entraînait; deux hommes placés sur une petite élevation dans la direction du vent, et à cent cinquante pieds l'un de l'autre, observaient le temps que cette plume employait à parcourir les cent cinquante pieds.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Première expérience.

389. Le vent parcourt sept pieds par seconde, lorsque le moulin est libre ; et lorsque aucun des pilons n'est élevé, les ailes du moulin font cinq tours et demi par minute ; mais en mettant en action un seul pilon pesant mille vingt livres, et frappant deux coups de dix-huit pouces de hauteur à chaque tour d'aile, le moulin fait à peine trois tours par minute.

Deuxième expérience.

390. Le vent parcourant douze ou treize pieds par seconde, les ailes font sept à huit tours par minute, et il n'y a que deux pilons de mille vingt livres, et un pilon de cinq cents livres qui soient en action ; avec ce degré de mouvement, le moulin ne peut fabriquer qu'une tonne, ou deux cents livres d'huile en vingt-quatre heures.

Troisième expérience.

391. Le vent parcourant vingt pieds par seconde, les ailes font treize tours dans une minute; cinq pilons de mille vingt livres chacun sont mis en action, ainsi qu'un pilon de cinq cents livres ; les quatre ailes du moulin portent toute leur voilure, et l'on fabrique trois tonnes et demie d'huile en vingt-quatre heures ; ce degré de vitesse dans le vent, est celui qui paraît convenir le mieux à cette machine, c'est au moins celui que le conducteur préfère; il n'est pas forcé de travail; ce vent souffle ordinairement avec une vitesse assez uniforme; le moulin porte toute sa voilure sans crainte d'accident, et sans que les liaisons de sa charpente soient trop fatiguées.

Quatrième expérience.

392. Le vent souffle avec force, il parcourt vingt-huit pieds

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par seconde; les conducteurs des moulins sont obligés de serrer six pieds de voile à l'extrémité de chaque aile; l'aile fait dix-sept à dix-huit tours dans une minute, et le moulin fabrique près de cinq tonnes en vingt-quatre heures; les cinq pilons de mille vingt livres, agissent ainsi qu'un pilon de cinq cents livres.

393. Coulomb a déduit de ces expériences,

1°. Que le rapport entre l'espace que le vent parcourt en une seconde, et celle du nombre de tours que fait le volant en une minute, est à peu près constant, quelle que soit la vitesse du vent; et ce rapport est exprimé par $\frac{10}{6}$;

2°. Qu'avec un vent dont la vitesse est de vingt pieds par seconde; la quantité d'action produite par l'impulsion du vent équivaut à un poids de 1000 livres élevé à 253 pieds par minute, et que l'effet utile est équivalent à un poids de 1000 livres élevé par minute à 218 pieds, d'où il résulte que la quantité d'effet absorbé, soit par le choc des mentonnets et des levées, soit par le frottement, est le sixième à peu près de l'effet effectif.

394. Coulomb évalue la durée du travail continu des moulins à vent à un tiers de l'année, ou à huit heures par jour, avec l'action due à un vent dont la vitesse moyenne est de 20 pieds par seconde, et dont l'effet est équivalent à un poids de 1000 livres élevé à 218 pieds en une minute. Ainsi, d'après ces suppositions, l'effet utile *journalier*, exprimé en poids et en mesures décimales, serait de 16635 kilogrammes élevés à un kilomètre.

Cet effet journalier correspond à celui de 11 chevaux attelés à un manége (294).

395. On a remarqué que dans la plupart des moulins à vent, la vitesse de l'extrémité des ailes est plus grande que celle du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

vent. D'après le résultat de la troisième expérience de Coulomb, on voit que le rapport entre la vitesse de l'extrémité de l'aile et celle du vent est environ comme 5 à 2.

396. Il est évident que l'impulsion d'un fluide contre une surface quelconque, ne peut y produire une pression que lorsque la vitesse de la surface, exposée à cette impulsion, est moindre que celle du fluide, et que la pression sera nulle toutes les fois que la vitesse de la surface est égale ou plus grande que celle du fluide. Ainsi la portion du volant, comprise entre l'extrémité des ailes et les points qui ont une vitesse égale à celle du vent, ne recevant point de pression de la part du moteur, est non-seulement inutile, mais nuisible, puisque la surface postérieure des ailes doit vaincre la résistance de l'air, d'autant plus forte que la rotation est plus rapide. Il faut donc pour obtenir du volant tout l'effet dont il est susceptible, régler le nombre des tours que le volant doit faire, de manière que la vitesse de l'extrémité des ailes soit moindre, ou tout au plus égale à celle du vent. Ainsi, dans le cas de la troisième expérience de Coulomb, il aurait été convenable que le volant n'eût fait que 5 tours au lieu de 13, et que la résistance utile eût été augmentée en proportion de la diminution de la vitesse.

397. Il serait désirable que l'on fît des expériences comparatives sur les moulins à vent, pour déterminer quelle est la vitesse de l'extrémité des ailes qui correspond au maximum d'effet.

Volans à rotation horizontale.

398. Les volans à rotation horizontale, quel que soit le nombre de leurs ailes, ne peuvent recevoir l'impulsion du vent que sur une surface équivalente à celle d'une seule aile. En effet, supposons (Pl. III, fig. 9) que le volant *M, N, P, Q* soit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

séparé en quatre portions égales par deux plans perpendiculaires entre eux, dont la ligne d'intersection coïncidera avec l'axe de rotation, et que le plan *aa* soit parallèle à la direction du vent, il est évident que toute la portion *MN* du volant, qui se trouve au delà du plan *bb*, ne recevra pas l'impulsion du vent; et que si les deux portions *P* et *Q* étaient exposées simultanément à l'action du vent, alors le volant, se trouvant comprimé par deux forces égales agissant des deux côtés de l'axe, il serait immobile.

399. Afin donc que le volant tourne, il faut nécessairement qu'une des deux portions *P* ou *Q* soit soustraite à l'action du vent, tandis que l'autre reçoit librement son impulsion. On a proposé divers moyens pour produire cet effet. L'un de ces moyens est de couvrir une des deux portions par des surfaces immobiles, que l'on a nommées *paravens*. Un autre moyen est de placer les ailes dans les châssis, et de les rendre mobiles sur des pivots; de manière que les ailes qui sont d'un côté soient obligées, par l'action même du vent, de s'ouvrir, tandis que celles qui sont placées de l'autre côté, retenues par les feuillures du châssis, opposent toute leur surface à son impulsion.

400. Sméaton a reconnu que l'effet utile que produisent les volans à rotation horizontale, n'est que la huitième ou la dixième partie de celui que peut produire un volant à rotation verticale dont la surface des ailes serait la même.

En effet, plusieurs causes tendent à diminuer l'effet d'un volant horizontal; 1°. le vent n'agit activement que sur une seule aile, tandis que son impulsion s'exerce simultanément sur toutes les ailes d'un volant vertical; 2°. la face postérieure des ailes du volant horizontal éprouve une plus grande opposition au mouvement; 3°. le vent se trouvant engouffré dans les angles que font les châssis des ailes, produit des réactions nuisibles au mouvement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

401. Tous ces désavantages empêchent de se prévaloir avec utilité des volans horizontaux pour mouvoir de grandes machines, telles que les scies mécaniques, les moulins à broyer les graines oléagineuses, les moulins à mouture, etc.

Mais la régularité de leur forme, la facilité qu'ils ont de se mouvoir, quelle que soit la direction du vent, sans être *orientés* (*a*), rendent leur emploi utile lorsqu'il s'agit de vaincre une médiocre résistance, pourvu qu'elle n'exige point un mouvement uniforme et continu. Ainsi on peut s'en servir, dans les jardins de plaisance, pour élever dans un réservoir l'eau qui doit alimenter des cascades ou des jets d'eau; et dans les campagne, pour des irrigations et des desséchemens.

CHAPITRE DEUXIÈME.

Des effets utiles des machines et des résistances qui en résultent.

Article premier.

Des effets utiles des machines en général.

402. La série des effets utiles que les machines produisent, peut être distribuée en cinq classes.

La première renferme les déplacemens qu'elles font subir à des masses, soit fluides, soit solides.

La seconde contient les changemens de figure ou de volume

(*a*) Orienter un volant signifie de le placer de manière qu'il puisse recevoir directement l'impulsion du vent. Un volant vertical doit être orienté; c'est-à-dire, il faut que son axe se trouve constamment sur la direction du vent.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que des corps ductiles ou compressibles éprouvent en vertu d'une forte pression.

Dans la troisième sont placés les effets qui résultent de la séparation, à l'aide du frottement, d'un nombre plus ou moins grand de particules de matière qui composent certains corps que l'on soumet à l'action des machines.

Les effets résultant de la percussion sont contenus dans la quatrième, qui conséquemment renferme, 1°. les changemens de volume ou de figure; 2°. la séparation des corps en plusieurs fragmens; 3°. l'introduction du corps dur dans un autre qui se laisse pénétrer; 4°. la séparation des matières filamenteuses d'avec les substances hétérogènes qui les ternissent; 5°. les rapprochemens des fils entrelacés par le tissage; tous ces effets appartiennent à la quatrième classe, lorsqu'ils sont produits par une percussion quelconque.

Les effets enfin contenus dans la cinquième classe dérivent de la séparation d'une masse en plusieurs parties, par l'intromission de coins ou de pointes plus ou moins affilés.

Quelle que soit la nature de l'effet utile que la machine doit produire, il faut, autant qu'il est possible, que les organes de la machine soient combinés de telle sorte que rien de nuisible, de superflu, et d'étranger à l'effet utile n'y soit introduit. « Dans tout ouvrage, il faut, dit Daniel Bernoulli, commencer par examiner quel est l'effet essentiellement et nécessairement attaché à cet ouvrage, effet qui soit inévitable par la nature même de l'ouvrage, et éviter ensuite, autant qu'il est possible, tout autre effet. »

403. Ce principe important exige,

1°. Qu'on évite tout choc, ou changement brusque quelconque qui ne serait point essentiel à la constitution même de la machine, puisque toutes les fois qu'il y a choc, il y a déper-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dition de forces vives, et par conséquent une partie de l'effet utile perdue.

2°. Lorsqu'un effet utile peut être obtenu indifféremment par une forte pression ou par une percussion, il faut toujours préférer la première par le double motif de la déperdition de forces vives que l'on épargne, et de la régularité et la continuité de mouvement que l'on peut obtenir en se servant de la pression, mais qui est incompatible avec la percussion.

3°. Il faut éviter de communiquer à la résistance une vitesse et une quantité de mouvement qui dépassent celles qui sont strictement nécessaires. Ainsi, par exemple, veut-on élever de l'eau à une hauteur déterminée, soit avec une pompe, ou autrement, on doit faire en sorte que l'eau, en arrivant dans le réservoir supérieur, n'ait précisément qu'autant de vitesse qu'il lui en faut pour s'y rendre, car toute celle qu'elle aurait au delà consommerait inutilement l'effort de la force motrice.

4°. Il faut apporter le plus grand soin à éviter ou diminuer, autant que faire se peut, les résistances passives (dont nous parlerons dans le troisième chapitre), telles que les frottemens, la raideur des cordes, la résistance de l'air, etc.

404. L'effet utile d'une machine pourra toujours être comparé à l'effet d'un poids élevé à une certaine hauteur en un temps déterminé; cela est évident lorsque l'effet résulte d'une masse fluide ou solide, que l'on transporte d'un lieu à un autre, ou bien lorsqu'il dépend de la percussion d'une masse qu'on élève à une hauteur déterminée pour la laisser retomber par son propre poids. Mais lorsque l'effet dépend d'une pression ou du frottement produit par un corps que l'on met en mouvement avec plus ou moins de rapidité, alors il faut supposer qu'un poids convenablement dirigé soit appliqué à l'organe mécanique qui produit la compression ou le frottement, et qu'il soit tel, que cet

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

organe, ou ce corps (pris isolément) ait, en vertu de l'action du poids, la même quantité de mouvement que celui acquis par l'action de la force motrice.

405. L'effet utile d'une machine quelconque pourra donc être exprimé par PH, P étant le poids, et H la hauteur à laquelle il est censé élevé pendant l'unité du temps. Si l'on nomme maintenant M la masse du poids P, V la vitesse due à la hauteur H, l'on aura

$$V = \sqrt{2gH}, \text{ ou } V^2 = 2gH,$$

donc

$$H = \frac{V^2}{2g}, \text{ et } PH = \frac{PV^2}{2g};$$

mais

$$P = Mg, \text{ donc } PH = \frac{MV^2}{2};$$

MV^2 exprime la force vive que le moteur communique à la machine; ainsi l'effet utile est équivalent à la moitié de cette force vive, en faisant abstraction des pertes inévitables produites par les résistances passives.

406. Carnot désigne le moment de la force motrice qui correspond entièrement à l'effet utile par le nom de *moment d'activité*. « S'agit-il, dit ce géomètre célèbre, d'élever un poids, de l'eau, par exemple, à une hauteur donnée? vous en élèverez d'autant plus dans un temps donné, non que vous aurez exercé une plus grande force, mais que vous aurez consommé un plus grand moment d'activité.

407. »Qu'il soit question de faire tourner la meule d'un moulin, soit par le choc de l'eau, soit par le vent, soit par la force des animaux, il ne s'agit pas de faire ensorte que le choc de l'eau, de l'air, ou l'effort de l'animal, soit le plus grand, mais de faire consommer à ces agens le plus grand moment d'activité possible.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

408. » Veut-on faire un vide quelconque dans l'air ; de quelque manière qu'on s'y prenne, il faudra, pour y parvenir, consommer un moment d'activité aussi grand que celui qui serait nécessaire pour élever à trente-deux pieds de hauteur un volume d'eau égal au vide qu'on veut établir.

409. » Est-ce de l'eau contenue dans un vase de figure déterminée qu'on veut extraire ; on ne peut y parvenir sans faire monter le centre de gravité de la masse totale du fluide d'une quantité déterminée par la figure du vase ; il faudra donc consommer un moment d'activité équivalent à celui qui serait nécessaire pour élever toute l'eau du vase d'une quantité égale à celle dont il faut que monte le centre de gravité du fluide.

410. » Dans une machine en repos, où il n'y a d'autre force à vaincre que l'inertie des corps, voulez-vous y faire naître un mouvement quelconque par degrés insensibles ? le moment d'activité que vous aurez à consommer sera égal à la demi-somme des forces vives que vous y ferez naître ; et s'il est seulement question de changer le mouvement qu'elle a déjà, le moment d'activité à consommer sera seulement la quantité dont cette demi-somme augmentera par le changement.

411. » Enfin, supposons qu'on ait un système quelconque de corps, que ces corps s'attirent les uns les autres, en raison d'une fonction quelconque de leurs distances ; supposons même, si l'on veut, que cette loi ne soit pas la même pour toutes les parties du système ; c'est-à-dire que cette attraction suive telle loi qu'on voudra (pourvu qu'entre deux corps donnés, elle ne varie que lorsque la distance de ces corps varie elle-même), et qu'il soit question de faire passer le système d'une position quelconque donnée à une autre : cela posé, quelle que soit la route qu'on fasse prendre à chacun des corps, pour remplir cet objet, qu'on mette tous ces corps en mouvement à la fois, ou

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les uns après les autres; qu'on les conduise d'une place à l'autre, par un mouvement rectiligne ou curviligne, et varié d'une manière quelconque (pourvu qu'il n'arrive aucun choc ni changement brusque); qu'on emploie enfin telles machines qu'on voudra, même à ressort, pourvu que, dans ce cas, on remette à la fin les ressorts au même état de tension où on les a pris au premier instant; le moment d'activité qu'auront à consommer pour produire cet effet, les agens extérieurs employés à mouvoir ce système sera toujours le même, en supposant que le système soit en repos au premier instant et au dernier.

412. » Et si outre cela il s'agit de faire naître dans le système un mouvement quelconque, ou qu'il soit déjà en mouvement au premier instant, et qu'il s'agisse de modifier ou de changer ce mouvement, le moment d'activité qu'auront à consommer les agens extérieurs, sera égal à celui qu'il faudrait consommer, s'il s'agissait seulement de changer la position du système, sans lui imprimer de mouvement (c'est-à-dire, considéré comme en repos au premier instant et au dernier), plus, la moitié de la quantité dont il faudra augmenter la somme des forces vives.

413. » Il importe donc fort peu, quant à la dépense ou *moment* d'activité à consommer, que les forces employées soient grandes ou petites, qu'elles emploient telles ou telles machines, qu'elles agissent simultanément ou non; ce moment d'activité est toujours égal au produit d'une certaine force, par une vitesse et par un temps, ou à la somme de plusieurs produits de cette nature; et cette somme doit être toujours la même, de quelque manière qu'on s'y prenne : les agens ne gagneront donc jamais rien d'un côté, qu'ils ne le perdent de l'autre.

414. » En général, qu'on ait un système quelconque de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

corps animés, de forces motrices quelconque, et que plusieurs agens extérieurs, comme des hommes ou des animaux, soient employés à mouvoir ce système en différentes manières quelconques, soit par eux-mêmes, soit par des machines : cela posé,

» *Quel que soit le changement occasioné dans le système, le moment d'activité, consommé pendant un temps quelconque par les puissances extérieures, sera toujours égal à la moitié de la quantité dont la somme des forces vives aura augmenté pendant ce temps, dans le système des corps auxquels elles sont appliquées ; moins, la moitié de la quantité dont aurait augmenté cette même somme de forces vives, si chacun des corps s'était mu librement sur la courbe qu'il a décrite, en supposant qu'alors il eût éprouvé à chaque point de cette courbe la même force motrice, que celle qu'il y éprouve réellement*, pourvu, toujours, que le mouvement change par degrés insensibles, et que si l'on emploie des machines à ressorts, on laisse ces ressorts dans le même état de tension où on les a pris. »

ARTICLE II.

Des résistances qui dérivent du déplacement des masses.

415. Les masses qui peuvent être déplacées par les machines sont, ou des fluides élastiques, ou des liquides, ou des corps solides ; ainsi, les organes mécaniques qui produisent ces déplacemens se rangent naturellement en trois genres : le premier renferme les *soufflets*, les *ventilateurs* et les *machines pneumatiques ;* le second, les *pompes* et toutes les autres espèces d'organes destinés à élever l'eau, et d'autres liquides plus ou moins épais ; le troisième enfin contient les organes mécaniques qui servent à mouvoir les fardeaux.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Soufflets ou machines soufflantes.

416. On donne le nom de *soufflets*, *ou de machines soufflantes* aux organes mécaniques qui produisent un jet d'air atmosphérique plus ou moins intense, pour animer la combustion.

De toutes les machines soufflantes connues, les plus parfaites sont les machines cylindriques à piston, pourvu qu'elles soient munies d'un bon régulateur.

417. Le jeu de cette machine est facile à concevoir; que l'on suppose (Pl. IV, fig. 1) un cylindre de fonte *A* bien alésé, ouvert dans la partie inférieure; un piston *b* muni de deux soupapes, descend et monte alternativement dans ce cylindre. Quand le piston monte, il refoule, devant lui, l'air contenu dans le cylindre, et cet air est obligé de sortir par le tuyau *d*, lequel est muni d'une soupape. Si le piston descend, la soupape du tuyau *d* se ferme par la pression de l'air contenu dans le tuyau, les soupapes du piston s'ouvrent, et laissent entrer librement l'air dans le cylindre au fur et à mesure qu'il descend.

418. On voit donc que l'écoulement de l'air dans le tuyau *d* est intermittent; c'est-à-dire qu'il n'a lieu que lorsque le piston monte, et qu'il est suspendu lorsqu'il descend. Cette intermittence serait un grand inconvénient, si on n'était parvenu à le corriger au moyen d'un régulateur, et à obtenir un jet continu et à peu près uniforme; on est arrivé à ce résultat de plusieurs manières différentes, dont voici les principales :

1°. Sméaton a construit, à *Carron*, une machine soufflante composée de quatre cylindres semblables, dont les pistons étaient mus alternativement par des manivelles coudées; l'air expulsé par ces quatre cylindres entrait dans un seul tuyau qui le conduisait au fourneau. Cette méthode est très-dispendieuse.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2°. On a fait des *cylindres soufflans* à double effet; ces cylindres ont deux pistons qui se meuvent en sens contraire dont l'un aspire l'air, tandis que l'autre l'expire, c'est-à-dire, le refoule dans le tuyau de conduite.

3°. L'air que le cylindre soufflant expulse entre dans un caveau voûté, ou dans un vaste réservoir, en soulevant une soupape, tandis que l'air comprimé dans le réservoir est lancé dans le tuyau de conduite avec un effort constant ou peu variable.

4°. On superpose au cylindre soufflant un ou deux réservoirs cylindriques qui communiquent avec sa partie supérieure. Ces réservoirs ont un fond supérieur mobile, sur lequel on place des poids déterminés; une soupape de sûreté est placée sur le fond mobile, elle laisse échapper l'air, avec bruit, lorsqu'il entre en trop grande abondance; si au contraire l'air manque, on accélère le mouvement de la machine, et l'on augmente proportionnellement le poids des régulateurs.

419. Une belle machine de ce genre a été construite par MM. Perrier au Creuzot; voici quelles sont ses principales dimensions: elle est mue par une machine à vapeur; le cylindre a 40 pouces de diamètre intérieur; la levée du piston soufflant a 7 pieds, la vitesse est de 15 coups par minute; le volume d'air chassé est de 2495 pieds cubes par minutes.

Les deux régulateurs ont chacun 6 pieds 2 pouces de diamètre, 9 pieds trois pouces environ de hauteur, non compris le fond qui a 18 pouces et demi. Leurs fonds supérieurs mobiles sont chargés d'un poids de 80 quintaux environ, c'est-à-dire, de 210 livres à peu près par pied circulaire. La chaudière de cette machine consomme 70 quintaux de houille en vingt-quatre heures. Cette machine soufflante fait le service de deux hauts fourneaux, de la hauteur de 37 pieds environ, dans les-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

quels la mine de fer est fondue avec le coak, selon le procédé des Anglais; chacun de ces fourneaux reçoit trois fois autant d'air que les hauts fourneaux ordinaires alimentés avec du charbon de bois.

420. Pour connaître à combien d'unités dynamiques se rapporte l'effet utile de cette machine, nous prendrons pour terme de comparaison une machine à vapeur construite par MM. Perrier à Litry, et qui sert à élever le minerai. Cette machine, qui consomme 36 quintaux de houille en vingt-quatre heures, élève 2880 quintaux à 320 pieds de hauteur, ce qui équivaut à 15654 mètres cubes d'eau élevés à un mètre de hauteur. Or, si l'on suppose que les produits de ces deux machines sont entre eux comme la consommation du combustible, l'effet utile de la machine du Creusot équivaudra à 30438 mètres cubes d'eau élevés à un mètre de hauteur.

421. Ainsi, l'effet utile d'une machine soufflante capable de faire le service d'un haut fourneau alimenté par la houille, est, pour 24 heures, équivalent à 15219 mètres cubes d'eau élevés à un mètre. L'effet utile d'une machine soufflante d'un haut fourneau ordinaire alimenté avec du charbon de bois n'étant que le tiers du précédent, sera équivalent à 5073 mètres cubes d'eau élevés à un mètre, ou à 5073 kilogrammes élevés à un kilomètre.

422. On lit dans le Journal des Mines (Tome 16, page 10) qu'une machine soufflante à deux cylindres, établie à Marche-sur-Meuse, fournit à peu près 400 pieds cubes d'air par minute, étant mue par un courant d'eau dont la chute est de 10 pieds, et la dépense d'eau d'environ 80 pieds cubes par minute.

423. Avant l'introduction des machines soufflantes cylindriques, on se servait communément de grands souffflets en bois de 14 à 15 pieds de longueur, composés de deux caisses

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

réunies par une sorte de charnière, elles s'emboitent l'une dans l'autre, et l'inférieure, nommée *giste*, est fixe, et garnie de *liteaux* poussés par des ressorts, pour empêcher que l'air ne s'échappe entre une caisse et l'autre.

Deux de ces soufflets, accouplés auprès d'un haut fourneau, sont mus par une roue hydraulique, et font écouler environ 400 pieds cubes d'air en une minute. Ces soufflets exigent une force motrice plus forte d'un tiers et quelquefois de moitié que celle nécessaire pour les cylindres soufflans, dont l'écoulement d'air serait le même. En effet, une grande partie de l'air comprimé est perdue sans utilité, et reste dans le soufflet sans pouvoir sortir par la tuyère; le frottement des liteaux est d'ailleurs très-grand. Ces inconvéniens et plusieurs autres ont déterminé les maîtres de forges les plus éclairés à abandonner ces sortes de machines, et à leur substituer des cylindres soufflans.

424. Dans les pays de montagne on rencontre une espèce de machine soufflante remarquable par sa simplicité. Cette machine, nommée trompe, n'a aucune partie mobile, et elle est composée de deux ou de trois tuyaux verticaux, dont la partie inférieure est insérée dans une caisse munie d'une tuyère dans le haut et d'une vanne dans le bas. L'eau motrice tombe dans les tuyaux, et, en les parcourant rapidement, elle entraîne devant elle l'air qui y est contenu, lequel est renouvelé au moyen de deux ou de trois ouvertures pratiquées vers le sommet de chaque tuyau. La vanne règle la quantité d'eau qui doit sortir de la caisse. Le niveau de l'eau dans cette caisse doit être constant, et il doit se trouver toujours au-dessus de l'ouverture par laquelle elle sort.

425. Les trompes sont sujettes à quelques inconvéniens inévitables : 1°. elles entraînent une humidité nuisible qui détruit une partie de l'intensité de la chaleur du foyer; 2°. elles ne peu-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

vent agir l'hiver lors des gelées ordinairement fréquentes dans les endroits où elles sont situées. Elles exigent une dépense d'eau bien plus considérable que les cylindres soufflans, et même plus forte que les grands soufflets en bois.

426. On trouve dans le 91e. cahier du Journal des Mines (an 12), le détail de plusieurs expériences curieuses que MM. Beaunier et Gallois ont faites sur les trompes de la fonderie de Pouallouen.

Une des trompes était composée d'un cylindre vertical de 8 pouces de diamètre et de 21 $\frac{1}{2}$ pieds de hauteur. Cette trompe consommait la force motrice de 173 pieds cubes d'eau par minute; l'air dégagé par l'ouverture de la buse ayant 2 pouces de diamètre, est de 441 pieds cubes par minute.

427. Si l'on compare ces résultats avec ceux que présentent les cylindres soufflans (422), on trouve que pour fournir une même masse d'air, la quantité d'eau consommée dans les trompes est, avec une chute plus que double, à peu près deux fois aussi considérable que celle qui sert à mouvoir ces machines.

428. Les ventilateurs proprement dits ne diffèrent, en général, des machines soufflantes que par leur usage et leurs dimensions. Ceux-ci servent à renouveler l'air dans les lieux bas et fermés, tels que les fosses, les puits des mines, les citernes, les fonds de cale des vaisseaux, les prisons, les hôpitaux, les salles de spectacle, etc. (*a*)

429. Les ventilateurs peuvent aussi servir à favoriser l'évaporation. MM. Clément Désormes et Montgolfier (*b*) ont reconnu

(*a*) On obtient aussi le renouvellement de l'air dans les lieux fermés, à l'aide des fourneaux d'appel convenablement placés, qui établissent un courant d'air artificiel.

(*b*) Annales de Chimie, tome 76.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'en automne, et pour le midi de la France, l'air atmosphérique est dans un état tel, qu'un seul mètre cube de cet air, mis en contact avec de l'eau, peut vaporiser trois grammes de ce liquide.

430. Nous ne parlerons point ici des machines pneumatiques qui appartiennent plus à la physique expérimentale qu'à la mécanique appliquée aux arts.

Des machines hydrauliques proprement dites.

431. Quoique l'on donne le nom générique de machines hydrauliques à toutes les machines qui sont mues par un courant d'eau, on désigne par le nom de machines hydrauliques proprement dites les organes mécaniques destinés à élever l'eau.

Ce genre d'organes mécaniques peut se réduire à cinq espèces, dont l'une contient les pompes, une autre les organes qui élèvent l'eau par un simple mouvement de translation, et les trois autres espèces contiennent les organes à compression d'air, ceux à siphon, et ceux qui opèrent par la percussion de l'eau. Commençons par les pompes, qui sont, de toutes les machines hydrauliques, celles que l'on emploie le plus fréquemment.

Pompes.

432. Les pompes sont ou foulantes ou aspirantes, ou enfin aspirantes et foulantes.

Pompe aspirante.

433. La pompe aspirante est composée en général (Pl. IV, fig. 2) 1°. d'un tuyau *a*, nommé corps de pompe, dans lequel se meut le piston *p*, qui est foré et couvert d'une soupape; d'un second tuyau *b* ayant un plus petit diamètre; ce tuyau concentrique au premier se nomme tuyau d'aspiration, et porte à sa partie supérieure une soupape *s*.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

434. Soit *nn* le niveau de l'eau que l'on veut élever; l'espace compris entre ce niveau et le piston étant rempli d'air, si on abaisse le piston *p*, l'air forcera sa soupape de s'ouvrir, et s'échappera par cette ouverture; quand on relève le piston, la soupape se ferme, l'air qui se trouve dans la pompe au-dessous du piston se dilate, sa densité et sa force élastique diminue; de sorte qu'il ne peut plus faire équilibre à la pression constante que l'air atmosphérique exerce extérieurement sur la surface *nn* de l'eau; pour que l'équilibre se rétablisse, il faut qu'une colonne d'eau monte dans le tuyau aspirateur *b*, jusqu'à une hauteur telle que sa pression, augmentée de celle qui est due à la portion d'air comprise entre cette colonne d'eau et le piston fasse équilibre à l'air extérieur.

435. Le piston s'élevant une seconde fois, il en résulte une nouvelle raréfaction de l'air dans la pompe, et la colonne d'eau acquiert une plus grande hauteur en vertu de la pression toujours constante que l'air atmosphérique exerce en dehors sur la surface de l'eau environnante. Ainsi, après un certain nombre de coups de piston, la colonne d'eau arrivera à la hauteur du piston, si cependant cette hauteur ne surpasse pas la plus grande hauteur à laquelle la pression atmosphérique peut soutenir l'eau dans le vide qui est de 32 pieds, ou d'environ 10$^{\text{mèt.}}$,5.

436. Nommons h la hauteur *ns* du tuyau aspirateur au-dessus du niveau *nn*, que nous supposerons constant; l la course du piston dans le corps de pompe, c'est-à-dire la distance depuis s jusqu'au point le plus élevé auquel il parvient; n l'aire d'une section horizontale du tuyau aspirateur b; m l'aire du corps de pompe a; x l'élévation au-dessus du niveau *nn*, après le premier coup de piston; H la plus grande hauteur à laquelle la pression atmosphérique soutient l'eau dans le vide; δ la densité de l'eau, et g sa gravité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

437. La pression atmosphérique rapportée à l'unité de surface est δgH. Avant que le piston ne se meuve, la force élastique de l'air contenu dans la pompe, faisant équilibre à l'air atmosphérique extérieur, est égale à δgH; mais quand le piston monte, il occupe un plus grand volume; sa densité, et par conséquent sa force élastique, sont donc diminuées dans le rapport du second volume au premier; celui-ci est égal à nh, et le second a pour valeur $n(h-x)+ml$; d'où il suit que la force élastique de l'air qui occupe le second volume est égale à

$$\frac{nh}{n(h-x)+ml}\cdot Hg.$$

La pression de la colonne d'eau élevée par le premier coup de piston est exprimée par δgx. Cette pression, ajoutée à celle de l'air intérieur, doit faire équilibre à celle de l'air extérieur; on aura donc

$$\delta gx + \frac{nh}{n(h-x)+ml}\cdot \delta gH = \delta gH;$$

cette équation, en faisant les réductions convenables, devient

$$x^2 - x\left(H+h+\frac{m}{n}l\right) + \frac{m}{n}Hl = 0;$$

laquelle étant résolue, donne

$$x = \frac{1}{2}\left(H+h+\frac{m}{n}l\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(H+h+\frac{m}{n}l\right)^2 - 4\frac{m}{n}};$$

expression que l'on peut réduire à cette autre forme :

$$x = \frac{1}{2}\left(H+h+\frac{m}{n}l\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(H-h-\frac{m}{n}l\right)^2 + 4Hh}.$$

Nommons x' l'élévation de l'eau occasionée par le second

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

coup de piston, nous aurons, en suivant la même marche,

$$x'\delta g + \frac{n(h-x)}{n(h-x')+ml}\cdot(H-x)\,\delta g = \delta g H, \text{ et}$$

$$x' = \tfrac{1}{2}\left(H+h+\tfrac{m}{n}l\right) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(H-h-\tfrac{m}{n}l\right)^2 + 4(H-x)(h-x)};$$

on aura de même, les élévations successives de l'eau jusqu'à ce qu'elle ait atteint le piston.

438. Si le piston ne descendait pas jusqu'en s (Pl. IV, fig. 2.) à chaque coup, il pourrait arriver que l'eau cessât de s'élever dans le corps de la pompe, quoique sa hauteur au-dessus du niveau nn de l'eau du réservoir fût moindre que 10 mèt., 4. En effet, après le premier coup de piston (la soupape s étant fermée), la force élastique de l'air comprise entre le fond du corps de pompe et la surface inférieure du piston est réduite à $(H-x)\delta g$, et son volume est égal à lm; si le piston parcourt, en redescendant, un espace l' plus petit que l, de manière qu'il s'arrête à une distance $l-l'$ du fond du corps de pompe, le volume de cette portion d'air deviendra $(l-l')m$, et par conséquent sa force élastique aura pour mesure la quantité $(H-x)\delta g$, multipliée par le rapport du volume lm au volume $(l-l')m$; cette force sera donc égale à $\frac{(H-x)\,.\,l\delta g}{l-l'}$; mais pour que la pression qu'elle exerce de bas en haut contre le piston puisse forcer la soupape de s'ouvrir, il faut qu'elle surpasse la pression atmosphérique qui agit en sens contraire sur cette soupape; il faut donc que l'on ait

$$\frac{(H-x)\,.\,l\delta g}{l-l'} > H\delta g;$$

d'où l'on tire, en réduisant,

$$xl < Hl', \text{ ou } \frac{x}{H} < \frac{l'}{l}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

439. Ainsi, toutes les fois que le rapport $\frac{l'}{l}$ sera plus petit que $\frac{x}{H}$, il y aura *arrêt*, c'est-à-dire, l'eau ne montera point; car la soupape du piston demeurant fermée, quand le piston descendra, il y aura toujours la même masse d'air entre le fond du corps de la pompe et le piston; de sorte que, quand celui-ci sera rencontré au point le plus haut de sa course, cette masse d'air reprendra sa force élastique $(H - x)\delta g$, égale à celle de l'air contenu dans le tuyau aspirateur *b*; la soupape *s*, pressée également dans les deux sens, restera aussi fermée.

440. Il faut, pour éviter l'*arrêt*, placer la soupape *s*, et conséquemment le fond du corps de pompe, de manière que le piston, en descendant, s'en approche le plus possible.

L'arrêt pourrait aussi avoir lieu si la vitesse du piston, en montant, était plus grande que celle de l'eau qui s'élève dans le corps de pompe; car alors l'eau ne pouvant suivre immédiatement le piston dans sa marche, il doit nécessairement exister un vide entre l'un et l'autre, et ce vide augmentant à chaque aspiration, il en résultera qu'après un certain nombre de coups de pistons, il sera si grand que le piston dans sa descente ne pourra plus atteindre la colonne d'eau, et le travail de la pompe sera arrêté.

441. Pour éviter cet inconvénient, il importe de ne pas trop rétrécir le tuyau d'aspiration; car s'il était trop étroit, l'eau montant avec moins d'abondance mettra plus de temps à remplir le corps de pompe, abandonnera plus promptement le piston, par conséquent laissera un plus grand vide entre eux. Il importe aussi que le piston n'ait qu'une vitesse modérée. On remarque que dans les pompes les mieux construites, la vitesse du piston n'excède point 6 pouces (16 centimètres) par seconde.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

442. Lorsque l'eau est parvenue dans le corps de pompe, chaque coup de piston fait monter un volume d'eau équivalent à un cylindre dont la base est celle du piston, et dont la hauteur est celle de l'espace parcouru par le piston; si l'on multiplie ce volume par le nombre de coups de piston qui ont lieu dans un temps donné, on aura la quantité d'eau fournie par la pompe. Nommons r le rayon de la base du piston, π le rapport de la circonférence au diamètre, h la longueur de la course du piston, n le nombre de coups de piston en un temps déterminé; $\pi r^2 hn$ indiquera la quantité d'eau qui s'écoulera pendant ce même temps, par le tuyau de décharge de la pompe.

443. Cette évaluation suppose que le niveau de l'eau dans le *puisard* est constant; s'il ne l'était point, la quantité d'eau fournie par chaque coup de piston, au lieu d'être invariablement égale à $\pi r^2 h$, serait variable, et égale à $\pi r^2 (h - h')$; la hauteur h' dont ce volume dépend, augmente au fur et à mesure que le niveau de l'eau s'abaisse dans le puisard, et en même temps le produit des coups de piston successifs devient de plus en plus petit.

444. Lorsque le piston descend, la force motrice n'a à surmonter que le frottement, et quelques autres résistances passives, de sorte que dans une pompe, qui aurait tous les degrés de perfection désirables, le seul poids de ce piston, et de son attirail, devrait suffire pour le faire descendre.

445. Lorsqu'il monte, la force qu'il faut employer pour le faire mouvoir (en faisant abstraction des résistances passives, et du poids du piston), *est équivalente au poids d'une colonne d'eau qui aurait pour base celle du piston, et pour hauteur celle dont l'eau est élevée dans la pompe au-dessus de la surface du puisard.*

En effet, la partie supérieure du piston est évidemment

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

chargée de toute la colonne d'eau qui la surmonte, tandis qu'à sa partie inférieure il produit un vide qui permet à la pression atmosphérique qui s'exerce sur l'eau du puisard de faire monter, dans l'intérieur de la pompe, une colonne d'eau, avec une force capable de l'élever à environ 10 mètres de hauteur : mais comme la distance entre le piston et le niveau de l'eau extérieure est toujours moindre de 10 mètres, il reste à la colonne d'eau, lorsqu'elle est arrivée au piston, une force ascensionnelle qu'elle emploie à pousser de bas en haut; or, la force nécessaire, pour faire le vide, est égale au poids de la colonne d'eau qui aurait dix mètres de hauteur, diminuée du poids qui équivaut à la force ascensionnelle, laquelle est représentée par une colonne d'eau dont la hauteur est de dix mètres, moins la distance entre le niveau de l'eau extérieure et le piston. Ainsi la puissance qui soulève le piston, doit vaincre (indépendamment du poids de l'eau qui le surmonte) une force égale à la différence des deux dont nous venons de parler; c'est-à-dire, équivalente au poids d'une colonne d'eau, ayant pour base la base même du piston, et pour hauteur, la distance entre la surface de l'eau du puisard, et le point le plus élevé de la course du piston.

Pompe foulante.

446. Voici les différences qui distinguent une pompe foulante d'une pompe aspirante, quelle que soit d'ailleurs la configuration de l'une ou de l'autre.

1°. Dans la pompe aspirante; le corps de pompe, la soupape qui se trouve au bas de ce corps de pompe, et le piston, sont placés à une certaine hauteur au-dessus du niveau de l'eau du puisard; dans la pompe foulante, au contraire, le corps de pompe, la soupape et le piston sont immergés.

2°. La pompe aspirante faisant monter l'eau par *succion*,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

c'est-à-dire, par l'extraction de l'air contenu dans la pompe, ne peut élever l'eau qu'à une hauteur moindre de 32 pieds, ou de 10$^{\text{mèt.}}$4; la pompe foulante fait monter l'eau, en la refoulant le long d'un tuyau, à une hauteur indéterminée.

447. L'effort que doit exercer le moteur appliqué à une pompe foulante, est *équivalent au poids d'une colonne d'eau ayant pour base la base même du piston, et pour hauteur la distance entre la surface du puisard, et le point le plus élevé où elle parvient, quelle que soit la forme, le diamètre et l'inclinaison du tuyau montant.*

En effet, une pompe foulante peut être considérée comme un vase à fond mobile, et nous avons vu (149) que la charge qu'éprouve un vase quelconque, rempli d'eau, dépend uniquement de la hauteur de l'eau, et nullement de la forme ni des dimensions du vase.

Pompe aspirante-foulante.

448. La pompe aspirante-foulante diffère de la pompe aspirante simple en ce que (Pl. IV, fig. 3) son piston *p* n'est point foré, et que, immédiatement au-dessus de la soupape, se trouve l'embouchure d'un tuyau montant *mm* d'une longueur indéterminée.

449. La partie inférieure de cette pompe agit comme une pompe aspirante simple, et en a toutes les propriétés; la partie supérieure remplit les fonctions d'une pompe foulante : *Lorsque le piston monte, il aspire, et la puissance doit surmonter un effort* (445) *équivalent au poids d'une colonne d'eau qui aurait pour base le piston et pour hauteur la distance entre le point le plus élevé de la course du piston et le niveau de l'eau dans le puisard.* Lorsqu'il descend, il refoule l'eau dans le tuyau montant, et la partie inférieure de la pompe est inac-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tive, et alors *il doit surmonter le poids d'une colonne d'eau qui aurait pour base le piston, et pour hauteur la distance verticale entre la soupape* s *et le point le plus haut où l'eau parvient dans le tuyau montant.*

450. Les pompes aspirantes-foulantes devraient être construites de telle sorte que les efforts du moteur fussent égaux dans la descente comme dans la montée du piston.

On doit observer que dans la descente, le poids du piston et de son équipage aident le moteur, tandis que dans la montée ce poids devient un surcroît de résistance.

451. Il importe essentiellement, dans la construction de toute espèce de pompe, d'éviter les rétrécissemens aux passages d'un tuyau à un autre, et que les soupapes, soit du corps de pompe, soit du piston, soit du tuyau montant, laissent la plus grande ouverture possible. En effet, partout où il y a rétrécissement, l'eau est obligée d'acquérir une vitesse plus grande, qui ne peut lui être communiquée qu'aux dépens de la force motrice.

452. L'écoulement de l'eau élevée par une pompe est intermittent. Cette intermittence est un inconvénient grave surtout dans les pompes foulantes ou aspirantes-foulantes, le tuyau montant desquelles ayant une grande longueur, contient une masse considérable d'eau; car, toutes les fois que le piston rétrograde, cette masse demeure en repos; de sorte que lorsque le piston remonte, il faut vaincre son inertie et lui imprimer de nouveau le mouvement; ce qui ne peut se faire sans une perte de force motrice d'autant plus grande que la masse d'eau est plus considérable.

453. On emploie deux moyens pour éviter cette intermittence; le premier consiste à faire travailler conjointement un certain nombre de pompes qui déchargent l'eau dans un même tuyau montant, et dont le mouvement des pistons est réglé de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

manière qu'au même instant ils se trouvent graduellement à divers points de leur course. Ce moyen a été mis en usage avec beaucoup de succès dans la machine provisoire de Marly, où huit pompes élèvent ensemble, d'un seul jet, en 24 heures, plus de 800 mille litres d'eau à 160 mètres de hauteur.

454. Le second consiste à adapter à une pompe un réservoir d'air; ce second moyen est employé en petit dans les pompes à incendie, dont une des conditions essentielles est la continuité du jet, et on le voit employé en grand dans la pompe de Chaillot. Cette pompe colossale a 6 $\frac{1}{2}$ décimètres de diamètre intérieur, et le piston parcourt environ deux mètres, soit en montant, soit en descendant; le réservoir d'air a 5 mètres de hauteur et 1 mètre de diamètre. Les réservoirs d'air de grande dimension sont excessivement coûteux, et ils sont d'ailleurs sujets à plusieurs inconvéniens qui leur font préférer la première méthode que nous avons indiquée.

455. Le récipient d'air a une soupape qui ouvre et qui ferme la communication avec le corps de pompe; elle s'ouvre toutes les fois que l'on fait monter le piston; alors l'eau entre dans le récipient, et y comprime l'air qui y est contenu; quand le piston descend, la soupape se ferme, l'air comprimé exerce sa force expansive, repousse l'eau du récipient, et la chasse dans le tuyau montant. Ainsi, à chaque refoulement, il n'y a qu'une partie de l'eau élevée par le piston qui passe dans le tuyau montant, l'autre reste en réserve dans le réservoir, pour y entrer en vertu de la force expansive de l'air comprimé dans le récipient.

456. Le récipient d'air donne un écoulement continu, mais non pas uniforme; car le ressort de l'air a toute sa vigueur, et produit le plus grand effet lorsqu'il commence à exercer sa pression sur l'eau du récipient; mais au fur et à mesure que l'eau monte, l'air se dilate de plus en plus, épuise sa force, et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la quantité d'eau qu'il refoule diminue à chaque instant. Cette variabilité dans l'écoulement est d'autant plus sensible, que les coups de piston sont plus lents.

457. L'expérience a prouvé que l'effet utile des pompes les mieux construites est diminué de plus d'un sixième par la perte d'eau que font les pistons, par leur frottement, et par les rétrécissemens que les soupapes occasionent.

458. Si l'on a un système de pompes mues par une roue à augets, le plus grand effet total que l'on puisse en obtenir n'est qu'environ les trois quarts de l'eau dépensée élevée à une hauteur égale à celle de la source. En effet, nous avons vu (326) que l'effet maximum d'une roue à augets est d'élever à une hauteur égale à celle de la source autant d'eau qu'elle en dépense, mais cet effet maximum exige des conditions qui ne peuvent jamais être remplies complétement. Borda évalue à un huitième la diminution d'effet qui a lieu dans les roues à augets les mieux combinées.

Cette diminution, combinée avec celle qui est due au mécanisme des pompes, donne effectivement un peu moins de trois quarts de l'effet maximum, en supposant que la machine soit des plus parfaites.

459. L'effet que l'on obtient des pompes mues par des roues à aubes est encore moindre; car l'effet maximum de ces roues (305) est équivalent à la moitié de l'eau dépensée élevée à la hauteur de la source; mais pour cela il faut que les aubes de la roue remplissent exactement le coursier dans lequel elles tournent, de manière que l'eau ne puisse s'échapper ni par-dessous les aubes ni latéralement, sans avoir exercé son action; et comme on est fort éloigné d'approcher de cette précision, Borda estimait que ces roues ne produisent réellement que le tiers de l'effet total; en admettant cette évaluation, et ayant égard à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la perte qui dépend du mécanisme des pompes, on trouve qu'un système de pompes mues par une roue à aubes, ne produit qu'un peu plus du quart de l'effet total, c'est-à-dire, n'élève qu'environ le quart de l'eau dépensée à une hauteur égale à celle de la chute.

Machines à compression d'air.

460. Il existe en Hongrie des machines construites à l'instar de la *Fontaine de Héron*, et qui n'ont d'autres parties mobiles que des robinets. Supposons (Pl. IV, fig. 4) que *mm* soit le niveau de l'eau motrice; *ll* le niveau de l'eau que l'on veut élever à la hauteur *oo*, moindre que celle du niveau de l'eau motrice.

461. La machine est composée de deux récipiens fermés *d* et *i*, et de sept tuyaux; savoir : 1°. du tuyau *bb*, qui part du réservoir supérieur *mm*, et pénètre dans le récipient *d*, où il descend jusqu'auprès du fond; 2°. du tuyau *hh* qui établit la communication entre le récipient *d* et le récipient *i*; 3°. du tuyau *nn* qui s'élève du récipient *i* et aboutit au réservoir *oo* de décharge; 4°. de deux petits tuyaux *e* et *f* qui sont adaptés au récipient *d*; 5°. et deux autres tuyaux *k* et *m* sont également adaptés au récipient *i*. Six robinets, *c*, *g*, *f*, *e*, *m*, *k*, règlent la circulation de l'eau et de l'air de la manière suivante.

462. Pour faire agir la machine, on ouvre d'abord les deux seuls robinets *k* et *m*; l'eau du réservoir *ll* entre alors dans le récipient *i*, chasse l'air qu'il contient, lequel trouve une issue par le petit tuyau *m*. Aussitôt que le récipient *i* est plein, on ferme les deux robinets *k* et *m*, et on ouvre *c* et *g*; l'eau du réservoir supérieur *mm* tombe dans le récipient *d*, comprime l'air qui y est contenu, lequel passe dans le tuyau *hh*, entre dans le récipient *i*, où il refoule l'eau qui y est contenue, et l'oblige à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

monter par le tuyau *nn* jusqu'au réservoir de décharge *oo*. Lorsque cette eau s'est écoulée, on ouvre les robinets *e*, *f*, dont l'un laisse sortir l'eau contenue dans le récipient *d*, et l'autre y laisse rentrer l'air, et on ferme *c*, *g*. On ouvre ensuite les robinets *k* et *m* d'en bas, et l'on répète la série des opérations que nous venons d'indiquer.

463. Jars et Duhamel eurent occasion d'examiner une machine de cette espèce construite à Schemnitz. La distance verticale entre la surface de l'eau motrice *mm* et le fond du récipient *i* était de 45 mètres, et la distance du puisard *ll* au réservoir de décharge *oo* était de 31 mètres. Cette machine élevait en vingt-quatre heures, lorsqu'elle travaillait sans interruption, 411 mètres cubes d'eau, avec une dépense d'eau motrice de 685 mètres cubes. Ainsi, l'effet utile était à la force dépensée, comme 411×31 à 685×45, c'est-à-dire, à peu près comme 2 est à 5.

La capacité du récipient *d* était d'environ 3 $^{\text{mèt.}}$ $\frac{1}{2}$ cubes, et celle du récipient *i*, la moitié; la machine employait environ trois minutes à chaque fois qu'elle élevait l'eau, et donnait à peu près 856 décimètres cubes d'eau.

464. On voit que dans cette machine il y a une perte de plus de moitié sur la force dépensée. Plusieurs causes concourent à produire cette perte.

1°. L'eau motrice, en tombant du réservoir *mm* dans le récipient *d*, acquiert une vitesse d'autant plus grande que la hauteur de la chute est plus grande; la force vive qui en résulte ne coopère point à l'effet utile.

2°. Quand on ouvre la communication entre les récipiens *d* et *i*, la compression de l'air dans le récipient *i* fait monter l'eau dans le tuyau *nn*, avec une vitesse ascensionnelle due à la hauteur de la colonne d'eau qui comprime l'air; et cette vitesse

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ascensionnelle étant toujours plus grande que celle purement nécessaire pour faire monter l'eau dans le réservoir de décharge *oo*, il y a perte de force vive.

3°. Lorsque la compression de l'air dans le récipient *i* a fait monter l'eau qu'il contenait, la force élastique que cette compression a fait acquérir à l'air n'est point épuisée ; néanmoins il faut qu'elle sorte en cet état, ce qui occasione une nouvelle perte de force vive, d'autant plus grande que la hauteur de la colonne comprimante est plus élevée.

465. On voit, par ce que nous venons de dire, que les causes qui occasionent des pertes de forces vives dans cette machine, acquièrent plus de force au fur et à mesure que la hauteur de la chute de l'eau motrice est plus grande ; ainsi, passé une certaine limite, cette machine devient progressivement moins productive ; voilà pourquoi, lorsque la hauteur de cette chute surpasse 30 ou 40 mètres, on préfère un système de pompes mus par une machine à colonne d'eau, quoique ce dernier moyen exige des frais de construction et d'entretien bien plus considérables.

Il est difficile d'imaginer une machine plus simple et moins coûteuse que celle à compression d'air ; mais elle cesse d'être avantageuse lorsqu'il s'agit d'élever l'eau à une hauteur plus grande que celle de la chute primitive, et lorsque cette hauteur surpasse 30 ou 40 mètres.

Machines à siphons.

466. Parmi les machines à siphons, une des plus simples et en même temps des plus ingénieuses est celle de Trouville (Pl. IV, fig. 5.) ; elle ne contient, comme la machine précédente, que des tuyaux et des récipiens, et elle n'a de mobile que des soupapes ou des robinets.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

467. Cette machine est composée d'un grand récipient *a* privé de communication avec l'air extérieur; ce récipient est garni de trois tuyaux, dont l'un *b*, muni d'un robinet, laisse entrer l'eau motrice *mm* dans le récipient; le second *d*, ayant également un robinet, laisse écouler périodiquement cette eau; le troisième *cc* part du sommet du récipient *a*, et il a des communications ouvertes avec un certain nombre de siphons aspirateurs *s*, *s*, *s*, placés dans de petits réservoirs *r*, *r*, *r*.

468. Supposons le récipient *a* plein; que l'on ouvre le robinet *d*, l'eau, en s'écoulant, laissera un vide dans le récipient, qui ne peut être rempli par l'air extérieur, puisque toute entrée lui est interdite; ce vide produit une dilatation dans l'air contenu dans le tuyau *cc* et dans chacun des siphons dont la branche verticale plonge dans l'eau d'un des réservoirs inférieurs. La pression atmosphérique sur la surface de cette eau n'étant point contre-balancée dans l'intérieur des siphons, l'eau monte dans ces siphons, les remplit, et s'écoule par la branche supérieure jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli. Alors on ferme le robinet *d*, l'on ouvre le robinet *b*, le récipient *a* se remplit d'eau. Aussitôt qu'il est plein, on ferme le robinet *b*, l'on ouvre l'autre, l'eau s'écoule, le vide se forme, les siphons se remplissent et élèvent une nouvelle portion d'eau dans le réservoir supérieur. Cette série d'effets se reproduit indéfiniment.

469. Voici la théorie de cette machine, telle qu'elle a été exposée par Borda et les commissaires chargés, par le gouvernement, de l'examiner.

470. « Soit la hauteur de la source égale à un peu plus de 16 pieds 6 pouces, et supposons que le sommet du récipient *a* soit au niveau de la source. Considérons ensuite tous les siphons réduits à un seul, parce qu'ils produisent tous un effet pareil; soit la hauteur du sommet de ce siphon unique au-dessus du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

réservoir inférieur égale exactement à 16 pieds. Enfin, imaginons que le grand aspirateur soit d'abord entièrement rempli d'eau, mais qu'il reste la hauteur de trois pouces d'air dans le siphon, et que cet air ait la même densité que celui de l'atmosphère; supposons encore que le niveau du réservoir, dans lequel l'eau doit se dégorger, soit trois pouces plus bas que la branche horizontale, ou, pour mieux dire, que la caisse du siphon, et que le récipient et le siphon aient la même capacité.

471. » Cela posé, si l'on fait écouler l'eau du récipient par sa partie inférieure, on verra qu'elle descendra d'abord de trois pouces sans produire aucun mouvement dans l'eau du siphon; mais qu'alors l'air se trouvant à peu près réduit à la moitié de sa densité première, la pression extérieure de l'atmosphère commencera à faire monter l'eau dans le siphon, et elle continuera ensuite à s'y élever jusqu'à ce que la colonne d'eau contenue dans le siphon soit descendue au niveau de six pouces. Si on considère maintenant le mouvement de la machine lorsque l'eau rentrera dans le récipient, on verra que l'eau y montera de trois pouces environ avant de produire aucun effet sur le siphon; mais qu'alors l'eau de ce dernier commencera à en sortir, et que les trois pouces d'eau qu'il avait aspirés seront versés dans le réservoir voisin, lorsque l'air aura repris la densité de l'atmosphère.

472. » Il résulte de là qu'il sera entré dans le récipient une hauteur de six pouces d'eau, tandis qu'il n'en aura versé qu'une hauteur de trois pouces dans le réservoir supérieur; d'où l'on voit que la quantité d'eau élevée ne sera que la moitié seulement de la quantité dépensée, et encore faut-il remarquer que celle-ci est descendue d'un peu plus de seize pieds de hauteur, tandis que l'eau élevée n'a été que d'un peu moins de seize pieds.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

473. » Si l'on imagine de la même manière le produit de la machine lorsque la source a une hauteur différente de celle que nous venons de supposer, on trouvera que l'eau élevée est à l'eau dépensée comme le volume que l'air occupe lorsqu'il a la même densité que l'atmosphère est au volume qu'il occupe lorsque, par sa dilatation, il soutient une colonne d'eau égale à la hauteur de la source; et, en général, la quantité dépensée étant toujours représentée par 32 pieds, la quantité élevée sera représentée par 32 pieds moins la hauteur de la source.

474. » Ainsi, lorsque la hauteur de la source sera de 8 pieds, les deux quantités seront entre elles comme 32 est à 24, ou comme 4 à 3, et par conséquent la machine produira les trois quarts de l'effet total; elle en produira les sept huitièmes lorsque la hauteur sera de quatre pieds seulement, et les quinze seizièmes lorsqu'elle sera réduite à deux pieds. D'où l'on voit que l'effet de la machine approchera d'autant plus de l'effet total, ou du plus grand effet possible, que la hauteur de la source qui sert de moteur sera plus petite. »

475. La machine de Trouville, quoique bien simple en apparence, exige une construction très-soignée, surtout pour empêcher l'air de pénétrer dans les caisses des siphons; car il est évident que cette machine deviendra inactive toutes les fois qu'une fente ou une imperfection quelconque donnera entrée à l'air dans une seule de ces caisses. Cet inconvénient très-grave, joint à celui du grand volume qu'elle occupe et à la difficulté de l'établir solidement, rendront probablement infructueuse cette ingénieuse invention, comme l'ont été jusqu'à présent les machines analogues qui furent proposées en divers temps, et dont nous croyons inutile de nous occuper.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Belier hydraulique.

476. Cette machine aussi utile que simple (Pl. IV, fig. 6) est composée, 1°. de deux tuyaux, l'un horizontal *a*, l'autre vertical *b*; 2°. d'un réservoir d'air *r*; 3°. de deux soupapes *c* et *d*; la première s'appelle *soupape d'arrêt*, et la seconde *soupape ascensionnelle*.

Supposons la soupape d'arrêt *c* ouverte; l'eau du courant traversera le tuyau horizontal avec une vitesse qui lui est propre: alors si la soupape *c* se ferme tout à coup, la masse d'eau qui se meut dans le canal se trouvant arrêtée subitement, réagit contre les parois du tuyau, et cherche à s'ouvrir un passage. Elle rencontre la soupape *d* qui est la seule partie qui puisse céder à son effort; elle la repousse, ouvre la communication entre le tuyau et le réservoir d'air, et s'y insinue jusqu'à ce qu'elle éprouve une résistance qui détruit toute sa vitesse. Alors la soupape, comprimée par la colonne d'eau qu'elle supporte, se ferme; en même temps la soupape d'arrêt s'ouvre, l'eau, en s'écoulant, acquiert de la vitesse, puis la soupape d'arrêt se ferme; un second choc a lieu, et ce choc ouvre la soupape ascensionnelle, l'eau s'introduit de nouveau dans le réservoir d'air et dans le tuyau vertical, et ainsi de suite.

477. Le réservoir d'air produit deux effets: le premier est de diminuer la violence du choc en le faisant agir sur une masse d'air qui est douée d'élasticité, le second est de produire un écoulement continu.

Après un certain nombre de coups, l'eau parvient au sommet du tuyau montant, et sort par le dégorgeoir.

478. Nommons Q la quantité d'eau motrice que le courant fournit à chaque coup de belier, et V la vitesse due à la hauteur de la chute; QV est la quantité totale du mouvement que le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

moteur communique à la machine à chaque coup de belier; s'il n'y avait point de déperdition de force, et si cette quantité de mouvement était employée en entier, le belier produirait le plus grand de tous les effets possibles, c'est-à-dire que la quantité Q d'eau consommée pourrait élever une égale quantité d'eau, à une hauteur égale à celle de la chute.

479. Les expériences d'Eytelwein et de Brunacci ont prouvé que l'effet utile des beliers hydrauliques diminue au fur et à mesure que le rapport entre la chute et la hauteur d'ascension augmente.

Résultats des expériences d'Eytelwein.

RAPPORT de la hauteur d'ascension A LA CHUTE.	RAPPORT DE L'EFFET UTILE à la quantité DE LA FORCE MOTRICE DÉPENSÉE.
1 ou égalité entre les deux hauteurs.	0,920
2.	0,837
3.	0,774
4.	0,720
5.	0,673
6.	0,630
7.	0,591
8.	0,555
9.	0,520
10.	0,488
11.	0,457
12.	0,427
13.	0,399
14.	0,372
15.	0,345
16.	0,320
17.	0,295
18.	0,272
19.	0,248
20.	0,226

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Expériences de Brunacci.

480. La chute d'eau a été constamment de 1 $^{\text{mèt.}}$,172. Le diamètre du tuyau horizontal du belier 0 $^{\text{mèt.}}$,1; celui du tuyau montant 0 $^{\text{mèt.}}$,0028; le réservoir d'air avait 1 $^{\text{mèt.}}$,02 de hauteur et 0 $^{\text{mèt.}}$ 29 de diamètre.

LONGUEUR du tuyau HORIZONTAL.	HAUTEUR du tuyau vertical prise au-dessus DE LA SOUPAPE.	NOMBRE des coups de belier DANS UNE HEURE.	QUANTITÉ d'eau ÉLEVÉE.	QUANTITÉ d'eau PERDUE.
mètres.	mètres.		mètres cubes	mètres cubes.
11,614	13,230	1384	0,7461000	15,1697355
	10,956	1636	1,0959627	15,1884344
	7,860	1756	1,6172552	15,4981545
	4,678	1894	2,5329846	14,9908627
7,936	13,430	2057	0,4824576	12,9902010
	10,956	2117	0,7907379	13,5333762
	7,860	2250	1,2243690	13,6944900
	4,678	2571	2,1749888	13,6944900
4,218	13,430	3130	0,2911148	13,3722240
	10,956	3428	0,5216948	14,0857189
	7,860	3428	0,7767670	14,0857189
	4,678	3600	1,4877324	14,2422696

481. On voit par ces expériences que la longueur du tuyau horizontal influe sur le produit de la machine: une plus grande longueur diminue le nombre des coups de belier dans un temps donné, mais elle augmente la quantité d'eau qui s'élève à chaque coup; il doit donc y avoir une longueur qui correspond au maximum du produit. Brunacci déclare que le nombre de ses expériences n'a pas été assez grand pour la déterminer. Eytelwein croit que la longueur la plus favorable est exprimée par *la longueur du tuyau montant, plus le double du rapport de la chute à la hauteur d'ascension;* et que son diamètre doit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

être déterminé par la règle suivante : *extraire la racine carrée de la quantité d'eau employée, exprimée en pouces cubes, et diviser le quotient par* 25. Le même auteur a reconnu que le diamètre du tuyau montant doit être la moitié de celui du tuyau horizontal, et que le diamètre de l'ouverture de la soupape d'arrêt ne doit jamais être moindre que celui du tuyau horizontal.

482. Eytelwein ayant établi la comparaison entre l'effet utile d'un belier et celui des pompes mues soit par une roue à augets, soit par une roue à aubes, conclut que, 1°. si la hauteur d'ascension est quatre fois plus grande que celle de la chute, le belier élève près d'un septième plus d'eau que les pompes mues par une roue à augets; 2°. que les effets utiles de ces deux machines sont égaux lorsque la hauteur de l'ascension est six fois celle de la chute; 3°. que le belier devient progressivement moins avantageux lorsque cette hauteur augmente; 4°. que le belier est préférable aux pompes mues par une roue à aubes, lorsque la hauteur d'ascension est moindre que douze fois celle de la chute.

Organes qui élèvent l'eau par une simple translation.

483. La manière la plus simple d'élever l'eau par translation consiste dans l'emploi des seaux. On donne le nom de *baquetage* au travail des ouvriers qui puisent de l'eau immédiatement avec des seaux d'une forme quelconque. D'après les observations de Perronet, il résulte que le produit moyen journalier du travail d'un baqueteur, dont la durée est de douze heures, est équivalent à 46 kilogrammes élevés à un kilomètre.

484. Coulomb a observé (283) que l'effet utile d'un homme qui tire l'eau d'un puits à l'aide d'une corde passée sur une poulie, est équivalent à 71 kilogrammes élevés à un kilomètre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

485. Il importe de faire usage d'un contre-poids lorsque l'on se sert d'un seau suspendu à une corde; Gauthey a remarqué que si le seau n'est point contre-pésé, l'élévation de son seul poids consomme inutilement plus d'un sixième de l'action journalière : ainsi, toutes les fois qu'il s'agit d'élever l'eau d'un puits profond à l'aide d'un treuil, il est convenable d'y adapter deux seaux, dont l'un monte tandis que l'autre descend.

Les seaux isolés ne sont ordinairement employés que pour un épuisement de courte durée. Lorsque l'épuisement doit être continu, l'on préfère avec raison les *norias*, les *roues à pots*, les *timpans*, ou bien les *chapelets* et les *vis d'Archimède.*

Norias.

486. Les norias ne sont autre chose en général qu'une série de vases suspendus à des chaînes sans-fin qui s'enveloppent sur deux tambours.

487. Soit H la hauteur à laquelle l'eau doit être élevée, M la masse d'eau contenue dans les vases, V la vitesse imprimée à ces vases, g la gravité spécifique de l'eau. La quantité d'action fournie par le moteur, pendant l'unité de temps, sera PH (P indiquant la pression qu'il exerce); la masse d'eau élevée est gMH, laquelle sort après avoir acquis la vitesse V et la la force MV^2 laquelle est perdue pour l'effet utile. La quantité d'action fournie par le moteur doit être équivalente au poids de l'eau élevée et à la force vive perdue (faisant abstraction des frottemens), ainsi nous aurons

$$PH = gMH + MV^2.$$

Le rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée sera

$$\frac{gMH}{gMH + MV^2}, \text{ ou } \frac{gH}{gH + V^2},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

expression qui indique que l'on aura l'*effet maximum* lorsque la vitesse V sera infiniment petite. *Ainsi, pour obtenir d'une noria l'effet le plus avantageux, il faut modérer sa vitesse autant que possible.*

488. On voit qu'en supposant la vitesse V très-petite, la noria est susceptible (théoriquement parlant) de donner le plus grand produit possible; c'est-à-dire, un produit égal à la quantité d'action fournie par le moteur.

489. Voici les causes principales qui diminuent cet effet dans la pratique.

1°. Pour que les vases parvenus au sommet de leur course puissent vider l'eau dans le canal de décharge, on est obligé d'élever cette eau à une plus grande hauteur que celle du niveau du réservoir. Cet excédant de hauteur est un inconvénient léger quand la noria est employée à élever l'eau à une hauteur considérable; il n'en est pas de même lorsque la hauteur d'ascension est petite.

2°. Lorsque les vases versent l'eau, il est difficile qu'il ne s'en perde une portion.

3°. Le poids de la chaîne sans-fin et des vases qui lui sont adhérens étant fort grand, les tourillons qui la supportent éprouvent des frottemens considérables.

490. Néanmoins la *noria*, lorsqu'elle est bien construite, est une des meilleures machines connues, et son effet utile moyen, surpasse souvent la moitié de sa quantité d'action dépensée. Elle est simple, peu coûteuse, facile à établir; elle n'est point sujette à des engorgemens lorsque l'eau est trouble, et son mouvement étant continu, peut avoir toute l'uniformité désirable.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Roues à pots.

491. Les roues à pots ne sont autre chose qu'une espèce de noria circulaire, et les vases, au lieu d'être soutenus par une chaîne sans-fin, sont appliqués à la circonférence d'une roue verticale. La théorie de ces machines est la même que celle des norias, que nous venons d'exposer. Ainsi la vitesse qu'on lui imprime doit être très-petite; et alors, en faisant abstraction des pertes qui dépendent des mêmes causes que nous avons désignées pour les norias, l'effet utile serait égal à la quantité d'action dépensée.

492. Perronet (*a*) a fait des observations sur une roue à godets mue par une roue à aubes, desquelles on déduit que le rapport de l'effet utile à la force dépensée est environ 0,68.

M. Boistard a rapporté de semblables observations (*b*), qui donnent pour résultat le rapport 0,65 qui diffère peu du précédent.

Tympan.

493. Le timpan dont Vitruve nous a transmis la description, est un tambour creux dont les bases sont verticales et dont l'intérieur est divisé en huit espaces égaux par des cloisons qui suivent les directions de ses rayons. L'axe qui supporte le tambour est un tuyau creux dans lequel se décharge l'eau que le tambour puise en tournant. On voit par cette courte description, que le timpan ne peut élever l'eau qu'à une hauteur un peu moindre que son rayon.

494. Soit M la masse d'eau contenue dans l'arc s de la roue

(*a*) Description des projets et de la construction des ponts. Tom. I, pag. 39.
(*b*) Expériences sur la main-d'œuvre, etc. Pag. 67.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

compris entre le niveau de l'eau inférieure, et un plan horizontal passant par l'axe de la roue, V la vitesse de la roue; P l'effort du moteur, H la hauteur à laquelle l'eau est élevée; nous aurons

$$Ps = gMH + \frac{MV^2}{2},$$

parce que la force vive perdue n'est due qu'à la vitesse que la roue prend brusquement en entrant dans l'eau; mais comme l'eau sort de la roue par un orifice contigu à l'axe, elle n'a plus alors aucune vitesse circulaire, et elle n'emporte avec elle aucune force vive; la perte est donc la moitié moindre que si elle sortait, comme dans la roue à augets, avec une vitesse acquise égale à V. Le rapport de l'effet utile sera ici $\frac{gH}{gH + \frac{1}{2}V^2}$.

495. On voit par cette expression, 1°. que le timpan (à vitesses égales) doit donner un produit un peu supérieur à celui des roues à pots; 2°. que pour obtenir de cette machine le plus grand effet possible, il faut que la vitesse soit infiniment petite, et alors cet effet est égal à la quantité d'action dépensée.

496. On conclut des observations faites par Perronet, sur un timpan que son effet utile est les $\frac{4}{5}$ environ de la quantité d'action dépensée.

Chapelet vertical.

497. Le chapelet vertical n'est autre chose qu'une chaîne sans-fin, garnie de plateaux à distances égales, lesquels, en parcourant un tuyau de même diamètre a peu près, font monter l'eau qu'ils ont puisée dans le réservoir où le bout du tuyau est immergé. Ainsi le chapelet vertical est une espèce de noria dont les vases sont remplacés par des plateaux mobiles et par le tuyau qui les environne, par conséquent la théorie des *norias* est applicable aux chapelets verticaux.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

498. D'après les expériences de M. Soyer, rapportées dans l'ouvrage de Gauthey, un homme peut élever dans un jour au moyen d'un chapelet vertical 120 à 140 mètres cubes d'eau à un mètre de hauteur. M. Soyer a observé que dans un chapelet dont la manivelle fait 20 ou 25 tours par minute, le volume d'eau élevé est à celui qui le serait s'il n'y avait point de pertes entre les plateaux et le tuyau, à peu près dans le rapport de 0,64 : et quand la manivelle fait 47 tours par minute, la perte est presque réduite à rien.

Cette machine s'engorge aisément et elle exige un entretien onéreux.

Chapelet incliné.

499. Le chapelet incliné diffère du chapelet vertical en ce que ses plateaux qui ont ordinairement de plus grandes dimensions sont en bois et carrés; ils se meuvent dans une caisse inclinée nommée buse, qui est ouverte dans le haut. La section de la buse est à peu près égale à la surface d'un des plateaux.

Nommons H la hauteur du plan incliné de la buse; a l'angle qu'il fait avec l'horizon; $\frac{H}{\text{Sin. } a}$ sera sa longueur, et l'équation du mouvement de la machine sera

$$\frac{PH}{\text{Sin. } a} = gMH + MV^2.$$

Le rapport de l'effet utile à la quantité dépensée est $\frac{gH}{gH + V^2}$, quantité indépendante de l'angle a; ce qui indique qu'une inclinaison quelconque du plan incliné n'altère point le rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Vis d'Archimède (Pl. IV, fig. 7).

500. Les vis d'Archimède, dont on se sert communément, ont à l'extérieur la forme d'un *canon* ou cylindre creux de 5 à 6 mètres de longueur, et dont le diamètre est d'environ 5 décimètres. Intérieurement ce cylindre contient un *noyau* ou axe cylindrique qui lui est concentrique, et dont le diamètre n'a qu'environ 2 décimètres. Le canon est formé, à l'instar d'un tonneau, de douves retenues par des cercles de fer. Les jointures doivent être assez rapprochées pour ne pas donner issue à l'eau : mais on a soin de pratiquer de petites fentes à travers lesquelles l'air atmosphérique puisse s'introduire; car il importe essentiellement que l'air intérieur ait toujours la même densité que l'extérieur.

501. L'espace vide compris entre le *noyau* et le canon est séparé en trois tuyaux hélicoïdes par des cloisons dont chacune suit la courbure d'une hélice tracée sur la surface intérieure du canon, de manière que les tangentes à cette courbe forment dans tous les points un angle des deux tiers d'un angle droit, ou 60 degrés environ. Les surfaces hélicoïdes dont nous parlons ont pour génératrices des lignes droites mobiles constamment perpendiculaires à l'axe de la vis.

502. Quand on veut faire agir cette vis, on plonge son extrémité dans l'eau, on incline son axe de 45 à 50 degrés, et on place à son extrémité supérieure une manivelle que des hommes font tourner.

503. Soit nn le niveau de l'eau; B, la vis; ppp, la projection d'une des courbes hélicoïdes. L'eau entrera d'abord dans la partie d, où elle sera de niveau avec l'eau extérieure : que l'on fasse tourner alors la vis; cette masse d'eau sera contrainte à couler dans le tuyau hélicoïde, et elle aura un mouvement de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

translation qui la fera parvenir d'abord en e, puis en f, et enfin au sommet de la vis, d'où elle se répandra au dehors. Ainsi, à chaque révolution de la vis, le tuyau hélicoïde puise à son extrémité une nouvelle quantité d'eau d, et en verse autant à son extrémité supérieure.

504. Si l'air contenu dans les espaces t et s a une même densité que l'air extérieur, les portions d'eau contenues en d, e, f, etc., sont entièrement supportées par le tuyau; et cette eau ne peut redescendre. Il n'en serait point de même, si l'air ne pouvait s'introduire librement dans les espaces t, s. Dans ce cas l'eau, en montant dans le tuyau, chasserait l'air, et remplirait les espaces t, s; l'eau contenue dans ces espaces ne pourrait être soutenue que par la force centrifuge résultant du mouvement de rotation, et elle exercerait à la partie inférieure de la vis une pression due à la hauteur totale à laquelle l'eau est élevée. Ainsi, s'il fallait dans ce cas élever l'eau, il faudrait imprimer à la vis une grande vitesse; mais quand l'air contenu dans la machine aura une même densité que l'air extérieur, le poids de l'eau dans les tuyaux se trouvant entièrement soutenu, n'exercera aucune pression sur l'orifice inférieur, et la force centrifuge résultant du mouvement de rotation n'entrera plus pour rien dans le jeu de la machine.

505. L'eau entre dans les tuyaux hélicoïdes avec une vitesse nulle, quelle que soit d'ailleurs la vitesse de rotation. Le fluide qui s'y est introduit se trouve emporté par la machine dans le sens des tuyaux hélicoïdes, avec une vitesse égale à celle avec laquelle il coule en sens contraire le long de ces canaux; d'où il résulte que sa vitesse à la sortie est également nulle. Ainsi, si l'on fait abstraction des frottemens et autres résistances passives, la quantité d'action produite par le moteur est entièrement employée à élever l'eau. Cette propriété appartient exclusivement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à la vis d'Archimède. Conséquemment, nommant H la hauteur à laquelle l'eau doit être élevée ; E, le volume d'eau versé par l'extrémité supérieure à chaque révolution de la vis; P, l'effort du moteur supposé appliqué à l'extrémité du rayon r du canon; g, la pesanteur de l'eau, on aura

$$P2\pi r = gEH.$$

506. Ce résultat est un maximum auquel on n'atteint jamais dans la pratique. Plusieurs causes tendent à le diminuer : 1°. La manivelle tourne dans un plan qui, n'étant point vertical, se trouve dans une position désavantageuse pour le moteur; 2°. l'extrémité de la machine qui plonge dans l'eau imprime à cette eau en dehors de la vis un mouvement qui détruit une partie de la force motrice; 3°. la vis est sujette à se courber et à se déjeter.

507. M. Hachette (*a*) rapporte les deux expériences suivantes faites pour déterminer l'effet utile de cette machine.

1°. Une vis, longue de 5 mèt., 85, et ayant 0 mèt., 49 de diamètre, était manœuvrée par deux relais d'hommes composés chacun de neuf hommes, et travaillant alternativement pendant deux heures de suite. L'eau élevée en une heure était de 45 mètres cubes, et l'élévation de 3 mèt., 3; le travail journalier durait dix heures : ce qui donne pour l'effet journalier de chaque ouvrier 82 mètres cubes élevés à un mètre.

2°. Six hommes ont travaillé six heures du jour; la vis faisait 35 tours par minute, et ils élevaient en une heure 91,8 mètres cubes.

Il ne faut point oublier que la hauteur à laquelle on peut élever l'eau avec une vis d'Archimède n'excède point 4 mètres.

(*a*) Traité élémentaire des Machines, seconde édition, pag. 144.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Des machines qui servent au mouvement des fardeaux.

508. Ces machines, en général, ne sont qu'une combinaison d'organes de transmission avec des organes qui modifient les vitesses respectives du moteur et de la résistance, suivant l'exigence des cas, et elles n'ont point d'organes particuliers spécialement affectés à la production de l'effet utile.

ARTICLE III.

Des effets utiles qui résultent de la percussion, de la pression et du frottement.

De la percussion.

509. Plusieurs savans ont fait des expériences dont le but était de connaître les lois que suit la force de percussion des corps pesans que l'on laisse tomber librement. On trouve le détail des expériences de cette nature dans les ouvrages suivans :

Traité des forces mouvantes, par de Camus, *gentilhomme lorrain.*

Dans les Mémoires de l'Académie des sciences pour l'année 1728, *on trouve un Mémoire de* de Camus *de l'Académie des sciences sur l'enfoncement des boules dans la glaise.*

Dans le recueil des prix de l'Académie des sciences de Paris est inséré un important mémoire de Bernouilli, intitulé : *Discours sur la communication du mouvement.*

Traité du mouvement des eaux, par Mariotte.

Gauthey rapporte des expériences faites par l'ingénieur Soyer à la fondation du pont de la Boyerie, près de la Flèche.

Rondelet, dans son traité de l'art de bâtir, a donné le détail d'un grand nombre d'expériences qu'il a faites sur la percussion.

510. Les expériences des deux *de Camus*, de *Bernouilli*, de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Soyer, s'accordent pour indiquer que la force de percussion d'un corps abandonné à l'action de sa pesanteur est proportionnelle à la hauteur de sa chute, et conséquemment au carré de la vitesse acquise à la fin de cette chute.

Celles de Rondelet donnent un résultat bien différent, car elles indiquent que cette force est à peu près proportionnelle à la racine de la hauteur des chutes ou à la simple vitesse acquise à la fin des chutes.

511. Suivant Mariotte, le choc d'un corps de 2 livres 2 onces, qui tombe de 7 pouces de hauteur, est équivalent à la pression de 400 livres. Ce résultat, qui a été admis par plusieurs auteurs, et spécialement par Perronet dans son Mémoire sur les Pieux, ne s'accorde nullement avec les expériences de Rondelet, et paraît beaucoup trop fort.

512. Les expériences de Rondelet ont été effectuées ainsi qu'il suit : On accrochait un plateau de balance à un peson ; on suspendait au-dessus, à l'aide d'une ficelle, le corps qu'on voulait laisser tomber ; au moment de l'expérience, on brûlait la ficelle, et le corps, tombant sur le plateau, faisait mouvoir l'indicateur du peson. Dans quelques expériences il supprima le plateau, en attachant le corps à une ficelle un peu plus longue que la hauteur d'où il devait tomber ; il relevait ensuite le corps qu'il tenait suspendu par une seconde ficelle beaucoup plus mince, en sorte que la différence de ces deux ficelles exprimait la hauteur de la chute ; on brûlait la petite ficelle, et le corps, retenu à la fin de sa chute par la grande, communiquait au peson une traction analogue à celle qui avait lieu lorsqu'il tombait sur le plateau de balance.

513. Voici les principaux résultats de ces expériences, que M. Rondelet ne regarde que comme des essais qui attendent des perfectionnemens ultérieurs :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

POIDS DES CORPS qu'on laissait tomber	HAUTEUR DE LA CHUTE.	TRACTION marquée par l'indicateur DU PESON.	OBSERVATIONS.
Livres	Mètres.	Livres.	Les expériences furent faites avec des boulets de fer. Les expériences faites à des hauteurs au-dessus de cinq mètres, en laissant tomber le boulet dans un plateau de balance, ont donné des résultats qui, comparés à ceux des expériences faites sans plateau, étaient plus forts par la première manière que par la seconde, à des hauteurs au-dessous de cinq mètres; mais pour les hauteurs plus grandes, les deux manières ont donné à peu près les mêmes résultats.
$9\frac{1}{2}$	1	188	
id.	4	292	
id.	9	560	
id.	16	746	
$6\frac{1}{2}$	1	122	
id.	4	238	
id.	9	364	
id.	16	486	
$3\frac{3}{4}$	1	37	
id.	4	70	
id.	9	108	
id.	16	142	

514. Les résultats des expériences que nous venons de citer, sont trop contradictoires et trop incertains pour qu'ils puissent servir de base au calcul de l'effet dynamique des machines à percussion; calcul que l'état actuel de nos connaissances ne nous permet pas encore d'effectuer avec précision.

515. Les effets utiles principaux que l'on obtient de la percussion, sont :

1°. L'enfoncement d'un corps dans un autre qui se laisse pénétrer, tel que, par exemple, l'enfoncement des pieux dans le terrain;

2°. L'aplatissement et l'allongement des corps ductiles ou malléables;

3°. La pulvérisation des corps non ductiles, ou bien la séparation de ces corps en plusieurs fragmens;

4°. Une très-forte pression produite par l'intromission de *coins* entre des corps assujettis à ne pouvoir s'écarter que faiblement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

516. La percussion peut être produite de deux manières, qu'il ne faut pas confondre : 1°. On élève un corps à une hauteur déterminée ; puis on l'abandonne librement à l'action de sa pesanteur. Telle est la manière de faire agir les *moutons* des *sonnettes* à battre les pieux et les gros marteaux ou *martinets* employés dans les forges.

2°. Le moteur ajoute à la force accélératrice de la pesanteur une autre force accélératrice qu'il lui imprime en comprimant le corps pendant la durée de son mouvement. C'est ainsi que le forgeron augmente singulièrement la force de percussion du marteau dont il se sert, et lui communique une quantité de mouvement, due à sa force musculaire, bien supérieur à celui qu'il acquerrait s'il tombait librement ; or, la quantité de mouvement qu'un corps acquiert en vertu d'une force accélératrice quelconque, est d'autant plus grande que cette force reste plus long-temps appliquée au corps. Voilà pourquoi le forgeron qui veut donner un grand coup, a soin d'élever le marteau au-dessus de sa tête, et de lui faire décrire le plus grand arc possible, pour que la force accélératrice ait le temps d'accumuler dans le marteau une grande quantité de mouvement.

On obtient un effet analogue en se servant du mécanisme ingénieux du balancier à vis que l'on emploie communément pour frapper les monnoies.

Balancier.

517. Un balancier est en général composé d'une masse qui se meut verticalement entre deux montans à coulisse, qui ne lui permettent point de dévier. Une vis est placée perpendiculairement au-dessus de cette masse sur laquelle son extrémité inférieure s'appuie. Cette vis traverse un écrou formé dans le *chapeau* qui réunit les montans par le haut. Sur la tête de la vis est placée une longue barre horizontale à deux branches

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

égales dont les extrémités sont garnies d'un poids plus ou moins lourd.

518. La masse qui produit la percussion dans le balancier, n'aurait pu par elle-même produire qu'un effet très-faible; mais la force musculaire des hommes moteurs qui agissent sur la barre de la vis avec célérité et avec continuité, n'ayant aucune résistance à vaincre (excepté le frottement) avant le moment final de la percussion, cette action s'accumule et se concentre dans la partie mobile du balancier, et l'accumulation est d'autant plus grande que la durée de l'action du moteur avant la percussion est plus longue; ou, pour mieux dire, elle est d'autant plus grande que les révolutions décrites par la barre sont plus amples et plus nombreuses.

519. Il résulte de ce que nous venons de dire, que l'évaluation de la quantité d'action journalière des hommes qui agissent sur un balancier est incomplète, si, comme Coulomb a fait, on néglige de considérer la force accélératrice, indépendante de la pesanteur, que les agens moteurs communiquent au balancier.

De la pression.

520. Les pressions que l'on produit au moyen des machines sont de deux sortes. La première espèce de pression agit simultanément sur toute l'étendue d'un corps qui demeure immobile pendant que cette pression s'exerce. Tel est le mode d'action des presses et des pressoirs en général.

La seconde espèce presse successivement diverses parties du corps, et les organes de compression, ainsi que le corps pressé, se meuvent pendant la durée de l'action. C'est ainsi qu'agissent les *laminoirs* et les *calandres*.

521. On donne le nom générique de *laminoir* à une machine composée de deux cylindres parallèles que l'on peut rapprocher

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

plus ou moins à l'aide de vis ou d'autres mécanismes, et entre lesquels on fait passer les corps que l'on veut soumettre à la compression. Ces sortes de machines sont spécialement employées à comprimer les lames et les barres métalliques, et à leur donner une plus grande étendue et une moindre épaisseur.

522. Les *calandres cylindriques* actuellement en usage servent à comprimer les étoffes, et sont, comme les laminoirs, composées de cylindres superposés, que l'on peut rapprocher plus ou moins.

523. Les anciennes calandres, qui maintenant tombent en désuétude, étaient d'énormes caisses remplies de pierres; l'étoffe à comprimer, disposée en rouleau, était placée entre cette caisse et un plan fixe, et la compression se faisait par la caisse, à laquelle on communiquait un mouvement de va et vient. On conçoit combien cette machine était défectueuse par son grand volume et par son mouvement alternatif, lequel, étant communiqué à une masse aussi énorme, produisait en pure perte la consommation d'une partie considérable de l'action motrice.

Du frottement.

524. Les effets utiles que l'on obtient du frottement, sont principalement la pulvérisation de quelques corps, ou la séparation des parties adhérentes à la surface d'autres corps. L'un et l'autre de ces effets s'obtient communément par la rotation plus ou moins rapide d'un corps cylindrique dont la surface présente des aspérités. Quelquefois c'est la base du cylindre qui agit, comme on l'observe dans les meules qui servent à moudre le blé; quelques autres fois c'est la surface convexe qui produit le frottement, comme le font les *meules à aiguiser* et les *polissoirs cylindriques*.

525. Quand l'effet est produit par le frottement de la surface convexe du cylindre, on distingue deux cas. 1°. Le cylindre n'a

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'un seul mouvement sur son axe, comme, par exemple, les meules à aiguiser; 2°. le cylindre a deux mouvemens, l'un de rotation sur son propre axe, l'autre de translation circulaire autour d'un autre axe. On observe ce double mouvement dans les meules verticales tournantes, qui servent à écraser diverses substances, et qu'on emploie dans la fabrication de l'huile et dans celle de la poudre à canon. La matière à pulvériser est déposée ordinairement dans un bassin circulaire dont le fond est horizontal. Un axe vertical s'élève du centre de ce bassin, et l'axe horizontal de la meule tournante est inséré dans celui-ci.

526. On a cru que dans les machines de cette dernière espèce, il aurait été utile de substituer des meules coniques aux meules cylindriques ordinaires : car, la meule cylindrique tend par sa forme à se mouvoir en ligne directe et à s'opposer au mouvement de translation circulaire; il faut donc, pour lui imprimer ce mouvement, vaincre un frottement et consommer une force qui pourrait être épargnée en la remplaçant par une meule conique, formée d'une portion de cône droit dont le sommet serait dans l'axe vertical de rotation. Mais l'expérience a prouvé que les meules coniques ne présentaient point en effet les avantages qu'elles semblent promettre; parce que, d'abord elle n'exercent point une égale pression sur tous les points de leur arête de contact avec le plan sur lequel elles roulent. On a remarqué outre cela, que les meules coniques tournent avec beaucoup de facilité, il est vrai, mais que cette rotation facile empêche qu'elles n'écrasent les matières soumises à leur action; tandis que les meules cylindriques écrasent les matières en glissant dessus et en les comprimant de la même manière que le font les meules horizontales des moulins à mouture.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Des effets que l'on peut obtenir soit par la percussion, soit par une forte pression.

527. La plupart des effets que produit la percussion, peuvent être obtenus également par une forte pression. Parmi ces effets il en est quelques-uns pour lesquels il faut préférer la percussion, et il en est d'autres pour lesquels la pression est plus avantageuse. Parmi les premiers on doit ranger l'introduction d'un corps dans un autre corps qui se laisse pénétrer.

528. Il ne sera pas inutile d'examiner pourquoi l'introduction d'un clou dans un mur, qu'on obtiendrait difficilement avec une grande pression, s'effectue avec facilité à l'aide d'un petit marteau. Le clou qui s'insinue dans le mur doit vaincre deux résistances; il faut d'abord qu'il ouvre devant lui un espace dans lequel il puisse entrer; puis, au fur et à mesure qu'il s'avance, il doit surmonter le frottement et la pression qu'exerceront les petites parois du trou en contact avec sa surface.

529. Si l'introduction est produite par une pression, il est évident que le clou s'arrêtera aussitôt que la pression motrice sera en équilibre avec les deux résistances que nous venons d'indiquer.

530. Lorsque cette même introduction se fait par la percussion réitérée du marteau : il faut observer que chaque coup de marteau produira deux effets; le premier sera de pousser le clou dans la cavité formée par sa pointe dans le mur; le second sera de comprimer le clou dans le sens de sa longueur, c'est-à-dire, d'augmenter momentanément sa grosseur aux dépens de sa longueur. Cette petite augmentation de grosseur tend à agrandir la cavité formée dans le mur. Aussitôt que la percussion a cessé, le clou, en vertu de son élasticité, reprend sa première figure, de sorte qu'il y a un vide entre les parois de la cavité

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et la surface de la partie qui s'y est déjà insinué : ce vide détruit en tout, ou du moins en partie, la résistance due au frottement et à la pression du mur contre cette surface ; donc le coup de marteau suivant n'aura qu'à surmonter la résistance que la pointe du clou rencontre pour aller plus avant.

531. Ainsi, la pression doit surmonter deux résistances qui se mettent bientôt en équilibre avec elle, quelle que soit sa force, tandis que la percussion n'a à vaincre qu'une des deux.

Ajoutez à cela la faculté que le moteur possède en vertu de sa force musculaire d'accumuler dans le marteau une quantité de mouvement très-grande eu égard à la petitesse de sa masse.

532. De la même manière lorsque l'on enfonce un pieu dans le terrain, à l'aide du mouton d'une sonnette, le choc comprime le pieu dans le sens de sa longueur et augmente instantanément sa grosseur ; l'effet indispensable de cette augmentation est d'élargir le trou dans lequel la partie inférieure du pieu est fichée. Mais le pieu, en vertu de son élasticité, reprend sa première forme immédiatement après le choc, tandis que le trou conserve à peu près la largeur qu'il a acquise, de sorte que le pieu (pour ainsi dire isolé) est exempt d'une grande partie de la résistance qui dépend de la cohésion, de la pression et du frottement du terrain environnant. Voilà pourquoi, lorsqu'il s'agit d'extraire des pieux fichés fortement, on diminue singulièrement la résistance qu'ils opposent à leur extraction, en frappant sur leur tête des coups violens.

533. La cause que nous venons d'alléguer empêche que l'on substitue la pression à la percussion toutes les fois qu'il s'agit de l'introduction d'un corps doué d'une élasticité plus ou moins parfaite, dans un autre corps qui se laisse pénétrer, et qui n'est point élastique, ou qui a une élasticité moindre que celle du corps que l'on veut ficher.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

534. L'expérience a prouvé que la pression doit être préférée à la percussion, lorsqu'il s'agit d'aplanir, d'étendre, de laminer les substances métalliques malléables et ductiles. Depuis un petit nombre d'années on a multiplié avec raison les laminoirs, dans les ateliers, et l'on a obtenu par leur emploi un degré de précision, de célérité et d'économie qu'on n'aurait jamais pu atteindre par l'usage du marteau.

535. Les Anglais surtout ont su tirer, du laminoir, le parti le plus avantageux. Les machines à vapeur leur ont donné le moyen de construire et de mettre en mouvement des laminoirs colossaux dont les cylindres cannelés ont un à deux mètres de longueur et un diamètre qui varie entre cinq et quinze décimètres; leur poids arrive souvent à dix mille kilogrammes, et on surcharge en outre leurs tourillons en y suspendant des caisses remplies de barres de fer. Ces laminoirs remplacent très-avantageusement les martinets pour forger et affiner le fer.

536. M. Dufaud a démontré (dans le onzième volume de la société d'encouragement, page 119) que l'affinage de 2400 livres de fonte fait sous le laminoir produit, en le comparant à celui fait sous le martinet, un bénéfice de 129 francs 60 centimes.

537. MM. Dobson (*a*), ayant observé que M. Vilkinson a obtenu d'un grand laminoir mû par une machine à vapeur neuf fois autant d'ouvrage qu'on peut en obtenir d'un martinet à ordon le plus vigoureux, ont expliqué avec beaucoup de justesse la cause de cette supériorité.

538. « La cause réelle, disent-ils, de la vitesse de la fabrication qu'on obtient par la pression, et qu'on tenterait en vain de se procurer par la percussion, dérive de l'emploi de toute la

(*a*) Annales des Arts et Manufactures, tome 43.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

force de la machine sur une très-petite portion de la masse totale de matière soumise à son action, et de la succession rapide de cette action sur toutes ses parties. La cause de la lenteur de l'opération par le marteau se trouve au contraire dans la grandeur de la surface opposée au coup. La face d'un marteau de forge du poids de 1, 000 livres, a 14 pouces de long sur 3 pouces et demi de large; c'est-à-dire, une surface de près de 50 pouces carrés. Lorsqu'il s'agit d'égaliser la barre, on est obligé de présenter toute cette surface au coup de marteau, et l'effet en est excessivement faible par le grand nombre de points que lui présente une surface aussi étendue.

539. » Dans l'emploi des cylindres, la pression étant continuée sans interruption, le temps qu'il faut employer pour élever le marteau à chaque coup est gagné. La circonférence des cylindres n'ayant point d'angles, et au contraire, présentant une continuité de surface unie, la barre en s'étirant se trouve toute pressée sur ses bords comme sur ses faces. Le travail du marteau est accompagné d'un inconvénient grave qu'on évite en employant les cylindres; cette inconvénient consiste dans les gerçures que le marteau agrandit toujours; en voici la raison : le fer, en recevant le coup, n'a pas de soutien sur les bords; l'effet du coup se fait sentir autant sur la largeur que sur la longueur de la barre, ce qui oblige l'ouvrier à la tourner continuellement, et comme il est impossible de manier le fer sur l'enclume avec assez de précision pour qu'aucun coup ne porte à faux, on est forcé de *parer* la barre toujours dans la position la plus défavorable pour avancer l'ouvrage. »

540. On est parvenu à fabriquer avec autant d'économie que de précision, des instrumens tranchans, des clous, des barres de fer garnies de moulures, en se servant d'un laminoir dont le cylindre supérieur est garni de cannelures parallèles et circu-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

laires pratiquées autour de sa surface convexe, et lesquelles ont des formes appropriées à celles des objets que l'on veut fabriquer.

541. Quand il s'agit de pulvériser des substances plus ou moins friables, et quand il faut détacher de la surface de certains corps des particules de matière qui lui sont adhérentes, on trouve, dans la presque totalité des cas, un grand avantage de substituer à la percussion une pression combinée avec un frottement. C'est ainsi que, pour la mouture des grains, les anciens ont obtenu un immense avantage, lorsqu'ils ont abandonné les mortiers à pilons pour adopter les meules horizontales superposées, dont l'une est immobile et l'autre tournante; c'est ainsi que généralement les meules verticales tournantes, lorsqu'elles sont bien construites, broient avec plus de perfection, et donnent un plus grand produit que les pilons; c'est ainsi que l'on parvient à mieux dépouiller le riz et avec plus de facilité, de son écorce, en le soumettant au frottement des surfaces frottantes plutôt qu'au choc des pilons; c'est ainsi que les Anglais, par l'emploi d'un cylindre frottant, ont obtenu une bonne et utile machine pour dépiquer le blé, c'est-à-dire, pour séparer les grains de la paille, tandis que toutes les machines à percussion, qui avaient été précédemment proposées pour obtenir le même effet ont constamment échoué.

542. Les principales causes de cette supériorité sont : 1°. le mouvement continu et uniforme qu'ont les cylindres frottans, soit que l'on mette en action leur surface convexe, soit que l'on fasse frotter leurs bases planes; 2°. la force centrifuge que ce mouvement communique aux substances soumises au frottement, laquelle les expulse hors de la machine lorsqu'elles ont été séparées ou pulvérisées, en facilitant l'introduction successive et continuelle de nouvelles substances qui viennent se soumettre,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à leur tour, à l'action des surfaces frottantes; 3°. la facilité de régler convenablement la pression en écartant et en éloignant les surfaces frottantes; 4°. la suppression des pertes de forces vives que la percussion occasione inévitablement, et la suppression de la perte du temps qu'il faut employer dans les machines à percussion, à chaque coup, pour élever les marteaux ou les pilons.

Moulins à mouture.

543. De toutes les machines frottantes la plus importante et la plus utile est, sans contredit, le moulin à moudre le blé. Pour qu'une telle machine remplisse parfaitement son but, il ne suffit point que la mouture soit abondante; il faut aussi que la farine soit aussi parfaite qu'il est possible. Cette perfection consiste 1°. à empêcher que la farine n'acquière un degré de chaleur qui pourrait lui être nuisible : Parmentier a démontré combien les propriétés chimiques de la farine sont altérées par le développement d'une chaleur trop forte. 2°. A séparer complétement le son des parties nutritives de la farine, c'est-à-dire, de faire en sorte qu'aucun fragment de ces particules ne reste attaché au son, et réciproquement que la farine ne contienne que les parties nutritives. La mouture connue sous le nom de *mouture économique*, lorsqu'elle est bien exécutée, remplit convenablement toutes ces conditions. Nous avons donné, dans notre *traité des machines d'agriculture*, toutes les notions nécessaires pour faire connaître cette utile méthode, et nous avons décrit en détail toutes les parties qui doivent constituer les moulins destinés à produire une telle mouture; nous ne nous occuperons ici que de l'effet dynamique des meules.

544. D'après les résultats moyens des observations faites sur plusieurs moulins, il résulte que l'effort nécessaire pour faire

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tourner une meule, supposée appliquée aux deux tiers de son rayon, peut être évalué moyennement à $\frac{1}{11}$ du poids de la meule et de l'*équipage* qui lui est attenant.

545. La vitesse d'une meule doit être telle que la mouture soit abondante sans que la farine en soit échauffée. Fabre, ayant fait des expériences sur cet objet important (*a*), a reconnu 1°. qu'on peut porter la vitesse moyenne de la meule jusqu'à 2 mèt., 72, et 3 mèt., 46, sans que la farine soit échauffée; 2°. qu'une légère altération commence à se manifester quand la vitesse est de 3 mèt., 85 ; et que cette altération devient de plus en plus considérable quand la vitesse augmente. Ainsi, on peut admettre, pour résultat moyen de la vitesse que doit avoir une meule aux deux tiers de son rayon, le nombre 3 mèt., 5.

546. Les meules, pour produire l'effet le plus avantageux, doivent avoir un poids déterminé sur chaque unité de surface. La détermination de ce poids dépend en partie de la nature de la pierre dont est formée la meule. Voilà pourquoi les nombres indiqués par les divers auteurs qui ont écrit sur cette matière ne s'accordent point. D'après les observations de M. Fabre (*b*), il paraît que, dans le cas où le moulin travaille de la manière la plus avantageuse, le poids est de 942 kilogrammes pour chaque mètre carré de la surface frottante ; et lorsque ce poids est le moindre possible pour faire de la bonne farine, ce qui arrive quand (suivant cet auteur) on emploie une meule de 0 mèt., 89 de diamètre, pesant 700 kilogrammes, il équivaut seulement à 749 kilogrammes par mètre carré. On peut prendre pour résultat moyen que la charge sur chaque mètre carré de la sur-

(*a*) Essai sur la Construction des Machines hydrauliques, page 229.

(*b*) *Idem*, pag. 232, 235.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

face de la meule doit être moyennement de 850 kilogrammes.

547. D'après ce que nous venons de dire, en nommant d le diamètre de la meule évalué en mètre,

1°. Le nombre de tours que la meule fera dans une seconde sera exprimé par $\frac{3^m,5}{\frac{2}{3}\pi d}$;

2°. Son poids réuni à celui de l'équipage sera indiqué par

$$850 \cdot \tfrac{1}{4}\pi d^2 \text{ ou } 668 \cdot d^2 \text{ (kil.)}$$

3°. L'effet exercé aux deux tiers du rayon sera équivalent à

$$\tfrac{1}{22} 668 d^2 \text{ ou } 30{,}36 d^2 \text{ (kil.)}$$

4°. La quantité d'action dépensée dans chaque seconde pour faire tourner la meule sera

$$3{,}5 \times 30{,}36 d^2.$$

548. Pour moudre un setier de blé, qui pèse moyennement 117 kilogrammes, il faut, suivant Montgolfier (*a*), une quantité d'action équivalente à 750 kilogrammes élevés à un kilomètre; d'où il suit que, si l'on emploie un cheval attelé à un manége pour moudre le blé (en admettant l'évaluation que nous avons donnée) (294), la quantité d'action journalière moyenne de ce cheval sera équivalente à la mouture de deux setiers. L'action journalière moyenne d'un homme agissant sur une manivelle (283) serait équivalente à la mouture d'environ un sixième de setier.

549. Les moulins à vent des environs de Lille (387), que Coulomb a observés, et qui étaient employés à la mouture du blé, ont donné les résultats suivans :

(*a*) Journal de l'École polytechnique, quatorzième cahier, pag. 290.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'engrenage était disposé de manière que la meule faisait cinq tours dans le temps que l'aile n'en faisait qu'un. Les moulins ne commençaient à tourner que lorsque la vitesse du vent était de dix à douze pieds par seconde. Lorsque la vitesse du vent était de dix-huit pieds par seconde, les ailes du moulin faisaient onze à douze tours par minute, et ces moulins pouvaient moudre, sans bluter, de huit à neuf cents livres par heure. Lorsque le vent a vingt-huit pieds de vitesse par seconde, les ailes du moulin à blé, portant toute leur voilure, font souvent jusqu'à vingt-deux tours par minute, et peuvent moudre jusqu'à dix-huit cents livres de farine par heure. « J'ai vu (dit Coulomb) les meuniers faire travailler leur moulin avec ce degré de vitesse, malgré le degré énorme de chaleur que la farine contracte en sortant de dessous la meule; ils sont cependant obligés alors de changer de temps en temps l'espèce de grain, qu'ils soumettent à la mouture pour rafraîchir, disent-ils, leur meule. »

L'usage de faire travailler le moulin avec une activité aussi déréglée est très-condamnable, et devait produire de très-mauvaise farine.

550. M. Ovide (*a*) avait fait construire en 1788, à l'île des Cygnes, à Paris, une machine à vapeur dont le diamètre du piston était de 30 pouces. Elle mettait en mouvement six meules et elle produisait en une heure la mouture de six setiers.

Un autre moulin que M. Ovide avait fait construire à la Malmaison donnait un setier en quatre heures avec une source de 20 pieds cubes d'eau par minute et une chute de 20 pieds.

551. Dans l'évaluation du produit d'un moulin, il ne faut point oublier que lorsque la mouture se fait suivant la méthode

(*a*) Traité élémentaire des Machines, par Hachette; deuxième édition, page 89.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

économique, le moulin emploie environ le tiers du temps à remoudre les gruaux.

552. On doit observer aussi que le produit des petits moulins est moindre de celui des grands moulins dont les meules pèsent deux ou trois mille kilogrammes, en supposant les autres circonstances égales.

Des machines destinées à couper et à séparer.

553. L'effet utile que l'on peut obtenir des scies, quelleque soit leur espèce, ne peut être déterminé que par l'expérience.

M. Morisot (*a*) a exposé dans le tableau suivant le nombre d'heures qu'un ouvrier consomme pour exécuter un trait de scie d'une toise carrée dans diverses espèces de pierres et de marbres.

	heures.
Lambourde, (pierre calcaire des environs de Paris, fort tendre, d'un grain grossier; pesanteur spécifique 1, 6)	4, 5
Pierre franche, (pierre calcaire moyennement dure, d'un grain égal; pesanteur spécifique 2, 2)	45
Pierre de roche, (pierre calcaire assez dure et un peu coquilleuse, pesanteur spécifique; 2, 3)	72
Liais, (pierre calcaire d'un grain plus égal et plus fin que la roche, pesanteur spécifique 2, 4)	67
Albâtre des Pyrénées, (le plus tendre des marbres)	56
Granit gris de Normandie	504
Granit gris des Vosges	700
Porphyre rouge et vert	1177

(*a*) Tableaux détaillés des prix des ouvrages de bâtimens, tome 4.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les scieurs de pierre font faire, ordinairement à la scie cinquante oscillations par minute, et l'étendue de chaque oscillation est de 0, mèt. 4.

554. Hassenfratz a donné l'évaluation suivante du travail des scieurs de bois. (*a*)

Trois scieurs de long font ordinairement en une heure, sur du chêne encore vert, un trait de scie de 36 décimètres de long sur trois décimètres de large. Ils donnent 50 coups de scie par minutes; la scie est élevée et abaissée à chaque coup de 8 décimètres environ. L'effort moyen de chaque homme est de 13 kilogrammes. Les scieurs de long travaillent douze heures par jour et peuvent obtenir dans leur journée vingt planches de deux mètres de long sur seize centimètres de large. Lorsque la scie est mise en mouvement par deux hommes, ces deux scieurs font les deux tiers du travail que font les trois scieurs.

555. M. Navier (*b*) pense avec raison que l'évaluation de 13 kilogrammes pour l'effort moyen que chaque scieur exerce, est beaucoup trop fort. En effet, si on admettait ce résultat, il s'ensuivrait que la quantité d'action journalière du scieur, serait équivalente à 376 kilogrammes élevés à un kilomètre, quantité plus que triple de celle produite par un homme qui agit sur une manivelle (283). « Je me suis effectivement assuré (dit M. Navier) que les scies employées par les scieurs de long ne pèsent ordinairement qu'environ 6 kil. 5, et il paraît que l'effort ordinaire de ces ouvriers doit être à peu près égal à cette quantité; car celui qui est placé sur la pièce, soulève presque seul la scie qui alors ne mord pas sur le bois; elle ne mord qu'en descendant, et c'est en ce moment que l'ouvrier placé

(*a*) Traité de l'Art de la Charpenterie.

(*b*) Architecture hydraulique de Bélidor, nouvelle édition. Tome I, p. 509.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dessous la pièce exerce à son tour un effort qui doit être à peu près égal à celui du premier. » En adoptant cette modification, la quantité d'action journalière se trouve réduite à 188 kilogrammes élevés à un kilomètre.

Les 188 unités dynamiques dépensées en douze heures, donnent pour une minute 0,26; et puisque la surface de sciage qu'un homme exécute dans une minute est 0,$^{\text{mèt.}}$ 006, il s'ensuit que l'exécution d'un trait de scie d'un mètre carré de surface, dans du bois de chêne vert, consomme une quantité d'action équivalente à 43,$^{\text{kil.}}$ 333 élevés à un kilomètre.

556. Belidor a remarqué (*a*) que le bois sec est plus difficile à scier que le bois tendre ou vert, à peu près dans le rapport de 4 à 3. La quantité de bois blanc humide que l'on peut scier en même temps que du bois de chêne également humide, est dans le rapport de 14 à 10. Quand le bois blanc est sec, la surface du sciage exécuté en même temps n'est que la moitié environ.

557. Depuis quelques années on a mis en usage avec beaucoup de succès des scies circulaires, auxquelles on a donné le nom de *fraises*. M. Brunel a construit des fraises, dont le diamètre a près de 6 mètres, et au moyen desquelles il débite des pièces d'acajou qui ont plus de 0,$^{\text{mèt.}}$ 6 de grosseur, en feuillets très-minces. Il est évident qu'une fraise doit, à égalité de circonstances, donner un effet utile beaucoup plus grand que celui d'une lame de scie à mouvement alternatif; car, 1°. son mouvement est continu, tandis que les scies ordinaires ne coupent que pendant la moitié du temps; 2°. on peut lui donner une plus grande vitesse qu'il n'est possible de faire à ces dernières; 3°. on évite les pertes de force qu'occasione le mouvement alternatif des autres scies.

(*a*) Architecture hydraulique de Bélidor, nouvelle édition. Tom. I, p. 509.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

558. Les mêmes causes qui rendent une fraise plus productive qu'une scie ordinaire, rendent, dans la plupart des cas, les cylindres garnis de lames tranchantes préférables aux pilons garnis également de lames tranchantes, lorsqu'il s'agit de couper en petits fragmens des substances que l'on soumet à l'action de ces lames.

559. Des mêmes causes dépend la supériorité des cardes circulaires sur les cardes à main, ainsi que des machines à lainer à tambour circulaire sur la méthode ancienne d'effectuer le *lainage*.

560. Nous terminerons ce chapitre par l'indication de la quantité de force qu'exige le système des machines employées pour la filature du coton.

561. L'expérience a prouvé qu'une machine à vapeur de Watt, de la force de dix chevaux, fait marcher, avec la vitesse convenable, mille broches d'une filature de coton et toutes les machines préparatoires qu'exige cette filature. D'après ce résultat, la quantité d'action nécessaire pour l'effet que nous venons d'indiquer est équivalent à 3168 kilogrammes élevés à un kilomètre pour chaque heure de travail (371).

CHAPITRE TROISIÈME.

Des résistances passives.

Frottement.

562. On n'avait que des notions vagues et incertaines sur la quantité de force que les frottemens absorbent dans les machines, lorsque Coulomb (*a*) entreprit les expériences importantes qui sont détaillées dans le Mémoire intitulé : *Théorie des ma-*

(*a*) Recueil des principaux mémoires de Coulomb, publiés par M. Bachelier.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

chines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la raideur des cordes. Les tableaux suivans présentent les principaux résultats de ces expériences.

PREMIER TABLEAU.

Expériences qui se rapportent à la résistance, au premier instant du mouvement.

NATURE DES SURFACES EN CONTACT.		RAPPORT du frottement A LA PRESSION.	OBSERVATIONS.
Chêne sur chêne.	Les fibres étant parallèles. .	0,44	Le frottement parvient au *maximum* au bout de quelques secondes.
	Les fibres étant parallèles et la surface réduite à des arêtes arrondies..	0,42	*Idem.*
	Les fibres étant croisées.. . .	0,27	*Idem.*
	Les surfaces garnies d'un enduit renouvelé à chaque expérience.	0,38	Le frottement atteint son maximum en quelques jours. L'adhérence produit une résistance d'environ 19 kilogrammes par mètre carré.
	Les surfaces enduites de vieux oing après avoir été longtemps usées par le frottement..	0,21	Le frottement atteint son *maximum* en quelques jours. L'adhérence produit une résistance d'envir. 39 kil. par mèt. carré.
Chêne sur sapin.	Les fibres étant parallèles. .	0,67	Le frottement atteint son *maximum* au bout de quelques secondes
Sapin sur sapin. .	*Idem.*	0,56	*Idem.*
Orme sur orme. .	*Idem.*	0,46	*Idem.*
Fer sur chêne. . .		0,20	Il n'est point certain que dans l'expérience le frottement eut atteint son *maximum*.
Cuivre sur chêne.		0,18	*Idem.*
Fer sur fer. . . .		0,28	Le *maximum* du frottement a lieu au bout de quelques secondes.
Cuivre sur fer. . .		0,26	*Idem.*
Idem.	La surface étant réduite à des pointes émoussées. . . .	0,17	*Idem.*
	Les surfaces garnies d'un enduit de suif neuf.	0,11	Le *maximum* a lieu au bout de quelques heures. La résistance de l'adhérence est d'environ 7 kilogr. par mètre carré.
	Enduit de suif neuf. . . .	0,11	*Idem.*
	Enduit d'huile.	0,17	*Idem.*
	Enduit de vieux oing. . . .	0,14	*Idem.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

DEUXIÈME TABLEAU.

Expériences qui se rapportent à la résistance que les surfaces éprouvent quand elles se meuvent depuis un certain temps.

NATURE DES SURFACES EN CONTACT.		RAPPORT du frottement À LA PRESSION.	*OBSERVATIONS.*
Chêne sur chêne.	Les fibres étant parallèles. .	0,11	
	Surface réduite à des arêtes arrondies.	0,08	
	Fibres croisées.	0,10	
	Surface réduite à des arêtes arrondies	0,10	
	Fibres parallèles, et enduit de vieux oing, renouvelé à chaque essai.	0,035	L'adhérence des surfaces occasione une résistance d'environ 30 kil. par mèt. carré.
	Surface réduite à des arêtes arrondies; enduit essuyé, et les surfaces restantes onctueuses.	0,06	
Chêne sur sapin.	Fibres parallèles.	0,16	
Sapin sur sapin.	*Idem*.	0,17	Le frottement augmente avec la vitesse, à moins que les surfaces n'aient été usées pendant long-temps.
Orme sur orme.	*Idem*.	0,10	
Chêne sur fer.	Vitesse très-petite.	0,08	
	Vitesse de 0 mèt. 3 par seconde.	0,17	
	Surfaces très-petites, onctueuses, sans enduit.	0,07	Le rapport du frottement à la pression est constant.
Fer sur fer.		0,28	Le frottement diminue quand les surfaces ont été usées long-temps.
Cuivre sur fer.		0,24	Le frottement après un long user se réduit à 0,17.
Fer sur fer. . . .	Enduit de suif renouvelé . .	0,10	L'adhérence produit une résistance d'environ 14 kilog. par mètre carré.
Cuivre sur fer.	Enduit de suif renouvelé . .	0,10	L'adhérence produit une résistance d'environ 7 kilog. par mètre carré.
	Huile sur un ancien enduit de suif.	0,12	L'adhérence peut être regardée comme nulle.
	Surfaces réduites à des pointes émoussées, onctueuses ou enduites de suif et d'huile.	0,12	

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TROISIÈME TABLEAU.

Expériences relatives au frottement des axes, quand le mouvement a lieu depuis un certain temps.

INDICATION DES AXES MIS EN EXPÉRIENCE.		RAPPORT du frottement À LA PRESSION.	OBSERVATIONS.
Axe de fer dans une boîte de cuivre.	Sans enduit	0,155	Le frottement des axes est, à égalité de circonstances, moindre que le frottement des surfaces planes.
	Enduit de suif.	0,085	
	Enduit de vieux oing.	0, 12	
	Surfaces onctueuses, et pénétrées de suif.	0,127	
	Enduit d'huile.	0, 13	
	Enduit qui n'avait point été renouvelé depuis long-temps, quoique la machine eût servi continuellement. .	0,133	
Axe de chêne vert dans une boîte de gaïac.	Enduit de suif.	0,038	
	Enduit essuyé, et surfaces onctueuses	0, 06	
	Enduit qui a servi long-temps sans être renouvelé. .	0, 07	
Axe de chêne vert dans une boîte d'orme.	Enduit de suif.	0, 03	
	Enduit essuyé et surfaces onctueuses	0, 05	
Axe de buis dans une boîte de gaïac.	Enduit de suif.	0,043	
	Enduit essuyé et surfaces onctueuses.	0, 07	
Axe de buis dans une boîte d'orme.	Enduit de suif	0,035	
	Enduit essuyé et surfaces onctueuses	0, 05	

563. Coulomb a déduit de ces expériences les conséquences générales suivantes :

1°. Le frottement des bois glissant à sec sur d'autres bois, oppose, après un temps suffisant de repos, une résistance proportionnelle aux pressions : cette résistance augmente sensiblement dans les premiers instans du repos ; mais, après quelques minutes, elle parvient ordinairement à son maximum ou à sa limite.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2°. Lorsque les bois glissent à sec sur d'autres bois avec une vitesse quelconque, le frottement est proportionnel aux pressions; mais son intensité est beaucoup moindre que celle qu'on éprouve en détachant les surfaces après quelques minutes de repos. On trouve, par exemple, que la force nécessaire pour faire glisser et détacher deux surfaces de chêne après quelques minutes de repos, est à celle nécessaire pour vaincre le frottement lorsque les surfaces ont déjà un degré de vitesse quelconque, comme 9,5 est à 2,2.

3°. Le frottement des métaux glissant sur les métaux sans enduit, est également proportionnel aux pressions; mais son intensité est la même, soit qu'on veuille détacher les surfaces après un temps quelconque de repos, soit qu'on veuille entretenir une vitesse uniforme quelconque.

4°. Les surfaces hétérogènes, telles que les bois et les métaux, glissant l'une sur l'autre sans enduit, donnent pour leurs frottemens des résultats très-différens de ceux qui précèdent; car l'intensité de leur frottement, relativement au temps de repos, varie lentement, et ne parvient à la limite qu'après quatre ou cinq jours, et quelquefois davantage; au lieu que dans les métaux elle y parvient dans un instant, et dans les bois dans quelques minutes. Cet accroissement est même si lent, que la résistance du frottement, dans les vitesses insensibles, est presque la même que celle que l'on surmonte en ébranlant ou détachant les surfaces après quelques secondes de repos. Ce n'est pas encore tout: dans les bois glissant sans enduit sur les bois, et dans les métaux glissant sur les métaux, la vitesse n'influe que très-peu sur les frottemens; mais ici le frottement croît très-sensiblement au fur et à mesure que l'on augmente les vitesses, en sorte que le frottement varie à très-peu près, suivant une progression arithmétique, lorsque les vitesses croissent, suivant une progression géo-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

métrique. Mais il faut observer que cet effet n'a plus lieu quand les surfaces en contact sont enduites d'un corps gras, ou quand, glissant à sec les unes sur les autres, elles ont été usées par le frottement pendant un certain temps.

564. Il résulte de ces faits que, dans le calcul des machines, on peut regarder le frottement comme indépendant de la grandeur des surfaces en contact et de la vitesse du mouvement. Sa valeur est donc uniquement fixée par la pression à laquelle les surfaces sont soumises et par la nature de ces surfaces.

565. On ne doit point oublier que, lorsqu'une machine est restée pendant quelque temps en repos, les frottemens qu'il faut surmonter quand on la met en mouvement, présentent une résistance qui diminue après que le mouvement a duré quelque temps.

Raideur des cordes.

566. Le même mémoire qui contient les précieuses expériences de Coulomb sur les frottemens, renferme, en outre, des recherches non moins utiles sur la résistance qui dérive de la raideur des cordes.

Voici les principaux résultats de ces expériences :

567. Les expériences, pour déterminer la raideur des cordes non goudronnées (faites sur des cordes de 6, 15 et 30 *fils de caret* qui s'enveloppaient sur des rouleaux de 1, 2 et 4 pouces de diamètre, et qui étaient tendues par des poids qu'on faisait varier depuis 25 jusqu'à 1025 livres), ont donné les résultats suivans :

1°. Les forces nécessaires pour plier les cordes autour de différens rouleaux sont à peu près en raison directe des tensions des cordes, et inverse des diamètres des rouleaux.

2°. Ces forces sont proportionnelles à une certaine puis-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sance d^m du diamètre d de la corde. La valeur de l'exposant m est approximativement égale à 2 pour les grosses cordes, à 1,5 pour les cordes usées, et à 1 pour les ficelles.

3°. Ces forces sont représentées par deux termes : le premier est une quantité constante dépendante de la tension ou torsion que les cordes éprouvent dans leur fabrication ; l'autre terme est proportionnel au poids qui tend la corde.

Nommons D le diamètre du rouleau ou de la poulie sur laquelle s'enveloppe la corde ; P, le poids qui tend la corde ; a et b, des quantités constantes que l'expérience détermine pour des cordes de même nature, nous aurons, d'après les résultats précédens, la formule $\frac{d^m}{D}(a + bP)$, qui représentera les forces nécessaires pour plier les cordes.

TABLE D'EXPÉRIENCES

Faites sur une corde de trente fils de caret.

POIDS qui tend LA CORDE.	DIAMÈTRE DES ROULEAUX.			OBSERVATIONS.
	2 pouces.	4 pouces.	6 pouces.	
25 liv.	11 liv.	5 liv.	» liv.	Les trois dernières colonnes contiennent l'indication des forces nécessaires pour vaincre la raideur de la corde.
125	21	8,5	»	
225	29	14	»	
425	47	23	»	
625	67	31	»	
1025	»	50	34	

568. Les cordes blanches imbibées d'eau ont une raideur un peu plus grande que les sèches. La raideur des cordes goudronnées est aussi un peu plus forte que celle des cordes blanches :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on a remarqué que cette raideur augmente un peu quand la température descend au-dessous de o. Les forces nécessaires pour plier différentes cordes goudronnées autour d'un même rouleau, sont approximativement comme le nombre des fils de caret qui composent ces cordes.

Application des résultats du frottement et de la raideur des cordes au calcul des machines.

Roue ou poulie chargée de deux poids. (Pl. IV, fig. 8.)

569. On suppose que l'axe C de la poulie lui est adhérent, et qu'il tourne sur la *chape FBH*. Cette poulie est chargée de deux poids, P et P', dont le second est censé assez fort pour entraîner le premier.

Le poids moteur P', forcera l'axe de rouler jusqu'en B, point où le frottement de tout le système est supposé en équilibre. Soit BN la tangente à ce point ; nommons m le rapport de la pression au frottement, et supposons le rayon $= 1$; nous aurons

$$\frac{Sin.\ QBN}{Cos.\ QNB} = \frac{1}{m}\ ;\ Sin.QBN = \frac{1}{(m^2+1)^{\frac{1}{2}}}\ ;\ \text{et } Cos.\ QBN = \frac{m}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

La pression que supporte le point B sera

$$(P + P')\ Cos.\ QBN,\ \text{ou } \frac{m\,(P+P')}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et conséquemment le frottement sera exprimé par

$$\frac{P+P'}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En nommant R, et r les rayons de la poulie et de l'axe, nous aurons, à cause du frottement,

$$P'R = PR + \frac{(P+P')r}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il est évident que, dans ce cas, la valeur de $P'R$ ne serait point complète si l'on n'ajoutait au second membre de cette équation la valeur de la raideur des cordes; ainsi

$$P'R = PR + \frac{(P + P')r}{(1 + P^2)^{\frac{1}{2}}} + ad^m + bP.$$

570. Le même résultat aurait lieu si la poulie tournait sur un axe fixe.

Palan composé de plusieurs poulies. (Pl. IV, fig. 9.)

571. La chape supérieure est dormante, tandis que l'inférieure, à laquelle est adapté le poids P, monte entraînée par la force Q.

Nommons t, t', t'', t''',.... $t^{n'}$, les tensions des cordes 1, 2, 3, 4, etc.; R les rayons égaux de toutes les poulies, et r les rayons des axes.

Le frottement de la première poulie b sera $\frac{t + t'}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$ (569); celui de la poulie c sera $\frac{t' + t''}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$, et ainsi de suite; chaque poulie étant soumise aux tensions de deux cordes qui s'exercent en sens opposé, nous aurons pour chacune d'elle les équations suivantes :

$$R(t' - t) = \frac{(t + t')r}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} + ad^m + bt$$

$$R(t'' - t') = \frac{(t'' + t')r}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} + ad^m + bt'$$

$$R(t''' - t'') = \frac{(t''' + t'')}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} + ad^m + bt''$$

et enfin

$$R(t^{n'} - t^{(n-1)'}) = \frac{t^{n'} + t^{(n-1)'}}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} + ad^m + bt^{(n-1)'}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La première équation donne

$$t' = \frac{t\left(R + \frac{r}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}} + b\right)}{R - \frac{r}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}} + \frac{ad^m}{R - \frac{r}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}}$$

faisons pour simplifier

$$\frac{\left(R + \frac{r}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}} + b\right)}{R - \frac{r}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}} = c\text{, et } \frac{ad^m}{R - \frac{r}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}} = d;$$

en faisant cette substitution dans les équations précédentes, l'on aura

$$t = t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = t + \frac{d(1-1)}{c-1}.$$

$$t' = tc + d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = tc + \frac{d(c-1)}{c-1}.$$

$$t'' = t'c + d = tc^2 + dc + d \ldots\ldots\ldots = tc^2 + \frac{d(c^2-1)}{c-1}.$$

$$t''' = t''c + d = tc^3 + d(c^2 + c + 1) \ldots\ldots = tc^3 + \frac{d(c^3-1)}{c-1}.$$

$$t^{n\prime} = t^{(n-1)\prime}c + d = tc^n + d(c^{(n-1)} + c^{n-2} + etc\ldots + 1) = tc^n + \frac{d(c^n-1)}{c-1}.$$

Les seconds membres de toutes ces équations forment des progressions géométriques dont on peut avoir aisément les sommes.

Observons d'abord que

$$(t + t' + t'' + t''' \ldots\ldots + t^{n\prime}) = P;$$

car, le poids P, étant supposé s'élever d'un mouvement uniforme, l'action de la pesanteur est détruite par les branches de corde parallèles et verticales qui vont d'une poulie à une autre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$t^{n'}$ est la tension de la dernière branche à laquelle est attaché le poids Q. L'on aura donc

$$P = \frac{t(c^{n+1}-1)}{c-1} + \frac{d(c^{n+1}-1)}{(c-1)^2} - \frac{d(n+1)}{c-1};$$

$$\text{et } t = \frac{P(c-1) - \frac{d(c^{n+1}-1)}{(c-1)} + d(n+1)}{c^{n+1}-1};$$

et enfin

$$t^{n'} = \frac{c^n\left[P(c-1) - \frac{d(c^{n+1}-1)}{c-1} + d(n+1)\right]}{c^{n+1}-1} + \frac{d(c^n-1)}{c-1}.$$

Il résulte des expériences de Coulomb que lorsque la corde n'est composée que de dix ou douze fils de caret la formule précédente peut se réduire à

$$t^{n'} = \frac{c^n P(c-1)}{c^{n+1}-1},$$

car, tous les termes qui contiennent le d s'évanouissent parce que

$$d = \frac{a}{R - \frac{r}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}}$$

et l'expérience prouve que, dans le cas indiqué, on peut sans inconvénient négliger la valeur représentée par a.

772. On doit observer que dans la pratique la résistance due au frottement et à la résistance des cordes dans un *palan* est plus forte que celle donnée par la théorie précédente, parce que 1°. les cordes sont obligées de biaiser pour aller d'une poulie à l'autre, et leur obliquité est plus ou moins grande, suivant que la chape mobile est plus ou moins éloignée de la chape dormante.

2°. Du défaut du parallélisme des cordes, il résulte encore que, comme les poulies portées par la même chape sont sépa-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rées entre elles par une cloison, s'il y a beaucoup de jeu entre le trou de la poulie et son axe, la poulie s'incline et frotte contre la cloison.

3°. Lorsque la poulie s'incline, le rapport de son diamètre à celui de l'axe diminue, et elle ne s'appuie sur cet axe que par les arêtes extérieures de son trou, qui est bientôt déformé.

573. On diminue ces défauts en forant les poulies avec exactitude et perpendiculairement à leur plan, en arrondissant un peu les arêtes du trou, et surtout, en faisant en sorte dans les manœuvres, que la direction des cordes passe, le plus exactement possible, dans le plan de la poulie et perpendiculairement à l'axe de rotation.

Frottement des axes lorsque les directions des puissances ne sont pas parallèles entre elles. (Pl. IV, fig. 10.)

574. Supposons que la puissance Q ait pour bras de levier le rayon R' de la roue A; que celui de la résistance P soit le rayon R, et r celui de l'axe; soit S le point d'intersection des directions prolongées des forces Q et P; et soit ST leur résultante, qui doit passer par le point T de contact de la boîte avec l'axe.

La résultante fait avec la tangente TO un angle, tel que cette même résultante décomposée dans la direction de la tangente est égale au frottement. Ainsi, si nous nommons Z la résultante ST, nous aurons

$$\frac{Zm}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}$$

pour la pression de l'axe et de la boîte; ainsi l'on aura (569)

$$QR' = PR + \frac{Zr}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour déterminer la valeur de Z, tirons la ligne CS, qui passe

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par le centre de la roue, et qui forme, avec les directions QS et PS, des angles, que nous nommerons α et β.

Décomposons chacune des forces Q et P, en deux autres, dont l'une perpendiculaire à CS et l'autre suivant la direction CS; la somme des forces, suivant CS, sera

$$Q\ Cos\ \alpha + P\ Cos\ \beta;$$

la somme des forces perpendiculaires à CS sera

$$Q\ Sin.\ \alpha - P\ Sin.\ \beta.$$

ainsi, la force, suivant la résultante ST, sera

$$Z = [(Q\ Cos.\ \alpha + P\ Cos.\ \beta)^2 + (Q\ Sin.\ \alpha - P\ Sin.\ \beta)^2]^{\frac{1}{2}}$$

ou en faisant les réductions convenables,

$$Z = [Q^2 + P^2 + 2PQ\ Cos.\ (\alpha + \beta)]^{\frac{1}{2}};$$

d'où il résulte que

$$QR' = PR + \frac{[Q^2 + P^2 + 2PQ\ Cos.\ (\alpha + \beta)]^{\frac{1}{2}} r}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Lorsque l'on voudra avoir égard à la raideur des cordes, il faudra ajouter au second membre de cette équation la quantité

$$\frac{f^m}{R'}(a + bP)(567).$$

(f représente le demi-diamètre de la corde.)

Cabestan (Pl. IV, fig. 11).

575. Nommons R' la longueur des barres CQ où sont appliqués les hommes qui font tourner le cabestan; R, le rayon CP de l'arbre autour duquel s'enveloppe la corde; et r, le rayon CT de l'axe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous aurons, par ce qui précède,

$$QR' = PR + \frac{[Q^2 + P^2 + 2PQ\ Cos.\ (\alpha + \beta)]^{\frac{1}{2}}\, r}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

On doit observer ici que les hommes étant distribués également autour du cabestan, la valeur de la puisssnce Q n'influe point sur le frottement ; ainsi, l'équation précédente se réduira à

$$Q = \frac{Pr}{R'(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{PR}{R'}.$$

Si l'on fait entrer dans le calcul la raideur de la corde, on aura

$$Q = \frac{Pr}{R'(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{PR}{R'} + \frac{f^m}{R'}(a + bP).$$

Exemple :

576. Faisons. $\left\{\begin{array}{l} r = 2 \text{ pouces.} \\ R = 10 \\ R' = 120 \end{array}\right.$

Supposons, 1°. que l'axe soit de fer, et la boîte de cuivre; dans ce cas, le rapport de la pression au frottement est comme $7\frac{1}{2}$ à 1. 2°. Que la corde est goudronnée et composée de 120 fils de caret (corde qui peut supporter douze ou quinze milliers sans se rompre). 3°. Que le poids P à élever soit de 8000 livres. Cela posé nous aurons

$$\frac{Pr}{R'(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{8000 \cdot 2}{120(1 + 7\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}} = 17,7.$$

$$\frac{PR}{R'} = \frac{8000 \cdot 10}{120} = 666,7.$$

Pour déterminer $\frac{f^m}{R'}(a + bP)$, nous observerons qu'il résulte des expériences de Coulomb, qu'une corde goudronnée de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trente fils de caret exige, pour être pliée autour d'un rouleau de quatre pouces de diamètre, une force constante de 6,6 livres et une force proportionnelle à la tension, à raison de 116 livres par millier.

Dans notre cas, l'arbre du cabestan ayant 20 pouces de diamètre, les forces nécessaires pour plier la corde autour de cet arbre ne seront que le cinquième de celles que nous venons d'indiquer; et l'on aura 1,3 livre pour la force constante, et 23,2 livres par millier; ainsi, la tension étant de huit milliers, il faudrait pour plier une corde de 30 fils de caret autour de l'arbre du cabestan une force de 186,9 livres. L'expérience a démontré que les forces nécessaires pour plier différentes cordes goudronnées autour d'un même rouleau sont entre elles, approximativement, comme le nombre des fils de caret qui composent ces cordes. Ainsi, pour plier la corde de 120 fils de caret, il faudra employer une force quadruple de la précédente, c'est-à-dire 746, 6 livres; ainsi,

$$\frac{f^m}{R}(a+bP)=746{,}6.$$

Mais

$$\frac{f^m}{R'}(a+bP)=\frac{R}{R'}\times\frac{f^m}{R}(a+bP)=\frac{10}{120}\cdot 746{,}6=62{,}3 \text{ liv.}$$

De sorte que

$$Q=17{,}7+666{,}7+62{,}3=746{,}7 \text{ livres.}$$

577. Dans le cas dont il s'agit, le frottement et la raideur de la corde absorbent 80 livres de force, c'est-à-dire, environ un neuvième de la force totale.

Un homme, en pressant avec un mouvement continu la barre d'un cabestan, peut exercer un effort moyen d'environ 25 livres. Il faudrait donc trente hommes sur ce cabestan pour élever le poids de 8000 livres.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Plan incliné (Pl. IV, fig. 12).

578. Soit P un poids qu'une puissance T, appliquée à la corde FT, fait monter le long du plan incliné CB.

Nommons n l'angle que fait le plan incliné CB avec la ligne horizontale CA, et m, l'angle que fait la direction de la corde FT avec le plan incliné.

Décomposons chacune des forces P et T en deux autres, dont l'une parallèle au plan incliné, et l'autre perpendiculaire à ce même plan. Les composantes parallèles au plan incliné seront

$$P\, Sin.\, n, \text{ et } T\, Cos.\, m;$$

celles perpendiculaires au plan incliné seront

$$P\, Cos.\, n, \text{ et } T\, Sin.\, m.$$

Il résulte des expérience de Coulomb, que le frottement d'un traîneau, lorsqu'il se meut, est représenté par une constante a, dépendante de la cohérence des surfaces, qu'il faut ajouter à une partie constante b de la pression; nous aurons donc :

$$a + \frac{P\, Cos.\, n - T\, Sin.\, m}{b} = T\, Cos.\, m - P\, Sin.\, n;$$

d'ou l'on tire

$$T = \frac{ab + P(\, Cos.\, n + b\, Sin.\, n)}{b\, Cos.\, m + Sin.\, m}.$$

Si le plan BC est horizontal, nous aurons $n = 0$; si alors $m = 0$, c'est-à-dire, si la corde est parallèle à l'horizon, la formule précédente se réduira à $T = a + \frac{P}{b}$.

Dans la pratique, la quantité constante a étant fort petite peut être négligée sans inconvénient; et alors la formule se réduit à

$$T = \frac{P(\, Cos.\, n + b\, Sin.\, n)}{Sin.\, m + b\, Cos.\, m}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Lorsque la corde est parallèle au plan incliné, $m = 0$; et l'on a

$$T = P(\,Cos.\,n + b\,Sin.\,n).$$

Si la corde est parallèle à la base du plan incliné, l'angle m est négatif et égal à n; et alors l'on aura

$$T = \frac{P(\,Cos.\,n + b\,Sin.\,n)}{b\,Cos.\,n - Sin.\,n}.$$

Dans toutes ces formules, la quantité b se détermine par les résultats des expériences (562) ayant égard à la nature des surfaces frottantes.

Vis.

579. Soit une vis à filets carrés. Nommons n, l'angle que fait l'hélice avec l'horizon; P un poids agissant à l'extrémité d'un levier horizontal R, tangentiellement au cercle que ce levier décrit en tournant; T une force capable de faire monter le poids P, et laquelle agit à l'extrémité d'un levier horizontal r.

D'après ce que nous avons dit (578), on aura,

$$T = \frac{r}{r'}\,\frac{P(\,Cos.\,n + b\,Sin.\,n)}{b\,Cos.\,n - Sin.\,n}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

LIVRE TROISIÈME.

DES PARTIES INTERMÉDIAIRES DES MACHINES.

580. Il arrive rarement que l'organe mécanique sur lequel agit immédiatement le moteur ait la direction, la vitesse et la quantité de mouvement qu'exige celui qui produit l'*effet utile*. Les organes intermédiaires ont pour but de produire toutes les modifications de mouvement *purement nécessaires*, pour que l'effet utile soit le plus grand et le plus parfait possible.

581. Nous avons dit purement nécessaires; car tout organe qui produirait une modification superflue serait essentiellement vicieux. En effet, il n'en est aucun, quelle que soit sa perfection, dont le mouvement n'occasione une déperdition de force. Ainsi, un organe inutile augmenterait tout à la fois en pure perte la dépense de construction, et la dépense de la force motrice.

582. Les modifications que les organes intermédiaires peuvent produire sont de trois espèces.

1°. Ils transportent le mouvement à la partie mobile qui doit produire l'effet utile, et en même temps ils règlent le chemin, la direction et la nature du mouvement (soit alternatif, soit circulaire) que cette partie mobile doit prendre.

2°. Ils modifient les deux élémens qui constituent une quantité de mouvement quelconque; c'est-à-dire, ou ils augmentent la pression en diminuant proportionnellement la vitesse, ou réciproquement ils augmentent celle-ci en apportant une diminution relative dans la pression. On ne doit jamais oublier que cette

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

modification se borne à un changement relatif dans la valeur de ces élémens, et que ce changement ne peut, en aucune manière, augmenter la quantité de mouvement, c'est-à-dire, la valeur du produit de la pression par la vitesse. Il est déplorable que beaucoup de personnes qui connaissent théoriquement ce principe fondamental, l'oublient cependant lorsqu'il s'agit d'en faire l'application.

3°. Les organes intermédiaires peuvent corriger, avec plus ou moins de perfection, les irrégularités du mouvement communiqué par le moteur.

583. Plusieurs organes mécaniques produisent tout à la fois la première et la seconde espèce de modification : les engrenages, par exemple, transportent le mouvement, et en même temps ils augmentent ou diminuent la vitesse.

584. Nous diviserons ce livre en deux chapitres, dont le premier traitera des organes qui transportent le mouvement, et qui modifient les élémens de la quantité d'action transmise ; le second traitera des organes régulateurs.

CHAPITRE PREMIER.

Transmission du mouvement, et modification de la vitesse.

Manivelles.

585. On donne, en général, le nom de *manivelle* à une barre qui tourne autour d'un axe, et à l'extrémité de laquelle est appliquée une puissance.

Supposons (Pl. IV, fig. 13) que *cd* soit une manivelle à laquelle soit suspendu le poids *P* ; cette manivelle, en tournant, élèvera

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et abaissera le poids P. On voit que, lorsque la manivelle tourne, le *momentum* du poids P varie à chaque instant ; en effet, lorsque la manivelle est en CD, ce *momentum* est représenté par $r.P$ (r étant la longueur de la manivelle, et conséquemment le rayon du cercle qu'elle décrit) ; ensuite, ce *momentum* diminue progressivement, et se trouve réduit à zéro lorsqu'il se place dans la position CB ; il augmente ensuite progressivement jusqu'en CO, où il reprend la valeur $r.P$; puis il diminue, allant de O en E ; parvenu à ce point, il devient encore nul ; puis il augmente de nouveau jusqu'en CD. Ainsi le *momentum* du poids P variant entre zéro et $r.P$, sa valeur moyenne est $\frac{2r}{\pi}.P$ (π étant le rapport de la circonférence au diamètre) ou $0,6366.rP$. Par conséquent l'effort moyen de la puissance est un peu moindre que les deux tiers de son plus grand effort.

586. On donne le nom de manivelle double, triple, quadruple, à des axes coudés en deux, en trois ou en quatre endroits. Chacun de ces coudes sert à transmettre le mouvement à une résistance par l'intermédiaire d'une tige qui monte et descend à chaque révolution du coude auquel il est attaché. L'emploi le plus fréquent des manivelles multiples est de transmettre le mouvement aux pistons de plusieurs pompes que l'on fait agir simultanément pour égaliser, autant que possible, l'effort du moteur et l'écoulement dans le réservoir de décharge.

587. Si une manivelle double communique le mouvement à deux pistons, dont l'un, en montant, élèvera l'eau, tandis que l'autre ne fera que descendre, et ainsi alternativement, de sorte que l'eau passe continuellement dans le réservoir, la valeur du *momentum* de la force appliquée à la manivelle sera variable, et la moyenne valeur ne sera guère que les deux tiers de son plus grand effort.

588. Si l'on suppose (Pl. IV, Fig. 14) qu'une manivelle triple

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

projetée sur un plan perpendiculaire à son axe, les coudes formeront trois rayons qui diviseront en trois parties égales le cercle que chacun d'eux décrit en tournant.

La plus grande valeur du moment de la puissance est $r\,P$, et la plus petite (en nommant q l'angle droit), est

$$r\,.\,Cos.\,\frac{q}{3}\,.\,P\text{, ou } 0{,}866\,.\,rP.$$

Le bras de levier moyen est la distance du centre de gravité de l'arc correspondant à l'angle $\frac{q}{3}$. La valeur moyenne du moment du poids est donc

$$\frac{r\,Sin.\,\frac{q}{3}}{\frac{1}{12}\,.\,2\pi}\,.\,P\text{, ou } 0{,}9548\,.\,rP\,;$$

ainsi, l'effort moyen de la puissance ne diffère de son plus grand effort que de $\frac{1}{22}$ environ.

589. La manivelle quadruple a, contre toute apparence, plus d'irrégularité dans son mouvement, que la manivelle triple. En effet (Pl. IV. Fig. 15), la plus petite valeur du moment de la puissance est $r\,P$, et la plus grande

$$\sqrt{2}\,.\,rP = 1{,}4142\,.\,rP.$$

Le bras de levier moyen du poids étant exprimé par la distance du centre de gravité d'un quart de cercle dont le rayon $= \sqrt{2}\,.\,r$, la valeur moyenne de ce moment est

$$\frac{\sqrt{2}\,.\,r\,.\,2r}{\frac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,\pi r} = \frac{4r}{\pi}P = 1{,}2732\,.\,rP\,;$$

d'où il suit que l'effort moyen de la puissance diffère de $\frac{1}{10}$ environ de son plus grand effet; tandis que, dans la manivelle triple, il ne diffère que de $\frac{1}{22}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Courbes excentriques (Pl. V, fig. 1.)

590. Les manivelles produisent toujours un mouvement plus ou moins irrégulier. Les mécaniciens ont cherché à leur substituer un mécanisme qui, susceptible de produire un effet analogue à celui des manivelles, fût néanmoins capable de rendre égaux les efforts que la puissance fait à chaque instant, et l'on a trouvé qu'une courbe excentrique tournante pouvait réunir ces deux conditions. Déparcieux a donné des méthodes faciles (*a*) pour décrire ces courbes dans les divers cas.

Supposons qu'il s'agisse de faire monter uniformément le poids p de p en m, pendant que la puissance décrit un quart de cercle pq. Pour remplir la condition proposée, il faut qu'à chaque instant le produit du poids par sa marche soit égal au produit de la puissance par sa marche.

Le poids doit parcourir l'espace rectiligne pm, tandis que la puissance décrit le quart de circonférence pq. Conséquemment, on divise d'abord la ligne pm en un nombre arbitraire 1, 2, 3, etc., de parties égales; puis on divise le quart de circonférence pq en un égal nombre de parties égales a, b, d, etc. On mène les rayons Ca, Cb, Cd, etc., que l'on prolonge indéfiniment; on prend ensuite, sur le premier rayon prolongé, la partie Ca égale à $C1$, sur le second la partie $Cb = C2$; sur le troisième la partie $Cd = C3$; et ainsi de suite jusqu'au dernier Cz qui doit être égal à Cm.

591. La courbe qui passera par les points a, b, d. . . . z, sera une portion de spirale d'Archimède, et elle remplira les conditions requises. En effet, il est évident que le chemin que

---

(*a*) Mémoire de l'Académie des Sciences, pour l'année 1747.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

parcourt la puissance et celui que parcourt le poids sont proportionnels, puisque l'on a

$$pa : pb = p1 : p2 ,$$

et que la même proportion se trouvera dans tous les instans; donc les quantités de mouvement seront toujours égales.

592. On pourrait objecter que les effets produits aux extrémités des leviers variables Ca, Cb, Cd, etc., par une puissance appliquée à un bras du levier constant, doivent aller en diminuant dans la raison réciproque de l'allongement de ces leviers, et que les produits a, b, d, etc., devenant les puissances qui poussent parallèlement à leur base les petits plans inclinés pra, $aa'b$, $bb'd$, etc., ne doivent point produire des quantités égales de mouvement. Cette objection s'évanouit lorsque l'on réfléchit que les petits plans deviennent plus inclinés au fur et à mesure qu'ils s'éloignent du centre C; car, tandis que les hauteurs restent égales, les bases vont en augmentant dans les mêmes raisons que les bras de levier, et selon la raison réciproque de la diminution des effets qui les poussent en a', b', d', etc.; car, l'effort qui se fait en a' est à celui qui se fait en b' en raison réciproque des leviers Ca', et Cb', et des bases $a'a$ et $b'b$; ainsi, si nous nommons F l'effort en a', et f celui en b', nous aurons

$$F : f = Cb' : Ca' = bb' : aa',$$

$$\text{et } F \times aa' = f \times bb' ;$$

et il en sera de même en quelque endroit de la spirale $nabdz$ qu'on suppose le poids.

593. Si l'on fait sur les autres quarts de circonférence la même opération, on aura une courbe au moyen de laquelle le poids p sera élevé alternativement deux fois du point n au point m,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à chaque révolution que fera le cercle auquel on suppose appliquée la puissance.

594. En suivant une méthode entièrement analogue à celle que nous venons d'indiquer, on pourra tracer des courbes qui feront élever le poids avec une vitesse uniforme, un nombre quelconque de fois à chaque révolution du cercle.

595. On peut aussi tracer de la même manière des courbes qui élèvent le poids avec des vitesses variables, suivant une loi déterminée.

Dans ce dernier cas, il est avantageux que les angles rentrans ne soient point trop aigus; pour cela, il faut diminuer la vitesse en changeant de direction, et tâcher que la courbe ait la plus grande étendue possible, en donnant au cercle le plus grand rayon que les circonstances peuvent permettre.

Joints brisés. (Pl. V, fig. 2.)

596. On donne le nom de *joint brisé* ou de *joint universel* à un organe de transmission composé d'un axe *aa*, ayant la forme d'une croix, et autour duquel se meuvent deux arcades *b*, *c*, adaptées à des tiges communiquant avec d'autres organes mobiles quelconques; les arcades *b*, *c*, se croisent à angle droit.

Ce mécanisme fort simple sert à changer le plan d'un mouvement circulaire. Ainsi, par son moyen, on pourra, par exemple, transmettre le mouvement circulaire vertical d'un mobile à un autre mobile placé à une distance plus ou moins grande, et lequel doit avoir un mouvement circulaire dans un plan oblique.

Dans plusieurs cas on peut employer avantageusement le joint brisé, pourvu que l'angle des deux axes ne surpasse point 45 degrés.

597. Le joint brisé a une propriété remarquable, qui devient un inconvénient dans plusieurs cas. Si le mouvement de rota-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tion de l'un des deux axes est uniforme, celui de l'autre sera variable; (a) le rapport de la vitesse du premier à celle du second sera le même que celui qu'il y a entre la valeur réelle des angles formés sur la surface d'un cercle perpendiculaire au premier axe par des rayons qui partagent sa circonférence en un certain nombre de parties égales, et la valeur apparente de ces mêmes angles mesurés par un observateur placé à une très-grande distance dans une direction parallèle à celle du second axe.

Si l'on nomme I l'angle formé par les deux axes supposés dans un plan vertical; a, l'angle que forme l'un des axes avec la verticale, à cause du mouvement de rotation; a', l'angle correspondant que forme l'autre axe, on aura

$$Tang.\ a' = \frac{Tang.\ a\ \ Cos.\ I}{R}.$$

Soit P un effort exercé pour faire tourner le premier axe; P', la résistance appliquée au second axe; faisons $R = 1$. Ces deux puissances étant censées agir à égales distances de chaque axe, on a constamment

$$P = P' \cdot \frac{Cos.\ I}{Cos.\ ^2 a + Cos.\ ^2 a\ .\ Cos.\ ^2 I}.$$

Des engrenages.

598. Le mouvement des roues qui composent un engrenage, quelle que soit leur espèce, doit avoir toute la douceur et l'uniformité possible. Pour obtenir ces deux qualités essentielles, il faut non-seulement que les roues soient construites avec la plus grande régularité possible, mais il faut encore qu'elles la con-

(a) Essai sur la composition des machines, par Lanz et Bétancourt; deuxième édition, page 106.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

servent constamment sans altération. Voilà pourquoi on doit préférer les roues en fonte aux roues en bois. Les roues en fonte offrent d'autres avantages.

599. Premièrement, il est reconnu que plus la denture des roues est *nombreuse*, plus l'engrenage a de douceur et d'uniformité. On dit, en général, qu'une roue a une *denture nombreuse*, lorsqu'elle a des dents petites et en grand nombre, eu égard au diamètre de la roue; or, il est évident qu'à égalité de circonstances, on pourra toujours donner une denture plus nombreuse à une roue métallique qu'à une roue en bois. D'ailleurs, la roue métallique étant moins volumineuse, devient moins embarrassante, et elle n'est point, comme la roue de bois, sujette à de fréquentes réparations.

600. Si l'on jugeait convenable d'employer dans les grandes roues des dents en bois dur, il sera avantageux, pour la perfection de la machine, que la roue dans laquelle les dents devront être enchassées soit en fonte. Par ce moyen la roue ne sera pas sujette à se disloquer; les trous qui contiennent les queues des dents ne se déformeront point en s'agrandissant, et l'on évitera les chocs et les ébranlemens qui ont lieu toutes les fois que les pièces d'une machine sont chancelantes et écartées plus qu'il ne le faut. En tout cas on ne doit point oublier que les chocs irréguliers, qui dérivent de la mauvaise construction des roues, sont parmi les résistances passives une de celles qui absorbent une plus grande quantité de force motrice. Les mécaniciens ne sauraient donc employer trop de soin pour les éviter. Un des meilleurs moyens est de proscrire, toutes les fois qu'on le peut, les roues en bois, lesquelles, étant composées de plusieurs pièces sujettes aux altérations fréquentes de la sécheresse et de l'humidité, portent en elles une cause permanente qui tend à les déformer.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

601. Il est des cas dans lesquels il serait avantageux d'employer des dents en bois dur. En effet, l'expérience a démontré que, dans les grandes roues, l'engrenage est plus doux lorsque les dents de l'une sont en bois dur, tandis que celles de l'autre sont en fer fondu. On a reconnu en outre que le frottement des axes horizontaux des grandes roues est moindre lorsqu'ils sont soutenus par des *boîtes* ou supports en bois dur que l'on a fait préalablement bouillir dans de la graisse fondue.

602. La denture des roues métalliques de médiocres dimensions se fait, avec autant de régularité que de promptitude, à l'aide de la *machine à refendre*, dont la pièce principale est un plateau sur lequel sont tracés plusieurs cercles concentriques, chacun desquels est divisé, avec la plus grande exactitude, en un nombre déterminé de parties égales marquées par de petits creux. C'est dans ces petits creux que l'on fait entrer successivement une pointe attachée au bras d'un petit chariot tournant qui porte la fraise à refendre. Une bonne machine à refendre est un des objets principaux qui doivent meubler l'atelier du mécanicien constructeur; car de la bonté de cette machine dépend en grande partie la perfection des engrenages, perfection qui est de la plus grande importance dans toute espèce de machines.

603. Ordinairement la denture d'une roue est distribuée régulièrement sur toute l'étendue de sa circonférence; cependant l'on a proposé, et quelquefois l'on a mis en usage des roues dont la denture n'occupe qu'une portion de la circonférence. Ces roues étaient destinées à communiquer un mouvement alternatif rectiligne à des crémaillères. Un tel mécanisme est essentiellement vicieux; car toutes les fois que la denture de la roue rencontre celle de la crémaillère, il se fait contre la roue un choc semblable à celui que produirait contre un corps immobile une masse égale à celle de la crémaillère et des parties qui lui sont

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

adhérentes, mue avec une vitesse égale à celle que la roue communique à la crémaillère. Outre la perte de force vive que ce choc occasione inévitablement, il tend à détraquer la machine. Voilà pourquoi cette espèce d'engrenage doit être abandonnée; et lorsqu'il s'agira de changer un mouvement circulaire continu en un mouvement alternatif rectiligne, il faudra avoir recours ou aux manivelles, ou aux courbes excentriques.

604. La bonté d'un engrenage dépend de plusieurs conditions : 1°. de l'exécution soignée de toutes les parties; les roues doivent être parfaitement rondes, parfaitement centrées, être exactement perpendiculaires à l'axe, avoir un poids uniforme dans tout leur circuit; les dents doivent être parfaitement égales et également espacées; les tourillons doivent remplir exactement leurs boîtes. 2°. Il est avantageux que le diamètre des roues soit le plus grand possible, et qu'au contraire celui de l'axe soit le moindre que sa parfaite solidité comporte; mais surtout il importe que la denture soit, comme nous l'avons dit, *nombreuse*. 3°. Les roues doivent avoir une telle position respective, que la résultante des pressions qu'elles exercent réciproquement les unes sur les autres soit la moindre possible. 4°. La forme des dents doit être telle que la puissance appliquée à la première roue, et la résistance appliquée à la dernière, conservent continuellement la même valeur et se fassent constamment équilibre. Occupons-nous de ces deux dernières conditions.

605. Lorsqu'une roue A engrène avec un pignon B (Pl. V, fig. 3), la pression que son axe supporte est la résultante de trois forces : 1°. le poids de la roue et des parties qui lui sont annexées; 2°. l'effort P du moteur; 3°. la pression des dents de la roue contre celle du pignon. Cela posé, on voit que, si le pignon est placé du même côté que la puissance P, et si l'axe du pignon se trouve dans le même plan horizontal qui contient l'axe de la roue A, la résul-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tante des trois forces que nous venons d'indiquer sera la plus petite possible, et sa valeur sera exprimée par le poids de la roue *A*, plus la différence entre l'effort *P* du moteur et la pression mutuelle *Z* des dents. Si, au contraire, le pignon *B* était placé dans la situation *D*, directement opposée, l'action sur l'axe *C* sera la plus grande possible et égale au poids de la roue *A*, plus la somme de l'effort du moteur et de la pression des dents.

Donc, pour que la pression que supporte l'axe *C* soit la moindre possible, il faut, premièrement, que le pignon *B* soit placé du même côté que la puissance *P*, et que son axe soit parallèle et au même niveau que l'axe *C*. Secondement, il faut que la différence entre les diamètres de la roue et du pignon soit la moindre possible; car si les deux diamètres étaient égaux, l'axe *C* supporterait seulement le poids de la roue *A*, et n'éprouverait plus aucun effort résultant de la transmission de l'action du moteur.

606. La pression que supporte l'axe principal sera moindre lorsque l'engrenage se fera par l'intermédiaire d'un pignon placé dans le même plan que la roue, que lorsque l'engrenage aura lieu entre une roue de *champ* (*a*) et une lanterne, ou entre deux roues d'angle (*b*), ou enfin entre une roue et une vis sans fin; car, dans le premier cas, la pression mutuelle des dents n'agit que perpendiculairement aux axes, tandis que, dans les autres cas, les axes éprouvent, indépendamment des mêmes pressions transversales, d'autres pressions longitudinales d'où il résulte un excé-

---

(*a*) On appelle *roue de champ*, une roue dont la denture est perpendiculaire au plan de la roue.

(*b*) Les roues d'angle sont des roues coniques dont la denture est plus ou moins oblique.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dant de frottement, et qui tendent à faire plier la roue principale.

607. Si l'on fait engrener deux pignons avec une même roue, ces deux pignons seront placés de la manière la plus avantageuse, lorsque leurs axes seront dans le même plan que l'axe principal : alors, si les deux pignons sont égaux et agissent sur des résistances égales, leur mouvement étant en sens opposé, l'axe principal n'aura aucun effort à supporter. Il est évident que cette compensation n'aura point lieu dans toute autre position. Si la roue engrène avec un plus grand nombre de pignons, il faut, pour le motif que nous venons d'énoncer, que les pignons soient distribués symétriquement autour de la roue principale, et que les axes soient parallèles.

608. Dans quelques cas particuliers il est utile de ne point disposer symétriquement les pignons autour de la roue, et, au contraire, de les placer tous ou en partie du même côté de la roue. Ce cas se réalise lorsque l'axe principal a une charge très-forte; car alors l'action des pignons ainsi disposés tend à le soulever de bas en haut, et à diminuer la pression que ce poids exerce sur les tourillons.

609. Voyons maintenant quelle est la forme qu'on doit donner aux dents des roues. (Pl. V, fig. 4.)

Supposons que RR et SS soient les circonférences de deux roues qui se touchent au point M placé sur la ligne horizontale CC', qui réunit les deux centres C et C'; supposons aussi que ces circonférences soient proportionnelles aux nombres de tours que les deux roues doivent faire en même temps; et enfin supposons que les forces P et Q soient appliquées tangentiellement à ces circonférences.

610. Si maintenant on veut convertir ces roues en roues dentées, il faut que les dents aient une telle forme, que le mouvement qu'elles transmettront soit uniforme, et que les forces

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

demeurent toujours égales entre elles. Pour cela, il faut que, quand l'extrémité du rayon CM parcourt un certain espace, l'extrémité du rayon $C'M$ parcoure un espace parfaitement égal. Cette condition exige que, dans tous les instans du mouvement, si l'on tire la ligne BB' normale aux points de contact, cette ligne passe constamment par le point M. En effet, soit m le point de contact des deux courbes X, Z; décrivons les circonférences TT, LL, qui touchent la ligne BB' aux points B et B'. Il est évident que, si le point de contact ne sort point de cette ligne pendant le mouvement, la portion Bm de la normale s'allonge autant que la portion MB se raccourcit, et par conséquent chaque point des circonférences TT et LL décrivent des espaces égaux : mais il faut aussi que les circonférences primitives RR et SS décrivent en même temps des espaces égaux; cette seconde condition sera remplie si les rayons CB et CB' sont entre eux dans le même rapport que les rayons primitifs CM et $C'M$; ce qui ne peut arriver qu'autant que la normale BB' ne passera constamment par le point M.

Engrenage d'une lanterne et d'une roue dentée, (Pl. V, fig. 5).

611. Soient CM, et $C'M$ les rayons des cercles primitifs de la roue et de la lanterne B : on suppose qu'une des dents MN de la roue doit pousser un point M placé sur le cercle primitif de la lanterne ; cette dent passant de MN en $M'N'$ doit transporter le point sur lequel elle agit de M en m. Pour remplir les conditions énoncées précédemment, il faut que la courbe MN soit une épicycloïde décrite par un point quelconque du cercle primitif de la lanterne B roulant sur le cercle primitif de la roue. En effet, la propriété de cette courbe est que la normale, qui a son point d'intersection m avec le cercle qui la décrit, passe toujours par le point M où ce cercle touche celui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sur lequel il roule; et cela résulte de ce que chaque point m peut être considéré comme appartenant à un arc de cercle infiniment petit, dont le centre est en M. L'épicycloïde MN étant la courbe qu'il faudrait employer pour pousser les axes des fuseaux d'une lanterne, si l'on trace en dedans une courbe pq semblable, parallèle et éloignée d'une quantité égale au rayon des fuseaux, cette courbe sera celle qui déterminera la forme des dents de la roue.

612. On doit observer que, quand la roue transmet le mouvement à la lanterne, elle prend toujours les fuseaux à peu près sur la ligne CC' qui réunit les centres, et que si c'est la lanterne qui doit transmettre le mouvement à la roue, les fuseaux prendront les dents avant la ligne des centres; de sorte que, dans ce dernier cas, s'il y a quelques inégalités dans les surfaces en contact, il se formera des *arcs-boutement* qui nuiront au mouvement. Cet inconvénient doit faire préférer en pareil cas un pignon à une lanterne.

Le nombre des fuseaux d'une lanterne étant en général moindre que celui des dents de la roue, ils éprouvent des frottemens plus fréquens et tendent à s'user plus promptement. Voilà pourquoi on donne communément un plus grand diamètre aux fuseaux.

Engrenage d'une roue et d'un pignon, (Pl. V, fig. 6).

613. Si l'on suppose que les dents du pignon sont rectilignes et formées par des portions de rayons, les dents de la roue auront la courbure MN d'une épicycloïde qui serait décrite par un cercle D dont le diamètre $C'M$ n'est autre chose que le rayon du pignon, et qui roulerait sur le cercle primitif de la roue. En effet, la normale mM au point de contact m doit (comme dans le cas précédent) passer constamment par le point M; de plus

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'angle MmC' étant droit, le rayon $C'm$ touche la courbe au point m, et la ligne mM est aussi perpendiculaire sur ce rayon.

614. Quand le pignon doit conduire la roue on préfère pour la douceur du mouvement de donner aux dents de la roue des flancs rectilignes qui tendent à son centre, et qui sont taillés en arrière du cercle primitif, et de donner à celles du pignon (en avant du cercle primitif et en prolongement de leur flanc) la forme d'une portion d'épicycloïde décrite par un cercle dont le diamètre serait CM et qui roulerait sur le cercle primitif du pignon. De cette manière les dents sont formées de deux parties, l'une rectiligne et l'autre épicycloïdale; et alors, les dents du pignon peuvent conduire les flancs des dents de la roue de la même manière qu'elles en sont conduites, en les prenant près de la ligne des centres, et en les éloignant de cette ligne.

615. Quand il y a beaucoup de différence entre les diamètres de la roue et du pignon, il est convenable de donner aux dents du pignon une plus grande épaisseur qu'à celles de la roue pour qu'elles puissent résister aux frottemens plus fréquens qu'elles doivent éprouver.

616. Il n'est pas toujours possible, en faisant conduire une roue par un pignon, d'obtenir que ses ailes soient poussées uniquement après la ligne des centres. En effet, pour que cette condition soit remplie, il faut que l'aile du pignon m ne soit quittée par l'extrémité de la dent qu'à l'instant où le flanc de l'aile suivante parvient dans la ligne des centres. Le nombre des ailes du pignon étant donné, ainsi que son rayon primitif, et celui de la roue, l'angle compris entre les flancs de deux ailes consécutives le sera également. Ainsi, la taille, la grosseur et la grandeur de l'intervalle des dents de la roue se trouvant déterminées, il peut se faire que l'intervalle des dents de la roue soit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trop petit pour qu'on puisse donner aux ailes du pignon une épaisseur telle, qu'elles aient assez de solidité.

617. Il en résulte que, lorsque le pignon n'a que sept ou huit ailes, la condition précédente ne peut être remplie; elle pourrait l'être par un pignon de dix ailes qui engrènerait avec une roue de soixante-douze dents, en faisant l'épaisseur des ailes un peu moindre que leur intervalle. Quand le nombre des ailes est plus considérable, il n'y a plus de difficulté, pourvu que celui des dents de la roue soit réglé en conséquence.

618. Lorsque les ailes sont conduites partie avant, partie après la ligne des centres, ce qui arrive très-souvent, il faut que le flanc de la dent de la roue commence par pousser la pointe de l'aile du pignon. On voit donc qu'il est nécessaire de terminer ces ailes en portion d'épicycloïde, comme on le ferait si l'on voulait rendre le pignon capable de conduire la roue.

Roue et crémaillère, (Pl. V, fig. 7).

619. Les dents de la crémaillère *AA* étant formées par des lignes droites *mm*, *nn*, parallèles entre elles et avec la ligne *CM*, les dents de la roue devront avoir la courbure d'une portion de *développée* du cercle primitif de la roue *B* (en supposant que ce soit la roue qui conduise la crémaillère); car, dans ce cas, la normale commune à la courbe des dents de la roue et aux flancs des dents de la crémaillère se confondra toujours avec *Mm*, tangente au point de contact du cercle primitif de la roue et de la ligne primitive de la crémaillère, qui est, dans ce cas, substituée au cercle primitif du pignon, et que l'on peut supposer comme faisant partie d'un cercle dont le rayon est infini.

620. Quand la crémaillère doit conduire une roue, la forme des dents ne doit plus être la même; alors les flancs des dents de la roue étant dirigés vers son centre, les dents de la crémail-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

lère, qui les conduiront, seront formées par des portions d'une *cycloïde* décrite par le cercle primitif de la roue, roulant sur la ligne primitive de la crémaillère.

621. Le cas d'un axe garni de *cames*, qui soulèvent un pilon, se rapporte à celui d'une crémaillère mue par une roue dentée. Dans ce cas la crémaillère n'a qu'une seule dent, qui devient le mentonnet du pilon, et qu'on suppose formée par des surfaces planes perpendiculaires au pilon; et les dents sont remplacées par les cames, qui n'en diffèrent que par la grandeur. Il faudra donc que la came qui conduit le pilon soit formée par une portion de *développée* du cercle primitif de l'axe qui remplace ici la roue dentée.

Engrenage d'une roue de champ avec une lanterne, (Pl. V, fig. 8).

622. Les lignes MM et NN sont perpendiculaires aux axes CO et CO' de la roue et de la lanterne, qui se rencontrent au point O; les lignes MM et NN deviennent les projections des cercles primitifs, dont les centres sont en C, C'.

Les axes des fuseaux de la lanterne doivent être dirigés suivant les arêtes de son cône primitif, qui a pour base MN', et dont le sommet est en O.

623. Pour obtenir l'uniformité de mouvement, il faut que cet engrenage remplisse les deux conditions suivantes :

1°. Que les surfaces par lesquelles la lanterne et la roue se pousseront mutuellement soient des surfaces coniques décrites par des lignes passant par le point O, et qu'elles touchent suivant des arêtes dirigées vers le même point.

2°. Que les surfaces soient toujours telles, que le plan normal commun, qui serait mené par leur arête de tangence, passe toujours par l'arête de contact OM des cônes primitifs.

624. Si maintenant l'on suppose que le cercle MN roule sur

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le cercle MN', un point quelconque de ce cercle décrira, dans ce mouvement, un *épicycloïde sphérique*, qu'on peut concevoir tracé sur la surface d'une sphère, dont O est le centre et OM le rayon.

625. Soit (Pl. V, fig. 9.) PR une des positions que prendrait le cercle MN' dans ce mouvement, et QR la portion d'épicycloïde sphérique qu'il décrit ; le cône dont cette épicycloïde sphérique serait la base jouira de cette propriété, que, si on lui mène un plan normal par l'arête OR, suivant laquelle il est coupé par le cône roulant, ce plan ira toujours passer par l'arête de contact OP de ce cône roulant avec le cône primitif de la roue sur lequel il roule. On conclut de là que l'engrenage de la roue et de la lanterne doit être tel, qu'il fasse décrire aux axes des fuseaux des portions de cône, dont le sommet serait en O, et dont la base serait l'épicycloïde sphérique, dont on vient d'indiquer la génération.

626. La surface extérieure de la roue (Pl. V, fig. 10.) étant formée par la sphère dont O est le centre, et OM le rayon, le cercle MN étant tracé sur cette sphère, on marquera en uv l'épaisseur des dents, et on tracera des portions vx, ux d'épicycloïde sphérique, décrite par le roulement du cercle MN' sur le cercle MN; on tracera ensuite en dedans de ces courbes d'autres courbes qui leur soient parallèles, et qui en soient distantes d'une quantité égale aux rayons des fuseaux de la lanterne : ces dernières courbes indiqueront la forme des dents. Les fuseaux de la lanterne seront des cônes à bases circulaires ayant leur sommet en O.

Engrenage d'une roue de champ et d'un pignon.

627. Si la roue doit conduire le pignon, et si les flancs des dents du pignon sont formés par des plans passant par son axe,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les dents de la roue auront la forme d'une *épicycloïde sphérique* décrite par un cercle dont le diamètre sera la moitié de celui du cercle primitif du pignon, et qui roule sur le cercle primitif de la roue.

628. Si le pignon doit conduire la roue, il faudra donner aux dents de cette roue des flancs qui seront formés par des plans passant par son axe, et la partie saillante des dents du pignon aura la forme d'une épicycloïde sphérique, qui serait décrite par un cercle roulant sur le cercle primitif du pignon, et ayant un diamètre moitié moindre que le cercle primitif de la roue.

629. D'après ce que nous venons de dire, on voit, en général, que les dents des roues sont composées de deux parties dont l'une intérieure, c'est-à-dire, en dedans du cercle primitif, est formée par des plans qui passent par l'axe de la roue. On a donné à cette partie le nom de *flanc;* c'est elle qui reçoit l'action des dents de l'autre roue lorsque cette dernière doit transmettre le mouvement à la première.

630. La seconde partie a une forme courbe, et se nomme proprement la *dent;* c'est cette partie qui pousse le flanc des dentures de l'autre roue.

Lorsque l'engrenage est formé par une roue et une lanterne, la courbure de la dent est une *épicycloïde* décrite par le cercle primitif de la lanterne roulant sur le cercle primitif de la roue.

Pour une roue et un pignon la courbure de la dent est une portion d'*épicycloïde* décrite par un cercle qui a pour diamètre la moitié de celui de la roue qui doit être conduit, roulant sur le cercle primitif de l'autre roue.

Pour une roue et une crémaillère, ainsi que pour les cames agissant sur les mentonnets, la courbure doit être une portion de *développée* du cercle primitif de la roue.

Pour une roue de champ et une lanterne la courbure sera celle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'une *épicycloïde sphérique* tracée par le cercle primitif de la base de la lanterne sur la surface d'une sphère qui aurait pour rayon l'arête du cône primitif de la roue.

Et enfin, pour une roue dentée et un pignon, la courbure sera celle d'une *épicycloïde sphérique* tracée par un cercle dont le diamètre est la moitié du cercle primitif du pignon.

631. M. de la Fontaine a proposé un moyen facile pour tracer la courbure des dents que doivent avoir les roues et les pignons; voici en quoi consiste ce moyen :

1°. On trace les cercles primitifs des roues d'engrenage;

2°. On découpe une planche de manière à en former une portion du cercle primitif d'une des roues;

3°. On fixe cette planche ainsi découpée sur le tracé du cercle auquel elle appartient;

4°. On découpe une autre planche de manière qu'elle forme une portion de cercle dont le diamètre sera la moitié de celui du pignon;

5°. On fixe sur chacune des circonférences l'extrémité d'une lame d'acier très-mince et très-flexible; cette lame est garnie d'une petite pointe qui sert à tracer les portions d'épicycloïde qui déterminent la forme des dents extérieures au cercle primitif;

6°. Le tracé de courbure se fait après avoir marqué sur le cercle primitif la position et l'épaisseur de chaque dent.

On peut, par une méthode tout-à-fait analogue, décrire dans les autres espèces d'engrenages des *cycloïdes* et des *développées* de cercle.

632. M. de la Fontaine a fait devant une commission de la société d'émulation de Rouen des expériences par lesquelles il a démontré que les engrenages tracés par sa méthode jouissent en effet, ainsi que la théorie l'indique, de la propriété de pro-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

duire constamment l'une sur l'autre une pression de même valeur. A cet effet, il fit monter deux roues, chacune sur un axe garni d'une poulie portant un petit fil de soie, au bout duquel était suspendu un poids proportionnel au rayon primitif des roues; dans toutes les situations que l'on donna aux roues par rapport à leurs dents, elles se trouvèrent toujours en équilibre, et par conséquent elles avaient toujours le même rapport de force et de vitesse.

633. Le Normand m'a communiqué une méthode fort simple dont les horlogers font usage, pour trouver le diamètre d'un pignon, lorsque la roue dentée avec laquelle il doit engréner est construite. Ils emploient à cet effet un instrument nommé *calibre à pignon*, qui n'est autre chose qu'un compas, dont les pointes sont plates et courbes, comme un compas d'épaisseur, et qui s'ouvre et se ferme par une vis; ils prennent sur les extrémités des dents de la roue l'ouverture convenable d'après le tableau suivant : cette ouverture donne le diamètre du pignon relativement au nombre des dents qu'il doit avoir.

Lorsque la roue mène le vignon.		*Lorsque le pignon mène la roue.*	
Pignon de 6 dents. . . .	3 pointes.	Pignon de 6 dents. . . .	3 pointes $\frac{1}{3}$.
de 7.	$3\frac{1}{3}$	de 7.	$3\frac{2}{3}$
de 8.	$3\frac{2}{3}$	de 8.	4
de 9.	4	de 9.	$4\frac{1}{3}$
de 10.	$4\frac{1}{3}$	de 10.	$4\frac{2}{3}$
de 11.	$4\frac{2}{3}$	de 11.	5
de 12.	5	de 12.	$5\frac{1}{3}$
etc.		etc.	

(Voyez Pl. V, fig. 15.) En supposant les dents arrondies, on place une des pointes du *calibre* sur le milieu d'une dent *a;* si le pignon doit avoir 6 dents et qu'il mène la roue, on ouvre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le *calibre* jusqu'à ce que la seconde pointe tombe en *b*; s'il doit avoir 9 dents, sans déranger la première pointe, on porte l'autre jusqu'en *c*; si ce sont les deux nombres intermédiaires, on divise par la pensée l'espace *bc* en trois parties égales, en ouvrant ou en fermant le calibre, ce qui est facile, et l'on prend la partie nécessaire.

634. Les personnes qui désirent avoir de plus longs détails sur la théorie des engrenages doivent consulter les ouvrages suivans:

Traité des Épicycloïdes, de la Hire;

Un mémoire de Camus, parmi ceux de l'Académie pour l'année 1733;

Les notes que M. Navier a ajoutées au premier volume de l'Architecture Hydraulique de Bélidor, nouvelle édition.

Le Traité des Machines par M. Hachette, seconde édition. On trouve dans ce dernier ouvrage des détails-très étendus sur l'application de la géométrie descriptive au tracé des roues dentées de diverses espèces. Ces détails sont accompagnés d'un grand nombre de planches dessinées avec beaucoup de soin sur une grande échelle.

Dans le journal des Mines de l'an 11, on trouve un mémoire de M. Lefroy sur la théorie des cames à pilons.

Pilons à boulons sans mentonnet.

635. Les mentonnets ont l'inconvénient inévitable d'augmenter les frottemens des pilons contre les *prisons* dans lesquelles ils se meuvent, et cela d'autant plus que la came est plus éloignée de l'axe du pilon. On évite ce défaut en suppprimant le mentonnet, et en faisant agir la came sur un boulon qui traverse le pilon parallèlement à l'arbre des cames et dans l'axe même du pilon. On peut placer ce boulon de deux manières différentes :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la première consiste à pratiquer dans le pilon une entaille revêtue de lames de fer; le boulon traverse cette entaille, dans laquelle entre une came en fonte pour soulever le pilon; la seconde méthode, qui n'a point l'inconvénient d'affaiblir le pilon par une entaille, consiste à faire soulever les deux extrémités du boulon (saillantes sur les faces latérales du pilon) par deux cames parallèles ayant une tête commune, et qui dans leur jeu embrassent le pilon.

636. Le boulon est de cuivre quand la came est de fer; il a la forme d'un prisme à trois pans, dont on arrondit l'arête qui glisse sur la surface de la came. Les cames métalliques ont de grands avantages lorsqu'on les compte aux cames en bois.

1°. Elles conservent sans altération la courbure que la théorie exige;

2°. Elles sont de plus longue durée et moins sujettes à la rupture;

3°. L'arbre se trouve moins affaibli par les entailles que l'introduction des têtes des cames exige, parce que ces têtes sont bien moins grosses et moins longues que celles des cames en bois.

637. On ne saurait trop recommander la suppression des mentonnets et l'adoption des boulons, que nous avons indiqués; car par cette substitution on obtient non-seulement une diminution considérable de frottement, mais on se procure en outre la facilité de rendre la levée du pilon aussi petite que l'on veut par le changement de place du boulon, et de plus d'en faire varier les grandeurs suivant le besoin, facilité que l'on ne saurait obtenir en se servant des mentonnets.

638. Quand les cames doivent soulever un marteau, il est utile que le point de contact de la came et du marteau réponde au centre de percussion de ce dernier, afin qu'il ne résulte du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

choc aucun effort sur son axe, et que le point du marteau qui frappe sur l'enclume réponde, comme le point par lequel il est soulevé, à son centre de percussion. On évitera ainsi la réaction sur les tourillons du marteau, et le choc sera le plus grand possible.

639. Toutes les fois qu'une came vient en contact avec le mentonnet ou le boulon d'un pilon, il s'ensuit un choc que l'on ne peut éviter, mais dont on diminue les inconvéniens en distribuant tellement les cames et les pilons, que les chocs se succèdent à intervalles égaux aussi courts qu'il est possible, et en donnant beaucoup de masse et de vitesse à l'arbre qui porte les cames, ou en adaptant un volant, afin que l'uniformité de son mouvement soit peu altérée (Pl. V fig. 11).

** 640. Pour déterminer la perte de force vive qui a lieu toutes les fois qu'une came soulève un pilon, supposons que C soit l'arbre tournant, que CQ soit la distance du centre C au point de contact Q de la came et du mentonnet, ou du boulon; nommons a cette distance CQ, u la vitesse qui répond au point Q avant le choc, u' la vitesse qui répond à ce même point après le choc, l la distance d'un point quelconque m au centre C; $\frac{ul}{a}$ sera la vitesse de rotation du point m autour de C avant le choc; $\frac{u'l}{a}$ sera la vitesse du même point après le choc : mais comme, en vertu du principe de réaction, la quantité de mouvement est la même avant et après le choc, on aura

$$u \cdot \int \frac{ml^2}{a} = u' \left(Ma + \int \frac{ml^2}{a}\right);$$

d'où résulte

$$u' = u \int \frac{ml^2}{a^2} : \left(M + \int \frac{ml^2}{a^2}\right);$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mais la force vive avant le choc est

$$\int \frac{mu^2 \cdot l^2}{a^2 \cdot 2g};$$

la force vive après le choc est

$$\frac{Mu'^2}{2g} + \int \frac{mu'^2 l^2}{2g \cdot a^2} = \frac{u^2 \left(\int \frac{ml^2}{a^2}\right)^2}{2g\left(M + \int \frac{ml^2}{a^2}\right)}:$$

ainsi, la quantité de force vive perdue par le choc sera

$$\frac{\frac{u^2}{2g} M \int \frac{ml^2}{a^2}}{M + \int \frac{ml^2}{a^2}};$$

et dans le cas où $\int \frac{ml^2}{a^2}$ est beaucoup plus grand que M, la perte de la force vive dépendante du choc sera $\frac{u^2}{2g} M$.

641. Si les points de contact étaient doués d'une élasticité parfaite, il n'y aurait aucune perte de force vive (119); et cette perte est d'autant moindre que l'élasticité augmente : mais dans la plupart des cas l'élasticité est peu considérable. L'expérience apprend, par exemple, qu'un mouton de bois qui pèse 600 ou 700 livres, tombant de plus d'un mètre de hauteur, n'a pas ordinairement plus d'un décimètre de ressaut.

CHAPITRE DEUXIÈME.

Des régulateurs.

642. Le but des *régulateurs*, comme leur nom l'indique, est de corriger les irrégularités de mouvement qui ont lieu dans les machines, quelle que soit la cause qui les produit, et consé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

quemment de donner au mouvement toute l'uniformité dont il est susceptible.

643. Avant de parler des régulateurs, nous devons faire observer à nos lecteurs qu'il n'est pas avantageux, dans tous les cas, de donner aux mobiles qui composent une machine une exacte uniformité de mouvement. En effet, dans les mouvemens alternatifs il importe, autant que la nature de la machine le permet, de diminuer progressivement la vitesse du mobile à la fin de chaque *alternation*, de sorte que ces alternations commencent et finissent avec une vitesse très-petite; par-là on évite les chocs qui (comme nous l'avons répété plusieurs fois) absorbent des quantités de forces vives d'autant plus considérables que les vitesses sont plus grandes. Ainsi, toutes les fois qu'on doit imprimer un mouvement alternatif à des pistons, à des scies, et à d'autres organes qui, par leur nature, exigent un semblable mouvement, il sera avantageux, en général, de ne leur donner qu'une vitesse médiocre, et de diminuer cette vitesse à la fin de leur course, soit en allant et venant, soit en montant et en descendant. Veut-on transformer un mouvement circulaire en un mouvement alternatif au moyen d'une courbe excentrique (590), il ne faudra point décrire cette courbe de manière qu'elle rende le mouvement exactement uniforme, mais de manière que la vitesse diminue progressivement à la fin de chaque alternation; et, pour cette espèce de transformation, il faut proscrire l'emploi des roues à demi dentées, qui agissent alternativement sur des crémaillères; car cette méthode très-vicieuse produit des chocs qui détraquent bientôt la machine, et qui produisent toujours une déperdition considérable de force motrice.

Volans.

644. On donne, en général, le nom de *volans* à des roues

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pesantes que l'on fait mouvoir avec rapidité, et qui servent à maintenir l'uniformité de mouvement lorsque le moteur ou la résistance est sujet à éprouver quelques variations momentanées; ils conservent le mouvement quand l'action du moteur, ou celle de la résistance, est intermittente, et ils s'opposent à ce que les changemens de vitesse se fassent brusquement.

645. Ce serait une erreur de croire que les volans puissent augmenter la quantité d'action transmise à la machine; ils absorbent, en vertu de leur inertie, une portion du *momentum* de la machine lorsqu'elle agit avec la plus grande force, pour la lui rendre ensuite quand la force diminue; ils établissent ainsi une sorte de compensation d'où résulte leur action régulatrice.

646. Il est évident que la compensation sera d'autant plus complète qu'ils seront doués d'un plus grand *momentum*. Or, ce *momentum* résulte de deux élémens, la masse du volant et sa vitesse; il vaut mieux ordinairement donner une grande vitesse au volant que de trop augmenter sa masse. Il est évident, en outre, qu'un volant produira d'autant plus d'effet que sa masse sera en plus grande partie réunie près de sa circonférence extérieure, puisque alors cette masse aura le plus grand bras de levier possible, eu égard à la grandeur de la roue; d'ailleurs on sait que le moment d'inertie (131) d'un solide se compose de la somme des produits formés en multipliant chaque molécule matérielle par le carré de sa distance à l'axe du mouvement; cette distance au centre du mouvement a donc la plus grande influence sur l'effet du volant, lequel dépend de l'inertie. Ainsi il faudra, non-seulement accumuler la plus grande quantité de la masse du volant vers sa circonférence, mais il faudra encore augmenter son diamètre le plus qu'il sera possible.

647. Toutes les parties mobiles, douées d'un mouvement de rotation continu, remplissent plus ou moins les fonctions de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

volans, suivant qu'elles ont plus de masse, que cette masse est accumulée à un plus grand éloignement du centre de mouvement, et enfin que leur mouvement de rotation est plus rapide.

648. Il résulte de ce que nous venons de dire que, dans bien des cas, on peut, sans employer un volant, régulariser le mouvement d'une machine par une bonne disposition des parties mobiles essentielles de cette machine, lorsqu'elles ont un mouvement circulaire continu.

Les roues hydrauliques en fonte, les roues d'engrenage également en fonte, réunissent à l'avantage d'une grande solidité, et d'une régularité inaltérable, celui de remplir les fonctions de volant.

649. Les volans employés sans discernement sont dans plusieurs cas plus nuisibles qu'utiles. Ils sont en effet nuisibles, 1°. dans toutes les machines dont la nature de l'effet utile exige de faire varier souvent et promptement la vitesse; 2°. dans celles qui doivent être arrêtées fréquemment et tout à coup. Les volans conviennent aux machines dont le mouvement doit être très-régulier et la vitesse constante : mais pour remplir parfaitement leur but, il faut qu'ils soient convenablement placés, et que le *momentum* qu'ils acquerront ne soit ni trop faible ni trop fort; étant trop faible, l'action régulatrice serait imparfaite; étant trop fort, ils produiraient une déperdition inutile de force motrice.

650. Si dans une machine il y a des axes dont les vitesses de rotation soient différentes, on doit, en général, placer le volant sur celui qui se meut avec plus de rapidité. Quand le volant est destiné à régulariser l'action motrice, il faut le placer le plus près possible du point d'application de cette force; et, au contraire, il conviendra de le rapprocher, autant que faire se peut,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la résistance, quand il s'agit de régulariser le mouvement des organes qui produisent l'effet utile.

651. M. Navier s'est occupé à déterminer, dans divers cas, la grandeur et la masse des volans; ces utiles recherches, dont nous allons donner un extrait, sont développées dans les notes intéressantes dont cet habile ingénieur a enrichi la nouvelle édition du premier volume de l'Architecture hydraulique de Belidor.

Volant pour régulariser le mouvement d'une manivelle à pédale.
(Pl. V, fig. 12.)

** 652. La force P, qui comprime la pédale, n'agit qu'en descendant, c'est-à-dire pendant que la manivelle M parcourt le demi-cercle EAF: pour le faire remonter de l'autre côté, il faut que le volant ait une force suffisante, afin que le mouvement imprimé au système par la force P, pendant que la manivelle décrit le demi-cercle EAF, ne soit point détruit en totalité par l'action de la résistance Q. Cela posé, on peut d'abord chercher le plus petit volant capable de faire naître un mouvement continu avec une vitesse moyenne donnée, puis déterminer, au-dessus de cette limite, un volant, au moyen duquel cette vitesse ne varierait dans l'étendue de chaque tour que d'une certaine quantité donnée.

** 653. On suppose que les tours de manivelle se font constamment dans des temps égaux. Il résulte de cette supposition que les quantités d'action dépensées par le moteur et par la résistance à chaque tour, sont égales entre elles.

Nommons a le rayon de la manivelle; pendant la durée d'un tour, l'espace vertical dont s'élève le point M est égal à $2a$; ainsi la force P dépense, à chaque tour, la quantité d'action $2aP$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nommons b le rayon du cercle auquel la résistance Q est appliquée tangentiellement. Cette résistance, que l'on suppose être ici un poids, s'élèvera pendant un tour de la quantité $2\pi b$; ainsi $2aP = 2\pi b$ indiquera la relation à laquelle on doit satisfaire pour que le mouvement de l'arbre, considéré d'un tour à un autre, ne s'accélère ni ne se retarde point.

La force P, dans les diverses situations de la manivelle, se décompose en deux forces; l'une CM, dans le sens de la manivelle même, est détruite; l'autre MG, perpendiculaire à la verticale EF, est la seule qui agit; celle-ci est exprimée par $P. \text{Cos}. x$ (en nommant x l'angle que fait la manivelle avec la verticale), quand cette force fait équilibre au poids Q; il faut alors que $Pa \text{ Cos}. x = Qb$; en combinant cette équation avec la précédente, l'on aura

$$\text{Cos}. x = \frac{1}{\pi};$$

ainsi $\frac{1}{\pi}$ exprimera les cosinus des angles dans lesquels la force P pourra faire équilibre au poids Q.

Soit $\int r^2 dm$ le moment d'inertie du volant (131); supposons que la manivelle se trouve dans la position CM où la vitesse angulaire a sa valeur *minimum*, qu'on nommera v; la force vive du volant sera alors $\int v^2 r^2 dm$, et celle correspondante du poids Q, $\frac{v^2 b^2 Q}{g}$; ainsi la force vive totale du système, dans la position indiquée, sera

$$\int v^2 r^2 dm + \frac{v^2 b^2 Q}{g}.$$

Soit v' la valeur maximum de la vitesse angulaire, la force vive qui correspond à cette vitesse, sera

$$\int v'^2 r^2 dm + \frac{b^2 v'^2 Q}{g}.$$

Il résulte de cela que, dans le passage que fait la manivelle de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la position où la vitesse angulaire est v, à celle où la vitesse a la valeur v', elle acquiert une quantité de force vive exprimée par

$$\left(\int r^2 dm + \frac{b^2 Q}{g}\right)\left(v'^2 - v^2\right).$$

Pendant ce temps, le point M a parcouru un espace MN, dans le sens vertical, égal au double sinus de l'angle ACM, dont le cosinus étant égal à $\frac{1}{\pi}$, son sinus est

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2}};$$

donc le moteur a imprimé, dans le sens du mouvement, la quantité d'action

$$2aP\sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2}}.$$

Le poids Q s'est élevé en même temps verticalement de la hauteur $2b.\,arc\left(Cos. = \frac{1}{\pi}\right)$; par conséquent la quantité d'action imprimée dans le sens du mouvement,

$$2aP\sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2}} - Q2b\ arc\left(Cos. = \frac{1}{\pi}\right).$$

Mais les quantités d'action imprimées sont égales à la moitié de la force vive acquise; donc

$$\left(\int r^2 dm + \frac{b^2 Q}{g}\right)\left(v'^2 - v^2\right) = 4aP\sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2}} - 4Qb.arc.\left(Cos. = \frac{1}{\pi}\right).$$

Cette équation établit une relation entre le moment d'inertie du volant et de l'arbre et les vitesses maximum et minimum du système; et par son moyen l'on déterminera l'une de ces quantités, lorsque les autres seront connues.

Si l'on considère le mouvement de la manivelle lorsqu'elle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

achève sa révolution, en passant de CN à CM, on aura, d'après les mêmes principes, l'équation

$$(\int r^2 dm + \frac{b^2 Q}{g})(v'^2 - v^2) = 2Qb[\pi + 2\ arc.\ (Sin. = \frac{1}{\pi})] - 4Pa[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2}}];$$

cette équation, ainsi que la précédente, étant combinées avec la relation $2aP = 2\pi bQ$, donne la même valeur pour $\int r^2 dm$.

Soit V la vitesse moyenne angulaire du volant, et supposons que sa plus petite et sa plus grande vitesses v, v' ne diffèrent de V que de la quantité $\frac{V}{n}$, on aura alors

$$v = \frac{n-1}{n} V \text{ et } v' = \frac{n+1}{n} V, \text{ d'où } v'^2 - v^2 = \frac{4}{n} V^2.$$

Substituant cette valeur dans une des équations précédentes la valeur de $\int r^2 dm$, qu'on en déduira, exprimera le moment d'inertie qu'il faudra donner au volant.

Si l'on veut avoir la valeur du plus petit volant, dans ce cas, on doit observer que la manivelle arriverait à la position CM avec une vitesse nulle, v serait égal à zéro, v' double de V, et $n = 1$, ainsi $v'^2 - v^2 = 4V^2$; en faisant cette substitution dans l'équation précédente l'on aura la valeur $\int r^2 dm$ du moment d'inertie du plus petit volant capable d'entretenir un mouvement continu avec la vitesse V.

Volant pour régulariser le mouvement d'une roue à manivelle simple.

** 654. Si l'on supposait (Pl. V, fig. 13) que la force P, après avoir tiré de haut en bas quand la manivelle descend en EAF, tire de bas en haut quand la manivelle remonte en FBE; c'est-à-dire, si l'on supposait que la force P est appliquée à une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tige inflexible qui lui donne la faculté d'agir dans les deux sens pour faire tourner la manivelle, dans ce cas, le mouvement serait moins inégal. L'on aurait, entre les efforts P et Q, la relation $2aP = \pi bQ$, et le moteur ferait équilibre à la résistance dans les quatre endroits où l'angle du bras de la manivelle avec l'horizon a son cosinus égal à $\frac{2}{\pi}$. L'on obtiendra, en suivant la même marche que ci-dessus, les deux équations

$$\left(\int r^2 dm + \frac{b^2 Q}{g}\right)(v'^2 - v^2) = 4aP\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} - 4Qb \,.\, arc.\left(Cos. = \frac{1}{\pi}\right),$$

$$\left(\int r^2 dm + \frac{b^2 Q}{g}\right)(v'^2 - v^2) = 4bQ \,.\, arc.\left(Sin. = \frac{2}{\pi}\right) - 4Pa\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}\right).$$

Exemple.

** 655. Supposons qu'il s'agisse de déterminer le volant d'une machine à vapeur de la force de quatre chevaux dont la quantité d'action, en une seconde, est d'environ 300 kilogrammes élevés à un mètre. Supposons que la longueur du bras de levier du poids Q soit $0^{\text{mèt.}}5$, et que la vitesse moyenne de rotation des points situés à l'unité de distance de l'axe soit de 2 mètres; alors la vitesse du poids sera $0^{\text{mèt.}},5 \times 2^{\text{mèt.}} = 1^{\text{mèt.}}$; la quantité d'action consommée pour son élévation sera, pour une seconde, $Q \times 1^{\text{mèt.}} = 300$ kilogrammes élevés à un mètre, ou $Q = 300^{\text{kilog.}}$.

Substituons dans la première équation, à la place de P sa valeur $\frac{Q\pi b}{2a}$ et $\frac{4}{m}V^2$ au lieu de $v'^2 - v^2$ nous aurons

$$\int r^2 dm = \frac{nQb}{2V^2}\left[\pi\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} - 2\ arc.\left(Cos. = \frac{2}{\pi}\right)\right] - \frac{Qb^2}{g},$$

mettant à la place de V, b, Q, leurs valeurs numériques, et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

faisant $\pi = 3{,}142$, le moment d'inertie $\int r^2 dm$ du volant sera

$$\int r^2 dm = 19{,}9n - 7{,}6.$$

Nous avons vu qu'au plus petit volant correspond la valeur $n = 1$; son moment d'inertie sera donc $\int r^2 dm = 12{,}3$, ce nombre représente des unités de masse.

Si l'on voulait employer un volant tel que la vitesse ne s'écartât pas de sa valeur moyenne de plus de $\frac{1}{30}$ de cette valeur, il faudrait faire $n = 30$, ce qui donnerait

$$\int r^2 dm = 589.$$

656. Pour évaluer le moment d'inertie du volant formé par une roue en fer fondu, nous ne considérons que la *jante* dans laquelle se trouve réunie la plus grande partie de la masse, et nous négligeons le moyeu et les rayons. Nommons b la largeur de cette jante, e son épaisseur, r son rayon moyen, r' son rayon extérieur, et r'' son rayon intérieur; son volume sera

$$\tfrac{1}{2}\pi c\,(r'^4 - r''^4).$$

Mais

$$r' = r + \tfrac{1}{2}b;\ \text{et}\ r'' = r - \tfrac{1}{2}b;$$

substituant ces valeurs et observant que b, étant fort petit par rapport à r, on peut négliger les termes qui contiennent les puissances supérieures de b, l'expression du moment d'inertie se réduira à $2\pi bcr^3$, quantité qu'il faut multiplier par $\frac{p}{g}$ (p étant le poids d'un mètre cube de fer fondu, dont la valeur est de 7207 kilogrammes). On aura donc

$$\int r^2 dm = \frac{p}{g} \cdot 2\pi bcr^3 = 589;$$

ainsi, lorsque l'on aura déterminé les valeurs que l'on veut

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donner à deux des quantités b, c, r, l'équation précédente donnera celle de la troisième; faisons

$$b = 0^{m},1\ ;\ c = 0^{m},05\ ,\ \text{le rayon du volant aura}\ 2^{m},94.$$

Pendule conique. (Pl. V, fig. 14.)

657. Le pendule conique, dont on attribue l'invention à Watt, est un régulateur composé ainsi qu'il suit. Soit aa un axe vertical tournant qui porte deux tiges cd, cf; ces tiges peuvent tourner librement autour du point c, et décrire un arc de cercle plus ou moins grand dans un plan vertical qui passe par l'axe aa, elles portent à leur extrémité des boules p, q; et elles sont réunies (à articulation), à deux autres tiges g, h, qui portent un anneau i mobile le long de l'axe aa. Que l'on suppose ce régulateur adapté à une machine, laquelle fasse tourner l'axe aa avec une vitesse variable; on voit d'abord, qu'en vertu de la force centrifuge, les boules p et q tendront à s'écarter d'autant plus que la vitesse de rotation sera plus grande; au fur et à mesure qu'elles s'écartent, les tiges g et h font monter l'anneau i. Si la vitesse diminue, la force centrifuge diminuera également, les boules se rapprocheront et l'anneau i descendra. Ce mouvement d'élévation et d'abaissement qu'acquiert cet anneau en vertu de la force centrifuge qui augmente ou diminue, est employé dans plusieurs machines pour régulariser l'action variable du moteur ou de la résistance. Dans les machines à vapeur, par exemple, l'anneau agit sur la soupape qui donne entrée à la vapeur dans le cylindre; augmente son ouverture quand le mouvement est ralenti, et réciproquement il la diminue lorsque le mouvement s'accélère. Dans quelques machines hydrauliques elle est employée à abaisser et à élever la vanne du coursier d'une manière analogue.

658. Nommons t la durée d'une révolution de l'axe; x la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

distance horizontale variable de l'axe à chacune des boules. La vitesse des boules est $\frac{2\pi x}{t}$; et leur force centrifuge $\frac{4\pi^2 x}{t^2}$.

Les boules soumises simultanément aux actions de la force centrifuge, et de la gravité dont l'une s'exerce dans le sens horizontal, et la seconde dans le sens vertical, se placent nécessairement dans une situation telle que la résultante de ces deux forces soit dans la direction de la tige qui soutient chacune d'elles; il s'ensuit que le rapport de la gravité à la force centrifuge est celui qu'il y a entre la distance du point C de suspension à l'anneau i (que nous nommerons d), et la distance horizontale x; ainsi,

$$\frac{gt^2}{4\pi^2 x} = \frac{d}{x}, \text{ et } t = r\pi\sqrt{\frac{d}{g}}.$$

On voit par ce résultat que le temps de la révolution du pendule conique ne dépend que de la distance verticale des boules au point de supension.

659. La relation entre la vitesse de rotation de l'axe vertical et la hauteur à laquelle se tiennent les boules, étant établie par l'équation précédente, on pourra toujours connaître la position de l'anneau i correspondant à une vitesse donnée, et régler les effets que le mouvement de cet anneau doit produire, quand il survient des variations de vitesse dans la machine.

Fusées et courbes excentriques tournantes.

660. Lorsque la force du moteur ou celle de la résistance éprouvent des variations qui se renouvellent périodiquement avec régularité, et quand ces variations peuvent être déterminées d'avance, ou par l'expérience, ou par le calcul, alors on peut régulariser le mouvement, en faisant subir au bras du levier, qui se rapporte à la force variable, des diminutions ou

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des augmentations qui soient en raison réciproque de celles auxquelles est assujettie cette force variable. Les *fusées* et les *courbes excentriques* sont les deux moyens principaux dont on se sert pour obtenir cet effet.

661. On appelle *fusée* une sorte de tambour conique sur la surface convexe duquel est établie une gorge qui tourne en spirale. Sur cette gorge s'enveloppe une corde ou une chaîne qui correspond à l'organe dont on veut corriger la variabilité. Les tours de la corde enveloppés sur les *spires* de moindre diamètre se développent lorsque la force est vigoureuse, et ceux des *spires* les plus amples lorsque la force s'affaiblit.

Les fusées sont employées particulièrement dans les horloges, pour corriger l'irrégularité de force des ressorts moteurs dont la vigueur diminue au fur et à mesure qu'ils se débandent.

662. Des *courbes excentriques tournantes*, qui se décrivent d'une manière analogue à celle des courbes que nous avons indiquées (590), produisent le même effet que les fusées, en faisant varier le bras du levier d'une chaîne correspondante à un organe dont on veut corriger la variabilité.

663. Dans les puits très-profonds des mines, on est obligé de contre-balancer les câbles et les chaînes auxquels sont suspendues les tonnes remplies des matières à extraire; communément on se sert à cet effet d'une petite chaîne qui s'enroule sur l'arbre tournant de la machine, et tient, par son autre extrémité à une chaîne très-pesante. Quand les deux câbles sont en équilibre, la grosse chaîne est amoncelée au fond du puits; mais au fur et à mesure que la différence des poids augmente, la petite chaîne s'enveloppe sur l'arbre tournant, élève la grosse chaîne, et celle-ci se trouve suspendue dans toute sa longueur, quand l'une des tonnes est arrivée au sommet du puits; ce

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mode de régulariser la valeur de la résistance est aussi embarrassant qu'imparfait. En effet, le contre-poids que nous venons de décrire ne conserve point l'équilibre entre les câbles dans toutes leurs situations respectives; car, quand les deux tonnes sont à la même hauteur dans le puits, et que les deux câbles ont un égal poids, l'équilibre est rompu par tout le poids de la petite chaîne.

664. En Angleterre, on a remplacé avantageusement ce contre-poids par une courbe excentrique adaptée à l'arbre tournant, et sur laquelle s'appuie une chaîne qui porte un poids. La forme de la courbe est telle que, lorsque l'arbre tourne, toutes les perpendiculaires menées de son centre sur la ligne de direction de la chaîne augmentent uniformément.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

LIVRE QUATRIÈME.

DE LA SOLIDITÉ DANS LES CONSTRUCTIONS.

665. Ce livre contient deux chapitres, dont le premier traite de l'équilibre des murs et des voûtes, et le second de la force des matériaux.

CHAPITRE PREMIER.

Équilibre des murs et des voûtes.

Poussée des terres.

** 666. Soit $FEAD$ (Pl. V, fig. 16), un mur de revêtement derrière lequel on fait un remblai en terre, dont le prisme triangulaire DGA se détacherait si l'on pouvait enlever le mur $FEAD$. Ce prisme est sollicité à glisser sur GA en vertu de sa pesanteur p; mais il se trouve retenu, 1°. par la force que lui oppose le mur, que nous nommerons q, 2°. par sa cohésion sur GA, et par son frottement sur cette même base.

Chacune de ces résistances doit être décomposée en une force perpendiculaire à GA qui est inefficace, et en un autre qui agit parallélement à GA.

Les lignes PI et IH représentent les composantes de p dont la direction est indiquée par la perpendiculaire PI, abaissée du centre de gravité P du prisme. La direction de la force q

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

est représentée par l'horizontale QH, et ses composantes par les lignes QL, HL. La force qui sollicite le triangle à glisser, est HI, et celle qui s'oppose est LH réunie à la cohésion et au frottement ; ainsi, l'équation d'équilibre sera,

$$HI = LH + \textit{cohésion} + \textit{frottement}.$$

Soit $AD = h$; $DG = x$; $AG = \sqrt{h^2 + x^2}$; $PH = p$; $QH = q$; l'on a

$$AG : DG = PH : PI = \frac{px}{\sqrt{h^2 + x^2}};$$

$$AG : PH = DA : HI = \frac{ph}{\sqrt{h^2 + x^2}};$$

$$AG : DA = QH : QL = \frac{qh}{\sqrt{h^2 + x^2}};$$

$$AG : DG = QH : LH = \frac{qx}{\sqrt{h^2 + x^2}}.$$

Exprimons par δ la densité des terres, et par c la cohésion sur l'unité de surface ; cette cohésion ayant lieu sur toute la ligne GA, la cohésion totale sera $c\sqrt{h^2 + x^2}$. D'après l'expérience, le frottement étant proportionnel à la pression, $\frac{1}{f}$ en exprimera le rapport constant ; mais la pression normale sur GA étant égale à

$$QL + PI = \frac{qh + px}{\sqrt{h^2 + x^2}},$$

l'on aura

$$\frac{qh + px}{f\sqrt{h^2 + x^2}}$$

pour l'expression du frottement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

De ces données, il résulte l'équation d'équilibre

$$\frac{ph}{\sqrt{h^2+x^2}} = \frac{qx}{\sqrt{h^2+x^2}} + \frac{qh+px}{f\sqrt{h^2+x^2}} + c\sqrt{h^2+x^2},$$

et par conséquent

$$q = \frac{f\delta h^2 x - \delta h x^2 - 2\,cf(h^2+x^2)}{2\,(fx+h)} = \frac{\frac{\delta hx}{2}\left(h-\frac{x}{f}\right)-c\,(h^2+x^2)}{x+\frac{h}{f}}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer, par la théorie des *maximis* et *minimis*, celui des triangles *CAD* qui exerce la plus grande pression. Or, l'on a d'après cette théorie

$$dq = \frac{2f\delta h^2\,(fx+h)\,dx - 4x\delta h\,(fx+h)\,dx - 8xcf\,(fx+h)\,dx -}{4\,(fx+h)^2}$$

$$\frac{-\,2f^2\delta h^2 x dx + 2f\delta h x^2 dx + 4cf^2\,(h^2+x^2)\,dx}{4\,(fx+h)^2};$$

d'où l'on tire

$$\frac{dq}{dx} = 0 = x^2(-2f\delta h - 4f^2c) - x(4\delta h^2 + 8fhc) + h^2(2f\delta h + 4f^2c).$$

et

$$x = -\frac{h}{f} \pm h\sqrt{1+\frac{1}{f^2}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation

$$q = \frac{\frac{\delta hx}{2}\left(h-\frac{x}{f}\right)-c\,(h^2+x^2)}{x+\frac{h}{f}},$$

l'on aura

$$q = h^2\left[\frac{-\frac{\delta}{f}-\frac{\delta}{f^3}\pm\frac{\delta}{2}\sqrt{1+\frac{1}{f^2}}\pm\frac{\delta}{f^2}\sqrt{1+\frac{1}{f^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{f^2}}}\right]$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$- ch\left[\frac{\frac{2}{f^2}+2\mp\frac{2}{f}\sqrt{1+\frac{1}{f^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{f^2}}}\right];$$

et faisant

$$\frac{-\frac{\delta}{f}-\frac{\delta}{f^3}\pm\frac{\delta}{2}\sqrt{1+\frac{1}{f^2}}\pm\frac{\delta}{f^2}\sqrt{1+\frac{1}{f^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{f^2}}}=a\text{, et}$$

$$\frac{\frac{2}{f^2}+2\pm\frac{2}{f}\sqrt{1+\frac{1}{f^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{f^2}}}=b\text{; l'on aura } q=ah^2-bch.$$

** 667. On voit par cette expression, 1°. que les dimensions du triangle qui produit la plus grande pression, et que son adhérence n'influent point sur la valeur de x, puisqu'aucune fonction de la cohésion n'entre dans son expression;

2°. Si le frottement était nul, quelle que fût la cohésion, alors $x=h$, c'est-à-dire, que le triangle exerçant la plus grande poussée, serait isoscèle.

L'expression $q=ah^2-bch$ est celle de la force horizontale, qui est capable de résister au triangle exerçant la plus grande pression sur un mur dont la hauteur est h; mais pour connaître quelle devrait être la force horizontale capable de résister sur une hauteur quelconque, l'on différenciera l'équation par rapport à h; et l'on aura $dq=2hadh-bcdh$, pour l'expression des différentes pressions exercées sur DO et DA (Pl. V, fig. 16), et appelant h' la hauteur totale DO, cette pression horizontale élémentaire, agissant à l'extrémité du bras de levier $AO=h'-h$, aura pour son moment autour du point O

$$(2hadh-bcdh)(h'-h)=2hh'adh-bh'cdh-2h^2adh+bchdh;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et intégrant, l'on aura, pour le moment total sur la hauteur h autour du point O, l'expression

$$a\left(h^2h' - \frac{2h^3}{3}\right) + b\left(\frac{ch^2}{2} - h'ch\right);$$

et lorsque $h' = h$, l'on a la somme des momens sur la hauteur totale h' égale à l'expression

$$a\left(\frac{h'^3}{3}\right) - b\left(\frac{ch'^2}{2}\right).$$

** 668. Si le mur devait soutenir, outre la poussée des terres, celle d'autres matières superposées, alors il faudra substituer dans les expressions précédentes $(p + \varphi)$ au lieu de p, supposant que la surcharge soit exprimée par φ; par cette substitution l'on aura

$$q = \frac{\left(\frac{\delta hx}{2} + \varphi\right)\left(h - \frac{x}{f}\right) - c(h^2 + x^2) - c(h^2 + x^2)}{x + \frac{h}{f}},$$

et par la théorie des *maximis* et *minimis*

$$\frac{dq}{dx} = 0 = -x^2\left(\frac{\delta h}{2f} + c\right) - x\left(\frac{\delta h^2}{f^2} - \frac{2hc}{f}\right) + h^2\left(\frac{\delta h}{2f} + c\right)$$
$$- h\left(\frac{\varphi}{f2} + \varphi\right);$$

et divisant par $\left(\frac{\delta h}{2f} + c\right)$, l'on a

$$x = -\frac{h}{f} \pm \sqrt{h^2\left(1 + \frac{1}{f^2}\right) - \frac{2h\varphi(1 + f^2)}{f(\delta h + 2fc)}};$$

en substituant cette valeur dans l'expression q; et en cherchant, comme nous avons fait précédemment, le moment total de la poussée des terres et de leur surcharge autour de l'arête de la base du mur qui doit résister à leur pression, et égalant ce moment à celui de la pesanteur du mur, on déterminerait l'épaisseur du revêtement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

669. Coulomb, dans les applications qu'il a faites de sa théorie, a supposé des terres végétales, qui, par leur nature abandonnées à elles-mêmes, prennent un talus de 45°, et, dans ce cas, d'après la théorie du plan incliné, il a établi que le frottement est égal à la pression.

670. M. de Prony, après avoir substitué des quantités angulaires aux quantités linéaires, a déterminé le rapport du frottement à la pression d'après la théorie du plan incliné, formé par l'éboulement naturel des terres; il a introduit dans l'équation d'équilibre au lieu de f, rapport du frottement à la pression; l'expression $\frac{1}{Tang. \tau}$ (l'angle formé par le talus naturel des terres, et la verticale étant exprimée par τ), il parvient d'après cette substitution, et la méthode des *maximis* et *minimis*, à ce résultat très-simple $tang. \tau = tang. 2\beta$ (β représentant l'angle formé par l'éboulement du prisme de plus grande poussée, et la verticale), d'où il résulte que $\tau = \frac{\beta}{2}$, c'est-à-dire que l'angle formé par le prisme de plus grande poussée, est moitié de l'angle formé par le talus ordinaire des terres, et la verticale.

671. M. Mayniel a exposé dans son *Traité de la poussée des terres*, des expériences faites à Alexandrie en 1805, et à Juliers en 1806 et en 1807. Les résultats de ses expériences exécutées avec tout le soin et toute l'exactitude possibles, s'accordent avec la théorie que nous venons d'exposer. Voici les conséquences principales qu'on en déduit.

1°. L'expérience et la théorie indiquent que la résultante de la poussée d'un remblai exécuté derrière un mur vertical, passe au tiers de la hauteur, à partir de la base du remblai.

2°. Le rapport du frottement à la pression, est égal à 0,5 pour les terres végétales; celui des sables à 0,4.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3°. La cohésion qu'acquièrent les terres végétales *damées* avec soin, diminue leur poussée de plus des deux tiers.

4°. La ligne de rupture (*a*) derrière un mur qui soutient un remblai en terres végétales, se trouve à une distance de l'arête intérieure du mur égale à h (0^{m},618), h étant la hauteur du mur.

5°. Si le remblai est formé en sable, la ligne de rupture sera à une distance du mur exprimée par h (0,677).

6°. Si le remblai était formé en terres végétales mêlées de petit gravier ; la distance de la ligne de rupture au mur, est h ($0^{m.}$,646).

7°. Si le remblai est formé en décombres, la distance de la ligne de rupture au mur, est h ($0^{m.}$,414).

8°. Si le remblai est composé de terres végétales mêlées avec du gros gravier, la distance de la ligne de rupture au mur, est h ($0^{m.}$,618).

M. Mayniel ayant combiné les résultats des expériences avec la théorie, a déduit les déterminations suivantes.

Poussées exercées par diverses espèces de remblai.

672. 1°. Les terres végétales dont le pied cube pèse 38 kilogrammes (étant *damées*) produiront, contre un mur de revêtement à parement intérieur vertical, une poussée équivalente à h^3 ($0^{m.}$,806).

2°. La poussée des terres végétales, non *damées* mêlées de gros gravier et pesant 53 kil. le pied cube, est h^3 ($3^{m.}$,374); mais, lorsque ces terres sont damées, l'on a h^3 ($1^{m.}$, 125).

(*a*) On appelle ligne de rupture la lézarde qui se forme dans un remblai, lorsqu'un mur n'étant pas assez fort pour le maintenir est prêt à se renverser. La distance de cette ligne de rupture au mur, est ce qui constitue la base du prisme d'éboulement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3°. Les sables dont le poids moyen est 46 kil. le pied cube, exercent une poussée équivalente à h^3 ($3^{m.}$,496).

4°. Les terres végétales mêlées de petit gravier dont le pied cube pèse 50 kil., produisent une poussée de h^3 ($3^{m.}$, 15), n'étant pas *damées*, et seulement de h^3 ($1^{m.}$, 05) quand elles sont *damées*.

5°. Les décombres, débris de roches ou vieux matériaux de démolition, dont le poids moyen est de 60. kil. le pied cube, produisent une poussée exprimée par h^3 ($1^{m.}$, 74). Il faut observer que les murs de revêtement destinés à soutenir un remblai de cette espèce doivent avoir des *barbacanes* en quinconce pour l'écoulement des eaux depuis la fondation, jusqu'à deux mètres environ au-dessous de leur sommet.

Épaisseur des murs de revêtement.

673. 1°. $x=h(0^{m.},16)$ exprimera l'épaisseur d'un mur en briques, dont les deux paremens sont verticaux, pour résister à un remblai en terres végétales soigneusement damées lit par lit. Le poids moyen du pied cube de la maçonnerie en briques est de 60 kilogrammes.

2°. $x=h$ ($0^{m.}$,15) sera l'épaisseur d'un mur à paremens verticaux, en maçonnerie de moellons destinée à soutenir un remblai en terres végétales soigneusement *damées*. Le poids moyen de la mâçonnerie en moëllons est de 74 kil. le pied cube.

3°. Un remblai en terres argileuses soigneusement *damées*, dont le poids est de 42 kilogrammes le pied cube, exige pour un mur à paremens verticaux, une épaisseur exprimée par $x=h$ ($0^{mèt.}$, 17), s'il est en maçonnerie de briques, et de ($0^{mèt.}$,16) s'il est en moellons.

4°. Un mur en pierre de taille dont le poids moyen est de 93 kil. le pied cube, doit avoir une épaisseur exprimée par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$x = h\,(0^{\text{mèt.}}, 13)$ pour soutenir un remblai en terres végétales damées, et par $x = h\,(0^{\text{mèt.}}, 14)$ si le remblai est en terres argileuses également damées, en supposant que les paremens du mur sont verticaux.

5°. Un mur en maçonnerie de cailloux roulés, dont le poids moyen est de 81 kil. le pied cube, exige l'épaisseur de $x = h\,(0^{\text{mèt.}}, 14)$ pour un remblai de terres végétales damées, et de $x = h\,(0^{\text{mèt.}}, 15)$ pour un remblai de terres argileuses damées.

6°. Si le remblai est formé en terres mêlées de gros gravier, damées, l'épaisseur d'un mur à paremens verticaux sera,

S'il est	en briques	$x = h\,(0^{\text{m}}, 19)$,
	en moellons	$x = h\,(0^{\text{m}}, 17)$,
	en pierres de taille	$x = h\,(0^{\text{m}}, 16)$,
	en cailloux roulés	$x = h\,(0^{\text{m}}, 17)$.

7°. Si le remblai est formé en sable, l'épaisseur sera,

pour un mur	en briques	$x = h\,(0^{\text{m}}, 33)$,
	en moellons	$x = h\,(0^{\text{m}}, 30)$,
	en pierres de taille	$x = h\,(0^{\text{m}}, 26)$,
	en cailloux roulés	$x = h\,(0^{\text{m}}, 30)$.

8°. Si le remblai est formé en décombres, ou débris de roches, l'épaisseur sera,

pour un mur	en briques	$x = h\,(0^{\text{m}}, 24)$,
	en moellons	$x = h\,(0^{\text{m}}, 22)$,
	en pierres de taille	$x = h\,(0^{\text{m}}, 17)$,
	en cailloux roulés	$x = h\,(0^{\text{m}}, 21)$.

674. Dans la pratique il est prudent de donner aux murs de revêtement une épaisseur plus grande que celle que nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

venons d'indiquer. Plusieurs causes concourent en effet à faire adopter ces augmentations.

1°. Le frottement des terres contre la maçonnerie n'est pas aussi fort que celui des terres sur elles-mêmes.

2°. Souvent les eaux filtrant à travers les terres, se rassemblent entre les terres et la maçonnerie, et forment des nappes d'eau qui substituent la pression d'un fluide sans frottement à la pression des terres; quoique, pour obvier à cet inconvénient, l'on pratique derrière le revêtement des tuyaux verticaux, et des égouts au pied de ces mêmes revêtemens, pour laisser écouler les eaux, ces égouts s'engorgent, ou par les terres que les eaux entraînent, ou par la gelée, et deviennent quelquefois inutiles.

3°. L'humidité change non-seulement le poids des terres, mais encore leur frottement. Les terres de l'espèce nommée *savonneuse* se soutiennent lorsqu'elles sont sèches, sur une inclinaison de 45 degrés, et quand elles sont mouillées, souvent, elles ne peuvent se soutenir sur une inclinaison de 18 degrés avec l'horizon. L'humidité augmente aussi le volume des terres; d'où il s'ensuit que, quand elles se dessèchent, il se forme des lézardes dans la masse des remblais, ce qui produit un surcroît de pression contre le mur de revêtement, qu'on ne saurait calculer d'avance.

675. Coulomb croit que dans la plupart des espèces de terres l'on peut sans danger fixer l'épaisseur des murs de revêtement à un sixième de la hauteur à la base des murs, et à un septième au sommet.

Il y a moins d'inconvéniens à diminuer l'épaisseur des murs de revêtement dans les pays secs et chauds, que dans les pays humides et froids.

676. M. Mayniel prescrit de donner aux murs de revête-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ment destinés à supporter un remblai de terres savonneuses imbibées d'eau, et presque liquides, les épaisseurs suivantes.

Murs en briques	$x = h\,(0^{m},54)$,
en moellons	$x = h\,(0^{m},49)$,
en pierres de taille	$x = h\,(0^{m},44)$,
en cailloux roulés	$x = h\,(0^{m},47)$.

677. Si ces terres n'étaient point sujettes à être presque entièrement saturées par les eaux, ces dimensions seraient trop fortes et il suffirait de leur donner les épaisseurs suivantes.

Murs en briques	$x = h\,(0^{m},34)$,
en moellons	$x = h\,(0^{m},29)$,
en pierres de taille	$x = h\,(0^{m},24)$,
en cailloux roulés	$x = h\,(0^{m},27)$.

Résistances des piliers en maçonnerie destinés à supporter une charge déterminée.

678. Si l'on suppose un pilier de maçonnerie coupé par un plan *CM* (Pl. V, fig. 17), incliné à l'horizon, en sorte que les deux parties de ce pilier soient unies dans cette section par une cohésion donnée, tandis que tout le reste de la masse est parfaitement solide, ou lié par une adhérence infinie; qu'ensuite on charge ce pilier d'un poids, ce poids tendra à faire couler la partie supérieure du pilier sur le plan incliné, par lequel il touche la partie inférieure. Ainsi, dans le cas d'équilibre, la portion de la pesanteur, qui agit parallélement à la section, sera exactement égal à la cohérence. Si l'on remarque actuellement dans le cas de l'homogénéité, que l'adhérence du pilier est réellement égale pour toutes les parties; il faut, pour que le pilier puisse supporter un fardeau, qu'il n'y ait aucune section de ce

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pilier sur laquelle l'effort de la pression décomposé puisse faire couler la partie supérieure. Ainsi, pour déterminer le plus grand poids que puisse supporter un pilier, il faut chercher parmi toutes ses sections celle dont la cohésion est en équilibre avec un poids qui soit un minimum; car, pour lors, toute pression, au-dessous de celle déterminée par cette condition, sera insuffisante pour rompre le pilier.

679. Des expériences effectuées par Coulomb, ont indiqué que l'adhérence oppose une résistance égale, soit que la force soit dirigée parallèlement ou perpendiculairement au plan de rupture.

Cela posé, soit MM un pilier homogène que l'on suppose d'abord carré et chargé d'un poids P. Nommons δ la cohésion prise sur une section quelconque CM inclinée à l'horizon et perpendiculaire à la face verticale MM du pilier. Si l'on suppose pour un instant que l'adhérence de la partie supérieure $ACMB$ soit infinie, de même que celle de la partie inférieure CDM, il est évident que la masse de la partie supérieure du pilier tendrait à glisser le long de CM; et, par conséquent, si les deux parties étaient unies par une force d'adhérence égale à la cohésion naturelle du pilier, pour le rompre suivant CM, il faudrait que la pesanteur du poids P, décomposée suivant cette direction, fût égale ou plus grande que l'adhérence CM. Faisons l'angle en $M = x$; $DM = a$; P, le poids dont la pression représentée par φq, se décompose suivant les directions φr et rq, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à la ligne de rupture.

680. Si l'on fait abstraction de la pesanteur, l'on aura

$$\delta \times CM = \frac{\delta aa}{Cos.\ x} \text{ et } rq = P\ Sin.\ x;$$

par conséquent, dans le cas d'équilibre, l'on aura

$$P = \frac{\delta aa}{Sin.\ x\ Cos.\ x};$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mais comme le pilier doit être en état de porter le poids P sans se rompre, quelle que soit la section CM, il faut que le poids P soit toujours plus petit que la quantité $\frac{\delta aa}{Sin.\,x\ Cos.\,x}$, quelle que soit la valeur de x; ce qui aura lieu lorsque l'on déterminera P, tel qu'il soit, un *minimum*, ce qui donne

$$dP = \frac{\delta a^2[-dx(Cos.\,x)^2 + dx(Sin.\,x)^2]}{(Sin.\,x\ Cos.\,x)^2};$$

ainsi le plus grand poids que le pilier puisse supporter sans se rompre sera $2\delta\,a^2$, c'est-à-dire, le double de la résistance qu'il opposerait à une force de traction, et l'angle de moindre résistance ou de rupture sera de 45 degrés. Il résulte de cette théorie que les forces des piliers homogènes sont entre elles comme les sections horizontales.

Équilibre des voûtes.

** 681. La théorie que nous allons exposer est celle que Coulomb a donnée dans son excellent mémoire intitulé : *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique.*

Soit (Pl. V, fig. 18) la courbe FAD, décrite sur l'axe FD, soit une seconde courbe fad, décrite extérieurement à la première; soit divisée la courbe FAM en une infinité de parties, $M'm$, Mm, etc., perpendiculaires à la courbe intérieure en M', et formant avec l'élément $M'm$ un angle suivant une loi donnée.

L'espace compris entre la courbe FAD, fad, est censé le profil d'une voûte, que l'on peut supposer engendrée par le mouvement de ce profil parallèlement à lui-même. Une voûte ainsi formée s'appelle voûte à *berceau*.

**682. Supposons que AB (Pl. V, fig 19) représente la moi-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tié du profil d'une voûte, dont l'épaisseur est supposée infiniment petite, et dont les joints sont perpendiculaires à la courbe AB; l'on demande la figure de cette voûte sollicitée par des puissances quelconques.

Supposons que toutes les forces qui agissent sur la portion aM soient décomposées suivant deux directions, l'une verticale et l'autre horizontale; que la résultante de toutes les forces verticales soit QZ que nous nommerons φ; que la résultante de toutes les forces horizontales soit Qh, que nous nommerons β. Soit de plus

$$aP = y;\ PM = x;\ qM' = dy;\ Mq = dx;\ aM = s.$$

Pour que l'équilibre ait lieu, il faut : 1°. que la résultante de toutes les forces qui agissent sur la portion aM soit perpendiculaire au joint en M; 2°. que toutes ces forces étant décomposées, la somme des forces suivant chaque direction soit absolument nulle.

Si l'on nomme P la pression qu'éprouve le joint en M; la composante horizontale à ce point sera $\frac{Pdx}{ds}$, et la verticale $\frac{Pdy}{ds}$; l'on aura donc les deux équations

$$\frac{Pdx}{ds} = \beta;\ \frac{Pdy}{ds} = \varphi;$$

en divisant l'une par l'autre pour faire disparaître P; l'on aura

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\beta}{\varphi};$$

équation identique avec celle de la *chaînette*, qui est la courbe que prend une chaîne suspendue à deux points qui ne se trouvent point dans une ligne verticale.

** 683. Si l'on suppose que la résultante des forces verti-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cales soit égale à la pesanteur de la portion de la voûte aM, et que la puissance horizontale soit constante et égale à la pression en a, l'on aura

$$\frac{dx}{dy} = \frac{A}{\int p ds};$$

d'où l'on tirera l'expression de la courbe, lorsque la loi de la pesanteur p est donnée; et réciproquement la valeur de p, si la courbe est donnée.

** 684. Ajoutons aux suppositions précédentes, celle que l'épaisseur de la voûte soit *finie* (Pl. V, fig. 18). Nommons z le joint Mm; R le rayon de la *développée* au point M,

$$MM'mm' = \frac{ds(2R+z)}{2R};$$

et par conséquent,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{A}{\frac{\int z dz(2R+z)}{2R}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{Addy}{dx} = \frac{zds(2R+z)}{2R};$$

$$\text{mais } R = \frac{ds^3}{ddy \,.\, dx}, \text{ et } \frac{ddy}{dx} = \frac{ds^3}{Rdx^2};$$

ainsi l'on aura

$$\frac{A(ds)^2}{Rdx^2} = \frac{z(2R+z)}{2R},$$

ce qui donne

$$R + z = \left(R^2 + \frac{2A(ds)^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

** 685. Si la courbe intérieure était un cercle dont le rayon fût égal à 1, on aurait

$$\frac{ds}{dx} = \frac{MM'}{qM'} = \frac{1}{Cos.\, s}, \text{ et } 1 + z = \left(1 + \frac{2A}{(Cos.\, s)^2}\right),$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

** 686. Si l'on suppose qu'au sommet de la courbe le joint $Ga = b$; l'on aura pour lors $Cos.\ s = 1$; et $A = \frac{2b + b^2}{2}$.

Cette théorie ne pourrait être d'aucune utilité dans la pratique, si on négligeait d'avoir égard au frottement et à la cohésion.

Pour établir l'équation d'équilibre d'une voûte, ayant égard au frottement et à la cohésion; soit (Pl. V, fig. 21) aB la courbe intérieure, Gb la courbe extérieure, Mm un des joints perpendiculaires à la courbe intérieure.

Prolongeons le joint mM jusqu'en R, point où il se rencontre avec la verticale GR; nommons A la force de pression appliquée en f sur le point vertical aG; nommons h l'angle en R.

Supposons d'abord que la portion de voûte $Ga\ Mm$ ne puisse se diviser que suivant Mm; il faut donc, pour que cette portion de voûte soit en équilibre, que la force A soit telle, qu'elle l'empêche de glisser suivant Mm; la composante de A, décomposée suivant Mm, est $= A\ sin.\ h$; l'autre composante, perpendiculaire à mM, est $= A\ Cos.\ h$; la composante de φ, parallèle à mM, est $\varphi\ Cos.\ h$; et la composante de la même force, perpendiculaire à mM, est $\varphi\ sin.\ h$.

Ainsi, ayant égard au frottement et à l'adhérence, l'effort que fait cette portion de voûte pour glisser suivant mM, sera

$$\varphi\ Cos.\ h - A\ Sin.\ h - \frac{\varphi\ Sin.\ h}{n} - \frac{A\ Cos.\ h}{n} - \delta Mm,$$

$$\text{et } A = \frac{\varphi\left(Cos.\ h - \frac{Sin.\ h}{n}\right) - \delta\ .\ Mm}{Sin.\ h + \frac{Cos.\ h}{n}};$$

il faut que A ne soit jamais moindre de cette quantité, quelle que soit d'ailleurs la valeur de h. Ainsi, si l'on prend la valeur de h, telle qu'elle donne pour A un *maximum*, pour lors la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

constante A ainsi déterminée sera suffisante pour soutenir toute la voûte ; nommons A' ce *maximum*.

Si l'on cherchait à déterminer la force en f, de manière qu'elle fût prête à faire glisser la portion de voûte qui opposerait la moindre résistance, suivant Mm; pour lors l'on aurait, dans le cas de l'équilibre, pour une portion quelconque de voûte :

$$A = \frac{\varphi\left(Cos.\ h + \frac{Sin.\ h}{n}\right) + \delta Mm}{Sin.\ h - \frac{Cos.\ h}{n}};$$

mais, comme aucune portion de voûte ne doit glisser sur un joint quelconque Mm, il faut que A soit toujours plus petit que cette dernière quantité. Ainsi, il faut chercher le *minimum* de A, qui exprimera la plus grande force que l'on puisse appliquer en f, sans que la voûte se rompe suivant le joint Mm. Nommons A'' ce *minimum*.

Lorsque l'équilibre a lieu, la voûte, en tout ou en partie, ne doit point glisser sur ces joints dans aucun sens; il suit que les limites des forces que l'on peut appliquer en f, sont comprises entre A' et A''.

Il faut pour satisfaire à la seconde condition d'équilibre, que la résultante de toutes les forces qui agissent sur la portion de voûte $Ga\ M\ m$, passe au-dessus du point M et au-dessous du point m. Par conséquent, en nommant B la force qui agit en f, il faut que $B \times MQ$ soit toujours égal ou plus grand que $\varphi \times gM - \delta' zz$ (δ' étant une fraction constante de la cohésion du mortier); et dans le cas où la résultante passerait par le point M, l'on aurait

$$B = \frac{\varphi \times gM - \delta' zz}{MQ}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si la quantité B était supposée plus petite que $\frac{\varphi \times gM - \delta' zz}{MQ}$, pour lors la résultante passerait au-dessous du point M, et la voûte se romprait. Ainsi pour avoir la force B, suffisante pour soutenir toute la voûte, il faut chercher le *maximum* de B, d'après l'équation précédente, et ce *maximum* exprimera la plus petite force que l'on puisse appliquer en f; supposons que A' soit ce *maximum*.

Comme il faut encore, pour satisfaire à la deuxième condition, que la même résultante passe au-dessous du point m, il suit que $B \times mq$ doit être plus petit, ou tout au plus égal à $\varphi \times g'q = \delta' zz$. Ainsi, d'après l'équation

$$B = \frac{\varphi \times g'q + \delta' zz}{mq};$$

il faut déterminer la constante B telle qu'elle représente le *minimum* de $\frac{\varphi \times g'q + \delta' zz}{mq}$; et B'', déterminée d'après cette considération, donnera pour $B \times mq$, une quantité égale à

$$\varphi \times g'q + \delta' zz,$$

dans un point seulement, et plus petite dans tous les autres points m, et par conséquent B exprimera la plus grande force que l'on puisse supposer agir en f; d'où l'on conclut que pour remplir la deuxième condition, la force appliquée en f ne doit point être plus petite que B, ni plus grande que B''.

En réunissant les deux conditions d'équilibre, si A' ou B' étaient plus grands que A'' ou B'', l'équilibre ne pourrait point avoir lieu, et la voûte se romprait nécessairement.

** 687. Pour avoir les vraies limites, il suffit de prendre entre A' et B' la quantité la plus grande, et entre A'' et B'' la quantité la plus petite, en sorte que si B' était plus grand que A', et B'' plus petit que A'', B' et B'' seraient les véritables li-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mites des forces que l'on pourrait appliquer en f sans rompre la voûte.

** 688. Le frottement est souvent assez considérable dans les matériaux que l'on emploie à la construction des voûtes, pour que les différens voussoirs ne puissent point glisser l'un contre l'autre; en ce cas, l'on peut négliger la première condition d'équilibre; et il n'est plus nécessaire que la résultante des forces qui agit sur une portion quelconque de voûte soit perpendiculaire aux joints qui la terminent, mais qu'elle tombe seulement sur ces joints. Ainsi, en négligeant la cohésion des joints, ce qui doit se faire dans les voûtes nouvellement construites, il suffit de chercher le *maximum* de $\frac{\varphi \times gM}{QM}$, pour déterminer la force B', et le *minimum* de $\frac{\varphi \times gp}{mq}$ pour déterminer B''; l'on doit en outre supposer que B agit en G, sommet du joint, pour rendre la force B' aussi petite qu'elle puisse être. Il faut cependant remarquer que lorsqu'on cherche à fixer l'état d'équilibre par cette seconde condition, en supposant les forces passant par les points G et M, il faut encore supposer que ces points sont assez éloignés de l'extrémité des joints, pour que l'adhérence des voussoirs ne permette pas à ces forces d'en rompre les angles.

Dans tous les cas, l'on peut déterminer les limites de la force B de la manière suivante. Supposons, par exemple, que l'on prenne la portion GaM de la voûte, telle que le joint Mm fasse un angle de 45 degrés avec une ligne horizontale; l'on calculera la force B' dans cette supposition; l'on cherchera ensuite quelle doit être cette même force par rapport à un second joint, peu distant du premier, en s'approchant de la clef; si cette deuxième force est plus grande que la première, l'on sera assuré que l'angle de rupture de la voûte est entre la clef et le premier

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

joint; ainsi, en remontant, par cette même opération, vers cette clef, l'on déterminera facilement la force B'. Ce calcul ne saurait jamais être bien long, parce que d'après les propriétés *de maximis et minimis*, il y aura, vers un point M, où l'on trouve la limite cherchée B', très-peu de variations sur un assez grand développement de la courbe; pour déterminer cette force B', il ne sera nécessaire que d'avoir à peu près le point de rupture M; l'on déterminera par les mêmes moyens la plus grande force B'' que puisse soutenir une voûte sans se rompre. Par conséquent, si les dimensions de la voûte étaient données, de même que la hauteur du pied-droit BE, sur lequel elle porte, l'on déterminera facilement quelle doit être l'épaisseur Bb de ce pied-droit, pour que la résultante de la force B' qui agit en G, de la pesanteur totale de la voûte et de son pied-droit, passe entre E et e, ou passe par le point e, ce qui satisfera à la seconde condition de solidité.

CHAPITRE DEUXIÈME.

Résistance des matériaux.

689. Les matériaux en général peuvent supporter des fardeaux de trois manières différentes; 1°. étant placés horizontalement, alors leur résistance s'appelle résistance horizontale; 2°. étant placés verticalement et les chargeant dans cette situation, leur résistance se nomme verticale; 3°. étant suspendus verticalement et chargés dans la partie inférieure, dans ce cas on donne à la résistance le nom d'adhérence des fibres.

690. *Mariotte*, *Parent*, *Varington*, *les deux Duhamel*, *Buffon*, *Lamblardie*, *Coulomb*, *Girard*, *Perronet*, *Ronde-*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

let, *Aubri*, *Lamandé*, *Dupin*, *Navier*, ont fait des expériences pour déterminer la résistance des matériaux; voici les principaux résultats qu'on déduit de ces diverses expériences.

Résistance horizontale.

691. La résistance horizontale est en raison inverse des distances des points d'appui, et en raison directe de la largeur et du carré de l'épaisseur verticale (si c'est un parallélipipède), ou bien du cube du diamètre si c'est un cylindre.

Les prismes engagés solidement par leurs bouts sont capables de supporter avant de se rompre, un poids double de celui qu'ils soutiendraient s'ils étaient seulement appuyés à leurs extrémités.

La force du bois est proportionnelle à sa pesanteur. Buffon a donné des tables des forces des bois de chêne, déduites dans grand nombre d'expériences faites sur des pièces de fortes dimensions. Rondelet ayant comparé les résultats contenus dans ces tables, a reconnu qu'ils pouvaient être représentés par la formule

$$\frac{59 \times 59 + e^2}{b} - \frac{e^2}{3};$$

e, étant l'épaisseur verticale de la pièce de bois; b, le rapport de la longueur à l'épaisseur verticale.

Supposons que la pièce de bois dont on veut connaître la résistance soit une solive de 5 pouces en carré sur 18 pieds de longueur entre les appuis, nous aurons en substituant dans la formule précédente les valeurs de e et de b

$$\frac{59 \times 59 + 3600}{\frac{216}{5}} - \frac{3600}{3} = 3765\tfrac{2}{3}.$$

Le résultat équivalent des expériences de Buffon donne 3815.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

692. Rondelet a donné une table comparative des résultats obtenus par les expériences de Buffon, et des valeurs correspondantes données par la formule; cette table prouve que l'on peut avec confiance se servir en pratique de cette formule. Rondelet a calculé, en outre, une table très-étendue dans laquelle il indique la charge qui peut rompre une pièce, depuis trois pouces d'équarrissage jusqu'à 30, et depuis un pied et demi de longueur jusqu'à 45 pieds.

Suivant Perronet, les rapports moyens des résistances horizontales des bois sont :

Chêne.	126.
Saule.	107.
Sapin.	115.
Peuplier	74.

Il faut observer que les résistances d'une même espèce de bois, éprouvent de notables variations qui dépendent de plusieurs causes dont les principales sont, la nature du sol qui l'a produite, l'âge de la plante, le degré d'humidité ou de dessiccation de la pièce de bois, etc. Duhamel a reconnu que cette différence va quelquefois de 50 à 80.

693. Robertson - Buchanan a reconnu que la résistance moyenne horizontale du chêne à la rupture, est $\frac{1}{4}$ de celle de la fonte à égalité de circonstances, et que celle du sapin n'est que $\frac{1}{5,5}$. Le même auteur ayant comparé par des expériences spéciales les tourillons en fonte et en fer forgé a trouvé qu'elles sont à peu près dans le rapport de 9 à 14.

694. Buchanan dit que, dans les machines, les tourillons des axes opposent une résistance à la rupture proportionnelle au cube de leur diamètre, et que la force qui tend à les tordre est en raison directe de la quantité d'action transmise par la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

machine, et en raison inverse de la rotation de l'axe ou du nombre de tours qu'il fait dans un temps donné. Nommons Q la quantité d'action pendant l'unité de temps; n, le nombre de tours de l'axe pendant ce même temps; d, le diamètre des tourillons; A, un nombre constant à déterminer par l'expérience; l'on aura :

$$d = \left(A \cdot \frac{Q}{n}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

695. Les observations faites par Buchanan sur des machines en action lui ont indiqué que (en évaluant Q en action d'un cheval, le diamètre d en pouces anglais (*a*)) l'on aura les valeurs suivantes de A, 1°. pour les tourillons du volant d'une machine à vapeur, dont le travail est modéré, $A = 400$; 2°. pour les tourillons des axes des roues hydrauliques qui supportent une charge considérable, $A = 200$; 3°. dans les parties ordinaires intérieures des moulins, $A = 100$.

Résistance verticale.

696. D'après les expériences de Rondelet il résulte :

1°. Qu'un poteau de chêne, qui a plus de sept ou huit fois la largeur de sa base en hauteur, plie sous la charge avant de s'écraser ou de se refouler; et une pièce de bois, dont la hauteur aurait cent fois le diamètre de sa base, n'est plus capable de porter le moindre fardeau sans plier.

2°. Quand une pièce de chêne est trop courte pour pouvoir plier, la force qu'il faut pour l'écraser ou la faire refouler est de 40 à 48 livres par ligne superficielle de sa base; et cette force, pour le bois de sapin, va de 48 à 56.

3°. Des cubes de chacun de ces bois, mis en expérience,

(*a*) Le pied anglais équivaut à $0^{\text{mèt.}}$ 3048.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ont diminué de hauteur en se refoulant sans se désunir; ceux en bois de chêne, de plus d'un tiers; et ceux en sapin, de moitié.

4°. La force moyenne du bois de chêne, qui est de 44 livres par ligne superficielle pour un cube, se réduit à deux livres pour une pièce de même bois, dont la hauteur est égale à 72 fois la largeur de la base.

5°. Un grand nombre d'expériences ont donné la progression suivante :

Pour un cube, dont la hauteur est	1,	la force est	1
Pour une pièce, dont la hauteur est	12,		$\frac{5}{6}$
Pour *id.*	24,		$\frac{1}{2}$
Pour *id.*	36,		$\frac{1}{3}$
Pour *id.*	48,		$\frac{1}{6}$
Pour *id.*	60,		$\frac{1}{12}$
Pour *id.*	72		$\frac{1}{24}$.

Ces résultats s'accordent avec ceux obtenus par *Perronet*, *Lamblardie* et *Girard*.

697. M. Girard a fait un grand nombre de belles expériences, dont le but principal était de déterminer l'élasticité absolue des solides, c'est-à-dire, la résistance qu'ils sont capables d'opposer à la flexion lorsqu'ils sont chargés verticalement.

Ce savant a reconnu, 1°. que l'élasticité est comme la résistance, en raison directe des largeurs, double des hauteurs, et inverse des longueurs. Dans les bois posés debout, il appelle hauteur la plus grande largeur du bois.

2°. L'élasticité absolue d'un morceau de bois de chêne d'un mètre cube est de 11, 784, 451 kilogrammes; celle d'un mètre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cube de sapin, 8, 161, 128 : ainsi les rapports sont comme 63 à 47.

3°. L'élasticité absolue peut être prise du moment où la pièce se courbe, ou d'une flèche de courbure donnée. Si l'on appelle b la flèche de courbure ; P, la moitié de la charge ; f, la longueur de la pièce ; a, sa largeur ; h, sa hauteur ; la formule générale d'élasticité d'une pièce quelconque de bois de chêne est

$$\frac{Pf^3}{36} = \frac{(11,784,451)(f + 0^{mèt.}3)ah^2}{1,3};$$

celle d'un morceau de sapin est

$$\frac{Pf^3}{36} = (8,161,128)ah^2.$$

Si les bois sont ronds au lieu d'être carrés, et que d en soit le diamètre, on substituera $(0,737,381)\ d^3$ à la place de ah^2.

698. D'après Perronet, la résistance comparative des six espèces suivantes de bois chargés debout est

Chêne.	126
Saule.	96
Sapin.	94
Peuplier.	74
Frêne.	72
Orme.	70

699. Voici les résistances verticales des pierres déduites des expériences de Rondelet.

Des cubes de 4 pouces de superficie de base se sont écrasées sous les charges suivantes,

Basalte.	124,416 livres.
Granit oriental	52,706
Granit gris des Vosges. . .	25,344

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Marbre noir de Flandre. .	47,232
Marbre blanc veiné	15,552
Marbre blanc statuaire. . .	19,584
Pierre d'Istrie.	31,138
Pierre travertine de Rome.	18,112
Granit-Beola, employé à Milan	28,098
Grès blanc.	56,129
Lambourde de Gentilly . .	5,290
Pierre de Saillancourt . . .	8,680
Roche de Passy très-dure.	17,060

Adhérenes des fibres.

700. M. Rondelet a soumis à l'expérience plusieurs pièces de chêne; ces pièces qui avaient depuis deux pouces jusqu'à un pied de longueur, et depuis une ligne en carré jusqu'à trois, étaient tirées perpendiculairement par les deux bouts. Le résultat moyen de ces expériences est que la force du bois de chêne ordinaire est d'environ 102 livres par ligne superficielle de sa grosseur.

701. Le résultat moyen des expériences de *Musschenbroeck*, de *Buffon*, de *Poleni*, de *Perronet* sur la force du fer forgé tiré dans le sens de sa longueur, donne 48 kilogrammes par centimètre carrés.

FIN.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TABLE

Contenant les pesanteurs spécifiques de différentes substances.

Airs ou gaz.

(La densité de l'eau étant supposée égale à 10,000.)

Air atmosphérique	0,4600
Gaz oxigène	0,5069
Gaz hydrogène	0,0353
Gaz acide carbonique	0,6898
Gaz ammoniacal	0,2748

Liqueurs.

(La densité de l'eau étant prise pour unité.)

Eau distillée	1,0000
Eau de pluie	1,0000
Eau de rivière	1,00015
Eau de la mer	1,0263
Vin de Bourgogne	0,991
Vin de Champagne	0,997
Vin de Bordeaux	0,993
Eau-de vie	0,837
Alcohol ou esprit de vin	0,829
Bière blanche	1,023
Bière rouge	1,033
Cidre	1,018
Lait de vache	1,032
Lait de chèvre	1,034
Lait d'ânesse	1,035
Petit lait	1,019
Urine	1,010
Vinaigre commun	1,013
Vinaigre distillé	1,009
Acide sulfurique	1,840
Acide muriatique	1,194
Acide nitrique (eau forte.)	1,271

Huiles.

Huile d'olive	0,915
Huile de noix	0,922
Huile de lin	0,940
Huile de navette	0,919

Gommes, résines et graisses.

Résine jaune ou blanche du pin	1,072
Sandaraque	1,092
Gomme arabique	1,452
Cire blanche	0,968
Suif	0,941
Lard	0,947
Beurre	0,942

Sels.

Sel commun	1,918
Salpêtre	1,900
Ammoniaque	1,420

Bois.

Chêne frais	0,930
Chêne sec	1,670
Liége	0,240
Orme (le tronc)	0,671
Frêne (le tronc)	0,845
Hêtre	0,852
Aune	0,800
Érable	0,753
Noyer de France	0,671
Saule	0,585
Tilleul	0,604
Sapin mâle	0,550
Sapin femelle	0,498
Peuplier	0,383
Pommier	0,793
Poirier	0,661
Prunier	0,785
Cerisier	0,715
Coudrier ou noisetier	0,600
Buis de France	0,912
Vigne	1,327
Sureau	0,695
Jasmin d'Espagne	0,770
Gaïac	1,333
Ébénier d'Amérique	1,331
Bois rouge du Brésil	1,031
Bois de Campêche	0,918
Cèdre	0,596
Oranger	0,705
Citronnier	0,726

Pierres précieuses.

Diamant oriental blanc	3,521

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

SUITE DE LA TABLE

Des pesanteurs spécifiques de différentes substances.

Rubis oriental	4,283
Topaze orientale	4,010

Pierres siliceuses.

Cristal de roche	2,653
Quartz cristallisé	2,654
Grès des paveurs	2,415
Agate orientale	2,509
Agate onix	2,637
Calcédoine	2,615
Cornaline	2,613
Pierre à fusil blonde	2,594
Pierre à fusil noirâtre	2,581
Jaspe vert clair	2,358
Jaspe brun	2,691

Pierres diverses.

Albâtre oriental blanc antique	2,730
Marbre de Carrare	2,716
Marbre dit Brèche d'Alep	2,686
Pierre de Saint-Leu	1,659
Pierre de liais	2,077
Spath pesant	4,440
Spath fluor	2,500
Granit rouge du Dauphiné	2,643
Pierre ponce	0,914
Porcelaine de Sèvres	2,145
Soufre natif	2,033
Soufre fondu	1,990
Craie	2,250 2,320
Gypse compacte	1,870 2,290
Verre blanc	2,430

Métaux.

Platine pur	20,722
Or pur	19,258
Or (de Paris), à 22 karats	17,486
Argent pur	10,704
Argent (de Paris), à 11 d. 10 g	10,175
Mercure	13,586
Plomb	11,352
Bismuth	9,070
Cuivre	8,876
Laiton	8,395
Fer	7,800
Acier	7,767
Étain	7,224
Zinc	6,862
Antimoine	6,702
Arsénic	5,765
Cinabre rouge	6,902

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TABLE DES VITESSES

CORRESPONDANTES À DIFFÉRENTES CHUTES, EXPRIMÉES EN PIEDS.

CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.			
pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.
0	0	1	0	7	8	10	0	3	5	4	1	7	1	0	6	9	5	9	4	5
0	0	2	0	10	11	3	0	3	6	4	2	2	4	0	6	10	5	10	1	7
0	0	3	1	1	4	11	0	3	7	4	2	9	4	0	6	11	5	10	6	6
0	0	4	1	3	5	9	0	3	8	4	3	2	10	0	7	0	5	10	11	10
0	0	5	1	5	3	9	0	3	9	4	3	11	6	0	7	1	5	11	4	11
0	0	6	1	6	11	7	0	3	10	4	4	6	5	0	7	2	5	11	9	11
0	0	7	1	8	5	9	3	3	11	4	5	1	2	0	7	3	6	0	2	10
0	0	8	1	9	10	9	0	4	0	4	5	7	11	0	7	4	6	0	7	11
0	0	9	1	11	2	9	0	4	1	4	6	2	6	0	7	5	6	1	0	9
0	0	10	2	0	5	10	0	4	2	4	6	9	2	0	7	6	6	1	6	10
0	0	11	2	1	8	1	0	4	3	4	7	3	8	0	7	7	6	1	10	9
0	1	0	2	2	9	11	0	4	4	4	7	10	2	0	7	8	6	2	3	3
0	1	1	2	3	11	1	0	4	5	4	8	4	7	0	7	9	6	2	8	4
0	1	2	2	4	11	9	0	4	6	4	8	10	11	0	7	10	6	3	1	1
0	1	3	2	6	0	0	0	4	7	4	9	5	3	0	7	11	6	3	5	10
0	1	4	2	6	11	7	0	4	8	4	9	11	7	0	8	0	6	3	10	7
0	1	5	2	7	11	2	0	4	9	4	10	5	7	0	8	1	6	4	3	5
0	1	6	2	8	10	3	0	4	10	4	10	11	9	0	8	2	6	4	8	1
0	1	7	2	9	9	0	0	4	11	4	11	5	11	0	8	3	6	5	0	9
0	1	8	2	10	10	2	0	5	0	5	0	0	0	0	8	4	6	5	5	2
0	1	9	2	11	4	11	0	5	1	5	0	5	10	0	8	5	6	5	10	1
0	1	10	3	0	3	10	0	5	2	5	0	11	10	0	8	6	6	6	2	8
0	1	11	3	1	1	6	0	5	3	5	1	5	11	0	8	7	6	6	7	4
0	2	0	3	1	11	3	0	5	4	5	1	11	7	0	8	8	6	6	11	9
0	2	1	3	2	8	8	0	5	5	5	2	5	4	0	8	9	6	7	4	4
0	2	2	3	3	5	10	0	5	6	5	2	11	1	0	8	10	6	7	8	10
0	2	3	3	4	2	11	0	5	7	5	3	4	9	0	8	11	6	8	1	5
0	2	4	3	4	11	9	0	5	8	5	3	10	4	0	9	0	6	8	5	11
0	2	5	3	5	8	6	0	5	9	5	4	3	11	0	9	1	6	8	10	4
0	2	6	3	6	5	0	0	5	10	5	4	9	7	0	9	2	6	9	2	8
0	2	7	3	7	1	5	0	5	11	5	5	3	2	0	9	3	6	9	7	2
0	2	8	3	7	9	8	0	6	0	5	6	0	0	0	9	4	6	9	11	7
0	2	9	3	8	6	0	0	6	1	5	6	2	1	0	9	5	6	10	4	0
0	2	10	3	9	3	10	0	6	2	5	6	7	5	0	9	6	6	10	8	5
0	2	11	3	9	9	9	0	6	3	5	7	0	11	0	9	7	6	11	0	9
0	3	0	3	10	5	8	0	6	4	5	7	6	3	0	9	8	6	11	5	1
0	3	1	3	11	1	4	0	6	5	5	7	11	5	0	9	9	6	11	9	4
0	3	2	3	11	8	11	0	6	6	5	8	4	9	0	9	10	7	0	1	7
0	3	3	4	0	4	5	0	6	7	5	8	10	1	0	9	11	7	0	5	10
0	3	4	4	0	11	9	0	6	8	5	9	3	3	0	10	0	7	0	10	2

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.			
pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.
0	10	1	7	1	2	4	1	3	10	8	10	9	2	1	11	6	10	10	0	9
0	10	2	7	1	6	6	1	4	0	8	11	4	0	1	11	8	10	10	8	9
0	10	3	7	1	10	9	1	4	2	8	11	10	6	1	11	10	10	10	11	10
0	10	4	7	2	2	11	1	4	4	9	0	5	2	2	0	0	10	11	5	4
0	10	5	7	2	8	1	1	4	6	9	0	11	9	2	0	2	10	11	10	10
0	10	6	7	2	11	3	1	4	8	9	1	6	4	2	0	4	11	0	4	3
0	10	7	7	3	3	5	1	4	10	9	2	1	0	2	0	6	11	0	9	7
0	10	8	7	3	7	5	1	5	0	9	2	6	4	2	0	8	11	1	3	1
0	10	9	7	3	11	7	1	5	2	9	3	2	0	2	0	10	11	1	8	7
0	10	10	7	4	3	8	1	5	4	9	3	8	5	2	1	0	11	2	1	11
0	10	11	7	4	7	10	1	5	6	9	4	3	0	2	1	2	11	2	7	2
0	11	0	7	4	11	10	1	5	8	9	4	9	5	2	1	4	11	3	0	6
0	11	1	7	5	4	0	1	5	10	9	5	3	7	2	1	6	11	3	5	10
0	11	2	7	5	7	11	1	6	0	9	5	9	11	2	1	8	11	3	11	2
0	11	3	7	6	0	0	1	6	2	9	6	4	3	2	1	10	11	4	4	6
0	11	4	7	6	3	10	1	6	4	9	6	10	7	2	2	0	11	4	9	8
0	11	5	7	6	7	11	1	6	6	9	7	4	10	2	2	2	11	5	3	0
0	11	6	7	6	11	9	1	6	8	9	7	11	0	2	2	4	11	5	8	3
0	11	7	7	7	3	10	1	6	10	9	8	5	2	2	2	6	11	6	1	4
0	11	8	7	7	7	8	1	7	0	9	9	0	1	2	2	8	11	6	6	9
0	11	9	7	7	11	7	1	7	2	9	9	5	7	2	2	10	11	6	11	11
0	11	10	7	8	3	6	1	7	4	9	9	11	7	2	3	0	11	7	4	11
0	11	11	7	8	7	6	1	7	6	9	10	5	10	2	3	2	11	7	10	2
1	0	0	7	8	11	5	1	7	8	9	10	11	10	2	3	4	11	8	3	4
1	0	2	7	9	7	0	1	7	10	9	11	5	11	2	3	6	11	8	8	6
1	0	4	7	10	2	8	1	8	0	10	0	0	0	2	3	8	11	9	1	7
1	0	6	7	10	10	6	1	8	2	10	0	5	10	2	3	10	11	9	7	0
1	0	8	7	11	4	11	1	8	4	10	0	11	9	2	4	0	11	9	11	9
1	0	10	8	0	2	0	1	8	6	10	1	5	10	2	4	2	11	10	4	10
1	1	0	8	0	8	11	1	8	8	10	1	11	9	2	4	4	11	10	9	10
1	1	2	8	1	4	3	1	8	10	10	2	5	7	2	4	6	11	11	2	2
1	1	4	8	1	11	7	1	9	0	10	2	11	5	2	4	8	11	11	7	11
1	1	6	8	2	6	11	1	9	2	10	3	5	3	2	4	10	12	0	0	10
1	1	8	8	3	2	3	1	9	4	10	3	11	1	2	5	0	12	0	5	10
1	1	10	8	3	9	2	1	9	6	10	4	4	11	2	5	2	12	0	10	11
1	2	0	8	4	4	8	1	9	8	10	4	10	9	2	5	4	12	1	3	10
1	2	2	8	5	0	2	1	9	10	10	5	4	6	2	5	6	12	1	8	8
1	2	4	8	5	6	11	1	10	0	10	5	10	3	2	5	8	12	2	1	9
1	2	6	8	6	2	0	1	10	2	10	6	3	9	2	5	10	12	2	6	8
1	2	8	8	6	9	0	1	10	4	10	6	9	7	2	6	0	12	2	11	6
1	2	10	8	7	4	0	1	10	6	10	7	3	3	2	6	2	12	3	4	5
1	3	0	8	7	11	0	1	10	8	10	7	9	0	2	6	4	12	3	9	4
1	3	2	8	8	5	11	1	10	10	10	8	2	0	2	6	6	12	4	3	5
1	3	4	8	9	0	8	1	11	0	10	8	8	1	2	6	8	12	4	7	0
1	3	6	8	9	7	7	1	11	2	10	9	1	10	2	6	10	12	4	11	10
1	3	8	8	10	2	9	1	11	4	10	9	7	4	2	7	0	12	5	4	7

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.			
pieds	p°.	lign	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.
2	7	2	12	5	9	6	3	2	10	13	11	2	5	3	10	6	15	2	11	6
2	7	4	12	6	2	3	3	3	0	13	11	6	9	3	10	8	15	3	3	6
2	7	6	12	6	7	0	3	3	2	13	11	11	1	3	11	10	15	3	7	3
2	7	8	12	6	11	11	3	3	4	14	0	3	3	3	11	0	15	3	11	4
2	7	10	12	7	4	8	3	3	6	14	0	7	7	3	11	2	15	4	3	3
2	8	0	12	7	9	5	3	3	8	14	0	11	11	3	11	4	15	4	7	3
2	8	2	12	8	2	2	3	3	10	14	1	4	1	3	11	6	15	4	11	2
2	8	4	12	8	6	9	3	4	0	14	1	8	5	3	11	8	15	5	3	0
2	8	6	12	8	11	6	3	4	2	14	2	0	7	3	11	10	15	5	6	8
2	8	8	12	9	4	3	3	4	4	14	2	4	10	4	0	0	15	5	10	8
2	8	10	12	9	8	11	3	4	6	14	2	9	3	4	0	2	15	6	2	7
2	9	0	12	10	6	2	3	4	8	14	3	1	3	4	0	4	15	6	6	5
2	9	2	12	10	10	10	3	4	10	14	3	4	5	4	0	6	15	6	10	4
2	9	4	12	11	3	2	3	5	0	14	3	9	7	4	0	8	15	7	2	3
2	9	6	12	11	8	4	3	5	2	14	4	1	9	4	0	10	15	7	6	1
2	9	8	12	11	8	4	3	5	4	14	4	6	0	4	1	0	15	7	9	10
2	9	10	13	0	0	10	3	5	6	14	4	10	2	4	1	2	15	8	1	9
2	10	0	13	0	5	5	3	5	8	14	5	2	4	4	1	4	15	8	5	6
2	10	2	13	0	10	0	3	5	10	14	5	6	6	4	1	6	15	8	9	10
2	10	4	13	1	2	8	3	6	0	14	5	10	8	4	1	8	15	9	1	1
2	10	6	13	1	7	1	3	6	2	14	6	2	10	4	1	10	15	9	5	0
2	10	8	13	1	11	9	3	6	4	14	6	6	11	4	2	0	15	9	8	9
2	10	10	13	2	3	9	3	6	6	14	6	11	1	4	2	2	15	10	0	6
2	11	0	13	2	8	9	3	6	8	14	7	3	1	4	2	4	15	10	4	4
2	11	2	13	3	1	3	3	6	10	14	7	7	3	4	2	6	15	10	8	1
2	11	4	13	3	4	8	3	7	0	14	7	11	4	4	2	8	15	10	11	10
2	11	6	13	3	10	3	3	7	2	14	8	3	5	4	2	10	15	11	3	7
2	11	8	13	4	2	11	3	7	4	14	8	7	6	4	3	0	15	11	7	4
2	11	10	13	4	7	5	3	7	6	14	8	11	7	4	3	2	15	11	11	1
3	0	0	13	4	11	10	3	7	8	14	9	3	8	4	3	4	16	0	2	10
3	0	2	13	5	4	4	3	7	10	14	9	7	9	4	3	6	16	0	6	7
3	0	4	13	5	8	9	3	8	0	14	9	11	9	4	3	8	16	0	10	4
3	0	6	13	6	1	3	3	8	2	14	10	3	10	4	3	10	16	1	2	1
3	0	8	13	6	5	9	3	8	4	14	10	7	10	4	4	0	16	1	5	10
3	0	10	13	6	10	0	3	8	6	14	10	11	10	4	4	2	16	1	9	7
3	1	0	13	7	2	6	3	8	8	14	11	3	11	4	4	4	16	2	1	4
3	1	2	13	7	7	0	3	8	10	14	11	7	11	4	4	6	16	2	5	0
3	1	4	13	7	11	3	3	9	0	15	0	0	0	4	4	8	16	2	8	8
3	1	6	13	8	3	9	3	9	2	15	0	3	10	4	4	10	16	3	0	5
3	1	8	13	8	8	1	3	9	4	15	0	7	11	4	5	0	16	3	4	0
3	1	10	13	9	0	5	3	9	6	15	1	0	0	4	5	2	16	3	7	9
3	2	0	13	9	4	10	3	9	8	15	1	3	10	4	5	4	16	3	11	4
3	2	2	13	9	0	2	3	9	10	15	1	7	10	4	5	6	16	4	3	1
3	2	4	13	10	1	6	3	10	0	15	1	11	9	4	5	8	16	4	6	8
3	2	6	13	10	5	10	3	10	2	15	2	3	9	4	5	10	16	4	10	5
3	2	8	13	10	10	2	3	10	4	15	2	7	8	4	6	0	16	5	2	0

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.			
pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.
4	6	2	16	5	5	9	5	1	10	17	6	11	11	5	9	6	18	7	8	3
4	6	4	16	5	9	4	5	2	0	17	7	3	3	5	9	8	18	7	11	5
4	6	6	16	6	1	0	5	2	2	17	7	6	8	5	9	10	18	8	2	9
4	6	8	16	6	4	7	5	2	4	17	7	10	2	5	10	0	18	8	5	11
4	6	10	16	6	8	2	5	2	6	17	8	1	5	5	10	2	18	8	9	1
4	7	0	16	7	0	0	5	2	8	17	8	4	11	5	10	4	18	9	0	2
4	7	2	16	7	3	6	5	2	10	17	8	8	3	5	10	6	18	9	3	5
4	7	4	16	7	7	1	5	3	0	17	8	11	8	5	10	8	18	9	6	7
4	7	6	16	7	10	9	5	3	2	17	9	3	0	5	10	10	18	9	9	11
4	7	8	16	8	2	4	5	3	4	17	9	6	5	5	11	0	18	10	1	1
4	7	10	16	8	5	11	5	3	6	17	9	9	9	5	11	2	18	10	4	3
4	8	0	16	8	9	6	5	3	8	17	10	1	1	5	11	4	18	10	7	5
4	8	2	16	9	1	1	5	3	10	17	10	4	6	5	11	6	18	10	10	7
4	8	4	16	9	4	7	5	4	0	17	10	7	10	5	11	8	18	11	1	9
4	8	6	16	9	8	2	5	4	2	17	10	11	2	5	11	10	18	11	5	0
4	8	8	16	9	11	9	5	4	4	17	11	2	7	6	0	0	18	11	8	1
4	8	10	16	10	3	4	5	4	6	17	11	4	11	6	0	2	18	11	11	3
4	9	0	16	10	6	10	5	4	8	17	11	9	3	6	0	4	19	0	2	5
4	9	2	16	10	10	5	5	4	10	18	0	0	6	6	0	6	19	0	5	7
4	9	4	16	11	1	7	5	5	0	18	0	3	10	6	0	8	19	0	8	9
4	9	6	16	11	5	6	5	5	2	18	0	7	2	6	0	10	19	0	11	11
4	9	8	16	11	9	1	5	5	4	18	0	10	6	6	1	0	19	1	2	11
4	9	10	17	0	0	6	5	5	6	18	1	1	9	6	1	2	19	1	6	1
4	10	0	17	0	4	2	5	5	8	18	1	3	1	6	1	4	16	1	9	3
4	10	2	17	0	7	7	5	5	10	18	1	8	5	6	1	6	19	2	0	5
4	10	4	17	0	11	2	5	6	0	18	1	11	9	6	1	8	19	2	3	7
4	10	6	17	1	2	8	5	6	2	18	2	3	0	6	1	10	19	2	6	8
4	10	8	17	1	6	1	5	6	4	18	2	6	4	6	2	0	19	2	9	10
4	10	10	17	1	9	8	5	6	6	18	2	9	8	6	2	2	19	3	1	0
4	11	0	17	2	1	2	5	6	8	18	3	1	0	6	2	4	19	3	4	0
4	11	2	17	2	4	7	5	6	10	18	3	4	3	6	2	6	19	3	7	2
4	11	4	17	2	8	3	5	7	0	18	3	7	7	6	2	8	19	3	10	2
4	11	6	17	2	11	8	5	7	2	18	3	10	9	6	2	10	19	4	1	4
4	11	8	17	3	3	2	5	7	4	18	4	2	1	6	3	0	19	4	4	4
4	11	10	17	3	6	7	5	7	6	18	4	5	5	6	3	2	19	4	7	7
5	0	0	17	3	10	0	5	7	8	18	4	8	7	6	3	4	19	4	10	7
5	0	2	17	4	1	6	5	7	10	18	4	11	10	6	3	6	19	5	1	9
5	0	4	17	4	4	11	5	8	0	18	5	3	2	6	3	8	19	5	4	9
5	0	6	17	4	8	5	5	8	2	18	5	6	4	6	3	10	19	5	7	11
5	0	8	17	4	11	10	5	8	4	18	5	9	8	6	4	0	19	5	10	11
5	0	10	17	5	3	4	5	8	6	18	6	0	10	6	4	2	19	6	2	0
5	1	0	17	5	6	9	5	8	8	18	6	4	2	6	4	4	19	6	5	2
5	1	2	17	5	10	3	5	8	10	18	6	7	4	6	4	6	19	6	8	2
5	1	4	17	6	1	7	5	9	0	18	6	10	7	6	4	8	19	6	11	2
5	1	6	17	6	5	0	5	9	2	18	7	1	9	6	4	10	19	7	2	4
5	1	8	17	6	8	5	5	9	4	18	7	5	0	6	5	0	19	7	5	5

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.			
pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.
6	5	2	19	7	8	5	7	0	10	20	7	1	8	7	8	6	21	6	0	8
6	5	4	19	7	11	5	7	1	0	20	7	4	6	7	8	8	21	6	3	7
6	5	6	19	8	2	7	7	1	2	20	7	7	5	7	8	10	21	6	6	4
6	5	8	19	8	5	7	7	1	4	20	7	10	3	7	9	0	21	6	9	0
6	5	10	19	8	8	8	7	1	6	20	8	1	4	7	9	2	21	6	11	11
6	6	0	19	8	11	8	7	1	8	20	8	4	2	7	9	4	21	7	2	8
6	6	2	19	9	2	8	7	1	10	20	8	7	1	7	9	6	21	7	5	5
6	6	4	19	9	5	9	7	2	0	20	8	9	11	7	9	8	21	7	8	3
6	6	6	19	2	8	9	7	2	2	20	9	0	10	7	9	10	21	7	11	0
6	6	8	19	9	11	9	7	2	4	20	9	3	8	7	10	0	21	8	1	9
6	6	10	19	10	2	9	7	2	6	20	9	6	7	7	10	2	21	8	4	6
6	7	0	19	10	5	10	7	2	8	20	9	9	4	7	10	4	21	8	7	2
6	7	2	19	10	8	10	7	2	10	20	10	0	4	7	10	6	21	8	10	1
6	7	4	19	10	11	10	7	3	0	20	10	3	3	7	10	8	21	9	0	10
6	7	6	19	11	2	11	7	3	2	20	10	6	1	7	10	10	21	9	3	7
6	7	8	19	11	5	11	7	3	4	20	10	9	0	7	11	0	21	9	6	4
6	7	10	19	11	8	11	7	3	6	20	10	11	10	7	11	2	21	9	9	0
6	8	0	20	0	0	0	7	3	8	20	11	2	9	7	11	4	21	9	11	9
6	8	2	20	0	2	10	7	3	10	20	11	5	7	7	11	6	21	10	2	6
6	8	4	20	0	5	10	7	4	0	20	11	8	6	7	11	8	21	10	5	3
6	8	6	20	0	8	11	7	4	2	20	11	11	5	7	11	10	21	10	8	0
6	8	8	20	0	11	11	7	4	4	21	0	2	1	8	0	0	21	10	10	9
6	8	10	20	1	2	9	7	4	6	21	0	5	0	8	0	2	21	11	1	5
6	9	0	20	1	5	10	7	4	8	21	0	7	11	8	0	4	21	11	4	2
6	9	2	20	1	8	10	7	4	10	21	0	10	9	8	0	6	21	11	6	11
6	9	4	20	1	11	9	7	5	0	21	1	1	8	8	0	8	21	11	9	8
6	9	6	20	2	2	9	7	5	2	21	1	4	4	8	0	10	22	0	0	5
6	9	8	20	2	5	9	7	5	4	21	1	7	3	8	1	0	22	0	3	2
6	9	10	20	2	8	8	7	5	6	21	1	10	2	8	1	2	22	0	5	10
6	10	0	20	2	11	8	7	5	8	21	2	0	10	8	1	4	22	0	8	7
6	10	2	20	3	2	8	7	5	10	21	2	3	9	8	1	6	22	0	11	4
6	10	4	20	3	5	7	7	6	0	21	2	6	8	8	1	8	22	1	2	1
6	10	6	20	3	8	7	7	6	2	21	2	9	4	8	1	10	22	1	4	10
6	10	8	20	3	11	6	7	6	4	21	3	0	3	8	2	0	22	1	7	5
6	10	10	20	4	2	6	7	6	6	21	3	3	2	8	2	2	22	1	10	2
6	11	0	20	4	5	5	7	6	8	21	3	5	10	8	2	4	22	2	0	10
6	11	2	20	4	8	3	7	6	10	21	3	8	9	8	2	6	22	2	3	7
6	11	4	20	4	11	3	7	7	0	21	3	11	6	8	2	8	22	2	6	4
6	11	6	20	5	2	2	7	7	2	21	4	2	4	8	2	10	22	2	8	11
6	11	8	20	5	5	2	7	7	4	21	4	5	1	8	3	0	22	2	11	8
6	11	10	20	5	8	2	7	7	6	21	4	8	0	8	3	2	22	3	3	5
7	0	0	20	5	10	11	7	7	8	21	4	10	9	8	3	4	22	3	5	2
7	0	2	20	6	2	0	7	7	10	21	5	1	5	8	3	6	22	3	7	9
7	0	4	20	6	4	10	7	8	0	21	5	4	4	8	3	8	22	3	10	6
7	0	6	20	6	7	9	7	8	2	21	5	7	2	8	3	10	22	4	1	2
7	0	8	20	6	10	9	7	8	4	21	5	9	11	8	4	0	22	4	3	10

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.			
pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.
8	4	2	22	4	6	6	8	11	10	23	2	7	6	9	7	6	24	0	4	5
8	4	4	22	4	9	2	9	0	0	23	2	10	1	9	7	8	24	0	6	10
8	4	6	22	4	11	10	9	0	2	23	3	0	8	9	7	10	24	0	9	4
8	4	8	22	5	2	7	9	0	4	23	3	3	3	9	8	0	24	0	11	11
8	4	10	22	5	5	2	9	0	6	23	3	5	10	9	8	2	24	1	2	4
8	5	0	22	5	7	11	9	0	8	23	3	8	5	9	8	4	24	1	4	10
8	5	2	22	5	10	6	9	0	10	23	3	11	1	9	8	6	24	1	9	5
8	5	4	22	6	1	3	9	1	0	23	4	1	8	9	8	8	24	1	9	10
8	5	6	22	6	3	10	9	1	2	23	4	4	1	9	8	10	24	2	0	4
8	5	8	22	6	6	7	9	1	4	23	4	6	8	9	9	0	24	2	2	9
8	5	10	22	6	9	2	9	1	6	23	4	9	3	9	9	2	24	2	5	2
8	6	0	22	6	11	11	9	1	8	23	4	11	10	9	9	4	24	2	7	9
8	6	2	22	7	2	6	9	1	10	23	5	2	5	9	9	6	24	2	10	3
8	6	4	22	7	5	3	9	2	0	23	5	5	1	9	9	8	24	3	0	8
8	6	6	22	7	7	10	9	2	2	23	5	7	6	9	9	10	24	3	3	2
8	6	8	22	7	10	5	9	2	4	23	5	10	1	9	10	0	24	3	5	7
8	6	10	22	8	1	2	9	2	6	23	6	0	8	9	10	2	24	3	8	2
8	7	0	22	8	3	9	9	2	8	23	6	3	3	9	10	4	24	3	10	7
8	7	2	22	8	6	4	9	2	10	23	6	5	9	9	10	6	24	4	1	1
8	7	4	22	8	9	1	9	3	0	23	6	8	5	9	10	8	24	4	3	6
8	7	6	22	8	11	8	9	3	2	23	6	10	11	9	10	10	24	4	6	0
8	7	8	22	9	2	3	9	3	4	23	7	1	5	9	11	0	24	4	8	5
8	7	10	22	9	5	0	9	3	6	23	7	3	11	9	11	2	24	4	10	10
8	8	0	22	9	7	7	9	3	8	23	7	6	6	9	11	4	24	5	1	4
8	8	2	22	9	10	2	9	3	10	23	7	9	0	9	11	6	24	5	3	9
8	8	4	22	10	0	11	9	4	0	23	7	11	7	9	11	8	24	5	6	2
8	8	6	22	10	3	6	9	4	2	23	8	2	0	9	11	10	24	5	8	8
8	8	8	22	10	6	1	9	4	4	23	8	4	7	10	0	0	24	5	11	1
8	8	10	22	10	8	8	9	4	6	23	8	7	2	10	0	2	24	6	1	7
8	9	0	22	10	11	3	9	4	8	23	8	9	8	10	0	4	24	6	4	0
8	9	2	22	11	2	0	9	4	10	23	9	0	3	10	0	6	24	6	6	5
8	9	4	22	11	4	7	9	5	0	23	9	2	8	10	0	8	24	6	8	11
8	9	6	22	11	7	2	9	5	2	23	9	5	3	10	0	10	24	6	11	4
8	9	8	22	11	9	10	9	5	4	23	9	7	9	10	1	0	24	7	1	9
8	9	10	23	0	0	5	9	5	6	23	9	10	4	10	1	2	24	7	4	3
8	10	0	23	0	3	0	9	5	8	23	10	0	9	10	1	4	24	7	6	8
8	10	2	23	0	5	7	9	5	10	23	10	3	4	10	1	6	24	7	9	2
8	10	4	23	0	8	2	9	6	0	23	10	5	10	10	1	8	24	7	11	7
8	10	6	23	0	10	9	9	6	2	23	10	8	5	10	1	10	24	8	2	0
8	10	8	23	1	1	6	9	6	4	23	10	10	10	10	2	0	24	8	4	6
8	10	10	23	1	4	1	9	6	6	23	11	1	4	10	2	2	24	8	6	11
8	11	0	23	1	6	8	9	6	8	23	11	3	11	10	2	4	24	8	9	3
8	11	2	23	1	9	3	9	6	10	23	11	6	4	10	2	6	24	8	11	8
8	11	4	23	1	11	10	9	7	0	23	11	8	11	10	2	8	24	9	2	1
8	11	6	23	2	2	5	9	7	2	23	11	11	5	10	2	10	24	9	4	7
8	11	8	23	2	5	1	9	7	4	24	0	1	10	10	3	0	24	9	7	0

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.			
pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.
10	3	2	24	9	9	4	10	10	10	25	6	10	11	11	6	6	26	3	9	4
10	3	4	24	9	11	9	10	11	0	25	7	1	2	11	6	8	26	3	11	7
10	3	6	24	10	2	3	10	11	2	25	7	3	8	11	6	10	26	4	1	11
10	3	8	24	10	4	8	10	11	4	25	7	6	0	11	7	0	26	4	4	1
10	3	10	24	10	7	1	10	11	6	25	7	8	3	11	7	2	26	4	6	5
10	4	0	24	10	9	5	10	11	8	25	7	10	9	11	7	4	26	4	8	8
10	4	2	24	10	11	10	10	11	10	25	8	1	0	11	7	6	26	4	11	0
10	4	4	24	11	2	3	11	0	0	25	8	3	4	11	7	8	26	5	1	2
10	4	6	24	11	4	7	11	0	2	25	8	5	7	11	7	10	26	5	3	6
10	4	8	24	11	7	1	11	0	4	25	8	7	11	11	8	0	26	5	5	9
10	4	10	24	11	9	6	11	0	6	25	8	10	4	11	8	2	26	5	8	1
10	5	0	25	0	0	0	11	0	8	25	9	0	8	11	8	4	26	5	10	3
10	5	2	25	0	2	3	11	0	10	25	9	3	0	11	8	6	26	6	0	6
10	5	4	25	0	4	9	11	1	0	25	9	5	3	11	8	8	26	6	2	10
10	5	6	25	0	7	0	11	1	2	25	9	7	7	11	8	10	26	6	5	2
10	5	8	25	0	9	6	11	1	4	25	9	9	11	11	9	0	26	6	7	4
10	5	10	25	0	11	11	11	1	6	25	10	0	4	11	9	2	26	6	9	7
10	6	0	25	1	2	3	11	1	8	25	10	2	8	11	9	4	26	6	11	11
10	6	2	25	1	4	8	11	1	10	25	10	4	11	11	9	6	26	7	2	1
10	6	4	25	1	7	0	11	2	0	25	10	7	3	11	9	8	26	7	4	4
10	6	6	25	1	9	5	11	2	2	25	10	9	7	11	9	10	26	7	6	8
10	6	8	25	1	11	10	11	2	4	25	10	11	10	11	10	0	26	7	8	10
10	6	10	25	2	2	2	11	2	6	25	11	2	2	11	10	2	26	7	11	2
10	7	0	25	2	4	7	11	2	8	25	11	4	6	11	10	4	26	8	1	5
10	7	2	25	2	6	11	11	2	10	25	11	6	9	11	10	6	26	8	3	7
10	7	4	25	2	9	4	11	3	0	25	11	9	1	11	10	8	26	8	5	11
10	7	6	25	2	11	8	11	3	2	25	11	11	5	11	10	10	26	8	8	1
10	7	8	25	3	2	1	11	3	4	26	0	1	8	11	11	0	26	8	10	4
10	7	10	25	3	4	5	11	3	6	26	0	4	0	11	11	2	26	9	0	8
10	8	0	25	3	6	10	11	3	8	26	0	6	4	11	11	4	26	9	2	10
10	8	2	25	3	9	2	11	3	10	26	0	8	7	11	11	6	26	9	5	2
10	8	4	25	3	11	7	11	4	0	26	0	10	11	11	11	8	26	9	7	4
10	8	6	25	4	1	11	11	4	2	26	1	1	2	11	11	10	26	9	9	7
10	8	8	25	4	4	4	11	4	4	26	1	3	6	12	0	0	26	9	11	9
10	8	10	25	4	6	8	11	4	6	26	1	5	10	12	0	2	26	10	2	1
10	9	0	25	4	9	0	11	4	8	26	1	8	1	12	0	4	26	10	4	3
10	9	2	25	4	11	5	11	4	10	26	1	10	5	12	0	6	26	10	6	6
10	9	4	25	5	1	9	11	5	0	26	2	0	9	12	0	8	26	10	8	8
10	9	6	25	5	4	2	11	5	2	26	2	3	0	12	0	10	26	10	11	0
10	9	8	25	5	6	6	11	5	4	26	2	5	4	12	1	0	26	11	1	2
10	9	10	25	5	8	9	11	5	6	26	2	7	8	12	1	2	26	11	3	6
10	10	0	25	5	11	3	11	5	8	26	2	9	11	12	1	4	26	11	5	7
10	10	2	25	6	1	7	11	5	10	26	3	0	1	12	1	6	26	11	7	11
10	10	4	25	6	3	10	11	6	0	26	3	2	5	12	1	8	26	11	10	1
10	10	6	25	6	6	3	11	6	2	26	3	4	9	12	1	10	27	0	0	5
10	10	8	25	6	8	7	11	6	4	26	3	7	0	12	2	0	27	0	2	7

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.			
pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.
12	2	2	27	0	4	9	12	9	10	27	8	9	6	13	5	6	28	4	11	10
12	2	4	27	0	7	0	12	10	0	27	8	11	8	13	5	8	28	5	2	0
12	2	6	27	0	9	2	12	10	2	27	9	1	10	13	5	10	28	5	4	0
12	2	8	27	0	11	6	12	10	4	27	9	4	0	13	6	0	28	5	6	2
12	2	10	27	1	1	8	12	10	6	27	9	6	2	13	6	2	28	5	8	4
12	3	0	27	1	3	10	12	10	8	27	9	8	4	13	6	4	28	5	10	4
12	3	2	27	1	6	1	12	10	10	27	9	10	6	13	6	6	28	6	0	6
12	3	4	27	1	8	3	12	11	0	27	10	0	8	13	6	8	28	6	2	7
12	3	6	27	1	10	5	12	11	2	27	10	2	9	13	6	10	28	6	4	9
12	3	8	27	2	0	9	12	11	4	27	10	4	11	13	7	0	28	6	6	10
12	3	10	27	2	2	11	12	11	6	27	10	7	1	13	7	2	28	6	8	11
12	4	0	27	2	5	1	12	11	8	27	10	9	3	13	7	4	28	6	11	1
12	4	2	27	2	7	5	12	11	10	27	10	11	5	13	7	6	28	7	1	1
12	4	4	27	2	9	6	13	0	0	27	11	1	7	13	7	8	28	7	3	3
12	4	6	27	2	11	8	13	0	2	27	11	3	9	13	7	10	28	7	5	5
12	4	8	27	3	2	0	13	0	4	27	11	5	11	13	8	0	28	7	7	5
12	4	10	27	3	4	2	13	0	6	27	11	8	1	13	8	2	28	7	9	7
12	5	0	27	3	6	4	13	0	8	27	11	10	3	13	8	4	28	7	11	7
12	5	2	27	3	8	5	13	0	10	28	0	0	3	13	8	6	28	8	1	9
12	5	4	27	3	10	9	13	1	0	28	0	2	5	13	8	8	28	8	3	9
12	5	6	27	4	0	11	13	1	2	28	0	4	7	13	8	10	28	8	5	11
12	5	8	27	4	3	1	13	1	4	28	0	6	9	13	9	0	28	8	7	11
12	5	10	27	4	5	3	13	1	6	28	0	8	11	13	9	2	28	8	10	1
12	6	0	27	4	7	7	13	1	8	28	0	11	1	13	9	4	28	9	0	1
12	6	2	27	4	9	8	13	1	10	28	1	1	2	13	9	6	28	9	2	3
12	6	4	27	4	11	10	13	2	0	28	1	3	3	13	9	8	28	9	4	3
12	6	6	27	5	2	0	13	2	2	28	1	5	5	13	9	10	28	9	6	5
12	6	8	27	5	4	2	13	2	4	28	1	7	7	13	10	0	28	9	8	5
12	6	10	27	5	6	6	13	2	6	28	1	9	8	13	10	2	28	9	10	7
12	7	0	27	5	8	8	13	2	8	28	1	11	10	13	10	4	28	10	0	8
12	7	2	27	5	10	10	13	2	10	28	2	1	11	13	10	6	28	10	2	9
12	7	4	27	6	1	0	13	3	0	28	2	4	0	13	10	8	28	10	4	10
12	7	6	27	6	3	2	13	3	2	28	2	6	2	13	10	10	28	10	6	10
12	7	8	27	6	5	3	13	3	4	28	2	8	4	13	11	0	28	10	9	0
12	7	10	27	6	7	5	13	3	6	28	2	10	6	13	11	2	28	10	11	0
12	8	0	27	6	9	9	13	3	8	28	3	0	6	13	11	4	28	11	1	2
12	8	2	27	6	11	11	13	3	10	28	3	2	8	13	11	6	28	11	3	2
12	8	4	27	7	2	1	13	4	0	28	3	4	10	13	11	8	28	11	5	2
12	8	6	27	7	4	3	13	4	2	28	3	6	10	13	11	10	28	11	7	4
12	8	8	27	7	6	5	13	4	4	28	3	9	0	14	0	0	28	11	9	4
12	8	10	27	7	8	7	13	4	6	28	3	11	2	14	0	2	28	11	11	6
12	9	0	27	7	10	9	13	4	8	28	4	1	4	14	0	4	29	0	1	7
12	9	2	27	8	0	10	13	4	10	28	4	3	4	14	0	6	29	0	3	7
12	9	4	27	8	3	0	13	5	0	28	4	5	6	14	0	8	29	0	5	9
12	9	6	27	8	5	2	13	5	2	28	4	7	8	14	0	10	29	0	7	9
12	9	8	27	8	7	4	13	5	4	28	4	9	8	14	1	0	29	0	11	11

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.				CHUTE.			VITESSE.			
pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds	p°.	lig.	points.	pieds.	p°.	lig.	pieds.	p°.	lig.	points.
14	1	4	29	1	1	11	14	5	0	29	4	11	0	14	8	8	29	8	7	8
14	1	6	29	1	3	11	14	5	2	29	5	1	2	14	8	10	29	8	9	8
14	1	8	29	1	6	1	14	5	4	29	5	3	2	14	9	0	29	8	11	8
14	1	10	29	1	8	1	14	5	6	29	5	5	2	14	9	2	29	9	1	8
14	2	0	29	1	10	2	14	5	8	29	5	7	2	14	9	4	29	9	3	8
14	2	2	29	2	0	4	14	5	10	29	5	9	3	14	9	6	29	9	5	9
14	2	4	29	2	2	4	14	6	0	29	5	11	3	14	9	8	29	9	7	9
14	2	6	29	2	4	4	14	6	2	29	6	1	3	14	9	10	29	9	9	9
14	2	8	29	2	6	4	14	6	4	29	6	3	5	14	10	0	29	9	11	9
14	2	10	29	2	8	6	14	6	6	29	6	5	5	14	10	2	29	10	1	9
14	3	0	29	2	10	6	14	6	8	29	6	7	5	14	10	4	29	10	3	10
14	3	2	29	3	0	6	14	6	10	29	6	9	6	14	10	6	29	10	5	10
14	3	4	29	3	2	7	14	7	0	29	6	11	6	14	10	8	29	10	7	10
14	3	6	29	3	4	9	14	7	2	29	7	1	6	14	10	10	29	10	9	10
14	3	8	29	3	6	9	14	7	4	29	7	3	6	14	11	0	29	10	11	10
14	3	10	29	3	8	9	14	7	6	29	7	5	6	14	11	2	29	11	1	11
14	4	0	29	3	10	9	14	7	8	29	7	7	7	14	11	4	29	11	3	11
14	4	2	29	4	0	9	14	7	10	29	7	9	7	14	11	6	29	11	5	11
14	4	4	29	4	2	11	14	8	0	29	7	11	7	14	11	8	29	11	7	11
14	4	6	29	4	4	11	14	8	2	29	8	1	7	14	11	10	29	11	9	11
14	4	8	29	4	7	0	14	8	4	29	8	3	7	15	0	0	30	0	0	0
14	4	10	29	4	9	0	14	8	6	29	8	5	7							

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TABLE DES HAUTEURS

CORRESPONDANTES A DIFFÉRENTES VITESSES EXPRIMÉES EN MÈTRES.

VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.
mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.
0,01	0,00001	0,40	0,00816	0,79	0,0318	1,18	0,0710
0,02	0,00002	0,41	0,0086	0,80	0,0326	1,19	0,0722
0,03	0,00005	0,42	0,0090	0,81	0,0334	1,20	0,0734
0,04	0,00009	0,43	0,0094	0,82	0,0343	1,21	0,0746
0,05	0,00013	0,44	0,0098	0,83	0,0351	1,22	0,0758
0,06	0,00019	0,45	0,0103	0,84	0,0360	1,23	0,0771
0,07	0,00026	0,46	0,0108	0,85	0,0368	1,24	0,0783
0,08	0,00034	0,47	0,0112	0,86	0,0377	1,25	0,0797
0,09	0,00043	0,48	0,0117	0,87	0,0386	1,26	0,0809
0,10	0,00051	0,49	0,0122	0,88	0,0395	1,27	0,0822
0,11	0,00062	0,50	0,0127	0,89	0,0404	1,28	0,0835
0,12	0,00074	0,51	0,0132	0,90	0,0413	1,29	0,0848
0,13	0 00087	0,52	0,0138	0,91	0,0422	1,30	0,0861
0,14	0,00101	0,53	0,0143	0,92	0,0431	1,31	0,0875
0,15	0,00115	0,54	0,0148	0,93	0,0441	1,32	0,0888
0,16	0,00131	0,55	0,0154	0,94	0,0450	1,33	0,0901
0,17	0,00148	0,56	0,0160	0,95	0,0460	1,34	0,0915
0,18	0,00166	0,57	0,0165	0,96	0,0470	1,35	0,0929
0,19	0,00185	0,58	0,0171	0,97	0,0480	1,36	0,0943
0,20	0,00204	0,59	0,0177	0,98	0,0490	1,37	0,0957
0,21	0,00225	0,60	0,0185	0,99	0,0500	1,38	0,0970
0,22	0,00247	0,61	0,0190	1,00	0,0510	1,39	0,0984
0,23	0,00270	0,62	0,0196	1,01	0,0520	1,40	0,0999
0,24	0,00294	0,63	0,0202	1,02	0,0530	1,41	0,1013
0,25	0,00319	0,64	0,0209	1,03	0,0541	1,42	0,1028
0,26	0,00345	0,65	0,0215	1,04	0,0551	1,43	0,1042
0,27	0,00372	0,66	0,0222	1,05	0,0562	1,44	0,1057
0,28	0,00400	0,67	0,0229	1,06	0,0573	1,45	0,1072
0,29	0,00429	0,68	0,0236	1,07	0,0584	1,46	0,1086
0,30	0,00459	0,69	0,0243	1,08	0,0595	1,47	0,1101
0,31	0,00490	0,70	0,0250	1,09	0,0606	1,48	0,1116
0,32	0,00522	0,71	0,0257	1,10	0,0617	1,49	0,1131
0,33	0,00555	0,72	0,0264	1,11	0,0628	1,50	0,1147
0,34	0,00589	0,73	0,0272	1,12	0,0639	1,51	0,1162
0,35	0,00624	0,74	0,0279	1,13	0,0651	1,52	0,1177
0,36	0,00660	0,75	0,0287	1,14	0,0662	1,53	0,1193
0,37	0,00697	0,76	0,0295	1,15	0,0674	1,54	0,1209
0,38	0,00735	0,77	0,0302	1,16	0,0686	1,55	0,1225
0,39	0,00775	0,78	0,0310	1,17	0,0698	1,56	0,1241

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.
mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.
1,57	0,1257	2,02	0,2080	2,47	0,3110	2,92	0,4346
1,58	0,1273	2,03	0,2100	2,48	0,3135	2,93	0,4376
1,59	0,1289	2,04	0,2121	2,49	0,3160	2,94	0,4406
1,60	0,1305	2,05	0,2142	2,50	0,3186	2,95	0,4436
1,61	0,1321	2,06	0,2163	2,51	0,3211	2,96	0,4466
1,62	0,1337	2,07	0,2184	2,52	0,3237	2,97	0,4496
1,63	0,1354	2,08	0,2205	2,53	0,3263	2,98	0,4526
1,64	0,1371	2,09	0,2226	2,54	0,3289	2,99	0,4557
1,65	0,1388	2,10	0,2248	2,55	0,3315	3,00	0,4588
1,66	0,1405	2,11	0,2269	2,56	0,3341	3,01	0,4618
1,67	0,1422	2,12	0,2291	2,57	0,3367	3,02	0,4649
1,68	0,1439	2,13	0,2313	2,58	0,3393	3,03	0,4680
1,69	0,1456	2,14	0,2334	2,59	0,3419	3,04	0,4711
1,70	0,1473	2,15	0,2356	2,60	0,3446	3,05	0,4742
1,71	0,1490	2,16	0,2378	2,61	0,3472	3,06	0,4773
1,72	0,1508	2,17	0,2400	2,62	0,3699	3,07	0,4804
1,73	0,1525	2,18	0,2422	2,63	0,3526	3,08	0,4835
1,74	0,1543	2,19	0,2444	2,64	0,3553	3,09	0,4866
1,75	0,1561	2,20	0,2467	2,65	0,3580	3,10	0,4899
1,76	0,1579	2,21	0,2490	2,66	0,3607	3,11	0,4930
1,77	0,1597	2,22	0,2512	2,67	0,3634	3,12	0,4962
1,78	0,1615	2,23	0,2535	2,68	0,3661	3,13	0,4994
1,79	0,1633	2,24	0,2557	2,69	0,3688	3,14	0,5026
1,80	0,1651	2,25	0,2580	2,70	0,3716	3,15	0,5058
1,81	0,1670	2,26	0,2603	2,71	0,3744	3,16	0,5090
1,82	0,1680	2,27	0,2626	2,72	0,3771	3,17	0,5122
1,83	0,1707	2,28	0,2649	2,73	0,3799	3,18	0,5155
1,84	0,1726	2,29	0,2673	2,74	0,3827	3,19	0,5187
1,85	0,1745	2,30	0,2696	2,75	0,3855	3,20	0,5220
1,86	0,1763	2,31	0,2720	2,76	0,3883	3,21	0,5252
1,87	0,1782	2,32	0,2743	2,77	0,3911	3,22	0,5285
1,88	0,1802	2,33	0,2767	2,78	0,3939	3,23	0,5318
1,89	0,1820	2,34	0,2791	2,79	0,3967	3,24	0,5351
1,90	0,1849	2,35	0,2815	2,80	0,3996	3,25	0,5384
1,91	0,1859	2,36	0,2839	2,81	0,4025	3,26	0,5417
1,92	0,1878	2,37	0,2863	2,82	0,4054	3,27	0,5450
1,93	0,1898	2,38	0,2887	2,83	0,4082	3,28	0,5484
1,94	0,1918	2,39	0,2911	2,84	0,4111	3,29	0,5517
1,95	0,1938	2,40	0,2936	2,85	0,4140	3,30	0,5551
1,96	0,1958	2,41	0,2960	2,86	0,4169	3,31	0,5585
1,97	0,1978	2,42	0,2985	2,87	0,4198	3,32	0,5618
1,98	0,1998	2,43	0,3010	2,88	0,4228	3,33	0,5652
1,99	0,2018	2,44	0,3034	2,89	0,4257	3,34	0,5686
2,00	0,2039	2,45	0,3060	2,90	0,4287	3,35	0,5721
2,01	0,2059	2,46	0,3085	2,91	0,4316	3,36	0,5755

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.
mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.
3,37	0,5789	3,82	0,7438	4,27	0,9294	4,72	1,1356
3,38	0,5823	3,83	0,7478	4,28	0,9337	4,73	1,1404
3,39	0,5858	3,84	0,7517	4,29	0,9381	4,74	1,1452
3,40	0,5893	3,85	0,7556	4,30	0,9425	4,75	1,1501
3,41	0,5927	3,86	0,7595	4,31	0,9469	4,76	1,1549
3,42	0,5962	3,87	0,7634	4,32	0,9513	4,77	1,1598
3,43	0,5997	3,88	0,7674	4,33	0,9557	4,78	1,1647
3,44	0,6032	3,89	0,7713	4,34	0,9601	4,79	1,1695
3,45	0,6067	3,90	0,7753	4,35	0,9646	4,80	1,1744
3,46	0,6102	3,91	0,7763	4,36	0,9690	4,81	1,1793
3,47	0,6138	3,92	0,7803	4,37	0,9734	4,82	1,1842
3,48	0,6173	3,93	0,7843	4,38	0,9779	4,83	1,1891
3,49	0,6209	3,94	0,7883	4,39	0,9823	4,84	1,1941
3,50	0,6244	3,95	0,7953	4,40	0,9867	4,85	1,1990
3,51	0,6280	3,96	0,7993	4,41	0,9913	4,86	1,2040
3,52	0,6316	3,97	0,8034	4,42	0,9958	4,87	1,2090
3,53	0,6352	3,98	0,8074	4,43	1,0003	4,88	1,2139
3,54	0,6388	3,99	0,8115	4,44	1,0048	4,89	1,2189
3,55	0,6424	4,00	0,8156	4,45	1,0094	4,90	1,2239
3,56	0,6460	4,01	0,8197	4,46	1,0140	4,91	1,2289
3,57	0,6497	4,02	0,8238	4,47	1,0185	4,92	1,2339
3,58	0,6533	4,03	0,8279	4,48	1,0231	4,93	1,2389
3,59	0,6569	4,04	0,8320	4,49	1,0276	4,94	1,2440
3,60	0,6606	4,05	0,8361	4,50	1,0322	4,95	1,2490
3,61	0,6643	4,06	0,8402	4,51	1,0368	4,96	1,2541
3,62	0,6680	4,07	0,8444	4,52	1,0414	4,97	1,2591
3,63	0,6717	4,08	0,8485	4,53	1,0460	4,98	1,2642
3,64	0,6754	4,09	0,8527	4,54	1,0507	4,99	1,2693
3,65	0,6791	4,10	0,8569	4,55	1,0553	5,00	1,2744
3,66	0,6828	4,11	0,8611	4,56	1,0599	5,01	1,2795
3,67	0,6866	4,12	0,8653	4,57	1,0646	5,02	1,2846
3,68	0,6903	4,13	0,8695	4,58	1,0692	5,03	1,2897
3,69	0,6940	4,14	0,8737	4,59	1,0739	5,04	1,2948
3,70	0,6978	4,15	0,8779	4,60	1,0786	5,05	1,3000
3,71	0,7016	4,16	0,8821	4,61	1,0833	5,06	1,3051
3,72	0,7054	4,17	0,8865	4,62	1,0880	5,07	1,3103
3,73	0,7092	4,18	0,8906	4,63	1,0927	5,08	1,3155
3,74	0,7130	4,19	0,8949	4,64	1,0974	5,09	1,3206
3,75	0,7168	4,20	0,8992	4,65	1,1022	5,10	1,3258
3,76	0,7206	4,21	0,9035	4,66	1,1069	5,11	1,3311
3,77	0,7245	4,22	0,9078	4,67	1,1117	5,12	1,3363
3,78	0,7283	4,23	0,9121	4,68	1,1164	5,13	1,3415
3,79	0,7322	4,24	0,9164	4,69	1,1212	5,14	1,3467
3,80	0,7361	4,25	0,9207	4,70	1,1260	5,15	1,3520
3,81	0,7400	4,26	0,9251	4,71	1,1308	5,16	1,3572

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.
mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.
5,17	1,3625	5,62	1,6100	6,07	1,8782	6,52	2,1670
5,18	1,3678	5,63	1,6157	6,08	1,8843	6,53	2,1736
5,19	1,3730	5,64	1,6215	6,09	1,8905	6,54	2,1803
5,20	1,3784	5,65	1,6272	6,10	1,8968	6,55	2,1869
5,21	1,3837	5,66	1,6330	6,11	1,9030	6,56	2,1936
5,22	1,3890	5,67	1,6388	6,12	1,9092	6,57	2,2003
5,23	1,3943	5,68	1,6446	6,13	1,9155	6,58	2,2070
5,24	1,3996	5,69	1,6503	6,14	1,9217	6,59	2,2137
5,25	1,4050	5,70	1,6562	6,15	1,9280	6,60	2,2205
5,26	1,4103	5,71	1,6620	6,16	1,9343	6,61	2,2272
5,27	1,4157	5,72	1,6678	6,17	1,9405	6,62	2,2339
5,28	1,4211	5,73	1,6736	6,18	1,9468	6,63	2,2407
5,29	1,4265	5,74	1,6795	6,19	1,9531	6,64	2,2474
5,30	1,4319	5,75	1,6854	6,20	1,9595	6,65	2,2542
5,31	1,4373	5,76	1,6912	6,21	1,9658	6,66	2,2610
5,32	1,4427	5,77	1,6971	6,22	1,9721	6,67	2,2678
5,33	1,4481	5,78	1,7030	6,23	1,9785	6,68	2,2746
5,34	1,4535	5,79	1,7089	6,24	1,9848	6,69	2,2814
5,35	1,4590	5,80	1,7148	6,25	1,9912	6,70	2,2883
5,36	1,4645	5,81	1,7207	6,26	1,9976	6,71	2,2951
5,37	1,4699	5,82	1,7266	6,27	2,0039	6,72	2,3019
5,38	1,4754	5,83	1,7326	6,28	2,0103	6,73	2,3088
5,39	1,4809	5,84	1,7385	6,29	2,0167	6,74	2,3156
5,40	1,4864	5,85	1,7445	6,30	2,0232	6,75	2,3225
5,41	1,4919	5,86	1,7505	6,31	2,0296	6,76	2,3294
5,42	1,4975	5,87	1,7564	6,32	2,0361	6,77	2,3363
5,43	1,5030	5,88	1,7624	6,33	2,0425	6,78	2,3432
5,44	1,5085	5,89	1,7684	6,34	2,0490	6,79	2,3501
5,45	1,5141	5,90	1,7744	6,35	2,0554	6,80	2,3571
5,46	1,5196	5,91	1,7805	6,36	2,0619	6,81	2,3640
5,47	1,5252	5,92	1,7865	6,37	2,0684	6,82	2,3709
5,48	1,5308	5,93	1,7925	6,38	2,0749	6,83	2,3779
5,49	1,5364	5,94	1,7986	6,39	2,0814	6,84	2,3849
5,50	1,5420	5,95	1,8046	6,40	2,0879	6,85	2,3919
5,51	1,5476	5,96	1,8107	6,41	2,0945	6,86	2,3989
5,52	1,5532	5,97	1,8168	6,42	2,1010	6,87	2,4059
5,53	1,5588	5,98	1,8229	6,43	2,1075	6,88	2,4129
5,54	1,5645	5,99	1,8290	6,44	2,1141	6,89	2,4199
5,55	1,5701	6,00	1,8351	6,45	2,1207	6,90	2,4269
5,56	1,5758	6,01	1,8412	6,46	2,1273	6,91	2,4339
5,57	1,5815	6,02	1,8473	6,47	2,1338	6,92	2,4410
5,58	1,5865	6,03	1,8535	6,48	2,1404	6,93	2,4481
5,59	1,5929	6,04	1,8596	6,49	2,1471	6,94	2,4551
5,60	1,5986	6,05	1,8658	6,50	2,1537	6,95	2,4622
5,61	1,6043	6,06	1,8720	6,51	2,1603	6,96	2,4693

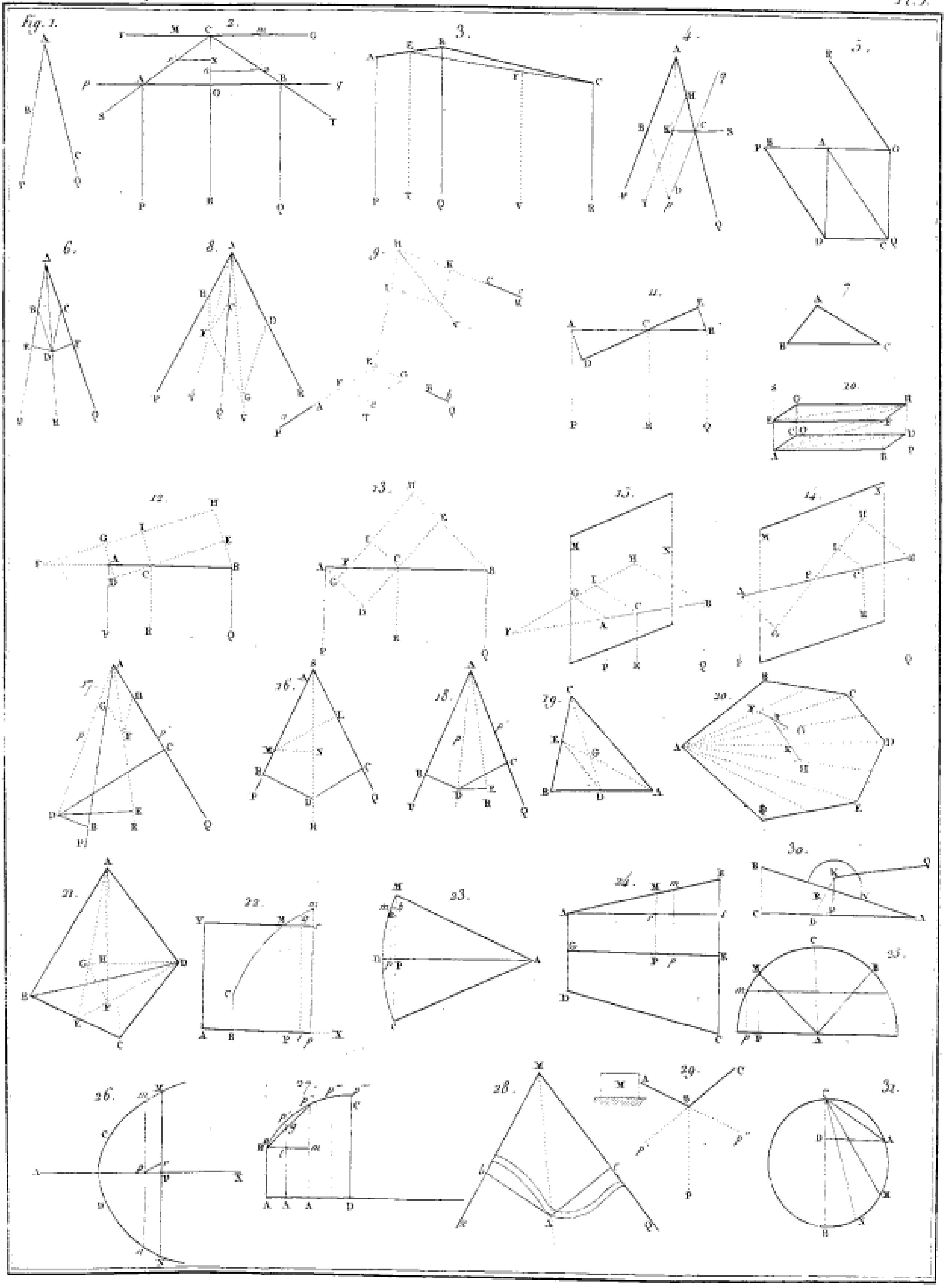
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.
mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.
6,97	2,4764	7,42	2,8063	7,87	3,1572	8,32	3,5286
6,98	2,4835	7,43	2,8140	7,88	3,1652	8,33	3,5371
6,99	2,4906	7,44	2,8216	7,89	3,1733	8,34	3,5455
7,00	2,4978	7,45	2,8292	7,90	3,1813	8,35	3,5541
7,01	2,5049	7,46	2,8368	7,91	3,1894	8,36	3,5626
7,02	2,5121	7,47	2,8444	7,92	3,1974	8,37	3,5711
7,03	2,5192	7,48	2,8521	7,93	3,2055	8,38	3,5796
7,04	2,5264	7,49	2,8597	7,94	3,2136	8,39	3,5882
7,05	2,5336	7,50	2,8673	7,95	3,2217	8,40	3,5968
7,06	2,5408	7,51	2,8750	7,96	3,2298	8,41	3,6053
7,07	2,5480	7,52	2,8826	7,97	3,2380	8,42	3,6139
7,08	2,5552	7,53	2,8903	7,98	3,2461	8,43	3,6225
7,09	2,5624	7,54	2,8980	7,99	3,2542	8,44	3,6311
7,10	2,5696	7,55	2,9057	8,00	3,2624	8,45	3,6397
7,11	2,5769	7,56	2,9134	8,01	3,2705	8,46	3,6483
7,12	2,5841	7,57	2,9211	8,02	3,2787	8,47	3,6570
7,13	2,5914	7,58	2,9288	8,03	3,2869	8,48	3,6656
7,14	2,5987	7,59	2,9365	8,04	3,2951	8,49	3,6743
7,15	2,6060	7,60	2,9443	8,05	3,3033	8,50	3,6829
7,16	2,6132	7,61	2,9520	8,06	3,3115	8,51	3,6916
7,17	2,6205	7,62	2,9598	8,07	3,3197	8,52	3,7003
7,18	2,6279	7,63	2,9676	8,08	3,3280	8,53	3,7090
7,19	2,6352	7,64	2,9754	8,09	3,3362	8,54	3,7177
7,20	2,6425	7,65	2,9832	8,10	3,3445	8,55	3,7264
7,21	2,6499	7,66	2,9910	8,11	3,3527	8,56	3,7351
7,22	2,6572	7,67	2,9988	8,12	3,3610	8,57	3,7438
7,23	2,6646	7,68	3,0066	8,13	3,3693	8,58	3,7526
7,24	2,6720	7,69	3,0144	8,14	3,3776	8,59	3,7613
7,25	2,6794	7,70	3,0223	8,15	3,3859	8,60	3,7701
7,26	2,6868	7,71	3,0301	8,16	3,3942	8,61	3,7789
7,27	2,6942	7,72	3,0380	8,17	3,4025	8,62	3,7876
7,28	2,7016	7,73	3,0459	8,18	3,4108	8,63	3,7964
7,29	2,7090	7,74	3,0538	8,19	3,4192	8,64	3,8052
7,30	2,7164	7,75	3,0617	8,20	3,4275	8,65	3,8141
7,31	2,7239	7,76	3,0696	8,21	3,4359	8,66	3,8229
7,32	2,7313	7,77	3,0775	8,22	3,4443	8,67	3,8317
7,33	2,7388	7,78	3,0854	8,23	3,4526	8,68	3,8405
7,34	2,7463	7,79	3,0933	8,24	3,4610	8,69	3,8494
7,35	2,7538	7,80	3,1013	8,25	3,4695	8,70	3,8583
7,36	2,7613	7,81	3,1092	8,26	3,4779	8,71	3,8671
7,37	2,7688	7,82	3,1172	8,27	3,4863	8,72	5,8760
7,38	2,7763	7,83	3,1252	8,28	3,4947	8,73	3,8849
7,39	2,7838	7,84	3,1332	8,29	3,5032	8,74	3,8938
7,40	2,7914	7,85	3,1412	8,30	3,5116	8,75	3,9028
7,41	2,7989	7,86	3,1492	8,31	3,5201	8,76	3,9117

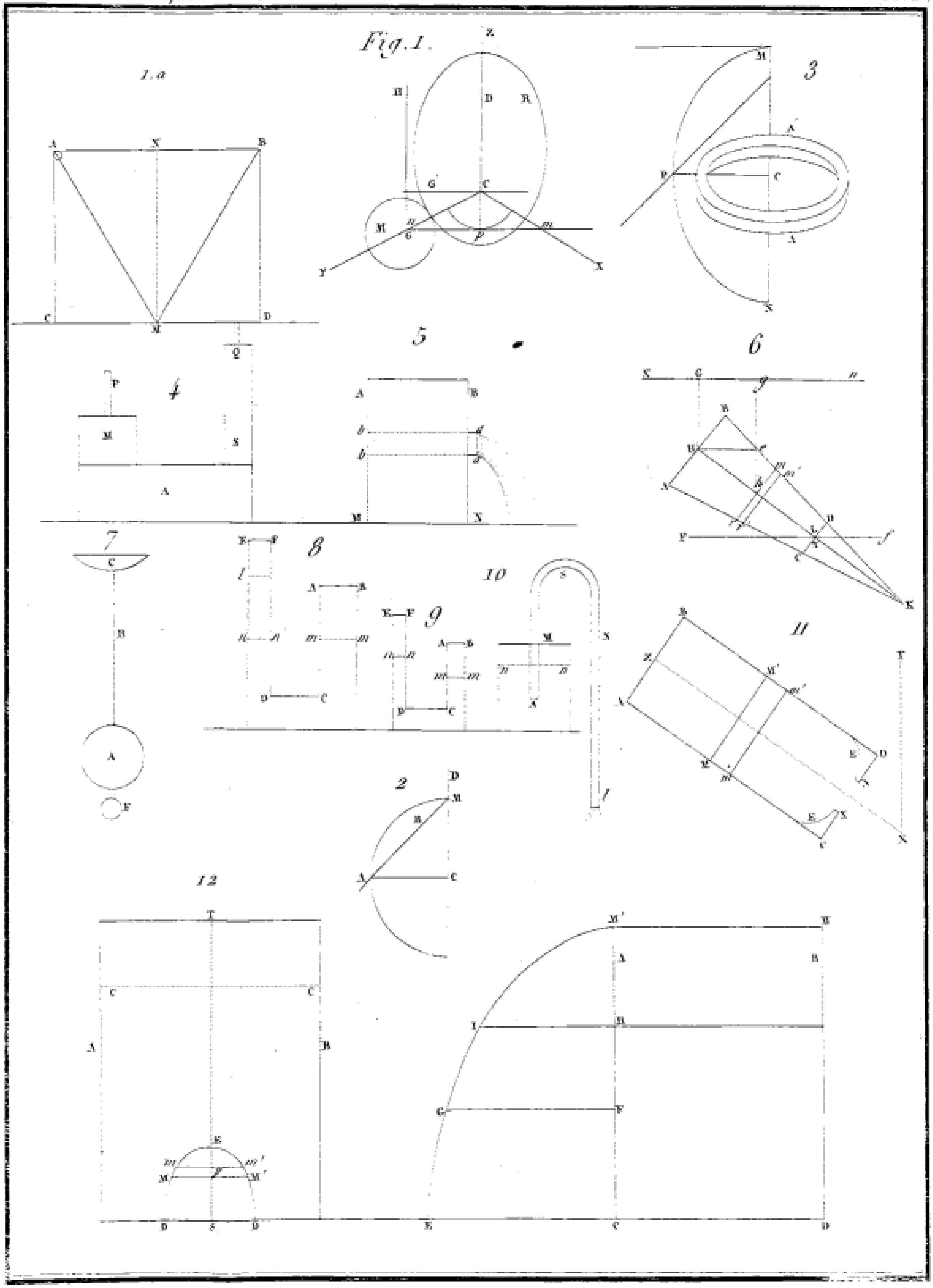
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.	VITESSES.	HAUTEURS des CHUTES.
mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.
8,77	3,9206	9,08	4,2017	9,39	4,4945	9,70	4,7962
8,78	3,9295	9,09	4,2109	9,40	4,5041	9,71	4,8061
8,79	3,9385	9,10	4,2212	9,41	4,5137	9,72	4,8160
8,80	3,9475	9,11	4,2305	9,42	4,5233	9,73	4,8259
8,81	3,9565	9,12	4,2398	9,43	4,5329	9,74	4,8358
8,82	3,9654	9,13	4,2491	9,44	4,5425	9,75	4,8458
8,83	3,9744	9,14	4,2584	9,45	4,5522	9,76	4,8557
8,84	3,9834	9,15	4,2677	9,46	4,5618	9,77	4,8657
8,85	3,9925	9,16	4,2771	9,47	4,5715	9,78	4,8756
8,86	4,0015	9,17	4,2864	9,48	4,5811	9,79	4,8856
8,87	4,0105	9,18	4,2958	9,49	4,5908	9,80	4,8956
8,88	4,0196	9,19	4,3051	9,50	4,6005	9,81	4,9056
8,89	4,0286	9,20	4,3145	9,51	4,6102	9,82	4,9156
8,90	4,0377	9,21	4,3239	9,52	4,6199	9,83	4,9256
8,91	4,0468	9,22	4,3323	9,53	4,6296	9,84	4,9356
8,92	4,0559	9,23	4,3417	9,54	4,6393	9,85	4,9457
8,93	4,0650	9,24	4,3511	9,55	4,6490	9,86	4,9557
8,94	4,0741	9,25	4,3615	9,56	4,6588	9,87	4,9658
8,95	4,0832	9,26	4,3710	9,57	4,6685	9,88	4,9758
8,96	4,0923	9,27	4,3804	9,58	4,6783	9,89	4,9859
8,97	4,1015	9,28	4,3898	9,59	4,6880	9,90	4,9960
8,98	4,1106	9,29	4,3993	9,60	4,6978	9,91	5,0061
8,99	4,1198	9,30	4,4088	9,61	4,7076	9,92	5,0162
9,00	4,1290	9,31	4,4183	9,62	4,7174	9,93	5,0264
9,01	4,1381	9,32	4,4278	9,63	4,7272	9,94	5,0365
9,02	4,1473	9,33	4,4373	9,64	4,7370	9,95	5,0466
9,03	4,1565	9,34	4,4468	9,65	4,7469	9,96	5,0568
9,04	4,1657	9,35	4,4563	9,66	4,7567	9,97	5,0668
9,05	4,1750	9,36	4,4659	9,67	4,7666	9,98	5,0770
9,06	4,1832	9,37	4,4754	9,68	4,7764	9,99	5,0872
9,07	4,1924	9,38	4,4850	9,69	4,7863	1,000	5,0975

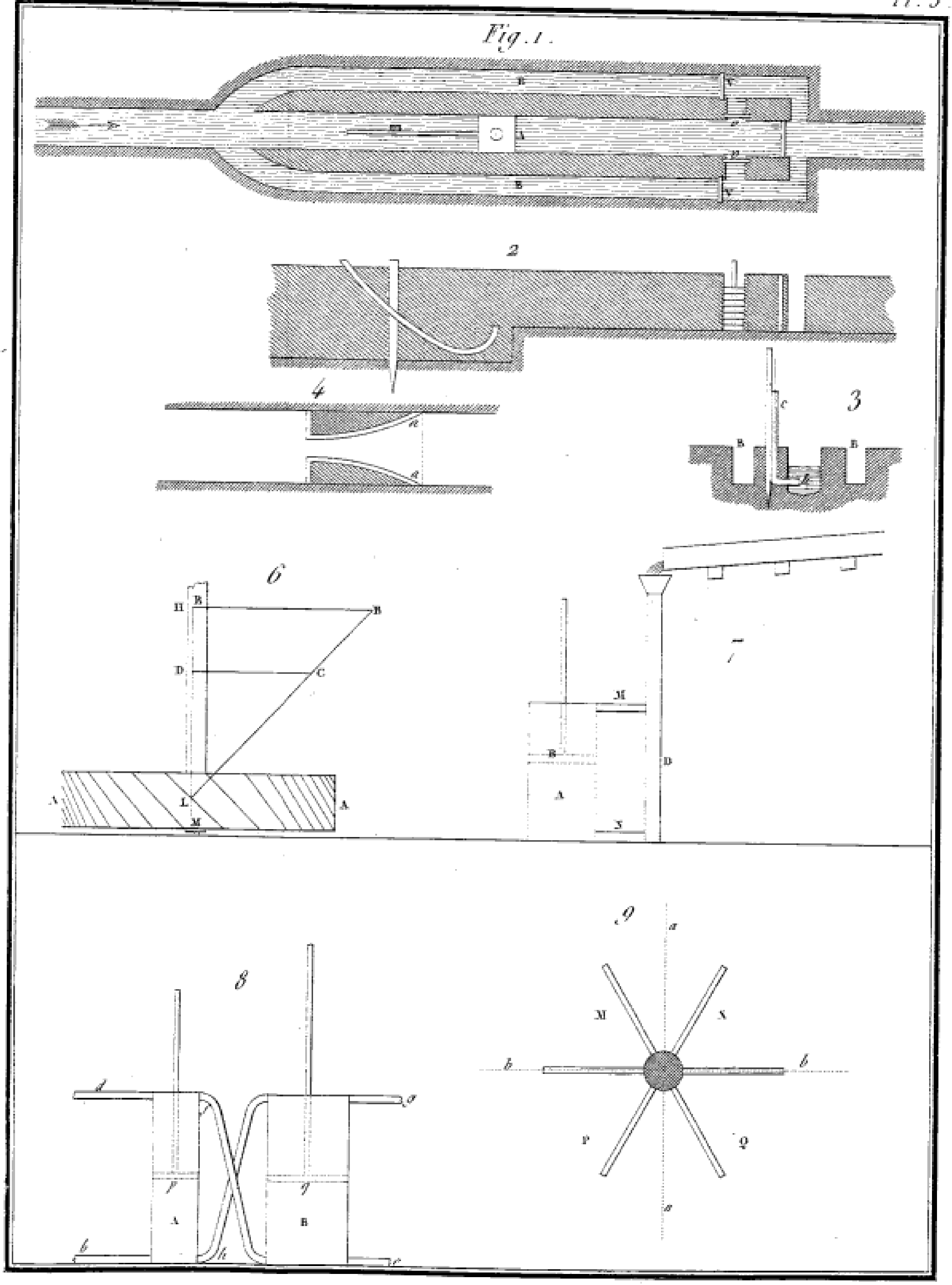
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



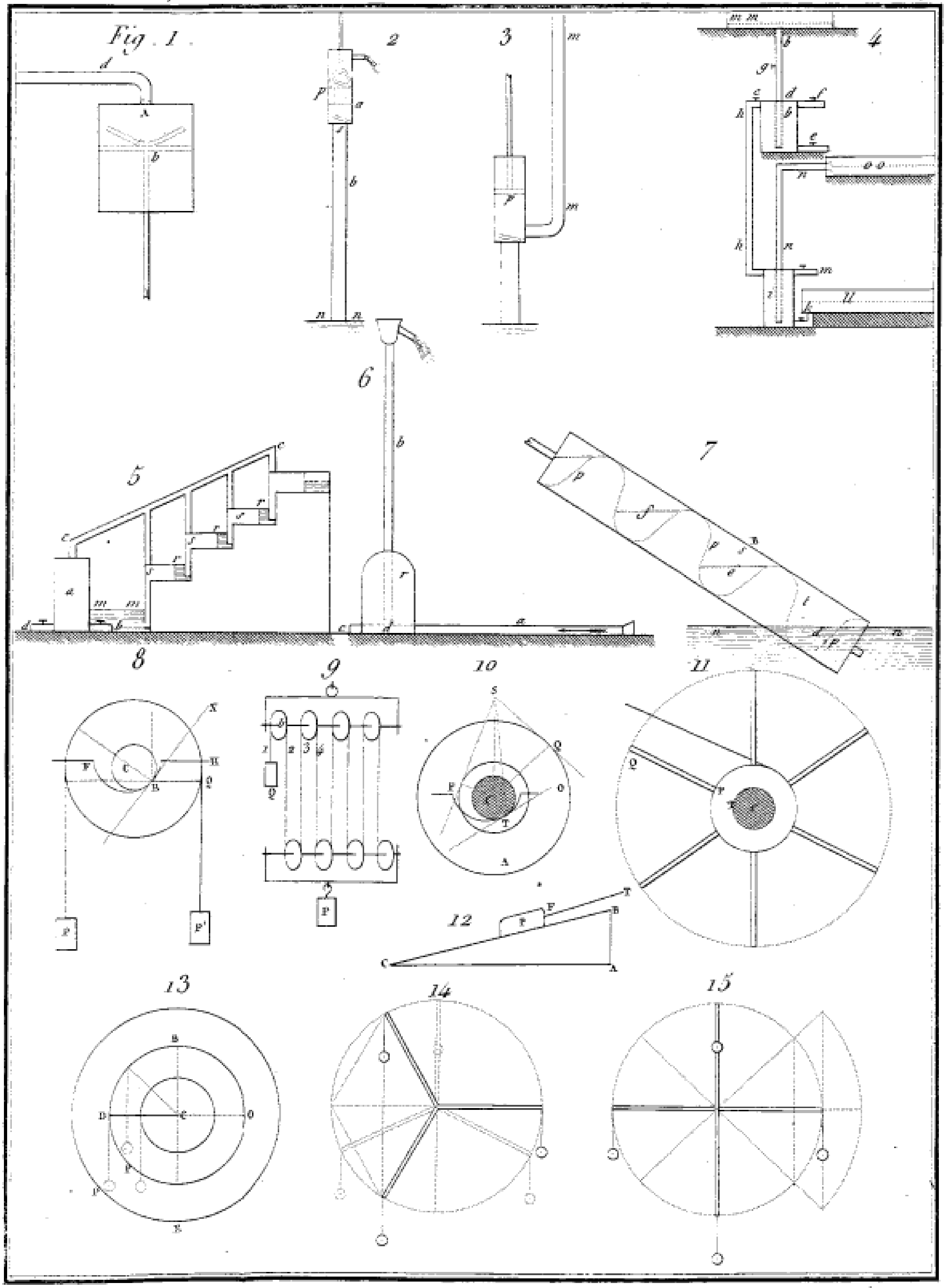
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



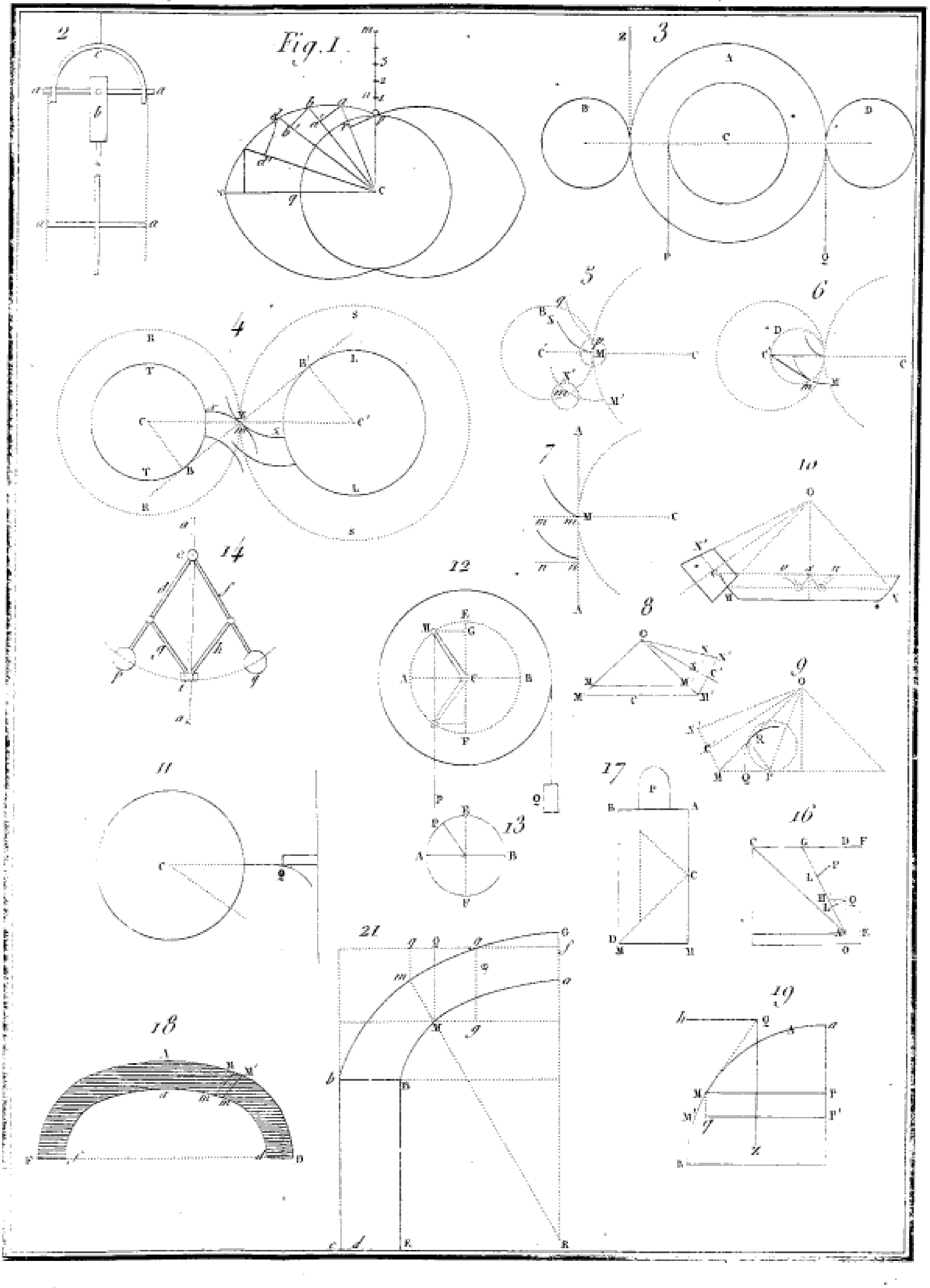
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au [Cnam](http://www.cnam.fr) et à ses partenaires