Conditions d’utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- Le Conservatoire numérique communément appelé le Cnum constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d’œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s’inscrit dans le cadre de la loi nº 78-753 du 17 juillet 1978 :

- **la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue (Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - http://cnum.cnam.fr)**
- **la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l’objet d’une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.**

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- **les reproductions de documents protégés par le droit d’auteur, uniquement consultables dans l’enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l’autorisation préalable du titulaire des droits.**

4- Pour obtenir la reproduction numérique d’un document du Cnum en haute définition, contacter cnum(at)cnam.fr

5- L’utilisateur s’engage à respecter les présentes conditions d’utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d’une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d’utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

Notice de la Grande monographie	
Auteur(s) ou collectivité(s)	Douliot, Jean-Paul
Auteur(s)	Douliot, Jean-Paul (1788-1834)
Titre	Cours élémentaire, théorique et pratique de construction
Adresse	Paris : [Jean-Paul Douliot] : Carilian-Goeury, 1826-1828
Collation	5 vol. ; 26 cm
Cote	CNAM-BIB 4 Ko 9
Sujet(s)	Constructions, Théorie des

Notice du Volume	
Auteur(s) volume	Douliot, Jean-Paul (1788-1834)
Titre	Cours élémentaire, théorique et pratique de construction
Volume	Première partie. Mathématiques
Adresse	Paris : [Jean-Paul Douliot], Carilian Goeury, 1826
Collation	1 vol. (548 p.-[16 pl. dépl.]) ; 26 cm
Cote	CNAM-BIB 4 Ko 9 (1)
Sujet(s)	Constructions, Théorie des ; Mathématiques de l'ingénieur -- France -- 19e siècle
Thématique(s)	Construction
Typologie	Ouvrage
Langue	Français
Date de mise en ligne	13/06/2012
Date de génération du PDF	08/07/2020
Permalien	http://cnum.cnam.fr/redir?4KO9.1

COURS ÉLÉMENTAIRE,

THÉORIQUE ET PRATIQUE,

DE CONSTRUCTION.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

DE L'IMPRIMERIE DE RICHOMME,

RUE SAINT-JACQUES, N°. 67.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4° K 69

COURS ÉLÉMENTAIRE,

THÉORIQUE ET PRATIQUE,

DE

CONSTRUCTION.

PAR J. P. DOULIOT,

PROFESSEUR D'ARCHITECTURE ET DE CONSTRUCTION A L'ÉCOLE ROYALE GRATUITE DE MATHÉMATIQUES ET DE DESSIN EN FAVEUR DES ARTS MÉCANIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

MATHÉMATIQUES.

A PARIS,

CHEZ { L'AUTEUR, rue Saint-Jacques, N°. 67.
CARILIAN-GŒURY, Libraire des Corps royaux des Ponts et Chaussées et des Mines, quai des Augustins, N°. 41.

1826.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

INTRODUCTION.

On divise l'Architecture en quatre branches. La première est celle qui a pour objet la composition et l'exécution des maisons particulières, des palais, des temples, et généralement de tous les édifices concernant la commodité et l'embellissement des villes; l'objet de la seconde est la construction des grandes routes, des ponts, des canaux, des écluses, et de tous les ouvrages relatifs à la navigation intérieure; celui de la troisième est la construction des fortifications, des casernes, des arsenaux, et de tous les travaux nécessaires à l'administration militaire, et celui de la quatrième est la construction des ports de mer, des arsenaux maritimes, des vaisseaux, des bassins de construction, etc.

Chaque branche de l'architecture comprend deux parties : la composition et la construction.

La composition consiste dans l'arrangement, la disposition, les proportions et la décoration des parties constitutives d'un édifice ou monument quelconque, conformément à sa destination et aux règles établies par l'usage et la théorie. L'esprit, le génie de la composition, diffèrent dans les quatre branches de l'architecture, et supposent des connaissances particulières, spéciales pour satisfaire aux conditions de convenance dans les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

genres d'édifices ou monumens qui sont l'objet de chaque branche.

Quant à la construction, c'est une science qui sert de base et de lien à toutes les branches de l'architecture, et a pour objet la théorie et le perfectionnement des arts qui concourent à l'exécution de toutes les espèces de monumens.

C'est cette partie générale de l'architecture qui va être le sujet de ce cours, ainsi que le titre l'annonce.

Nous diviserons cette science en six parties principales : la première, qui servira de base à toutes les autres, sera purement mathématique, et comprendra 1°. l'Arithmétique, 2°. les élémens d'Algèbre, jusques et y compris les équations des degrés supérieurs, qui se résolvent à la manière de celles du second, et les logarithmes, et 3°. la Géométrie plane et celle à trois dimensions, où il sera traité des courbes et des surfaces du second ordre, ainsi que de la trigonométrie rectiligne.

La seconde partie traitera des lois de l'équilibre et du mouvement, tant des corps solides que des liquides; de la théorie de la résistance des solides; des lois de la stabilité, etc.

La troisième aura pour objet toutes les espèces d'ouvrages de charpente, tels que les pans de bois, les planchers, les combles, les voûtes et les escaliers en bois, les échafaudages, les étayemens, les machines pour transporter et élever de grands fardeaux, le pilotage, les ponts, etc.

La quatrième partie traitera de tout ce qui est relatif à la maçonnerie, c'est-à-dire des constructions en terre, en briques, en moëlons, etc.; quant aux constructions en pierre de taille, nous ne nous en occuperons que sous le rapport de la théorie, attendu que notre Traité spécial de Coupe des pierres renferme

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tout ce qui peut offrir quelque difficulté sur ce sujet dans la pratique.

La cinquième aura pour objet la Serrurerie de bâtimens, et la Charpente en fer, c'est-à-dire les planchers, les combles, les voûtes et les ponts en fer.

Enfin, la sixième et dernière partie traitera de la Menuiserie de bâtimens, avec tout le détail que ce sujet comporte.

Les explications de chaque espèce d'ouvrages seront accompagnées de détails relatifs à l'évaluation des dépenses auxquelles ces ouvrages peuvent donner lieu, indépendamment des usages de Paris, qui d'ailleurs ne tarderont probablement pas d'être proscrits.

Chacune des six parties principales de ce Cours sera divisée en plusieurs sections, et chaque section en plusieurs leçons. Chaque leçon traitera d'un sujet particulier, divisé en plusieurs articles. L'étendue d'une leçon sera proportionnée à celle du sujet dont elle traitera. J'ai cru cette division plus commode pour le lecteur, que de longs chapitres, parce qu'elle présente plus de moyens pour reposer l'esprit, et fait mieux ressortir les différens sujets, ce qui aide plus qu'on ne pense à classer les idées.

Tel est, en raccourci, le plan sur lequel j'ai conçu et exécuté ce Cours de Construction, où j'ai tâché de mettre à profit tout ce qui a été publié jusqu'à ce jour sur cette matière aussi étendue qu'importante, et où j'ai tâché de présenter les choses sous un point de vue propre à étendre et consolider les idées du lecteur. Je ne suppose aucunes connaissances préliminaires sur les sciences; voulant faire un cours complet de construction, et les ouvrages spéciaux sur les sciences renfermant beaucoup de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

choses inutiles, et se taisant souvent sur des choses nécessaires aux constructeurs, j'ai cru convenable de traiter moi-même ici de tout ce qui se rattache à la construction, du moins autant qu'il m'a été possible. J'ai évité les théories trop abstraites, trop élevées, trop générales, et je me suis appuyé sur l'expérience le plus souvent que je l'ai pu, sans pour cela abandonner jamais les démonstrations tirées du raisonnement. Enfin, j'ose croire n'avoir pas augmenté inutilement le nombre des ouvrages de construction, et qu'un assez grand nombre de choses nouvelles, et que je ne dois à personne, m'attireront quelque bienveillance de la part du public.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

COURS ÉLÉMENTAIRE,

THÉORIQUE ET PRATIQUE,

DE CONSTRUCTION.

PREMIÈRE PARTIE.

MATHÉMATIQUES.

SECTION PREMIÈRE.

ARITHMÉTIQUE.

1re. LEÇON.

1. Les mathématiques ont pour objet la recherche des propriétés des grandeurs ou quantités.

2. On nomme *quantité*, tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution : le *temps*, l'*étendue*, le *poids*, la *force*, sont des quantités.

Nous ne connaissons aucune quantité d'une manière absolue, c'est-à-dire par elle-même ; de sorte que, quand nous voulons nous former l'idée de la grandeur d'une quantité, nous sommes réduits à la comparer à une autre quantité de même nature, prise arbitrairement et que nous admettons comme mesure, à laquelle nous rapportons toutes les quantités de même espèce que nous voulons connaître. Le résultat de cette comparaison est l'expression de la grandeur de la quantité dont on veut se faire une idée, et se nomme *rapport*. Ainsi, tout ce que nous pouvons découvrir sur les quantités se réduit à des rapports.

Quand on compare deux quantités de même espèce, on peut avoir pour objet, ou de chercher de combien l'une de ces deux quantités surpasse

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'autre; ou de chercher combien de fois l'une est contenue dans l'autre : d'où il suit qu'il y a deux espèces de rapports. Les rapports qui répondent au premier cas se nomment *rapports par différence*, ou *rapports arithmétiques*, et ceux qui répondent au second cas s'appellent *rapports par quotient*, ou *rapports géométriques*.

3. La quantité arbitraire que l'on prend pour terme de comparaison, lorsqu'on veut exprimer la grandeur d'une quantité, se nomme *unité mathématique*. En général le mot *unité* exprime un individu quelconque existant dans la nature et pris isolément de tout ce qui l'environne.

4. On peut envisager une unité d'une manière vague, indéterminée, c'est-à-dire sans s'embarrasser de l'espèce ni de la grandeur de l'individu qu'elle représente; dans ce cas on l'appelle *unité abstraite*. Si l'espèce et la grandeur de l'unité étaient déterminées, elle prendrait le nom d'*unité concrète*. Ainsi, par exemple, quand je dis *un*, *une unité*, *une fois*, je désigne bien un certain individu, mais je ne désigne pas lequel; j'exprime donc une unité abstraite; mais quand je dis *un homme*, *un cheval*, *une toise*, *un mètre*, etc., il est clair que je donne une idée fixe de l'individu que je désigne, et, par conséquent, j'exprime une unité concrète. Ainsi l'idée d'une unité abstraite est plus générale que celle d'une unité concrète; car l'unité abstraite appartient à toutes les espèces, n'appartenant à aucune en particulier, tandis que l'unité concrète ne peut appartenir qu'à l'espèce désignée.

On voit, d'après cette observation, qu'il est plus avantageux de raisonner sur l'unité abstraite que sur l'unité concrète, puisqu'alors les raisonnemens sont applicables à tous les cas.

5. Si l'on assemble plusieurs unités de même espèce et toutes égales entre elles, on aura ce qu'on appelle un *nombre*.

Il y a plusieurs espèces de nombres, comme il y a plusieurs espèces d'unités : l'assemblage de plusieurs unités abstraites donnera un nombre abstrait, et l'assemblage de plusieurs unités concrètes donnera un nombre concret. Il y a aussi plusieurs autres espèces de nombres, que nous ferons connaître par la suite.

6. Pour faciliter la pratique des opérations dont les quantités sont susceptibles, et pour aider l'esprit dans la recherche des vérités dont la connaissance peut nous être nécessaire, on a imaginé des signes, tant pour représenter les quantités, que pour indiquer les opérations à effectuer sur ces mêmes quantités.

A mesure que nous avancerons, nous ferons connaître les signes d'opération; quant aux signes qui représentent les quantités, ils sont de deux espèces :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les uns servent à représenter les quantités exprimées en nombres, et les autres représentent les quantités d'une manière tout-à-fait indéterminée.

Les signes de la première espèce sont connus sous le nom de chiffres : ils sont au nombre de dix, qui sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 0.

Quant aux signes de la seconde espèce, ils sont tout-à-fait arbitraires : tantôt ce sont les lettres de notre alphabet dans leur simplicité, tantôt ce sont les mêmes lettres, mais accentuées, et tantôt ce sont les lettres de l'alphabet grec, simples ou accentuées.

La première espèce de signes se suffit à elle-même; mais la seconde se combine presque toujours avec la première, et de ce mélange de signes pour représenter les quantités, et de la combinaison des signes d'opération résultent des avantages dont on ne peut se faire une idée juste, qu'après avoir parcouru la science toute entière.

7. L'art d'opérer sur les quantités représentées par des signes, se nomme *calcul*. Comme il y a plusieurs espèces de signes, il y a aussi plusieurs espèces de calculs, dont les principaux sont l'arithmétique et l'algèbre, les seuls que nous considérerons dans ce cours.

8. L'*Arithmétique* est l'art d'opérer sur les quantités lorsqu'elles sont exprimées en nombres.

9. L'art d'exprimer les quantités en nombres, soit par écrit, soit verbalement, s'appelle *numération*.

La numération est la partie des mathématiques qui doit précéder toutes les autres.

De la Numération.

10. Nous avons déjà dit qu'un nombre était l'assemblage de plusieurs unités de même nature et toutes égales entre elles. Or, si l'on ajoute une unité à elle-même on aura le nombre qu'on appelle deux; si à ce nombre on ajoute une nouvelle unité égale aux premières, on aura le nombre qu'on appelle trois; en ajoutant à ce dernier nombre une nouvelle unité, on aura le nombre quatre, et en ajoutant de la même manière une nouvelle unité au nombre déjà obtenu, du nombre quatre on passera au nombre cinq, de celui-ci au nombre six, de ce dernier au nombre sept, de celui-ci au nombre huit, et de ce dernier au nombre neuf.

On est convenu d'écrire ces neuf premiers nombres chacun par un caractère particulier, de sorte que pour une seule unité on écrit 1, pour deux on

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

écrit 2, pour trois on écrit 3, pour quatre on écrit 4, pour cinq on écrit 5; pour six on écrit 6, pour sept on écrit 7, pour huit on écrit 8, et pour neuf on écrit 9.

11. Pour le nombre dix qu'on obtient en ajoutant une unité au nombre 9, on se sert du même chiffre 1 qui a déjà servi à représenter une seule unité, mais on fait suivre ce chiffre 1 du signe 0 que l'on appelle zéro, ce qui donne 10.

Dix unités simples forment ce qu'on appelle une unité collective du premier ordre, à laquelle on donne le nom de *dixaine*, de sorte que les dixaines sont dix fois plus grandes que les unités simples. On peut avoir, une, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit et neuf dixaines. Pour écrire toutes ces dixaines, on se sert des mêmes caractères que pour écrire les unités simples depuis 1 jusqu'à 9, en mettant un zéro à la droite du chiffre qui indique le nombre des dixaines; ainsi, pour 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 dixaines, on écrira 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 et 90.

Le 0 que l'on met à la droite du chiffre significatif, ne signifie rien par lui-même : il n'a d'autre fonction que celle d'ordonner au chiffre significatif la place qu'il doit occuper pour prendre la valeur qui lui appartient.

L'usage a consacré des noms particuliers à chaque nombre complet de dixaines depuis une jusqu'à dix; de sorte qu'au lieu de dire une, deux, trois.... neuf dixaines, on dit *dix*, *vingt*, *trente*, *quarante*, *cinquante*, *soixante*, *septante* ou *soixante-dix*, *huitante* ou *quatre-vingts* et *nonante* ou *quatre-vingt-dix*.

12. Si à 90 on ajoute encore une dixaine, on aura 10 dixaines qui forment une unité collective du second ordre, à laquelle on donne le nom de *cent* ou de *centaine*. Les centaines se comptent comme les dixaines et les unités simples, et s'écrivent avec les mêmes chiffres, que l'on fait suivre ici de deux zéros. Ainsi, pour une, deux, trois, quatre, cinq....., neuf centaines, on écrit 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 et 900.

Les centaines, étant dix fois plus grandes que les dixaines, sont cent fois plus grandes que les unités simples. Ainsi lorsqu'un chiffre est suivi de deux zéros, il représente un nombre cent fois plus grand que s'il était seul.

13. Si à 900 on ajoute une centaine, on a dix centaines qui forment une unité collective du troisième ordre, à laquelle on donne le nom de *mille*. On compte les mille comme les simples unités, et on les écrit avec les mêmes chiffres, que l'on fait suivre de trois zéros. Ainsi pour un, deux, trois, ..., neuf mille, on écrit 1000, 2000, 3000, ... 9000.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les mille, étant dix fois plus grands que les centaines, sont cent fois plus grands que les dixaines, et mille fois plus grands que les unités simples; d'où il suit qu'un chiffre suivi de trois zéros est mille fois plus grand que s'il était seul.

Remarquons, maintenant, que l'ordre d'une unité collective est toujours désigné par le nombre des zéros qui accompagnent le chiffre significatif qui exprime le nombre qu'on a de ces unités collectives, et que les différens ordres d'unités vont continuellement de dix en dix fois plus grands.

14. Cela posé, je dis que les noms de la suite indéfinie des différens ordres d'unités, sont tels qu'ils ne changent réellement que tous les trois rangs. Ces noms sont *unité*, *mille*, *million*, *billion*, *trillion*, *quatrillion*, *quintillion*, *sextillion*, *septillion*, *octillion*, *nonillion*, *décaillion*, etc., parmi lesquels on remarque une certaine analogie qui permet de pousser cette nomenclature aussi loin qu'on peut le désirer, et bien au-delà de ce qu'on peut avoir besoin. Chacun de ces ordres principaux d'unités, se compte par unités, dixaines et centaines : ainsi on a unités simples, dixaines d'unités simples, et centaines d'unités simples; unités de mille, dixaines de mille, et centaines de mille; million, dixaine de million et centaine de million, etc.

Pour écrire ces divers ordres d'unités, on se sert des mêmes chiffres significatifs que pour écrire les unités simples, comme nous l'avons déjà fait voir jusqu'aux mille, en faisant suivre les chiffres significatifs d'autant de zéros que l'indique l'ordre des unités à écrire. Pour cela il faudra bien se rappeler que les dixaines sont du 1er. ordre collectif, que les centaines sont du 2^{me}. ordre, les mille du 3^{me}., les dixaines de mille du 4^{me}., les centaines de mille du 5^{me}., les millions du 6^{me}., les dixaines de millions du 7^{me}., et ainsi de suite.

Nous voilà donc en état, maintenant, de pouvoir écrire et de pouvoir exprimer verbalement toutes les unités de quelqu'ordre qu'elles soient; mais notre système n'est pas encore complet, car il y a des lacunes entre 10 et 20, entre 20 et 30, ... entre 90 et 100, entre 100 et 200, entre 200 et 300, ... entre 900 et 1000, entre 1000 et 2000, etc., etc., qu'il faut nécessairement remplir.

15. Pour remplir ces lacunes, nous remarquerons d'abord que les unités simples ne s'écrivant que par un chiffre, doivent être considérées comme occupant la première place en allant de droite à gauche; que les dixaines, qui ont toujours deux chiffres, comme occupant la seconde place en allant toujours de droite à gauche; les centaines, comme occupant la troisième

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

place, les mille la quatrième, et ainsi de suite dans le même ordre pour les unités supérieures ; de sorte que le zéro n'a d'autre fonction que celle d'ordonner aux chiffres significatifs la place qu'ils doivent occuper pour avoir la valeur qui leur convient, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer (n°. 11). Mais les chiffres significatifs sont tout aussi propres à remplir cette fonction ; d'où il suit que pour remplir les lacunes comprises entre 10 et 20, il suffira de mettre, à la place du 0 qui suit le chiffre 1 qui marque la dixaine qu'on a, le chiffre qui indiquera le nombre d'unités qu'il faut joindre à la dixaine, et on aura les nombres suivans 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 et 20, auxquels on donne respectivement les noms *dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, dix-sept, dix-huit, dix-neuf et vingt.*

Pour remplir les lacunes comprises entre 20 et 30, entre 30 et 40, ... entre 90 et 100, on s'y prendra de la même manière, et on aura les nombres 20, 21, 22, ... 29 et 30, 31, 32, ... 39 et 40, 41, 42, 43, ... 49 et 50, 51, 52, ... 59 et 60, 61, 62, ... 69 et 70, 71, 72, ... 79 et 80, 81, 82, ... 89 et 90, 91, 92, ... 99 et 100, auxquels on donne respectivement les noms *vingt, vingt-un, vingt-deux, vingt-trois, ... vingt-neuf* et *trente ; trente-un, trente-deux, ... trente-neuf* et *quarante ; quarante-un, quarante-deux, ... quarante-neuf* et *cinquante ; cinquante-un, cinquante-deux, cinquante-trois, ... cinquante-neuf et soixante ; soixante-un, ... soixante-neuf* et *soixante-dix ; soixante-onze, soixante-douze, ... soixante-dix-neuf,* et *quatre-vingts ; quatre-vingt-un, quatre-vingt-deux, ... quatre-vingt-neuf, quatre-vingt-dix, quatre-vingt-onze, ... quatre-vingt-dix-neuf* et *cent.*

16. Maintenant il nous sera facile de remplir les lacunes qui se trouvent comprises entre les unités des ordres supérieurs. En effet, supposons qu'il s'agisse d'écrire un nombre renfermant à la fois 5 mille, 4 centaines, 6 dixaines et 8 unités : si je n'avais que 5 mille, j'écrirais 5000 ; mais comme j'ai encore 4 centaines, je les écrirai à la place du troisième zéro, qui est celui qui tient la place des centaines, et j'aurai 5400. Pour écrire les 6 dixaines que j'ai, je remplacerai le second zéro par le chiffre 6, et j'aurai 5460 ; enfin, je remplacerai le dernier zéro par le chiffre 8, qui représente les simples unités du nombre à écrire, et j'aurai 5468. Pour exprimer ce nombre verbalement, on dira : *cinq mille quatre cent soixante-huit unités.*

Si je n'avais pas eu de centaines, j'aurais écrit 5068 ; si je n'avais pas eu de dixaines, j'aurais écrit 5408 ; si je n'avais pas eu d'unités, j'aurais écrit 5460 ; si je n'avais eu ni centaines, ni dixaines, j'aurais écrit 5008, etc.

Supposons encore qu'il s'agisse d'écrire le nombre qui renfermerait *six*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cent trente-quatre billions, vingt-deux millions, quatre mille six cent trente-huit unités.

Je commencerai par écrire les unités de l'ordre le plus élevé, qui sont les six cent trente-quatre billions, sans avoir égard aux zéros qu'il faudrait mettre à la suite des chiffres significatifs, si le nombre ne renfermait pas d'autres unités, et j'aurai 634. Je passerai aux unités immédiatement inférieures, et j'observerai que je n'ai point de centaines de millions; en conséquence, je mettrai un zéro pour les remplacer, et à sa suite j'écrirai les 22 millions que j'ai, ce qui me donnerait, avec ce qui est déjà écrit, 634,022. Passant aux unités qui viennent ensuite, j'observerai que, n'ayant ni centaine, ni dixaine de mille, je dois mettre deux zéros pour les remplacer, et écrire, à leur suite, les quatre mille que j'ai, d'où il résultera, avec ce qui est déjà écrit, 634,022,004. Enfin, pour compléter le nombre proposé, je n'ai plus qu'à mettre, à la suite de ce qui est déjà écrit, les six cent trente-huit unités qui me restent à écrire, et il me viendra 634,022,004,638, qui sera le nombre en question.

17. Pour exprimer verbalement un nombre déjà écrit, quelque grand qu'il puisse être, comme les divers ordres d'unités ne changent de nom que tous les trois rangs, on partagera le nombre donné en tranches de trois en trois chiffres, en allant de droite à gauche, et, s'il s'agit du nombre 34367867 686003000324, on aura 34,367,867,686,003,000,324, et on donnera à chaque tranche le nom qui lui appartient, comme on le voit indiqué ci-dessous:

34,	367,	867,	686,	003,	000,	324.
Quintillions,	quatrillions,	trillions,	billions,	millions,	mille,	unités,

et ensuite, en commençant par la tranche de l'ordre le plus élevé, on dira: *trente-quatre quintillions, trois cent soixante-sept quatrillions, huit cent soixante-sept trillions, six cent quatre-vingt-six billions, trois millions, trois cent vingt-quatre unités.*

18. Jusqu'à présent nous avons considéré l'unité comme indivisible, et c'est ce qui ne nous a pas permis d'écrire des nombres plus petits que l'unité; mais, dans une infinité de circonstances, on a besoin de quantités plus petites que celle qu'on a prise pour unité principale, ce qui a nécessité de diviser cette unité en plusieurs parties égales, qui, elles-mêmes, ont été subdivisées en d'autres parties égales, et ces nouvelles parties encore en d'autres parties égales, et ainsi de suite, autant qu'a pu l'exiger la pratique. Ces parties, qui vont continuellement en diminuant de grandeur, suivant une certaine loi convenue, se nomment *subdivisions* de l'unité principale. Nous allons ex-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

poser les différens systèmes de ces subdivisions pour les unités les plus en usage, et nous commencerons par les mesures anciennes.

TABLEAUX DES MESURES ANCIENNES.

MONNAIES.

La pistole	vaut	10	livres.
La livre (a)	—	20	sous.
Le sous....	—	12	deniers.
Le denier.	—	2	oboles.

MESURES DE LONGUEUR.

La toise...	vaut	6	pieds.
Le pied....	—	12	pouces.
Le pouce.	—	12	lignes.
La ligne...	—	12	points.

etc.

MESURES DE POIDS.

Le quintal	vaut	100	livres.
La livre (b)	—	2	marcs.
Le marc....	—	8	onces.
L'once.....	—	8	gros.
Le gros.....	—	3	deniers.
Le denier.	—	2	oboles ou 24 grains.
L'obole.....	—	12	grains.

MESURES DU TEMPS.

L'année....	vaut	365	jours à peu près.
Le jour.....	—	24	heures.
L'heure.....	—	60	minutes.
La minute.	—	60	secondes.
La seconde	—	60	tierces.

etc.

TABLEAUX DES NOUVELLES MESURES.

MONNAIES.

Le double louis	vaut	40	francs.
Le louis	—	20	francs.
Le franc (c) . . .	—	10	décimes.
Le décime. . . .	—	10	centimes.
Le centime.. . .	—	10	millimes.

etc.

MESURES DE LONGUEUR.

Le myriamètre. . .	vaut	10000	mètres ou 10 kilomètres.
Le kilomètre.	—	1000	mètres ou 10 hectomètres.
L'hectomètre.	—	100	mètres ou 10 décamètres.
Le décamètre. . . .	—	10	mètres.
Le mètre (d)	—	10	décimètres.
Le décimètre	—	10	centimètres.
Le centimètre. . . .	—	10	millimètres.
Le millimètre. . . .	—	10	dix-millimètres.

etc.

MESURES DE SUPERFICIE.

L'hectare.	vaut	100	ares ou 10000 mètres carrés.
L'are.	—	100	centiares ou 100 mètres carrés.
Le mètre carré. . . .	—	100	décimètres carrés.
Le décimètre carré.	—	100	centimètres carrés.
Le centimètre carré.	—	100	millimètres carrés.

etc.

(a) est l'unité principale. (b) est l'unité principale du poids. (c) est l'unité principale. (d) est l'unité fondamentale : il est la dix millionième partie du quart du méridien qui passe par Dunkerque et Barcelone.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

MESURES DE CAPACITÉ.

Le myrialitre.	vaut	10 kilolitres ou 10000 litres.
Le kilolitre.	—	10 hectolitres ou 1000 litres.
L'hectolitre.	—	10 décalitres ou 100 litres.
Le décalitre.	—	10 litres.
Le litre.	—	10 décilitres ou 1 décimètre cube.
Le décilitre.	—	10 centilitres.
Le centilitre.	—	10 millilitres.
Le millilitre.	—	1 centimètre cube.

MESURES DE POIDS.

Le myriagramme. . .	vaut	10 kilogrammes ou 10000 grammes.
Le kilogramme (1) .	—	10 hectogrammes ou 1000 grammes.
L'hectogramme. . . .	—	10 décagrammes ou 100 grammes.
Le décagramme. . .	—	10 grammes.
Le gramme.	—	10 décigrammes.
Le décigramme. . .	—	10 centigrammes.
Le centigramme. . .	—	10 milligrammes.

etc.

En examinant tous ces tableaux, on remarquera que la loi des subdivisions est irrégulière dans les mesures anciennes, non-seulement d'une espèce d'unités à une autre, mais encore pour la même espèce. Au contraire, dans le nouveau système, cette loi est parfaitement régulière pour chaque espèce d'unités, et est la même pour toutes les mesures. De cette uniformité, et de ce que la base qui forme la loi des subdivisions, dans les nouvelles mesures, est la même que celle de notre système de numération, il résulte une très-grande facilité dans les calculs, ainsi qu'on en sera convaincu par la suite.

19. Voyons, maintenant, comment on écrit les nombres qui contiennent des subdivisions de l'unité principale, et commençons par les mesures anciennes.

Supposons, par exemple, qu'on nous propose d'écrire un nombre qui contienne 345 livres de poids, 1 marc, 3 onces, 4 gros, 2 deniers et 15 grains.

Pour satisfaire à cette demande, nous écrirons :

$$345.^{l}\ 1.^{m}\ 3.^{o}\ 4.^{g}\ 2.^{d}\ 15.^{g},$$

ainsi qu'on en est généralement convenu, en mettant vers la droite, et un peu au-dessus de chaque nombre, l'initiale du nom de son espèce. Pour exprimer ce nombre verbalement, on dira : trois cent quarante-cinq livres, un marc, trois onces, quatre gros, deux deniers et quinze grains.

Si j'avais à écrire le nombre 36 toises, 3 pieds, 4 pouces et 6 lignes, je l'écrirais ainsi qu'il suit :

$$36.^{t}\ 3.^{p}\ 4.^{po}\ 6.^{l},$$

et pour l'exprimer verbalement je dirai : trente-six toises, trois pieds, quatre pouces et six lignes.

(1) Est le poids d'un décimètre cube ou d'un litre d'eau distillée et à la température de 4°.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On remarquera que j'ai encore eu le soin de mettre au-dessus et vers la droite de chaque partie du nombre, l'initiale du nom qui lui convient, excepté pour les pouces, où j'ai fait usage du signe ^{po} au lieu du ^{p}, pour ne pas confondre les pouces avec les pieds qui ont la même initiale.

S'il arrivait qu'un nombre ne contînt point de subdivisions de certains ordres, il faudrait les remplacer par des zéros.

Ainsi, par exemple, si l'on avait à écrire le nombre 58 toises, 3 pouces 4 points, comme il ne contient point de pied ni de ligne, on remplacerait ces deux nombres de subdivision, chacun par un zéro, et on aurait :

$$58.^{t}\ o.^{p}\ 3.^{po}\ o.^{l}\ 4.^{p},$$

et on se conduirait de même pour tout autre nombre. En général, lorsqu'on écrit un nombre composé de plusieurs parties, il faut faire attention de ne pas écrire aux rangs des diverses subdivisions de ce nombre, un nombre ni égal ni plus grand que celui qui exprime combien il faut des subdivisions de l'espèce qu'on écrit pour en faire une de celles qui sont immédiatement supérieures. Ainsi, par exemple, s'il s'agissait d'écrire un nombre de toises, pieds, pouces, lignes, etc., il ne faudrait pas écrire plus de 5 au rang des pieds, plus de 11 au rang des pouces, plus de 11 au rang des lignes, etc. Si l'on avait 6 pieds ou plus, il faudrait écrire 1 de plus aux toises, et n'écrire au rang des pieds que l'excès sur 6 du nombre de pieds qu'on aurait d'abord à écrire. De même, si l'on avait 12 pouces ou plus, il faudrait écrire 1 de plus aux pieds, et n'écrire au rang des pouces que l'excès sur 12 du nombre de pouces qu'on aurait d'abord à écrire, et ainsi des autres. On conçoit que si le nombre de pieds à écrire contenait plusieurs fois 6, il faudrait écrire autant d'unités au rang des toises que le nombre de pieds qu'on aurait contiendrait de fois 6, et n'écrire au rang des pieds que l'excès, sur ce nombre de fois 6, du nombre de pieds qu'on aurait d'abord à écrire. Il n'est pas besoin de dire que le même raisonnement s'applique aux autres espèces de subdivisions.

20. Un nombre qui contient des subdivisions de l'unité principale se nomme *nombre complexe*, et celui qui ne renferme que des unités entières, *nombre incomplexe*.

21. Dans le nouveau système, les subdivisions vont de dix en dix fois plus petites, pour toutes les espèces d'unités, ainsi qu'on peut le voir dans les tableaux des nouvelles mesures, que nous avons donnés précédemment. En conséquence, au lieu d'appeler *complexes* les nombres qui renferment de pareilles subdivisions, on les nomme *décimaux*.

22. Donnons, maintenant, la manière d'écrire cette dernière espèce de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

nombres, et supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un nombre qui se composerait de 67 mètres, 4 décimètres, 6 centimètres et 8 millimètres. On pourra d'abord l'écrire à la manière des nombres complexes ordinaires, et on aura :

$$67.^{m}\ 4.^{d}\ 6.^{c}\ 8.^{m},$$

mais cette manière est longue et incommode; voyons s'il n'y aurait pas un moyen plus facile.

Si nous nous rappelons qu'un mètre vaut 10 décimètres, qu'un décimètre vaut 10 centimètres, qu'un centimètre vaut 10 millimètres, etc., on verra que les 6 centimètres que renferme le nombre en question, valent 60 millimètres, et 8 qu'il y en a feront 68 millimètres; les 4 décimètres feront 40 centimètres ou 400 millimètres, et 68 que nous en avons trouvé déjà feront 468; ainsi, le nombre proposé se composera de deux parties : l'une qui sera 67 mètres ou 67 entiers, et l'autre 468 millimètres ou 468 millièmes de l'entier. On pourra donc écrire le nombre dont il s'agit, ainsi qu'il suit :

$$67^{m.}, 468^{m.},$$

en séparant les entiers des millièmes par une virgule, pour ne pas les confondre. Si au lieu du mètre il était question d'une autre nouvelle mesure quelconque, on conçoit qu'on pourrait écrire le nombre de la même manière, puisque la loi des subdivisions est toujours la même.

23. Il faut bien faire attention de placer la virgule immédiatement à la droite du dernier des chiffres qui représentent les entiers, car si on la changeait de place, on changerait aussi la valeur du nombre. Ainsi, par exemple, si dans le nombre $67^{m.},468$, au lieu de placer la virgule à la droite du 7, on la plaçait à la gauche, on aurait $6^{m.}, 7468$, et le nombre serait 10 fois plus petit; car le chiffre 6 des entiers représentait des dixaines dans le premier cas, et maintenant il ne représente plus que des unités simples; le chiffre 7 dans le premier cas représentait des unités simples, et maintenant il ne représente que des dixièmes de cette unité; le chiffre 4 de la partie décimale représentait des dixièmes, et il ne représente plus que des centièmes; le chiffre 6 qui suit vers la droite représentait des centièmes et il ne représente plus que des millièmes, et enfin le dernier chiffre qui représentait des millièmes, ne représente plus que des dix-millièmes; chacune des parties de ce nombre est donc devenue 10 fois plus petite, et par conséquent le nombre tout entier lui-même est 10 fois plus petit. Si au lieu d'avoir placé la virgule à la droite du chiffre 7 qui représente les unités simples dans le nombre proposé, on l'avait écrite entre 4 et 6 qui sont au rang des décimales, on aurait eu $674^{m.}, 68$, et le nombre serait devenu dix fois plus grand. En effet, le chiffre 6 qui représentait des dixaines, représenterait

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

alors des centaines; le chiffre 7 qui représentait des unités simples, représenterait des dixaines; le chiffre 4 qui représentait des dixièmes, représenterait des unités; le chiffre 6 qui représentait des centièmes, représenterait des dixièmes, et le chiffre 8 qui représentait des millièmes, représenterait des centièmes; chacune des parties du nombre serait donc dix fois plus grande, et par conséquent le nombre lui-même serait dix fois plus grand.

24. Il suit de là qu'un nombre décimal devient dix fois plus petit en transportant la virgule qui sépare la partie entière de la partie décimale, d'une place vers la gauche, et qu'il devient, au contraire, dix fois plus grand, quand on transporte cette virgule d'une place vers la droite. Mais si, après avoir transporté la virgule d'une place vers la droite ou vers la gauche, on la transporte encore d'une place vers la droite ou vers la gauche, le nombre, après être devenu dix fois plus grand ou plus petit, deviendra donc encore dix fois plus grand ou plus petit; il sera donc devenu cent fois plus grand ou plus petit que dans le premier cas : or, si l'on comparait le dernier nombre au premier, on verrait que la virgule aurait été transportée de deux places vers la droite ou vers la gauche; en faisant donc une pareille transposition dans un nombre, on rend ce nombre cent fois plus grand ou plus petit. On conçoit maintenant que, si l'on transportait la virgule de trois, quatre, etc. places vers la droite ou vers la gauche, dans un nombre décimal quelconque, ce nombre deviendrait mille, dix mille, etc. fois plus grand ou plus petit. Supposons, par exemple, que l'on veuille rendre le nombre 5784,67367 cent fois plus grand, il suffira de l'écrire de cette manière 578467,367, ce qui revient à mettre le chiffre qui représente les centièmes, dans le nombre donné, au rang des unités simples dans le nombre demandé. Si l'on eut voulu rendre ce même nombre mille fois plus grand, on aurait mis le chiffre qui représente les millièmes au rang des unités simples, et on aurait eu 5784673,67. Enfin, si l'on avait voulu rendre le nombre donné cent mille fois plus grand, on aurait mis le chiffre qui représente les cent millièmes au rang des unités simples, c'est-à-dire, qu'on aurait supprimé la virgule tout-à-fait, parce que ce nombre ne renferme pas des décimales d'un ordre plus bas que les cent millièmes, et on aurait eu 578467367.

Réciproquement, si l'on voulait rendre ce même nombre 5784,67367, dix, cent ou mille fois plus petit, on écrirait 578,467367, 57,8467367, ou 5,78467367, c'est-à-dire qu'on mettrait le chiffre qui représente les unités simples, dans le nombre donné, au rang des dixièmes, des centièmes ou des millièmes dans le nombre demandé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

25. Si un nombre ne renfermait point d'unités entières, s'il ne renfermait, par exemple, que 35 centièmes, on mettrait un zéro pour tenir la place des entiers, que l'on séparerait des 35 centièmes par une virgule, et on aurait 0,35. Si l'on n'avait pas de dixième, si l'on n'avait, par exemple, que 35 millièmes, on mettrait un zéro pour tenir la place des entiers, et un autre pour tenir celle des dixièmes, et on aurait 0,035. On conçoit, d'après cela, ce qu'il faudrait faire s'il manquait d'autres espèces d'unités. Il n'est pas besoin de faire sentir combien le zéro qui tient ici la place des entiers est nécessaire, ainsi que le placement de la virgule, car sans ce zéro le nombre 0,35 deviendrait 35 entiers.

Actuellement, supposons que l'on veuille rendre le nombre 347 mille fois plus petit; il faudra, d'après la règle que nous avons donnée plus haut, mettre le chiffre 7, qui représente les unités simples dans le nombre donné, au rang des millièmes dans le nombre demandé; mais les millièmes occupent la troisième place vers la droite au rang des décimales, et le nombre donné n'a que trois chiffres, il n'y aura donc point de chiffre au rang des entiers, il faudra donc mettre un zéro pour en tenir la place, et on aura 0,347, qui sera le nombre demandé. Si l'on avait voulu rendre le même nombre 347 dix mille fois plus petit, on voit que, non-seulement il aurait fallu mettre un zéro pour tenir la place des entiers, mais un autre aussi pour tenir celle des dixièmes, et on aurait eu 0,0347. On conçoit, d'après cela, ce qu'il faudrait faire si l'on voulait rendre ce même nombre cent mille, un million, dix millions, etc., de fois plus petit.

Ainsi, au moyen de zéros et d'une virgule, nous pouvons rendre un nombre autant de dix fois plus petit qu'on pourra le désirer; de sorte, qu'avec ce qui précède, nous sommes dans le cas de pouvoir écrire tous les nombres imaginables, et par conséquent, notre système de numération ne laisse rien à désirer. Passons donc aux opérations dont les nombres sont susceptibles.

2^me^. LEÇON.

De l'Addition et de la Soustraction.

26. L'*Addition* est une opération par laquelle plusieurs nombres de même espèce étant donnés, on les réunit en un seul qui leur est absolument égal, auquel on donne le nom de *somme*.

La somme de plusieurs nombres de même espèce est nécessairement de même nature que les nombres qui la composent.

*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous avons déjà vu que les nombres étaient composés d'un ou de plusieurs chiffres, qu'ils étaient entiers, complexes ou décimaux. Voyons comment on effectue l'addition sur chacune de ces espèces de nombres.

De l'Addition des nombres composés d'un seul chiffre.

27. A proprement parler il n'y a pas de règle pour faire l'addition des nombres qui ne renferment qu'un seul chiffre : ainsi, par exemple, si l'on avait à ajouter les nombres 5, 7, 8, 4, 9, 3, 2, 6, il faudrait nécessairement qu'on vît, au premier coup-d'œil, que 5 et 7 font 12, et 8 font 20, et 4 font 24, et 9 font 33, et 3 font 36, et 2 font 38, et 6 font 44, pour arriver à leur somme qui est évidemment 44.

28. Au lieu d'effectuer l'addition des nombres donnés de même espèce, il est souvent plus avantageux de ne faire qu'indiquer cette opération, pour l'exécuter ensuite, quand cela est nécessaire. Ainsi, par exemple, s'il s'agissait de l'addition des nombres 8 et 7, on les écrirait l'un à la suite de l'autre, en mettant entre les deux le signe + qu'on prononce *plus*, et on aurait 8 + 7. Comme la somme de ces deux nombres est 15, on peut dire que 8 + 7 est égale à 15, ou simplement 8 + 7 égale 15. Le mot *égale* peut être remplacé par le signe =, et au lieu de 8 + 7 égale 15, on peut écrire 8 + 7 = 15.

Cette manière d'indiquer l'addition est applicable à autant de nombres qu'on voudra, quels que soient ces nombres, pourvu qu'ils soient de même espèce. Ainsi, par exemple, 7 + 9 + 3 + 5 = 24, veut dire que la somme des nombres 7, 9, 3 et 5 est égale à 24.

De l'Addition des nombres entiers composés de plusieurs chiffres.

29. Pour faire la somme de tant de nombres de cette espèce qu'on voudra, on les écrira les uns au-dessous des autres de manière que les unités du même ordre soient sous une même colonne verticale; c'est-à-dire que toutes les unités simples soient sur une même colonne, toutes les dixaines sur une seconde colonne, toutes les centaines sur une troisième colonne, et ainsi des autres.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trouver la somme des nombres 345, 572, 72 et 904; d'après la règle, je les écrirai ainsi qu'il suit :

345
572
72
904

Somme..... 1893

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

puis je tirerai un trait sous le dernier pour le séparer de la somme, et je ferai la somme des unités de chaque colonne, en commençant par celle de l'ordre le moins élevé, qui est à droite, et je dirai : 5 et 2 font 7, et 2 font 9, et 4 font 13; ainsi le nombre 13 est la somme de toutes les unités simples des nombres donnés. Mais, en 13 unités simples il y a une dixaine et 3 unités simples; je poserai ces trois unités simples sous la colonne à laquelle elles appartiennent, et je retiendrai, dans la mémoire, la dixaine qui me reste pour la joindre à la somme des dixaines que je chercherai immédiatement. Je dirai donc : 1 dixaine que j'ai retenue et 4 font 5, et 7 font 12, et 7 font 19; ainsi la somme des dixaines est 19. Mais, en 19 dixaines il y a une centaine et 9 dixaines; en conséquence, je poserai les 9 dixaines sous la colonne des dixaines, et je retiendrai, dans la mémoire, la centaine qui me reste, pour la joindre à la somme des centaines que je chercherai de suite. Je dirai donc : 1 centaine de retenue et 3 font 4, et 5 font 9, et 9 font 18; ainsi la somme des centaines est 18; mais en 18 centaines il y a 8 centaines et 1 mille; en conséquence, j'écrirai les 8 centaines au-dessous de la colonne des centaines, et si les nombres proposés contenaient des mille, je retiendrais le mille qui me reste pour le joindre à la somme des mille; mais comme ils n'en contiennent point, j'écris ce mille qui me reste à côté et vers la gauche des 8 centaines que j'ai déjà écrites : l'opération est alors achevée, et la somme demandée est égale à 1893; de sorte que (n°. 28)

$$345+572+72+904=1893.$$

La raison de ce procédé est facile à saisir. En effet, il est évident que le nombre 1893 est la somme demandée, car il contient toutes les parties constituantes des nombres proposés, puisque, par le procédé que nous avons suivi, nous avons composé ce nombre de la somme de toutes les unités simples, de celle de toutes les dixaines, et de celle de toutes les centaines de ces nombres proposés. Il est évident aussi qu'en suivant ce même procédé sur autant de nombres entiers composés de tant de chiffres qu'on voudra, on arrivera toujours à la somme demandée.

Pour s'assurer qu'on a bien suivi le procédé et qu'on ne s'est pas trompé en comptant, il faut en faire la preuve.

Preuve de l'Addition.

30. Le meilleur moyen de faire la preuve de l'addition, c'est-à-dire de s'assurer si elle est bien faite, après avoir compté les chiffres de chaque colonne en allant de haut en bas, et avoir obtenu ainsi la somme présumée, c'est de recommencer l'opération, en comptant les chiffres de chaque colonne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de bas en haut : si de cette manière on retrouve la première somme, c'est une preuve suffisante que l'opération a été bien faite.

De l'Addition des nombres décimaux.

31. Dans les cas où il s'agit de nombres décimaux, on écrit encore les nombres proposés les uns au-dessous des autres de manière que les unités du même ordre soient sur la même colonne verticale, et on tire un trait sous le dernier pour le séparer de la somme.

Supposons, par exemple, qu'on demande la somme des nombres 673, 943; 76, 48; 4025, 3034; on les écrira ainsi qu'il suit :

673,943
76,48
4025,3034
4775,7264

et ensuite, on commencera par la colonne de l'ordre le moins élevé. Mais on voit que cette colonne ne se compose que du seul chiffre 4; il suffira donc d'écrire ce chiffre à la somme sous la colonne qu'il compose. On passera ensuite à la seconde colonne, on en fera la somme qu'on trouvera égale à 6, et qu'on écrira sous cette seconde colonne, qui est, comme on voit, la colonne des millièmes. On passera à la colonne des centièmes, on en fera la somme qu'on trouvera égale à 12. Mais en 12 centièmes il y a 2 centièmes et 1 dixième; en conséquence, on écrira les 2 centièmes sous la colonne des centièmes, et on retiendra le dixième pour le joindre à la somme des dixièmes qu'on cherchera immédiatement, et qu'on trouvera égale à 16, et en y joignant le dixième de retenu elle deviendra égale à 17. Mais en 17 dixièmes il y a 7 dixièmes, que l'on écrira au-dessous des dixièmes, et une unité entière qu'on joindra à la somme des entiers. On continuera l'opération en faisant la somme des entiers, comme il a été expliqué au n°. 29, et on aura l'attention de placer, dans la somme, la virgule à la droite du chiffre 5 qui répond à la colonne des unités simples des nombres proposés : la somme demandée sera 4775, 7264, c'est-à-dire qu'on aura :

$$673{,}943 + 76{,}48 + 4025{,}3034 = 4775{,}7264.$$

La raison de ce procédé est la même que celle du n°. 29.

De l'Addition des nombres complexes.

32. Supposons qu'il s'agisse de trouver la somme des nombres

35.^{t} 3.^{p} 5.^{po} 6.^{l}, 47.^{t} 2.^{p} 7.^{po} 10.^{l} et 157.^{t} 4.^{p} 9.^{po} 11.^{l},

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on écrira ces nombres les uns au-dessous des autres, comme il a été dit, ainsi qu'il suit :

35.^{t}	3.^{p}	5.^{po}	6.^{l}
47.	2.	7.	10.
157.	4.	9.	11.
240.^{t}	4.^{p}	11.^{po}	3.^{l}

et ensuite on commencera l'opération par la colonne des unités de l'ordre le moins élevé, qui sont ici les lignes, et on trouvera que la somme des lignes est 27. Mais en 27 lignes il y a 2 pouces et 3 lignes, puisqu'il faut 12 lignes pour faire un pouce ; on écrira donc les 3 lignes sous la colonne à laquelle elles appartiennent, et on retiendra les 2 pouces pour les joindre à la somme des pouces. On fera la somme des pouces, et, en y joignant les 2 pouces qu'on a retenus, on la trouvera égale à 23. En 23 pouces il y a 1 pied et 11 pouces; on écrira les 11 pouces sous la colonne des pouces, et on retiendra le pied pour le joindre à la somme des pieds. On fera la somme des pieds, et, en y joignant le pied qu'on a retenu, on la trouvera égale à 10. Mais dans 10 pieds il y a une toise et 4 pieds, puisqu'il faut 6 pieds pour une toise; on écrira les 4 pieds sous la colonne des pieds, et on retiendra la toise pour la joindre à la colonne des toises. On continuera l'opération sur les toises, les dixaines de toises, etc., comme il a été expliqué pour les nombres entiers, et on aura 240.^{t} 4.^{p} 11.^{po} 3.^{l} pour la somme demandée, de sorte que

35.^{t} 3.^{p} 5.^{po} 6.^{l} + 47.^{t} 2.^{p} 7.^{po} 10.^{l} + 157.^{t} 4.^{p} 9.^{po} 11.^{l} = 240.^{t} 4.^{p} 11.^{po} 3.^{l}

Ce qui précède suffit pour faire voir que toute la difficulté de l'addition des nombres complexes consiste dans la loi des subdivisions. En effet, dans notre exemple, il a fallu savoir qu'il faut 12 lignes pour faire un pouce, 12 pouces pour faire un pied, et 6 pieds pour faire une toise, afin de déterminer combien la somme des lignes contenait de pouces, la somme des pouces contenait de pieds, et la somme des pieds contenait de toises. S'il s'était agit d'une autre espèce d'unité, on conçoit qu'il aurait fallu raisonner de même sur la loi de ses subdivisions.

Voici quelques exemples sur lesquels les commençans pourront s'exercer.

1er. EXEMPLE.	2^{e}. EXEMPLE.
3476367 8	786,732
3650237	68,0346
679235	9234,43897
6732178	342,275
673221785	82,7828
6832	324,27356
23879	10838,53693
11317782 4	

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3e. EXEMPLE.

26.t	3.p	4.po	6.l	2.pt
63.	2.	5.	7.	9.
15.	4.	7.	9.	5.
98.	5.	9.	8.	7.
39.	2.	10.	11.	4.
8.	3.	7.	9.	11.
252.t	4.p	10.po	5.l	2.pt

4e. EXEMPLE.

35.liv	15.s	6.d
542.	18.	7.
69.	17.	10.
2347.	14.	9.
897.	16.	8.
48.	12.	7.
3942.liv	15.s	11.d

5e. EXEMPLE.

35.j	12.h	53.l	15.ll	25.lll
52.	21.	49.	58.	35.
27.	17.	24.	53.	49.
139.	23.	59.	53.	47.
29.	15.	38.	0.	15.
3.	9.	2.	23.	0.
289.j	4.h	48.l	24.ll	51.lll

6e. EXEMPLE.

27.l	1.m	2.on	3.s	2.d	12.s
52.	0.	7.	6.	1.	17.
49.	1.	3.	5.	0.	21.
23.	0.	6.	7.	2.	19.
52.	1.	3.	5.	1.	9.
7.	0.	7.	4.	2.	13.
213.l	1.m	0.on	1.s	2.d	19.s

DE LA SOUSTRACTION.

33. La *Soustraction* est une opération par laquelle, deux nombres de même espèce étant donnés, on trouve de combien l'un surpasse l'autre. Le résultat de l'opération se nomme *reste*, *excès* ou *différence*.

34. La différence de deux nombres donnés de même espèce, est nécessairement de même espèce que les deux nombres donnés.

35. Il est évident que, si au plus petit nombre donné on ajoute la différence trouvée, la somme sera égale au plus grand des nombres donnés; car la différence n'est autre chose que ce qui manque au plus petit pour égaler le plus grand.

36. Si à chacun des nombres donnés on ajoute un même nombre, la différence des deux sommes sera la même que celle des deux nombres donnés; car il est clair que l'augmentation étant la même sur les deux nombres, elle ne peut influer en rien sur leur différence. Ainsi, par exemple, la différence des nombres 7 et 4 est 3; ajoutons 5 à chacun de ces nombres, nous aurons 12 et 9, dont la différence est encore 3.

De la Soustraction sur les nombres composés d'un seul chiffre.

37. A proprement parler il n'y a pas de règle pour faire la soustraction sur les nombres composés d'un seul chiffre : il faut voir du premier coup-d'œil que la différence de 5 à 3 est 2, que celle de 8 à 5 est 3, que celle de 9 à 2 est 7, que celle de 18 à 7 est 11, etc.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

38. Souvent il est plus avantageux de ne faire qu'indiquer la soustraction, pour l'effectuer ensuite, si cela est nécessaire; ainsi, par exemple, s'il s'agissait de soustraire le nombre 3 du nombre 8, on les écrirait l'un à la suite de l'autre en les unissant par le signe — qu'on prononce *moins*, et en observant d'écrire, en dernier, le plus petit nombre. Ainsi dans notre exemple on aurait 8 — 3, qu'on lirait comme s'il y avait 8 moins 3. Comme la différence de ces deux nombres est 5, on écrira 8 — 3 = 5, ce qui veut dire 8 moins 3 égale 5. Nous venons de dire qu'il fallait écrire le plus petit nombre en dernier, mais il est des cas où il faut faire le contraire, ainsi que nous l'expliquerons en algèbre.

De la Soustraction des nombres composés de plusieurs chiffres.

39. Pour faire la soustraction des nombres composés de plusieurs chiffres, on écrit les deux nombres donnés de manière que le plus petit soit au-dessous du plus grand, et de telle sorte, que les unités du même ordre soient les unes au-dessous des autres.

Ainsi, par exemple, s'il s'agissait de retrancher 234 de 346, on les écrirait comme on voit ci-après,

Si de.....	346
On retranche	234
Il restera.....	112

et ensuite, on retrancherait les unités simples du nombre inférieur de celles du nombre supérieur, les dixaines du nombre inférieur de celles du nombre supérieur, les centaines du nombre inférieur de celles du nombre supérieur, et ainsi de suite. Ainsi, dans notre exemple, on dira: si des 6 unités du nombre supérieur on retranche les 4 unités du nombre inférieur, on aura 2 pour reste qu'on écrira au-dessous des unités. On passera aux dixaines, et on dira, si des 4 dixaines du nombre supérieur on retranche les 3 dixaines du nombre inférieur, on aura 1 pour reste qu'on écrira au-dessous des dixaines. On passera aux centaines, et on dira, si des 3 centaines du nombre supérieur on retranche les 2 centaines du nombre inférieur, on aura 1 pour reste qu'on écrira sous les centaines, et l'opération sera terminée; de sorte que la différence des deux nombres donnés est 112, c'est-à-dire que

$$346 - 234 = 112.$$

Si les deux nombres proposés avaient eu des mille, des dixaines de mille, etc., on aurait continué l'opération de la même manière.

La raison de ce procédé est facile à saisir; car il est évident qu'ayant pris la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

différence entre les unités simples, entre les dixaines, entre les centaines, etc. des nombres proposés, en réunissant toutes ces différences partielles, on a nécessairement la différence totale.

En réunissant ces différences partielles, il faut entendre que la différence des unités simples est un nombre d'unités simples; celle des dixaines, un nombre de dixaines; celle des centaines, un nombre de centaines, etc. C'est en considérant les choses de cette manière que nous avons trouvé 112 pour la différence des nombres 346 et 234, parce que nous avions trouvé 2 unités, 1 dixaine et 1 centaine pour différences partielles successives, ce qui fait bien 112.

Ainsi donc, si l'on suit bien exactement le procédé que nous venons d'expliquer, on obtiendra nécessairement la différence de deux nombres donnés quelconques, pourvu que celui qui est écrit au-dessous soit plus petit que l'autre. Pour s'assurer qu'on a bien suivi le procédé et qu'on ne s'est pas trompé en comptant, après avoir terminé l'opération il faut en faire la preuve.

Preuve de la Soustraction.

40. Pour faire la preuve de la soustraction, il faut considérer que, si au plus petit des nombres donnés on ajoute la différence trouvée, on aura nécessairement le plus grand, car cette différence est évidemment ce qui manque au plus petit pour égaler le plus grand. Ainsi pour faire la preuve de la soustraction il suffira de s'assurer que la somme du petit nombre et de la différence est égale au plus grand nombre donné.

41. Dans l'exemple précédent tous les chiffres du nombre supérieur sont plus grands que leurs correspondans dans le nombre inférieur, ce qui rend la soustraction très-facile; mais il arrive souvent que l'inverse a lieu, excepté dans le chiffre du rang le plus élevé, qui est toujours plus grand dans le nombre supérieur que dans le nombre inférieur. Dans ce cas, on opère ainsi qu'il suit :

Supposons, par exemple, que du nombre 6324 il faille retrancher le nombre 5467; on disposera ces deux nombres comme il a été dit plus haut, ainsi qu'on le voit ci-après :

$$\begin{array}{r} 6324 \\ 5467 \\ \hline 857 \end{array}$$

et ensuite on dira : de 4 unités qui sont au nombre supérieur, on ne peut en retrancher 7, mais en empruntant une dixaine sur les 2 dixaines qui se trouvent

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans le même nombre supérieur, et en transformant cette dixaine en unités simples, elle en donnera 10 et 4 qu'on en a déjà feront 14, d'où on pourra retrancher les 7 du nombre inférieur, ce qui donnera 7 pour reste, qu'on écrira au-dessous des unités du nombre inférieur. Cela fait, on passera aux dixaines, et on observera que les 2 dixaines qu'on avait au nombre supérieur se réduisent à 1 à cause de la dixaine qu'on a empruntée en faveur des unités simples. Or d'une dixaine on ne peut en retrancher les 6 du nombre inférieur; mais si l'on emprunte une centaine sur les 3 du nombre supérieur et qu'on la convertisse en dixaines, on aura 10 et 1 qu'on avait déjà feront 11; de 11 dixaines on pourra en retrancher les 6 du nombre inférieur, et il en restera 5, qu'on écrira dans le reste à la place qu'elles doivent occuper. On passera aux centaines, et on observera que les 3 qu'on en a au nombre supérieur se réduisent à 2, à cause de la centaine qu'on a empruntée pour la convertir en dixaines; or de 2 centaines on ne peut pas en retrancher les 4 qui sont au nombre inférieur, mais si l'on emprunte une unité sur les mille et qu'on la convertisse en centaines, on en aura 10 et 2 qui restent feront 12, et de 12 on pourra retrancher les 4 du nombre inférieur, ce qui donnera 8 pour reste, qu'on écrira dans le reste à la place des centaines. On passera enfin aux mille, en observant que les 6 mille du nombre supérieur se réduisent à 5, desquels, si on retranche les 5 du nombre inférieur, il ne restera rien, et la différence des nombres donnés sera 857, c'est-à-dire que

$$6324 - 5467 = 857.$$

On conçoit que ce procédé aura toujours lieu, pourvu que le chiffre de l'ordre le plus élevé soit plus grand dans le nombre supérieur que dans le nombre inférieur, ne fusse que d'une unité.

En effet, supposons un des cas les plus défavorables, et qu'il s'agisse, par exemple, de retrancher 799 de 800; on écrira les nombres comme à l'ordinaire :

$$\begin{array}{r} 800 \\ 799 \\ \hline 1 \end{array}$$

et l'on dira : de 0 unité du nombre supérieur on ne peut pas en retrancher les 9 du nombre inférieur, mais si l'on emprunte une dixaine sur le zéro qui représente les dixaines du nombre supérieur, en supposant cela possible, et qu'on la convertisse en unités simples, on en aura 10 et on pourra en retrancher les 9 du nombre inférieur, ce qui donnera 1 pour reste, qu'on écrira au reste à la place des unités. On passera aux dixaines en observant que non-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

seulement il n'y a point de dixaine au nombre supérieur, mais encore on doit tenir compte de celle qu'on a empruntée pour rendre la soustraction possible sur les unités. Ainsi on empruntera une centaine sur les 8 qui sont au nombre supérieur, ce qui donnera 10 dixaines qu'on réduira à 9 pour tenir compte de la dixaine empruntée, et en retranchant de 9 dixaines, les 9 qui sont au nombre inférieur, il ne restera rien. Enfin, on passera aux centaines, en observant que les 8 qu'on a au nombre supérieur se réduisent à 7 à cause de celle qu'on a empruntée, et de ces 7 centaines qui restent si on retranche les 7 qui sont au nombre inférieur, il n'en restera pas; de sorte que la différence des nombres 800 et 799 est 1; c'est-à-dire que

$$800 - 799 = 1.$$

Ainsi donc, que les chiffres du nombre supérieur soient respectivement plus grands ou plus petits que ceux du nombre inférieur, pourvu que le chiffre de l'ordre le plus élevé soit plus grand dans le premier que dans le second nombre, ne fusse que d'une unité, la soustraction pourra toujours avoir lieu d'après le procédé indiqué. En suivant ce procédé, il faudra avoir bien soin de tenir compte des emprunts qu'on aura faits sur les chiffres du nombre supérieur.

De la Soustraction des nombres décimaux.

42. Supposons qu'il s'agisse de retrancher 35,6738 de 47,57489; on les écrira comme à l'ordinaire, en observant que la virgule des deux nombres soit sur une même colonne verticale, ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{r} 47{,}57489 \\ 35{,}6738 \\ \hline 11{,}90109 \end{array}$$

et ensuite on opérera comme si les nombres donnés ne renfermaient que des unités entières, car les chiffres placés au rang des décimales représentent des unités qui vont de 10 en 10 fois plus grandes, en allant de droite à gauche, comme ceux qui sont au rang des entiers. Dans notre exemple, on fera attention qu'il y a des cent millièmes au nombre supérieur, et qu'il n'y en a point au nombre inférieur; de sorte que n'ayant rien à retrancher des 9 cents millièmes du nombre supérieur, on les écrira au reste, et on continuera l'opération comme il a été dit, sans s'embarrasser de la virgule, qu'on aura pourtant l'attention de placer dans le reste de manière que ce reste ait autant de chiffres au rang des décimales que celui des deux nombres donnés qui en a le plus, ainsi qu'on le voit dans notre exemple.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

De la Soustraction des nombres complexes.

43. Supposons qu'il s'agisse de retrancher le nombre 46.^{t} 3.^{p} 4.^{po} 6.^{l} du nombre 58.^{t} 2.^{p} 3.^{po} 4.^{l}, on écrira ces nombres comme à l'ordinaire, ainsi qu'il suit :

58.^{t}	2.^{p}	3.^{po}	4.^{l}
46.	3.	4.	6.
11.^{t}	4.^{p}	10.^{po}	10.^{l}

et ensuite on dira : de 4 lignes qui sont au nombre supérieur, on n'en peut pas retrancher les 6 qui sont au nombre inférieur ; mais si l'on emprunte un pouce, il donnera 12 lignes, et 4 qu'on a déjà feront 16, et de 16 on pourra retrancher 6, et on aura 10 lignes de reste que l'on écrira sous la colonne des lignes. On passera aux pouces, en observant de tenir compte du pouce qu'on a emprunté sur les 3 pouces du nombre supérieur, ce qui les réduit à 2 ; or, de 2 on ne peut pas retrancher 4, ce qui obligera d'emprunter un pied qui vaudra 12 pouces et 2 qui nous restent feront 14, et si de 14 on retranche 4 il restera 10 pouces qu'on écrira au reste. On passera aux pieds, en observant que les 2 qui sont au nombre supérieur se réduisent à 1 à cause de l'emprunt qu'on a fait sur les pieds en faveur des pouces. Or, de 1 on ne peut pas retrancher 3, ce qui obligera d'emprunter une toise qui donnera 6 pieds, et 1 qu'on a déjà feront 7, et de 7 on retranchera 3 et il restera 4 pieds qu'on écrira au rang des pieds dans le reste. Enfin on continuera l'opération comme à l'ordinaire, et on aura 11.^{t} 4.^{p} 10.^{po} 10^{l}. pour la différence des nombres donnés.

On voit, d'après ce seul exemple, que toute la difficulté de la soustraction sur les nombres complexes réside dans la loi des subdivisions de l'unité. Ainsi il suffira de l'inspection des six exemples suivans pour faire comprendre entièrement au lecteur le procédé de cette règle.

EXEMPLE 1er.

Si de.	67,678646
On retranche.	58,789758
Il restera . . .	8,888888

EXEMPLE 2^{e}.

	832,0230
	787,9245
	44,0985

EXEMPLE 3^{e}.

246.^{l}	15.^{s}	6.^{d}
238.	18.	11.
7.^{l}	16.^{s}	7.^{d}

EXEMPLE 4^{e}.

743.^{t}	5.^{p}	6.^{po}	4.^{l}
689.	5.	8.	11.
53.^{t}	5.^{p}	9^{po}.	5.^{l}

EXEMPLE 5^{e}.

55.^{j}	15.^{h}	35.^{m}
49.	21.	58.
5.^{j}	17.^{h}	37.^{m}

EXEMPLE 6^{e}.

34.^{l}	1.^{m}	3.^{on}	4.^{g}	2.^{d}	17.^{s}
25.	1.	7.	6.	2.	18.
8.^{l}	1.^{m}	3.^{on}	5.^{g}	2.^{d}	23.^{s}

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3me. LEÇON.

De la Multiplication.

44. La *Multiplication* est une opération par laquelle deux nombres étant donnés, l'un qu'on appelle *multiplicande* et l'autre *multiplicateur*, on répète le multiplicande autant de fois et de parties de fois que le multiplicateur contient d'unités et de parties de l'unité. Le nombre que l'opération fait découvrir se nomme *produit.*

Il suit de là que le produit n'est autre chose que le multiplicande rendu autant de fois et de parties de fois plus grand que le multiplicateur contient d'unités et de parties de l'unité; de sorte que la multiplication a pour objet de rendre un nombre donné autant de fois plus grand que l'indique un autre nombre donné.

Il suit encore de la définition de la multiplication, que le produit est toujours de même espèce que le multiplicande, puisque le produit n'est autre chose que le multiplicande lui-même répété un certain nombre de fois.

Puisque le multiplicateur a pour fonction de répéter le multiplicande un certain nombre de fois, il s'ensuit qu'il est toujours un nombre abstrait. Cependant il arrive très-souvent que le multiplicateur est un nombre concret; mais alors on est censé le remplacer par un nombre abstrait qui contient autant d'unités abstraites et de parties de l'unité abstraite que le nombre concret contient d'unités concrètes et de parties de l'unité concrète : c'est-à-dire qu'on fait toujours abstraction de la nature du multiplicateur pour le regarder comme un nombre abstrait.

De ce que le produit est toujours de même espèce que le multiplicande, il s'ensuit que l'on doit toujours mettre au multiplicande le nombre de l'espèce qu'on doit avoir au produit. Le multiplicande et le multiplicateur prennent le nom de *facteurs* du produit, ou simplement de *facteurs*. Un produit a toujours au moins deux facteurs; il peut d'ailleurs en avoir un nombre quelconque. Quand l'un des facteurs est zéro, le produit est zéro, car répéter un nombre zéro fois, c'est ne le pas répéter du tout.

45. Supposons maintenant qu'on ait fait une multiplication avec un certain multiplicande et un certain multiplicateur, et qu'on ait, en conséquence, obtenu un certain produit; si l'on refait cette multiplication et,

1°. Que l'on observe le même multiplicateur, mais que l'on prenne un nouveau multiplicande *un certain nombre de fois plus grand* que le premier, le nouveau produit sera le *même nombre de fois plus grand* que le premier.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2°. Que l'on conserve le même multiplicateur, mais que l'on prenne un nouveau multiplicande *un certain nombre de fois plus petit* que le premier; le nouveau produit sera *le même nombre de fois plus petit* que le premier.

3°. Que l'on conserve le même multiplicande, mais que l'on prenne un nouveau multiplicateur *un certain nombre de fois plus grand* que le premier, le nouveau produit sera *le même nombre de fois plus grand* que le premier.

4°. Que l'on conserve le même multiplicande, mais que l'on prenne un nouveau multiplicateur *un certain nombre de fois plus petit* que le premier, le nouveau produit sera *le même nombre de fois plus petit* que le premier.

5°. Que l'on prenne un multiplicande et un multiplicateur 10 fois plus grands chacun que les premiers, le produit sera 100 fois plus grand que le premier. Si le multiplicande était 100 fois plus grand et le multiplicateur 10 fois, le produit serait 1000 fois plus grand. En général, le nombre de fois que le produit deviendra plus grand, sera marqué par le nombre de fois que le multiplicande sera plus grand multiplié par le nombre de fois que le multiplicateur sera plus grand.

6°. Que l'on prenne un multiplicande et un multiplicateur un certain nombre de fois plus petits, le produit sera un nombre de fois plus petit marqué par le nombre de fois que le multiplicande sera plus petit multiplié par le nombre de fois que le multiplicateur sera plus petit.

7°. Que l'on prenne un multiplicande un certain nombre de fois plus grand, et un multiplicateur le même nombre de fois plus petit, le produit ne changera pas, parce qu'il y aura compensation.

8°. Enfin, si l'un des facteurs est 100 fois plus grand et l'autre 10 fois plus petit, le produit sera 10 fois plus grand; car dans ce cas le facteur qui est 100 fois plus grand est 10 fois plus grand qu'il ne faudrait pour que le produit ne changeât pas, puisque, s'il n'était que 10 fois plus grand, comme l'autre est 10 fois plus petit, le produit resterait le même. Réciproquement, et par les mêmes raisons, si l'un est 100 fois plus petit et l'autre 10 fois plus grand, le produit sera 10 fois plus petit. En général, le nombre de fois que le produit sera plus grand, sera égal au nombre de fois que l'un des facteurs sera plus grand divisé par le nombre de fois que l'autre sera plus petit, et *vice versa*.

De la Multiplication des nombres composés d'un seul chiffre.

46. A proprement parler il n'y a pas de règle pour faire la multiplication des nombres composés d'un seul chiffre : il faut savoir trouver, par une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

prompte opération de l'esprit, les différens produits qui peuvent résulter de tous ces nombres combinés deux à deux. Ainsi, par exemple, il faut savoir que le produit de 3 par 4 est 12, celui de 5 par 6 est 30, celui de 7 par 8 est 56, celui de 8 par 9 est 72, etc.

Pour donner au lecteur la facilité de s'exercer à trouver promptement tous ces produits, je vais joindre ici la table de multiplication attribuée à Pythagore.

TABLE DE MULTIPLICATION.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Pour construire cette table, on forme d'abord 144 petits carrés disposés comme on le voit : ces carrés sont comme autant de petites cages dans lesquelles on écrit les différens produits des nombres composés d'un seul chiffre, ainsi qu'il suit :

Dans la première colonne de cages on écrit successivement les douze premiers nombres depuis 1 jusqu'à 12, et on compose la première ligne du haut de la même manière; ensuite on compose la seconde ligne en ajoutant 2 à lui-même, ce qui donne le nombre 4; en ajoutant 2 au nombre 4, ce qui donne 6; en ajoutant 2 au nombre 6, ce qui donne le nombre 8, et ainsi de suite

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

jusqu'au nombre 24 qui occupe la dernière cage de cette seconde ligne. Pour former la troisième ligne, on ajoutera le nombre 3 à lui-même et on aura le nombre 6; on ajoutera 3 à 6 et on aura 9; on ajoutera 3 à 9 et on aura 12; et ainsi de suite. Pour former la quatrième ligne, on ajoutera 4 à lui-même et on aura le nombre 8, on ajoutera 4 à 8 et on aura 12, etc., et on continuera de composer les autres lignes de la même manière, en observant d'ajouter successivement 5 pour former la 5^{me}., 6 pour former la 6^{me}., et ainsi de suite, jusqu'à la dernière et 12^{me}., dans la formation de laquelle on ajoutera successivement 12.

Quant à la manière de se servir de cette table, voici comment on s'y prendra :

Supposons qu'il s'agisse de savoir quel est le produit de 7 par 8 : on cherchera d'abord la cage de la première ligne qui contient le facteur 7; l'ayant trouvée, on descendra dans la colonne qui contient cette cage, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la cage qui répond à la ligne dont la première cage contient le facteur 8, et le produit 56 sera dans cette cage qui répond à la fois aux deux qui contiennent les deux facteurs. On s'y prendrait d'une manière semblable pour tous autres facteurs. Continuons d'expliquer la multiplication.

47. Au lieu de faire de suite le produit des facteurs donnés, il est souvent plus convenable de ne faire que l'indiquer d'abord, pour l'effectuer ensuite quand cela est absolument nécessaire.

Pour indiquer la multiplication, on se sert du $\times$ qu'on prononce *multiplié par;* de sorte que, s'il s'agissait de multiplier 7 par 8, on écrirait 7×8, et on prononcerait 7 multiplié par 8. Comme le produit de ces deux nombres est 56, on écrit $7 \times 8 = 56$, pour rappeler que 56 provient de 7 multiplié par 8.

Si le produit devait se composer de plus de deux facteurs, de trois ou d'un plus grand nombre, on indiquerait la multiplication de cette manière: $7 \times 8 \times 9$, s'il s'agissait du produit des nombres 7, 8 et 9; s'il était question du produit des nombres 3, 4, 7, 5, 2, on écrirait $3 \times 4 \times 7 \times 5 \times 2$, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des facteurs.

Pour avoir le produit de $7 \times 8 \times 9$, il faut faire d'abord celui de 7 par 8 ce qui donne 56, et multiplier ce produit par 9. En général, pour avoir le produit d'une suite quelconque de facteurs, il faut faire le produit des deux premiers, puis multiplier ce produit par le troisième, le produit des trois premiers par le quatrième, et ainsi de suite.

48. Pourvu qu'on n'altère pas les facteurs d'un produit, qu'on les prenne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tous, et qu'on n'en prenne pas davantage qu'il en renferme, on peut d'ailleurs faire la multiplication dans l'ordre qu'on voudra, sans changer le produit. Ainsi, par exemple,

$$3\times4\times5=4\times3\times5=4\times5\times3=5\times4\times3=3\times5\times4.$$

Cette proposition, qu'on peut se dispenser de démontrer, et que M. le Gendre a démontrée dans sa théorie des nombres, se désigne en disant qu'*on peut intervertir l'ordre des facteurs d'un produit sans changer ce dernier.*

De la Multiplication des nombres composés de plusieurs chiffres.

49. Supposons d'abord que le multiplicateur ne se compose que d'un seul chiffre, le multiplicande en renfermant un nombre quelconque, et qu'il s'agisse, par exemple, de multiplier le multiplicande 3486 par le multiplicateur 7.

On écrira d'abord ces deux nombres de manière que le multiplicateur soit sous le multiplicande, ainsi qu'on le voit ci-après

Multiplicande.	3486
Multiplicateur.	7
Produit.	24402

et ensuite, on remarquera que, d'après la définition de la multiplication, il s'agit, dans notre exemple, de rendre le multiplicande 7 fois plus grand. Or, pour rendre un nombre 7 fois plus grand, il est clair qu'il faut que chacune des parties qui le composent soient rendues 7 fois plus grandes; mais les parties qui composent un nombre quelconque sont les unités, les dixaines, les centaines, les mille, etc., donc, pour rendre un nombre 7 fois plus grand, il faut multiplier par 7 les unités, les dixaines, les centaines, les mille, etc., de ce nombre, et réunir tous ces résultats partiels.

Ainsi, en commençant par les unités, pour trouver le produit demandé, comme on a 6 au multiplicande, on dira : 7 fois 6 font 42. En 42 unités il y a 4 dixaines et 2 unités; on écrira les 2 unités au produit, et on retiendra les 4 dixaines pour les joindre au produit des dixaines par le multiplicateur 7, lequel produit doit nécessairement être de dixaines. Comme on a 8 dixaines au multiplicande, on dira 7 fois 8 font 56, et 4 dixaines de retenues font 60. Mais en 60 dixaines il y a 0 dixaine et 6 centaines; on posera donc 0 au rang des dixaines du produit, et on retiendra les 6 centaines qui restent, pour les joindre au produit des 4 centaines du multiplicande par le multiplicateur, produit qui doit nécessairement être de centaines. On dira donc 7 fois 4 centaines font 28, et 6 de retenues font 34. En 34 centaines il y a 4 centaines et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3 mille; on écrira les 4 centaines au rang des centaines au produit, et on retiendra les 3 mille pour les joindre au produit des 3 mille du multiplicande par le multiplicateur, lequel produit sera nécessairement de mille. On dira donc 7 fois 3 font 21 et 3 mille de retenus font 24, et on écrira 4 au rang des mille et 2 au rang des dixaines de mille, et on aura 24402 pour le produit demandé, si le procédé a été bien suivi.

Ce procédé aura visiblement lieu, quel que soit le nombre des chiffres du multiplicande, et quel que soit le multiplicateur, pourvu que ce dernier ne se compose que d'un seul chiffre.

50. Avant de faire voir comment on peut étendre ce même procédé au cas où le multiplicateur contient un nombre quelconque de chiffres, il est nécessaire d'établir le principe suivant.

Supposons qu'on multiplie une certaine quantité par 5, d'une part, et que de l'autre on multiplie la même quantité par 4; il est clair que, si l'on ajoute ces deux produits, la somme sera égale à 9 fois la même quantité, car, faire cette somme, c'est ajouter 5 fois le multiplicande à 4 fois ce même multiplicande, et 5 fois une chose plus 4 fois cette chose est évidemment 9 fois cette même chose.

Si on multipliait une certaine quantité, 1°. par 6, 2°. par 7 et 3°. par 8, et qu'on ajoutât les trois produits, la somme serait égale à cette même quantité multipliée par $6+7+8$, c'est-à-dire par 21, car 6 fois plus 7 fois cette quantité font 13 fois la même quantité, et 13 fois cette même quantité plus encore 8 fois cette quantité, font 21 fois la même quantité.

On voit, par analogie, que la quantité donnée pourrait être multipliée, dans le même ordre, par des multiplicateurs quelconques, en quelque nombre que ce fût; en faisant la somme de tous les produits, cette somme serait toujours égale à la quantité donnée multipliée par la somme de tous les multiplicateurs. Cela posé, passons à un exemple de multiplication dans lequel le multiplicateur renferme plusieurs chiffres.

De la Multiplication, dans le cas où les deux facteurs se composent d'un nombre quelconque de chiffres.

51. Supposons qu'il s'agisse de multiplier le nombre 8549 par 743. On écrira ces deux nombres l'un au-dessous de l'autre, comme il suit :

$$\begin{array}{r} 8549 \\ 743 \\ \hline 25647 \ldots\ldots \text{(1)} \\ 34196 \ldots\ldots \text{(2)} \\ 59843 \ldots\ldots \text{(3)} \\ \hline 6351907 \ldots\ldots \text{(4)} \end{array}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Observons d'abord que le multiplicateur 743 est égal à 700 plus 40 plus 3; et que, par conséquent rendre le multiplicande 743 fois plus grand, c'est (n°. 50) multiplier ce multiplicande par 3, puis ce même multiplicande par 40, puis ce même multiplicande par 700, et faire ensuite la somme de tous ces produits.

D'après cela, on voit que pour avoir le produit demandé il faudra multiplier le multiplicande tout entier par les 3 unités du multiplicateur, ce qu'on fera par le procédé du n°. 49, et on aura le produit partiel marqué (1). Puis, multiplier ce même multiplicande par 40, ce qu'on fera en le multipliant par 4, et en écrivant ce second produit partiel marqué (2) au-dessous du premier, en le poussant d'une place vers la gauche, pour le rendre 10 fois plus grand. En effet, comme ce produit était déjà 4 fois plus grand que le multiplicande, et qu'en le poussant d'une place vers la gauche on l'a rendu encore 10 fois plus grand, il sera enfin 40 fois plus grand que le multiplicande, puisque 4 fois 10 font 40. Enfin il faudra multiplier le multiplicande par 700, ce qu'on fera en le multipliant par 7, et en écrivant le produit marqué (3) sous celui marqué (2), en le poussant d'une place vers la gauche, ou de deux places par rapport à celui marqué (1), ce qui le rendra 100 fois plus grand; mais ce dernier produit partiel (3) était déjà 7 fois plus grand que le multiplicande; ce même produit sera donc 700 fois plus grand que le multiplicande. Si donc maintenant on ajoute les trois produits partiels (1), (2), (3), la somme (4) sera le produit demandé.

Il est clair que ce procédé aura lieu dans tous les cas, quel que soit le nombre des chiffres des deux facteurs.

De la Multiplication des nombres décimaux.

52. Supposons qu'il s'agisse de multiplier le nombre 43,8674 par 38,352; on les écrira d'abord comme il suit :

$$\begin{array}{r} 43{,}8674 \\ 38{,}352 \\ \hline 877348 \\ 2193370 \\ 1316022 \\ 3509392 \\ 1316022 \\ \hline 1682{,}4025248 \end{array}$$

et ensuite on fera la multiplication comme s'il n'y avait point de virgule,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

comme si les deux facteurs étaient des nombres entiers. Puis, on observera qu'ayant regardé le multiplicande comme un nombre entier, on l'a regardé comme dix mille fois plus grand qu'il n'était réellement, puisqu'il renferme 4 décimales (n°. 24), et n'ayant pas eu égard à la virgule du multiplicateur, on a rendu ce dernier mille fois trop grand, puisqu'il renferme 3 décimales; le produit est donc (n°. 55) dix millions de fois trop grand, il faudra donc le rendre dix millions de fois plus petit pour le mettre à sa vraie valeur, ce qu'on fera en y mettant 7 chiffres au rang des décimales, ainsi qu'on le voit ci-dessus; c'est-à-dire *que le produit aura autant de chiffres au rang des décimales qu'il y en a au multiplicande et au multiplicateur.*

53. Supposons, pour second exemple, qu'il s'agisse de multiplier 0,054 par 0,0035,

$$\begin{array}{r} 0,054 \\ 0,0035 \\ \hline 270 \\ 162 \\ \hline 0,0001890 \end{array}$$

on fera la multiplication comme s'il y avait 54 entiers au multiplicande et 35 au multiplicateur, ce qui donnera 1890 au produit. Mais comme il y a 3 décimales au multiplicande et 4 au multiplicateur, il en faudra 7 au produit. Or, le produit n'a que 4 chiffres; il faudra donc mettre 3 zéros vers la gauche pour compléter les 7 décimales que doit avoir le produit, mettre une virgule à la gauche du dernier, et un zéro pour tenir la place des entiers, comme on le voit ci-dessus.

Nous expliquerons plus tard la preuve de la multiplication.

Comme pour faire la multiplication sur les nombres complexes il faut connaître les fractions, nous n'expliquerons ces sortes de multiplications qu'après avoir traité des fractions. Voici quelques exemples des multiplications que nous avons expliquées jusqu'ici, pour donner au lecteur la facilité de s'exercer.

1er. EXEMPLE.	2e. EXEMPLE.	3e. EXEMPLE.
80346	64,7034	58,4002
387	2,825	0,2034
562422	3235170	2336008
642768	1294068	1752006
241038	5176272	1168004o
31093902	1294068	11,87860068
	182,7871050	

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4e. EXEMPLE.	5e. EXEMPLE.	6e. EXEMPLE.
0,756786	0,040305	0,3400
0,0024	0,20003	0,002
3027144	120915	0,00068
1513572	80610	
0,0018162864	0,008062209 15	

4me. LEÇON.

De la Division.

54. La *Division* est une opération par laquelle deux nombres étant donnés, l'un qu'on appelle *dividende* et l'autre *diviseur*, on cherche un troisième nombre qu'on appelle *quotient*, qui, multiplié par le diviseur, égale toujours le dividende. En d'autres termes, la *division* est une opération par laquelle un *nombre* et l'un de *ses facteurs* étant donnés, on découvre *l'autre facteur*.

Le dividende et le diviseur peuvent être de même espèce ou d'espèce différente. Si le dividende et le diviseur sont de même espèce, le quotient sera un nombre abstrait, car le produit du quotient par le diviseur, ou du diviseur par le quotient devant égaler le dividende, il faut que ce produit soit de même espèce que le dividende; or le diviseur est de cette espèce, il faut donc que le quotient fasse la fonction de multiplicateur, il est donc un nombre abstrait (n°. 44). Si les deux termes de la division sont d'espèce différente, le quotient sera de même espèce que le dividende; car le produit du quotient par le diviseur ne peut être de même espèce que le dividende, à moins que le quotient ne soit de cette espèce, puisque le diviseur est d'espèce différente.

55. Supposons qu'on ait fait une division avec un certain dividende et un certain diviseur, et qu'on ait, en conséquence, trouvé un certain quotient. Supposons qu'ensuite on refasse cette division, et

1°. En conservant le même diviseur, *mais en prenant un dividende un certain nombre de fois plus grand;* le nouveau quotient sera plus *grand* que le premier, *un nombre de fois égal au nombre de fois que le nouveau dividende est plus grand que le premier.*

En effet, le produit du quotient par le diviseur devant égaler le dividende, et le dividende étant un certain nombre de fois plus grand que le premier, il faut que ce produit soit ce même nombre de fois plus grand, or le diviseur n'a pas changé; donc (n°. 45) le quotient doit être autant de fois plus grand que le dividende.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2°. En conservant le même diviseur, *mais en prenant un dividende un certain nombre de fois plus petit*, le nouveau quotient sera plus *petit* que le premier, *un nombre de fois égal au nombre de fois que le nouveau dividende est plus petit que le premier.*

En effet, le produit du quotient par le diviseur devra être autant de fois plus petit, que le nouveau dividende sera de fois plus petit; or le diviseur n'a pas changé; donc le quotient sera autant de fois plus petit que le dividende.

3°. En conservant le même dividende, *mais en prenant un diviseur un certain nombre de fois plus grand*, le nouveau quotient sera *autant de fois plus petit que le diviseur sera de fois plus grand.*

En effet, le dividende n'ayant pas changé, il faut que le produit du quotient par le diviseur ne change pas non plus; mais le diviseur est un certain nombre de fois plus grand, donc le quotient sera le même nombre de fois plus petit, pour qu'il y ait compensation.

4°. En conservant le même dividende, *mais en prenant un diviseur un certain nombre de fois plus petit*, le quotient deviendra *le même nombre de fois plus grand.*

En effet, le dividende n'ayant pas changé, le produit du quotient par le diviseur ne doit pas changer non plus; mais le diviseur est un certain nombre de fois plus petit, il faudra donc que le quotient soit le même nombre de fois plus grand, pour qu'il y ait compensation.

5°. En prenant *un dividende et un diviseur le même nombre de fois plus grands, le quotient ne changera pas;* car le dividende est bien un certain nombre de fois plus grand, ce qui exige que le produit du quotient par le diviseur soit ce même nombre de fois plus grand; mais le diviseur est ce nombre de fois plus grand, donc le quotient ne changera pas.

6°. En prenant *un dividende et un diviseur le même nombre de fois plus petits, le quotient ne changera pas;* car le dividende étant un certain nombre de fois plus petit, il faut que le produit du quotient par le diviseur soit ce nombre de fois plus petit; mais le diviseur est ce même nombre de fois plus petit; donc le quotient ne changera pas.

De la Division dans le cas où le dividende contient au plus deux chiffres, et le diviseur un seul.

55. Dans ce cas, il n'y a pas, à proprement parler, de véritables règles pour faire la division : il faut savoir faire de mémoire toutes les divisions que ce cas renferme. Ainsi, par exemple, il faut savoir que 35 divisé par 7 donne 5 au

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

quotient, que 56 divisé par 8 donne 7, que 72 divisé par 8 donne 9, etc. C'est sur la supposition qu'on sait faire de mémoire ces petites divisions, qu'on s'appuie dans le procédé qui va suivre.

Pour s'habituer à trouver ces quotiens avec promptitude, on s'exercera au moyen de la table de Pythagore.

De la Division dans le cas où le dividende contient un nombre quelconque de chiffres, et le diviseur un seul.

56. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de diviser 7128 par 8.

J'écrirai d'abord ces deux nombres comme on le voit ci-après,

Dividende.	Diviseur.
	8
7128	Quotient.
72	891
08	
0	

et ensuite je raisonnerai ainsi qu'il suit :

Si je connaissais le quotient, en le multipliant par le diviseur, je produirais le dividende, par conséquent le dividende contient le produit des unités du quotient par le diviseur, plus le produit des dixaines du quotient par le diviseur, plus le produit des centaines du quotient par le diviseur, etc. Ainsi, si je savais où se trouve, dans le dividende, le produit des unités, des dixaines, des centaines, etc., du quotient par le diviseur, comme je connais l'un des facteurs de ces produits (qui est le diviseur), j'en déduirai facilement l'autre facteur (qui serait le quotient), en divisant chacun de ces produits par le diviseur; car tous ces produits ne sont composés que de deux facteurs qui ne contiennent qu'un seul chiffre.

Maintenant je remarque que le produit des unités du quotient par le diviseur ne peut se trouver que dans les unités du dividende, que celui des dixaines du quotient par le diviseur ne peut se trouver que dans les dixaines du dividende, que le produit des centaines du quotient par le diviseur ne peut se trouver que dans les centaines du dividende, etc. Mais le chiffre qui représente les unités simples du dividende ne contiendra pas toujours le produit tout entier des unités du quotient par le diviseur, car ce produit peut donner des dixaines (qui sont réunies dans tous les cas aux dixaines qui proviennent des dixaines du quotient par le diviseur), et comme rien n'indique le nombre des dixaines qui appartiennent à ce produit des unités du quotient par le diviseur, il en résulte, qu'on ne peut commencer la division par les unités simples; au lieu que le produit des unités de l'ordre le plus élevé du quotient par le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diviseur se trouvera toujours tout entier dans les unités de l'ordre le plus élevé du dividende : il faut donc nécessairement commencer la division par les unités de l'ordre le plus élevé du dividende.

Si je considère actuellement que le dividende ne contient que des mille, j'en conclurai facilement que le quotient ne peut contenir au plus que des mille ; or, le produit des mille du quotient par le diviseur, ne peut se trouver que dans les mille du dividende ; et, comme je n'ai que 7 mille au dividende et que le diviseur est 8, j'en conclus que le quotient ne contient pas de mille. Il faut donc que les 7 mille que j'ai au dividende proviennent du produit des centaines du quotient par le diviseur. Ainsi, il faut que je convertisse ces 7 mille du dividende en centaines, ce qui m'en donnera 70 et 1 qui s'en trouve déjà, me feront 71. Si maintenant je divise 71 centaines par le diviseur 8, le quotient sera 8. Mais comme le produit du quotient par le diviseur doit égaler le dividende, je ferai ce produit, je le retrancherai de 71, et il me restera 7 centaines que j'écrirai sous les centaines du dividende. Il faut donc que les 7 centaines qui me restent au dividende proviennent du produit des dixaines du quotient par le diviseur ; je les convertirai donc en dixaines, ce qui m'en donnera 70, et les deux que j'ai au dividende (que j'abaisse à côté du 7) me font 72. Je divise 72 par 8, et j'ai 9 au quotient. Je multiplie ce chiffre 9 du quotient par le diviseur, ce qui me donne 72 ; en retranchant ce produit du dividende partiel 72, il me reste 0 que j'écris au-dessous de 72. J'abaisse le 8, qui me reste au dividende, à côté du reste 0, ce qui me donne un dernier dividende partiel égal à 8 ; je fais la division, et je trouve juste 1 au quotient, ce qui termine l'opération ; d'où il suit que le quotient demandé est 891.

Il est évident que le procédé que nous venons de découvrir est indépendant du nombre des chiffres du dividende.

De la Division, dans le cas où le dividende et le diviseur se composent de plusieurs chiffres.

57. Passons actuellement au cas où le diviseur a un nombre quelconque de chiffres ; et supposons qu'il s'agisse de diviser le nombre 169476 par 348.

Après avoir écrit les deux nombres ainsi qu'il suit :

Dividende.	Diviseur.
169476	348
3027	Quotient.
2436	487
000	

je dis que, d'après les raisonnemens du n°. 56 (qui sont indépendans du nombre des chiffres du dividende et du diviseur), je dois commencer la divi-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sion par les unités des ordres les plus élevés du dividende. Cela posé, je cherche le produit des unités de l'ordre le plus élevé du quotient par le diviseur; or, comme le diviseur contient 3 chiffres, ce produit doit en avoir au moins un pareil nombre; ainsi, je prendrai les trois premiers chiffres vers la gauche du dividende, et je chercherai le produit en question dans le nombre que forment ces 3 chiffres. Mais je vois que ce nombre, n'étant que 169, est moindre que le diviseur, d'où je conclus que le produit du quotient par le diviseur doit se composer de 4 chiffres : je chercherai donc le nombre de fois que le diviseur est contenu dans 1694, ce qui me donnera 4 pour le premier quotient partiel. Je ferai le produit de ce quotient par le diviseur, et je le retrancherai du dividende partiel 1694 de la manière qui suit :

Je dirai : 4 fois 8 font 32. Ces 32 unités sont de l'ordre le moins élevé du dividende partiel 1694; en conséquence il faudra retrancher ces 32 de 4, et comme la soustraction ne peut pas avoir lieu, j'emprunterai 3 unités sur le chiffre 9 suivant vers la gauche, ce qui m'en donnera 30 de l'espèce sur laquelle j'opère, et 4 que j'en avais déjà me feront 34; si maintenant je fais la soustraction indiquée, il me restera 2 que j'écrirai sous le chiffre 4 du dividende. Je retiens dans la mémoire les 3 unités que j'ai empruntées sur le 9 pour les joindre au produit du quotient partiel 4 par les dixaines 4 du diviseur. Je fais ce produit qui me donne 16 et 3 de retenues me font 19. Je retranche ces 19 du chiffre 9 du dividende partiel 1694, et comme la soustraction ne peut pas avoir lieu, j'emprunte une unité sur le chiffre 6 suivant vers la gauche, ce qui m'en donne 10, et 9 que j'ai déjà me font 19. Je fais maintenant la soustraction indiquée, et il me reste 0. Je retiens l'unité que j'ai empruntée sur le chiffre 6 pour la joindre au produit des centaines du diviseur par le quotient 4. Je fais ce produit, et je le trouve égal à 12, ce qui, joint à l'unité que j'ai retenue me fait 13. Je retranche ces 13 des 16 qui me restent au dividende partiel 1694, et j'ai 3 pour reste; de sorte, qu'après avoir retranché, du dividende partiel, le produit du premier chiffre du quotient par le diviseur, il me reste 302. Ces 302 proviennent du produit du chiffre immédiatement inférieur du quotient par le diviseur, lequel produit se compose d'unités 10 fois plus petites que le précédent. Ainsi, je convertirai le nombre 302 en unités 10 fois plus petites, ce qui me donnera le nombre 3020. Mais comme j'ai 7 de ces unités dans le dividende, il en résultera le nombre 3027 pour le produit du chiffre suivant du quotient par le diviseur. (On remarquera que pour former le nombre 3027, il suffit d'abaisser le chiffre 7 à côté du reste 302.). Je cherche le nombre de fois que le diviseur est contenu dans le nouveau dividende partiel, et je trouve 8 que j'écris au quotient. Je dis ensuite

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

8 fois 8 font 64, et de 7 je ne puis retrancher 64; j'emprunte, en conséquence, 6 unités de l'ordre immédiatement supérieur, ce qui me donne 67, en comptant les 7 unités que j'ai déjà, et la soustraction ayant lieu par ce moyen, je trouve 3 pour reste. Je retiens dans la mémoire les 6 unités que j'ai empruntées pour les joindre au produit suivant. Je fais ce produit, je le trouve égal à 32, et en ajoutant les 6 que j'ai retenues, il me vient 38 qu'il faudrait retrancher de 2; mais comme la soustraction ne peut pas avoir lieu, j'emprunte 4 unités de l'ordre immédiatement supérieur, ce qui me donne 40 et 2 font 42; et en retranchant les 38 de 42 il me reste 4, et je retiens les 4 unités que j'ai empruntées. Je multiplie le quotient 8 par le chiffre 3 du diviseur, ce qui me donne 24 et 4 de retenues me font 28 que je retranche de 30, et il me reste 2. De sorte qu'après avoir retranché, du second dividende partiel, le produit du second chiffre du quotient par le diviseur, il me reste 243. A côté de ce reste j'abaisse le chiffre 6 qui reste encore au dividende, et j'ai 2436 pour le nombre qui doit contenir le produit du dernier chiffre du quotient par le diviseur. Pour trouver ce dernier chiffre du quotient, je divise 2436 par le diviseur 348, et j'ai 7 que j'écris à la suite des deux premiers chiffres du quotient. Je multiplie le diviseur par le quotient partiel 7, je retranche le produit du dividende partiel 2436 (ainsi que nous l'avons expliqué pour les autres chiffres du quotient), et je trouve qu'il ne reste rien; d'où je conclus que 487 est le quotient exact du nombre 169476 divisé par 348.

La manière dont nous avons fait les différentes soustractions des chiffres du quotient par le diviseur, pourrait présenter quelque difficulté à concevoir; je vais démontrer qu'il est permis d'opérer ainsi que nous l'avons fait.

La difficulté ne peut résider que dans la manière dont nous avons tenu compte des emprunts que nous avons été obligés de faire; or, d'après les règles de la soustraction, il aurait fallu diminuer le chiffre sur lequel a été fait l'emprunt, d'autant d'unités qu'on lui en avait emprunté; au lieu de cela, on a augmenté le nombre qu'il fallait retrancher de ce chiffre, du même nombre d'unités qu'on aurait dû retrancher de ce même chiffre; d'où il s'en est suivi que les deux nombres à retrancher l'un de l'autre ont été augmentés de la même quantité; par conséquent la différence a été la même que si ces deux nombres avaient eu leur véritable valeur.

Remarque 1re. Lorsqu'on a déterminé le premier dividende partiel, il suffit, pour trouver le chiffre du quotient, de diviser le premier chiffre de ce dividende par le premier chiffre du diviseur, dans le cas où ce dividende partiel a le même nombre de chiffres que le diviseur; dans le cas où le dividende partiel contient un chiffre de plus que le diviseur, il faut diviser les deux premiers

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

chiffres de ce dividende partiel par le premier chiffre du diviseur. Le chiffre du quotient étant trouvé, on vérifie s'il n'est pas trop grand ou s'il n'est pas trop petit. Le quotient partiel sera trop grand, toutes les fois que la soustraction du produit de ce quotient par le diviseur ne pourra pas s'effectuer sur le dividende partiel; et, il sera trop petit, toutes les fois que le reste sera plus grand ou au moins égal au diviseur.

Remarque 2^me^. Quant à la détermination des dividendes partiels, on a dû remarquer que le premier s'obtenait en prenant vers la gauche du dividende total, un nombre de chiffres susceptible de donner un nombre qui puisse contenir le diviseur. Ce nombre de chiffres doit être au moins égal à celui des chiffres du diviseur, et au plus, au nombre des chiffres du diviseur plus un. Quant aux autres dividendes partiels, ils s'obtiennent toujours en abaissant le chiffre suivant du dividende total à côté de chaque reste; d'où il résulte quelquefois des dividendes partiels plus petits que le diviseur, ce qui donne o au quotient. Il faut bien faire attention de mettre un chiffre au quotient, soit o, soit significatif, à chaque chiffre qu'on abaisse du dividende à côté de chaque reste; et réciproquement, d'abaisser à côté du reste un chiffre du dividende à chaque chiffre qu'on écrit au quotient.

De la Division, dans le cas où le quotient ne peut s'obtenir que par approximation.

58. Dans les deux exemples que nous venons de traiter, la division s'est faite exactement; mais il arrive très-souvent qu'après avoir abaissé tous les chiffres du dividende et avoir obtenu tous ceux au rang des entiers du quotient, il y a un dernier reste; de sorte que le produit du quotient par le diviseur n'égale pas le dividende; ainsi le quotient, dans ce cas, n'est pas exact.

Voyons comment on peut obtenir ce quotient par approximation, et pour cela, supposons un exemple dans lequel il s'agisse de diviser 374 par 38.

374	38
320	9,8421
160	
80	
40	
2	

J'écris d'abord les deux nombres comme il a été dit, et je fais la division comme à l'ordinaire, jusqu'à ce que je n'aie plus de chiffre à abaisser du dividende. Ayant ainsi opéré sur notre exemple, j'ai trouvé 32 pour dernier reste. Voici, maintenant, de quelle manière on approchera du véritable quotient.

D'abord je ferai observer qu'on peut le faire de plusieurs manières : ou par le moyen des décimales, ou par les subdivisions suivant l'ancien système. Commençons par le système décimal.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Après les entiers viennent les dixièmes, les centièmes, les millièmes, etc.; or, les entiers sont dix fois plus grands que les dixièmes, les dixièmes dix fois plus grands que les centièmes, etc.; si donc on veut convertir des entiers en dixièmes, il suffira de les multiplier par 10, c'est-à-dire d'ajouter un o vers la droite du nombre qui les exprime; si on veut convertir des dixièmes en centièmes, on ajoutera un o vers la droite du nombre qui exprime les dixièmes, etc. Ainsi les 32 entiers qui nous restent, nous donneront 320 dixièmes, en ajoutant un o vers la droite. Maintenant que la division peut avoir lieu, je la fais, et j'écris le quotient 8, que je trouve, au rang des dixièmes du quotient. Je fais le produit de ce nouveau chiffre du quotient par le diviseur, je le retranche du dividende partiel 320, et j'ai 16 dixièmes de reste que je convertis en centièmes en mettant un o vers la gauche, ce qui me donne 160 centièmes pour le nouveau dividende partiel; je fais la division, je trouve 4 centièmes au quotient, je fais la multiplication et la soustraction comme à l'ordinaire, et je trouve 8 centièmes de reste que je convertis en millièmes, et ainsi de suite jusqu'à ce que le reste que j'obtiendrai soit assez petit pour que je puisse le négliger sans erreur sensible.

Si le diviseur ne contenait point de facteur étranger au nombre 10, en poussant l'opération assez loin, la division se ferait exactement. Dans le cas où le diviseur contient un ou plusieurs facteurs étrangers au nombre 10, il est impossible de trouver un quotient exact. Nous éclaircirons mieux ces dernières circonstances en parlant des fractions.

Passons actuellement aux approximations d'après les subdivisions selon l'ancien système, et reprenons notre exemple, en supposant qu'on a poussé la division jusqu'au reste 32.

374 toises.	38
32 toises.	9.t 5.p 0.po 7.l
6	
192 pieds.	
2 pieds.	
12	
24 pouces.	
12	
48	
24	
288 lignes.	
22 lignes.	
etc.	

S'il s'agit de toises, je multiplie les 32 toises qui restent par 6, pour les convertir en pieds, ce qui m'en donne 192. Je fais la division et je trouve

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

5 pieds au quotient. Je fais ensuite la multiplication et la soustraction, et il me reste 2 pieds que je convertis en pouces en les multipliant par 12, ce qui m'en donne 24, et en faisant la division je trouvé 0 au quotient et les 24 pouces de reste que je multiplie par 12 pour les convertir en lignes, ce qui m'en donne 288. Je fais la division, je trouve 7 lignes au quotient et 22 pour reste, etc.

Si au lieu de toises, il s'était agi de livres de poids, j'aurais multiplié le reste 32 livres par 2 pour avoir des marcs; et après avoir fait la division, le reste par 8 pour avoir des onces; et après avoir fait la division, le nouveau reste par 8 pour avoir des gros, etc. Enfin, quelle que soit l'unité du dividende, on multiplie les restes successifs par le nombre qui exprime le rapport de deux subdivisions consécutives.

De la Division des nombres décimaux.

59. Dans la division des nombres décimaux, il peut arriver trois cas relativement au nombre des décimales de chaque terme de la division, qu'il faut examiner séparément.

1°. Le dividende et le diviseur peuvent avoir le même nombre de décimales; dans ce cas, en faisant abstraction de la virgule de part et d'autre, on rend le dividende et le diviseur le même nombre de fois plus grand; d'où il suit qu'on peut faire la division comme si les nombres donnés étaient entiers, sans rien changer au quotient.

2°. Le dividende peut contenir un plus grand nombre de décimales que le diviseur. Dans ce cas, en supprimant la virgule du diviseur, et la reculant de la gauche dans le dividende, d'autant de places que le diviseur contient de décimales, ce sera rendre les deux termes de la division le même nombre de fois plus grands, ce qui ne changera rien au quotient; mais le dividende, par là, conserve encore des décimales; si donc on voulait le considérer comme un nombre entier, on le considérerait 10, 100, 1000, etc., fois trop grand, selon qu'il conserverait une, deux, trois, etc. décimales; d'où il s'ensuivrait que le quotient serait le même nombre de fois trop grand. Si donc on avait opéré sur ce dividende comme sur un nombre entier, il faudrait mettre au quotient autant de chiffres au rang des décimales que le dividende en contenait de plus que le diviseur, pour mettre ce quotient à sa vraie valeur.

3°. Le diviseur peut contenir un plus grand nombre de décimales que le dividende. Dans ce cas, pour rendre les deux termes de la division le même nombre de fois plus grands, en supprimant la virgule, il faudrait ajouter des zéros au dividende, pour égaliser les nombres de décimales; et la division

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

doit se faire ensuite comme sur deux nombres entiers, sans rien changer au quotient.

Tout cela est évident d'après ce qui précède. Ainsi la division sur les nombres décimaux n'offre pas plus de difficulté que sur les nombres entiers. Voici quelques exemples pour terminer cet article, au moyen desquels les commençans pourront s'exercer.

1er. EXEMPLE.

57.t | 25
7 | 2.t 1p 8.po 1.l etc.
6

42 pieds.
17
12

34
17

204 pouces.
4
12

48 lignes.
23
etc.

2e. EXEMPLE.

57.l | 25
7 | 2.l 0.m 4.on 3.g 2.d 12g etc.
2

14 marcs.
8

112 onces.
12
8

96 gros.
21
3

63 deniers.
13
24

52
26

312 grains.
62
12 reste en grains.
etc.

3e. EXEMPLE.

348676.t | 1728
03076 | 201.t 4.p 8.po 2.l
1348
6

8088 pieds.
1176
12

2352
1176

14112 pouces.
288
12

576
288

3456 lignes.
000

4e. EXEMPLE.

348676 | 1728
03076 | 201,78009 etc.
13480
13840
16000
448
etc.

5e. EXEMPLE.

0,348 | 0,135
780 | 2,57777 etc.
1050
1050
etc.

6e. EXEMPLE.

0,34864 | 0,32
286 | 1,089 etc.
304
16
etc.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

7e. EXEMPLE.

0,001867641	0,83
207	0,0022501
416	
141	
58	
etc.	

8e. EXEMPLE.

846000	0,034
166	24882
300	
280	
80	
12	

Je termine là tout ce que j'ai à dire pour le moment sur la division, et je ne m'arrête pas à indiquer les moyens abrégés qu'on donne ordinairement pour faire la division, par la raison que l'habitude du calcul les suggère à tous ceux qui savent réfléchir sur ce qu'il font, et que beaucoup d'autres choses plus importantes réclament notre temps. C'est par les mêmes raisons que je n'ai point donné non plus de moyens abrégés pour faire la multiplication.

Quant à la preuve de la multiplication, elle se fait en divisant le produit par l'un des facteurs : pour que l'opération soit bien faite, il faut que le quotient de cette division soit égal à l'autre facteur. Quant à celle de la division, elle se fait en multipliant le quotient par le diviseur : si le produit est égal au dividende, la division est bien faite.

5me. LEÇON.

Des Fractions.

60. Si l'on imagine une unité quelconque divisée en un certain nombre de parties égales, une ou plusieurs de ces parties formeront ce qu'on appelle une *fraction*. Par conséquent, il faut deux nombres pour exprimer une fraction : l'un qui indique en combien de parties on suppose l'unité divisée, et l'autre le nombre des parties que comprend la fraction. Le nombre qui indique en combien de parties égales l'unité est divisée, se nomme *dénominateur*, et celui qui tient compte du nombre des parties qu'on a prises, s'appelle *numérateur*. Ainsi, si on avait divisé une unité quelconque en 7 parties égales, et que l'on eût pris 3 de ces parties, le dénominateur serait 7 et le numérateur 3. Pour écrire une fraction, on met le dénominateur sous le numérateur, et on sépare les deux termes par un trait; ainsi, pour écrire la fraction dont nous venons de parler, on mettra le 7 sous le 3, de cette manière : $\frac{3}{7}$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour exprimer verbalement une fraction, on énonce le nombre qui est au numérateur comme à l'ordinaire, et celui qui est au dénominateur, en ajoutant la terminaison *ièmes;* ainsi, pour exprimer la fraction $\frac{3}{7}$ on dira : *trois septièmes;* si on avait $\frac{5}{9}$, on dirait *cinq neuvièmes;* pour $\frac{23}{72}$, on dirait *vingt-trois soixante-douzièmes*, etc.

Par une suite de calculs, on peut être conduit à une fraction plus grande que l'unité entière; aussi appelle-t-on fraction, indistinctement tout nombre exprimé par un numérateur et un dénominateur.

61. Puisque le dénominateur indique en combien de parties égales l'unité se trouve divisée, on peut dire aussi qu'il indique combien il faut de parties pour avoir une unité, c'est-à-dire combien il faut avoir d'unités au numérateur pour avoir un entier. Donc, toutes les fois que le numérateur égalera le dénominateur, la fraction vaudra un entier; ainsi, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{17}{17}$, etc., sont autant d'entiers. Si le numérateur était 2, 3, 4, etc. fois plus grand que le dénominateur, il est clair que la fraction vaudrait 2, 3, 4, etc. entiers, car le numérateur, alors, contiendrait, 2, 3, 4, etc. fois autant d'unités qu'il en faut pour avoir un entier : il faut donc diviser le numérateur par le dénominateur pour tirer les entiers contenus dans une fraction; d'où il suit qu'une fraction n'est autre chose qu'une division indiquée, dont le numérateur est le dividende, le dénominateur le diviseur, et la valeur de la fraction le quotient de cette division.

62. Voyons, maintenant, ce que devient une fraction lorsqu'on fait varier l'un des deux termes ou tous les deux à la fois.

1°. Si l'on rend le *numérateur un certain nombre de fois plus grand*, la fraction *deviendra le même nombre de fois* plus *grand;* car ce sera prendre, des mêmes parties, un nombre qui sera d'autant de fois plus grand.

2°. Si l'on rend le *numérateur un certain nombre de fois plus petit*, la fraction *deviendra le même nombre de fois plus petite;* car ce sera prendre, des mêmes parties, un nombre qui sera d'autant de fois plus petit.

3°. Si l'on rend le *dénominateur un certain nombre de fois plus grand*, la fraction *deviendra le même nombre de fois plus petite;* car l'unité ne changeant pas de grandeur, les parties deviennent d'autant de fois plus petites que le dénominateur est de fois plus grand; or, le numérateur ne change pas; donc la fraction devient d'autant de fois plus petite.

4°. Si l'on rend le *dénominateur un certain nombre de fois plus petit*, la fraction *deviendra le même nombre de fois plus grande;* car, l'unité ne changeant pas de valeur, plus le dénominateur sera petit, plus les parties seront grandes, et comme le numérateur reste le même, il s'ensuit que, etc.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

5°. Si l'on rend les deux termes d'une fraction *le même nombre de fois plus grands*, la fraction ne *changera pas de valeur;* car le numérateur étant un certain nombre de fois plus grand, on prend bien un plus grand nombre de parties de l'unité, mais le dénominateur étant le même nombre de fois plus grand, les parties sont le même nombre de fois plus petites; donc il y a compensation, donc la fraction ne change pas de valeur.

6°. On démontrerait par un raisonnement inverse, *qu'une fraction ne change pas de valeur en rendant ses deux termes le même nombre de fois plus petits.*

Puisqu'une fraction n'est autre chose qu'une division indiquée, le numérateur étant le dividende, et le dénominateur le diviseur, on pourrait démontrer ces mêmes propositions en appliquant aux fractions ce que nous avons dit (n°. 54) sur les variations qui avaient lieu sur le quotient, lorsqu'on faisait varier le dividende et le diviseur.

Indépendamment de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division, dont les fractions sont susceptibles, il y a les huit questions suivantes à résoudre, qui leur sont particulières, et qui sont :

1°. Tirer les entiers contenus dans une fraction.
2°. Convertir des entiers en fraction.
3°. Réduire une fraction à sa plus simple expression.
4°. Evaluer une fraction en subdivisions selon l'ancien système.
5°. Développer une fraction en subdivisions décimales.
6°. Convertir un nombre complexe en fraction.
7°. Passer d'un nombre décimal à un nombre complexe.
8°. Mettre un nombre quelconque de fractions au même dénominateur.

De la manière de tirer les Entiers contenus dans une fraction.

63. Nous avons déjà vu que pour tirer les entiers contenus dans une fraction, il fallait diviser le numérateur par le dénominateur, et que le quotient exprimait ce nombre d'entiers. Ainsi, si j'avais la fraction $\frac{362}{17}$, et que je voulusse trouver les entiers qu'elle contient, je ferais la division indiquée, et j'aurais $21\ \frac{5}{17}$.

De la manière de convertir des Entiers en fraction.

64. Supposons qu'il s'agisse de convertir le nombre $35\ \frac{11}{27}$ tout en fraction. Pour cela je multiplierai les 35 entiers par le dénominateur 27 et j'ajouterai le numérateur 11 au produit, ce qui me donnerait $\frac{956}{27}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La raison de ce procédé est facile à concevoir. En effet, puisqu'on veut exprimer 35 entiers en 27^me. il est clair qu'on veut représenter chaque entier par 27 parties : on aura donc autant de fois 27 parties qu'il y a d'entiers dans 35; c'est-à-dire qu'il faudra multiplier 27 par 35, ce qui donnera 945 ; ainsi 35 entiers égalent $\frac{945}{27}$. Mais comme à 35 entiers il faut joindre $\frac{11}{27}$, il en résulte que $35\frac{11}{27} = \frac{956}{27}$. Il est évident que ce que nous disons sur notre exemple particulier s'appliquerait également à tout autre; *ainsi, pour convertir des entiers en fraction, il faut multiplier les entiers par le dénominateur de la fraction, et ajouter le numérateur au produit.*

De la Réduction des fractions à leur plus simple expression.

65. Puisqu'une fraction ne change pas de valeur en divisant ses deux termes par le même nombre, et qu'un nombre devient d'autant plus petit qu'on le divise par un plus grand diviseur, il en résulte que pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il faut diviser ses deux termes par le plus grand nombre possible; de sorte que tout consiste *à trouver le plus grand diviseur commun aux deux termes de la fraction, et à diviser ensuite ces deux termes par ce plus grand commun diviseur.*

De la recherche du plus grand commun diviseur entre deux nombres donnés.

66. Il est évident que le diviseur demandé ne peut pas être plus grand que le plus petit des deux nombres donnés, puisque la division doit avoir lieu exactement sur ces deux nombres; mais il pourrait lui être égal, car tout nombre se divise par lui-même. Ainsi, on essayera si le plus petit nombre donné divise exactement le plus grand : si la division a lieu, c'est le plus petit nombre qui est le diviseur demandé; si la division n'a pas lieu, il y aura un reste, et on divisera le plus petit nombre donné par le reste de la première division : si cette dernière division a lieu, le reste en question sera le diviseur demandé; si elle n'a pas lieu, on divisera le premier reste par le second, le second par le troisième, le troisième par le quatrième, le quatrième par le cinquième, etc., jusqu'à ce que l'on trouve un dernier reste qui divise le précédent exactement; et ce dernier reste sera le diviseur demandé.

Supposons un exemple, et qu'il s'agisse de trouver le plus grand commun diviseur des deux nombres 1508 et 884, ou si l'on veut des deux termes de la fraction $\frac{884}{1508}$. D'après ce qui vient d'être dit, je diviserai 1508 par 884, en ordonnant les choses sous la forme suivante :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1508	884	624	260	104	52	00
	1	1	2	2	2	

ce qui me donnera 1 au quotient et 624 pour reste; j'écrirai ce reste à la droite du diviseur 884, ainsi qu'on le voit dans le détail de l'opération, et je diviserai 884 par 624; ce qui me donnera 1 au quotient et 260 pour reste; j'écrirai ce reste à côté du premier, et je diviserai 624 par 260; ce qui me donnera 2 au quotient et 104 pour reste. J'écrirai ce reste à côté du second, et je diviserai 260 par 104, ce qui me donnera 2 au quotient et 52 pour reste. Je diviserai 104 par 52, ce qui me donnera 2 au quotient et 0 pour reste; d'où je conclus que 52 est le diviseur demandé : je divise en conséquence les deux termes de la fraction $\frac{884}{1508}$ par 52, et elle devient $\frac{17}{29}$ sans avoir changé de valeur.

Supposons, pour second exemple, qu'il s'agisse de réduire la fraction $\frac{1333}{2451}$ à sa simple expression. En disposant les choses comme dans l'exemple précédent et opérant de même, on trouvera pour le diviseur demandé le nombre 43, ce qui réduira la fraction $\frac{1333}{2451}$ à $\frac{31}{57}$. Voyez les détails ci-après.

2451	1333	1118	215	43	00
	1	1	5	5	

Soit, pour troisième exemple, la fraction $\frac{829}{1697}$ à réduire à sa plus simple expression. Dans ce cas on trouvera l'unité pour le plus grand commun diviseur demandé, ainsi qu'on le voit ci-dessous; ce qui nous apprend que la fraction donnée est irréductible, car tout nombre divisé par l'unité donne un quotient égal à ce nombre lui-même.

1697	829	39	10	9	1	0
	2	21	3	1	9	

Il y a donc des fractions réductibles et des fractions irréductibles : voyons à quoi cela tient.

Pour y parvenir avec facilité, nous commencerons par exposer les principales propriétés des nombres relativement à leur divisibilité les uns par rapport aux autres.

De la divisibilité et de la décomposition des Nombres.

67. Les nombres se divisent en deux classes.

La première comprend tous les nombres qui ne sauraient être le résultat de la multiplication de deux ou d'un plus grand nombre de facteurs entiers;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de sorte que ces nombres ne peuvent être divisés que par eux-mêmes et l'unité : tels sont les nombres 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc. : on les appellent *nombres premiers*.

La seconde classe comprend tous les nombres qui résultent de la multiplication des nombres premiers combinés de toutes les manières possibles. Ainsi, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, etc., sont des nombres de la seconde classe : on les appelle *nombres composés*.

Deux nombres composés sont dits *premiers entre eux*, quand aucun des facteurs de l'un n'est facteur de l'autre : ainsi, les nombres 18 et 25 sont premiers entre eux, car aucun facteur de 18 ne peut diviser 25, et réciproquement, aucun des facteurs de 25 ne peut diviser 18. En effet, 18 n'est divisible que par 2, 3, 6 et 9; et 25 ne peut être divisé que par 5 deux fois de suite. Il y a donc des *nombres premiers absolus* et des *nombres premiers relatifs*.

Il s'agit maintenant de faire voir comment on peut reconnaître qu'un nombre donné est premier ou composé; et, dans le cas où il est composé, comment on peut découvrir les facteurs premiers qui le composent.

68. Tous les nombres premiers ont la propriété de devenir divisibles par 6 en les augmentant ou les diminuant d'une unité, excepté les trois plus petits, 1, 2 et 3. En effet, 5 est un nombre premier : si on l'augmente d'une unité, on aura 6, divisible par 6; 7 est un nombre premier : si on le diminue d'une unité, il viendra 6, divisible par 6; 11 est un nombre premier : si on l'augmente d'une unité, on aura 12, divisible par 6, etc. Si donc il n'y avait que les nombres premiers qui jouissent de cette propriété, ce serait un moyen aussi sûr que simple de reconnaître si un nombre donné est premier ou non. Mais malheureusement il n'en est pas ainsi; une grande quantité de nombres composés jouissent de la même propriété. En effet, 25 est un nombre composé, puisque 5 fois 5 font 25, et cependant en diminuant ce nombre d'une unité il devient 24, divisible par 6; 35 est un nombre composé, puisque 5 fois 7 font 35, et cependant en l'augmentant d'une unité il devient 36, divisible par 6; 49 est un nombre composé, puisque 7 fois 7 font 49, et cependant en le diminuant d'une unité il devient 48, divisible par 6; etc. Ainsi, *de ce que tous les nombres premiers* (*excepté* 1, 2 et 3) *ont la propriété de devenir divisibles par* 6, *étant augmentés ou diminués de l'unité, il ne s'ensuit pas que tout nombre qui aura cette propriété soit un nombre premier; mais seulement, pour qu'un nombre soit premier, il faut nécessairement qu'il jouisse de cette propriété.* De sorte que, nous pouvons affirmer qu'un nombre proposé n'est pas premier, mais nous ne pouvons affirmer qu'il le soit.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si nous considérons les chiffres qui peuvent terminer les nombres premiers, nous ne sommes pas plus heureux ; car les mêmes chiffres peuvent terminer les nombres composés. Ainsi, nous n'avons aucun caractère qui puisse nous faire reconnaître si un nombre donné est premier.

69. Pour décomposer un nombre en ses facteurs simples ou premiers, il faut savoir déterminer, par la seule inspection, dans quel cas un nombre donné est divisible par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, etc. Je vais donner les moyens de reconnaître ces divisibilités sans les démontrer ; mais avant il faut que nous fassions quelques observations sur les nombres pairs et sur les nombres impairs.

Les nombres pairs sont tous divisibles par 2, et les nombres impairs, au contraire, ne sont pas divisibles exactement par 2.

Quand on dit qu'un nombre est divisible par un autre, on entend que *le quotient est un nombre entier, et que le reste est zéro.*

70. Les nombres pairs diffèrent entre eux au moins de 2 unités : si la différence est plus grande que 2, elle sera au moins 4, ou 6, ou 8, ou etc. ; c'est-à-dire que la différence de deux nombres pairs est nécessairement un nombre pair. Si à un nombre pair l'on ajoute ou l'on retranche une unité, il deviendra impair.

De même, deux nombres impairs diffèrent entre eux au moins de 2 unités : si la différence est plus grande, elle sera au moins 4, ou 6, ou 8, ou etc., c'est-à-dire que la différence des deux nombres impairs sera toujours un nombre pair. Si l'on ajoute ou si l'on retranche une unité à un nombre impair, il deviendra pair.

71. Voyons maintenant comment on reconnaît qu'un nombre donné est divisible par l'un des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc.

1°. Nous venons de voir que tous les nombres pairs étaient divisibles par 2, ainsi, *tous les nombres dont le dernier chiffre sera* 0, 2, 4, 6, 8, *seront divisibles par* 2.

2°. *Un nombre est divisible par* 3, *toutes les fois que la somme de ses chiffres, pris comme s'ils ne représentaient que de simples unités, est divisible par trois.* Ainsi, par exemple, le nombre 13452 est divisible par 3, parce que la somme de ses chiffres, pris comme de simples unités étant 15, est divisible par 3.

3°. *Un nombre est divisible par* 4 *toutes les fois que ses deux derniers chiffres forment ensemble un nombre divisible par* 4. Ainsi, par exemple, le nombre 7124 est divisible par 4, parce que les deux derniers chiffres forment ensemble le nombre 24 qui est divisible par 4.

4°. *Pour qu'un nombre soit divisible par* 5, *il faut que son dernier chiffre soit* 0 ou 5 ; ainsi, les nombres 340 et 785 sont divisibles par 5.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

5°. *Pour qu'un nombre soit divisible par* 6, *il faut qu'il soit pair, et que la somme de ses chiffres, pris comme représentant de simples unités, soit divisible par* 3; c'est-à-dire qu'il faut que ce nombre soit à la fois divisible par 2 et par 3.

6°. Quant au diviseur 7, il est plus simple d'essayer la division que de faire usage du moyen qui en dispense.

7°. *Un nombre est divisible par* 8, *toutes les fois que ses trois derniers chiffres forment ensemble un nombre divisible par* 8. Ainsi, le nombre 31832 est divisible par 8, car ses trois derniers chiffres forment le nombre 832 qui est divisible par 8.

8°. *Un nombre est divisible par* 9, *quand la somme de ses chiffres, pris comme ne représentant que de simples unités, est divisible par* 9; de sorte que cette somme devra être 9, 18, 27, 36, etc. Ainsi le nombre 1728 est divisible par 9, parce que la somme de ses chiffres est 18.

9°. Il n'y a qu'un cas où un nombre est divisible par 10 : *c'est lorsque son dernier chiffre est* 0.

10°. *Pour qu'un nombre soit divisible par* 11, *il faut que la somme des chiffres placés aux rangs impairs* (en allant de droite à gauche) *soit égale à celle des chiffres placés aux rangs pairs, ou si ces deux sommes sont inégales, il faut que leur différence soit divisible par* 11. Ainsi le nombre 43571 est divisible par 11, puisque la somme des chiffres des rangs impairs, qui sont 1, 5, 4, est égale à celle des chiffres des rangs pairs, qui sont 7, 3.

Nous ne pousserons pas ces observations plus loin, parce que celles qui précèdent sont plus que suffisantes pour les usages ordinaires, mais nous ferons remarquer que, si un nombre est à la fois divisible par 2 et par 7, il le sera par 14; s'il l'est par 2 et par 9, il le sera par 18; s'il l'est par 2 et par 11, il le sera par 22; s'il l'est par 2, par 3 et par 7, il le sera par 42; enfin, si un nombre est à la fois divisible par plusieurs diviseurs, et que ces diviseurs n'aient entre eux aucun diviseur commun, le nombre en question sera divisible par les produits de tous ses diviseurs pris 2 à 2, 3 à 3, etc.

72. Supposons actuellement que l'on demande les facteurs simples du nombre 360.

J'observe d'abord que les deux derniers chiffres de ce nombre forment un nombre divisible par 4, d'où je conclus que le nombre 360 lui-même est divisible par 4. Mais en effectuant la division, on aura 90 au quotient, qui, étant pair, se trouve divisible par 2 : il suit de là que le nombre 360 est divisible par 8, c'est-à-dire qu'il est trois fois de suite divisible par 2. La somme des chiffres du nombre 360 étant divisible par 9, ce nombre lui-même est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

divisible par 9 ou deux fois de suite par 3. Enfin ce même nombre 360 étant terminé par un zéro, est divisible par 5.

Le nombre proposé 360 renferme donc 3 fois le facteur 2, 2 fois le facteur 3, et une fois le facteur 5. En faisant le produit de tous ces facteurs, on aurait en effet le nombre 360.

Supposons qu'il s'agisse, pour second exemple, de trouver les facteurs simples du nombre 462.

Je vois d'abord que ce nombre est divisible par 2 parce qu'il est pair. Mais la somme de ses chiffres est divisible par 3, il est donc lui-même divisible par 3. Puis, je remarque que la somme de ses chiffres placés aux rangs impairs est égale à celle des chiffres des rangs pairs; le nombre 462 est donc divisible par 11. Enfin en essayant la division par 7, je trouve qu'elle a lieu, d'où j'en conclus que les facteurs simples du nombre proposé 462 sont 2, 3, 7 et 11.

Pour décomposer un nombre en ses facteurs simples, on pourrait suivre la marche suivante, qui peut paraître plus simple à quelques personnes.

Supposons qu'il s'agisse du nombre 30030: on l'écrira comme il suit, en traçant une barre verticale à la droite,

30030	2
15015	3
5005	5
1001	7
143	11
13	13
1	

et ensuite en considérant que ce nombre est pair, on mettra le diviseur 2 à la droite, et on le divisera par ce diviseur 2, ce qui donnera le quotient 15015, qu'on écrira au-dessous. La somme des chiffres du nombre 15015 pris comme s'ils représentaient de simples unités étant divisible par 3, ce nombre le sera aussi; on écrira le diviseur 3 à la droite, on fera la division, et on aura 5005 au quotient, qu'on écrira au-dessous : ce nombre 5005 étant terminé par 5 est divisible par 5; en conséquence on écrira le diviseur 5 à la droite, on fera la division, et on aura 1001 au quotient. On essayera si ce nombre 1001 ne serait pas divisible par 7, et ayant trouvé que cette division peut avoir lieu, on écrira le diviseur 7 à la droite de ce nombre 1001, on divisera ce dernier par 7, et on trouvera le quotient 143, qu'on écrira au-dessous. S'étant assuré que la somme des chiffres des rangs impairs est égale à celle des chiffres des rangs pairs, on en conclura que ce nombre 143 est divisible par 11; on écrira le diviseur 11 à la droite, on fera la division, et on trou-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

vera 13 au quotient, qu'on écrira au-dessous. Le nombre 13 étant un nombre premier, ne peut se diviser que par lui-même, on écrira donc le diviseur 13 à la droite de lui-même, on fera la division, on aura 1 au quotient, l'opération sera terminée, et on aura pour les diviseurs simples du nombre 30030, les nombres 2, 3, 5, 7, 11 et 13; de sorte que

$$30030 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13.$$

73. Outre les facteurs simples d'un nombre, si l'on voulait avoir tous les diviseurs de ce nombre: après avoir trouvé les facteurs simples, on les multiplierait deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc., de toutes les manières possibles, en observant de ne pas répéter les mêmes produits, et, s'il s'y trouvait plusieurs fois les mêmes facteurs simples, de ne pas introduire, dans les produits 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc., le même facteur simple un plus grand nombre de fois qu'il se trouverait dans le nombre proposé; ainsi, par exemple, si le facteur 2 était 3 fois dans le nombre donné, il ne faudrait pas introduire ce facteur plus de 3 fois dans les produits dont on vient de parler.

De l'évaluation des Fractions en Subdivisions de l'unité principale, d'après l'ancien système.

74. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trouver les pieds, les pouces, les lignes, etc., contenus dans $\frac{179}{288}$ de la toise.

Si l'on demandait les entiers contenus dans cette fraction, il faudrait diviser (n°. 63) le numérateur par le dénominateur; si donc la fraction proposée contenait des entiers, il faudrait suivre ce procédé pour les en extraire; faisons donc comme s'il y en avait, et disposons les choses comme à l'ordinaire, ainsi qu'on le voit ci-dessous :

179	288
6	0.^{t} 3.^{p} 8.^{po} 9.^{l}
1074	
210	
12	
420	
210	
2520	
216	
12	
432	
216	
2592	
000	

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et ensuite disons : en 179 il ne peut pas y avoir 288, c'est-à-dire qu'en 179 il y a 0 fois 288 ; ainsi nous aurons 0 toise : nous écrirons donc 0 au rang des toises dans le quotient. Mais 0 fois le diviseur 288 nous donnera 0 au produit qu'il faut retrancher du dividende ; or, si de 179 nous retranchons 0, il nous restera 179 : nous pouvons donc regarder le numérateur 179 de la fraction proposée comme un reste de division ; si donc nous voulons développer ce reste en pieds, pouces, lignes, etc., nous n'aurons qu'à opérer comme nous l'avons expliqué au n°. 58, ainsi qu'on le voit dans le détail de l'opération ci-dessus.

Si, au lieu d'une fraction de la toise, il s'agissait d'une fraction d'une autre mesure ancienne quelconque, en raisonnant de la même manière, on verrait qu'il faudrait toujours opérer comme nous l'avons démontré au n°. 58 pour le cas où l'on voulait approcher du véritable quotient de la division d'un nombre d'anciennes mesures par un diviseur entier quelconque.

De l'évaluation des Fractions en Subdivisions décimales de l'unité principale.

75. Supposons à présent, qu'il s'agisse de développer une fraction quelconque en décimales ; on conçoit que le même raisonnement nous conduirait à diviser le numérateur par le dénominateur, en opérant comme il a été dit au n°. 58 pour approcher en décimales du véritable quotient.

Ainsi, par exemple, si l'on demandait le développement décimal de la fraction $\frac{5}{16}$, on disposerait les nombres comme à l'ordinaire,

$$\begin{array}{r|l} 5 & 16 \\ \hline 50 & 0{,}3125 \\ 20 & \\ 40 & \\ 80 & \\ 0 & \end{array}$$

et après avoir fait la division, on trouverait 0 pour reste, et 0,3125 au quotient, de sorte qu'on aurait exactement $\frac{5}{16} = 0{,}3125$.

Si l'on avait la fraction $\frac{5}{7}$, en faisant la division

$$\begin{array}{r|l} 5 & 7 \\ \hline 50 & 0{,}714285 \\ 10 & \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 5 & \end{array}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on parviendrait à un reste égal à 5, c'est-à-dire à un reste égal au dividende primitif, or, à côté de ce reste il faudrait mettre un 0 si l'on voulait pousser la division plus loin; on aurait donc au quotient un nouveau chiffre égal au premier, qui conduirait, par conséquent, au premier reste, lequel reste, suivi d'un 0, donnerait un nouveau chiffre au quotient égal au second, et ainsi de suite; de sorte qu'on parviendrait à un nouveau reste égal à 5, qui redonnerait encore ce qu'on a déjà obtenu, et ainsi de suite, jusqu'à l'infini.

Il suit de là que la fraction proposée $\frac{5}{7}$ ne peut se développer que par approximation, et non exactement.

En général (et sans exception), on reconnaîtra que le quotient *décimal* d'une division quelconque sera indéfini, *toutes les fois qu'on parviendra à un reste qu'on aura déjà obtenu.*

Il suit donc de ce qui précède qu'il y a des fractions qui se développent exactement en décimales, et d'autres qui ne peuvent se développer que par approximation.

Toutes les fois que le dénominateur ne renfermera point de facteurs étrangers au nombre 10, c'est-à-dire toutes les fois que le dénominateur ne renfermera que le facteur 2 une ou plusieurs fois, ou le facteur une ou plusieurs fois, ou ces deux facteurs combinés ensemble comme on voudra, la fraction sera toujours développable.

Au contraire, elle ne le sera jamais, si le dénominateur renferme un ou plusieurs facteurs étrangers au nombre 10; ainsi, par exemple, si le dénominateur était 6, comme dans 6 il y a le facteur 3 qui n'est pas diviseur de 10, la fraction ne serait pas développable, et ainsi de tout autre dénominateur qui ne serait pas diviseur de dix ou qui contiendrait un ou plusieurs facteurs qui ne seraient pas diviseurs de dix.

6^me^. LEÇON.

Transformation d'un nombre complexe en une fraction ordinaire équivalente.

76. Supposons qu'on nous propose de trouver une fraction ordinaire équivalente au nombre 3.^t^ 4.^p^ 5.^po^ 6.^l^

Pour cela j'observerai que les 6 lignes sont $\frac{1}{2}$ pouce; j'aurai donc 5.^po^ $\frac{1}{2}$ au lieu de 5.^po^ 6^l^; je convertirai les 5.^po^ en demi d'après le procédé donné au n°. 64, et j'aurai $\frac{11}{2}$ pouce. Je passerai ensuite aux pieds, en observant que les pieds

*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

étant 12 fois plus grands que les pouces, la fraction $\frac{11}{2}$ pouce rapportée au pied, telle qu'elle est, serait 12 fois trop grande; pour rapporter cette fraction au pied, il faudra donc la rendre 12 fois plus petite, ce qu'on fera en rendant son dénominateur 12 fois plus grand (n°. 62), et on aura $\frac{11}{24}$ du pied, au lieu de $\frac{11}{2}$ pouce. Ainsi, au lieu de 5.^{po} 6.^{l} on aura $\frac{11}{24}$ du pied. De sorte qu'à la place de 4.^{p} 5.^{po} 6.^{l} on aura 4.^{p} $\frac{11}{24}$. On convertira les 4.^{p} en 24^{mes}, ce qui en donnera 96, et 11 qu'on avait feront 107, c'est-à-dire que 4.^{p} $\frac{11}{24}$ $= \frac{107}{24}$ du pied. De là résultera que le nombre proposé 3.^{t} 4.^{p} 5.^{po} 6.^{l} $= 3.^{t} + \frac{107}{24}$ du pied. On mettra la fraction $\frac{107}{24}$ du pied en rapport de la toise, et pour cela, on multipliera le dénominateur 24 par 6, afin de rendre la fraction 6 fois plus petite en même temps qu'on la rapporte à une unité 6 fois plus grande : on aura donc $\frac{107}{144}$ de la toise au lieu de $\frac{107}{24}$ du pied. Le nombre proposé se réduira donc à 3.^{t} $\frac{107}{144}$. Il ne reste plus, maintenant, qu'à transformer les 3.^{t} en 144.^{mes}, ce qui en donnera 432, et 107 d'autre part en feront 539, de sorte que le nombre proposé 3.^{t} 4.^{p} 5.^{po} 6.^{l} $= \frac{539}{144}$.

Si l'on demandait la fraction équivalente au nombre 5.^{l} 1.^{m} 3.^{o} 4.^{g} 2.^{d} 18.^{g}, on commencerait par observer que les 18 grains sont les $\frac{3}{4}$ du denier, puisqu'il faut 24 grains pour un denier, ce qui fait que 18 grains sont les $\frac{18}{24}$ du denier, ou les $\frac{3}{4}$, en mettant cette fraction $\frac{18}{24}$ à sa plus simple expression : on aura donc 2^{d} et $\frac{3}{4}$. On convertira les 2 deniers en quarts, ce qui en donnera 8 et 3 feront $\frac{11}{4}$. Ayant réduit les deniers en quarts, on passera au gros, et pour cela, comme les gros sont trois fois plus grands que les deniers, on multipliera par 3 le dénominateur 4 de la fraction $\frac{11}{4}$, pour la mettre en rapport du gros, ce qui donnera la fraction $\frac{11}{12}$. On convertira les 4.^{g} en 12^{mes}, ce qui en donnera 48, et 11 qu'on en avait feront $\frac{59}{12}$. Ayant converti les gros en 12^{mes}, on passera aux 3 onces, et pour cela, comme l'once est 8 fois plus grande que le gros, on multipliera le dénominateur de la fraction $\frac{59}{12}$ par 8, pour la mettre en rapport de l'once, et on aura $\frac{59}{96}$. On convertira les 3 onces en 96^{mes}, ce qui en donnera 288, et 59 qu'on en a déjà feront $\frac{347}{96}$. Ayant converti les onces en 96^{mes}, on passera aux marcs, et pour cela, on observera que comme les marcs sont 8 fois plus grands que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les onces, il faudra multiplier le dénominateur de la fraction $\frac{347}{96}$ par 8, pour la mettre en rapport du marc, et on aura $\frac{347}{768}$. On convertira le marc que le nombre donné renferme, en 768^{mes}, ce qui en donnera 768, et 347 qu'on en a déjà, feront $\frac{1115}{768}$. Ayant converti le marc en 768^{mes}, on passera aux livres, en observant que comme la livre est 2 fois plus grande que le marc, il faudra multiplier le dénominateur de la fraction $\frac{1115}{768}$ par 2, pour la mettre en rapport de la livre, et on aura $\frac{1115}{1536}$. Enfin on convertira les 5 livres en 1536^{mes}, on joindra le numérateur 1115, et on aura $\frac{8795}{1536}$; de sorte que le nombre proposé

$$5.^{l}\ 1.^{m}\ 3.^{o}\ 4.^{g}\ 2.^{d}\ 18.^{g} = \frac{8795}{1536}.$$

Transformer un nombre décimal, dont l'unité principale serait une ancienne mesure, en un nombre complexe ordinaire.

77. Supposons, maintenant, qu'on ait le nombre décimal 0,6845, que l'unité principale de ce nombre soit la toise, et qu'on demande le nombre de pieds, de pouces, de lignes, etc. que ce nombre renferme.

Si l'unité du nombre 0,6845, au lieu d'être la toise, était le pied, il est clair que par cela seul ce nombre serait 6 fois plus petit; si donc on voulait qu'il conservât la même valeur en substituant le pied à la toise, il faudrait le multiplier par 6; or, en effectuant cette multiplication, en ayant égard au nombre des décimales qu'on doit avoir au produit, on aura 4,1070, c'est-à-dire 4 entiers et 0,107, en supprimant le zéro qui termine les décimales; mais les entiers sont des pieds; donc le nombre proposé renferme $0.^{t}\ 4.^{p}$, plus 0,107 du pied.

L'unité du nombre 0,107 est le pied; si l'on voulait que cette unité fût le pouce, par cela seul on rendrait ce nombre 12 fois plus petit, et par conséquent, si l'on voulait conserver la valeur de ce nombre, il faudrait en même temps le multiplier par 12. En effectuant cette multiplication on aura 1,284 ou 1 entier et 0,284; mais les entiers sont des pouces, le nombre 0,107 contient donc un pouce et 0,284 du pouce; mais nous avions déjà le nombre proposé $0{,}6845 = 0.^{t}\ 4.^{p} + 0{,}107$, nous aurons donc

$$0,^{t}\ 6845 = 0.^{t}\ 4.^{p}\ 1.^{po} + 0,\ 284.$$

L'unité du nombre 0,284 est le pouce; si donc on voulait que cette unité devînt la ligne, comme la ligne est 12 fois plus petite que le pouce, pour conserver à ce nombre 0,284 la même valeur, il faudrait le multiplier en même temps par 12.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effectuant cette multiplication, on aura 3,408 ou 3 entiers et 0,408; mais les entiers sont des lignes; on aura donc, avec ce qui précède,

$$0,^{t}\,6845 = 0.^{t}\,4.^{p}\,1.^{po}\,3.^{l} + 0,\,408.$$

En multipliant le nombre 0,408 par 12 pour avoir des points, on aura 4,896, ou à peu de chose près 5 entiers, qui sont des points, d'où il s'ensuivra que le nombre proposé $0,^{t}\,6845 = 0.^{t}\,4.^{p}\,1.^{po}\,3.^{l}\,5.^{p}$, à très-peu de chose près.

Il suit de ce procédé, que pour avoir les pieds, pouces, lignes, etc. contenus dans un nombre décimal de la toise, *il faut d'abord multiplier ce nombre par* 6, *et prendre les entiers pour des pieds; multiplier la partie décimale de ce produit par* 12, *et prendre les entiers pour des pouces, multiplier la partie décimale de ce dernier produit par* 12, *et prendre les entiers pour des lignes, et ainsi de suite.*

On conçoit que si au lieu de la toise il s'agissait d'une toute autre mesure ancienne, il faudrait multiplier successivement la partie décimale du nombre donné par les nombres qui indiquent la loi des subdivisions successives.

De la réduction des Fractions au même dénominateur.

78. Pour mettre plusieurs fractions données au même dénominateur, on profite de ce qu'on peut multiplier les deux termes d'une fraction par le même nombre sans en changer la valeur.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de réduire les deux fractions $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}$ au même dénominateur; on multipliera les deux termes de la première par le dénominateur de la seconde, ce qui donnera $\frac{21}{28}$, et les deux termes de la seconde par le dénominateur de la première, ce qui donnera $\frac{20}{28}$, et les fractions proposées $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}$ seront changées en celles-ci: $\frac{21}{28}$; $\frac{20}{28}$, qui seront respectivement égales aux premières, et auront entre elles le même dénominateur. Les nouveaux dénominateurs seront égaux, en ce qu'ils seront tous les deux le produit des deux dénominateurs primitifs.

Si l'on avait un plus grand nombre de fractions, on multiplierait les deux termes de la première par le produit des dénominateurs de toutes les autres; les deux termes de la seconde par le produit des dénominateurs de toutes les autres; les deux termes de la troisième par le produit des dénominateurs de toutes les autres, etc.; mais voici un moyen qui est beaucoup plus simple, et qui a encore l'avantage de conduire au plus petit dénominateur commun possible.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Supposons, en effet, qu'il s'agisse des fractions $\frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{2}{9}, \frac{7}{36}, \frac{9}{48}$: on commencera par décomposer, en leurs facteurs simples (n°. 72), tous les dénominateurs de ces fractions, ce qui donnera :

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$
$$4 = 2 \times 2$$
$$9 = 3 \times 3$$
$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$
$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3.$$

Ensuite, on cherchera le plus petit nombre possible qui soit à la fois divisible par chacun des dénominateurs donnés, et pour cela on raisonnera de la manière suivante :

1°. Pour que ce nombre soit divisible par 8, il faut qu'il renferme trois fois le facteur 2, de sorte qu'il faut que le nombre cherché soit au moins égal à $2 \times 2 \times 2$ (1).

2°. Il faut que le nombre (1) soit divisible par 4, et pour cela il faut qu'il renferme 2 fois le facteur 2, or il le renferme 3 fois.

3°. Il faut que le nombre (1) soit divisible par 9, ce qui exige que ce nombre (1) renferme 2 fois le facteur 3; or il ne le renferme pas du tout, il faut donc y introduire ces deux facteurs, ce qui donnera le nombre

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \qquad (2)$$

4°. Il faut que le nombre (2) soit divisible par 36, mais pour cela il faudrait qu'il renfermât 2 fois le facteur 2 et autant de fois le facteur 3, ce qui a lieu.

5°. Enfin, il faut que le nombre (2) soit divisible par 48, ce qui exige que ce nombre renferme 4 fois le facteur 2 et 1 fois le facteur 3; or, il renferme bien 1 fois le facteur 3, mais il ne renferme que 3 fois le facteur 2; il faut donc y introduire ce facteur encore une fois, ce qui donnera enfin $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ ou 144, pour le nombre demandé. Ainsi le plus petit nombre divisible, à la fois par chacun des dénominateurs donnés, est 144.

1°. Divisons donc ce nombre par le dénominateur 8 de la première fraction, et nous aurons 18 au quotient. Si maintenant nous multiplions les deux termes de cette première fraction $\frac{5}{8}$, la valeur n'en sera pas changée, elle deviendra $\frac{90}{144}$, et aura le nombre 144 pour dénominateur.

2°. Divisons ce même nombre 144 par le dénominateur 4 de la seconde fraction, et nous aurons 36 au quotient. Si actuellement nous multiplions les deux termes de cette seconde fraction $\frac{3}{4}$ par ce quotient 36, nous aurons la fraction $\frac{108}{144}$, dont le dénominateur est encore le nombre 144.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3°. Divisons le même nombre 144 par le dénominateur 9 de la troisième fraction, et nous aurons 16 au quotient. Multiplions les deux termes de cette troisième fraction $\frac{2}{9}$ par ce quotient 16, elle deviendra $\frac{32}{144}$, et aura 144 pour dénominateur.

4°. Divisons le nombre 144 par le dénominateur 36 de la quatrième fraction, et nous aurons 4 au quotient. Multiplions les deux termes de cette quatrième fraction $\frac{7}{36}$ par ce quotient 4, et elle deviendra $\frac{28}{144}$, et aura encore 144 pour dénominateur.

5°. Enfin divisons ce nombre 144 par le dénominateur 48 de la cinquième fraction, et nous aurons 3 au quotient. En multipliant ensuite par 3 les deux termes de cette cinquième fraction $\frac{9}{48}$, elle deviendra $\frac{27}{144}$, et aura encore le dénominateur 144 : toutes nos fractions seront donc réduites à ce même dénominateur 144, et au lieu des fractions données $\frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{2}{9}, \frac{7}{36}, \frac{9}{48}$; nous aurons celles-ci: $\frac{90}{144}, \frac{108}{144}, \frac{32}{144}, \frac{28}{144}, \frac{27}{144}$ qui auront respectivement les mêmes valeurs que les fractions données.

De l'addition des Fractions.

79. Pour faire l'addition de tant de fractions qu'on voudra, il est clair qu'il faut d'abord les mettre au même dénominateur, pour qu'elles soient de même espèce, et ensuite, faire l'addition des numérateurs, donner à la somme le dénominateur commun, et tirer les entiers contenus dans la fraction résultante de cette addition.

Ainsi, par exemple, s'il s'agissait de faire l'addition des fractions $\frac{5}{8}+\frac{3}{4}+\frac{2}{9}+\frac{7}{36}+\frac{9}{48}$, on les mettrait d'abord au même dénominateur, ce qui donnerait $\frac{90}{144}+\frac{108}{144}+\frac{32}{144}+\frac{28}{144}+\frac{27}{144}$, et ensuite on ferait la somme des numérateurs, qui serait $\frac{285}{144}$, et en tirant les entiers contenus dans cette fraction, on aurait $1+\frac{141}{144}$, de sorte que

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{4}+\frac{2}{9}+\frac{7}{36}+\frac{9}{48}=1+\frac{141}{144} \text{ ou } 1+\frac{47}{48}.$$

De la soustraction des Fractions.

80. Pour retrancher une fraction d'une autre fraction, il est évident qu'il faut d'abord mettre ces deux fractions au même dénominateur, ensuite cher-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cher la différence des numérateurs, et donner à cette différence le dénominateur commun.

Ainsi, par exemple, si l'on voulait retrancher la fraction $\frac{5}{7}$ de $\frac{3}{4}$, on mettrait d'abord ces deux fractions au même dénominateur, ce qui donnerait $\frac{20}{28}$ et $\frac{21}{28}$, et on retrancherait ensuite le numérateur de la première, de celui de la seconde, et on aurait $\frac{1}{28}$; de sorte que $\frac{3}{4} - \frac{5}{7} = \frac{1}{28}$.

De la multiplication des Fractions.

81. Supposons qu'il s'agisse de multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$: s'il s'agissait de multiplier $\frac{3}{4}$ par 5 entiers, on aurait pour objet de rendre cette fraction 5 fois plus grande; mais (n°. 62) pour rendre une fraction 5 fois plus grande, il faut multiplier le numérateur de cette fraction par 5, ce qui donnerait $\frac{3 \times 5}{4}$, mais ce n'était pas par 5 qu'on voulait multiplier $\frac{3}{4}$, ce n'était que par $\frac{5}{7}$; or, les entiers sont 7 fois plus grands que les 7^mes, on a donc multiplié $\frac{3}{4}$ par un nombre 7 fois trop grand : le produit $\frac{3 \times 5}{4}$ est donc 7 fois trop grand; pour le mettre à sa vraie valeur il faudra donc le rendre 7 fois plus petit; mais (n°. 62) pour rendre une fraction 7 fois plus petite, il faut rendre son dénominateur 7 fois plus grand; on aura donc $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}$. D'où il suit que pour avoir le produit de deux fractions, *il faut multiplier les deux numérateurs entre eux pour avoir le numérateur du produit, et les deux dénominateurs entre eux pour avoir le dénominateur du même produit.*

En général, quel que soit le nombre de fractions qu'on ait à multiplier, *le numérateur du produit sera égal au produit de tous les numérateurs, et le dénominateur du même produit sera égal au produit de tous les dénominateurs.*

Ainsi, par exemple, si l'on demandait le produit des fractions $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{3}{8}, \frac{4}{5}$, on aurait $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times 5 \times 3 \times 4}{4 \times 7 \times 8 \times 5}$.

En effet, le produit des deux premières est $\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$; or, ce produit étant une fraction, on pourra le multiplier par la troisième fraction, comme s'il ne s'agissait que de deux fractions, et le produit sera $\frac{3 \times 5 \times 3}{4 \times 7 \times 8}$; ce dernier produit étant une fraction unique, on pourra le multiplier par la qua-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trième fraction, et on aura $\frac{3\times5\times3\times4}{4\times7\times8\times5}$, et ainsi de suite pour autant de fractions qu'on voudra; ainsi donc on aura effectivement

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{8}\times\frac{4}{5}=\frac{3\times5\times3\times4}{4\times7\times8\times5}.$$

Avant de faire les multiplications indiquées dans ce résultat préparatoire, on se rendra compte s'il n'y aurait pas de facteurs communs aux deux termes de la fraction, et on supprimera tous ceux qu'on découvrira, pour ne rien faire d'inutile, et pour que le résultat soit à sa plus simple expression. Dans notre exemple on trouvera les facteurs communs 4 et 5, qu'on supprimera, et il ne restera plus que $\frac{3\times3}{7\times8}$, de sorte que

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{8}\times\frac{4}{5}=\frac{3\times3}{7\times8}=\frac{9}{56}.$$

De la division des Fractions.

82. Supposons qu'il s'agisse de diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$. S'il fallait diviser $\frac{3}{4}$ par 5 entiers, on aurait pour objet de rendre $\frac{3}{4}$ 5 fois plus petit; mais (n°. 62) on rend une fraction 5 fois plus petite en multipliant son dénominateur par 5; on aurait donc alors $\frac{3}{4\times5}$. Mais ce n'était pas par 5 entiers qu'on voulait diviser $\frac{3}{4}$, ce n'était que par $\frac{5}{7}$; or, les entiers sont 7 fois plus grands que les 7^mes; on a donc divisé par un diviseur 7 fois trop grand, le quotient (n°. 55) sera donc 7 fois trop petit; il faudra donc le rendre 7 fois plus grand pour le mettre à sa vraie valeur, ce qu'on fera, comme on sait, en multipliant le numérateur de ce quotient $\frac{3}{4\times5}$ par 7, ce qui donnera $\frac{3\times7}{4\times5}=\frac{21}{20}$; de sorte que $\frac{3}{4}$ divisés par $\frac{5}{7}$ donnent $\frac{21}{20}$ au quotient.

Si l'on examine, maintenant, comment on a fait pour trouver ce quotient, on verra qu'*on a multiplié le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur, et le dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur;* ce qui revient *à multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée;* c'est-à-dire que le quotient de $\frac{3}{4}$ divisé par $\frac{5}{7}$ revient à $\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}=\frac{21}{20}$

De la Multiplication des nombres complexes.

83. On peut faire la multiplication des nombres complexes de deux manières : *par parties aliquotes* et *par fractions.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On appelle parties aliquotes d'un nombre, les parties de ce nombre qui peuvent le diviser exactement, et parties aliquantes, au contraire, les parties qui ne sont pas diviseurs de ce nombre. Ainsi, par exemple, 7 est une partie aliquante de 10, parce que 7 ne peut pas diviser exactement 10; mais 7 peut se décomposer en deux parties 2 et 5, qui sont toutes les deux des parties aliquotes de ce nombre 10.

De la Multiplication des nombres complexes par parties aliquotes.

84. Supposons qu'il s'agisse de multiplier 14.^{t} 5.^{p} 6.^{po} 6.^{l} par 12.^{t} 3.^{p} 4.^{po}, on écrira le multiplicateur au-dessous du multiplicande, ainsi qu'il suit :

	14.^{t}	5.^{p}	6.^{po}	6.^{l}	
	12.	3.	4.		
(*a*). . . .	28.^{t}				
(*b*). . . .	14.				
(1). . . .	6.				
(2). . . .	4.				
(3). . . .	1.				
(4). . . .	0.	0.^{p}	6.^{po}		
(5). . . .	7.	2.	9.	3.^{l}	
(6). . . .	0.	4.	11.	8.	4.^{p}
(7). . . .	187.^{t}	2.^{p}	2.^{po}	11.^{l}	4.^{p}

et ensuite on multipliera les entiers du multiplicande par les entiers du multiplicateur seulement, ce qui donnera les deux produits partiels (*a*), (*b*). Puis, on multipliera les pieds du multiplicande par les entiers seulement du multiplicateur, et pour cela on observera que si au lieu de 5 pieds on avait une toise au multiplicande, le produit de cette toise, par le multiplicateur, serait égal à ce multiplicateur lui-même; or, si au lieu d'une toise on n'avait que 3 pieds, qui sont la moitié d'une toise, le produit serait la moitié de celui d'une toise, c'est-à-dire, la moitié du multiplicateur. Partageons les 5 pieds que nous avons en deux parties aliquotes de 6, l'une 3 et l'autre 2, et d'abord cherchons le produit pour 3 pieds, qui sera la moitié des entiers du multiplicateur, et on aura le produit partiel (1); ensuite, cherchons le produit pour 2 pieds, qui, étant le tiers de 6, nous donnera le tiers des entiers du multiplicateur, et nous aurons le produit partiel (2).

On passera aux 6 pouces du multiplicande, et on observera que 6 pouces étant la moitié d'un pied ou le quart de deux pieds, le produit de 6.^{po} ne sera que le quart de celui de 2 pieds, qui est le produit partiel (2) : on prendra donc le quart de ce produit (2), ce qui donnera le produit (3).

On passera aux 6 lignes du multiplicande, et on observera que 6 lignes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sont la moitié d'un pouce ou le douzième de 6 pouces; pour le produit de 6^{l} il faudra donc prendre le douzième du produit (3) de 6 pouces, ce qui donnera le produit partiel (4), et toutes les parties du multiplicande seront multipliées par les entiers du multiplicateur. Il reste encore à multiplier les mêmes parties du multiplicande par les pieds et les pouces du multiplicateur.

Si le multiplicateur renfermait encore une toise, elle donnerait une fois le multiplicande tout entier; mais il ne renferme encore d'abord que 3, qui, étant la moitié d'une toise, doivent donner un produit égal à la moitié de celui d'une toise, et par conséquent égal à la moitié du multiplicande, ce qui donnera le produit partiel (5). Ensuite, le multiplicateur contient encore 4 pouces, qui sont le tiers d'un pied ou le neuvième de 3 pieds. Le produit de 4 pouces, qui est marqué (6), sera donc égal au neuvième de celui (5) de 3 pieds, et tous les produits partiels seront obtenus; il ne restera donc plus qu'à en faire la somme, que l'on trouvera égale à $187.^{t}\ 2.^{p}\ 2.^{po}\ 11.^{l}\ 4.^{p}$

Dans les multiplications complexes faites par parties aliquotes, il est important de se rappeler (n°. 44) que le produit devant être de même espèce que le multiplicande, il faut prendre pour multiplicande le nombre de l'espèce qu'on doit avoir au produit; car, lorsqu'on fait le contraire, on risque fort de s'embrouiller dans le détail de l'opération.

De la Multiplication des nombres complexes par fraction.

85. Supposons encore qu'il s'agisse de multiplier le nombre $14.^{t}\ 5.^{p}\ 6.^{po}\ 6.^{l}$ par $12.^{t}\ 3.^{p}\ 4.^{po}$ On cherchera d'abord (n°. 74) une fraction équivalente à chaque facteur, et on aura

$$14.^{t}\ 5.^{p}\ 6.^{po}\ 6.^{l} = \frac{2149}{144},$$

$$12.^{t}\ 3.^{p}\ 4.^{po} = \frac{113}{9};$$

on multipliera (n°. 81) ces deux fractions l'une par l'autre, ce qui donnera $\frac{2149 \times 113}{144 \times 9} = \frac{242837}{1296}$, et ensuite on tirera les entiers contenus dans le produit $\frac{242837}{1296}$, et on aura $\frac{242837}{1296} = 187.^{t}\ 2.^{p}\ 2.^{po}\ 11.^{l}\ 4.^{p}$ qui est le même produit que celui que nous avons obtenu (n°. 84) par parties aliquotes.

De la Division des nombres complexes.

86. Le moyen le plus convenable de faire la division des nombres complexes, est de chercher une fraction équivalente au dividende, et la diviser (n°. 76) par une autre fraction équivalente au diviseur.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ainsi, par exemple, si l'on voulait diviser 187. 2.^{p} 2.^{po} 11.^{l} 4.^{p} par 12.^{t} 3.^{p} 4.^{po}, on chercherait la fraction équivalente au dividende, et celle équivalente au diviseur, et on aurait $187.^{t}\ 2.^{p}\ 2.^{po}\ 11.^{l}\ 4.^{p} = \frac{242837}{1296}$, et $12.^{t}\ 3.^{p}\ 4.^{po} = \frac{113}{9}$. Cela fait, on (n°. 82) multiplierait la première par l'inverse de la seconde, et on aurait $\frac{242837 \times 9}{1296 \times 113} = \frac{2149}{144}$, en réduisant le produit à sa plus simple expression (n°. 81), et ensuite on tirerait les entiers contenus dans ce produit, qui serait équivalent au quotient demandé, et on aurait :

$\frac{2149}{144} = 14.^{t}\ 5.^{p}\ 6.^{po}\ 6.^{l}$

Cet exemple suffit pour faire voir en quoi consiste cette méthode de faire la division des nombres complexes.

De la conversion des nouvelles Mesures en anciennes, et des anciennes en nouvelles.

87. L'introduction des nouvelles mesures, et l'existence des anciennes, qui ne sont pas encore entièrement abolies, exigent que l'on sache convertir un certain nombre de mesures anciennes en nouvelles, et réciproquement un certain nombre de mesures nouvelles en anciennes, de manière que ces deux nombres de mesures expriment toujours la même grandeur, du moins à peu de chose près.

Pour convertir ainsi les anciennes mesures en nouvelles, et les nouvelles en anciennes, il faut connaître le rapport qui existe entre les anciennes mesures et les nouvelles de même espèce, et réciproquement celui qui existe entre les nouvelles et les anciennes : c'est-à-dire, qu'il faut savoir que,

1°. La toise vaut en mètres $1^{m},94904$ ou plus exactement $1^{m},949036591\overline{2}$.
2°. Le mètre vaut en toises. . $0^{t},513074$ ou en subdivisions anc. $0^{t},3^{p}.\ 0^{po},11^{l},296$.
3°. La livre de poids de 16 onces vaut en kilogram. $0^{k},4895$, ou en grammes $489^{g},5$.
4°. Le kilogramme vaut en livres $2^{l},04286$, ou $2^{l},\ 0^{m},\ 0^{on}.\ 5^{g},\ 1^{d},\ 11^{s}$.

Nous donnerons les rapports des mesures de superficie et ceux des mesures cubiques ou de capacité, lorsque nous traiterons de l'étendue des surfaces et des volumes.

Faisons voir, maintenant, comment, avec ces rapports, on peut convertir 1°. un nombre quelconque de mètres en toises; 2°. un nombre quelconque de toises en mètres; 3°. un nombre quelconque de kilogrammes en livres, et 4°. un nombre quelconque de livres en kilogrammes.

88. Supposons, d'abord, qu'on nous demande le nombre de toises qu'il y a dans $348^{m},567$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour résoudre la question, on observera que, puisqu'une toise vaut $1^m,94904$, il faudra chercher le nombre de fois que cette valeur de la toise est contenue dans le nombre de mètre proposé, c'est-à-dire qu'il faudra diviser le nombre $348^m,567$ par $1^m,94904$, et le quotient $178^t,84035$ sera le nombre de toises demandé.

On aurait pu résoudre la question, en observant que le mètre étant égal à $0^t,513074$, on doit avoir autant de fois ce nombre de toises $0^t,513074$, que le nombre proposé $348^m,567$ contient de mètres; d'où l'on voit que pour avoir le nombre de toises demandé, il faudra multiplier le nombre $348^m,567$ par $0^t,513074$, et le produit $178^t,840$ sera le nombre de toises demandé, qui, comme on voit, est à peu de chose près le même que celui obtenu par le premier moyen. Comme il est plus simple de faire une multiplication qu'une division, il est clair qu'il faut préférer le second moyen.

89. Supposons qu'on nous demande le nombre de mètres qu'il y a dans le nombre de toises $187.^t 2.^p 2.^{po} 11.^l 4.^p$; dans ce cas nous chercherons d'abord la fraction équivalente (n°. 76) à la partie complexe de ce nombre de toise, qui est $\frac{485}{1296}$, cette fraction étant rapportée à la toise, et le nombre de toises proposé deviendra $187^t + \frac{485}{1296}$. Nous développerons ensuite la fraction $\frac{485}{1296}$ en décimales (n°. 75), et nous aurons $187^t,374228$.

Ensuite, comme la toise vaut en mètre $1^m,94904$, il est clair qu'on aura autant de fois $1^m,94904$ qu'il y a de toises dans le nombre proposé $187^t,374228$: c'est-à-dire qu'il faudra multiplier ces deux nombres l'un par l'autre, et le produit $365^m,1999$ sera le nombre de mètres demandé, en supprimant les 7 dernières décimales.

90. On conçoit maintenant que si l'on voulait le nombre de livres contenues dans un nombre de kilogrammes donné, il faudrait multiplier ce nombre de kilogrammes par $2.^l 04286$, qui est la valeur en livres d'un kilogramme, et prendre le produit pour le nombre de livres demandé.

91. On conçoit aussi que si l'on demandait le nombre de kilogrammes contenus dans un nombre de livres donné, il faudrait multiplier ce nombre de livres par $0^k,4895$, qui est en kilogrammes la valeur d'une livre, et prendre le produit pour le nombre de kilogrammes demandé.

Ce qui vient d'être dit me paraît suffisant pour faire entendre comment il faut opérer pour convertir un nombre en un autre d'une unité différente, mais de même espèce, les rapports réciproques des deux unités étant donnés.

92. Si l'on avait besoin du rapport du pied au mètre, on n'aurait qu'à prendre le 6^{me}. de celui de la toise à la même mesure (le mètre), puisque le pied est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

6 fois plus petit que la toise. Réciproquement, si l'on avait besoin du rapport du mètre au pied, on multiplierait par 6 le nombre qui exprime la valeur du mètre par rapport à la toise, parce que le mètre contient évidemment 6 fois plus de pieds que de toise. On conçoit que, ayant égard à la loi de décroissement des subdivisions d'une unité quelconque, dès que l'on connaîtra les rapports réciproques d'une unité principale à une autre, on pourra facilement trouver les rapports réciproques des subdivisions de l'une à l'autre unité principale, lorsqu'on en aura besoin.

Ceux qui désireront trouver tous ces rapports calculés d'avance, n'auront qu'à ouvrir l'annuaire du bureau des longitudes de 1826, et ils y verront des tables assez étendues sur ce sujet. J'ai cru devoir me dispenser d'insérer de pareilles tables dans cet ouvrage, parce que j'ai remarqué que les personnes habituées au calcul ont de la répugnance à admettre les comptes faits, parce qu'ils se méfient de leur exactitude, ce qui fait qu'elles aiment mieux faire elles-mêmes les calculs que nous venons d'indiquer, lorsqu'elles en ont besoin.

92. Comme dans les sciences et dans les arts on a souvent besoin de considérer les mesures étrangères, anciennes et modernes, je crois utile de donner ici les rapports des principales de ces mesures à celles de France : c'est ce que renferme le tableau suivant.

TABLEAU des rapports des principales Mesures étrangères, anciennes et modernes, à la toise et décimales de la toise, au pied, à la ligne et décimales de la ligne (mesure de l'Académie des Sciences de Paris), au mètre, et au kilogramme.

DÉSIGNATION DES MESURES ET DES AUTORITÉS.	RAPPORTS DES MESURES		
	à la toise, etc.	au mètre.	au kilogramme.
Mesures antiques.			
Le mille romain, cité dans Pline, suivant Lalande (Astron., tom. 3)	757t, 50		
Le mille romain de Strabon, suivant Cassini (mém. de l'Acad. 1702)	766, 00		
Le stade des anciens Romains, de 625 pieds romains, suivant Lalande (Astron. tom. 3)	94, 693		
Le stade égyptien, suivant Freret et Leroy (Ruines des monumens de la Grèce)	114, 13		
Le pied des anciens Romains (mém. acad. 1757)	10.po 10l, 90		
— suivant Paucton	11. 4, 956		
— suivant Villapande et Riccioli	11. 1, 800		

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

DÉSIGNATION DES MESURES ET DES AUTORITÉS.	RAPPORTS DES MESURES à la toise, etc.	au mètre.	au kilogramme.
Le pied des anciens Romains, suivant Dominique Cassini.	11.po 0l, 48		
— suivant Petit et Rondelet (Traité de l'art de bâtir).	11. 0, 00		
— suivant la Condamine et Lalande.	10. 11, 00		
— suivant Freret et Auzoult.	10. 11, 20		
— suivant Lucas, Pœtus, Fabretti, Picard, le père Jacquier, Barthélemi, Danville, David et le Roi.	10. 10, 6		
— Suivant Stuard	10. 10, 37		
Le terme moyen des 9 évaluations précédentes est.	11. 0, 145		
Le pied grec, pris au Capitole, suivant Auzoult	11. 3, 80		
Le pied grec, suivant le Roy	11. 4, 56		
Le pied arabe (anciens mém. de l'Acad., tom. 6, pag. 532).	9. 10, 72		
Le pied d'Alexandrie, *ibid.*	13. 2, 90		
La coudée des Hébreux, suivant Eisenschmid	19. 10, 40		
Le pied philetérien, d'après M. Rondelet (art de bâtir).	13. 2, 4	0, 357	
Le pied égyptien, d'après M. Rondelet (art de bâtir)	9. 10, 8	0, 268	
La coudée romaine, d'après le même.	16. 6, 00	0, 447	
La coudée philetérienne (1), d'après le même.	19. 9, 60	0, 536	
La coudée égyptienne (2), d'après le même	14. 10, 20	0, 402	
Le pied grec, d'après le même.	11. 5, 5	0, 310	
La coudée grecque, d'après le même.	17. 2, 25	0, 465	
Mesures anglaises.			
Le mille d'Angleterre; suivant Lalande (Astronomie)	830t,		
Le pied anglais ou *foot*, suivant Gauthey (const. des ponts).		0, 3049	
— (Philos. trans. 1768, page 326).	11.po 3l, 1154	0,	
La verge d'Angleterre (yard), suivant Gauthey (const. des Ponts).		0, 9146	
La livre *Troy*, de douze onces, d'après le même.			0, 372919
La livre *avoir du poids* de seize onces, d'après le même			0, 453495
Mesures espagnoles.			
Le vare de Castille (mém. acad. 1747).	30. 11, 0		
— suivant Gauthey (const. des ponts).		0, 8610	
Le marc de Castille, suivant le même			0, 235033
Mesures italiennes.			
Le *Braccio da panno* de Florence, suivant le père Ximenez.	21. 6, 454		
— suivant Gauthey (const. des ponts)		0, 5819	
La livre de Florence, par le même.			0, 339510
Le palme moderne de Rome, suivant le P. Boscovich.	8. 3, 033		
—— suivant Gauthey (const. des ponts).		0, 2234	
La canne des architectes de Rome (elle vaut 10 palmes)		2, 2339	
La livre romaine de douze onces, suivant le même.		0, 339191	

(1) La coudée philétérienne est celle dont les Egyptiens se servaient pour mesurer la crue du Nil et pour l'arpentage des terres (Rondelet, art de bâtir).

(2) Cette coudée portait le nom de *coudée lithique* ou *xilopristique*, parce qu'elle servait dans les arts à mesurer les pierres et les bois (même autorité).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

DÉSIGNATION DES MESURES ET DES AUTORITÉS.	RAPPORTS DES MESURES à la toise, etc.	au mètre.	au kilogramme.
Le palme de Naples, suivant Auzoult	9.po 8l, 15		
— suivant Gauthey	.....	0,2628	
La livre de douze onces, à Naples, d'après le même	.....	.....	0,320760
Le rotolo, à Naples, d'après le même	.....	.....	0,891001
Le pied de Venise, suivant Cristiani (delle misure)	12, 10, 00		
— suivant Gauthey	.....	0,3467	
La *libra grossa*, à Venise, d'après le même	.....	.....	0,477476
La livre, *peso sottile*, à Venise, d'après le même	.....	.....	0,301480
Le pied de Padoue, suivant Cristiani	15. 9, 9		
Le pied de Turin, suivant le P. Beccaria	18. 11l,70		
Le pied *liprando*, à Turin, d'après Gauthey	.....	0,5137	
Le marc de Turin, d'après le même	.....	.....	0,245936
Le *Broccio di fabrica*, à Milan, d'après le même	.....	0,5955	
Mesures allemandes.			
Le pied du Rhin, à Leyde, et celui du Danemarck, suivant Lulofs	11. 7, 183		
— suivant Gauthey	.....	0,3140	
Le palme ou pam rhinlantique (Gauthey)	.....	0,3297	
Le pied de Dresde (Gauthey)	.....	0,2831	
Le pied de Prague (Gauthey)	.....	0,2964	
Le pied de ville, à Nuremberg, (Gauthey)	.....	0,3049	
Le marc de Bruxelles (poids de Troyes) (Gauthey)	.....	.....	0,245868
Le pied de Brandebourg (Gauthey)	.....	0,3097	
Le marc de Berlin, de seize loths (Gauthey)	.....	.....	0,234130
Le pied de Vienne en Autriche, suivant le P. Xell	11. 8, 117		
— d'après Gauthey	.....	0,3161	
Les seize loths, poids de commerce, à Vienne, d'après Gauthey	.....	.....	0,280021
Les seize loths, poids des monnaies, à Vienne	.....	.....	0,280552
Le pied d'Amsterdam, d'après Gauthey	.....	0,2830	
Le pied de Suisse, d'après Gauthey	.....	0,3000	
Mesures danoises.			
Le pied de Danemarck, égal au pied du Rhin à Leyde, suivant Lulofs et Gauthey	11. 7, 183	0,3140	
Les seize loths, poids des orfèvres (Gauthey)	.....	.....	0,235741
Les seize loths, poids des marchands (Gauthey)	.....	.....	0,249772
Mesures suédoises.			
Le pied de Suède (Gauthey)	.....	0,2971	
— (mém. acad. 1714)	10. 11, 75		
La livre suédoise, de trente-deux loths, d'après Gauthey	.....	.....	0,424919
Mesures russes.			
Le pied à Pétersbourg (Gauthey)	.....	0,3542	
L'archine de Russie, suivant les manuscrits de M. de l'Isle	26. 6, 30		
— suivant Gauthey	.....	0,7179	

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

DÉSIGNATION DES MESURES ET DES AUTORITÉS.	RAPPORTS DES MESURES		
	à la toise, etc.	au mètre.	au kilogramme.
Mesures chinoises.			
Le li des Chinois, ou la 193e. partie du degré, suivant Lalande (Astronomie).	295t. 00		
Le pied royal de la Chine (obs. astron. Pekinifactœ, tom. 1, page 363), Lalande.	11po. 9l, 90		

Je me suis abstenu, dans ce tableau, de convertir en mètres les rapports donnés en toises et décimales de la toise, en pouces, lignes et décimales de la ligne, et de convertir en toises, pieds, pouces, etc., les rapports donnés en mètres, parce que, ayant donné précédemment les moyens de faire ces conversions, j'ai pensé que le lecteur serait plus satisfait de les effectuer lui-même, que de les trouver toutes faites dans le tableau : ce sera pour lui une bonne occasion de s'exercer.

Ici se termine les opérations élémentaires dont les nombres sont susceptibles : si nous devions nous borner, dans cet ouvrage, au seul calcul arithmétique, il conviendrait maintenant de montrer, par de nombreux exemples, comment, en combinant ces opérations fondamentales, on parvient à résoudre toutes les questions relatives aux nombres; mais comme la plupart de ces questions exigeraient une habitude de raisonner sur les rapports des nombres que nous n'avons pu acquérir dans ce qui précède, j'aime mieux faire passer de suite le lecteur en algèbre, où j'aurai l'occasion de démontrer de nouveau, mais d'une manière plus générale, les mêmes principes qui précèdent, ce qui me permettra, ensuite, d'expliquer d'une manière plus claire la résolution des questions relatives aux nombres.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

SECTION II.

ALGÈBRE.

1re. LEÇON.

1. L'*algèbre* a pour objet tous les calculs dont sont susceptibles les quantités considérées d'une manière indéterminée.

Pour faciliter ces calculs, et même pour les rendre possibles, on représente par les lettres de l'alphabet les quantités sur lesquelles on doit opérer.

Quand on considère à la fois plusieurs quantités différentes, on les représente chacune par une lettre particulière; mais la même quantité est représentée par la même lettre, pendant tout le cours du même calcul; de sorte que, toutes les fois qu'on rencontre la même lettre dans un même calcul, on doit y voir la même quantité; et, toutes les fois qu'on y rencontre des lettres différentes, on doit y voir, en général, des quantités différentes.

Pour abréger le discours on prend très-souvent le signe pour la chose représentée; c'est-à-dire, qu'on appelle quantités les lettres qui les représentent; ainsi, par exemple, on dit : la quantité a, la quantité b, etc., au lieu de dire : la quantité représentée par a, la quantité représentée par b, etc.; mais c'est toujours dans ce dernier sens qu'il faut entendre les choses.

Le lecteur comprendra bientôt (et de mieux en mieux à mesure que nous avancerons) pourquoi on représente par des lettres les quantités sur lesquelles on doit opérer; pour le moment il n'est pas possible de lui en donner une idée satisfaisante.

2. Les quantités, considérées sous ce point de vue général et représentées par des lettres, sont susceptibles d'*addition*, de *soustraction*, de *multiplication*, de *division*, etc., comme celles qui sont exprimées en nombre; mais les résultats qu'on obtient alors ne sont pas définitifs : ils ne peuvent l'être en effet que lorsque les quantités sur lesquelles on opère sont déterminées de grandeur.

3. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'ajouter les quantités a et b; tout ce qu'on pourra faire, jusqu'à ce que l'on ait donné des valeurs particulières à ces quantités, sera d'indiquer leur addition au moyen du signe $+$, qui a la même signification qu'en arithmétique (n°. 27); de sorte qu'on aura :

*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$a+b$ ou b$+a$. Mais si $a=3$ et $b=5$, on aurait $3+5$ au lieu de $a+b$; et alors on trouverait que le résultat définitif serait 8.

S'il s'agissait d'ajouter les quantités a, b, c, tout se réduirait à indiquer cette addition ainsi qu'il suit : $a+b+c$, et ainsi de suite, quelque soit le nombre de quantités à ajouter.

4. Si la même quantité a devait être ajoutée plusieurs fois à elle-même, on pourrait bien indiquer cette addition comme ci-dessus, mais on peut le faire d'une manière beaucoup plus simple.

Supposons, par exemple, qu'il faille ajouter la quantité a à elle-même : l'indication générale donnerait $a+a$; mais quand on a $a+a$, c'est prendre a deux fois; ce qu'on peut indiquer de cette manière : $2a$, et alors, au lieu de dire a plus a, on dit deux a; de sorte que $a+a=2a$.

De même si l'on avait $a+a+a$, on pourrait écrire $3a$: c'est-à-dire que $a+a+a=3a$. Si l'on avait $a+a+a+a$, on pourrait écrire $4a$; de sorte que $a+a+a+a=4a$, et ainsi de suite. On conçoit qu'il en serait de même pour toute autre quantité que a, et que, si l'on avait, par exemple, $b+b+b+b+b$, on aurait $b+b+b+b+b=5b$.

Le nombre qu'on écrit devant une quantité quelconque, pour indiquer le nombre de fois qu'on doit prendre cette quantité, se nomme *coefficient*. Il doit toujours être écrit à la gauche de la quantité et sur la même ligne.

5. Pour indiquer qu'il faut retrancher une certaine quantité b d'une certaine quantité a, on se sert du signe —, comme en arithmétique (n°. 37), et on écrit $a-b$, qu'on prononce a moins b.

On peut écrire la même chose de cette manière : $-b+a$, et alors on prononce moins b plus a.

S'il fallait retrancher la quantité a de la quantité b, on écrirait :

$$b-a \text{ ou } -a+b.$$

Quand on a $a-b$, la quantité a n'a pas de signe, mais elle est censée avoir le signe +. En général, la première quantité ne prend pas de signe quand elle doit avoir le signe +; mais quand elle doit avoir le signe —, on écrit toujours ce signe. Le signe + et le signe — appartiennent toujours à la quantité qui est à la droite, et jamais à celle qui est à la gauche.

Si de la quantité a il fallait retrancher les quantités b et c, on écrirait : $a-b-c$; ce qui signifierait qu'après avoir retranché b de a, il faudrait, du reste, retrancher encore c.

On conçoit que, si de a il fallait retrancher b, c et d, il faudrait écrire : $a-b-c-d$.

Si de a il fallait retrancher b plus encore b, on écrirait : $a-b-b$; mais

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

retrancher b plus encore b, c'est évidemment retrancher 2 fois b ou $2b$: on aura donc $a - b - b = a - 2b$.

Il est clair que si l'on avait $a - b - b - b$, ce serait la même chose que $a - 3b$, et ainsi de suite.

Il suit de ce qui précède qu'on peut simplifier beaucoup les indications d'addition et de soustraction au moyen de coefficiens, lorsque les mêmes quantités se trouvent plusieurs fois dans ces indications.

6. Pour indiquer qu'il faut multiplier la quantité a par la quantité b, on peut faire usage du $\times$ dont nous sommes convenus en arithmétique (n°. 47), et écrire $a \times b$; mais ce signe n'est pas nécessaire ici, et on peut écrire tout simplement ab, parce qu'il ne peut pas y avoir d'équivoque. Il n'en serait pas de même s'il s'agissait, par exemple, de multiplier 2 par 3, et qu'on indiquât cette multiplication en écrivant ces deux nombres sans interposition de signe; car on aurait alors 23, ce qui indiquerait qu'il s'agit du nombre 23, et non pas de multiplier 2 par 3. On pourrait encore indiquer la multiplication de a par b, en mettant un point entre les deux quantités, de cette manière : $a . b$; et cette indication peut aussi servir pour les nombres; car il est impossible de confondre $2 . 3$ avec 23. Mais de ces trois manières d'indiquer la multiplication des quantités indéterminées, la plus usitée est celle qui consiste *à écrire les quantités à multiplier à la suite les unes des autres sans interposition de signe.*

Supposons qu'on ait à multiplier a par b et le produit par c, on écrira abc; s'il s'agissait du produit des quantités a, b, c, d, on écrirait $abcd$, et ainsi de suite.

7. Si l'on avait à multiplier la quantité a plusieurs fois par elle-même, on pourrait indiquer la multiplication comme ci-dessus; ainsi, par exemple, s'il s'agissait de multiplier a une fois par elle-même, on aurait aa; mais on peut indiquer cette multiplication en n'écrivant cette lettre qu'une fois, et en mettant le chiffre 2 à la droite, et un peu au-dessus : ce qui donnera a^2; de sorte que $aa = a^2$.

Si l'on avait aaa, on écrirait a^3 : ce qui donnerait $aaa = a^3$; si l'on avait $aaaa$, on écrirait a^4, et on aurait $aaaa = a^4$, et ainsi de suite.

De sorte que, quand la même quantité doit être plusieurs fois facteur dans un produit, *on ne l'écrit qu'une fois; mais on place un nombre un peu au-dessus et à la droite de ce facteur, qui indique le nombre de fois qu'il aurait fallu écrire ce même facteur.*

Le nombre qui indique le nombre de fois qu'une lettre est facteur se nomme *exposant.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il ne faut pas confondre les exposans avec les coefficiens ; les exposans indiquent le nombre de fois que les lettres qui en sont affectées doivent être facteurs, tandis que les coefficiens indiquent le nombre de fois qu'il faut prendre la quantité qui suit ce coefficient. Ainsi, par exemple, a^3 est bien différent de $3a$. Et en effet, si $a=5$, on aurait dans le premier cas, $5\times5\times5=125$, et dans le second $3\times5=15$. Quand on a a^2 on prononce a deux; quand on a a^3 on prononce a trois; quand on a a^4 on prononce a quatre, etc. a^2 est ce qu'on appelle *la seconde puissance*, ou *le carré de a*; a^3 *est la troisième puissance,* ou *le cube de a* ; a^4 *est la quatrième puissance de a*, etc. Le degré de la puissance d'un nombre est donc marqué par le nombre de fois que ce nombre se trouve être facteur.

8. Si l'on avait a^2+a^2, on écrirait $2a^2$, par ce que a^2+a^2 n'est autre que 2 fois a^2; si l'on avait $a^2+a^2+a^2$, on écrirait $3a^2$, parce que $a^2+a^2+a^2$ est la même chose que 3 fois a^2; si l'on avait $a^3+a^3+a^3+a^3$, on écrirait $4a^3$, etc.; mais si l'on avait $a^2+a^3+a^5$, on ne pourrait écrire $3a^2$, ni $3a^3$, ni $3a^5$, parce que les quantités a^2, a^3, a^5 sont différentes entre elles. De même si l'on avait $a^2+b^2+c^2$, on ne pourrait écrire $3a^2$, ni $3b^2$, ni $3c^2$, parce que les quantités a^2, b^2, c^2, sont inégales.

9. Si l'on avait a^2 à multiplier par b, on écrirait a^2b; si l'on avait à multiplier a^3 par b^2, puis par c^4, etc., on écrirait $a^3b^2c^4\ldots$.

10. Dans le cas où l'on aurait a^2b+a^2b, on écrirait $2a^2b$; si l'on avait $a^3b^2+a^3b^2+a^3b^2+a^3b^2$, on écrirait $4a^3b^2$; au lieu de $a^5b^3c+a^5b^3c+a^5b^3c$, on écrirait $3a^5b^3c$, etc.; mais si l'on avait $a^7b^3c^4+a^5b^4c^3+a^2b^2c^2$, il ne faudrait écrire ni $3a^7b^3c^4$, ni $3a^5b^4c^3$, ni $3a^2b^2c^2$, parce que les quantités $a^7b^3c^4$, $a^5b^4c^3$, $a^2b^2c^2$, sont inégales. Si l'on avait $3a^4bc^3+4a^4bc^3+7a^4bc^3$, on aurait $14a^4bc^3$, parce que, dans ce cas, on a 3 fois la quantité a^4bc^3, plus 4 fois la même quantité, et plus encore 7 fois cette même quantité; ce qui fait bien 14 fois la même quantité : c'est-à-dire $14a^7bc^3$.

En général on ne peut réunir, au moyen de coefficiens, que les quantités semblables. Des quantités *sont semblables quand elles se composent des mêmes facteurs, et que ces facteurs sont respectivement aux mêmes exposans dans toutes les quantités, quels que soient d'ailleurs leurs coefficiens numériques.*

11. On appelle, en général, *quantités numériques,* celles qui sont exprimées en nombre, et *quantités littérales,* celles qui sont représentées par des lettres.

Ce que nous venons de dire sur la réunion des quantités qui ont le signe + doit s'entendre de celles qui ont le signe —.

12. Lorsqu'on a une quantité à diviser par une autre, on écrit ces deux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

quantités sous la forme d'une fraction, en mettant le dividende au numérateur et le diviseur au dénominateur ; ainsi, par exemple, s'il s'agissait de diviser a par b, on écrirait $\frac{a}{b}$; si, au contraire, il fallait diviser b par a, on écrirait $\frac{a}{b}$; si l'on avait à diviser a^2bc par def, on écrirait de même $\frac{a^2bc}{def}$, et ainsi de suite pour toutes autres quantités.

13. Lorsque plusieurs quantités sont réunies par le signe + ou le signe —, que ces quantités sont composées d'un ou de plusieurs facteurs ayant ou n'ayant pas d'exposant, avec ou sans coefficient, on les appelle *termes*. L'ensemble de tous ces termes forme ce qu'on nomme *quantité algébrique*. Une quantité algébrique peut n'avoir qu'un terme, dans ce cas on l'appelle *monome ;* lorsqu'elle a plusieurs termes, elle prend le nom de *polynome* ou de *quantité complexe*.

Ainsi, par exemple, les quantités a, $2ab$, $3a^2bc$, $4a^3b^2c^4d$, sont des monomes, et les quantités $a+b$, $a-b$, $2a+3b+c$, $5a^2b+3ab^2-c$, $8a^3bcd-5a^2b^2c^2d+4ab^3c^3d^2$, sont des polynomes.

Lorsqu'un polynome n'a que deux termes, on l'appelle *binome*, quand il en a trois on l'appelle *trinome*, etc. Mais passé les trinomes on aime mieux indiquer le nombre des termes du polynome en langage ordinaire, que de se servir des dénominations tirées du grec et consacrées à cet usage.

14. Les quantités algébriques sont *homogènes* ou *hétérogènes* : une quantité algébrique est homogène quand tous ses termes se composent d'un même nombre de facteurs. Ainsi la quantité $a^2b+3abc-4b^2c+2bc^2$, est homogène parce que tous ses termes se composent de trois facteurs. La quantité $4a^5bc-7a^4b^2c-8a^3b^2cd+9abc^3d^2$, est aussi homogène parce que tous ses termes se composent de 7 facteurs, etc. On remarquera que les coefficiens ne sont point compris au nombre des facteurs. On compte les facteurs en faisant la somme de leurs exposans.

Une quantité algébrique est hétérogène quand ses termes n'ont pas le même nombre de facteurs ; ainsi la quantité $a^3-5ab+4abc$ est hétérogène, parce que le second terme n'a que deux facteurs, tandis que les deux autres en ont trois. De même la quantité $3a^5-7a^2b^2+2ab+3bcd$ est hétérogène, ses termes n'ayant pas le même nombre de facteurs.

Enfin, parmi les quantités homogènes, on distingue celles qui sont *symétriques*. Une quantité est symétrique quand les lettres qu'elle renferme entrent toutes de la même manière dans cette quantité. Ainsi, par exemple, la quantité $a^2+2ab+b^2$ est symétrique, parce que, renfermant les lettres a et b,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce qui arrive à l'une arrive également à l'autre; c'est-à-dire qu'ayant a^2 on a aussi b^2, et le produit $2ab$.

La quantité $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ est aussi une quantité symétrique, parce que si l'on a a^3, on a aussi b^3, et si l'on a $3a^2b$, on a aussi $3ab^2$.

Ayant fixé le sens qu'on doit attacher aux signes les plus élémentaires de l'algèbre, passons maintenant aux opérations qui sont le fondement du calcul algébrique, lesquelles sont l'*addition*, la *soustraction*, la *multiplication* et la *division*.

DE L'ADDITION.

15. En algèbre, l'addition a le même objet qu'en arithmétique : c'est encore une opération par laquelle on réunit plusieurs quantités de même espèce pour en former une seule qui leur est absolument égale et à laquelle on donne le nom de *somme*.

L'addition algébrique consiste seulement à réunir les termes semblables qui ont le même signe au moyen de coefficiens, et d'unir les termes différens par le signe + ou le signe —.

16. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'ajouter ensemble les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} &1^\circ. \quad 3a - 5b + 4c; \\ &2^\circ. \quad 3b + 5a - 7c; \\ &3^\circ. - 4c - 6b + 2a + d. \end{aligned}$$

On écrira ces quantités de manière que les termes semblables soient sur les mêmes colonnes verticales, ainsi qu'on le voit ci-dessous,

$$\begin{array}{l} 3a - 5b + 4c \\ 5a + 3b - 7c \\ 2a - 6b - 4c + d \\ \hline 10a - 8b - 7c + d \end{array}$$

et on tirera un trait sous la dernière pour la séparer de la somme.

Ensuite, on commencera l'opération par la droite ou par la gauche, peu importe, par la gauche, par exemple, et on observera que la première colonne vers la gauche se compose de $3a + 5a + 2a$, ce qui fera $10a$ qu'on écrira à la somme. On passera à la colonne suivante, laquelle se compose de $-5b + 3b - 6b$; d'où il suit que dans cette colonne il y a $3b$ à ajouter, et $5b$ d'une part et $6b$ de l'autre à retrancher, c'est-à-dire $11b$ à retrancher; or, $3b$ à ajouter et $11b$ à retrancher, se réduisent à $8b$ à retrancher, car en n'ajoutant pas les $3b$, on aura ces $3b$ de moins à retrancher, il faudra donc mettre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$-8b$ à la somme. La troisième colonne se compose de $4c - 7c - 4c$, c'est-à-dire que dans cette colonne on a $4c$ à ajouter, et $11c$ à retrancher, ce qui est la même chose que si l'on n'avait que $7c$ à retrancher; on écrira donc $-7c$ à la somme. Enfin on voit que la quatrième colonne ne se compose que de $+d$, qu'on écrira à la somme, et on aura $10a - 8b - 7c + d$ pour la somme demandée.

Supposons, pour second exemple, qu'on nous propose d'ajouter les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} &1^{\circ}.\ 5a^2b - 3ab^2 + 4b^3 - 5c^2\\ &2^{\circ}.\ 7ab^2 + 7c^2 - 2a^2b - 3b^3\\ &3^{\circ}.\ 8b^3 - 4a^2b + 3c^2 - ab^2 + 4am. \end{aligned}$$

On écrira encore ces quantités de manière que les termes semblables soient sur les mêmes colonnes verticales, ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{r} 5a^2b - 3ab^2 + 4b^3 - 5c^2\\ -2a^2b + 7ab^2 - 3b^3 + 7c^2\\ -4a^2b - ab^2 + 8b^3 + 3c^2 + 4am\\ \hline -a^2b + 3ab^2 + 9b^3 + 5c^2 + 4am, \end{array}$$

et, ensuite, en commençant par la colonne à gauche, on verra que cette colonne se compose de $5a^2b - 2a^2b - 4a^2b$, ce qui se réduira à $5a^2b - 6a^2b$, c'est-à-dire qu'on aura $5a^2b$ à ajouter, et $6a^2b$ à retrancher; or, si l'on n'ajoute pas les $5a^2b$, il est clair qu'il ne faudra retrancher que a^2b, de sorte qu'il faudra écrire $-a^2b$ à la somme. On passera à la seconde colonne qui se compose de $-3ab^2 + 7ab^2 - ab^2$, ou $7ab^2 - 3ab^2 - ab^2$, ce qui se réduit à $7ab^2 - 4ab^2$, de sorte qu'on a $7ab^2$ à ajouter, et $4ab^2$ à retrancher; or, si au lieu d'ajouter $7ab^2$ on n'ajoute que $3ab^2$, il est clair que les $-4ab^2$ se trouveront retranchés, et qu'il faudra écrire $3ab^2$ à la somme. On passera à la troisième colonne qui se compose de $4b^3 - 3b^3 + 8b^3$, ce qui se réduit à $12b^3 - 3b^3$, c'est-à-dire qu'on a $12b^3$ à ajouter et $3b^3$ à retrancher; or, si l'on n'ajoute que $9b^3$, il est clair que les $-3b^3$ se trouveront retranchés, de sorte qu'il faudra écrire $+9b^3$ à la somme. On passera à la quatrième colonne qui se compose de $-5c^2 + 7c^2 + 3c^2$, ce qui se réduit à $-5c^2 + 10c^2$; de sorte qu'on a $10c^2$ à ajouter et $5c^2$ à retrancher; or, si l'on n'ajoute que $5c^2$ il est clair que les $5c^2$ à soustraire se trouveront retranchés: on écrira donc $+5c^2$ à la somme. Enfin, la cinquième colonne ne se composant que du terme $+4am$, on l'écrira à la somme, et l'opération sera terminée; de sorte que la somme demandée sera $-a^2b + 3ab^2 + 9b^3 + 5c^2 + 4am$.

On conçoit assez, maintenant, comment il faudrait opérer dans tout autre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

exemple; cependant en voici encore quelques-uns sur lesquels le lecteur pourra s'exercer.

EXEMPLE 1er.

$$\text{la somme de } \begin{cases} 4a^3b^2c - 5a^2b^3c^2 + 3ab^4c^3 + 7b^5c^4 \\ -2a^3b^2c + 9a^2b^3c^2 - 8ab^4c^3 - 6b^5c^4 \\ 10a^3b^2c + 2a^2b^3c^2 + 7ab^4c^3 - 2b^5c^4 \\ -8a^3b^2c - 4a^2b^3c^2 - 2ab^4c^3 + 8b^5c^4 \end{cases}$$

$$\text{est} \quad 4a^3b^2c + 2a^2b^3c^2 + 7b^5c^4.$$

EXEMPLE 2e.

$$\text{la somme de } \begin{cases} 12a^4 - 5a^3b + 6a^2bc - 7ab^2cd - 9b^3c^2d^2 \\ -8a^4 + 9a^3b - 18a^2bc + 11ab^2cd + 15b^3c^2d^2 \\ 2a^4 - 4a^3b + 12a^2bc + 3ab^2cd - 3b^3c^2d^2 \\ -6a^4 + 7a^3b - 8a^2bc - 3ab^2cd + 8b^3c^2d^2 \\ 5a^4 - 3a^3b + 7a^2bc - 4ab^2cd - 11b^3c^2d^2 \end{cases}$$

$$\text{est} \quad 5a^4 + 4a^3b - a^2bc.$$

EXEMPLE 3e.

$$\text{la somme de } \begin{cases} 45abcd - 34a^2bc + 25a^3b^2cd - 4am \\ -35abcd + 25a^2bc + 2a^3b^2cd + 8am \\ -23abcd + 7a^2bc - 9a^3b^2cd - 15am \\ +13abcd + 2a^2bc - 18a^3b^2cd + 11am \end{cases}$$

$$\text{est} \quad 0$$

On voit, par ces trois exemples, combien les quantités algébriques sont quelquefois susceptibles de réduction; mais elles n'offrent pas toujours cet avantage, et il arrive souvent qu'elles restent très-compliquées, ainsi qu'on le voit, par l'exemple suivant :

$$\text{la somme de } \begin{cases} 3a^3 - 4a^2b + 7ab^2 + 5b^4 - 7b^3c \\ -8ab + 5a^2c - 8c^3d + 4d^5 - 4b^2c^3 \\ 7bcd - abcd + 4ef + 5mn + 7m^2n \end{cases}$$

$$\text{est} \quad 3a^3 - 4a^2b + 7ab^2 + 5b^4 - 7b^3c - 8ab + 5a^2c - 8^3cd + 4d^5 - 4b^2c^3 + 7bcd - abcd + 4ef + 5mn + 7m^2n$$

où il n'y a aucun terme semblable.

DE LA SOUSTRACTION.

17. En algèbre, comme en arithmétique, la soustraction est une opération par laquelle deux quantités de même espèce étant données on cherche de combien l'une surpasse l'autre, et le résultat s'appelle encore *reste*, *excès* ou *différence*.

18. Avant de donner la manière de faire la soustraction algébrique, sup-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

posons qu'il s'agisse de retrancher b de a, ce qui donnera $a-b$, et considérons que a peut être plus grand, égal ou plus petit que b (ce qu'on désigne respectivement en écrivant $a > b$ (1), $a = b$, et $a < b$), et voyons ce qui arrivera dans chacune de ces hypothèses en particulier.

1°. Dans le cas où $a > b$, il est clair que de a on pourra retrancher b, et qu'il restera quelque chose; appelons r ce reste, et nous aurons $a - b = r$.

2°. Dans le cas où $a = b$, il est clair qu'en retranchant b de a il ne doit rien rester, et que par conséquent on a $a - b = o$.

3°. Dans le cas où $a < b$, on conçoit qu'on ne peut pas retrancher b tout entier de a; mais si r est de combien b surpasse a, on aura $b = a + r$; et au lieu de retrancher b de a, on pourra de a retrancher la quantité $a+r$ qui est égale à b, et on aura $a - a - r$. Mais de a si l'on retranche a, il ne restera rien; on ne pourra donc pas retrancher r; il restera donc encore cette quantité r à retrancher; il restera donc enfin $-r$; de sorte que dans le cas où $a < b$, on a $a - b = -r$, r étant de combien b surpasse a. Ainsi, *quand la quantité à soustraire est plus grande que celle de laquelle on doit la retrancher, le reste a le signe —*; c'est-à-dire que, dans tous les cas, *il faut retrancher la plus petite quantité de la plus grande, et donner au reste le signe de la plus grande : si la plus grande a le signe +, le reste aura le signe +, et si la plus grande a le signe —, le reste aura le signe —.*

19. On appelle *négatives* toutes quantités précédées du signe —, et *positives* toutes celles qui sont précédées du signe +; les quantités négatives diffèrent essentiellement des quantités positives : celles-ci sont prises dans le sens d'addition, et les premières dans le sens de soustraction.

20. Supposons une quantité donnée; plus on retranchera de cette quantité, moins il restera; or, dans le cas où ce qu'on en retranche est égal à cette quantité, il reste zéro; d'où il semblerait en résulter que quand ce qu'on retranche d'une quantité est plus grand que cette quantité elle-même, il devrait rester moins que zéro; mais alors le reste est négatif; d'où il s'ensuivrait qu'une quantité négative serait plus petite que zéro, ce qui est absurde; car il ne peut pas exister de quantité plus petite que zéro. Mais si l'on fait attention qu'on ne peut pas, d'une quantité donnée, retrancher une quantité plus grande, on verra que les quantités négatives ne sont pas des quantités plus petites que zéro.

Quand une quantité négative est isolée, comme $-r$, on a d'abord de la

(1) Le signe > indique toujours que les quantités qu'il lie sont inégales; l'ouverture de ce signe est toujours tournée du côté de la plus grande quantité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

peine à comprendre le sens qu'il faut y attacher; parce qu'on ne conçoit pas qu'on puisse avoir à retrancher quand on n'a rien d'où l'on puisse retrancher; mais à mesure qu'on avance dans la science, cet idée s'éclaircit peu à peu, et on finit par n'y plus rien trouver de contraire à l'idée primitive des grandeurs. Pour le moment, nous nous contenterons de faire sentir le sens de ces sortes de quantités par une comparaison.

Supposons un homme qui ne possède rien, et, au contraire, qu'il doive 100 francs : si on lui demande ce qu'il possède, pour répondre dans le sens de la question, il devra dire qu'il possède moins 100 francs, puisqu'en effet il faudrait qu'il possédât 100 francs de plus qu'il n'a pour ne rien posséder du tout. Mais si, au lieu de lui demander ce qu'il possède, on lui demandait, au contraire, combien il doit, alors il devrait répondre qu'il doit 100 francs; d'où l'on voit qu'une quantité est négative ou positive selon le sens suivant lequel on l'envisage.

Passons maintenant au procédé de la soustraction algébrique.

21. Supposons que de la quantité a on veuille retrancher $b - c$; si de a on retranchait b tout entier, on aurait $a - b$; mais comme ce n'est pas b tout entier qu'il faut retrancher, qu'il ne faut retrancher que $b - c$, il est clair qu'ayant retranché b tout entier, on a retranché la quantité c de plus qu'il ne fallait; or plus on retranche et moins il reste : ayant retranché c de trop, le résultat est donc trop petit de toute cette quantité; pour mettre ce résultat à sa vraie valeur, il faudra donc y ajouter cette même quantité c, ce qui donnera $a - b + c$.

En comparant ce résultat aux quantités données, qui sont a et $b - c$, on verra que les signes de la quantité $b - c$ à soustraire se trouvent avoir changé : d'où l'on peut conclure que *pour retrancher une quantité d'une autre, il suffit d'écrire la quantité à retrancher à la suite de celle de laquelle il faut la retrancher, en ayant l'attention de changer les signes de cette quantité.*

Ainsi, pour second exemple, supposons que de a il faille retrancher $b - 2c + d - e$; à la suite de la quantité a, il suffira d'écrire la quantité $b - 2c + d - e$, en changeant les signes de cette dernière, ce qui donnera

$$a - b + 2c - d + e.$$

Voici encore quelques exemples sur lesquels le lecteur pourra s'exercer.

1°. De $3a^2 - 4b + 5c$ on veut retrancher $2a^2 - 5b + 4c$; en appliquant la règle on aura $3a^2 - 4b + 5c - 2a^2 + 5b - 4c$, ce qui se réduira à $a^2 + b + c$.

Pour faire plus facilement les réductions, *après avoir changé les signes de la quantité à retrancher*, il faut écrire cette quantité sous celle de laquelle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on doit la retrancher, de manière que les termes semblables soient sur les mêmes colonnes verticales ainsi qu'il suit,

$$\begin{array}{r} 3a^2 - 4b + 5c \\ -2a^2 + 5b - 4c \\ \hline \text{reste. . .}\ a^2 + b + c \end{array}$$

et ensuite opérer comme s'il s'agissait d'une addition.

2°. De $3a^2b - 5ab^2 + 3b^3 - 4b^2c$ on veut retrancher

$$a^2b + 7ab^2 - 5b^3 - 6b^2c + 4bc^2,$$

ce qui revient à ajouter

à la quantité. . . $3a^2b - 5ab^2 + 3b^3 - 4b^2c$

la quantité. . . . $-a^2b - 7ab^2 + 5b^3 + 6b^2c - 4bc^2$

et la somme. . . $2a^2b - 12ab^2 + 8b^3 + 2b^2c - 4bc^2$ est le reste demandé.

3°. De $5a^3bc + 4a^2b^2c^2 - 7ab^3c^3 + 2b^4c^4$ on veut retrancher

$$-2a^3bc + 5a^2b^2c^2 + 3ab^3c^3 + 4b^4c^4 - 8d^5,$$

ce qui revient à ajouter

à la quantité. . . $5a^4bc + 4a^2b^2c^2 - 7ab^3c^3 + 2b^4c^4$

la quantité. . . . $2a^3bc - 5a^2b^2c^2 - 3ab^3c^3 - 4b^4c^4 + 8d^5$

et la somme. . . $7a^3bc - a^2b^2c^2 - 10ab^3c^3 - 2b^4c^4 + 8d^5$ est le reste demandé.

2^me. LEÇON.

De la Multiplication.

22. En algèbre, comme en arithmétique, la multiplication est une opération par laquelle on rend une quantité donnée autant de fois plus grande que l'indique une autre quantité donnée. Le résultat de cette opération s'appelle encore *produit*.

Le procédé de cette opération renferme quatre règles : la règle des lettres ou des facteurs, celle des coefficiens, celle des exposans et celle des signes.

23. La règle des lettres consiste simplement à les écrire les unes à la suite des autres sans interposition de signe. Ainsi, par exemple, si l'on avait à multiplier ab par c, on écrirait abc; si l'on avait ab à multiplier par cd, on écrirait $abcd$, et ainsi de suite pour un nombre quelconque de facteurs. Cette règle est évidente par elle-même, car elle suit immédiatement de la convention établie (n°. 6) pour indiquer la multiplication.

Remarquons, en passant, que le produit de tant de quantités qu'on voudra renferme tous les facteurs de ces quantités. Ainsi, par exemple, le produit $abcd$ des quantités ab, cd, renferme les facteurs a et b de la première, et les facteurs c et d de la seconde, etc.

*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

24. La règle des coefficiens consiste à multiplier celui du multiplicande par celui du multiplicateur pour avoir celui du produit.

En effet, si l'on avait à multiplier $4ab$ par $3cd$; en faisant la multiplication comme s'il n'y avait pas de coefficient, on aurait $abcd$; mais ayant fait abstraction des coefficiens, on a supposé le multiplicande 4 fois plus petit qu'il n'était réellement, et le multiplicateur 3 fois : donc (n°. 45, arith.) le produit $abcd$ est 12 fois trop petit : c'est-à-dire, un nombre de fois trop petit marqué par le coefficient du multiplicande multiplié par celui du multiplicateur, donc, etc.

On conçoit que, s'il s'agissait d'un plus grand nombre de facteurs ayant tous des coefficiens, le coefficient du produit serait égal au produit des coefficiens de tous les facteurs.

25. La règle des exposans consiste à les ajouter. Ainsi, par exemple, supposons qu'il s'agisse de multiplier a^3 par a^2 : le produit sera a^5.

En effet, le produit doit renfermer tous les facteurs du multiplicande et tous ceux du multiplicateur (n°. 23); or le multiplicande renferme 3 fois le facteur a, et le multiplicateur 2 fois; le produit renfermera ce facteur d'abord 3 fois et puis encore 2 fois; en tout il le renfermera donc 5 fois, c'est-à-dire un nombre de fois marqué par $3+2$.

Si l'on avait $a^5 \times a^3$, le produit serait a^8; car le produit doit contenir, d'une part, 5 fois le facteur a, et, de l'autre, 3 fois; mais $5+3=8$: donc $a^5 \times a^3 = a^8$.

Pour réunir dans un même exemple les règles des lettres, des coefficiens et des exposans, supposons :

1°. Qu'il s'agisse de $3a^2 \times 2b^3$: il est clair qu'on aura $3a^2 \times 2b^3 = 6a^2b^3$;

2°. Qu'il s'agisse de $5a^3b^2 \times 3a^2b$, on aura $5a^3b^2 \times 3a^2b = 15a^5b^3$;

3°. Qu'il s'agisse de $7a^4b^3cd \times 5a^2be$, on aura

$$7a^4b^3cd \times 5a^2be = 35a^6b^4cde,$$ et ainsi de suite.

Avant de donner la règle, ou plutôt les règles des signes, il faut montrer comment il faut faire la multiplication des quantités polynomes.

26. Supposons qu'il s'agisse de multiplier $a+b$ par c : c'est-à-dire, supposons qu'il s'agisse de rendre $a+b$ un nombre de fois plus grand marqué par c.

Il est clair que, pour rendre une quantité c de fois plus grande, il faut que chacune des parties qui la composent soit rendue c de fois plus grande; d'où il suit que, dans notre exemple, il faudra multiplier chacun des termes de $a+b$ par c : ce qui donnera $ac+bc$ au produit.

Il est évident que, si le multiplicande se composait d'un plus grand

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

nombre de termes, il faudrait multiplier de même chacun de ses termes par c; ainsi, par exemple, si l'on avait $a+b+d+e$ à multiplier par c, on aurait $ac+bc+dc+ec$ au produit.

Si l'on avait à multiplier $a+b$ par $c+d$, ce qu'on indiquerait de cette manière : $(a+b)(c+d)$; après avoir multiplié $a+b$ par c, ce qui donnerait $ac+bc$; il est évident (n°. 50, arith.) qu'il faudrait encore multiplier $a+b$ par d, ce qui donnerait $ad+bd$, et ajouter ensuite les deux produits; de sorte que $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$.

Il est clair que, si le multiplicateur contenait encore un terme, il faudrait multiplier encore $a+b$ par ce troisième terme, et ajouter ensuite ce troisième produit aux deux premiers, et ainsi de suite.

Il résulte de là que, *pour faire la multiplication des quantités polynomes, il faut multiplier tous les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, et faire ensuite la somme de tous les produits partiels, pour avoir le produit total.*

27. Supposons maintenant qu'on ait $a-a$ à multiplier par $+b$; comme le multiplicande $a-a=0$, il faut nécessairement que le produit soit zéro. Mais si l'on observe que le multiplicande se compose de deux termes, on verra qu'il faut multiplier chacun de ses termes par b; or, le premier terme de ce multiplicande étant positif, il est évident que le produit de ce premier terme par $+b$ sera $+ab$; il faudra donc que le produit ab du second terme $-a$ par $+b$ ait le signe $-$ pour que le produit total soit zéro : c'est-à-dire pour que ce produit soit $ab-ab$. Donc *un terme qui a le signe + qui multiplie un autre terme qui a le signe — donne — au produit;* et réciproquement, *un terme qui a le signe — qui multiplie un autre terme qui a le signe + donne — au produit.*

Supposons, en second lieu, qu'il faille multiplier $a-a$ par $-b$. On observera encore que le multiplicande est zéro et qu'il se compose de deux termes pour cela; par conséquent on doit multiplier chacun de ses termes par $-b$, et le produit devra être zéro; or, puisqu'un terme qui a le signe + multiplié par un terme qui a le signe — donne — au produit, le premier terme $+a$ du multiplicande multiplié par $-b$ donnera $-ab$ au produit; il faudra donc que le produit ab du second terme $-a$ du multiplicande par $-b$ ait le signe $+$ pour détruire le premier produit $-ab$; d'où il suit qu'*un terme qui a le signe — multiplié par un autre terme qui a aussi le signe — donne + au produit.*

On est dans l'usage d'énoncer les règles des signes que nous venons de trouver, en disant que :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1°. Plus multiplié par plus donne plus;
2°. Plus multiplié par moins donne moins;
3°. Moins multiplié par plus donne moins;
4°. Moins multiplié par moins donne plus.

Telles sont les règles élémentaires de la multiplication algébrique; appliquons-les à quelques exemples.

28. Supposons qu'il s'agisse de multiplier $a+b$ par $a+b$; on écrira le multiplicateur sous le multiplicande ainsi qu'il suit :

Multiplicande	$a+b$
Multiplicateur	$a+b$
(1). . . .	a^2+ab
(2). . . .	$+ab+b^2$
Produit	$a^2+2ab+b^2$

ensuite on multipliera le premier terme a du multiplicande par le premier terme a du multiplicateur, et, pour cela, on dira : $+a$ par $+a$ donne $+a^2$, qu'on écrira au premier produit partiel (1), ainsi qu'on le voit ci-dessus; puis on multipliera le second terme $+b$ du multiplicande par le premier terme $+a$ du multiplicateur, et on aura $+ab$, qu'on écrira à la suite de a^2, ce qui terminera le premier produit partiel (1). On multipliera le premier terme $+a$ du multiplicande par le second terme $+b$ du multiplicateur, ce qui donnera $+ab$, qu'on écrira au second produit partiel (2), comme on le voit ci-dessus, en ayant soin d'écrire ce produit $+ab$ sous le terme semblable $+ab$ du produit (1); puis on multipliera le second terme $+b$ du multiplicande par le second terme $+b$ du multiplicateur, ce qui donnera $+b^2$, qu'on écrira à la suite du terme $+ab$ du second produit partiel (2); on fera ensuite la somme des deux produits partiels (1), (2), la multiplication sera terminée, et on aura $a^2+2ab+b^2$ pour le produit total.

Remarquons, en passant, que *le produit de la quantité $a+b$ par elle-même*, c'est-à-dire le carré de $a+b$, *renferme le carré du premier terme a, plus deux fois le produit des deux termes a, b, et plus le carré du second terme b.*

29. Supposons, pour second exemple, qu'on ait $a-b$ à multiplier par $a-b$; on écrira ces deux quantités l'une au-dessous de l'autre, ainsi qu'on le voit ci-dessous.

	$a-b$
	$a-b$
(1). . . .	a^2-ab
(2). . . .	$-ab+b^2$
Produit	$a^2-2ab+b^2$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et ensuite on multipliera les deux termes $a - b$ du multiplicande par le premier terme a du multiplicateur, et, en observant que $+$ par $-$ donne $-$, on aura pour premier produit partiel (1) $a^2 - ab$. On multipliera encore les deux termes $a - b$ du multiplicande par le second terme $-b$ du multiplicateur, et en observant que, $-$ par $+$ donne $-$, et $-$ par $-$ donne $+$, on aura pour second et dernier produit partiel (2) $-ab + b^2$, qu'on écrira sous le premier, comme on le voit ci-dessus; on fera la somme de ces deux produits partiels (1), (2), et on aura $a^2 - 2ab + b^2$ pour le produit demandé.

Remarquons encore, en passant, que *le produit de* $a - b$ *par lui-même, ou, en d'autres termes, que le carré de la différence de deux quantités est égal au carré de la plus grande moins* 2 *fois le produit des deux quantités, et plus le carré de la plus petite*; de sorte qu'on a $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

30. Pour troisième exemple, supposons qu'on nous demande le produit de $a + b$ par $a - b$; on écrira ces deux quantités l'une au-dessous de l'autre comme on le voit ci-dessous.

$$\begin{array}{rl} & a + b \\ & a - b \\ \hline (1). \ldots & a^2 + ab \\ (2). \ldots & \quad - ab - b^2 \\ \hline \text{Produit} & a^2 - b^2 \end{array}$$

et ensuite on multipliera les deux termes du multiplicande par le premier terme a du multiplicateur : ce qui donnera $a^2 + ab$ pour premier produit partiel (1); puis on multipliera encore les deux termes du multiplicande par le second terme $-b$ du multiplicateur, et en observant que $-$ par $+$ donne $-$, on aura $-ab - b^2$ au second produit partiel (2). On fera l'addition de ces deux produits partiels (1) et (2), et on aura $a^2 - b^2$ pour produit total.

Ainsi la somme $a + b$ de deux quantités multipliée par leur différence $a - b$ donne au produit la différence $a^2 - b^2$ des carrés de ces mêmes quantités. De sorte que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

31. Supposons, pour quatrième exemple, qu'il s'agisse de multiplier $3a^2 - 4ab + 2b^2$ par $5a^2 + 3ab - 4b^2$; on écrira encore ces deux quantités l'une au-dessous de l'autre comme on le voit ci-dessous.

$$\begin{array}{rl} & 3a^2 - 4ab + 2b^2 \\ & 5a^2 + 3ab - 4b^2 \\ \hline (1). \ldots & 15a^4 - 20a^3b + 10a^2b^2 \\ (2). \ldots & \quad + 9a^3b - 12a^2b^2 + 6ab^3 \\ (3). \ldots & \quad - 12a^2b^2 + 16ab^3 - 8b^4 \\ \hline \text{Produit} & 15a^4 - 11a^3b - 14a^2b^2 + 22ab^3 - 8b^4 \end{array}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et ensuite on multipliera tous les termes du multiplicande par le premier terme $5a^2$ du multiplicateur, et, pour cela, on commencera par le premier terme à gauche du multiplicande, et on dira : 1°. + par + donne + 5 fois trois qui font 15, que l'on écrira au premier terme du premier produit partiel (1); puis on dira : a^2 par a^2 donne a^4, qu'on écrira immédiatement après le coefficient 15. 2°. + par — donne — 5 fois 4 qui font — 20, qu'on écrira à la suite et vers la droite du terme + 15 a^4; puis on dira : a^2 par ab donne a^3b, qu'on écrira immédiatement après le coefficient — 20. 3°. + par + donne + 5 fois 2 qui font + 10, qu'on écrira à la suite et vers la droite de ce qui est déjà écrit au premier produit partiel (1); puis on dira : a^2 par b^2 donne a^2b^2, qu'on écrira immédiatement après le coefficient + 10, et le produit partiel (1) sera terminé.

On multipliera ensuite tous les termes du multiplicande par le second terme, + $3ab$ du multiplicateur, en commençant toujours par le premier terme à gauche du multiplicande, et en se conduisant comme nous venons de l'expliquer, pour avoir le premier produit partiel (1), on aura le second produit partiel (2). Enfin on multipliera encore tous les termes du multiplicande par le troisième terme — $4b^2$ du multiplicateur (en commençant toujours par le premier terme à gauche du multiplicande), et, en se conduisant comme nous l'avons expliqué pour avoir le premier produit partiel (1), on aura le troisième produit partiel (3). Si le multiplicateur avait un plus grand nombre de termes, on continuerait d'opérer de la même manière, jusqu'au dernier, et on aurait autant de produits partiels que de termes dans le multiplicateur. On ferait ensuite la somme de tous ces produits partiels, qui serait le produit total.

Voici quelques exemples sur lesquels le lecteur pourra s'exercer.

1^er^. EXEMPLE.

$$3a^3 - 2a^2b + 4ab^2 + 5b^3$$
$$7a^3 + 8a^2b - 2ab^2 - b^3$$

$$21a^6 - 14a^5b + 28a^4b^2 + 35a^3b^3$$
$$+ 24a^5b - 16a^4b^2 + 32a^3b^3 + 40a^2b^4$$
$$- 6a^4b^2 + 4a^3b^3 - 8a^2b^4 - 10ab^5$$
$$- 3a^3b^3 + 2a^2b^4 - 4ab^5 - 5b^6$$

$$21a^6 + 10a^5b + 6a^4b^2 + 68a^3b^3 + 34a^2b^4 - 14ab^5 - 5b^6$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2e. EXEMPLE.

$$a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$$
$$a - b$$

$$a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5$$
$$- a^5b - a^4b^2 - a^3b^3 - a^2b^4 - ab^5 - b^6$$

$$a^6 \qquad - b^6$$

3e. EXEMPLE.

$$a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6$$
$$a + b$$

$$a^7 - a^6b + a^5b^2 - a^4b^3 + a^3b^4 - a^2b^5 + ab^6$$
$$+ a^6b - a^5b^2 + a^4b^3 - a^3b^4 + a^2b^5 - ab^6 + b^7$$

$$a^7 \qquad + b^7$$

4e. EXEMPLE.

$$a^5b^5 + a^4b^4cd + a^3b^3c^2d^2 + a^2b^2c^3d^3 + abc^4d^4 + c^5d^5$$
$$ab - cd$$

$$a^6b^6 + a^5b^5cd + a^4b^4c^2d^2 + a^3b^3c^3d^3 + a^2b^2c^4d^4 + abc^5d^5$$
$$- a^5b^5cd - a^4b^4c^2d^2 - a^3b^3c^3d^3 - a^2b^2c^4d^4 - abc^5d^5 - c^6d^6$$

$$a^6b^6 \qquad - c^6d^6$$

5e. EXEMPLE.

$$a^4b^4 - a^3b^3cde + a^2b^2c^2d^2e^2 - abc^3d^3e^3 + c^4d^4e^4$$
$$ab + cde$$

$$a^5b^5 - a^4b^4cde + a^3b^3c^2d^2e^2 - a^2b^2c^3d^3e^3 + abc^4d^4e^4$$
$$+ a^4b^4cde - a^3b^3c^2d^2e^2 + a^2b^2c^3d^3e^3 - abc^4d^4e^4 + c^5d^5e^5$$

$$a^5b^5 \qquad + c^5d^5e^5$$

6e. EXEMPLE.

$$5a^3b - 4ab^2c + 3bc^2d - 4c^3d^2$$
$$5a^2c - 8abcd - 2b^2cde$$

$$25a^5bc - 20a^3b^2c^2 + 15a^2bc^3d - 20a^2c^4d^2$$
$$- 40a^4b^2cd + 32a^2b^3c^2d - 24ab^2c^3d^2 + 32abc^4d^3$$
$$- 10a^3b^3cde + 8ab^4c^2de - 6b^3c^3d^2e + 8b^2c^4d^3e$$

Comme, dans cet exemple, tous les termes des produits partiels sont différens, il n'y a point de réduction à faire, et en pareil cas on laisse le produit sous la forme qu'on voit ci-dessus, parce qu'en l'écrivant en une seule ligne il deviendrait trop embarrassant.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3^me. LEÇON.

De la Division.

32. La division a ici pour objet, comme en arithmétique, de trouver une quantité qu'on appelle *quotient*, qui, multipliée par une quantité donnée, qu'on appelle *diviseur*, donne un produit égal à une seconde quantité donnée qu'on appelle *dividende*.

Le procédé de la division algébrique comprend quatre règles :

1°. La règle des lettres; 2°. celle des coefficiens; 3°. celle des exposans; et 4°. celle des signes.

33. Pour découvrir la règle des lettres, supposons, par exemple, qu'il s'agisse de diviser *abcd* par *ab*, le dividende sera *abcd*, et le diviseur *ab*. Or, puisque le quotient multiplié par le diviseur doit égaler le dividende, il est clair que le quotient doit se composer de tous les facteurs qui manquent au diviseur pour égaler le dividende, car (n°. 23) le produit de deux quantités se compose de l'ensemble de tous les facteurs du multiplicande et de tous ceux du multiplicateur; mais le diviseur se compose des facteurs a et b et le dividende des facteurs a, b, c et d; le quotient se composera donc des facteurs c et d, c'est-à-dire que le quotient sera cd. Ainsi $\frac{abcd}{ab} = cd$.

Si l'on avait $\frac{abcdef}{bef}$ le quotient serait acd, de sorte que $\frac{abcdef}{bef} = acd$.

De là résulte que, pour avoir les facteurs du quotient, *il faut supprimer du dividende tous les facteurs qui sont au diviseur, et les facteurs restans seront ceux qui composeront le quotient.*

Il pourrait arriver que le diviseur renfermât des facteurs étrangers au dividende; dans ce cas la division n'aurait pas lieu exactement. Ainsi, par exemple, si l'on avait $\frac{abc}{ad}$, tout ce qu'on pourrait faire serait de supprimer le facteur a dans chaque terme de la division, ce qui ne changerait point le quotient (n°. 55, arith.), et il viendrait $\frac{bc}{d}$; de sorte qu'on ne pourrait avoir le quotient définitif, exactement ou par approximation, qu'après avoir donné des valeurs particulières aux lettres b, c et d.

34. Pour découvrir la règle des coefficiens, supposons qu'il s'agisse de diviser $15abcdefg$ par $3bde$; s'il n'y avait pas de coefficient, le quotient serait $acfg$; mais comme le coefficient 3 du diviseur multiplié par celui du quotient doit égaler celui 15 du dividende, il est évident que le coefficient du quotient doit être le quotient arithmétique 5 du coefficient 15 du dividende divisé

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par celui 3 du diviseur; de sorte que le quotient de $15abcdefg$ divisé par $3bde$ sera $5acfg$; c'est-à-dire que $\frac{15abcdefg}{3bde} = 5acfg$. *Ainsi le coefficient du quotient est toujours égal à celui du dividende divisé par celui du diviseur.*

Le coefficient du dividende pourrait ne pas être exactement divisible par celui du diviseur; dans ce cas celui du quotient serait fractionnaire. Ainsi, par exemple, si l'on avait $\frac{18abcd}{14ad}$, le quotient serait $\frac{9}{7}bc$, en supprimant le facteur 2 commun aux deux coefficiens.

35. La règle des exposans consiste à retrancher celui du diviseur de celui du dividende pour avoir celui du quotient. En effet, si l'on avait $\frac{a^5}{a^3}$, il est clair, d'après la règle des lettres ou des facteurs, que le quotient se composerait des facteurs du dividende après en avoir supprimé ceux du diviseur; or, dans le dividende il y a 5 fois le facteur a, et dans le diviseur 3 fois ce même facteur a, le quotient se composera donc d'un nombre de fois le facteur a marqué par l'exposant 5 moins l'exposant 3, c'est-à-dire par 2; de sorte que $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$. Ce qu'il fallait démontrer.

Ce principe peut encore se démontrer de cette manière : puisque le produit du quotient par le diviseur doit égaler le dividende, si ce dernier est a^m, m étant un nombre entier positif quelconque, et si le diviseur est a^n, n étant comme m, le quotient sera a^{m-n}, car $a^n \times a^{m-n} = a^{n+m-n} = a^m$, puisque, par la multiplication, les exposans s'ajoutent, et que $n+m-n=m$, à cause que $+n$ détruit $-n$.

36. Il suit de là que $\frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0$. Car a est censé avoir l'exposant 1, et $1-1=0$. Mais $\frac{a}{a} = 1$, car toute quantité divisée par elle-même donne l'unité au quotient; donc $a^0 = 1$.

Ainsi la puissance zéro d'une quantité quelconque est toujours égale à l'unité; car dans a on peut concevoir un polynome quelconque.

37. Il suit de là que $\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$; c'est-à-dire que l'unité divisée par une quantité quelconque donne au quotient le diviseur avec son exposant pris négativement. De sorte que, si l'on rencontre $\frac{1}{a^n}$, on pourra prendre a^{-n}, et réciproquement, si l'on rencontre a^{-n} on pourra prendre $\frac{1}{a^n}$.

38. Supposons qu'on ait $\frac{1}{a^{-n}}$, on pourra mettre cette expression sous la forme $\frac{a^0}{a^{-n}} = a^{0+n} = a^n$, car $a^0 = 1$, et $-n$ par soustraction donne $+n$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ainsi, si l'on rencontre $\frac{1}{a^{-n}}$ on pourra prendre a^n, et réciproquement, si l'on rencontre a^n, on pourra prendre $\frac{1}{a^{-n}}$.

39. Il nous reste à expliquer la règle ou plutôt les règles des signes.

1°. Supposons que le dividende et le diviseur aient le signe +, le produit du quotient par le diviseur devra avoir le signe +, puisque le dividende a le signe +; mais le diviseur a le signe +, donc, pour que le produit du quotient par le diviseur ait le signe + il faut que le quotient ait le signe +.

2°. Supposons que le dividende ait le signe + et le diviseur le signe —; il faudra que le produit du quotient par le diviseur ait le signe +; mais le diviseur a le signe —, il faudra donc que le quotient ait aussi le signe —, puisque — par — donne +.

3°. Supposons que le dividende ait le signe — et que le diviseur ait le signe +; le quotient aura le signe —; car le produit du quotient par le diviseur doit avoir le signe —; mais le diviseur a le signe +; donc le quotient devra avoir le signe —, puisque + par — donne —.

4°. Enfin, supposons que le dividende et le diviseur aient le signe —; le quotient devra avoir le signe +, car le produit du quotient par le diviseur doit avoir le signe —, et le diviseur a le signe —; donc le quotient doit avoir le signe +, puisque + par — donne —.

On énonce ces quatre règles en disant :

1°. Plus divisé par plus donne plus au quotient;

2°. Plus divisé par moins donne moins au quotient;

3°. Moins divisé par plus donne plus au quotient;

4°. Moins divisé par moins donne plus au quotient.

Passons actuellement à la division des quantités polynomes.

40. Supposons qu'on ait $a^2 + 2ab + b^2$ à diviser par $a + b$.

On disposera ces deux quantités comme s'il s'agissait de diviser deux nombres, ainsi qu'on le voit ci-dessous,

$$\begin{array}{r|l} a^2 + 2ab + b^2 & a+b \\ \cline{2-2} -\,a^2 - ab & a+b \\ \cline{1-1} (1)\ \ ab + b^2 & \\ -\,ab - b^2 & \\ \cline{1-1} 0 \quad 0 & \end{array}$$

en ayant soin d'ordonner le dividende et le diviseur par rapport à la même lettre, par rapport à la lettre a, par exemple, ainsi qu'on le voit ci-dessus.

Ordonner une quantité par rapport à une lettre, c'est écrire cette quantité de manière que son premier terme à gauche renferme cette lettre à sa plus

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

haute puissance; son second terme, la même lettre à la puissance immédiatement inférieure, et ainsi de suite pour les autres termes.

Ordonner ainsi le dividende et le diviseur, par rapport à la même lettre, n'est pas une chose absolument indispensable, mais elle rend la division incomparablement plus facile.

Ayant écrit le dividende et le diviseur, comme il vient d'être dit, on procédera à la division ainsi qu'il suit :

On divisera le premier terme $+a^2$ du dividende par le premier terme $+a$ du diviseur (n°. 35), ce qui donnera $+a$ au quotient. Ayant écrit a au quotient, on multipliera le diviseur tout entier par a, ce qui donnera a^2+ab au produit. On retranchera ce produit du dividende, ce qu'on fera en écrivant ce produit sous le dividende avec des signes contraires, ainsi qu'on le voit ci-dessus; on fera ensuite les réductions, et on aura le premier reste marqué (1). On divisera le premier terme ab de ce premier reste par le premier terme a du diviseur, ce qui donnera $+b$ qu'on écrira au quotient; on multipliera le diviseur tout entier par le terme $+b$ du quotient, ce qui donnera $ab+b^2$ au produit. On retranchera ce produit du reste (1), ce qu'on fera en écrivant ce produit sous ce reste (1) avec des signes contraires, et en faisant ensuite les réductions, on trouvera o pour reste; ainsi le quotient sera $a+b$; de sorte que $\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}=a+b$.

En faisant le produit du diviseur par chaque terme du quotient, on peut de suite écrire ce produit sous le dividende, en ayant soin de changer le signe de chaque terme du produit à mesure qu'on l'obtient. C'est ainsi que nous allons nous conduire dans l'exemple suivant.

Supposons qu'on demande le quotient de
$15a^4-11a^3b-14a^2b^2+22ab^3-8b^4$ divisé par $3a^2-4ab+2b^2$.

On écrira ces deux nombres comme à l'ordinaire, ainsi qu'on le voit ci-dessous :

$$\begin{array}{r|l}
15a^4-11a^3b-14a^2b^2+22ab^3-8b^4 & \frac{3a^2-4ab+2b^2}{5a^2+3ab-4b^2} \\
-15a^4+20a^3b-10a^2b^2 & \\
\hline
(1)\ldots\ +\ 9a^3b-24a^2b^2+22ab^3-8b^4 & \\
-\ 9a^3b+12a^2b^2-\ 6ab^3 & \\
\hline
(2)\ldots\ -12a^2b^2+16ab^3-8b^4 & \\
-12a^2b^2-16ab^3+8b^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

et ensuite on divisera le premier terme $15a^4$ du dividende par le premier terme $3a^2$ du diviseur, ce qui donnera $5a^2$ à écrire au quotient. On multi-

12

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pliera le diviseur tout entier par ce premier terme $5a^2$ du quotient, en disant : $+5a^2$ par $+3a^2$ donne $+15a^4$, ce qui, par soustraction, devient $-15a^4$ qu'on écrira sous le premier terme $15a^4$ du dividende; puis $+5a^2$ par $-4ab$ donne $-20a^3b$, ce qui, par soustraction, devient $+20a^3b$ qu'on écrira sous le second terme $-11a^3b$ du dividende; puis $+5a^2$ par $+2b^2$ donne $+10a^2b^2$, ce qui, par soustraction, donne $-10a^2b^2$, qu'on écrira sous le troisième terme $-14a^2b^2$: on fera ensuite les réductions, et on aura le premier reste (1). Puis, on divisera le premier terme $+9a^3b$ de ce premier reste (1) par le premier terme $+3a^2$ du diviseur, ce qui donnera $+3ab$ à écrire à la suite du quotient déjà trouvé ; on multipliera tout le diviseur par ce nouveau terme $+3ab$ du quotient, et on écrira le produit sous le reste (1), à mesure qu'on l'obtiendra, en se conduisant comme on vient de le dire pour le premier détail de l'opération : en faisant ensuite les réductions, on aura le second reste (2). Enfin, on divisera le premier terme $-12a^2b^2$ du reste (2) par le premier terme $+3a^2$, du diviseur, ce qui donnera $-4b^2$ à écrira à la suite du quotient déjà trouvé; on multipliera tout le diviseur par ce terme $-4b^2$ du quotient; on écrira, comme ci-dessus, le produit sous le reste (2), et, après avoir fait les réductions, le reste sera zéro, et le quotient $5a^2+3ab-4b^2$.

41. Si l'on proposait de trouver le quotient de $25a^5-20a^3b^2c+15a^2bc^2d-20a^2c^3d^2-40a^4b^2cd+32a^2b^4c^2d-24ab^3c^3d^2+32ab^2c^4d^3-10a^3b^2cde+8ab^4c^2de-6b^3c^3d^2e+8b^2c^4d^3e$, par $5a^3-4abc+3bcd-4c^3d^2$, on s'y prendrait comme dans l'exemple précédent; mais en ordonnant le dividende, on aurait l'attention de mettre sur les mêmes colonnes verticales tous les termes qui renferment les mêmes puissances de a, ainsi qu'on le voit ci-dessous :

$$
\begin{array}{l|l}
25a^5-40a^4b^2cd-20a^3b^2c+15a^2bc^2d-24ab^3c^3d^2-6b^3c^3d^2e & 5a^3-4ab^2c+3bc^2d-4c^3d^2 \\
\quad -10a^3b^2cde+32a^2b^4c^2d+32ab^2c^4d^3+8b^2c^4d^3e & \hline \\
\quad -20a^2c^3d^2+8ab^4c^2de & 5a^2-8ab^2cd-2b^2cde \\
\hline
-25a^5+20a^3b^2c-15a^2bc^2d & \\
\quad +20a^2c^3d^2 & \\
\hline
(1)\ldots -40a^4b^2cd-10a^3b^2cde+32a^2b^4c^2d-24ab^3c^3d^2-6b^3c^3d^2e & \\
\quad +32ab^2c^4d^3+8b^2c^4d^3e & \\
\quad +8ab^4c^2de & \\
+40a^4b^2cd-32a^2b^4c^2d+24ab^3c^3d^2 & \\
\quad -32ab^2c^4d^3 & \\
\hline
(2)\ldots\ldots -10a^3b^2cde+8ab^4c^2de-6b^3c^3d^2e & \\
\quad +8b^2c^4d^3e & \\
+10a^3b^2cde-8ab^4c^2de+6b^3c^3d^2e & \\
\quad -8b^2c^4d^3e & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et ensuite on diviserait le premier terme $25a^5$ du dividende par le premier terme $5a^3$ du diviseur, ce qui donnerait $5a^2$ à écrire au quotient. On multiplierait tout le diviseur par ce terme $5a^2$ du quotient, on écrirait le produit sous le dividende (en ayant l'attention de changer les signes de ce produit et de placer ses termes respectivement sous les termes du dividende qui renferment les mêmes puissances de a, ainsi qu'on le voit ci-dessus), et on aurait le reste (1), après avoir fait les réductions. On continuerait d'opérer de la même manière, on trouverait successivement les termes $-8ab^2cd$ et $-2b^2cde$ du quotient, et les restes (2) et 0.

En écrivant ainsi sous les mêmes colonnes, dans le dividende, les termes qui renferment les mêmes puissances de la lettre par rapport à laquelle on ordonne les deux termes de la division, les réductions deviennent plus faciles à voir, et on risque moins de se tromper.

Tant que la division pourra se faire exactement, je crois ce qui précède suffisant pour faire entendre le procédé de la division. Nous verrons, en parlant des fractions algébriques, ce qu'il y a à faire dans le cas où la division ne peut pas avoir lieu sans reste. Voici quelques exemples sur lesquels le lecteur pourra s'exercer.

1er. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r|l}
21a^6+10a^5b+6a^4b^2+68a^3b^3+34a^2b^4-14ab^5-5b^6 & 7a^3+8a^2b-2ab^2-b^3 \\
-21a^6-24a^5b+6a^4b^2+3a^3b^3 & \hline
\multicolumn{2}{l}{3a^3-2a^2b+4ab^2+5b^3}
\end{array}$$

1er. reste. $-14a^5b+12a^4b^2+71a^3b^3+34a^2b^4-14ab^5-5b^6$
$+14a^5b+16a^4b^2-4a^3b^3-2a^2b^4$

2e. reste. $+28a^4b^2+67a^3b^3+32a^2b^4-14ab^5-5b^6$
$-28a^4b^2-32a^3b^3+8a^2b^4+4ab^5$

3e. reste. $+35a^3b^3+40a^2b^4-10ab^5-5b^6$
$-35a^3b^3-40a^2b^4+10ab^5+5b^6$

0 0 0 0

2e. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r|l}
a^6-b^6 & a-b \\
-a^6+a^5b & \hline
\multicolumn{2}{l}{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5}
\end{array}$$

1er. reste. $+a^5b-b^6$
$-a^5b+a^4b^2$

2e. reste. $a^4b^2-b^6$
$-a^4b^2+a^3b^3$

3e. reste. $a^3b^3-b^6$
$-a^3b^3+a^2b^4$

4e. reste. $a^2b^4-b^6$
$-a^2b^4+ab^5$

5e. reste. ab^5-b^6
$-ab^5+b^6$

0

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3e. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r|l} a^7+b^7 & a+b \\ -a^7-a^6b & \hline a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6 \end{array}$$

1er. reste. . . . . $-a^6b+b^7$
$+a^6b+a^5b^2$

2e. reste. . . . . $a^5b^2+b^7$
$-a^5b^2-a^4b^3$

3e. reste. . . . . $-a^4b^3+b^7$
$+a^4b^3+a^3b^4$

4e. reste. . . . . $a^3b^4+b^7$
$-a^3b^4-a^2b^5$

5e. reste. . . . . $-a^2b^5+b^7$
$+a^2b^5+ab^6$

6e. reste. . . . . $+ab^6+b^7$
$-ab^6-b^7$

0

4e. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r|l} a^4b^4-c^4d^4 & ab-cd \\ -a^4b^4+a^3b^3cd & \hline a^3b^3+a^2b^2cd+ab^2c^2d^2+c^3d^3 \end{array}$$

1er. reste. . . . . $a^3b^3cd-c^4d^4$
$-a^3b^3cd+a^2b^2c^2d^2$

2e. reste. . . . . $a^2b^2c^2d^2-c^4d^4$
$-a^2b^2c^2d^2+abc^3d^3$

3e. reste. . . . . $ab^2c^3d^3-c^4d^4$
$-abc^3d^3+c^4d^4$

0

5e. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r|l} a^5b^5+c^5d^5 & ab+cd \\ -a^5b^5-a^4b^4cd & \hline a^4b^4-a^3b^3cd+a^2b^2c^2d^2-ab^2c^3d^3+c^4d^4 \end{array}$$

1er. reste. . . . . $-a^4b^4cd+c^5d^5$
$+a^4b^4cd+a^3b^3c^2d^2$

2e. reste. . . . . $a^3b^3c^2d^2+c^5d^5$
$-a^3b^3c^2d^2-a^2b^2c^3d^3$

3e. reste. . . . . $-a^2b^2c^3d^3+c^5d^5$
$+a^2b^2c^3d^3+abc^4d^4$

4e. reste. . . . . $+ab^2c^4d^4+c^5d^5$
$-abc^4d^4-c^5d^5$

0

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

42. Pour faire la preuve de la division, on multipliera le diviseur par le quotient, et si le produit égale le dividende, la division sera bien faite.

Réciproquement, pour faire la preuve de la multiplication, on divisera le produit par l'un des facteurs : si le quotient est égal à l'autre facteur, la multiplication sera bien faite.

4^me^. LEÇON.

Des Fractions.

On pourrait considérer les fractions algébriques sous le même point de vue que les fractions arithmétiques, c'est-à-dire supposer une unité quelconque divisée en un certain nombre de parties égales, et qu'on a pris un certain nombre de ces parties; mais il est plus général, et par conséquent plus convenable de les envisager comme étant des divisions indiquées, dont le dividende serait le numérateur, et le diviseur le dénominateur. C'est sous ce point de vue que nous les considérerons.

43. Nous avons vu (n°. 62, arith.) 1°. qu'une fraction devenait autant de fois plus grande ou autant de fois plus petite que son numérateur est de fois plus grand ou plus petit; 2°. qu'une fraction devenait d'autant de fois plus petite que son dénominateur était de fois plus grand, et autant de fois plus grande que son dénominateur était plus petit; 3°. qu'une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par le même nombre. Il en est de même des fractions algébriques, et par les mêmes raisons. Nous nous dispenserons de répéter les démonstrations que nous en avons données au numéro cité ci-dessus, quoiqu'il s'agisse ici de quantités indéterminées; car, quoiqu'en arithmétique nous ayons raisonné sur des quantités déterminées, il est évident que ces raisonnemens sont applicables à des quantités quelconques.

Les fractions algébriques donnent lieu aux opérations suivantes :

1°. Faire, autant que possible, la division indiquée par une fraction, ce qui est analogue à tirer les entiers contenus dans une fraction.

2°. Soumettre à un dénominateur donné une quantité quelconque qui n'a pas de dénominateur, ce qui est analogue à la conversion des entiers en fraction.

3°. Réduire une fraction à sa plus simple expression.

4°. Mettre plusieurs fractions au même dénominateur.

5°. Faire la somme de plusieurs fractions.

6°. Retrancher une fraction d'une autre.

7°. Multiplier deux ou un plus grand nombre de fractions entre elles.

Et 8°. diviser deux fractions l'une par l'autre.

*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Faire, autant que possible, la division indiquée par une fraction.

44. Supposons qu'on ait la fraction $\frac{3a^2-4ab}{a+b}$; on divisera le numérateur $3a^2-4ab$ par le dénominateur $a+b$, comme à l'ordinaire, ainsi qu'on le voit ci-dessous :

$$\begin{array}{r|l} 3a^2-4ab & a+b \\ -3a^2-3ab & \hline 3a-7b \\ \hline -7ab & \\ +7ab+7b^2 & \\ \hline +7b^2 & \end{array}$$

et on parviendra au quotient $3a-7b$ et au reste $+7b^2$. Comme ce reste $7b^2$ ne contient plus la quantité a par rapport à laquelle on a ordonné les deux termes de la division, on ne peut plus continuer la division sans passer à des termes fractionnaires dans le quotient, ce qui n'est pas toujours convenable. Ainsi, la division se terminera là, et on mettra le reste $+7b^2$ sous la forme de fraction, en mettant $+7b^2$ au numérateur, et le diviseur $a+b$ au dénominateur; de sorte qu'on aura $\frac{3a^2-4ab}{a+b} = 3a-7b+\frac{7b^2}{a+b}$.

Supposons, pour second exemple, qu'on ait $\frac{4a^3+5a^2b-4ab^2+7b^3}{a^2-9ab+3b^2}$; on divisera encore le numérateur par le dénominateur comme à l'ordinaire, ainsi qu'on le voit ci-dessous :

$$\begin{array}{r|l} 4a^3+5a^2b-4ab^2+7b^3 & a^2-9ab+3b^2 \\ -4a^3+36a^2b-12ab^2 & \hline 4a+41b \\ \hline +41a^2b-16ab^2+7b^3 & \\ -41a^2b+369ab^2-123b^3 & \\ \hline +353ab^2-116b^3 & \end{array}$$

et on parviendra au quotient $4a+41b$, et au reste $353ab^2-116b^3$.

Comme ce reste ne renferme que la première puissance de la lettre a par rapport à laquelle on a ordonné les deux termes de la division, et que cette même lettre se trouve à la seconde puissance dans le diviseur, la division se termine là, parce que, pour la continuer, il faudrait passer à des termes fractionnaires dans le diviseur. En mettant ce reste sous la forme de fraction comme dans le premier exemple, on aura

$$\frac{4a^3+5a^2b-4ab^2+7b^3}{a^2-9ab+3b^2} = 4a+41b+\frac{353ab^2-116b^3}{a^2-9ab+3b^2}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ces deux exemples suffisent pour faire voir comment il faudrait opérer dans tout autre.

Il est important de remarquer que, quand le quotient de deux quantités ne peut s'obtenir exactement, on arrive à un reste dans lequel la lettre par rapport à laquelle on a ordonné les deux termes de la division a disparu, ou se trouve à un exposant moindre que dans le diviseur, et alors l'opération est terminée, après avoir mis ce reste sous la forme de fraction à la suite du quotient.

Mettre une quantité, qui n'a pas de dénominateur, sous la forme d'une fraction.

45. Supposons, par exemple, qu'on demande de mettre sous la forme fractionnaire la quantité $a^2 + 3ab + 4b^2$, dont le dénominateur serait $3a - 2b$.

Il est clair qu'il s'agit ici de trouver un certain dividende tel, qu'étant divisé par le diviseur $3a - 2b$ donne le quotient $a^2 + 3ab + 4b^2$. Or le dividende est toujours égal au quotient × par le diviseur : le numérateur de la fraction demandée sera donc égal au produit de la quantité donnée $a^2+3ab+4b^2$ par le dénominateur donné $3a - 2b$. On fera donc cette multiplication comme à l'ordinaire, et on aura le produit $3a^3 + 7a^2b + 6ab^2 - 8b^3$, auquel on donnera le dénominateur $3a - 2b$, et on aura $\frac{3a^3 + 7a^2b + 6ab^2 - 8b^3}{3a - 2b}$, pour la fraction demandée : de sorte que $a^2 + 3ab + 4b^2 = \frac{3a^3 + 7a^2b + 6ab^2 - 8b^3}{3a - 2b}$.

Supposons, en second lieu, que l'on veuille mettre la quantité $2a^3 - 4a^2b - 5ab^2 + 3b^3 + \frac{a^2 - 3b^2}{5ab - 3b^2}$ sous la forme d'une seule fraction. Dans ce cas il est évident qu'il faudra multiplier la partie de cette quantité qui n'a pas de dénominateur par le dénominateur de la partie fractionnaire, ce qui donnera le produit $10a^4b - 26a^3b^2 - 13a^2b^3 + 30ab^4 - 9b^5$, auquel on ajoutera le numérateur $a^2 - 3b^2$, et on aura $\frac{10a^4b - 26a^3b^2 - 13a^2b^3 + 30ab^4 - 9b^5 + a^2 - 3b^2}{5ab - 3b^2}$ pour la fraction demandée.

Réduction des Fractions à leurs plus simples expressions.

46. Il y a deux méthodes pour réduire les fractions algébriques à leurs plus simples expressions : la première, qui est la plus générale, consiste à trouver le plus grand diviseur commun des deux termes de la fraction, comme nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'avons expliqué en arithmétique; mais ce procédé est extrêmement long en algèbre, et n'est guère nécessaire que dans l'élimination des inconnues des équations des degrés supérieurs, équations dont nous ne traiterons pas dans cet ouvrage. Nous ne parlerons donc point de la méthode du plus grand diviseur commun, puisque cette méthode n'est pas absolument nécessaire, et qu'elle est très-compliquée.

La seconde méthode consiste à discerner à l'œil, d'après certaines formes connues, les facteurs communs aux deux termes de la fraction, c'est-à-dire que cette méthode consiste à décomposer chaque terme de la fraction en ses facteurs simples.

Pour décomposer une quantité algébrique en ses facteurs simples, il faut avoir présentes à l'esprit les remarques que nous avons faites aux n^{os}, 28, 29 et 30, et joindre, à ces remarques, les propositions suivantes :

47. Si l'on multiplie $a^2+2ab+b^2$, qui est le carré de $a+b$, ou $(a+b)^2$, par $a+b$, on aura $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, qui sera le cube de $a+b$, c'est-à-dire que $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; de sorte que quand nous trouverons $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, nous pourrons mettre à la place $(a+b)^3$, ou $(a+b)(a+b)(a+b)$.

De même, si l'on multiplie $a^2-2ab+b^2$, qui est le carré de $a-b$, ou $(a-b)^2$, par $a-b$, on aura $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, qui sera le cube de $a-b$, c'est-à-dire que $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$; de sorte que quand nous trouverons $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, nous pourrons mettre $(a-b)^3$, ou $(a-b)(a-b)(a-b)$. Plus tard nous pousserons plus loin les puissances successives des binomes $a+b$ et $a-b$.

48. Maintenant, je dis que la quantité a^n-b^n (n étant un nombre entier quelconque) sera toujours divisible par $a-b$.

En effet, effectuons la division, comme on le voit ci-dessous :

$$\begin{array}{r|l}
a^n-b^n & a-b \\
-a^n+ba^{n-1} & \hline
 & a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+b^3a^{n-4}+b^4a^{n-5}\ldots\ldots+b^{n-1} \\
\hline
ba^{n-1}-b^n & \text{1}^{\text{er}}\text{. reste.} \\
-ba^{n-1}+b^2a^{n-2} & \\
\hline
b^2a^{n-2}-b^n & \text{2}^{\text{e}}\text{. reste.} \\
-b^2a^{n-2}+b^3a^{n-3} & \\
\hline
b^3a^{n-3}-b^n & \text{3}^{\text{e}}\text{. reste.} \\
-b^3a^{n-3}+b^4a^{n-4} & \\
\hline
b^4a^{n-4}-b^n & \text{4}^{\text{e}}\text{. reste.} \\
\ldots\ldots\ldots & \\
b^{n-1}a-b^n & (n-1)^{\text{me}}\text{. reste.} \\
-b^{n-1}a+b^n & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour faire cette division, on dira : a^n divisé par a donne a^{n-1}; car le premier terme du diviseur étant a, pour avoir le premier terme a^{n-1} du quotient, il suffira d'ôter une unité de l'exposant n du premier terme a^n du dividende. Ayant trouvé le premier terme a^{n-1} du quotient, on le multipliera par le diviseur, et on retranchera le produit du dividende comme à l'ordinaire, en faisant attention que le produit de a par a^{n-1} est a^n, et on aura le premier reste $ba^{n-1} - b^n$. On divisera le premier terme de ce reste par le premier terme du diviseur, et on aura le second terme ba^{n-2}; ce terme du quotient conduira au second reste, lequel reste conduira au troisième terme b^2a^{n-3} du quotient; ce troisième terme du quotient donnera lieu au troisième reste, qui conduira au quatrième terme b^3a^{n-4} du quotient, et ainsi de suite pour les restes et les termes successifs du quotient.

Dans les restes successifs, on voit que les exposans de a vont en diminuant d'une unité, et ceux de b vont au contraire en augmentant de la même quantité. Par conséquent au $(n-1)^{me}$. reste, la lettre a sera à la première puissance, et la lettre b à la puissance $n-1$: en divisant ce reste par le premier terme du quotient qui est a, le quotient sera b^{n-1}; en multipliant ce quotient b^{n-1} par le diviseur, et en retranchant le produit du $(n-1)^{me}$. reste, il ne restera plus rien; donc la division de $a^n - b^n$ par $a - b$ aura lieu quel que soit l'exposant n, pourvu qu'il soit un nombre *entier positif*.

Comme les restes successifs ont tous leurs premiers termes positifs, il est clair que tous les termes du quotient doivent nécessairement avoir le signe $+$. Il est évident aussi que la loi des exposans dans le quotient doit être la même que celle des restes successifs.

Ainsi lorsque nous rencontrerons $\frac{a^n - b^n}{a-b}$, nous pourrons mettre à la place $a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} \ldots\ldots\ldots + b^{n-2}a + b^{n-1}$; et réciproquement, lorsque nous rencontrerons $a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} \ldots\ldots + b^{n-1}$, nous pourrons mettre à la place $\frac{a^n - b^n}{a-b}$.

49. On démontrerait, par un raisonnement semblable, et en ayant égard aux signes,

1°. Que $a^n - b^n$ est toujours divisible par $a + b$, pourvu que l'exposant n soit un nombre *pair entier et positif*, et on ferait voir que le quotient serait de la forme $\frac{a^n - b^n}{a+b} = a^{n-1} - ba^{n-2} + b^2a^{n-3} \ldots\ldots + b^{n-2}a - b^{n-1}$, de sorte que l'on pourra prendre l'une de ces expressions à la place de l'autre.

2°. Que $a^n + b^n$ est toujours divisible par $a + b$, pourvu que l'exposant n soit un nombre *impair entier et positif*, et on ferait voir que le quotient

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aurait la forme $\frac{a^n+b^n}{a+b} = a^{n-1} - ba^{n-2} + b^2a^{n-3} - b^3a^{n-4} \ldots + b^{n-1}$, de manière qu'on pourra prendre l'une de ces expressions pour l'autre.

3°. Il ne faudrait pas conclure de ce qui précède, que si l'on avait a^n+b^n on pût diviser cette quantité par $a-b$; car cette division ne peut jamais avoir lieu exactement, quel que soit l'exposant n, ainsi qu'on peut s'en assurer par des exemples particuliers, en donnant à n la valeur qu'on voudra. Cela tient à ce que tous les termes du quotient ayant le signe +, le dernier terme de ce quotient étant $+b^{n-1}$, en multipliant ce terme par le dernier terme $-b$ du diviseur, on aura $-b^n$, qui, par soustraction, donnera $+b^n$, et, par conséquent, au lieu de détruire le dernier terme b^n du dividende, ce produit $-b^n$ s'ajoutera à ce terme b^n de l'avant dernier reste, et on aura pour dernier reste $2b^n$, sans pouvoir continuer la division, puisque la lettre a aura disparu. A mesure que nous avancerons, nous verrons de nouveaux élémens de décomposition.

Passons maintenant à la réduction de quelques fractions à leur plus simple expression.

5o. Supposons, pour premier exemple, la fraction monome $\frac{15a^2bc}{12acd}$; on voit que les deux coefficiens ont 3 pour facteur commun, et que les facteurs ac sont communs aux deux termes de la fraction: on supprimera donc ces facteurs communs, et la fraction proposée $\frac{15a^2bc}{12acd} = \frac{5ab}{4d}$.

Si, pour second exemple, on avait la fraction polynome $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$, comme le numérateur $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, ou $(a+b)(a+b)$, et que le dénominateur $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, la fraction proposée $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a-b)}$, et on verra que $a+b$ est facteur commun aux deux termes de la fraction : en supprimant donc ce facteur commun, on aura $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a+b}{a-b}$.

Soit, pour troisième exemple, la fraction $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$; le numérateur est égal à $(a-b)^2$, ou $(a-b)(a-b)$, et le dénominateur à $(a+b)(a-b)$; de sorte que la fraction proposée $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)}$; d'où l'on voit que les deux termes de cette fraction ont le facteur commun $a-b$; en le supprimant, on aura donc $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{a+b}$.

Supposons, pour quatrième exemple, qu'il s'agisse de la fraction $\frac{a^4-b^4}{3ab-3b^2}$; le numérateur $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\ldots(a)$; mais

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on peut mettre $a^3+a^2b+ab^2+b^3$, sous la forme $a^2(a+b)+b^2(a+b)$, car les deux premiers termes $a^3+a^2b=a^2(a+b)$, et les deux derniers $ab^2+b^3=b^2(a+b)$; donc $a^3+a^2b+ab^2+b^3=a^2(a+b)+b^2(a+b)$. Cette dernière expression peut se mettre sous la forme $(a^2+b^2)(a+b)$, à cause du facteur commun $a+b$ qu'on voit dans les deux termes de cette quantité; on aura donc $a^3+a^2b+ab^2+b^3=(a^2+b^2)(a+b)$, et par conséquent, en vertu de l'égalité (a) ci-dessus, on aura :

$$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a+b)(a-b). \ldots\ldots\ldots (b).$$

Dans le dénominateur de la fraction proposée, on voit le facteur commun $3b$, et par conséquent ce dénominateur $3ab-3b^2=3b(a-b). \ldots (c)$: en mettant donc la quantité (b) au numérateur, et la quantité (c) au dénominateur de la fraction proposée, on aura $\frac{a^4-b^4}{3ab-3b^2}=\frac{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}{3b(a-b)}$, et alors on verra que cette fraction renferme le facteur commun $a-b$ dans ses deux termes : en supprimant donc ce facteur, on aura $\frac{a^4-b^4}{3ab-3b^2}=\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{3b}$.

Je ne pousserai pas plus loin les exemples de la réduction des fractions à leur plus simple expression, mais je recommanderai au lecteur de s'exercer le plus possible à décomposer des quantités algébriques en leurs facteurs simples, parce que cette décomposition est une des parties les plus importantes de l'algèbre.

Pour s'exercer utilement, le lecteur pourra faire la multiplication de plusieurs facteurs simples, et ensuite décomposer le produit de manière à retrouver tous les facteurs simples qui l'auront formé.

Réduction des Fractions au même dénominateur.

51. Supposons que l'on propose de réduire au même dénominateur les fractions $\frac{b}{a}, \frac{cd}{b^2}, \frac{d^2}{e}, \frac{de}{bc}, \frac{n}{ab}$, on commencera par chercher la plus petite quantité divisible à la fois par chacun des dénominateurs des fractions données, et cette quantité sera ab^2ce. On la divisera par le dénominateur a de la première fraction $\frac{b}{a}$, ce qui donnera b^2ce au quotient; on multipliera les deux termes de cette première fraction par ce quotient b^2ce, ce qui donnera $\frac{b^3ce}{ab^2ce}$ pour la première fraction mise au dénominateur ab^2ce. On divisera la quantité ab^2ce par le dénominateur b^2 de la seconde fraction $\frac{cd}{b^2}$, ce qui donnera ace pour quotient. On multipliera les deux termes de cette seconde fraction $\frac{cd}{b^2}$ par ce quotient ace, et on aura $\frac{ac^2de}{ab^2ce}$ pour la seconde

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fraction mise au dénominateur ab^2ce; on opérera de la même manière sur les autres fractions, ainsi que nous l'avons expliqué n°. 78 de l'arithmétique, et on aura $\frac{b^3ce}{ab^2ce}$, $\frac{ac^2de}{ab^2ce}$, $\frac{ab^2cd^2}{ab^2ce}$, $\frac{abde^2}{ab^2ce}$, $\frac{bcen}{ab^2ce}$, au lieu des fractions proposées $\frac{b}{a}$, $\frac{cd}{b^2}$, $\frac{d^2}{e}$, $\frac{de}{bc}$, $\frac{n}{ab}$.

Je ne crois pas avoir besoin de pousser plus loin les exemples de la réduction des fractions au même dénominateur.

52. Pour faire l'addition de tant de fractions algébriques qu'on voudra, il est clair qu'il faudra les mettre d'abord au même dénominateur, et ensuite faire la somme des numérateurs et donner à cette somme le dénominateur commun. Il est inutile de dire comment on doit opérer pour faire la soustraction (voyez n°. 80, arith.).

53. Pour faire la multiplication des fractions algébriques, on fera, comme en arithmétique (n°. 81), le produit des numérateurs, pour avoir le numérateur du produit, et celui des dénominateurs pour avoir le dénominateur du produit. Ainsi, par exemple, si l'on avait $\frac{b}{a} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$, on aurait $\frac{bce}{adf}$ pour le produit demandé. La démonstration de cette règle est tout-à-fait la même qu'en arithmétique (n°. 81).

54. Pour diviser une fraction algébrique par une autre, on multipliera la fraction dividende par l'inverse de la fraction diviseur, et le produit de ces deux fractions sera le quotient demandé (voyez n°. 82, arith.). Ainsi, par exemple, si l'on voulait diviser $\frac{b}{a}$ par $\frac{c}{d}$, on multiplierait $\frac{b}{a}$ par $\frac{d}{c}$ (inverse de $\frac{c}{d}$) et le produit $\frac{bd}{ac}$ serait le quotient demandé.

5^me^. LEÇON.

De l'Elévation aux Puissances.

55. Nous avons déjà vu (n°. 7) qu'élever une quantité à une certaine puissance, c'est multiplier cette quantité par elle-même, de manière qu'elle se trouve autant de fois facteur dans le résultat, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance.

La quantité qu'on élève ainsi à une certaine puissance, par des multiplications successives, s'appelle *racine;* et le dernier produit qu'on obtient est la *puissance* dont il s'agit.

Le procédé de l'élévation aux puissances comprend quatre règles : la règle des lettres ou facteurs, celle des coefficiens, celle des exposans et celle des signes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

56. Pour découvrir la règle des facteurs, supposons qu'il s'agisse d'élever ab au carré, ce qu'on peut indiquer de cette manière $(ab)^2$. Or élever une quantité au carré ou à la seconde puissance, c'est multiplier cette quantité par elle-même; on aura donc $(ab)^2 = ab \times ab = a^2b^2$ (n°. 25).

S'il s'agissait d'élever ab au cube ou à la troisième puissance, on aurait $(ab)^3 = ab \times ab \times ab = a^3b^3$; pour la quatrième puissance de ab, on aurait $(ab)^4 = ab \times ab \times ab \times ab = a^4b^4$. En général, si l'on voulait élever ab à une puissance marquée par m, m étant un nombre entier quelconque positif, on aurait évidemment $(ab)^m = ab \times ab \times ab.....$, ab étant autant de fois facteur, dans le second membre de cette égalité, qu'il y a d'unités dans m : on aura donc a et b chacun m fois facteurs dans le produit $ab \times ab \times ab \times ab.....$; donc $(ab)^m = a^mb^m$.

Il suit de là, que *la puissance m d'un produit de deux facteurs est égale au produit de la puissance m de chaque facteur.*

On conçoit que cette règle est indépendante du nombre de facteurs de la quantité qu'on veut élever à la puissance m. En effet, s'il s'agissait de $(abcd...)^m$, on aurait $(abcd.....)^m = (abcd...) \times (abcd...) \times (abcd...) \times (abcd...)...$, $(abcd...)$ étant m fois facteur. Dans le second membre de cette égalité, il est évident que les quantités a, b, c, d,....., seront autant de fois facteurs qu'il y a d'unités dans m, et que par conséquent $(abcd...)^m = a^mb^mc^md^m.....$

57. Supposons, maintenant, qu'on demande la cinquième puissance de $3abc...$, on aura $(3abc...)^5 = 3abc... \times 3abc... \times 3abc... \times 3abc... \times 3abc...$

Dans le second membre de cette égalité on voit que le coefficient 3 est 5 fois facteur, c'est-à-dire que ce coefficient est à la 5^{me}. puissance, aussi bien que les facteurs a, b, c,..... de sorte que $(3abc...)^5 = 3^5a^5b^5c^5... = 243a^5b^5c^5...$ Cela est évidemment général; d'où il suit que, quand on élève une quantité à la puissance m, *il faut, non-seulement élever chacun des facteurs littéraux de cette quantité à cette puissance m, mais encore le coefficient numérique.* En effet, le coefficient numérique n'est autre chose qu'un facteur comme les autres.

58. Pour découvrir la règle des exposans, supposons qu'on ait a^m à élever à la puissance 2^{me}, ce qu'on peut indiquer ainsi : $(a^m)^2$; il est clair que cela revient à multiplier a^m par lui-même, c'est-à-dire que $(a^m)^2 = a^m \times a^m$, et en appliquant la règle de la multiplication (n°. 25), on aura $(a^m)^2 = a^{m+m} = a^{2m}$; d'où il suit que *pour élever au carré une quantité qui a un exposant,* et que l'on appelle EXPONENTIELLE, *il faut multiplier l'exposant de cette quantité par* 2.

Supposons qu'on veuille élever a^m à la puissance 3^{me}; on aura

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$(a^m)^3 = a^m \times a^m \times a^m$, et en appliquant la règle de la multiplication (n°.25), on aura $(a^m)^3 = a^{m+m+m} = a^{3m}$; c'est-à-dire que, *pour élever une exponentielle à la* 3me. *puissance, il faut multiplier par* 3 *l'exposant de cette exponentielle.*

On conçoit, maintenant, que s'il fallait élever l'exponentielle a^m à la puissance n^{me}, il faudrait multiplier son exposant m par n, ce qui donnerait $(a^m)^n = a^{mn}$.

En effet, on a évidemment $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times a^m \ldots\ldots$, l'exponentielle a^m étant n fois facteurs dans le second membre de cette égalité : on aura donc $(a^m)^n = a^{m+m+m+m\ldots\ldots}$, m étant n fois dans l'exposant $m+m+m\ldots\ldots$, qui sera, par conséquent, égal à mn; de sorte, enfin, que $(a^m)^n = a^{mn}$, ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, pour élever une exponentielle à une puissance quelconque, il faut multiplier son exposant par celui de la puissance à laquelle on veut l'élever.

59. Quant à la règle des signes, elle consiste en ce que,

1°. Quel que soit le signe de la racine, toutes les puissances de degré pair de cette racine auront le signe +.

En effet, quel que soit le degré de la puissance, si la racine a le signe + la puissance aura le même signe +; puisque + multiplié par + donne toujours +. Si le degré est pair, et que la racine ait le signe —, la puissance aura aussi le signe +; car la plus petite puissance de degré pair est la 2me, et alors la racine doit être multipliée par elle-même; mais — multiplié par — donne +; donc le carré d'une racine négative a le signe +. Mais puisque les nombres pairs augmentent successivement de 2 unités, de la 2me. puissance pour passer à la moindre puissance de degré pair, il faut passer à la 4me., de la 4me. à la 6me, de la 6me., à la 8me., et ainsi de suite; mais de la 2me. pour passer à la 4me., il faut multiplier la 2me. par elle-même; or la 2me. a le signe +; donc la 4me. aura aussi le signe +. De la 4me. pour passer à la 6me., il faut multiplier la 2me. par la 4me.; or, ces deux puissances ont le signe +; donc la 6me. aura aussi le signe +, et ainsi de suite pour toutes les puissances de degré pair.

2°. Toutes les puissances de degré impair auront le même signe que la racine : si la racine a le signe +, ces puissances auront le signe +, et elles auront le signe — si la racine a le signe —.

En effet, si la racine a le signe +, la puissance aura toujours le signe +, quel que soit l'exposant. Mais si la racine a le signe —, et que l'exposant soit impair, la puissance aura le signe —; car la plus petite puissance de degré impair est la 1re., qui a le signe —, puisqu'elle n'est autre chose que la racine elle-même.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Mais, puisque les nombres impairs augmentent successivement de 2 unités, de la première puissance pour passer à la moindre puissance de degré impair, qui est la 1re. il faudra passer à la 3me., de la 3me. à la 5me., de la 5me. à la 7me., et ainsi de suite ; mais pour passer de la 1re. à la 3me. il faut multiplier la 1re. qui a le signe — par la 2me. qui a le signe +; la 3me. aura donc le signe —. De la 3me. pour passer à la 5me. il faudra multiplier la 2me. qui a le signe + par la 3me. qui a le signe —; la 5me. aura donc le signe —, et ainsi de suite pour toutes les puissances de degré impair.

Ayant établi les règles de l'élévation des puissances des monomes, il nous sera facile, maintenant, d'expliquer comment il faut opérer dans l'élévation des puissances des polynomes.

60. Supposons qu'on demande le carré de $a+b$, ce qu'on indique de cette manière : $(a+b)^2$; on voit qu'ici tout se réduit à multiplier $a+b$ par lui-même. En faisant cette multiplication, on aura $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Si l'on voulait élever $a+b$ au cube, on éleverait cette quantité d'abord au carré, ce qui donnerait $a^2+2ab+b^2$, et ensuite, on multiplierait le carré par encore le binome $a+b$, ce qui donnerait $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ pour le cube demandé; de sorte que $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Si l'on demandait la 4me. puissance d'une quantité polynome quelconque, on éleverait d'abord cette quantité au carré, et ensuite on multiplierait son carré par lui-même, et on aurait la 4me. puissance demandée. Ainsi, par exemple, s'il s'agissait de la 4me. puissance de $a+b$, en opérant de cette manière on obtiendrait $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

S'il s'agissait de la 5me. puissance d'une quantité polynome quelconque, on éleverait cette quantité au carré, puis au cube, et ensuite on multiplierait le carré par le cube, ce qui donnerait la 5me. puissance demandée. On aurait les puissances des degrés supérieurs en suivant une marche analogue, et en observant que, quelle que soit une quantité polynome, il faut que cette quantité entre comme facteur, dans la puissance, autant de fois qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette puissance. Mais quelque facile à comprendre que soit cette marche, il faut convenir que, quand il s'agit de puissances supérieures, elle est un peu longue et ennuyeuse à suivre ; mais il existe un moyen, connu sous le nom de *formule du binome de Newton*, qui a le double avantage d'être d'une simplicité et d'une fécondité remarquables.

La démonstration que nous pouvons donner, dans ce moment, de cette formule remarquable, dépend de plusieurs propositions, qui ont elles-mêmes leur utilité particulière, et que nous allons démontrer successivement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Des Permutations.

61. On appelle *permutations* les différentes manières d'indiquer un produit composé de tant de facteurs qu'on voudra, sans altérer ce produit. (Voyez, n°. 48, arith.)

Les permutations qui peuvent avoir lieu dans l'ordre des facteurs d'un produit conduisent à deux questions : mettre toutes ces permutations en évidence; et, déterminer le nombre de ces permutations, sans se donner la peine de les écrire.

62. Supposons qu'on nous demande de mettre en évidence les permutations dont est susceptible le produit de a et b; il est clair qu'on pourra écrire ce produit de ces deux manières : ab et ba seulement.

S'il s'agissait du produit de a, b et c, on supposerait pour un moment qu'il ne s'agit que du produit de a et b, ce qui donnerait ab et ba pour les permutations. Ensuite, on prendrait la permutation ab, dans laquelle on introduirait le troisième facteur c, auquel on ferait successivement occuper la 3^{me}., la 2^{me}. et la 1re. place, ce qui donnerait les trois permutations abc, acb et cab; on ferait de même sur la permutation ba, et on aurait bac, bca et cba, de sorte qu'un produit de 3 facteurs donne lieu aux 6 permutations suivantes : abc, acb, bac, bca, cab et cba, où l'on voit que chaque facteur est écrit 2 fois le premier, 2 fois le second et 2 fois le troisième. (Nous dirons simplement, pour abréger, que chaque facteur est écrit 2 fois le premier). La raison pour laquelle chaque facteur est écrit 2 fois le premier est facile à saisir; on voit, en effet, que c'est parce que les deux facteurs qui suivent le premier forment un produit qui donne lieu à 2 permutations.

S'il était question du produit des 4 facteurs a, b, c et d, on supposerait pour un moment qu'il n'est question que du produit des facteurs a, b et c, qui donnerait lieu aux 6 permutations suivantes : abc, acb, bac, bca, cab et cba; ensuite on introduirait le 4^{me}. facteur d dans chacune de ces 6 permutations, en lui faisant successivement occuper la 4^{me}, la 3^{me}., la 2^{me}. place; ce qui donnerait d'abord les 18 permutations $abcd$, $abdc$, $adbc$, $acbd$, $acdb$, $adcb$; $bcad$, $bcda$, $bdca$, $bcad$, $bcda$, $bdca$; $cabd$, $cadb$, $cdab$, $cbad$, $cbda$ et $cdba$, et enfin, on mettrait le 4^{me}. facteur devant chacune des 6 permutations de 3 facteurs, et on aurait encore les 6 permutations de 4 lettres $dabc$, $dacb$, $dbac$, $dbca$, $dcab$ et $dcba$, qu'on écrirait à la suite des 18 précédentes, et on aurait toutes les permutations dont un produit de 4 facteurs est susceptible, qui sont au nombre de 24.

On remarquera que dans les 24 permutations dont un produit de 4 fac-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

teurs est susceptible, chaque facteur occupe 6 fois la première place, et que cela provient de ce qu'après ce facteur il y a un produit de 3 facteurs qui sont susceptibles de 6 permutations.

Si l'on demandait les permutations dont un produit de 5 facteurs est susceptible, on ne supposerait d'abord que quatre facteurs à ce produit; on formerait les 24 permutations de ce produit de 4 facteurs; on introduirait le 5^{me}. facteur du produit en question dans chacune de ces 24 permutations, en lui faisant occuper successivement la 5^{me}, la 4^{me}, la 3^{me}. et la 2^{me}. place, et ensuite on mettrait ce 5^{me}. facteur devant chacune des 24 permutations de 4 facteurs, et on aurait, de cette manière, 120 permutations de 5 facteurs. On remarquerait que, dans ces 120 permutations, chaque facteur serait écrit 24 fois le premier, par la raison que les quatre facteurs qui le suivraient seraient susceptibles de 24 permutations.

En se conduisant de la même manière, on parviendra à former, sans confusion et de la manière la plus simple, les permutations dont un produit de tant de facteurs qu'on voudra est susceptible, en supposant successivement que ce produit ne se compose que de 2, 3, 4, etc. facteurs; et on remarquera que, *quand le produit a 2 facteurs, chacun de ces facteurs est écrit une fois le premier, et il y a 2 permutations; quand il en a* 3, *chacun est écrit* 2 *fois le premier et il y a* 6 *permutations; quand il en a* 4, *chacun est écrit* 6 *fois le premier, et il y a* 24 *permutations; quand il a* 5 *facteurs dans le produit, chacun est écrit* 24 *fois le premier, et il y a* 120 *permutations; quand il y a* 6 *facteurs, chacun est écrit* 120 *fois le premier, et il y a* 720 *permutations,* et ainsi de suite; de sorte que, *dans les permutations des facteurs d'un produit d'un nombre quelconque de facteurs, chaque facteur se trouve écrit le premier autant de fois qu'il y a de permutations dans les facteurs du produit qui a un facteur de moins, et le nombre de permutations est égal au produit du nombre de fois que chaque facteur doit être écrit le premier par le nombre de facteurs donnés.*

63. Cela posé, supposons que, sans former ces permutations, on veuille en connaître le nombre.

Puisque, lorsqu'il n'y a que deux facteurs dans le produit, chaque facteur peut être écrit une fois le premier, et qu'il y a deux facteurs, d'après ce qui vient d'être dit, le nombre de permutations sera 1×2.

Si le produit avait 3 facteurs, alors chacun de ces facteurs serait écrit le premier un nombre de fois marqué par 1×2, et comme dans ce cas il y aurait 3 facteurs, le nombre de permutations serait $1 \times 2 \times 3$.

Si le produit avait 4 facteurs, chacun d'eux serait écrit le premier un

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

nombre de fois égal a $1 \times 2 \times 3$, et comme dans ce cas il y aurait 4 facteurs, le nombre de permutations serait égal à $1 \times 2 \times 3 \times 4$, et ainsi de suite; de sorte, qu'en général, *le nombre des permutations d'un produit de tant de facteurs qu'on voudra sera égal au produit d'une suite de facteurs qui seront les nombres naturels depuis un jusqu'au nombre qui marquera le nombre des facteurs du produit en question.*

Ainsi, si m est le nombre des facteurs du produit en question, le nombre de permutations possibles sera $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots (m-1) \times m$.

Des arrangemens qui peuvent avoir lieu dans la manière d'écrire un nombre de lettres donné, en les prenant 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc.

64. Ici, comme dans les permutations, il y a deux questions à résoudre : la première, qui consiste à mettre tous les arrangemens en évidence, et la seconde à trouver les nombres de tous ces arrangemens, sans se donner la peine de les écrire. Nous résoudrons ces deux questions simultanément.

Supposons donc que les lettres données soient a, b, c, d, e, f, g et h.

1°. Pour avoir les arrangemens 2 à 2 : On prendra la première a des lettres données, et on l'écrira devant chacune des autres, ce qui donnera les arrangemens *ab, ac, ad, ae, af, ag, ah,* dont le nombre sera égal au nombre des lettres données moins une. Ensuite, on prendra la seconde b des lettres données, on l'écrira devant chacune des autres, et on aura les arrangemens *ba, bc, bd, be, bf, bg, bh,* qui seront en nombre égal au nombre de lettres données moins une ; on prendra la troisième c des lettres données, et on l'écrira devant chacune des autres, ce qui donnera les arrangemens *ca, cb, cd, ce, cf, cg, ch,* et ainsi de suite pour chacune des lettres données, de sorte qu'on aura, pour tous les arrangemens de deux lettres, le tableau suivant :

ab, ac, ad, ae, af, ag, ah.
ba, bc, bd, be, bf, bg, bh.
ca, cb, cd, ce, cf, cg, ch.
da, db, dc, de, df, dg, dh.
ea, eb, ec, ed, ef, eg, eh.
fa, fb, fc, fd, fe, fg, fh.
ga, gb, gc, gd, ge, gf, gh.
ha, hb, hc, hd, he, hf, hg.

qui se compose, comme on voit, d'autant de lignes qu'il y a de lettres données, chaque ligne renfermant autant d'arrangemens qu'il y a de lettres données moins une ; or, il est évident que les mêmes choses auront lieu, quel

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que soit le nombre des lettres données; si donc m représente ce nombre de lettres données, $m-1$ sera le nombre d'arrangemens de chaque ligne, et le nombre total des arrangemens de deux lettres sera, par conséquent, $m\,(m-1)$.

2°. Pour avoir les arrangemens 3 à 3, on prendra le premier arrangement de 2 lettres, on l'écrira devant chacune des lettres données, excepté devant les deux que cet arrangement de deux lettres renferme, et on aura les arrangemens de trois lettres que voici : *abc, abd, abe, abf, abg, abh,* qui sont en nombre égal au nombre de lettres données, moins les deux que renfermait l'arrangement de deux lettres qu'on a écrit devant les autres lettres données, c'est-à-dire au nombre de lettres données moins 2.

On prendra le second arrangement de 2 lettres, on l'écrira devant chacune des lettres données, excepté devant les deux que ce second arrangement de 2 lettres renferme, et on aura les arrangemens de 2 lettres que voici : *acb, acd, ace, acf, acg, ach,* qui seront encore en nombre égal au nombre de lettres données moins 2.

On continuerait de prendre successivement le 3^{me}, le 4^{me}, le 5^{me}, etc. des arrangemens de deux lettres, et on l'écrirait devant chacune des lettres données, excepté devant celles que renfermerait l'arrangement de deux lettres qu'on aurait pris, et on parviendrait, de cette manière, à autant de lignes d'arrangemens de trois lettres, qu'il y aurait d'arrangemens de deux lettres, et chacune de ces lignes renfermerait un nombre d'arrangemens égal au nombre de lettres données moins 2.

Si donc m est toujours le nombre des lettres données, le nombre d'arrangemens de chaque ligne sera $m-2$, et le nombre de lignes $m\,(m-1)$; d'où il s'ensuivra que le nombre total des arrangemens de 3 lettres sera $m\,(m-1)\,(m-2)$.

3°. Pour avoir les arrangemens 4 à 4, on prendra le premier arrangement de 3 lettres, on l'écrira devant chacune des lettres données, excepté devant celles que ce premier arrangement de 3 lettres renferme, et on aura une première ligne d'arrangemens de 4 lettres qui sera *abcd, abce, abcf, abcg, abch,* et qui renfermera autant d'arrangemens qu'il y a de lettres données moins 3. On prendra le second arrangement de 3 lettres, on l'écrira devant chacune des lettres données, excepté devant les 3 que renferme ce second arrangement de 3 lettres, et on aura une seconde ligne d'arrangemens de 4 lettres qui sera *abdc, abde, abdf, abdg, abdh,* et qui renfermera encore autant d'arrangemens qu'il y a de lettres données moins 3.

On continuera de prendre le 3^{me}, le 4^{me}, le 5^{me}, le 6^{me}, etc., arrangement de 3 lettres, qu'on écrira devant chacune des lettres données, excepté devant les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3 que renfermera l'arrangement de 3 lettres qu'on aura pris, et chacun des arrangemens de 3 lettres donnera une ligne d'arrangemens de 4 lettres composée d'autant d'arrangemens qu'il y aura de lettres données moins 3 : on aura donc autant de ces lignes qu'il y aura d'arrangemens de 3 lettres; ainsi donc, si m représente toujours le nombre de lettres donnée, le nombre d'arrangemens de 4 lettres de chaque ligne sera $m-3$, et le nombre de ces lignes $m(m-1)(m-2)$: le nombre total des arrangemens de 4 lettres sera donc $m(m-1)(m-2)(m-3)$.

En continuant de cette manière, si l'on voulait avoir les arrangemens de 5 lettres, il faudrait prendre successivement tous les arrangemens de 4 lettres depuis le premier jusqu'au dernier, et les écrire respectivement devant chacune des lettres données, excepté devant les quatre que renfermerait l'arrangement de 4 lettres qu'on aurait pris : chaque arrangement de 4 lettres donnerait une ligne d'arrangemens de 5 lettres, d'un nombre d'arrangemens égal au nombre de lettres données moins 4 : on aurait donc autant de ces lignes d'arrangemens de 5 lettres, qu'il y aurait d'arrangemens de 4 lettres; de sorte que m étant toujours le nombre des lettres données, $m-4$ serait le nombre d'arrangemens de 5 lettres contenues dans une ligne, et le nombre de lignes serait $m(m-1)(m-2)(m-3)$: le nombre total des arrangemens de 5 lettres serait donc $m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$.

L'analogie nous conduit nécessairement à conclure que, le nombre total des arrangemens de 6, de 7, de 8, etc. lettres, sera respectivement donné par les formules

$$m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5).$$
$$m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6).$$
$$m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7).$$
etc.

Il suit donc de ce qui vient d'être dit sur les arrangemens 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc., d'un nombre quelconque de lettres données, *que pour avoir le nombre total de chaque classe d'arrangemens, il faut faire un produit composé d'autant de facteurs qu'il y a de lettres dans chacun des arrangemens en question : le premier de ces facteurs étant le nombre qui exprime combien il y a de lettres données, et les autres allant consécutivement en diminuant de l'unité, à partir du premier facteur.*

Des produits différens que l'on peut former en combinant 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc., un nombre quelconque de facteurs donnés.

65. Supposons qu'on ait m facteurs donnés a, b, c, d, e, f, g, h.....

1°. Si l'on veut avoir le nombre des produits différens que l'on peut former

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en combinant tous ces facteurs donnés 2 à 2, on observera que le nombre d'arrangemens (n°. 64) qu'on peut faire en écrivant ces facteurs 2 à 2 est $m(m-2)$; mais un seul produit de deux facteurs donne 2 permutations (n°. 62); ou, en d'autres termes, on pourra grouper 2 à 2 les arrangemens de 2 facteurs, de manière que chaque groupe se compose du même produit deux fois, autant de fois qu'un produit de 2 lettres peut donner de permutations : le nombre des produits différens sera donc égal au nombre des groupes de 2 arrangemens; *c'est-à-dire au nombre d'arrangemens de 2 lettres, divisé par le nombre de permutations d'un produit de deux facteurs.* Ainsi donc, le nombre des produits différens que peuvent donner m facteurs combinés 2 à 2, sera égal à $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$.

2°. Si l'on veut avoir le nombre des produits différens que l'on peut former avec m facteurs combinés 3 à 3, on se rappelera que le nombre des arrangemens que l'on peut faire (n°. 64) en écrivant ces facteurs 3 à 3 est $m(m-1)(m-2)$, et que le nombre des permutations d'un produit de 3 facteurs (n°. 64) est $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; et on verra, alors, qu'on pourra grouper tous les arrangemens de 3 lettres de 6 en 6, de manière que chaque groupe se compose des 6 permutations du même produit : il y aura donc 6 fois moins de groupes que d'arrangemens de 3 lettres, et, par conséquent (puisque chaque groupe renferme 6 fois le même produit), le nombre des produits différens de 3 facteurs sera le 6me. du nombre d'arrangemens de 3 lettres; ou, en d'autres termes, *le nombre de produits qu'on peut faire avec m facteurs en les combinant 3 à 3 est égal au nombre d'arrangemens de 3 lettres qu'on peut former avec m lettres, divisé par le nombre des permutations d'un produit de 3 facteurs.*

Or, $m(m-1)(m-2)$ est le nombre des arrangemens, et $1 \cdot 2 \cdot 3$. le nombre des permutations; donc le nombre des produits différens 3 à 3 sera $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

3°. Pour avoir le nombre des produits différens qu'on peut former avec m facteurs combinés 4 à 4, on observera que, comme il y a $m(m-1)(m-2)(m-3)$ arrangemens de 4 lettres (n°. 64) et qu'un produit de 4 facteurs donne $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ permutations, il est clair, d'après ce qui précède, qu'on pourra grouper les arrangemens de 4 lettres, de manière que chaque groupe renferme les 24 permutations du même produit; et que, par conséquent, *le nombre des produits différens qu'on peut former avec m facteurs combinés 4 à 4 est égal au nombre d'arrangemens de 4 lettres divisé par le nombre des permutations d'un produit de 4 facteurs;* c'est-à-dire égal à $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il est facile de voir, maintenant, par analogie, que le nombre des produits différens 5 à 5 est égal à $\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$; que celui des produits 6 à 6 est égal à $\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)\,(m-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}$, etc. c'est-à-dire que *le nombre des produits différens qu'on peut former avec m facteurs, combinés n à n* (*n* étant un nombre entier positif quelconque plus petit ou au plus égal à *m*), *est égal au nombre d'arrangemens de n lettres divisé par le nombre de permutations d'un produit de n facteurs.*

66. Si l'on voulait mettre en évidence tous ces produits différens de *m* facteurs combinés 2 à 2, 3 à 3, etc., on s'y prendrait de la manière suivante :

1°. Supposons qu'on ait les six facteurs *a, b, c, d, e, f,* et qu'on demande d'abord les produits 2 à 2.

On prendra le facteur *a* et on l'écrira devant chacun de ceux qui le suivent vers la droite, et on aura *ab, ac, ad, ae, af.*

On prendra ensuite le second facteur *b,* qu'on écrira devant chacun de ceux qui le suivent, et on aura *bc, bd, be, bf.*

Puis, on prendra le troisième facteur *c* qu'on écrira devant chacun de ceux qui le suivent, et on aura *cd, ce, cf.*

Puis; on prendra le 4me. facteur *d* qu'on écrira devant chacun de ceux qui le suivent, et on aura *de, df.*

Enfin, on prendra le 5me. facteur *e* et on l'écrira devant celui *f* qui le suit, et on aura *ef;* de sorte que tous les produits différens des 6 facteurs donnés combinés 2 à 2 sont *ab, ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf, cd, ce, cf, de, df, ef.*

2°. Pour avoir les produits 3 à 3, on prendra le premier facteur donné *a,* et on l'écrira devant chacun des produits de deux lettres qui ne contient pas ce facteur *a,* et on aura *abc, abd, abe, abf, acd, ace, acf, ade, adf, acf.*

Puis, on prendra le second facteur *b* et on l'écrira devant chacun des produits de 2 lettres, qui ne contient ni le facteur *a,* ni le facteur *b,* et on aura *bcd, bce, bcf, bde, bdf, bef.*

Puis, on prendra le 3me. facteur *c* qu'on écrira devant chaque produit de 2 lettres qui ne renferme ni le facteur *a,* ni le facteur *b,* ni le facteur *c,* et on aura *cde, cdf, cef.*

Enfin, on prendra le 4me. facteur *d* qu'on écrira devant le seul produit de 2 lettres, *ef,* qui ne contienne pas les 4 premiers facteurs, et on aura *def.*

De sorte que tous les produits des 6 facteurs donnés, combinés 3 à 3 sont *abc, abd, abe, abf, acd, ace, acf, ade, adf, aef, bcd, bce, bcf, bde, bdf, bef, cde, cdf, cef, def.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3°. Pour avoir les produits 4 à 4, on prendra le premier facteur a, on l'écrira devant chacun des produits de 3 lettres qui ne renferme pas le facteur a, et on aura *abcd, abce, abcf, abde, abdf, abef, acde, acdf, acef, adef.*

Puis, on prendra le second facteur b, on l'écrira devant chacun des produits de 3 lettres qui ne renferme ni le facteur a, ni le facteur b, et on aura *bcde, bcdf, bcef, bdef.*

Enfin, on prendra le 3me. facteur c, on l'écrira devant chacun des produits de 3 facteurs qui ne renferme pas les 3 premiers, et on aura *cdef*; de sorte que tous les produits des 6 facteurs donnés combinés 4 à 4 sont : *abcd, abce, abcf, abde, abdf, abef, acde, acdf, acef, adef, bcde, bcdf, bcef, bdef, cdef.*

4°. Pour avoir les produits 5 à 5, on prendra le premier facteur a, on l'écrira devant chacun des produits de 4 lettres qui ne renferme pas le facteur a, et on aura *abcde, abcdf, abcef, abdef, acdef.*

Ensuite, on prendra le second facteur b, on l'écrira devant le seul produit *cdef* de 4 facteurs qui ne contienne pas les facteurs a et b, et on aura *bcdef*, de sorte que tous les produits de 6 facteurs donnés combinés 5 à 5 sont : *abcde, abcdf, abcef, abdef, acdef, bcdef.*

5°. Enfin, si l'on veut avoir les produits différens 6 à 6, en suivant la marche précédente, on trouvera le seul produit *abcdef*, comme cela doit être, car, on ne peut avoir qu'un produit, quand ce produit renferme tous les facteurs donnés.

Je crois cet exemple suffisant pour montrer la marche à suivre pour avoir tous les produits différens qu'on peut avoir avec un nombre quelconque de facteurs, en les combinant 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc.

J'observerai, en terminant cet article, que cette méthode de trouver tous les produits 2 à 2, 3 à 3, etc., qu'on peut former avec un nombre de facteurs donnés, fournit le moyen d'avoir tous les diviseurs d'un nombre dont on connaît les facteurs simples. (Voyez n°. 73, arith.)

6me. LEÇON.

Méthode abrégée pour trouver le produit de tant de facteurs binomes qu'on voudra, ces binomes ayant un terme commun.

67. Supposons d'abord qu'on nous demande le produit des binomes $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$ et $x+e$; au lieu de chercher ce produit en faisant les multiplications successives de tous ces binomes comme à l'ordinaire, voici de quelle manière on s'y prendra :

*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$(x+a)\times(x+b)\times(x+c)\times x+d)\times(x+e)=$$

x^5+a	x^4+ab	x^3+abc	x^2+abcd	$x+abcde$
$+b$	$+ac$	$+abd$	$+abce$	
$+c$	$+ad$	$+abe$	$+abde$	
$+d$	$+ae$	$+acd$	$+acde$	
$+e$	$+bc$	$+ace$	$+bcde$	
	$+bd$	$+ade$		
	$+be$	$+bcd$		
	$+cd$	$+bce$		
	$+ce$	$+bde$		
	$+de$	$+cde$		

Après avoir indiqué la multiplication des binomes proposés, comme on le voit ci-dessus, on comptera ces binomes, et on écrira le terme x, qui est commun à tous, avec un exposant égal au nombre des binomes. Dans notre exemple, ayant 5 binomes, nous écrirons x^5, ainsi qu'on le voit ci-dessus. A la suite de x^5 on écrira le produit $+ax^4$ du second terme du premier binome par x avec un exposant d'une unité moindre que dans le premier terme x^5. Au-dessous de $+ax^4$, on écrira sous une même colonne les produits des seconds termes de tous les binomes par x^4, lesquels produits sont $+bx^4$, $+cx^4$, $+dx^4$, $+ex^4$ (1). Ayant formé la colonne où se trouve x^4, on formera la colonne suivante, dans laquelle x ne sera qu'à la troisième puissance, en s'y prenant de cette manière : on prendra la lettre a, et on la combinera (n°. 66) avec chacune de celles qui sont devant x^4, et on formera les termes abx^3, acx^3, adx^3 et aex^3, qu'on écrira les uns au-dessous des autres avec le signe $+$, ainsi qu'on le voit ci-dessus. Puis, on prendra la lettre b, et on la combinera avec chacune de celles qui sont au-dessous d'elle dans la colonne de x^4, et on aura les termes bcx^3, bdx^3, bex^3, qu'on écrira sous ceux déjà écrits dans la colonne de x^3, en leur donnant le signe $+$. Puis, on prendra la lettre c, et on la combinera avec chacune de celles qui sont au-dessous d'elle, dans la colonne de x^4, et on aura les termes cdx^3, cex^3, qu'on écrira sous ceux déjà écrits dans la colonne de x^3. Puis, on prendra la lettre d, et on la combinera avec e qui se trouve au-dessous d'elle dans la colonne de x^4, et on aura le terme dex^3, qui terminera la colonne de x^3. On passera donc à la formation de la colonne suivante, dans laquelle x ne doit être qu'à la 2^e. puissance. Pour former cette colonne, on prendra

(1) Lorsque, dans un développement du genre de celui dont il s'agit ici, les termes d'une même colonne ont un facteur commun, on est dans l'usage, pour abréger, de n'écrire ce facteur qu'une fois en haut de la colonne à laquelle il appartient, et de le séparer des autres facteurs par une barre verticale, comme on le voit ci-dessus.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la lettre a, et on la mettra devant les deux facteurs de chaque terme de la colonne de x^3, excepté devant ceux où la lettre a se trouve déjà, et on formera de cette manière les termes $abcx^2$, $abdx^2$, $abex^2$, $acdx^2$, $acex^2$ et $adex^2$, qu'on écrira au-dessous les uns des autres avec le signe +, ainsi qu'on le voit ci-dessus. Puis, on prendra la lettre b, et on la mettra devant les deux facteurs de chaque terme de la colonne de x^3, excepté devant ceux où les lettres a et b se trouvent déjà, et on formera, de cette manière, les termes $bcdx^2$, $bcex^2$ et $bdex^2$, qu'on écrira au-dessous de ceux déjà écrits dans la colonne de x^2, en leur donnant toujours le signe +. Puis, on prendra la lettre c, et on la mettra devant les deux facteurs de chaque terme de la colonne de x^3, excepté devant ceux où les lettres a, b et c se trouvent déjà; et comme il n'y a qu'un terme où ces lettres ne sont pas, on n'aura que le terme $cdex^2$, qui terminera la colonne de x^2. On passera donc à la formation de la colonne suivante, dans laquelle x ne sera qu'à la première puissance, et pour former cette colonne on prendra la lettre a, et on la mettra devant les trois facteurs de chaque terme de la colonne de x^2, excepté devant ceux où cette lettre se trouve déjà, ce qui donnera les termes $abcdx$, $abcex$, $abdex$ et $acdex$, qu'on écrira les uns au-dessous des autres, avec le signe +, ainsi qu'on le voit ci-dessus. Puis, on prendra la lettre b, et on la mettra devant les trois facteurs de chaque terme de la colonne de x^2, excepté devant ceux qui contiennent déjà les lettres a et b, et comme il n'y a qu'un terme où ces deux lettres ne sont pas, on n'aura que le terme $bcdex$ qui terminera la colonne de x. Enfin, on passera à la colonne suivante, dans laquelle x sera à la puissance o, c'est-à-dire dans laquelle x disparaîtra (n°. 36), et pour composer cette colonne, on mettra la lettre a devant les quatre facteurs de chaque terme de la colonne de x, excepté devant ceux dans lesquels cette lettre se trouve déjà, et comme il n'y a qu'un terme qui ne contient pas cette lettre, on n'aura que le terme $abcde$, qui seul compose cette dernière colonne, et le produit sera achevé.

L'analogie indique assez qu'il faudrait opérer de la même manière pour un nombre quelconque de facteurs $(x+a)\times(x+b)\times(x+c)\times$ etc., pourvu que tous ces facteurs binomes eussent la même lettre pour premier terme.

On appelle *multiplication par combinaisons*, ce procédé de faire la multiplication. J'engage le lecteur à s'exercer dans ce procédé, et, pour avoir la preuve de ses résultats, de faire les mêmes produits par le moyen ordinaire. En voici encore un exemple, que je n'expliquerai pas.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)(x+f)=$$

x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x
$+a$	$+ab$	$+abc$	$+abcd$	$+abcde$	$+abcdef$
$+b$	$+ac$	$+abd$	$+abce$	$+abcdf$	
$+c$	$+ad$	$+abe$	$+abcf$	$+abcef$	
$+d$	$+ae$	$+abf$	$+abde$	$+abdef$	
$+e$	$+af$	$+acd$	$+abdf$	$+acdef$	
$+f$	$+bc$	$+ace$	$+abef$	$+bcdef$	
	$+bd$	$+acf$	$+acde$		
	$+be$	$+ade$	$+acdf$		
	$+bf$	$+adf$	$+acef$		
	$+cd$	$+aef$	$+adef$		
	$+ce$	$+bcd$	$+bcde$		
	$+cf$	$+bce$	$+bcdf$		
	$+de$	$+bcf$	$+bcef$		
	$+df$	$+bde$	$+bdef$		
	$+ef$	$+bdf$	$+cdef$		
		$+bef$			
		$+cde$			
		$+cdf$			
		$+cef$			
		$+def$			

68. Si nous examinons le produit d'une suite quelconque de facteurs binomes de la forme $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc., obtenu par le moyen ordinaire ou par combinaisons, mais arrangé en colonnes, comme on le voit dans les deux exemples précédens, nous verrons :

1°. *Que l'exposant de la plus haute puissance de x est égal à autant d'unités qu'il y a de facteurs binomes;*

2°. *Que les exposans de cette lettre x vont en diminuant d'une unité en allant de gauche à droite, jusqu'à ce que x disparaisse, ayant l'exposant 0.*

3°. *Que les coefficiens des diverses puissances de x sont tous différens les uns des autres,* et, en effet, la plus haute pnissance de x, n'a que l'unité pour coefficient; la puissance d'une unité moindre, la somme des seconds termes des binomes; celle de 2 unités moindre, la somme des produits 2 à 2 des mêmes seconds termes; la puissance de 3 unités moindre, la somme des produits 3 à 3; celle de 4 unités moindre, la somme des produits 4 à 4, et ainsi de suite; de sorte que si l'on a m facteurs binomes de la forme $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc., et que A représente la somme des seconds termes de ces binomes, B la somme de leurs produits 2 à 2, C celle de leurs produits 3 à 3, D celle de leurs produits 4 à 4....., K la somme des produits qui multiplient la première puissance de x, et L le produit dans lequel x a disparu, on aura :

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)(x+f).....$$
$$=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+Dx^{m-4}.....+Kx+L.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Je dis que cela est général, quel que soit le nombre des facteurs binomes qui ont un terme commun.

En effet, supposons que, par le fait de la multiplication, on ait prouvé que la proposition a lieu pour un nombre m de ces facteurs binomes, et faisons voir qu'elle doit avoir lieu lorsqu'on a un facteur de plus. Pour cela, supposons que $x+r$ soit le nouveau facteur : il faudra multiplier, par ce facteur, la quantité

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} \ldots\ldots + Kx + L,$$

en opérant comme à l'ordinaire, et on aura pour produit

$$\begin{aligned} &x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} \ldots\ldots + Kx^2 + Lx \\ &\quad + rx^m + rAx^{m-1} + rBx^{m-2} + rCx^{m-3} \ldots\ldots + rKx + rL, \end{aligned}$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$x^{m+1} + (A+r)\,x^m + (B+rA)\,x^{m-1} + (C+rB)\,x^{m-2} \ldots + (L+rK)\,x + rL.$$

Or, quant aux exposans de x, ils suivent évidemment la loi déjà observée dans les premiers produits; voyons si celle que nous avons observée sur les coefficiens subsiste de même. C'est, en effet, ce qui a lieu; car le coefficient de la plus haute puissance de x est encore l'unité; celui de la puissance de x d'une unité moindre est encore la somme des seconds termes des binomes, puisque A est la somme des seconds termes des premiers, et que r est le second terme du dernier. Le coefficient du troisième terme du résultat ci-dessus se compose de $B+rA$; mais B est la somme des produits 2 à 2 des seconds termes des premiers binomes, et A, étant la somme de ces seconds termes, multiplié par r, donnera la somme des produits de 2 lettres que peut donner, en sus de ce qu'on avait déjà, le second terme r du nouveau binome : le coefficient $B+rA$ sera donc la somme entière des produits 2 à 2 des seconds termes des binomes. Le coefficient $C+rB$ du 4^{me}. terme du produit ci-dessus se compose de C qui est la somme des produits 3 à 3 des seconds termes des premiers binomes, et de B qui, étant la somme des produits 2 à 2 des seconds termes des mêmes binomes, multiplié par r, donnera la somme des produits 3 à 3 que peut donner, en sus de ceux qu'on avait déjà, le second terme r du dernier binome : le coefficient $C+rB$ sera donc la somme entière des produits 3 à 3 des seconds termes de tous les binomes, et ainsi des autres. Ainsi, la proposition a lieu, quel que soit le nombre des facteurs binomes.

Formule du binome de Newton.

69. Supposons, maintenant, que dans le second exemple de multiplication par combinaisons donné ci-dessus, tous les seconds termes des binomes soient

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

égaux à a; on aura $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+e)\ (x+f)=(x+a)^6$; et par conséquent

$$(1)\ldots\ldots (x+a)^6 = x^6 + \begin{matrix} a \\ +a \\ +a \\ +a \\ +a \\ +a \end{matrix} \left| \begin{matrix} x^5 + a^2 \\ +a^2 \\ +a^2 \\ +a^2 \\ +a^2 \\ +a^2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} x^4 + a^3 \\ +a^3 \\ +a^3 \\ +a^3 \\ +a^3 \\ +a^3 \\ +a^3 \\ +a^3 \\ +a^3 \\ +a^3 \\ +a^3 \\ +a^3 \\ +a^3 \\ +a^3 \\ +a^3 \end{matrix} \left| \begin{matrix} x^3 + a^4 \\ +a^4 \\ +a^4 \\ +a^4 \\ +a^4 \\ +a^4 \\ +a^4 \\ +a^4 \\ +a^4 \\ +a^4 \\ +a^4 \\ +a^4 \\ +a^4 \\ +a^4 \\ +a^4 \end{matrix} \right| \begin{matrix} x^2 + a^5 \\ +a^5 \\ +a^5 \\ +a^5 \\ +a^5 \\ +a^5 \end{matrix} \left| \begin{matrix} x + a^6. \end{matrix} \right.$$

d'où l'on voit que le développement de

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.$$

Dans ce développement, la loi des exposans de x et de a est facile à saisir : on voit, en effet, que ceux de x vont en diminuant d'une unité, et, au contraire, ceux de a vont en augmentant d'une unité. Pour découvrir la loi des coefficiens, on remarquera qu'en vertu du développement (1) 1°. on doit prendre ax^5 autant de fois qu'il y avait de binomes dans le second exemple de multiplication par combinaisons; c'est-à-dire autant de fois qu'il y a d'unités dans l'exposant 6 du binome $(x+a)^6$; 2°. on doit prendre a^2x^4 autant de fois qu'il y avait de produits 2 à 2 des seconds termes des binomes, dans le même produit; 3°. on doit prendre a^3x^3 autant de fois qu'il y avait de produits 3 à 3 des seconds termes des binomes dans le même produit par combinaisons; 4°. on doit prendre autant de fois a^4x^2 qu'il y avait de produits 4 à 4 des seconds termes des binomes dans le même produit, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à un terme où a sera à la puissance à laquelle le binome doit être élevé, pour lequel le coefficient sera 1.

On conçoit que cette loi est générale, et que, par conséquent, si m est l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever le binome $x+a$, m étant un nombre entier positif quelconque, sachant que le nombre de pro-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

duits différens qu'on peut former avec m lettres, combinées 2 à 2 est $\frac{m(m-1)}{1.2}$, 3 à 3 est $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, 4 à 4 est $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$ etc. On en conclura que :

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^4x^{m-4} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}a^5x^{m-5} + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-(n-2))}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(n-1)}a^{n-1}x^{m-(n-1)}.$$

70. Si maintenant nous examinons cette formule terme à terme, nous verrons :

1°. Que le coefficient du premier terme x^m, est égal à 1.

2°. Que celui du second terme est $\frac{m}{1} = \frac{m}{1} \times 1$; c'est-à-dire ; que ce coefficient est égal à celui du premier terme multiplié par l'exposant de x de ce premier terme, et divisé par l'exposant de a du second terme.

3°. Que le coefficient du troisième terme qui est $\frac{m(m-1)}{1.2} = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}$; est égal à celui du second terme multiplié par l'exposant de x de ce second terme, et divisé par celui de a du même terme augmenté de 1 ;

4°. Que le coefficient du 4e. terme qui est $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = \frac{m(m-1)}{1.2} \times \frac{m-2}{3}$, est égal à celui du 3e. terme multiplié par l'exposant de x du même terme ; et divisé par l'exposant de a, de ce même 3e. terme, augmenté de l'unité, et ainsi des autres.

Si donc on nous propose de trouver le développement de $(x+a)^6$, d'après les remarques précédentes, on construira ce développement de la manière qui suit :

On aura d'abord pour premier terme x^6, et pour second $+6ax^5$; de sorte qu'on aura de suite $x^6 + 6ax^5$.

Pour former le 3e. terme, on multipliera le coefficient 6 par l'exposant 5 de x du second terme, ce qui donnera 30, qu'on divisera par l'exposant de a du 2e. terme, après l'avoir augmenté de 1, ce qui donnera 2 pour diviseur, et 15 au quotient : le 3e. terme sera en conséquence $+15a^2x^4$.

Pour avoir le 4e. terme, on multipliera le coefficient 15 par l'exposant 4 de x du 3e. terme, ce qui donnera 60, qu'on divisera par l'exposant 2 de a, du même 3e. terme, après l'avoir augmenté de 1, ce qui donnera le diviseur 3 et le quotient 20 : le 4e. terme sera donc $+20a^3x^3$.

Pour former le 5e. terme, on multipliera le coefficient 20 par l'exposant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3 de x du 4^e terme; ce qui donnera 60, qu'on divisera par l'exposant 3 de a du même 4^e. terme, après l'avoir augmenté de 1, ce qui donnera le diviseur 4 et le quotient 15 : le 5^e. terme sera donc $+15a^4x^2$.

Pour avoir le 6^e. terme, on multipliera le coefficient 15 par l'exposant 2 de x du 5^e. terme, ce qui donnera 30, qu'on divisera par l'exposant 4 de a, du même 5^e. terme, après l'avoir augmenté de 1, ce qui donnera le diviseur 5 et le quotient 6, et par conséquent le 6^e. terme sera $+6a^5x$.

Pour avoir le 7^e. et dernier terme, on multipliera le coefficient 6 par l'exposant 1 de x du terme qui précède, ce qui donnera 6, qu'on divisera par l'exposant 5 de a du même terme qui précède, après l'avoir augmenté de 1; ce qui donnera le diviseur 6 égal au dividende 6; d'où il s'ensuivra que le 7^e. et dernier terme sera $+a^6$: si donc nous réunissons tous les termes successifs que nous venons de trouver, nous aurons :

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.$$

En se conduisant de la même manière, on aura, avec une promptitude remarquable, le développement d'une puissance quelconque entière et positive du binome $x+a$.

Voici quelques-uns de ces développemens sur lesquels le lecteur pourra s'exercer.

1°. $(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$.
2°. $(x+a)^3 = x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$.
3°. $(x+a)^4 = x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$.
4°. $(x+a)^5 = x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$
5°. $(x+a)^6 = x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6$.
6°. $(x+a)^7 = x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7$.
7°. $(x+a)^8 = x^8+8ax^7+28a^2x^6+56a^3x^5+70a^4x^4+56a^5x^3+28a^6x^2+8a^7x+a^8$.
8°. $(x+a)^9 = x^9+9ax^8+36a^2x^7+84a^3x^6+126a^4x^5+126a^5x^4+84a^6x^3+36a^7x^2+9a^8x+a^9$.

Une remarque très-importante à faire sur ces développemens, est que, une fois qu'on a trouvé la première moitié des coefficiens, il suffit d'écrire ces mêmes coefficiens dans l'ordre inverse pour avoir les autres. Pour reconnaître qu'on est arrivé au dernier coefficient différent des autres, on n'a qu'à faire attention au moment où les exposans de a et de x sont égaux, ou ne diffèrent que de 1. Les exposans de a et de x deviennent égaux, quand celui du binome est un nombre pair, et ces exposans parviennent à ne différer que de 1, lorsque celui du binome est un nombre impair, ce qu'on peut voir dans les développemens ci-dessus.

On remarquera encore que le nombre des termes du développement d'une puissance quelconque entière et positive d'un binome, est toujours égal à l'exposant du binome augmenté de l'unité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

71. Si le second terme a du binome $x+a$ avait le signe $-$, pour passer au développement de $(x-a)^m$, on n'aurait, dans le développement de $(x+a)^m$, qu'à rendre négatifs les termes qui renferment les puissances de degrés impairs de a (n°. 59), car tous les termes qui renferment les puissances de degrés pairs doivent nécessairement conserver le signe $+$ quoique a ait le signe $-$ (n°. 59); de sorte qu'on aura :

$$(x-a)^m = x^m - \frac{m}{1}x^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{m-3} +, \text{ etc.}$$

72. Supposons, maintenant, qu'on nous demande le développement de $(y^m+c^n)^4$: au lieu de ce binome, on prendra celui-ci $(x+a)^4$, dans lequel $x=y^m$, et $a=c^n$, et on développera $(x+a)^4$, ce qui donnera $(x+a)^4 = x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$. Et ensuite, en se rappelant que $x=y^m$, et $a=c^n$, on verra que (n°. 58) $x^4=y^{4m}$, $x^3=y^{3m}$, $x^2=y^{2m}$, et $a^2=c^{2n}$, $a^3=c^{3n}$, $a^4=c^{4n}$. En conséquence, on mettra, dans le développement de $(x+a)^4$, y^{4m} à la place de x^4, y^{3m} à la place de x^3, y^{2m} à la place de x^2 et y^m à la place de x; de même, on mettra c^n à la place de a, c^{2n} à la place de a^2, c^{3n} à la place de a^3, et c^{4n} à la place de a^4, et on aura :

$$(y^m+c^n)^4 = y^{4m}+4c^ny^{3m}+6c^{2n}y^{2m}+4c^{3n}y^m+c^{4n}.$$

Si le second terme du binome avait le signe $-$, c'est-à-dire s'il s'agissait du développement de $(y^m-c^n)^4$, on se rappelerait la règle du numéro précédent, et on aurait : $(y^m-c^n)^4 = y^{4m}-4c^ny^{3m}+6c^{2n}y^{2m}-4c^{3n}y^m+c^{4n}$.

73. Si l'on demandait le développement de $(b^mz^n+c^pd^q)^4$, on supposerait que $b^mz^n=x$, et $c^pd^q=a$, ce qui donnerait $(b^mz^n+c^pd^q)^4=(x+a)^4$, et on chercherait d'abord le développement de $(x+a)^4$; qui est $(x+a)^4 = x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$; et ensuite, puisque $x=b^mz^n$, on aura (n°. 57) $x^4=b^{4m}z^{4n}$, $x^3=b^{3m}z^{3n}$, et $x^2=b^{2m}z^{2n}$; de même, puisque $a=c^pd^q$, on aura $a^2=c^{2p}d^{2q}$, $a^3=c^{3p}d^{3p}$, et $a^4=c^{4p}d^{4q}$; de sorte qu'en mettant, dans le développement de $(x+a)^4$, $b^{4m}z^{4n}$ à la place de x^4, $b^{3m}z^{3n}$ à la place de x^3, $b^{2m}z^{2n}$ à la place de x^2, b^mz^n à la place de x, et en mettant c^pd^q à la place de a, $c^{2p}d^{2q}$ à celle de a^2, $c^{3p}d^{3q}$ à celle de a^3, et $c^{4p}d^{4q}$ à la place de a^4, on aura :

$$(b^mz^n+c^pd^q)^4 = b^{4m}z^{4n}+4c^pd^qb^{3m}z^{3n}+6c^{2p}d^{2q}b^{2m}z^{2n}+4c^{3p}d^{3q}b^mz^n+c^{4p}d^{4q}.$$

74. La formule du binome de Newton ne se borne pas à donner les développemens des puissances entières et positives d'un binome : elle sert aussi à développer les puissances quelconques entières et positives des polynomes quelconques.

Supposons, par exemple, qu'on nous demande le développement de $(x+a+b)^4$; on fera $a+b=c$; ce qui donnera $(x+a+b)^4=(x+c)^4$, et ensuite on développera $(x+c)^4$, comme ci-dessus, et on aura

$$(x+c)^4 = x^4+4cx^3+6c^2x^2+4c^3x+c^4.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Puis, comme $c=a+b$, on aura :

1°. $c^2=a^2+2ab+b^2$;

2°. $c^3=a^3+3ba^2+3b^2a+b^3$;

3°. $c^4=a^4+4ba^3+6b^2a^2+4b^3a+b^4$,

et dans le développement de $(x+c)^4$, au lieu de c, de c^2, de c^3 et de c^4, on substituera $a+b$, $a^2+2ab+b^2$, $a^3+3ba^2+3b^2a+b^3$, et

$a^4+4ba^3+6b^2a^2+4b^3a+b^4$, ce qui donnera

$$(x+a+b)^4=x^4+4(a+b)x^3+6(a^2+2ab+b^2)x^2+$$
$$4(a^3+3ba^2+3b^2a+b^3)x+a^4+4ba^3+6b^2a^2+4b^3a+b^4,$$

pour le développement demandé.

Si l'on avait $(x+a+b+c)^m$, on ferait $a+b+c=d$, ce qui donnerait $(x+a+b+c)^m=(x+d)^m$. Ensuite, on développerait $(x+d)^m$, ce qui donnerait :

$$(x+d)^m=x^m+mdx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}d^2x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}d^3x^{m-3}+, \text{ etc.}$$

Dans ce développement, on substituerait $a+b+c$ à la place de d, et on aurait :

$$(x+a+b+c)^m=x^m+m(a+b+c)x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(a+b+c)^2x^{m-2}+$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a+b+c)^3x^{m-3}+, \text{ etc.}$$

Puis, on développerait les diverses puissances de $(a+b+c)$, en s'y prenant comme nous l'avons expliqué ci-dessus pour les trinomes.

En suivant cette marche, on aura, de proche en proche, le développement d'un polynome quelconque, pourvu que l'exposant de la puissance de ce polynome soit un nombre entier positif.

Nous avons insisté en disant que l'exposant du polynome à développer devait être *entier et positif*, parce que la démonstration que nous avons donnée de cette importante formule, n'est vraie que dans cette hypothèse; mais on démontre d'une autre manière (qu'il ne convient pas de donner ici) que cette formule a lieu *quelque soit l'exposant, entier ou fractionnaire, positif ou négatif.*

7^me. LEÇON.

De l'extraction des Racines.

75. Après avoir donné les moyens d'élever une quantité quelconque à une puissance entière et positive quelconque, il est naturel de faire voir comment on peut revenir de la puissance à la quantité qui l'a produite : c'est ce retour qu'on appelle *extraction des racines.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous avons vu (n°. 7), en effet, qu'on appelait *racine* la quantité qui entre, dans la puissance, autant de fois facteurs qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance.

On distingue les racines par leur degré, de même que les puissances. Ainsi, par exemple, a est la racine carrée ou 2e. de a^2, la racine cubique ou 3e. de a^3, la racine 4e. de a^4, etc.; enfin, a est la racine n^{me} de a^n.

76. Pour indiquer les racines, on se sert du signe $\sqrt{\ }$, qu'on appelle *radical*, dans l'ouverture duquel on met un nombre qui indique le degré de la racine à extraire, et qui se nomme *indice*. Ainsi, par exemple, s'il s'agissait d'extraire la racine n^{me} de a, on l'indiquerait de cette manière : $\sqrt[n]{a}$. Quand l'indice est 2, il s'agit de la racine carrée, et on n'écrit pas cet indice, parce qu'il n'y a pas de racine de degré inférieur. Ainsi, s'il s'agissait de la racine carrée de a, on l'indiquerait de cette manière : $\sqrt{a}$; mais pour la racine cubique et les supérieures, on met toujours l'indice.

77. Supposons qu'il s'agisse d'extraire la racine n^{me} de a^m : je dis que la racine demandée sera $a^{\frac{m}{n}}$; car si l'on élève cette quantité $a^{\frac{m}{n}}$ à la puissance n^{me}, d'après la règle du n°. 58, on aura $a^{\frac{mn}{n}} = a^m$. Ainsi donc $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$: c'est-à-dire que, *pour extraire la racine d'un degré donné, d'une quantité exponentielle quelconque, il faut diviser l'exposant de l'exponentielle par l'indice du radical.*

78. Supposons qu'on nous demande la racine n^{me} de $a^n b^n c^n$.....; je dis que cette racine sera abc.....; car si l'on élève abc..... à la n^{me} puissance, on aura $a^n b^n c^n$..... (n°. 56).

Il suit de là que *la racine n^{me} d'un produit de tant de facteurs qu'on voudra est égale au produit des racines* (de même indice) *de tous les facteurs du produit donné.*

Les coefficiens numériques n'étant, au fond, que des facteurs comme les autres, il est évident que leur extraction de racine entre dans la règle que nous venons de démontrer.

79. Supposons qu'on nous demande la racine n^{me} du produit $a^{m+n} b^{p+n} c^{q+n}$; comme ce produit peut se mettre sous cette forme $a^m a^n b^p b^n c^q c^n$, on aura $\sqrt[n]{a^{m+n} b^{p+n} c^{q+n}} = \sqrt[n]{a^m a^n b^p b^n c^q c^n} = \sqrt[n]{a^n b^n c^n . a^m b^p c^q}$. Mais la racine d'un produit est égale au produit des racines de tous les facteurs ; or, le produit $a^n b^n c^n . a^m b^p c^q$ peut être regardé comme étant composé des deux facteurs $a^n b^n c^n$, $a^m b^p c^q$; la racine de ce produit sera donc égale au produit des racines de ces deux facteurs; mais la racine n^{me} de $a^n b^n c^n$ est abc, et celle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de même indice de $a^m b^p c^q$ est $\sqrt[n]{a^m b^p c^q}$, on aura donc $abc\sqrt[n]{a^m b^p c^q}$ pour la racine demandée; de sorte que $\sqrt[n]{a^{m+n} b^{p+n} c^{q+n}} = abc\sqrt[n]{a^m b^p c^q}$. Il suit de là que pour extraire la racine d'une quantité composée de plusieurs facteurs exponentiels, *si les exposans de ces facteurs peuvent se décomposer en deux parties dont l'une soit égale à l'indice du radical, ou qu'elle soit divisible par cet indice*, on pourra décomposer la quantité donnée en deux groupes de facteurs, l'un de ces groupes ne se composant que de facteurs de puissances complètes marquées par l'indice du radical, et l'autre groupe ne se composant que de facteurs dont les exposans seront plus petits que ce même indice; ensuite on pourra extraire la racine en question du premier groupe, mettre l'autre groupe sous le radical, jusqu'à ce qu'on puisse en extraire la racine, et multiplier les racines des deux groupes l'une par l'autre.

80. Supposons qu'il s'agisse de la quantité $\sqrt[mn]{a^{np}}$; comme on peut mettre cette expression sous la forme $a^{\frac{np}{mn}}$, qui se réduit à $a^{\frac{p}{m}}$, à cause du facteur commun n aux deux termes de la fraction $\frac{np}{mn}$, on aura $\sqrt[mn]{a^{np}} = a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p}$.

Il suit de là que, *l'on peut diviser l'indice d'un radical et l'exposant de la quantité affectée de ce radical par le même nombre, sans changer la valeur de la racine demandée;* ce qui, dans beaucoup de circonstances, simplifie l'extraction des racines.

81. La réciproque de cette proposition a évidemment lieu, *c'est-à-dire, que l'on peut multiplier l'indice d'un radical et l'exposant de la quantité affectée de ce radical, par le même nombre, sans changer la valeur de la racine demandée;* car, après avoir fait cette multiplication, on pourrait diviser l'indice du radical et l'exposant de la quantité par le même nombre qui avait servi de multiplicateur, ce qui ramenerait à la première expression.

82. Puisque, si l'on avait $\sqrt[mnpq]{a^r}$, on pourrait prendre $\sqrt[q]{a^{\frac{r}{mnp}}}$; que $a^{\frac{r}{mnp}} = \sqrt[mnp]{a^r} = \sqrt[p]{a^{\frac{r}{mn}}}$; que $a^{\frac{r}{mn}} = \sqrt[mn]{a^r} = \sqrt[n]{a^{\frac{r}{m}}}$, et que $a^{\frac{r}{m}} = \sqrt[m]{a^r}$; en remontant par degré à la première expression, on aura 1°. $a^{\frac{r}{mn}} = \sqrt[n]{a^{\frac{r}{m}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^r}}$; 2°. $a^{\frac{r}{mnp}} = \sqrt[p]{a^{\frac{r}{mn}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^r}}}$, et 3°. $\sqrt[q]{a^{\frac{r}{mnp}}} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^r}}}}$, et par conséquent $\sqrt[mnpq]{a^r} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^r}}}}$: c'est-à-dire que, s'il s'agit d'extraire une racine dont l'indice puisse se décomposer en plusieurs facteurs, on pourra avoir la racine demandée, *en extrayant* 1°. *de la quantité donnée, la racine mar-*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

quée par le premier facteur ; 2°. de cette première racine, la racine marquée par le second facteur ; 3°. de cette seconde racine, la racine marquée par le troisième facteur, et ainsi de suite, jusqu'à la racine marquée par le dernier facteur de l'indice donné.

Ce principe sert, comme on voit, à changer l'extraction des racines d'un haut indice à des extractions successives de racines d'indices moindres; ce qui réduit la question de l'extraction des racines en général à savoir extraire les racines dont les indices sont des nombres premiers.

83. Voyons maintenant quel doit être le signe de la racine, eu égard à celui de la quantité dont on demande la racine, et eu égard à l'indice du radical.

1°. Supposons que la quantité donnée soit positive, et que l'indice soit pair, ce qu'on peut indiquer en faisant généralement cet indice égal à $2n$, n étant un nombre entier quelconque. Si l'on demande le signe de $\sqrt[2n]{+a}$, comme le signe de toutes les puissances de degré pair est toujours le signe $+$, dans le cas même où la racine a le signe $-$, il s'ensuit que si rien ne détermine d'ailleurs le signe d'une racine d'un degré pair, cette racine pourra avoir indifféremment le signe $+$ ou le signe $-$, ce qu'on indique de cette manière $\pm\sqrt[2n]{a}$.

2°. Si la quantité dont il s'agirait d'extraire la racine avait le signe $-$, l'indice étant toujours pair, cette racine serait impossible; car il n'y a aucune quantité, soit positive, soit négative, soit zéro, qui, élevée à une puissance d'un degré pair, puisse donner un résultat négatif (n°. 59). Ainsi $\sqrt{-a}$, $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-a}$, etc., sont autant de quantités impossibles. On leur donne le nom de *quantités imaginaires*. Quoiqu'on ne puisse assigner aucune valeur réelle aux quantités imaginaires, elles jouent un rôle important dans les calculs analytiques, ainsi que nous ne tarderons pas de nous en convaincre.

3°. Si l'indice est impair, la racine est toujours réelle, et a toujours le même signe que la quantité dont on demande la racine. Cette proposition est une suite immédiate du n°. 59 : ainsi, $\sqrt[3]{+a^3}=+a$, $\sqrt[3]{-a^3}=-a$, etc. L'expression de tous les nombres impairs étant $2n+1$, puisque $2n$ est un nombre pair, et que tout nombre pair augmenté de l'unité (n°. 70, arith.) est un nombre impair, l'expression générale des racines des degrés impairs sera $\sqrt[2n+1]{\pm a}$, en donnant le signe $+$ à la racine quand la quantité dont on demande la racine a le signe $+$, *et vice versa*. Tels sont les principes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

généraux de l'extraction des racines. Passons maintenant aux procédés qu'on doit suivre pour extraire les racines de tous les degrés des quantités numériques, en ne nous occupant, d'une manière particulière, que des racines carrées et cubiques.

De l'extraction de la Racine carrée des nombres.

84. Pour pouvoir extraire la racine carrée d'un nombre, il faut savoir, de mémoire, quels sont les carrés des nombres composés d'un seul chiffre, parce qu'il n'y a pas de méthode pour extraire les racines de ces carrés, et que le procédé de l'extraction des racines carrées, des nombres composés de plusieurs chiffres, exige qu'on sache extraire, de mémoire, ces premières racines, qu'on pourrait appeler *racines élémentaires :* il faut donc savoir que les carrés des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
sont respectivement 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Avant d'aller plus loin, il faut faire quelques observations importantes sur cette suite de carrés et sur leurs racines.

85. On observera d'abord que les nombres compris entre 1 et 4, entre 4 et 9, entre 9 et 16, entre 16 et 25, entre 25 et 36, entre 36 et 49, entre 49 et 64, entre 64 et 81, et entre 81 et 100 ne sont pas des carrés, car les nombres compris entre 1 et 4 auront des racines plus grandes que 1 et plus petites que 2, ceux compris entre 4 et 9 auront des racines plus grandes que 2 et plus petites que 3, ceux compris entre 9 et 16 auront des racines plus grandes que 3 et plus petites que 4, et ainsi de suite; or, entre les racines 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, etc., il n'y en a pas d'entières; je dis maintenant que ces racines ne sont pas non plus fractionnaires.

Pour démontrer cette proposition, il faut faire voir d'abord que le carré d'un nombre fractionnaire est toujours un nombre fractionnaire.

En effet, soit a la partie entière de ce nombre, et $\frac{b}{c}$ la partie fractionnaire : on aura $a+\frac{b}{c}$ pour le nombre fractionnaire donné, en observant que $\frac{b}{c}$ est plus petit que l'unité et est à sa plus simple expression. Le carré de $a+\frac{b}{c}$ sera $a^2+\frac{2ab}{c}+\frac{b^2}{c^2}$. Je dis maintenant que ce carré est nécessairement un nombre fractionnaire. D'abord on voit que le premier terme a^2 est un nombre entier. Le terme $\frac{2ab}{c}$ sera un nombre entier ou une fraction renfermant ou ne renfermant pas d'entiers.

1°. Si $\frac{2ab}{c}$ renferme exactement un nombre d'entiers, c'est que a est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

divisible par c, car le diviseur c n'a point de facteur commun avec b. Mais si le terme $\frac{2ab}{c}$ est un nombre entier, comme le terme a^2 est nécessairement un nombre entier, il est clair qu'en ajoutant la somme de ces deux nombres entiers au terme $\frac{b^2}{c^2}$ (qui est nécessairement une fraction plus petite que l'unité, puisque $\frac{b}{c}$ est plus petite que l'unité) le nombre $a^2 + \frac{2ab}{c} + \frac{b^2}{c^2}$ sera nécessairement un nombre fractionnaire.

2°. Si la fraction $\frac{2ab}{c}$ renferme des entiers plus une fraction, le numérateur de cette fraction sera plus petit que le dénominateur au moins d'une unité : cette fraction sera au plus égale à $\frac{c-1}{c}$, et le carré $a^2 + \frac{2ab}{c} + \frac{b^2}{c^2}$ se composera de deux parties entières, dont la somme sera nécessairement un nombre entier, plus de la somme des deux fractions $\frac{c-1}{c} + \frac{b^2}{c^2}$. Je dis maintenant que la somme de ces deux fractions est un nombre fractionnaire; car, supposons le cas le plus défavorable, le cas où $b = c - 1$; nous aurons $\frac{b^2}{c^2} = \frac{(c-1)^2}{c^2} = \frac{c^2 - 2c + 1}{c^2}$, et par conséquent

$\frac{c-1}{c} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c-1}{c} + \frac{c^2-2c+1}{c^2}$. Mettons ces deux fractions $\frac{c-1}{c}, \frac{c^2-2c+1}{c^2}$ au même dénominateur, et faisons la somme des numérateurs, nous aurons $\frac{c^2-c+c^2-2c+1}{c^2} = \frac{2c^2-3c+1}{c^2}$. Si actuellement nous cherchons les entiers contenus dans la fraction $\frac{2c^2-3c+1}{c^2}$ (n°. 44), nous aurons $\frac{2c^2-3c+1}{c^2} = 2 - \frac{3}{c} + \frac{1}{c^2}$

La fraction $\frac{2c^2-3c+1}{c^2}$ contient donc 2 entiers et $-\frac{3}{c} + \frac{1}{c^2}$ ou $\frac{1}{c^2} - \frac{3}{c}$. Or, $\frac{1}{c^2}$ est nécessairement une fraction, puisque c est plus grand que l'unité; il ne s'agit plus que de savoir si $\frac{3}{c}$ est une fraction. Or, il n'y a qu'un cas où $\frac{3}{c}$ peut être un nombre entier, c'est celui où $c=3$, ce qui donne $\frac{3}{c} = 1$, mais dans tout autre cas cette fraction sera plus petite que l'unité, ou elle renfermera un entier et une partie plus petite que l'unité. Si la fraction $\frac{3}{c} = 1$, on ajoutera cette unité aux parties entières du carré $a^2 + \frac{2ab}{c} + \frac{b^2}{c^2}$, en ayant égard aux signes; mais il restera encore $\frac{1}{c^2}$ qui est une fraction plus petite que l'unité; donc, dans ce cas, le carré $a^2 + \frac{2ab}{c} + \frac{b^2}{c^2}$ est un nombre fractionnaire, et dans les cas où la fraction $\frac{3}{c}$ est plus petite que l'unité, ou qu'elle renferme un entier et une partie plus petite que l'unité,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

comme il faut retrancher la partie plus petite que l'unité de $\frac{1}{c^2}$, il est clair que le reste sera plus petit que l'unité, et par conséquent le carré $a^2+\frac{2ab}{c}+\frac{b^2}{c^2}$ est nécessairement un nombre fractionnaire, c'est-à-dire que *toutes les fois qu'une racine sera fractionnaire, son carré sera fractionnaire.*

Or, si, par exemple, on nous demandait la racine carrée de 3; comme 3 est un nombre entier, sa racine carrée ne peut être un nombre fractionnaire puis qu'une racine fractionnaire donne toujours un carré fractionnaire : la racine carrée de 3 ne sera donc ni un nombre entier (puisqu'elle est comprise entre 1 et 2), ni un nombre fractionnaire, ni zéro. Cependant l'existence de cette racine n'est point douteuse, car elle est comprise entre 1 et 2, et elle est plus grande que 1 et plus petite que 2 : cette racine est donc un nombre dont l'espèce ne s'est point encore présentée. Ces nombres s'appellent nombres *irrationnels* ou *incommensurables*. On ne peut jamais les obtenir exactement, mais on peut en approcher d'aussi près qu'on peut le désirer, ainsi que nous le verrons bientôt.

86. En examinant de nouveau la suite des carrés des nombres naturels depuis 1 jusqu'à 10 (n°. 84), on verra que tant que la racine n'a qu'un seul chiffre, le carré en a au plus 2, et que la plus petite racine, composée de deux chiffres, qui est 10, en donne 3 au carré.

Ainsi, toutes les fois qu'il s'agira d'extraire la racine carrée d'un nombre qui ne se composera que de 2 chiffres, nous pourrons affirmer que la racine n'en aura qu'un seul, et il faudra extraire cette racine de mémoire. Mais si le nombre proposé renferme plus de deux chiffres, sa racine en aura au moins 2, et renfermera, par conséquent, au moins des dixaines et des unités. Dans ce dernier cas, il n'est pas aisé, et même il est presque impossible d'extraire la racine de mémoire, mais alors on peut établir une méthode d'extraction.

87. Cette méthode est fondée sur la manière que se combinent ensemble les divers ordres d'unités de la racine pour former le carré. Ainsi, la première chose que nous ayons à faire, c'est de découvrir quelles sont ces combinaisons.

Pour cela, supposons qu'il s'agisse du carré de 57; en multipliant ce nombre par lui-même on aura 3249 pour le carré demandé. Mais $57=50+7$, c'est-à-dire que 57 égale 5 dixaines plus 7 unités : représentons les dixaines par a et les unités par b, nous aurons $50+7=a+b$; si maintenant nous élevons $a+b$ au carré (n°. 60), nous aurons $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, c'est-à-dire que, *le carré d'un nombre composé de dixaines et d'unités renferme le carré des dixaines, plus 2 fois les dixaines multipliées par les unités, et plus le carré des unités.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

88. Cela posé, supposons qu'on nous demande la racine carrée de 3249, que, d'avance, nous savons être 57. On disposera le calcul comme il suit :

Carré.	Racine.
32,49	57
74,9	107
000	7

et ensuite on observera que le carré donné, se composant de plus de 2 chiffres, la racine doit en avoir au moins 2 ; ce carré donné contiendra donc le carré des dixaines plus 2 fois le produit des dixaines par les unités et plus le carré des unités de la racine : cherchons donc où, dans le carré donné, le carré des dixaines de la racine se trouve. Si l'on considère que le carré d'un nombre quelconque de dixaines, est nécessairement de centaines, on verra que le carré des dixaines de la racine demandée ne peut se trouver ni dans les unités simples, ni dans les dixaines du carré donné ; de sorte qu'il faudra mettre de côté, au moyen d'une virgule, les deux derniers chiffres du carré donné, pour ne considérer que les deux qui sont vers la gauche, et qui forment le nombre 32. On cherchera (n°. 84) le plus grand carré contenu dans 32, qui est 25 et dont la racine est 5, et on écrira 5 à la place destinée pour la racine. On retranchera ensuite le carré 25 de 32, et il restera 7, qu'on écrira sous 32 du carré donné, et on abaissera les deux chiffres suivant 49 à côté du reste 7, ce qui donnera le nombre 749 pour le reste qu'on aura, après avoir retranché, du carré donné, le carré des dixaines de la racine. Ce nombre 749 renfermera encore 2 fois les dixaines multipliées par les unités de la racine, et plus le carré des unités. Comme on connaît les dixaines, on les doublera et on aura 10 qu'on écrira sous la racine, comme on le voit ci-dessus. Ce double 10 des dixaines, multiplié par les unités qu'on ne connaît pas, doit égaler un certain produit qui ne peut être que de dixaines, et ce produit se trouve dans le reste 749 : le produit dont il s'agit sera donc dans les 74 dixaines du nombre 749 ; on mettra donc de côté, au moyen d'une virgule, le chiffre 9 des unités, et on divisera 74 par le double 10 des dixaines de la racine, et on aura 7 au quotient, qu'on écrira à côté de 10 et au-dessous de lui-même, comme on le voit ci-dessus. Ensuite, on prendra le reste 749 tout entier ; on multipliera par 7 le nombre 107, et on retranchera le produit du nombre 749 ; comme la soustraction aura lieu sans reste, on en concluera que le chiffre 7 exprime les unités de la racine ; on écrira ce chiffre à la suite du chiffre 5 déjà écrit à la place de la racine demandée, qui sera par conséquent 57, ce que nous savions d'avance.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En multipliant le nombre 107 par 7, il est évident qu'on a fait d'abord le carré des unités de la racine, et ensuite le double produit des dixaines par les unités, ce que renfermait en effet le reste 749.

Je laisse au lecteur le soin de découvrir pourquoi on ne peut pas commencer par les unités simples, l'extraction de la racine carrée d'un nombre.

89. Supposons maintenant qu'on nous demande la racine carrée du nombre 219024 : on disposera le calcul comme ci-dessous.

Carré.	Racine.
21,90,24	468
(1) 59,0	1er. détail.
(2) 742,4	86
00	6
	2e. détail.
	928
	8

et ensuite, comme le carré donné renferme plus de 2 chiffres, la racine en aura au moins 2; c'est-à-dire que la racine aura des dixaines et des unités : le carré donné se composera donc du carré des dixaines, plus 2 fois les dixaines multipliées par les unités, et plus le carré des unités. On commencera donc par extraire la racine carrée des dixaines; et comme le carré des dixaines donne des centaines, on retranchera les deux derniers chiffres du carré donné pour n'avoir que la partie 2190 de ce carré qui contient le carré des dixaines. Mais ce nombre 2190, renfermant plus de 2 chiffres, sa racine en aura au moins 2, c'est-à-dire que les dixaines de la racine demandée sont en assez grand nombre pour former des centaines. Supposons, pour un moment, que les dixaines ne soient que de simples unités, les centaines que de dixaines, et que le carré donné ne se compose que du nombre 2190. Ensuite, en raisonnant sur ce nombre 2190, comme nous l'avons expliqué dans l'exemple précédent, nous verrons qu'il faudrait d'abord séparer, par une virgule, les deux chiffres qui sont à la droite de ce nombre; chercher le plus grand carré contenu dans le nombre 21, qui reste vers la gauche, lequel carré est 16; écrire la racine carrée de 16 à la place de la racine demandée; retrancher le carré 16 de 21, et écrire le reste 5 au-dessous du carré donné, comme on le voit ci-dessus. Puis, à côté du reste 5, il faudrait abaisser les autres chiffres du nombre 2190 et en séparer le dernier, ainsi qu'on le voit ci-dessus; doubler la racine 4 déjà trouvée, ce qui donnerait 8, qu'on écrirait comme on le voit dans le premier détail ci-dessus; diviser le nombre 59 qui reste vers la gauche de la virgule dans le nombre (1) par le double 8 de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

racine déjà trouvée, ce qui donnerait 6 au quotient, et écrire ce quotient 6 à côté de 8 et au-dessous de lui-même, dans le premier détail. Puis, multiplier le nombre 86 par 6; retrancher le produit du nombre (1), écrire le reste 74 au-dessous du nombre (1), et enfin écrire 6 à la racine à côté de 4; de sorte qu'on aurait 46 pour le nombre des dixaines de la racine demandée. Ayant trouvé les dixaines de la racine, on aura égard aux deux derniers chiffres du carré donné, qu'on abaissera à côté du reste 74, et on aura le nombre 7424; qui contiendra 2 fois les dixaines multipliées par les unités, et plus le carré des unités. En conséquence, on doublera les dixaines 46 de la racine, et on aura 92 qu'on écrira au second détail ci-dessus; on séparera le dernier chiffre 4 du nombre (2) par une virgule; on divisera le nombre 742 qui reste vers la gauche de cette virgule par le double 92 des dixaines de la racine, et on écrira le quotient 8 à la droite de 92, et au-dessous de lui-même dans le 2e. détail ci-dessus. On multipliera le nombre 928 par 8; on retranchera le produit du nombre (2) tout entier, et il ne restera rien; ce qui annoncera que le chiffre 8 représente les unités qu'il faut écrire à la racine, et on aura 468 pour la racine demandée.

90. D'après ce qui précède, on peut établir la règle générale suivante pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre composé de tant de chiffres qu'on voudra.

On commencera par partager le carré donné en tranches de 2 en 2 chiffres, en allant de droite à gauche; on cherchera le plus grand carré contenu dans la première tranche à gauche, qui peut n'avoir qu'un seul chiffre; on en extraira la racine carrée; on mettra cette racine à la place de la racine demandée, et on retranchera le carré de la racine trouvée de la première tranche à gauche. A côté du reste, on abaissera la tranche suivante; on séparera, par une virgule, le dernier chiffre à droite de cette tranche suivante, après l'avoir abaissée; on doublera la racine trouvée; on divisera le nombre à gauche de la virgule dont il vient d'être question, par le double de la racine trouvée; on écrira le quotient à côté du double de cette racine trouvée et au-dessous de lui-même; on multipliera, par ce quotient, ce quotient lui-même et le double de la racine trouvée, et on retranchera le produit du nombre dont la seconde tranche du carré donné fait partie. Puis, on abaissera la troisième tranche à côté du reste, on doublera la racine trouvée après y avoir écrit le dernier chiffre obtenu, et on continuera d'opérer comme il est dit ci-dessus, en écrivant un chiffre à la racine à chaque fois qu'on abaissera une nouvelle tranche du carré donné, etc.

91. Il nous reste à faire observer qu'à la vérité le premier chiffre de la racine

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

s'obtient toujours sans tâtonnement, mais qu'il n'en est pas de même pour les autres : quelquefois on prend un chiffre qu'on avait cru bon et qui se trouve trop grand ou trop petit. Quand il est trop grand, on s'en aperçoit sans peine; mais on pourrait ne pas s'apercevoir de suite lorsqu'il est trop petit. On reconnaît qu'il est trop petit, quand le reste qu'il donne (en y comprenant ce chiffre lui-même augmenté de l'unité) est plus grand que le double de la racine trouvée.

En effet, supposons que la racine trouvée soit a (en y comprenant le chiffre qu'il s'agit de vérifier); si le chiffre à vérifier est trop petit, il le sera au moins d'une unité, et rendra la racine trouvée trop petite de cette unité : il faudra donc l'augmenter de cette unité; elle sera donc $a+1$; mais si l'on élève cette racine au carré, elle donnera a^2+2a+1, or le carré de a est a^2; donc, quand la racine augmente d'une unité, le carré augmente de $2a+1$; c'est-à-dire de 2 fois cette racine plus 1. Il faut donc que le reste qu'a donné le chiffre à vérifier contienne cette augmentation; il faut donc qu'il soit au moins égal au double de la racine trouvée plus l'unité.

Comme pour trouver un chiffre il faut doubler la racine trouvée, et que l'on écrit ensuite ce chiffre à côté de cette double racine trouvée, il s'ensuit qu'un coup-d'œil suffit pour s'assurer si le chiffre trouvé est trop petit ou non.

92. Dans le cas où la racine demandée serait irrationnelle, après avoir obtenu la plus grande racine entière, on mettrait 2 zéros à la droite du dernier reste, et ces deux zéros tiendraient lieu d'une nouvelle tranche abaissée du nombre donné à côté du dernier reste. On opérerait ensuite comme il a été dit ci-dessus, pour avoir un nouveau chiffre à la racine. A côté du nouveau reste, on mettrait encore une tranche de 2 zéros, et en opérant toujours comme ci-dessus, on aurait un nouveau chiffre à la racine. En continuant de mettre une tranche de 2 zéros à côté des restes successifs, et en opérant toujours de la même manière, on obtiendrait une suite indéfinie de chiffres à la racine qu'on pourrait pousser aussi loin qu'on le voudrait. S'étant arrêté au chiffre qu'on jugera convenable, on comptera le nombre de tranches de 2 zéros, qu'on aura mis à la suite des restes successifs, et on mettra, dans la racine, autant de chiffres au rang des décimales qu'on aura de ces tranches de 2 zéros. De cette manière on trouvera que la racine carrée du nombre 3401 approchée jusqu'à la 3e. décimale, c'est-à-dire, approchée à moins d'un millième près, est 58,318.

Ce procédé d'approximation est fondé sur ce qui suit :

La racine carrée de a^2 est a; mais celle de $100a^2$ est $10a$; de sorte que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

quand le carré est 100 fois plus grand la racine est 10 fois plus grande. Il est évident que si le carré était 10000 fois plus grand, la racine serait 100 fois plus grande, car le carré de 100 est 10000. Enfin, on voit qu'à mesure que le carré devient 100 fois plus grand, la racine devient 10 fois plus grande. Or, ayant successivement mis 2 zéros à la suite de chaque reste, c'est évidemment comme si l'on avait successivement rendu le carré de 100 en 100 fois plus grand; la racine devenait donc successivement de 10 en 10 fois plus grande; il est donc évident qu'il fallait rendre ensuite cette racine le même nombre de fois plus petite qu'elle avait été rendue de fois plus grande : c'est-à-dire, qu'il fallait mettre, dans cette racine, autant de chiffres au rang des décimales, qu'on avait mis de tranches de 2 zéros à la suite du carré donné.

93. Dans ce qui précède, nous avons supposé que le nombre dont on demandait la racine, était entier. Supposons maintenant que ce nombre soit décimal. Dans ce cas, on observera qu'il faut nécessairement qu'il y ait un nombre complet de tranches de 2 chiffres dans la partie décimale du nombre donné, et que, par conséquent, si le nombre des décimales est impair, il faudra mettre un zéro à la suite des décimales, ce qui ne changera pas la grandeur du nombre donné. La racine aura autant de décimales qu'il y aura de tranches de 2 chiffres dans la partie décimale du nombre dont on demandera la racine carrée.

Quant à la racine carrée des fractions, le plus simple, c'est d'abord de développer la fraction donnée en décimales (n°. 75, arith.), et d'extraire ensuite la racine carrée du développement décimal, en ayant soin de pousser ce développement jusqu'à un nombre pair de décimales, pour se conformer à l'observation ci-dessus.

8me. LEÇON.

De l'Extraction de la Racine cubique des Nombres.

94. A proprement parler, il n'y a pas de règle pour extraire les racines cubiques des nombres dont les racines n'ont qu'un seul chiffre : il faut savoir extraire toutes ces racines de mémoire; et par conséquent savoir d'avance que les cubes respectifs de la suite des nombres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

sont 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

95. En examinant cette suite de cubes et celle de leurs racines, on verra que les nombres compris entre 1 et 8, entre 8 et 27, entre 27 et 64, etc. auront des racines cubiques respectivement comprises entre 1 et 2, entre 2 et 3, entre

*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

3 et 4, etc. Mais entre 1 et 2, entre 2 et 3, entre 3 et 4, etc., il n'existe point de nombre entier; d'où il suit que les racines cubiques des nombres compris entre 1 et 8, entre 8 et 27, entre 27 et 64, etc. ne sont pas des nombres entiers. Je dis que ces racines ne sont pas non plus des nombres fractionnaires.

Pour démontrer cette proposition, il faut faire voir que le cube d'un nombre fractionnaire est nécessairement un nombre fractionnaire.

En effet, supposons que a soit la partie entière, et $\frac{b}{c}$ la partie fractionnaire du nombre donné, $\frac{b}{c}$ étant une fraction plus petite que l'unité, et réduite à sa plus simple expression. Ce nombre donné sera $a+\frac{b}{c}$, et son cube $a^3+\frac{3a^2b}{c}+\frac{3ab^2}{c^2}+\frac{b^3}{c^3}$; faisons voir, maintenant, que ce cube est un nombre fractionnaire.

D'abord le terme a^3 est nécessairement un nombre entier : il reste donc à faire voir que $\frac{3a^2b}{c}+\frac{3ab^2}{c^2}+\frac{b^3}{c^3}$ est un nombre fractionnaire. Pour cela, supposons le cas le plus défavorable; supposons que le numérateur b de la fraction $\frac{b}{c}$ ne soit plus petit que le dénominateur c que d'une unité, c'est-à-dire que $b=c-1$; ce qui donnera $\frac{b}{c}=\frac{c-1}{c}$, et par conséquent $\frac{3a^2b}{c}+\frac{3ab^2}{c^2}+\frac{b^3}{c^3}=\frac{3a^2(c-1)}{c}+\frac{3a(c-1)^2}{c^2}+\frac{(c-1)^3}{c^3}$; en développant les puissances de $c-1$ on aura $\frac{3a^2(c-1)}{c}+\frac{3a(c^2-2c+1)}{c^2}+\frac{c^3-3c^2+3c-1}{c^3}$; en faisant les multiplications indiquées, $\frac{3a^2c-3a^2}{c}+\frac{3ac^2-6ac+3a}{c^2}+\frac{c^3-3c^2+3c-1}{c^3}$; en mettant au même dénominateur, $\frac{3a^2c^3-3a^2c^2+3ac^3-6ac^2+3ac+c^3-3c^2+3c-1}{c^3}$, et enfin en ordonnant par rapport aux puissances de c,

$$\frac{(3a^2+3a+1)c^3-(3a^2+6a+3)c^2+(3a+3)c-1}{c^3}\ldots\ldots(a).$$

Si maintenant on tire les entiers contenus dans cette fraction, on aura :

$$\frac{(3a^2+3a+1)c^3-(3a^2+6a+3)c^2+(3a+3)c-1}{c^3}=3a^2+3a+1+\frac{-(3a^2+6a+3)c^2+(3a+3)c-1}{c^3};$$

ainsi la fraction (a) se compose de la partie entière $3a^2+3a+1$, et de la fraction $\frac{-(3a^2+6a+3)c^2+(3a+3)c-1}{c^3}$, laquelle peut se mettre sous la forme $-\frac{(3a^2+6a+3)}{c}+\frac{(3a+3)}{c^2}-\frac{1}{c^3}\ldots\ldots(b)$.

Or, cette dernière se compose de trois fractions, dont les deux premières peuvent contenir 1°. un nombre complet d'entiers, 2°. des entiers et une fraction plus petite que l'unité, 3°. enfin elles ne contiendront point d'entiers.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1°. Dans le premier cas on réunira les entiers de ces deux fractions avec les entiers déjà obtenus dans le cube en question, et il restera encore la fraction $-\frac{1}{c^3}$, qui est évidemment plus petite que l'unité. Mais cette fraction a le signe —, il faudra donc la retrancher de la partie entière; or, si d'un nombre entier on retranche une quantité plus petite que l'unité, le reste sera nécessairement un nombre fractionnaire.

2°. Dans le second cas des deux premières fractions de la quantité (b), après avoir tiré les entiers contenus dans chacune de ces fractions, il restera deux autres fractions dont le numérateur sera au plus égal à leur dénominateur moins l'unité : ainsi, en mettant de côté la somme des entiers contenus dans ces fractions, il restera au plus $-\frac{c-1}{c}+\frac{c^2-1}{c^2}-\frac{1}{c^3}$ (en y comprenant la troisième fraction de la quantité (b)) : mettons donc ces fractions au même dénominateur, et faisons ensuite la somme des numérateurs; nous aurons $\frac{c^2-c-1}{c^3}$, qui est évidemment une fraction plus petite que l'unité : mais il faudra ajouter cette fraction à un nombre entier pour avoir le cube en question; donc ce cube est un nombre fractionnaire.

3°. Enfin, le 3°. cas rentre évidemment dans le second : donc, dans tous les cas, le cube d'un nombre fractionnaire est un nombre fractionnaire.

Or, si, par exemple, on demande la racine cubique du nombre 3, comme ce nombre est entier, sa racine cubique ne peut pas être fractionnaire, puisque toute racine fractionnaire donne un cube fractionnaire; mais la racine cubique de 3 est comprise entre 1 et 2, elle n'est donc pas non plus un nombre entier; elle n'est pourtant pas zéro non plus; elle est donc un nombre *irrationnel* ou *incommensurable* (n°. 85).

On démontrerait d'une manière analogue qu'il y a des racines irrationnelles de tous les degrés.

96. En examinant, de nouveau, la suite des cubes des nombres naturels depuis 1 jusqu'à 10, on verra que tant que la racine n'a qu'un seul chiffre; le cube en a au plus 3; mais dès que la racine a 2 chiffres, le cube en a au moins 4 : si donc on nous demande la racine cubique d'un nombre composé de plus de 3 chiffres, nous en conclurons que la racine demandée en doit contenir au moins 2.

97. Quand la racine contient 2 chiffres, elle contient des dixaines et des unités; voyons de quelle manière les dixaines et les unités de cette racine se combinent pour former le cube.

Pour cela, soit a les dixaines, et b les unités : la racine sera $a+b$, et son

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cube $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; d'où il suit que le cube d'un nombre composé de dixaines et d'unités renferme : *le cube des dixaines, plus* 3 *fois le carré des dixaines multiplié par les unités, plus* 3 *fois les dixaines par le carré des unités et plus le cube des unités.*

98. Cela posé, supposons qu'on nous demande d'extraire la racine cubique du nombre 314432 : on disposera le calcul comme on le voit ci-dessous :

Cube.	Racine.
314,432	68
216	
(a). . . 984,32	(3) ..... 108×8 18 ..... (1)
0000	(4) ..... 144×8 6
	(5) ..... 64×8 108 ..... (2)
	(6) 12304
	8

et ensuite, comme le cube proposé contient plus de 3 chiffres, on en conclura que la racine doit en avoir au moins 2 ; c'est-à-dire que cette racine contiendra des dixaines et des unités : le cube donné contient donc le cube des dixaines de la racine, plus 3 fois le carré des dixaines multiplié par les unités, plus 3 fois les dixaines multipliées par le carré des unités, et plus le cube des unités.

Cela posé, on cherchera les dixaines de la racine, et pour cela on observera que le cube des dixaines ne peut se composer que de mille, et que, par conséquent, les 3 derniers chiffres du cube donné ne feront point partie du cube des dixaines de la racine. On séparera donc ces 3 chiffres vers la droite par une virgule, comme on le voit ci-dessus, et on cherchera le plus grand cube contenu dans le nombre 314, qui est 216 (n°. 94); on en extraira la racine cubique (de mémoire) qui est 6, et on écrira cette racine à la place destinée pour la racine demandée. Ensuite, du nombre 314, on retranchera le cube des 6 dixaines trouvées, qui est 216, et il restera 98 ; à côté de ce reste on abaissera les 3 chiffres mis à part au moyen de la virgule, ce qui donnera le nombre 98432 pour ce qui restera du cube donné, après en avoir retranché le cube des dixaines de la racine. Ce reste 98432 contiendra donc encore 3 fois le carré des dixaines multiplié par les unités de la racine, plus 3 fois les dixaines multipliées par le carré des unités, et plus le cube des unités. Cherchons maintenant la partie de ce nombre qui renferme le triple carré des dixaines multiplié par les unités de la racine. Or le triple carré des dixaines multiplié par des unités ne peut se trouver que dans les centaines, puisque le carré de 10 est 100 ; il faudra donc mettre à part, par une virgule,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les deux derniers chiffres du nombre (*a*), ce qui donnera le nombre 984 pour le triple produit du carré des dixaines par les unités. Mais nous savons déjà que la racine demandée contient 6 dixaines; triplons ces 6 dixaines, ce qui nous donnera 18 (qu'on écrira à part, comme on le voit ci-dessus indiqué par le signe (1)); multiplions ce triple (1) des dixaines par les 6 dixaines elles-mêmes, ce qui nous donnera 108 (marqué (2)) qu'on écrira sous la place de la racine demandée à côté du signe (3) : ce nombre 108 sera évidemment le triple carré des dixaines, et par conséquent l'un des facteurs du produit contenu dans la partie 984 du nombre (*a*); si donc on divise ce produit 984 par le triple carré 108 des dixaines, on aura 8 au quotient, et ce quotient 8 sera le nombre d'unité de la racine demandée. Maintenant on pourrait écrire 8 à la suite de 6 dans la racine, ce qui donnerait 68 pour la racine présumée; et ensuite, élever 68 au cube, pour s'assurer si ce cube serait exactement le cube donné 314432 : ce qui doit effectivement avoir lieu, si le nombre donné est vraiment un cube et si 68 est la racine demandée. Mais voici un moyen plus facile dans la pratique, surtout quand la racine doit contenir un grand nombre de chiffres.

Après avoir trouvé les unités 8, on les écrira à la suite du triple carré 108 des dixaines, en indiquant qu'il faudrait multiplier 108 par 8, ainsi qu'on le voit dans le détail du calcul, ce qui serait le triple produit du carré des dixaines par les unités. Mais dans le nombre (*a*) tout entier, non-seulement il doit y avoir ce produit, mais encore le triple produit des dixaines par le carré des unités, et plus le cube des unités : composons donc ces deux dernières parties du nombre (*a*), et, d'abord, formons le triple produit des dixaines par le carré des unités. Pour cela, comme le nombre marqué (1) est le triple des dixaines, en le multipliant par les 8 unités, on aura 144 dixaines au produit; mais ce produit ne sera que le triple des dixaines par *les unités*, tandis qu'il nous fallait le triple produit des dixaines par le *carré des unités;* il faudra donc multiplier encore ce produit par les 8 unités pour le rendre ce qu'il doit être; mais au lieu de faire cette multiplication, ne faisons que l'indiquer de la manière qu'on le voit dans la ligne (4) ci-dessus, en ayant soin de mettre le nombre 144 sous le nombre 108, d'une place plus avancée vers la droite, par la raison que le nombre 108 est de centaines, comme étant le triple carré des dixaines, et que le nombre 144 n'est que des dixaines, étant le triple produit des dixaines par les unités. Formons à présent la dernière partie du nombre (*a*), qui est le cube des unités. Pour cela, il suffira de carrer le nombre 8, et (comme le carré d'un nombre d'unités est d'unités) d'écrire ce carré, qui est 64, sous le nombre 144, en ayant soin de l'avancer d'une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

place de plus vers la droite; enfin, on indiquera, en outre, que ce carré 64 doit être multiplié par 8, comme on le voit dans la ligne (5). Cela fait, on observera que le nombre (*a*) doit égaler la somme des trois produit (3), (4) et (5): or, ces trois produits ont un facteur commun 8; donc leur somme sera égale à celle de leurs facteurs inégaux multipliée par le facteur commun 8. On fera donc la somme des facteurs inégaux, qui sera le nombre (6); on multipliera cette somme (6) par le facteur commun 8, et, à mesure qu'on l'obtiendra, on le retranchera du nombre (*a*): s'il ne reste rien, 8 sera les unités de la racine, de sorte que la racine demandée sera 68.

99. Supposons, maintenant, qu'on nous demande la racine cubique du nombre 194104539: on disposera les choses comme on le voit ci-dessous:

Cube.	Racine.
194,104,539	579
125	
(*a*)..... 691,04	1er. détail.
(*b*)..... 89 115,39	(3)..... 75 × 7 — 15..... (1)
000 00	(4)..... 105 × 7 — 5
	(5)..... 49 × 7 — 75..... (2)
	(6)..... 8599
	7
	2e. détail.
	(3)..... 9747 × 9 — 171.....(1)
	(4)..... 1539 × 9 — 57
	(5)..... 81 × 9 — 1197
	990171 — 855
	(6)..... 9 — 9747.....(2)

et ensuite on observera que le cube donné, contenant plus de 3 chiffres, la racine demandée en contiendra au moins 2; le cube donné renfermera donc le cube des dixaines, plus le triple carré des dixaines, multiplié par les unités, plus le triple des dixaines, multiplié par le carré des unités, et plus le cube des unités de cette racine. Cela posé, on commencera par chercher les dixaines de la racine; or, le cube des dixaines de la racine ne peut se trouver que dans les mille du cube donné, on séparera donc, par une virgule, les trois derniers chiffres du cube donné, pour ne considérer que les mille de ce nombre, qui seront au nombre de 194104. Mais ce nombre contient plus de 3 chiffres; sa racine en aura donc au moins 2; de sorte que les dixaines de la racine demandée seront exprimées par 2 chiffres; c'est-à-dire, que cette racine aura au moins jusqu'à des centaines. Regardons, pour un moment, le cube donné comme n'étant que le nombre 194104, et raisonnons sur ce nombre comme il a été démontré au n°. 98, ainsi qu'on le voit indiqué sous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le cube donné et dans le 1^er^. détail du calcul ci-dessus, par les signes (1), (2), (3), (4), (5) et (6) : on aura 57 à la racine demandée, et le reste 8911 sous le nombre marqué (*a*), à côté duquel on abaissera les 3 derniers chiffres du cube donné qu'on avait d'abord mis de côté, et on aura le nombre marqué (*b*) pour ce qui restera du cube donné, après en avoir ôté le cube des 57 dixaines de la racine demandée.

Ayant trouvé les dixaines de la racine, on les triplera, ce qui donnera le nombre (1) du second détail du calcul ci-dessus, sous lequel on écrira ces mêmes dixaines, par lesquelles on multipliera le nombre (1), et on aura le nombre (2) au produit, qui sera le triple carré des dixaines. On écrira ce produit à la place marquée (3) sous la racine; on séparera les deux derniers chiffres du reste (*b*), et on divisera la partie 89115, qui restera du nombre (*b*), par le triple carré des dixaines de la racine (qui est le nombre (3) du 2^e^. détail), et on aura 9 au quotient. On écrira ce quotient 9 à la suite du nombre (3) avec le signe de multiplication; on multipliera le triple (1) des dixaines de la racine par ce quotient 9; on écrira le produit, qui est le nombre (4), sous le nombre (3), en l'avançant d'une place vers la droite; on carrera ce même quotient 9 et on écrira le carré (5) sous le nombre (4), en l'avançant d'une place vers la droite; on fera la somme des trois nombres (3), (4) et (5); on multipliera cette somme (6) par le quotient 9; enfin, on retranchera le produit du nombre (*b*), et comme il ne restera rien, on en conclura que le quotient 9 est le nombre d'unités de la racine demandée; de sorte qu'on écrira ces 9 unités à cette racine, qui sera 579.

100. Ce qui précède étant bien entendu, on verra que pour extraire la racine cubique d'un nombre composé de tant de chiffres qu'on voudra, *il faudra commencer par partager le cube donné en tranches de* 3 *en* 3 *chiffres, en commençant par la droite, et en allant à gauche* (*la dernière tranche vers la gauche pouvant n'avoir que* 2 *et même qu'un seul chiffre*); *ensuite, regarder, pour un moment, ce cube comme ne se composant que des deux dernières tranches vers la gauche, et opérer sur ces deux tranches comme il a été démontré au n°.* 98; *puis, abaisser la tranche suivante à côté du reste obtenu, et opérer sur la racine trouvée comme il a été dit dans le second détail du numéro précédent; puis, on continuera d'abaisser les tranches suivantes, et d'opérer comme ci-dessus jusqu'à la dernière tranche du cube donné.*

En suivant cette marche, on aura soin, après avoir trouvé le premier chiffre de la racine, d'écrire un chiffre à cette racine, soit 0 *soit significatif, à chaque fois qu'on aura abaissé une tranche à côté du reste; et, réciproquement, d'abaisser une tranche à côté du reste, à chaque fois qu'on aura écrit un chiffre à la racine.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

101. On ne réussit pas toujours à trouver du premier coup le chiffre qu'il convient d'écrire à la racine : assez souvent le chiffre qu'on avait cru bon est trop grand ou trop petit. Quand il est trop grand, on s'en aperçoit sans peine; mais on ne s'aperçoit pas de même quand il est trop petit. Un indice assez généralement sûr pour reconnaître qu'un chiffre est trop petit, c'est quand le reste qu'il donne est plus grand que le nombre (comme celui marqué (6) dans les détails de l'exemple du n°. 99) qu'on vient de multiplier par le chiffre à vérifier. Cet indice est suffisant pour la pratique; mais si l'on veut savoir au juste ce que doit être le reste pour qu'on puisse augmenter le chiffre à vérifier d'une unité; supposons que a soit la racine déjà trouvée, en y comprenant le chiffre en question; son cube sera a^3; mais cette racine, augmentée de l'unité, étant $a+1$, le cube de celle-ci sera a^3+3a^2+3a+1, et surpassera la première de $3a^2+3a+1$; d'où il s'ensuivra que le reste donné par le chiffre à vérifier devra au moins égaler *le triple carré de la racine trouvée* (y compris le chiffre en question) *plus le triple de cette même racine plus* 1, pour qu'on puisse augmenter cette racine de 1.

102. Si la racine demandée était irrationnelle, on l'obtiendrait, par approximation, de la manière suivante :

Après avoir obtenu la plus grande racine entière contenue dans le nombre proposé, on mettra trois zéros à la suite du dernier reste, et on opérera comme si ces trois zéros faisaient partie du nombre donné; de cette manière on aura un chiffre de plus à la racine, et un nouveau reste, à la suite duquel on mettra encore 3 zéros. Ce nouveau reste, suivi des 3 zéros, donnera un nouveau chiffre à la racine, qui conduira à un nouveau reste, et ainsi de suite, aussi loin qu'on le désirera. Arrivé au reste auquel on voudra s'arrêter, on mettra dans la racine autant de chiffres au rang des décimales, qu'on aura mis de fois 3 zéros à la suite des restes successifs, et la racine sera obtenue d'autant plus exactement qu'on aura poussé l'opération plus loin.

Ce procédé est fondé sur ce que la racine cubique d'un nombre devient 10 fois plus grande, quand ce nombre est 1000 fois plus grand; 100 fois plus grande, quand ce nombre est rendu 2 fois de suite 1000 fois plus grand, et ainsi de suite; car la racine cubique de a^3 est a; celle de $1000a^3$ est $10a$; celle de $1000000a^3$ est $100a$, et ainsi de suite. Or, en mettant successivement 3 zéros à la suite des restes obtenus dans le cours de l'extraction de la racine cubique d'un nombre quelconque, c'est comme si l'on rendait ce nombre de mille en mille fois plus grand, et par conséquent comme si l'on rendait sa racine cubique de 10 en 10 fois plus grande; pour ramener cette racine à sa vraie valeur, il faut donc la rendre autant de fois plus petite qu'on l'avait rendue de fois trop grande, ce qui s'accorde avec le procédé ci-dessus.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

103. De là résulte que, si l'on demandait la racine cubique d'un nombre décimal, on opérerait comme si le nombre donné était entier, mais on aurait l'attention, au moyen de zéros, de rendre le nombre des décimales tel, qu'il se trouvât un nombre complet de tranches de trois chiffres au rang des décimales : ayant obtenu la racine, on mettrait, dans cette racine, autant de chiffres au rang des décimales, qu'il y aurait de tranches de trois décimales dans le nombre donné.

Quant à la racine cubique des fractions, le plus simple est de les développer d'abord en décimales, et d'extraire ensuite la racine cubique du développement, comme il vient d'être dit.

104. OBSERVATION. On pourrait pousser plus loin l'extraction des racines des nombres, en suivant la marche qui nous a conduit à découvrir les procédés de la racine carrée et de la racine cubique; mais comme ces procédés deviennent de plus en plus compliqués, que l'extraction des racines des degrés supérieurs se présente rarement, et que, d'ailleurs, on peut l'opérer d'une manière infiniment plus commode par le moyen des logarithmes, nous ne continuerons pas cette théorie plus loin. Au surplus, pourvu que l'indice de la racine ne renferme que le facteur 2 et le facteur 3, combinés ensemble ou séparément, comme on voudra, quel que soit d'ailleurs cet indice, on pourra toujours extraire la racine demandée, au moyen de l'extraction des racines carrées et des racines cubiques, en mettant en usage la proposition du n°. 82.

Ainsi, par exemple, si l'on demandait la racine 6e. d'un nombre, on extrairait d'abord la racine carrée de ce nombre, et ensuite la racine cubique de la racine carrée, qui serait la racine 6e. demandée. S'il s'agissait de la racine 4e., on extrairait deux fois de suite la racine carrée; pour la racine 12e., on extrairait d'abord deux fois de suite la racine carrée, ce qui donnerait la racine 4e., et ensuite on extrairait la racine cubique de la racine 4e., et on aurait la racine 12e. On se conduirait d'une manière analogue pour toute autre racine dont l'indice satisferait aux conditions ci-dessus.

9me. LEÇON.

Extraction des Racines des Quantités algébriques.

105. L'extraction des racines des monomes ne saurait présenter aucune espèce de difficultés d'après ce qui a été dit au n°. 77 et aux suivans. On trouvera donc sans peine que, 1°. $\sqrt{4a^2b^2c^2} = \pm 2abc$; 2°. $\sqrt{64a^6b^4c^2} = \pm 8a^3b^2c$; 3°. $\sqrt[3]{8a^3b^3c^3} = 2abc$; 4°. $\sqrt[5]{32a^5b^{10}c^{15}} = 2ab^2c^3$, etc.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si la quantité dont on demande la racine n'était pas une puissance complète marquée par l'indice du radical, en vertu de la proposition n°. 79, on trouvera que, 1°. $\sqrt{8a^3b} = \sqrt{4a^2 . 2ab} = \pm 2a\sqrt{2ab}$;

2°. $\sqrt[3]{54a^4b^5c^2} = \sqrt[3]{27a^3b^3 . 2ab^2c^2} = 3ab\sqrt[3]{2ab^2c^2}$;

3°. $\sqrt[4]{48a^7b^5c^4} = \sqrt[4]{16a^4b^4c^4 . 3a^3b} = \pm 2abc\sqrt[4]{3a^3b}$, etc.

Passons donc à l'extraction des racines des polynomes.

Extraction de la Racine carrée des quantités polynomes.

106. Supposons qu'on nous demande la racine carrée de la quantité $a^2 + 2ab + b^2$; on disposera les choses comme s'il s'agissait d'extraire la racine carrée d'un nombre, ainsi qu'on le voit ci-dessous :

Carré.	Racine.
$a^2 + 2ab + b^2$	$a + b$
$-a^2$	
(a). . . . . $2ab + b^2$	$2a + b$. . . (1)
$-2ab - b^2$	$+b$
0	

et ensuite on extraira la racine carrée du premier terme a^2, qui est a, et on l'écrira à la racine. On retranchera le carré a^2, de cette racine, du carré donné, et on aura le reste (a). On doublera la racine trouvée a, ce qui donnera $2a$, qu'on écrira sous la racine dans la ligne (1), comme on le voit ci-dessus; on divisera le premier terme $2ab$ du reste (a) par ce double $2a$, ce qui donnera b au quotient; on écrira ce quotient à la suite du double $2a$ de la racine avec le signe + (comme on le voit ci-dessus dans la ligne (1)) et au-dessous de lui-même; on multipliera la ligne (1) par $+b$, et on retranchera le produit du reste (a) comme s'il s'agissait d'une division, et on trouvera qu'il ne reste rien : b sera par conséquent le second terme de la racine demandée qui sera $a + b$.

Supposons, pour second exemple, qu'on nous demande la racine carrée du polynome $9a^2 - 24ab + 16b^2 + 12ac - 16bc + 4c^2$; on disposera le calcul comme dans le premier exemple, ainsi qu'on le voit ci-dessous :

Carré.	Racine.
$9a^2 - 24ab + 16b^2 + 12ac - 16bc + 4c^2$	$3a - 4b + 2c$
$-9a^2$	
(a)....$-24ab + 16b^2 + 12ac - 16bc + 4c^2$	1er. détail.
$+24ab - 16b^2$	$6a - 4b$. . . . . (1)
(b) . . . . . $+12ac - 16bc + 4c^2$	$-4b$
$-12ac + 16bc - 4c^2$	2e. détail.
0	$6a - 8b + 2c$. . . (2)
	$+2c$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et ensuite, on extraira la racine carrée du premier terme $9a^2$ du carré donné, ce qui donnera $3a$, qu'on écrira à la racine. On retranchera du carré donné le carré $9a^2$ de ce premier terme de la racine, et on aura le reste (a). On doublera ce premier terme $3a$ de la racine, ce qui donnera $6a$ qu'on écrira dans le premier détail, comme on le voit ci-dessus; on divisera le premier terme $-24ab$ du reste (a) par $6a$; on écrira le quotient $-4b$ à la suite du double $6a$ du premier terme de la racine, et au-dessous de lui-même dans le premier détail; on multipliera la ligne (1) par $-4b$; on retranchera le produit du reste (a), et on aura le reste (b). On écrira $-4b$ à la racine; on doublera les 2 premiers termes de cette racine, ce qui donnera $6a-8b$, qu'on écrira dans le second détail sur la ligne (2); on divisera le premier terme $+12ac$ du reste (b) par le premier terme $6a$ de la ligne (2) du 2e. détail; on écrira le quotient $+2c$ à la suite des deux premiers termes de la ligne (2) et au-dessous de lui-même; on multipliera la ligne (2) toute entière par $+2c$, et on retranchera le produit du reste (b); il ne restera plus rien; on écrira $+2c$ à la racine, et on aura $3a-4b+2c$ pour la racine demandée.

Ces deux exemples suffisent pour faire sentir la généralité de ce procédé, qui est, comme on voit, le même que celui que nous avons démontré au n°. 88 pour l'extraction de la racine carrée des nombres.

Extraction de la Racine cubique des Quantités polynomes.

107. Supposons qu'il s'agisse de la racine cubique de $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$; on disposera le calcul comme il suit :

Cube.

$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

$-a^6$

$(a)\ldots +6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

$-6a^5b-12a^4b^2-8a^3b^3$

$(b)\ldots\ldots\ldots +3a^4b^2+12a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

$-3a^4b^2-12a^3b^3-15a^2b^4-6ab^5-b^6$

0

Racine.

$a^3+2ab+b^3$

1er. détail.

(3).....$3a^4\ldots\times 2ab$

(4)..... $+6a^3b$

(5) ..... $+4a^2b^2$

(6) ....$3a^4+6a^3b+4a^2b^2$

$+2ab$

$3a^2$. . . . . (1)

a^2

$3a^4$ . . . . . (2)

2e. détail.

(3)....$3a^4+12a^3b+12a^2b^2\ldots\ldots\times b^2$

(4)..... $+3a^2b^2+6ab^3$

(5)..... $+b^4$

(6)...$3a^4+12a^3b+15a^2b^2+6ab^3+b^4$

b^2

$3a^2+6ab$ . . . . . (1)

a^2+2ab

$3a^4+6a^3b$

$+6a^3b+12a^2b^2$

$3a^4+12a^3b-12a^2b^2\ldots$(2)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et ensuite on extraira la racine cubique du premier terme a^6 du cube donné; on écrira la racine a^2 à la place destinée à la racine demandée, et on retranchera du cube donné le cube a^6, de cette première racine, ce qui donnera le reste (a). Puis, on triplera la racine trouvée a^2, ce qui donnera $3a^2$ qu'on écrira à part à l'endroit marqué (1) dans le 1^er^. détail; on multipliera la quantité $3a^2$ par la racine trouvée a^2, ce qui donnera $3a^4$ pour le triple carré de la racine trouvée, que l'on écrira sous la racine à l'endroit marqué (3). On divisera le premier terme $+6a^5b$ par la quantité (3), ce qui donnera le quotient $2ab$ qu'on écrira sur la ligne (3). Puis, on multipliera le triple (1) de la racine trouvée par ce quotient $2ab$, ce qui donnera le produit (4); on multipliera ce quotient par lui-même, ce qui donnera le produit (5); on fera la somme des trois quantités (3), (4) et (5), qui sera la quantité (6), que l'on multipliera par le quotient $2ab$, et on retranchera le produit du reste (a), ce qui donnera le reste (b). Ensuite, on écrira $2ab$ à la racine qui se composera dès-lors de a^2+2ab; on triplera les deux termes de cette racine, et on aura la quantité marquée (1) dans le second détail. On multipliera la quantité (1) par la racine a^2+2ab, ce qui donnera le produit (2) qui sera le triple carré de la racine trouvée. On écrira cette quantité (2) à l'endroit marqué (3); on divisera le reste (b) par la quantité (3), et on écrira le quotient b^2 à la suite du diviseur (3) avec le signe $\times$. On multipliera ensuite le triple (1) de la racine trouvée par ce quotient b^2, ce qui donnera le produit (4). Puis on multipliera le quotient b^2 par lui-même, ce qui donnera le produit (5). Enfin, on ajoutera les trois quantités (3), (4) et (5), ce qui donnera la somme (6), qu'on multipliera par le quotient b^2; on retranchera le produit du reste (b) et il ne restera plus rien; on écrira le quotient b^2 à la racine, et on aura $a^2+2ab+b^2$ pour la racine demandée.

Ce procédé, comme on voit, est tout-à-fait analogue à celui que nous avons donné pour extraire la racine cubique des nombres. Je ne crois pas avoir besoin d'en donner d'autres exemples pour le faire comprendre au lecteur.

10^me^. LEÇON.

Du Calcul des Radicaux.

Le calcul des radicaux consiste à ajouter, soustraire, multiplier, diviser, élever à des puissances et extraire des racines des quantités affectées de radicaux.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

De l'Addition et de la Soustraction des radicaux.

108. Pour pouvoir ajouter ou soustraire des radicaux, il faut que ces radicaux soient au même indice, et que les quantités qui en sont affectées soient parfaitement semblables.

Ainsi, par exemple, la somme $3a\sqrt{2ab} + 7ab\sqrt{2ab} - 8a^2\sqrt{2ab} = (3a + 7ab - 8a^2)\sqrt{2ab}$, parce que tous les termes contiennent la quantité radicale $\sqrt{2ab}$. Mais s'il s'agissait d'ajouter les quantités $4a\sqrt{2ab}$, $-3c\sqrt[3]{2ab}$, $+4\sqrt{3abc}$, $-7\sqrt[4]{3abc}$, tout ce qu'on pourrait faire se réduirait à réunir ces quantités à la suite les unes des autres avec leur signe respectif de cette manière : $4a\sqrt{2ab} - 3c\sqrt[3]{2ab} + 4\sqrt{3abc} - 7\sqrt[4]{3abc}$; tant parce que les radicaux n'ont pas le même indice, que parce que les quantités qui sont affectées de ces radicaux ne sont pas semblables.

On peut toujours mettre tant de radicaux qu'on voudra au même indice; mais on ne peut pas toujours rendre semblables les quantités qui sont affectées de radicaux. Pour s'assurer que les quantités affectées de radicaux ne peuvent pas devenir semblables, en vertu du principe du n°. 79, il faut réduire les radicaux à leur plus simple expression, parce que souvent ces réductions rendent semblables des quantités radicales qui ne l'étaient pas explicitement.

109. Pour réduire tant de radicaux qu'on voudra au même indice, en vertu de ce que (n°. 81) l'on peut multiplier l'indice d'un radical et l'exposant de la quantité qui en est affectée, par le même nombre, sans rien changer à la valeur de la racine demandée, on se comportera de la même manière que pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur (n°. 78, arith.). Ainsi, par exemple, supposons qu'on nous demande de mettre au même indice, les radicaux $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{ab}$, $\sqrt[6]{a^2bc}$ et $\sqrt[12]{a^5b}$.

Comme l'indice 12 est divisible par chacun des autres, l'indice commun pourra être 12. En conséquence, on divisera 12 par l'indice 2 du premier radical, et on multipliera, par le quotient 6, l'indice de ce premier radical et l'exposant de la quantité qui en est affectée, et on aura $\sqrt[12]{a^6}$. Pour le second radical, on divisera 12 par 3, et on multipliera, par le quotient 4, l'indice 3 du radical et l'exposant 2 de la quantité, ce qui donnera $\sqrt[12]{a^8}$. Pour le troisième, on divisera 12 par 4, et on multipliera, par le quotient 3, l'indice de ce radical et l'exposant de la quantité, ce qui donnera $\sqrt[12]{a^3b^3}$. Enfin, pour le quatrième, on divisera 12 par 6, et on multipliera, par le quotient 2, l'indice de ce radical et l'exposant de la quantité, ce qui donnera $\sqrt[12]{a^4b^2c^2}$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et tous les radicaux donnés seront au même indice sans que les valeurs des racines soient altérées. Ainsi, au lieu de $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{ab}$, $\sqrt[6]{a^2bc}$ et $\sqrt[12]{a^5b}$, on aura $\sqrt[12]{a^6}$, $\sqrt[12]{a^8}$, $\sqrt[12]{a^3b^3}$, $\sqrt[12]{a^4b^2c^2}$ et $\sqrt[12]{a^5b}$.

Cet exemple suffit pour faire sentir la manière de s'y prendre dans toute autre circonstance.

De la Multiplication des Radicaux.

110. Supposons qu'il s'agisse du produit de $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$; je dis qu'on aura $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; car (n°. 78) le produit des racines est égal à la racine du produit. Si l'on demandait le produit des radicaux $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$, par la même raison on aurait $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \sqrt{d} = \sqrt{abcd}$, et ainsi de suite pour un nombre quelconque de facteurs radicaux.

Il suit de là que, pour faire le produit de tant de facteurs radicaux qu'on voudra, *il faut multiplier entre elles les quantités* (monomes ou polynomes) *qui sont sous les radicaux donnés, et affecter leur produit du radical commun à tous les facteurs.*

On conçoit, en effet, que cette règle est indépendante de l'indice des radicaux, puisque le principe du n°. 78 a lieu, quelque soit cet indice; ainsi, quoique nous ayons expliqué cette règle sur des radicaux carrés, elle a également lieu pour des radicaux de tout autre indice. Mais il faut bien faire attention qu'elle ne peut avoir son application que dans le seul cas où *les radicaux de tous les facteurs ont le même indice;* car, par exemple, le produit d'un radical carré par un radical cubique ne peut être ni un radical carré, ni un radical cubique. Ainsi, si les facteurs proposés n'ont pas de radicaux de même indice, on appliquera la règle du n°. 109 avant de faire la multiplication.

111. Supposons, maintenant, qu'on nous demande le produit de $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-b}$; je dis qu'on aura $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$: c'est-à-dire que, *le produit de deux radicaux imaginaires est un radical réel, mais négatif.* En effet, 1°. $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$, et $\sqrt{-b} = \sqrt{b} \times \sqrt{-1}$; car si l'on fait les produits indiqués dans les seconds membres de ces deux égalités, ils égaleront en effet respectivement les premiers membres; 2°. on aura donc $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1}$; mais comme on peut permuter les facteurs d'un produit sans le changer, on aura $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$ ou $\sqrt{ab} \times (\sqrt{-1})^2$: or, le carré de la racine carrée de -1 est évidemment -1; on aura donc enfin, $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{ab} \times (-1) = -\sqrt{ab}$, ce qu'il fallait démontrer.

Cette proposition aura lieu dans tous les cas où l'indice du radical sera un nombre pair.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

112. Si l'on avait $\sqrt{-a}\times\sqrt{b}$, on aurait (n°. 110) $\sqrt{-a}\times\sqrt{b}=\pm\sqrt{-ab}$; d'où l'on voit *que le produit d'une quantité imaginaire par une quantite réelle est une quantité imaginaire.*

113. Si les facteurs radicaux avaient des coefficiens; si, par exemple, il s'agissait du produit de $3ab\sqrt{2ab}$ par $4bc\sqrt{5ac}$, on ferait d'abord le produit de ces coefficiens, et on l'écrirait devant le radical produit; de sorte qu'on aurait $3ab\sqrt{2ab}\times 4bc\sqrt{5ac}=12ab^2c\sqrt{10a^2bc}$. On pourrait ensuite sortir du radical le facteur a^2, et on aurait enfin $3ab\sqrt{2ab}\times 4bc\sqrt{5ac}=12a^2b^2c\sqrt{10bc}$.

114. Supposons qu'on demande le produit de $\sqrt[n]{a^m}$ par $\sqrt[n]{a^p}$; on aura $\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[n]{a^p}=\sqrt[n]{a^{m+p}}$. Mais $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, et $\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{p}{n}}$; donc $\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{n}}$; or, $\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[n]{a^p}=\sqrt[n]{a^{m+p}}=a^{\frac{m+p}{n}}$; donc $a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{n}}=a^{\frac{m+p}{n}}$; mais $\frac{m+p}{n}=\frac{m}{n}+\frac{p}{n}$, d'où il suit que *la règle des exposans du n°. 25 est applicable au cas même où ces exposans sont fractionnaires.*

115. S'il s'agissait de multiplier des quantités polynomes, dans lesquelles il y aurait des radicaux dans un ou plusieurs termes, on ferait la multiplication comme s'il s'agissait de polynomes ordinaires, en ayant égard à ce qui a été dit sur les radicaux. Je me dispenserai de donner des exemples de ces sortes de multiplications, persuadé qu'elles ne présenteront pas de difficulté au lecteur intelligent.

De la Division des Radicaux.

116. Supposons qu'il soit question de diviser $\sqrt[n]{a}$ par $\sqrt[n]{b}$; on aura $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, *c'est-à-dire que le quotient de deux racines de même indice est égal à la racine du quotient des quantités dont on demande les racines.*

En effet, la racine n^{me}. d'une fraction est évidemment égale à la racine n^{me}. du numérateur, divisée par la racine n^{me}. du dénominateur, *et vice versa.*

Ainsi, $\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{3ac}}=\sqrt{\frac{2ab}{3ac}}=\sqrt{\frac{2b}{3c}}$; $\frac{\sqrt[3]{5a^2b}}{\sqrt[3]{7abc}}=\sqrt[3]{\frac{5a^2b}{7abc}}=\sqrt[3]{\frac{5a}{7c}}$, etc.

117. Supposons qu'il s'agisse de diviser $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-b}$; on aura $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{-1}\times\sqrt{a}}{\sqrt{-1}\times\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

D'où l'on voit que *le quotient de deux quantités imaginaires est réel.*

118. Si l'on avait $\sqrt{-a}$ à diviser par $\sqrt{b}$, on aurait $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{-a}{b}}=\sqrt{-\frac{a}{b}}$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

c'est-à-dire qu'une *quantité imaginaire, divisée par une quantité réelle, est nécessairement imaginaire.*

On conçoit que la division des radicaux exige, comme la multiplication, que les indices des radicaux soient les mêmes dans tous les facteurs.

119. Soit $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{a^p}}$; on aura $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{a^p}} = \sqrt[n]{a^{m-p}} = a^{\frac{m-p}{n}}$. Mais $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, et $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$; donc $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{a^p}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{n}}}$, et par conséquent $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{n}}} = a^{\frac{m-p}{n}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{n}}$, d'où il suit que *la règle des exposans du n°. 35, est applicable au cas même où les exposans sont fractionnaires.*

De l'Elévation aux puissances des Radicaux.

120. Soit $\sqrt[n]{a}$ à élever à la m^{me}. puissance; il est clair que c'est comme si l'on demandait un produit dans lequel $\sqrt[n]{a}$ serait m fois facteur: mais (n°. 110) puisque pour faire le produit de plusieurs radicaux il faut multiplier entre elles les quantités qui sont sous les radicaux, il est clair que $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Ainsi, pour élever un radical à la puissance qu'on voudra, *il faut élever à cette puissance la quantité soumise au radical, et affecter le résultat de ce même radical.*

Comme on peut (n°. 80) diviser l'indice d'un radical et l'exposant de la quantité qui en est affectée par le même nombre, il s'ensuit que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}$; donc $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}$; c'est-à-dire que, pour élever un radical quelconque à une puissance quelconque, *il faut diviser l'indice du radical par l'exposant de la puissance à laquelle on veut l'élever.*

121. Supposons qu'il s'agisse d'élever $\sqrt[n]{a}$ à la puissance n^{me}., il est clair qu'on aura $(\sqrt[n]{a})^n = a$; car, élever la racine n^{me}. de a à la n^{me}. puissance, c'est évidemment retourner à la quantité a.

Ainsi, *toutes les fois qu'on aura un radical dont l'indice sera égal à l'exposant de la puissance à laquelle on voudra l'élever, il suffira de prendre la quantité qui sera sous le radical, et de supprimer ce radical.*

De l'Extraction des racines des Radicaux.

122. Supposons qu'on demande la racine n^{me}. de $\sqrt[m]{a}$, il est clair qu'on aura $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. Mais, en vertu du n°. 82, on voit que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; c'est-à-dire

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que, *pour extraire la racine n^me^. d'un radical, il suffit de multiplier l'indice du radical par celui n de la racine qu'on veut en extraire.*

11^me^. LEÇON.

Des Proportions.

123. On appelle *proportion* la comparaison de deux rapports égaux. Or il y a deux espèces de rapports : les rapports par différence ou arithmétiques, et les rapports par quotient ou géométriques; il y a donc aussi deux espèces de proportions : les proportions par différence ou arithmétiques, et les proportions par quotient ou géométriques.

Des Proportions arithmétiques.

124. Supposons que les quatre quantités a, b, c et d soient telles que la différence entre a et b soit la même que celle entre c et d; d'après la définition des proportions arithmétiques, ces quatre quantités formeront une proportion par différence. Pour indiquer que ces quatre quantités sont en proportion par différence, on les écrit de cette manière : $a \,.\, b : c \,.\, d$, en séparant les deux termes de chaque rapport par un point, et les deux rapports par deux points.

Le point qui sépare les deux termes de chaque rapport signifie *est à*, et les deux points qui séparent les deux rapports signifient *comme;* de sorte que, pour lire la proportion $a \,.\, b : c \,.\, d$, on dit : *a est à b comme c est à d;* j'aimerais mieux dire : *a est par rapport à b ce que c est par rapport à d.*

125. Dans toute proportion, les deux termes placés aux extrémités se nomment *les extrêmes*, et les deux autres *les moyens* de la proportion. Le premier terme de chaque rapport se nomme *antécédent*, et le second *conséquent.* Ainsi dans la proportion $a \,.\, b : c \,.\, d$, a et c sont les antécédens, et b et d les conséquens.

Il arrive quelquefois que les deux moyens d'une proportion arithmétique sont formés par le même nombre, comme dans celle-ci : $a \,.\, b : b \,.\, c$; dans ce cas la proportion est dite *continue*, et le nombre qui forme les deux moyens s'appelle *moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux autres termes.*

126. Je dis, maintenant, que, *dans toute proportion arithmétique, la somme des termes extrêmes égale la somme des moyens.*

En effet, si de la proportion $a \,.\, b : c \,.\, d$ nous faisons la somme des moyens et celle des extrêmes, nous aurons $b+c$ d'une part, et $a+d$ de l'autre : il faut faire voir que ces deux sommes sont égales, c'est-à-dire qu'on a $b+c = a+d$. Or, puisque les quatre nombre a, b, c et d sont en proportion, on

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

a $b-a=d-c$, c'est-à-dire que b surpasse a de la même quantité que d surpasse c; les deux sommes $b+c$, $a+d$ sont donc telles que le premier terme b de la première surpasse le premier terme a de la seconde, de la même quantité que le second terme de la première est surpassé par le second terme de la deuxième; il y a donc compensation entre les termes de ces deux sommes, donc elles sont égales.

127. Réciproquement, si quatre nombres a, b, c et d sont tels, *que la somme des moyens soit égale à celle des extrêmes, ces quatre nombres formeront une proportion arithmétique.*

En effet, si $b+c=a+d$, il faut nécessairement que $b-a=d-c$, ou que $a-b=c-d$, ce qui au fond est la même chose au signe près des différences, car sans cela il n'y aurait pas compensation entre les termes de ces deux sommes, et par conséquent elles ne pourraient pas être égales; or, elles sont égales; donc $b-a=d-c$ ou $a-b=c-d$; d'où il suit que le rapport de a à b est le même que celui de c à d; donc les quatre quantités a, b, c et d forment la proportion $a\,.\,b:c\,.\,d$, ce qu'il fallait démontrer.

128. Puisque la somme des moyens est égale à celle des extrêmes, il est clair que l'un des extrêmes est égal à la somme des deux moyens moins l'autre extrême; et l'un des moyens est égal à la somme des deux extrêmes moins l'autre moyen; car on peut prendre la somme des deux moyens pour celle des deux extrêmes, ou la somme des deux extrêmes pour celle des deux moyens; or, quand on connaît un nombre et l'une de ses parties, la soustraction fait connaître l'autre; donc, etc. Ainsi, par exemple, si l'on représente par x le quatrième terme d'une proportion arithmétique, dont les trois premiers seraient 3, 7 et 9, on aura $3\,.\,7:9\,.\,x$, et $x=7+9-3=13$.

Si l'on donnait les deux extrêmes et l'un des moyens, l'autre moyen étant représenté par x, on aurait $3\,.\,7:x\,.\,13$, et $x=3+13-7=9$.

129. Soit la proportion arithmétique $a\,.\,b:c\,.\,d$: *je dis que cette proportion ne sera pas troublée, en augmentant l'un des extrêmes et l'un des moyens de la même quantité quelconque m;* de sorte que la suite des quantités $a+m\,.\,b$; $c+m\,.\,d$, ou $a+m\,.\,b+m:c\,.\,d$, ou $a\,.\,b+m:c\,.\,d+m$, ou enfin, a; $b:c+m\,.\,d+m$ sera une proportion. Et en effet, ayant augmenté l'un des extrêmes de la quantité m, on a augmenté la somme des extrêmes de cette quantité m; mais ayant augmenté l'un des moyens de la même quantité m, on a augmenté la somme des moyens de cette même quantité m: ces deux sommes seront donc augmentées de la même quantité; mais elles étaient égales; donc elles le seront encore; donc la proportion (n°. 127) ne sera pas troublée.

130. *Si deux proportions ont un rapport commun, les deux autres rapports formeront une proportion.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, une proportion n'est autre chose que la comparaison de deux rapports égaux; or, si deux proportions ont un rapport de commun, les deux autres rapports seront égaux, et leur comparaison formera une proportion. Ainsi, par exemple, si l'on a les proportions $a.b : c.d$, $e.f : c.d$, on aura $a.b : e.f$, à cause du rapport commun $c.d$.

L'usage des proportions arithmétiques étant très-borné, je ne m'étendrai pas davantage sur ce qui les concerne.

Des Proportions géométriques.

Les proportions géométriques ou par quotient, sont d'un usage presque continuel; elles sont le fondement de la plus grande partie des démonstrations des propositions de géométrie, et servent à résoudre une infinité de problêmes sur les nombres: elles méritent donc d'être étudiées avec le plus grand soin. Dorénavant il ne sera presque jamais question des proportions arithmétiques; en conséquence, quand il s'agira d'une proportion, nous nous dispenserons de dire qu'elle est géométrique, mais on le sous-entendra toujours, à moins qu'il ne soit fait mention qu'elle est arithmétique. Cette convention abrégera le discours.

131. Si les quatre quantités a, b, c et d sont telles, que le rapport de la première à la seconde soit égal à celui de la troisième à la quatrième, c'est-à-dire, si la première a divisée par la seconde b donne une quotient égal à la troisième c divisée par la quatrième d, ces quatre quantités formeront une proportion, puisque (n°. 123) une proportion n'est autre chose que la comparaison de deux rapports égaux.

On écrira cette proportion de cette manière : $a : b :: c : d$, en mettant deux points pour séparer les deux termes de chaque rapport, et quatre points pour séparer les deux rapports, afin de distinguer les proportions géométriques de celles arithmétiques. On énonce les proportions géométriques de la même manière que celles arithmétiques; ainsi dans la proportion $a : b :: c : d$, on dira *a est à b comme c est à d*, ou a est par rapport à b ce que c est par rapport à d.

On appliquera aux proportions géométriques les définitions que nous avons données au n°. 125 sur les termes des proportions arithmétiques.

132. *Dans toutes proportions le produit des deux termes extrêmes est égal à celui des deux termes moyens.*

En effet, soit $a : b :: c : d$, je dis que $ad = bc$; car le rapport de a à b étant le même que celui de c à d, le facteur a du premier produit est autant de fois plus grand que le facteur b du second, que le facteur d du premier

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

produit est de fois plus petit que le facteur c du second: il y a donc compensation entre les facteurs de ces deux produits; donc ils sont égaux; donc, etc.

133. *Si les quatre quantités a, b, c et d sont telles que le produit des deux extrêmes soit égal à celui des deux moyennes, ces quatre quantités formeront une proportion.*

En effet, ad ne peut égaler bc, à moins qu'il n'y ait compensation entre les facteurs de ces deux produits, c'est-à-dire à moins que le facteur a du premier produit étant un certain nombre de fois plus grand que le facteur b du second, le facteur d du premier produit ne soit le même nombre de fois plus petit que le facteur c du second, ou *vice versa*. Or, ces deux produits sont égaux; donc le rapport de a à b est le même que celui de c à d; donc enfin les quatre quantités a, b, c et d formeront la proportion $a : b :: c : d$.

Il suit de ces deux propositions que, pour s'assurer que quatre quantités forment une proportion, il suffira, ou de s'assurer que les deux rapports sont égaux, ou que le produit des deux termes moyens est égal à celui des deux termes extrêmes; car l'une de ces conditions entraîne nécessairement l'autre.

134. Puisque dans une proportion le produit des deux moyens est égal à celui des deux extrêmes, il est clair que l'un des extrêmes est égal au produit des deux moyens divisé par l'autre extrême; et l'un des moyens est égal au produit des deux extrêmes divisé par l'autre moyen. Car on peut prendre le produit des moyens pour celui des extrêmes, ou celui des extrêmes pour celui des moyens; or, quand on connaît un nombre et l'un de ces facteurs, la division fait découvrir l'autre; donc, etc.

Ainsi, par exemple, si l'on représente par x le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers seraient 3, 15 et 9, on aura

$3 : 15 :: 9 : x$, et $x = \frac{15 \times 9}{3} = 15 \times 3 = 45$.

Si l'on donnait les deux extrêmes, et l'un des moyens, l'autre moyen étant représenté par x, on aurait $3 : 15 :: x : 45$, et $x = \frac{3 \times 45}{15} = 3 \times 3 = 9$.

135. On peut écrire une même proportion des huit manières suivantes:

$$a : b :: c : d$$
$$a : c :: b : d$$
$$c : a :: d : b$$
$$c : d :: a : b$$
$$d : c :: b : a$$
$$d : b :: c : a$$
$$b : d :: a : c$$
$$b : a :: d : c$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

c'est-à-dire que, *dans une proportion on peut changer les termes moyens de place, en les laissant toujours aux moyens, mettre les moyens à la place des extrêmes, et les extrêmes à la place des moyens, et changer les extrêmes de place, en les laissant toujours aux extrêmes.* Mais dans tous ces changemens les deux moyens doivent rester aux moyens, et les deux extrêmes aux extrêmes, ou bien, si l'on met les moyens à la place des extrêmes, et les extrêmes à la place des moyens, il faut que les moyens passent tous les deux aux extrêmes, et les extrêmes tous les deux aux moyens.

En effet, ces huit changemens ne troubleront pas la proportion, puisque le produit des moyens égalera toujours celui des extrêmes, car ces produits seront toujours formés par les mêmes facteurs; or, primitivement ces produits étaient égaux, puisque les quatre quantités a, b, c et d formaient une proportion; donc, etc.

136. *Dans toute proportion on peut multiplier l'un des termes moyens et l'un des termes extrêmes par le même nombre sans troubler cette proportion.*

Supposons qu'il s'agisse de la proportion $a : b :: c : d$: je dis qu'on pourra multiplier par la quantité m l'un quelconque des extrêmes, et l'un quelconque des moyens de cette proportion sans l'altérer; c'est-à-dire qu'on aura $am : bm :: c : d$, ou $am : b :: cm : d$, ou $a : bm :: c : dm$, ou enfin $a : b :: cm : dm$.

En effet, multiplier l'un des extrêmes par m, c'est rendre le produit des extrêmes m de fois plus grand, et multiplier l'un des moyens par la même quantité m, c'est rendre le produit des moyens le même nombre de fois plus grand; mais ces deux produits étaient égaux primitivement, puisqu'il y avait proportion entre les quatre quantités a, b, c et d; donc ils le sont encore; donc enfin, etc.

L'inverse de cette proposition a évidemment lieu, c'est-à-dire *qu'on peut diviser un extrême et un moyen d'une proportion par le même nombre sans altérer cette proportion.*

137. *Si deux proportions ont un rapport commun, les deux autres rapports formeront une proportion.*

En effet, les deux autres rapports étant égaux à un troisième, sont égaux entre eux, donc ils formeront une proportion.

Ainsi, par exemple, si l'on a $a : b :: c : d$, $a : b :: e : f$, on aura $c : d :: e : f$.

138. *Si l'on a deux proportions, en les multipliant terme à terme, on aura quatre produits qui seront en proportion.*

Soient $a : b :: c : d$, et $e : f :: g : h$; si on les multiplie terme à terme, on aura $ae : bf :: cg : dh$....(1)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, les deux proportions proposées donnent $ad=bc$ et $eh=fg$; mais si l'on multiplie ces deux égalités membre à membre, on aura $adeh=bcfg$; or ces deux produits égaux ne sont autre chose, le premier que le produit des deux extrêmes des quatre nombres (1), et le second le produit des deux moyens des mêmes quatre nombres : c'est quatre nombres (1) sont donc en proportion; ce qu'il fallait démontrer.

Si les deux proportions données ont deux termes communs, l'un aux extrêmes dans la première ou la seconde proportion, et l'autre aux moyens dans l'autre proportion, en faisant le produit de ces deux proportions terme à terme, on pourra faire abstraction de ces termes communs.

Soient, en effet, les deux proportions $a:b::c:d$, $b:e::f:g$; en les multipliant terme à terme on aura $ab:be::cf:dg$. Mais les deux termes du premier rapport peuvent être divisés par b (n°. 136): on aura donc $a:e::cf:dg$, où l'on voit qu'on a fait abstraction du terme b qui est aux moyens dans la première proportion, et aux extrêmes dans la seconde.

De là résulte que si l'on avait $a:b::c:d$, $b:e::d:f$, en multipliant ces deux proportions par ordre, on aurait $a:e::c:f$, à cause des termes communs b et d aux moyens et aux extrêmes de ces deux proportions.

Il est évident que l'inverse de cette proposition a lieu, c'est-à-dire *qu'en divisant deux proportions terme à terme, on aura quatre quotiens qui formeront une proportion.*

139. Puisque le produit de deux proportions multipliées par ordre est une proportion; en multipliant, de cette manière, une proportion par elle-même, celle-ci $a:b::c:d$, par exemple, le produit $a^2:b^2::c^2:d^2$, sera une proportion; *d'où il suit qu'on peut élever tous les termes d'une proportion au carré sans troubler cette proportion.*

En multipliant par ordre successivement une proportion par elle-même, on obtiendrait $a^3:b^3::c^3:d^3$, $a^4:b^4::c^4:d^4$,.... et en général $a^n:b^n::c^n:d^n$; c'est-à-dire qu'on peut élever *à la même puissance* tous les termes d'une proportion sans la troubler.

La réciproque de cette proposition a évidemment lieu; c'est-à-dire qu'on peut extraire la racine du *même degré* de tous les termes d'une proportion sans la troubler. Ainsi, par exemple, si l'on avait $a:b::c:d$, on aurait aussi $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}::\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$.

140. Soit la proportion $a:b::c:d$: *Je dis que la somme des deux premiers termes est à celle des deux derniers, comme le premier antécédent est au second, ou comme le premier conséquent est au second.* C'est-à-dire qu'on aura $a+b:c+d::a:c$ ou $a+b:c+d::b:d$.... (1)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, si l'on fait le produit des moyens et celui des extrêmes dans la seconde de ces deux expressions, on aura pour celui des extrêmes $ad+bd$, et pour celui des moyens $bc+bd$. Or ces deux produits sont égaux, car ils ont un terme commun bd, et les termes ad, bc sont égaux comme étant, l'un le produit des extrêmes, et l'autre celui des moyens de la proportion donnée; donc la seconde des expressions ci-dessus est une proportion. On démontrerait de même que la première en est une aussi.

141. Si l'on change les moyens de place dans la proportion donnée $a:b::c:d$, on aura $a:c::b:d$..... (2), et si l'on compare cette proportion (2) à celles (1) (n°. 140), on verra que *la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.*

142. *Dans toute proportion, la différence des deux premiers termes est à celle des deux derniers, comme le premier antécédent est au second, ou comme le premier conséquent est au second.*

Ainsi, si l'on a $a:b::c:d$, on aura aussi

$$a-b:c-d::a:c \text{ ou } a-b:c-d::b:d \text{..... (1).}$$

En effet, si l'on fait le produit des moyens et celui des extrêmes dans chacune de ces expressions, on aura, dans la première, les produits $ac-bc$ et $ac-ad$; or, ces produits ont le terme ac commun, et les termes bc et ad, qui ont le même signe, sont égaux comme étant les produits, le premier des moyens, et le second des extrêmes de la proportion donnée; ces deux produits sont donc égaux, et par conséquent la première des expressions (1) est une proportion. On démontrerait de même que la seconde en est une aussi.

143. Puisqu'ayant $a:b::c:d$, on a $a-b:c-d::b:d$, et (n°. 140) $a+b:c+d::b:d$, à cause du rapport commun $b:d$, il s'ensuit (n°. 137) que $a-b:c-d::a+b:c+d$; c'est-à-dire que *la différence des deux premiers termes est à celle des deux derniers, comme la somme des deux premiers est à celle des deux derniers.*

144. Si nous changeons les moyens de place dans la proportion $a:b::c:d$, ce qui donnera $a:c::b:d$; comme nous avons trouvé (n°. 142) que $a-b:c-d::b:d$; en comparant ces deux dernières proportions, on verra que, *la différence des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.*

145. Enfin, si l'on compare la proportion $a:c::b:d$ à celle $a-b:c-d::a+b:c+d$ trouvée n°. 143, on verra que, *la différence des antécédens est à celle des conséquens, comme la somme des antécédens est à celle des conséquens.*

*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

12^me. LEÇON.

Des Progressions.

146. On appelle *progression* une suite ou *série* de nombres tels, qu'étant arrangés sur la même ligne, le rapport de deux nombres consécutifs de cette série est toujours le même, quelque part d'ailleurs qu'on prenne ces deux nombres dans la progression. Chacun des nombres qui forment une progression s'appelle *terme*. Le premier terme est celui qui est à gauche.

Comme il y a deux espèces de rapports, il est clair qu'il doit aussi y avoir deux espèces de progressions : quand le rapport de deux termes consécutifs quelconques est arithmétique ou par différence, la progression est *arithmétique* ou *par différence;* et, quand ce rapport est géométrique ou par quotient, la progression est *géométrique* ou *par quotient.*

147. Pour indiquer qu'une série de nombres est une progression arithmétique, on fait précéder le premier terme du signe $\dot{-}$, et on sépare les termes par un point. Ainsi, par exemple, pour indiquer que les nombres a, b, c, d, e, f, g, h sont en progression arithmétique, on écrira

$$\dot{-}\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f \,.\, g \,.\, h.$$

S'il s'agissait d'indiquer qu'une série de nombre est une progression géométrique, on ferait précéder le premier du signe $\dot{-}\dot{-}$, et on séparerait les termes par deux points. Ainsi, par exemple, pour indiquer que les nombres a, b, c, d, e, f, g, h sont en progression géométrique, on écrira

$$\dot{-}\dot{-}\, a : b : c : d : e : f : g : h.$$

148. L'expression du rapport des termes consécutifs d'une progression quelconque se nomme *la raison.* Dans la progression arithmétique $\dot{-}\, 2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 14 \,.\, 17 \,.\, 20 \,.\, 23 \,.\, 26 \,.\, 29$, la raison est 3, car si l'on considère deux termes consécutifs quelconques, on trouvera leur différence égale à trois; et dans la progression géométrique

$$\dot{-}\dot{-}\, 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512,$$

la raison est 2, car le quotient de deux termes consécutifs quelconques est 2.

149. Une progression arithmétique est *croissante* quand ses termes vont en augmentant en allant de gauche à droite; et, elle est *décroissante*, au contraire, quand ses termes, pris dans le même ordre, vont en diminuant.

Quand la progression est croissante, la raison *est positive;* et quand elle est décroissante, la raison est *négative*, parce que, quand la progression est croissante, le second terme égale le premier plus la raison, le troisième égale

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le second plus la raison, le quatrième égale le troisième plus la raison, et ainsi de suite; et quand la progression est décroissante, le second terme égale le premier moins la raison, le troisième égale le second moins la raison, et ainsi des autres.

La progression arithmétique ci-dessus (n°. 148) est croissante, et celle-ci $\div$ 26 . 24 . 22 . 20 . 18 . 16 . 14 . 12 . 10 . 8 est décroissante. Dans la première la raison est $+3$, et dans cette dernière la raison est -2.

150. Une progression géométrique est *croissante* quand ses termes vont en augmentant en allant de gauche à droite; et, elle est décroissante, au contraire, quand ses termes, pris dans le même ordre, vont en diminuant.

Quand la progression est croissante, la raison est plus grande que l'unité et est entière ou fractionnaire, et quand elle est décroissante la raison est plus petite que l'unité.

La progression géométrique ci-dessus (n°. 148) est croissante, et celle-ci $\div$ 256 : 64 : 16 : 4 : 1 est décroissante. Dans la première la raison est 2, et dans la seconde la raison est $\frac{1}{4}$.

151. Dans une progression, soit arithmétique, soit géométrique, il y a cinq choses à considérer : *le premier terme, la raison, le nombre des termes, le dernier terme*, et *la somme de tous les termes*. Trois de ces cinq choses étant données comme on voudra, on pourra toujours découvrir les deux autres (ainsi que nous le verrons par la suite), et cela, sans avoir besoin d'écrire la progression d'un bout à l'autre.

Il suit de là qu'une progression, arithmétique ou géométrique, donne lieu à autant de question qu'il y a de manières de demander cinq choses 2 à 2, en observant que l'ordre dans lequel deux mêmes choses sont demandées ne change point la question. En effet, si l'on demande le premier et le dernier terme, par exemple, peu importe qu'on demande d'abord le premier et ensuite le dernier, ou d'abord le dernier et ensuite le premier : la question restera toujours la même.

Il y aura donc autant de questions possibles dans une progression, que l'on peut faire de produits 2 à 2 avec cinq facteurs; c'est-à-dire que le nombre de questions possibles sera (n°. 65) $\frac{5\times4}{1\,.\,2}=10$, et en représentant par p le premier terme d'une progression, par r la raison, par n le nombre des termes, par d le dernier terme et par s la somme de tous les termes, les inconnues dans ces dix questions seront respectivement

(n°. 66)..... pr, pn, pd, ps, rn, rd, rs, nd, ns et ds

et les données... nds, rds, rns, rnd, pds, pns, pnd, prs, prd et prn.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La solution de ces dix questions dépend de deux formules pour chaque espèce de progressions, que nous allons donner.

Formules relatives aux Progressions arithmétiques.

152. Appelons r la raison, quelle qu'elle soit, positive ou négative; d'après la nature des progressions arithmétiques (n°. 146) il est clair que dans la progression $\dot{-}\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ d\ .\ e\ .\ f\ .\ g\ .\ h$, on aura $a=a$, $b=a+r$, $c=b+r$, $d=c+r$, $e=d+r$, $f=e+r$, $g=f+r$ et $h=g+r$. Or, de là résulte que 1°. $a=a$; 2°. $b=a+r$; 3°. $c=a+2r$, car pour avoir c il faut ajouter r à b, qui est égal à $a+r$; 4°. $d=a+3r$, car pour avoir d il faut ajouter r à c, qui est égal $a+2r$; 5°. $e=a+4r$, car pour avoir e il faut ajouter r à d, qui est égal à $a+3r$; 6°. $f=a+5r$, car pour avoir f il faut ajouter r à e, qui est égal à $a+4r$; 7°. $g=a+6r$, car pour avoir g il faut ajouter r à f, qui est égal à $a+5r$ et 8°. $h=a+7r$, car pour avoir h il faut ajouter r à g, qui est égal à $a+6r$. Donc, les termes successifs d'une progression arithmétique quelconque se composent du premier terme et de la raison, de manière *que, le* 1^er^. *terme se compose de lui-même, et ne renferme point la raison; le* 2^me^. *terme se compose du* 1^er^. *plus une fois la raison; le* 3^me^. *terme se compose du* 1^er^. *plus* 2 *fois la raison; le* 4^me^. *terme se compose du* 1^er^. *plus* 3 *fois la raison*, et ainsi de suite pour les autres; de sorte que *le* n^{me}. *terme se compose du* 1^er^. *plus la raison un nombre de fois marqué par* $n-1$. Si donc le n^{me}. terme est le dernier de la progression, en appelant d ce dernier terme, p le premier, et r la raison, on aura

$$d=p+r\,(n-1)\ldots\ldots\ (a)$$

c'est-à-dire que, *le dernier terme d'une progression arithmétique quelconque est égal au premier terme plus la raison multipliée par le nombre des termes moins* 1.

Quand la raison est négative, c'est-à-dire quand la progression est décroissante (n°. 149), la formule (a) devient

$$d=p-r\,(n-1);$$

de sorte que, dans ce cas, *le dernier terme de la progression est égal au premier terme* moins *la raison multipliée par le nombre des termes moins* 1.

Supposons la progression

$$(b)\ldots\ldots\ \dot{-}\ 3\ .\ 8\ .\ 13\ .\ 18\ .\ 23\ .\ 28\ .\ 33\ .\ 38\ .\ 43\ .\ 48,$$

dans laquelle le premier terme est 3, la raison 5 et le nombre des termes 10. Si, sans écrire tous les termes de cette progression, on voulait avoir directement le dernier terme qui est 48, dans la formule (a), on ferait $p=3$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$r=5$ et $n=10$, ce qui donnerait $d=3+5\times(10-1)=3+5\times 9=3+45=48$. Ce qui confirme la vérité de la formule (a).

Cette formule ne donne pas seulement la valeur du dernier terme, mais encore celle du premier, de la raison et le nombre des termes de la progression, quand on connaît les trois autres choses.

Supposons, par exemple, qu'on nous demande le premier terme de la progression (b), sachant que la raison $r=5$, le nombre des termes $n=10$, et le dernier terme $d=48$; on mettra 5 à la place de r, 10 à la place de n et 48 à la place de d dans la formule (a), et on aura $48=p+5\times(10-1)=p+5\times 9$, d'où l'on voit que $48=p+45$. Or, si à p il faut ajouter 45 pour avoir 48, il est clair que p est la différence entre 48 et 45, c'est-à-dire que $p=48-45=3$; ce qui s'accorde avec la progression (b).

Si l'on demande la raison, et que l'on donne le dernier terme $d=48$, le premier terme $p=3$, et le nombre des termes $n=10$, on mettra respectivement 48, 3, 10 à la place de d, de p et de n dans la formule (a), et on aura $48=3+r(10-1)=3+9r$. Or, si à $9r$ il faut ajouter 3 pour avoir 48, $9r$ égaleront $48-3$, de sorte que $9r=48-3=45$. Mais si $9r$ égalent 45, un r égalera le 9^{me}. de 45, c'est-à-dire que $r=\frac{45}{9}=5$, ce qui s'accorde encore avec la progression (b).

Enfin, supposons que l'on demande le nombre des termes de la progression (b), sachant que le premier terme $p=3$, la raison $r=5$ et le dernier terme $d=48$, on mettra respectivement 3, 5 et 48 à la place de p, de r et de d dans la formule (a), et on aura $48=3+5(n-1)$: d'où l'on voit qu'à 5 fois le nombre des termes moins 1, il faudrait ajouter 3 pour égaler 48; si donc on retranchait 3 de 48, le reste 45 serait 5 fois le nombre des termes moins 1, de sorte qu'on aurait $5(n-1)=45$. Mais si 5 fois le nombre des termes moins 1 égalent 45, il est clair que une fois le nombre des termes moins 1 sera égale au 5^{me}. de 45; c'est-à-dire qu'on aura $n-1=\frac{45}{5}=9$; donc $n=10$; ce qui s'accorde encore avec la progression (b).

153. Supposons, à présent, qu'il s'agisse d'avoir la somme de tous les termes de la progression arithmétique $\div a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,e\,.\,f\,.\,g\,.\,h$. Pour cela, soit S cette somme; nous aurons

$$S=a+b+c+d+e+f+g+h$$
$$\text{ou } S=h+g+f+e+d+c+b+a$$

en renversant l'ordre des termes, ce qui ne change point la somme.

Réunissons ces deux sommes terme à terme dans l'ordre suivant lequel

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

elles sont écrites, en enfermant les termes 2 à 2 entre parenthèses, ce qui ne changera rien à la somme, et nous aurons

$$2S=(a+h)+(b+g)+(c+f)+(d+e)+(e+d)+(f+c)+(g+b)+(h+a).$$

Je dis maintenant que toutes ces parenthèses sont égales entre elles.

En effet, la première se compose du premier et du dernier terme; c'est-à-dire du terme qui ne contient pas du tout la raison, et de celui qui la contient le plus de fois. Mais la seconde se compose du second et de l'avant dernier terme; or le second terme est plus grand que le premier d'une fois la raison, et l'avant dernier terme est plus petit que le dernier de la même quantité : il y a donc compensation entre les termes des deux premières parenthèses; donc elles sont égales. En continuant le même raisonnement, on démontrerait que toutes les parenthèses sont égales entre elles: leur somme sera donc égale à l'une d'elles, à la première, par exemple, multipliée par le nombre qu'il y en a. Or il est évident qu'il y en a autant que de termes dans la progression; soit n ce nombre des termes, d'après ce qui vient d'être dit on aura $2S=n(a+h)$. Mais a est le premier et h le dernier terme de la progression; mettons les initiales p et d des noms de ces termes à la place de a et h, et nous aurons $2S=n(p+d)$, et par conséquent

$$S=\frac{n(p+d)}{2} \quad \ldots\ldots (c)$$

Il suit de cette formule, *que la somme de tous les termes d'une progression arithmétique est égale au nombre des termes de la progression multiplié par la somme du premier et du dernier terme, le tout divisé par* 2.

Supposons, en effet, qu'il s'agisse toujours de la progression arithmétique (b) (n°. 152), dans laquelle le premier terme $p=3$, le dernier $d=48$, et le nombre des termes $n=10$; si, dans la formule (c) on met respectivement 3, 48 et 10 à la place de p, de d et de n, on aura $S=\frac{10(3+48)}{2}=\frac{10\times 51}{2}=5\times 51=255$. Ainsi la somme des termes de la progression (b) dont il s'agit est 255. C'est effectivement ce qu'on peut vérifier en faisant la somme des termes de cette progression (b) par la règle ordinaire.

Pour résoudre les dix questions (n°. 151) auxquelles peut donner lieu une progression arithmétique quelconque, il suffirait de combiner ensemble les deux formules $d=p+r(n-1)$, $S=\frac{n(p+d)}{2}$; mais ces combinaisons exigeraient que nous connussions la théorie de l'élimination pour les équations du premier degré, théorie que nous développerons incessamment après avoir donné les formules relatives aux progressions géométriques et la théorie des logarithmes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Formules relatives aux Progressions géométriques.

154. Supposons la progression géométrique $\dot{\dot{\cdot}}\; a : b : c : d : e : f : g : h$. D'après la nature de cette espèce de progressions (n°. 146), nous aurons $a = a$, $b = ar$, $c = br$, $d = cr$, $e = dr$, $f = er$, $g = fr$ et $h = gr$. De là il résulte que, 1°. $a = a$; 2°. $b = ar$; 3°. $c = ar^2$, car pour avoir c il faut multiplier b par r, et $b = ar$; 4°. $d = ar^3$, car pour avoir d il faut multiplier c par r, et $c = ar^2$; 5°, $e = ar^4$, car pour avoir e il faut multiplier d par r, et $d = ar^3$, et ainsi de suite pour les autres termes.

Il suit de là que les termes d'une progression géométrique se composent du premier terme et de la raison ; de manière que le premier terme ne renferme point la raison; le second terme se compose du premier, multiplié par la première puissance de la raison ; le troisième terme se compose du premier, multiplié par la deuxième puissance de la raison ; le quatrième se compose du premier multiplié par la troisième puissance de la raison, et ainsi de suite ; de sorte que le n^{me}. terme se compose du premier, multiplié par la raison à la puissance marquée par $n-1$. Si donc le n^{me}. terme était le dernier, en appelant d ce dernier terme, p le premier et r la raison, on aurait

$$d = pr^{n-1} \ldots\ldots (d).$$

D'où il suit que *le dernier terme d'une progression géométrique est égal au premier terme multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes de la progression moins un.*

Supposons qu'il s'agisse de la progression géométrique

$$\dot{\dot{\cdot}}\; 2 : 6 :: 18 : 54 : 162 : 486 : 1458 : 4374 \ldots\ldots (e)$$

dans laquelle le premier terme $p = 2$, la raison $r = 3$, et le nombre des termes $n = 8$; voyons si en effet la formule (d) nous donnera directement le dernier terme qui est 4374, en y mettant 2, 3 et 8 respectivement à la place de p, de r et de n. Si l'on effectue ces substitutions, on aura $d = 2 \times 3^{8-1} = 2 \times 3^7$. Elevons donc 3 à la 7^{me}. puissance, ce qui nous donnera 2187, qui, multiplié par 2, donnera 4374 pour le second membre de l'égalité $d = 2 \times 3^7$; donc, $d = 4374$, ce qui s'accorde en effet avec la progression (e).

On vérifierait de même que la formule (d) donne directement, non-seulement le dernier terme, mais aussi le premier, la raison et le nombre des termes, pourvu que l'on connaisse les trois autres quantités que cette formule renferme. Mais comme les logarithmes simplifient beaucoup les calculs et que même il est impossible d'avoir directement le nombre des termes sans employer les logarithmes, nous attendrons que nous ayons exposé la théorie de ces nombres pour faire cette vérification.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

155. Supposons, à présent, qu'il s'agisse d'avoir la somme de tous les termes de la progression géométrique $\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a : b : c : d : e : f : g : h$. En appelant S cette somme, nous aurons $S = a + b + c + d + e + f + g + h$.....(1).

Si maintenant on multiplie par r les deux membres de cette égalité, on aura (2)..... $rS = ar + br + cr + dr + er + fr + gr + hr$. Retranchons membre à membre l'égalité (1) de l'égalité (2), et nous aurons :

$$(r-1)S = \left\{ \begin{array}{l} ar + br + cr + dr + er + fr + gr + hr \\ -a - b - c - d - e - f - g - h \end{array} \right\} \therefore \text{(3)}.$$

Mais (n°. 154), $b = ar$, $c = br$, $d = cr$, $e = dr$, $f = er$, $g = fr$ et $h = gr$; donc $-b$ détruira ar, $-c$ détruira br, $-d$ détruira cr, $-e$ détruira dr, $-f$ détruira er, $-g$ détruira fr et $-h$ détruira gr; il ne restera donc que $hr - a$ dans le second membre de l'égalité (3); donc $(r-1)S = hr - a$; mais h est le dernier et a le premier terme de la progression; mettons les initiales d et p des noms de ces termes, et nous aurons $(r-1)S = rd - p$, et par conséquent $S = \dfrac{dr-p}{r-1}$.

Il suit de là que *la somme de tous les termes d'une progression géométrique est égale au dernier terme multiplié par la raison, moins le premier terme, et le tout divisé par la raison moins un.*

Supposons toujours la progression (*e*) (n°. 154) dans laquelle le premier terme $p = 2$, le dernier $d = 4374$, et la raison $r = 3$; en mettant respectivement 2, 4374, et 3 à la place de p, de d et de r, on aura $S = \dfrac{4374 \times 3 - 2}{3-1} = \dfrac{4374 \times 3 - 2}{2}$ ou $S = \dfrac{13122 - 2}{2}$, en faisant la multiplication de 4374 par 3, et enfin, en retranchant 2 au numérateur et divisant par le dénominateur, on aura $S = \dfrac{13120}{2} = 6560$. C'est effectivement ce qu'on trouverait, si l'on faisait la somme de tous les termes de la progression (*e*) par la règle ordinaire.

Pour résoudre les dix questions (n°. 151) auxquelles peut donner lieu une progression géométrique quelconque, il suffirait de combiner entre elles les deux formules $d = pr^{n-1}$, $S = \dfrac{dr-p}{n-1}$; mais ces combinaisons exigeraient non-seulement que nous connussions la théorie de l'élimination pour les équations du premier degré, mais encore la résolution des équations numériques de tous les degrés, car quelques-unes de ces questions conduisent à des équations d'un degré marqué par le nombre des termes de la progression.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

13^me. LEÇON.

Des Logarithmes.

156. On appelle *logarithmes*, l'EXPOSANT de la puissance à laquelle il faut élever un nombre *invariable* pour avoir un nombre *donné*. Ainsi, par exemple, si x est l'exposant de la puissance à laquelle il faudrait élever le nombre invariable a, pour avoir un nombre donné y, on aurait l'égalité $a^x = y$, et x serait le logarithme de y.

Pour indiquer que x est le logarithme de y, on met devant le nombre y les trois premières lettres log. du mot logarithme, ou seulement l'initiale l, suivie d'un point. De sorte que $x = \log. y$ ou $x = \text{l}. y$, signifie que x est le logarithme de y. Le nombre invariable a, est ce qu'on appelle la base des logarithmes. Cette base peut être prise à volonté; si elle est 10, le système de logarithmes auquel elle donne lieu est dit *décimal :* c'est le système le plus commode et à peu près le seul en usage. Il y en a un autre pourtant qui entre fréquemment dans les calculs analytiques et qui est connu sous le nom de système *népérien*, dont la base, ordinairement représentée par e, est un nombre irrationnel égal à 2,7182818, à moins d'un dix-millionième près. Quoique la base e soit un nombre irrationnel, il est plus facile de calculer les logarithmes d'après cette base que d'après toute autre.

Aussi, pour calculer les logarithmes d'après une base quelconque, d'après la base 10, par exemple, on les calcule d'abord d'après le système népérien, et ensuite, au moyen d'un nombre qu'on appelle le *module*, et qu'il faut calculer pour le système auquel on veut passer, on obtient, par une seule multiplication, les logarithmes demandés. Comme notre objet n'est pas de faire un cours complet d'algèbre, mais seulement d'apprendre ce qui nous est nécessaire de savoir de cette science, et comme d'ailleurs on a des tables de logarithmes imprimées, assez étendues pour nos besoins, nous ne nous occuperons point de les calculer.

Les logarithmes sont des nombres qui jouissent de propriétés de la plus haute importance : ils donnent 1°. les moyens de changer les multiplications en additions; 2°. les divisions en soustractions; 3°. les élévations aux puissances en une seule multiplication; 4°. les extractions des racines en une simple division, et 5°. il est des questions qu'on ne saurait résoudre sans les logarithmes, du moins d'une manière directe.

157. 1°. Pour démontrer que les logarithmes donnent le moyen de changer les multiplications en addition, supposons que $x = \text{l}. y$ et $x' = \text{l}. y'$: on aura $a^x = y$ et $a^{x'} = y'$. Multiplions ces deux égalités membre à membre et nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aurons (n°. 25) $a^{x+x'}=yy'$. Mais d'après la définition des logarithmes, l'exposant $x+x'$ du nombre invariable a est le logarithme du nombre yy'; on aura donc $x+x'=\text{l}.yy'$. Or, $x=\text{l}.y$, et $x'=\text{l}.y'$; donc $\text{l}.y+\text{l}.y'=\text{l}.yy'$.

Il suit de là que la somme des logarithmes des facteurs d'un produit est égale au logarithme du produit.

Cette proposition a lieu quelque soit le nombre des facteurs du produit.

En effet, soient $x=\text{l}.y$, $x'=\text{l}.y'$, $x''=\text{l}.y''$, etc.; on aura $a^x=y$, $a^{x'}=y'$ et $a^{x''}=y''$, ... Si donc on multiplie membre à membre toutes ces égalités, on aura $a^{x+x'+x''\ldots}=yy'y''\ldots$, et par conséquent $x+x'+x''\ldots=\text{l}.yy'y''\ldots$, ou $\text{l}.y+\text{l}.y'+\text{l}.y''\ldots=\text{l}.yy'y''\ldots$.

Si donc on savait trouver dans les tables le logarithme d'un nombre quelconque, et le nombre d'un logarithme quelconque, on pourrait faire la multiplication de tant de facteurs qu'on voudrait par une simple addition.

158. 2°. Les logarithmes donnent le moyen de changer les divisions en soustractions. Supposons, en effet, que $x=\text{l}.y$, et $x'=\text{l}.y'$; nous aurons $a^x=y$, $a^{x'}=y'$, et par conséquent (n°. 35) $a^{x-x'}=\frac{y}{y'}$, en divisant ces deux égalités membre à membre; donc (n°. 156) $x-x'=\text{l}.\frac{y}{y'}$ ou $\text{l}.y-\text{l}.y'=\text{l}.\frac{y}{y'}$.

Il suit de là *qu'en retranchant le logarithme du diviseur de celui du dividende, le reste sera le logarithme du quotient.* Si donc on savait trouver dans les tables le logarithme d'un nombre quelconque, et le nombre d'un logarithme quelconque; au moyen de ces tables on pourrait faire la division par soustraction.

159. 3°. Supposons que $x=\text{l}.y$, nous aurons $a^x=y$. Si nous élevons les deux membres de cette égalité à la n^{me}. puissance, nous aurons $a^{nx}=y^n$, et par conséquent $nx=\text{l}.y^n$; mais $x=\text{l}.y$, donc $n\,\text{l}.y=\text{l}.y^n$.

Il suit de là que *le logarithme de la n^{me}. puissance d'un nombre, est égal au logarithme de ce nombre, multiplié par l'exposant n de la puissance.* Au moyen des tables qui donnent les logarithmes des nombres et les nombres des logarithmes, on pourra donc élever un nombre quelconque à la puissance qu'on voudra, par une seule multiplication.

160. 4°. Supposons toujours que $x=\text{l}.y$, et que, par conséquent, $a^x=y$; si nous extrayons la racine n^{me}. de chaque membre de cette égalité, nous aurons $\sqrt[n]{a^x}=\sqrt[n]{y}$, ou (n°. 77) $a^{\frac{x}{n}}=\sqrt[n]{y}$; donc $\frac{x}{n}=\text{l}.\sqrt[n]{y}$, ou $\frac{\text{l}.y}{n}=\text{l}.\sqrt[n]{y}$.

Il suit de là que *le logarithme du nombre donné, divisé par l'indice du radical, est égal au logarithme de la racine.* D'où l'on voit que l'extraction des racines se réduit à de simples divisions.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

161. 5°. Enfin nous avons dit que sans les logarithmes il y aurait des questions qu'on ne saurait résoudre.

En effet, si l'on demandait, par exemple, le nombre des termes d'une progression géométrique dont on connaîtrait le premier terme, le dernier et la raison; dans la formule $d = pr^{n-1}$ (n°. 154); on mettrait à la place de d, de p et de r, les valeurs données du dernier terme, du premier et de la raison, et il ne resterait plus que $n - 1$ à déterminer, n étant le nombre des termes demandé.

Supposons donc que $d = 512$, $p = 2$ et $r = 2$; en substituant, on aura $512 = 2 \times 2^{n-1}$, et en divisant par 2 de part et d'autre, $256 = 2^{n-1}$; d'où l'on voit que 256 est un nombre égal à 2 élevé à une puissance inconnue; or, aucun des principes de calcul donnés jusqu'ici ne peut évidemment nous conduire à trouver directement à quelle puissance il faut élever 2 pour avoir 256; mais l'exposant inconnu $n-1$ n'est autre chose que le logarithme de 256, 2 étant la base des logarithmes. Donc cette question ne peut se résoudre que par le moyen des logarithmes. Cependant si 256 est une puissance complète de 2, en multipliant 2 par lui-même un nombre de fois suffisant pour que le dernier produit fût égal à 256, on aurait $n - 1$, en tenant compte du nombre de fois que 2 serait facteur dans le dernier produit, ou mieux encore en décomposant le nombre 256 en ses facteurs simples. Mais, dans le cas où 256 ne serait pas une puissance complète de 2, on ne pourrait avoir $n - 1$ que par des tâtonnemens très-ennuyeux par leur longueur.

Voici de quelle manière on résout cette question par logarithme.

Prenons la formule $d = pr^{n-1}$; on observera que $\mathrm{l}.r^{n-1} = (n-1)\mathrm{l}.r$ (n°. 159), et que d étant le produit de p par r^{n-1}, $\mathrm{l}.d = \mathrm{l}.p + \mathrm{l}.r^{n-1}$ (n°. 157) et par conséquent $\mathrm{l}.d = \mathrm{l}.p + (n-1)\mathrm{l}.r$. Puisque pour avoir $\mathrm{l}.d$, il faut ajouter $\mathrm{l}.p$ à $(n-1)\mathrm{l}.r$, il est clair que $(n-1)\mathrm{l}.r = \mathrm{l}.d - \mathrm{l}.p$. Divisons de part et d'autre par $\mathrm{l}.r$, et nous aurons $n - 1 = \frac{\mathrm{l}.d - \mathrm{l}.p}{\mathrm{l}.r}$. D'où l'on voit que *le nombre des termes d'une progression géométrique moins* 1 *est égal au logarithme du dernier terme, moins le logarithme du premier, et le tout divisé par le logarithme de la raison.* Ainsi, au moyen des tables des logarithmes, on pourra directement trouver le nombre des termes d'une progression géométrique.

162. Si dans l'équation $a^x = y$, nous faisons $x = 0$, on aura $y = 1$, car (n°. 36) $a^0 = 1$; d'où il suit que $\mathrm{l}.1 = 0$. Si $x = 1$, $y = a$; c'est-à-dire que *le logarithme de la base du système est égal à l'unité*, quelle que soit cette base; car $a^1 = a$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

163. Si la base est 10, et que l'on fasse x respectivement égal à 1, 2, 3, 4,... on aura y respectivement égal à 10, 100, 1000, 10000, etc.

D'où l'on voit que, *dans le système décimal, quand le nombre devient de* 10 *en* 10 *fois plus grand, le logarithme augmente successivement d'une unité; c'est-à-dire que le logarithme renferme autant d'unités qu'il y a de chiffre dans le nombre moins un.*

164. Si dans l'égalité $10^x = y$ on fait x négatif et respectivement égal à 1, 2, 3, 4, 5, etc., on aura y respectivement égal à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc., ou 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, etc.; car (n°. 37) $10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{100}$, $10^{-3} = \frac{1}{1000}$, $10^{-4} = \frac{1}{10000}$, etc.

Il suit de là que *le logarithme d'un nombre décimal plus petit que l'unité est négatif, et renferme autant d'unités qu'il y a de zéros après la virgule pour arriver au premier chiffre significatif décimal* (la base du système de logarithme étant 10).

165. En général, *le logarithme d'une fraction plus petite que l'unité est toujours négatif, et est d'autant plus grand que la fraction est plus petite.* Car, si dans l'égalité $a^x = y$, on fait x négatif, et respectivement égal à 1, 2, 3, 4, etc., y sera respectivement égal à $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, etc., car (n°. 37) $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, etc.

166. Nous avons vu (n°. 162) que $l.1 = 0$, et $l.10 = 1$: il suit donc de là que les logarithmes des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et 9 compris entre 1 et 10 auront des logarithmes >0 et <1. De même, $l.10 = 1$ et $l.100 = 2$; les logarithmes des nombres compris entre 10 et 100 seront donc >1 et <2, etc. Ces logarithmes, plus grands que 0 et plus petits que 1, plus grands que 1 et plus petits que 2, etc., sont des nombres irrationnels et ne peuvent, en conséquence, s'obtenir que par approximation. La partie entière d'un logarithme se nomme *la caractéristique*, et indique combien il y a de chiffres, moins un, dans la partie entière du nombre qui répond au logarithme. Nous ne nous occuperons point de la manière de calculer ces logarithmes irrationnels, parce que, comme nous l'avons déjà dit, des savans utiles ont construit des tables fort étendues, dans lesquelles on trouve, tout calculés, les logarithmes dont on peut avoir besoin dans la pratique; d'ailleurs, ces calculs dépendent d'une série, qui est très-élégante, mais qui nous obligerait à développer la théorie des coefficiens indéterminés, dont nous croyons pouvoir nous passer dans cet ouvrage, dont le sujet spécial réclame, par son étendue, que nous abrégions, autant que possible, la partie purement mathématique; nous renverrons donc

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le lecteur à l'une de ces tables, à celle de Callet, par exemple, en tête desquelles on trouvera l'explication de la manière de trouver le logarithme d'un nombre donné, et le nombre d'un logarithme donné. Nous allons donc supposer que le lecteur sait faire usage de ces tables, et lui donner quelques exemples d'application des logarithmes, afin de lui indiquer la marche à suivre pour acquérir l'habitude nécessaire pour ces sortes de calculs.

167. Supposons, pour premier exemple, qu'il s'agisse de multiplier 345 par 573. On cherchera le logarithme de chacun de ces nombres, et en ouvrant les tables de Callet, on trouvera :

$$1.345 = 2{,}53781910, \text{ et } 1.573 = 2{,}75815462.$$

On ajoutera ces deux logarithmes, pour avoir celui du produit (n°. 157), et on aura $1.(345 \times 573) = 5{,}29597372$. On cherchera enfin, dans les tables, le nombre qui répond à ce logarithme, et on trouvera qu'il est 197685. On trouverait en effet le même nombre en multipliant 345 par 573.

168. Proposons-nous de multiplier 0,487 par 0,579; on prendra les logarithmes de ces nombres dans les tables, en les regardant comme des nombres entiers, et on aura :

$$\begin{aligned} 1.487 &= 2{,}68752896 \\ 1.579 &= 2{,}76267856 \\ \text{et la somme qui} &= 5{,}45020752 \end{aligned}$$

serait le logarithme du produit, si les nombres étaient entiers. On cherchera donc dans les tables le nombre qui répond à ce logarithme, et on trouvera qu'il est 281973; mais comme on a trois décimales à chaque facteur, on doit en avoir six au produit; de sorte que le produit demandé sera 0,281973.

169. Supposons qu'il s'agisse de diviser 197685 par 345; on cherchera le logarithme du dividende et celui du diviseur; on retranchera ce dernier du premier, et on aura (n°. 158) celui du quotient. Ainsi

$$\begin{aligned} \text{de. . . . .} \quad 1.197685 &= 5{,}29597372 \\ \text{on ôtera} \quad 1.345 &= 2{,}53781910 \\ \text{et le reste qui} &= 2{,}75815462 \end{aligned}$$

sera le logarithme du quotient : on cherchera ce logarithme dans les tables, et à côté on trouvera le quotient demandé, qui sera 573.

170. Soit la fraction $\frac{35}{752}$ à développer en décimales; on cherchera le logarithme de 35000 (c'est-à-dire d'un nombre 1000 fois plus grand que le dividende 35) et celui du diviseur 752; et on aura :

$$\begin{aligned} \text{de. . . . .} \quad 1.35000 &= 4{,}54406804 \\ \text{à ôter. . .} \quad 1.752 &= 2{,}87621784 \\ \text{et le reste qui} &= 1{,}66785020 \end{aligned}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sera le logarithme du quotient mille fois trop grand, qu'on cherchera dans les tables, et qu'on trouvera égal à 46,5425; de sorte qu'il faudra rendre ce nombre 1000 fois plus petit pour avoir le quotient demandé, qui sera 0,0465425.

171. Proposons-nous de diviser 0,46 par 0,1467; ce qui revient à diviser 4600 par 1467 (n°. 55 arith.) : on cherchera le logarithme de chacun de ces nombres, et on opérera comme au n°. 169.

172. Pour élever le nombre 7 à la 5me. puissance, on prendra le logarithme de 7, qui est 0,84509804, et (n°. 159) on le multipliera par 5; le produit 4,22549020 sera le logarithme de la puissance qu'on trouvera dans les tables égal à 16807.

173. Si l'on demandait la 3me. puissance de 0,45, on prendrait le logarithme de 45, qui est 1,65321251; on retrancherait 2 unités à la caractéristique de ce logarithme, pour qu'il devienne celui de 0,45, et on aurait $-1+0,65321251$; on multiplierait ce dernier logarithme par l'exposant 3 de la puissance, et on aurait $-3+1,95963753$, ou $-2+0,95963753$. Enfin, on chercherait le nombre qui répond à la partie positive de ce dernier logarithme, qui est 9,1125, et ensuite, à cause de la caractéristique -2, on mettrait deux chiffres de plus au rang des décimales, et on aurait 0,091125 pour le cube demandé, comme on peut s'en assurer en élevant 0,45 au cube par la méthode ordinaire.

174. Proposons-nous d'extraire la racine 11me. du nombre 586768; on cherchera le logarithme de ce nombre, qu'on trouvera être 5,7684664; on divisera ce logarithme par l'indice 11, et on aura 0,5244060 pour le logarithme de la racine demandée, qu'on trouvera, dans les tables, égale à 3,34508, à moins de 0,00001 près.

175. Supposons qu'on nous demande la racine carrée de 2, approchée à moins de 0,0001 près. On prendra le logarithme de 2, qui est 0,3010300, et on le divisera par 2, ce qui donnera 0,1505150 pour le logarithme de la racine demandée, qu'on trouvera, dans les tables, égale à 1,4142.

176. Si l'on demandait la racine carrée du nombre 0,54676, on chercherait le logarithme de 54676, qui est 4,7377967; mais comme 54676 est cent mille fois plus grand que le nombre proposé 0,54676, on ôterait cinq unités à la caractéristique du logarithme, ce qui donnerait $-1+0,7377967$ pour le logarithme du nombre dont on demande la racine carrée. Or, quand on veut approcher de la racine carrée d'un nombre, il faut mettre, à la droite du carré donné, autant de tranches de 2 zéros (n°. 92) qu'on veut avoir de décimales à la racine; si donc on veut avoir une décimale à la racine, il fau-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dra mettre une tranche de 2 zéros à la droite du carré, c'est-à-dire qu'il faudra rendre ce carré cent fois plus grand, et par conséquent ajouter 2 unités à la caractéristique de son logarithme, ce qui donnera —1+2,7377967, ou 1,7377967 pour le logarithme du carré, la racine carrée devant avoir une décimale. Puisqu'il faut extraire la racine carrée, on divisera ce logarithme par 2, et on aura 0,8688983 pour le logarithme de la racine 10 fois trop grande. On cherchera le nombre qui répond à ce dernier logarithme, et on le trouvera égal à 7,39432, et puisque la racine demandée est 10 fois plus petite, cette racine sera 0,739432.

177. Si l'on voulait extraire la racine 7^me. du nombre 0,0438469, on chercherait le logarithme de ce nombre, et on le trouverait égal à —2+0,6419390, eu égard aux unités simples et aux dixièmes qui manquent.

Pour avoir une décimale à la racine 7^me. d'un nombre, il faut mettre une tranche de 7 zéros à la droite du nombre donné, par une raison analogue à celle qui nous a fait voir qu'il fallait une tranche de 2 zéros pour avoir une décimale à la racine carrée, et une tranche de 3 zéros quand il s'agit de la racine cubique. Ainsi il faudra augmenter de 7 unités la caractéristique du logarithme du nombre dont on demande la racine 7^me., et on aura 5,6419390. Cela fait, on divisera ce dernier logarithme par 7, et on aura 0,8059913 pour le logarithme de la racine demandée 10 fois trop grande. Au moyen des tables, on trouvera que le nombre qui répond à ce logarithme est 6,3972, et par conséquent la racine 7^me. demandée sera 0,63972.

14^me. LEÇON.

De la Résolution des Equations.

178. Supposons que x soit un nombre inconnu; si l'on avait $3x+4=16$, cette égalité prendrait le nom d'*équation*. Les égalités $\frac{x}{2}+\frac{2x}{5}+7=x+5$; $x^3+5x+8=7x+25$; $2x^3-\frac{5x^2}{7}+\frac{x}{5}=28$; $6x^3-7x^2+3x+8=8x^3-\frac{5x}{2}+36$; $x^4-4x^3+8x^2+2x=\frac{x^4}{3}-\frac{3x^2}{7}+\frac{x}{4}+27$, etc., sont aussi des équations, en supposant toujours que x représente un nombre inconnu dans chaque égalité. Les égalités $ax+b=c$; $ax^2+cx+b=cx^2+2ax$; $a^2x^3-4abx^2+5acx+3ab=5abcx+3a^2b^2$, etc., sont encore des équations, si x représente une quantité inconnue, et a, b et c des quantités données, dans chaque égalité.

Une équation a deux membres qui sont séparés par le signe d'égalité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chaque membre se compose d'un ou de plusieurs termes, c'est-à-dire que les membres d'une équation sont monomes ou polynomes. On distingue les membres par *premier* et *second;* le premier est celui à gauche.

179. Une équation est *numérique* ou *littérale*, suivant que les quantités données qu'elle renferme sont *numériques* ou *littérales*.

180. On distingue les équations par leur degré. Le degré d'une équation est déterminé par l'exposant de la plus haute puissance de l'inconnue : quand l'inconnue n'est qu'à la première puissance, l'équation est du premier degré; si l'inconnue est à la 2^{me}., à la 3^{me}., etc., puissance, l'équation est du 2^{me}., du 3^{me}., etc., degré.

181. Résoudre une équation c'est isoler la lettre qui représente l'inconnue, de manière qu'elle se trouve toute seule dans le premier membre de l'équation, et toutes les quantités données dans le second membre.

On sait bien résoudre les équations numériques de tous les degrés, mais si elles sont littérales, à proprement parler, on ne pourra les résoudre que lorsqu'elles seront du premier et du second degré. Cependant on a découvert des méthodes générales pour la résolution de celles du 3^{me}. et du 4^{me}. degré; mais ces méthodes ne satisfont pas entièrement à tous les cas. Quant à la résolution des équations des degrés supérieurs, les tentatives des plus illustres géomètres sont restées à peu près sans effet. Heureusement que, pour nous, ces méthodes générales ne sont pas absolument nécessaires, et même, nous croyons pouvoir nous passer de donner ici la résolution des équations numériques des degrés supérieurs au premier et au second, parce que notre but est de présenter toutes les théories de la science de construction, en ne nous appuyant que sur les calculs les plus élémentaires, quoique les calculs transcendans permettent de présenter quelques-unes de ces théories d'une manière beaucoup plus générale et plus élégante.

Ceux qui seraient jaloux d'étendre davantage leurs connaissances dans le calcul, n'auront qu'à lire l'excellent cours de mathématiques de M. Lacroix, ou les ouvrages de quelque autre savant géomètre : pour nous, je le répète, il nous suffira de savoir résoudre les équations du premier et du second degré; mais il nous importera de bien connaître ces deux résolutions, ainsi que tous les principes de calculs qui précèdent.

De la Résolution des équations du premier degré à une seule inconnue.

La résolution des équations du premier degré, présente quatre cas, parce que l'inconnue peut se trouver mêlée avec les quantités données de quatre manières différentes : 1°. par addition; 2°. par soustraction; 3°. par multipli-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cation, et 4°. par division. L'inconnue peut se trouver engagée à la fois de ces quatre manières ou seulement d'une ou de deux ou de trois.

182. *Premier cas.* Supposons que l'inconnue soit seulement engagée par addition, qu'on ait, par exemple, $x + a = b$. Il est évident que si de deux quantités égales on retranche la même quantité, les restes seront égaux; retranchons donc la quantité a de chaque membre de notre équation, et nous aurons $x + a - a = b - a$; ce qui se réduit à $x = b - a$, puisque $+a$ et $-a$ se détruisent dans le premier membre, et l'équation sera résolue.

Il suit de là que, pour faire passer un terme du premier dans le second membre d'une équation, si ce terme a le signe + dans le premier membre, il suffit d'écrire ce terme dans le second membre avec le signe —.

Il est clair que si de cette dernière équation on voulait retourner à la première, il faudrait faire passer le terme $-a$ du second membre de la dernière dans le premier membre avec le signe +: *si donc on a besoin de faire passer un terme du second membre dans le premier, si ce terme a le signe — dans le second, il faudra lui donner le signe + dans le premier.*

Second cas. Supposons que l'inconnue soit seulement engagée par soustraction, qu'on ait, par exemple, $x - a = b$. Comme en ajoutant la même quantité à deux quantités égales les deux sommes sont égales, nous pourrons ajouter a dans chaque membre de notre équation, et nous aurons $x - a + a = b + a$, ce qui se réduit à $x = b + a$, puisque $-a$ et $+a$ se détruisent, et l'équation sera résolue.

Il suit de là que, pour faire passer un terme du premier membre dans le second, si ce terme a le signe — dans le premier, il faut lui donner le signe + dans le second.

Si de cette dernière équation on voulait passer à la première, il est clair qu'il faudrait passer le terme $+a$ du second membre de la dernière dans le premier membre avec le signe —.

Il suit de là que, si l'on veut faire passer un terme du second membre dans le premier, si ce terme a le signe + dans le second, il faudra lui donner le signe — dans le premier.

183. En rapprochant ce qui précède sur la transposition des termes d'une équation, on verra que généralement, et sans exception, *pour passer un terme d'un membre dans un autre, il suffit d'écrire ce terme dans le membre où l'on veut le faire passer, en lui donnant un signe contraire à celui qu'il avait dans le membre où il était d'abord.*

184. *Troisième cas.* Si l'inconnue est engagée seulement par multiplication, si l'on a, par exemple, $ax = b$, comme en divisant deux quantités égales par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la même quantité les quotiens sont égaux, on divisera les deux membres de l'équation dont il s'agit par a, ce qui donnera $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$, ce qui se réduit à $x = \frac{b}{a}$, et l'équation sera résolue.

Il suit de là que quand l'inconnue est seulement engagée par multiplication dans le premier membre, pour la dégager il suffit de diviser les deux membres par la quantité qui multiplie l'inconnue dans le premier.

185. *Quatrième cas.* Si l'inconnue est engagée seulement par division, si l'on a, par exemple, $\frac{x}{a} = b$, comme en multipliant deux quantités égales par la même quantité, les produits sont égaux, on dégagera l'inconnue en multipliant les deux membres de l'équation par a, ce qui donnera $\frac{ax}{a} = ab$, qui se réduit à $x = ab$.

Ainsi donc, *quand l'inconnue est engagée seulement par division dans le premier membre, pour la dégager il suffit de multiplier les deux membres par la quantité qui divise l'inconnue dans le premier.*

Les principes qui précèdent suffisent pour résoudre toute équation du premier degré, ainsi qu'on va le voir par les exemples suivans.

186. Supposons qu'il s'agisse de résoudre l'équation numérique

$$3x + 2x - 4 = 4x - 5x + 20.$$

En se rappelant le principe du n°. 183, on fera passer tous les x dans le premier membre, et le terme -4 dans le second, et on aura $3x + 2x - 4x + 5x = 20 + 4$, et ensuite on fera les réductions qui peuvent avoir lieu dans chaque membre, et on aura $6x = 24$, et d'après le principe du n°. 184, $x = \frac{24}{6} = 4$.

Si l'on avait $\frac{x}{2} - \frac{3x}{4} + x = -5x + 120$, on mettrait d'abord tous les termes au même dénominateur, en observant que le plus grand dénominateur qui est 4, est divisible par l'autre dénominateur qui est 2. En conséquence, on multipliera les deux termes de la première fraction $\frac{x}{2}$ par 2, ce qui donnera $\frac{2x}{4}$; l'entier x par 4, ce qui donnera $\frac{4x}{4}$; l'entier $5x$ par 4, ce qui donnera $\frac{20x}{4}$, et l'entier 120 par encore 4, ce qui donnera $\frac{480}{4}$; de sorte que l'équation proposée deviendra $\frac{2x}{4} - \frac{3x}{4} + \frac{4x}{4} = -\frac{20x}{4} + \frac{480}{4}$. Comme tous les termes de cette équation ont maintenant le même dénominateur, en supprimant ce dénominateur, tous les termes seront rendus 4 fois plus grands, ce qui ne troublera pas l'égalité des deux membres, et on aura

$$2x - 3x + 4x = -20x + 480.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Maintenant on passera tous les x dans le premier membre, et il viendra $2x - 3x + 4x + 20x = 480$, et en faisant les réductions $23x = 480$, et (n°. 184) enfin $x = \frac{480}{23}$.

Supposons l'équation $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{5} = 58 - \frac{x}{6} + \frac{5x}{4}$.

On mettra d'abord toutes les fractions au même dénominateur (n°. 78, arith.); on convertira les 58 entiers en fraction (n°. 64, arith.), et, en supprimant de suite le dénominateur commun, on aura $30x + 40x + 36x = 3480 - 10x + 75x$. Cela fait, on passera tous les x dans le premier membre, ce qui donnera $30x + 40x + 36x + 10x - 75x = 3480$, et en faisant les réductions $41x = 3480$; d'où enfin (n°. 184) $x = \frac{3480}{41}$.

187. Donnons quelques exemples sur les équations littérales.

Supposons qu'on ait $ax + b = cx + d$, on passera les termes qui renferment x dans le premier membre, et les termes tout connus dans le second, et on aura $ax - cx = d - b$.

Ensuite, on observera que x est facteur commun dans les termes du premier membre, et que, par conséquent, on aura $x(a - c) = d - b$; d'où (n°. 184) enfin $x = \frac{d-b}{a-c}$.

Si l'on a $\frac{x}{a} + \frac{bx}{c} - \frac{dx}{e} = ab - \frac{x}{ac}$, on mettra d'abord tous les termes au même dénominateur, et l'on convertira les entiers ab en fraction, ce qui donnera $\frac{cex}{ace} + \frac{aebx}{ace} - \frac{acdx}{ace} = \frac{a^2bce}{ace} - \frac{ex}{ace}$,

ou $cex + aebx - acdx = a^2bce - ex$, en supprimant le dénominateur commun. Ensuite, on fera passer dans le premier membre tous les termes affectés de x, ce qui donnera $cex + aebx - acdx + ex = a^2bce$. Puis, on observera que x étant facteur commun dans tous les termes du premier membre, on aura $x(ce + aeb - acd + e) = a^2bce$, et enfin $x = \frac{a^2bce}{ce + aeb - acd + e}$.

Telle est la résolution des équations du premier degré lorsqu'elles ne renferment qu'une seule inconnue.

De la Résolution des équations du premier degré, à plusieurs inconnues.

188. Supposons que x et y représentent deux inconnues; pour pouvoir découvrir chacune de ces inconnues, il faut nécessairement deux équations; car, si l'on n'avait qu'une seule équation, par exemple, celle-ci $3x - 4y = 25$, et qu'on voulût avoir la valeur de x, on trouverait $x = \frac{25 + 4y}{3}$. Or, il est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

évident qu'on ne peut connaître véritablement x qu'autant que l'on connaîtra y, et qu'ici rien ne détermine y; donc, une seule équation ne suffit pas pour avoir les valeurs de deux inconnues.

Si l'on avait trois inconnues, il faudrait trois équations; si l'on avait quatre inconnues il faudrait quatre équations, et ainsi de suite, pour pouvoir obtenir la valeur de chaque inconnue.

189. Supposons donc que l'on nous propose de trouver les valeurs des inconnues x et y d'après les équations $3x - 4y = 25$, $4x + 3y = 50$.

Il faut entendre ici que x et y représentent respectivement la même quantité dans les deux équations. Cela posé, si, pour un moment, on regarde y comme connu, et que l'on tire de chacune des équations données la valeur de x, on aura $x = \frac{25 + 4y}{3}$ et $x = \frac{50 - 3y}{4}$; mais les x représentent la même quantité; donc $\frac{25+4y}{3} = \frac{50-3y}{4}$. Mettons au même dénominateur, et nous aurons $100 + 16y = 150 - 9y$. Passons tous les y dans le premier membre, et les quantités données dans le second, et, d'après le n°. 183, nous aurons $16y + 9y = 150 - 100$; si nous faisons les réductions dans chaque membre, il nous viendra $25y = 50$; d'où (n°. 184) nous tirerons $y = \frac{50}{25} = 2$.

Puisque $y = 2$, en mettant 2 au lieu de y dans l'une quelconque des équations proposées, dans la première, par exemple, on aura $3x - 8 = 25$; d'où nous tirerons $3x = 25 + 8 = 33$, et par conséquent $x = \frac{33}{3} = 11$.

190. On pourrait résoudre les équations $3x - 4y = 25$, $4x + 3y = 50$, d'une autre manière qui, en général, est plus expéditive que la première, qu'il ne faut pourtant pas rejeter. Voici en quoi consiste cette seconde méthode, qu'on désigne par le nom de méthode par *élimination*, à cause que l'on chasse l'une des inconnues pour avoir la valeur de l'autre.

Si le nombre des x était le même dans les deux équations, en retranchant ces deux équations membre à membre, il est clair que les x s'en iraient, et que les restes formeraient une équation dans laquelle il n'y aurait plus, par conséquent, que y d'inconnu; cette dernière équation conduirait donc à la valeur de y.

Les deux équations proposées n'ont pas le même nombre de fois x; mais comme deux quantités égales multipliées par la même quantité restent égales, on pourra multiplier les deux membres de la première équation par le coefficient 4 de x de la seconde, et multiplier les deux membres de la seconde par le coefficient 3 de x de la première, ce qui donnera les équations $12x - 16y = 100$, $12x + 9y = 150$, dans lesquelles x aura le même coeffi-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cient. Retranchons membre à membre la première de la seconde, en observant que les signes (n°. 21) changent dans celle à soustraire, et nous aurons $9y + 16y = 150 - 100$, ou $25y = 50$; d'où $y = \frac{50}{25} = 2$.

Maintenant on pourrait avoir x en mettant à la place de y sa valeur 2 dans l'une des équations proposées, comme nous l'avons dit plus haut; mais on peut avoir la valeur de x directement, en chassant y par le même moyen que nous avons chassé x pour avoir y.

Pour cela, on multipliera la première équation par 3 et la seconde par 4; ce qui donnera les équations $9x - 12y = 75$, $16x + 12y = 200$, dans lesquelles le coefficient de y est le même.

Ici, au lieu de retrancher les équations membre à membre pour chasser y, on les ajoutera à cause que les y sont de signes contraires dans les deux équations, et que, par conséquent, les y se détruiront par addition. En faisant cette addition, on aura $25x = 275$, d'où $x = \frac{275}{25} = 11$.

Supposons, pour second exemple, les équations $5x - 4y = 48$, $15x + 6y = 288$. On observera d'abord que la seconde équation est divisible par 3, et qu'en faisant cette division elle se réduit à $5x + 2y = 96$, de sorte qu'au lieu des équations proposées on aura celles-ci $5x - 4y = 48$, $5x + 2y = 96$... (1) dans lesquelles on voit qu'on a le même nombre de fois x. Comme les x ont le même signe, pour les faire disparaître, on retranchera ces deux équations l'une de l'autre, la première de la seconde, par exemple, et on aura $2y + 4y = 96 - 48 = 48$, ou $6y = 48$; d'où $y = \frac{48}{6} = 8$.

Pour chasser y afin d'avoir x, on observera qu'on a $4y$ dans la première équation (1), et $2y$ dans la seconde; d'où l'on voit qu'en multipliant la seconde équation par 2 on aura $4y$ comme dans la première, de sorte qu'on aura $5x - 4y = 48$, $10x + 4y = 192$. En ajoutant ces deux dernières équations, comme les y sont de signes contraires, ils s'en iront, et on aura $15x = 240$; d'où $x = \frac{240}{15} = 16$.

191. Supposons qu'il s'agisse de trouver la valeur des trois inconnues x, y et z, au moyen des trois équations

$$x - 4y + 2z = 3, \quad -3x + 6y - z = 2, \quad 4x - 2y + 4z = 40.$$

On multipliera la première par 3 qui est le coefficient de x dans la seconde, et on aura $3x - 12y + 6z = 9$; on ajoutera cette dernière équation à la seconde, et on aura $-6y + 5z = 11$. Puis, on multipliera la première par le coefficient 4 de x de la troisième, ce qui donnera $4x - 16y + 8z = 12$, à retrancher de la troisième des équations proposées, et on aura $14y - 4z = 28$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Par ce moyen; nous avons obtenu les deux équations $-6y+5z=11$; $14y-4z=28$.... (a), dans lesquelles il n'y a plus que deux inconnues.

Entre ces deux équations on éliminera y, en multipliant la première par 7 et la seconde par 3, ce qui donnera $-42y+35z=77$; $42y-12z=84$; on ajoutera ces dernières, à cause que les y sont de signes contraires, et on aura $23z=161$, d'où $z=\frac{161}{23}=7$.

Connaissant z, on mettra sa valeur 7 dans l'une des équations (a), dans la seconde, par exemple, et on aura $14y-28=28$; d'où l'on tirera $14y=28+28=56$, et $y=\frac{56}{14}=4$.

Connaissant z et y, on mettra leurs valeurs 7 et 4 dans l'une des équations proposées, dans la première, par exemple, et on aura $x-16+14=3$, d'où $x=3+16-14=5$.

192. Si l'on avait un plus grand nombre d'équations, 5, par exemple, avec un pareil nombre d'inconnues x, y, z, u et v, en s'y prenant comme dans l'exemple précédent, on combinerait la première équation avec chacune des quatre autres pour chasser x, ce qui conduirait à quatre équations dans lesquelles il n'y aurait que quatre inconnues y, z, u et v; on combinerait la première de ces quatre équations avec chacune des trois autres, pour chasser y, ce qui conduirait à trois équations dans lesquelles il n'y aurait que trois inconnues z, u et v. On combinerait la première de ces trois équations avec chacune des autres pour chasser z, et on aurait deux équations dans lesquelles il n'y aurait que deux inconnues u et v. Enfin, on combinerait ces deux dernières équations entre elles pour chasser u, et on arriverait à une seule équation dans laquelle il n'y aurait qu'une seule inconnue v. D'après cette dernière équation, on tirerait la valeur de v, qu'on substituerait à v dans l'une des deux équations qui ne renfermeraient que u et v, et on tirerait la valeur de u; connaissant les valeurs de u et v, on les mettrait à la place de ces lettres dans l'une des trois équations qui renfermeraient les trois inconnues z, u et v, et on tirerait la valeur de z. Connaissant z, u et v, on mettrait leurs valeurs à leurs place dans l'une des quatre équations qui renfermeraient les quatre inconnues y, z, u et v, et on tirerait la valeur de y. Enfin, connaissant les valeurs de y, z, u et v, on les mettrait dans l'une des cinq équations proposées, et on tirerait la valeur de x, et les équations seraient résolues. On conçoit que cette méthode peut s'étendre à un nombre quelconque d'équations numériques, pourvu qu'elles soient du premier degré. Dans ce moment, je laisse sous silence quelques difficultés particulières, sur lesquelles j'aurai occasion de revenir.

193. Supposons qu'il s'agisse de trouver les valeurs des inconnues x et y

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'après les équations $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$..... (a), dans lesquelles a', b', c' diffèrent de a, b, c.

On multipliera la première équation par le coefficient a' de x de la seconde, et la seconde par le coefficient a de x de la première, et on aura $aa'x + ba'y = ca'$, $aa'x + ab'y = ac'$. Ensuite on retranchera la première de ces dernières équations de la seconde, et on aura :
$ab'y - ba'y = ac' - ca'$, ou, à cause que y est facteur commun dans les deux termes du premier membre, $(ab' - ba')y = ac' - ca'$;

$$\text{d'où } y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Pour avoir x, on chassera y au moyen des deux équations proposées (a), en multipliant la première par le coefficient b' de y de la seconde, et la seconde par le coefficient b de y de la première, ce qui donnera $ab'x + bb'y = cb'$, et $ba'x + bb'y = bc'$; et en retranchant la seconde de ces dernières équations de la première $ab'x - ba'x = cb' - bc'$, ou $(ab' - ba')x = cb' - bc'$, d'où $x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$.

194. Quand le nombre des équations est un peu considérable, cette méthode se complique, et conduit à des calculs qui sont bientôt impraticables. En voici une autre qui est un peu plus simple.

Soient les équations $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$..... (a), on multipliera la première par une quantité m indéterminée, ce qui donnera $max + mby = mc$, et de cette dernière équation on retranchera la seconde des proposées, et on aura $(ma - a')x + (mb - b')y = mc - c'$..... (b).

Maintenant, si l'on veut chasser y pour avoir x, on fera le coefficient de y égal à zéro, et on aura $mb - b' = 0$, d'où l'on tirera $m = \frac{b'}{b}$. on mettra cette valeur de m dans l'équation (b), et il viendra $(\frac{ab'}{b} - a')x = \frac{cb'}{b} - c'$, ou $(ab' - ba')x = cb' - bc'$, en mettant tout au même dénominateur, et en supprimant ce dénominateur. De cette dernière équation on tirera $x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$.

Pour avoir y, on chassera x de l'équation (b), et pour cela on fera $ma - a' = 0$, d'où l'on tirera $m = \frac{a'}{a}$. On mettra cette valeur de m dans l'équation (b), et il viendra $(\frac{ba'}{a} - b')y = \frac{ca'}{a} - c'$, ou $(ba' - ab')y = ca' - ac'$ en faisant disparaître le dénominateur; d'où l'on tirera $y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}$. Or, le quotient d'une division ne change pas de signe quand on change les signes du dividende et du diviseur en même temps; donc $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$.

Supposons actuellement qu'on ait les trois inconnues x, y et z, et les trois

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

équations $ax+by+cz=d$, $a'x+b'y+c'z=d'$, $a''x+b''y+c''z=d''$.... (c). On multipliera la première par m, la seconde par n, après quoi on les ajoutera, et de leur somme on retranchera la première, ce qui donnera

(d)..... $(am+na'-a'')x+(bm+b'n-b'')y+(cm+c'n-c'')z=dm+d'n-d''$.

Ensuite, pour avoir x, on fera égaux à zéro les coefficiens de y et de z, ce qui donnera $bm+b'n-b''=0$ et $cm+c'n-c''=0$, et d'après ces deux équations on tirera les valeurs de m et n, qu'on mettra dans l'équation (d), ce qui la réduira à n'avoir que la seule inconnue x; on pourra donc en tirer la valeur de cette inconnue, qui sera $x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$.

Pour avoir y, on égalera à zéro les coefficiens de x et de z de l'équation (d), ce qui donnera les deux équations $am+na'-a''=0$, $cm+c'n-c''=0$, au moyen desquelles on trouvera de nouvelles valeurs pour m et n, qu'on mettra dans l'équation (d), laquelle équation (d) ne renfermant plus que y, permettra de tirer la valeur de cette inconnue, qui sera

$y=\frac{ad'e''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a'-cb'a''}$.

Enfin, pour avoir z, on égalera à zéro les coefficiens de x et de y de l'équation (d), ce qui donnera les deux équations $am+na'-a''=0$, $bm+nb'-b''=0$, au moyen desquelles on trouvera de nouvelles valeurs pour m et n, qu'on mettra dans l'équation (d), laquelle équation (d) ne renfermant plus que z, permettra de tirer la valeur de cette inconnue, qui sera $z=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'd''-cb'a''}$.

On voit que cette seconde méthode est encore assez compliquée; mais Bezout nous en a donné une troisième qui est très-simple, et qui est fondée sur l'observation de la loi que suivent les coefficiens des inconnues et le second membre tout connu de l'équation, loi que l'analigie démontre avoir lieu pour un nombre quelconque d'équations renfermant un pareil nombre d'inconnues. Voici en quoi elle consiste.

195. Si l'on observe les valeurs de x et de y, pour le cas où il y a deux équations et deux inconnues, on verra que ces deux valeurs renferment le même dénominateur, et que le numérateur se compose du dénominateur en y mettant la lettre c qui est le second membre de la première équation, au lieu de a pour avoir x, et en y mettant la même lettre c au lieu de b pour avoir y, ayant soin d'ailleurs de mettre aux lettres substituées les mêmes accens qu'avaient les lettres remplacées. En examinant les valeurs de x, y et z, dans le cas de trois équations à trois inconnues, on verra que la même

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

loi subsiste; on observerait la même chose sur les valeurs des inconnues dans le cas de quatre équations et de quatre inconnues, et ainsi de suite pour autant d'équations qu'on voudra. Si donc nous savions former le dénominateur, pour le cas d'un nombre quelconque d'équations, on saurait trouver les valeurs de toutes les inconnues. Cherchons donc ces dénominateurs.

1°. S'il s'agit de deux équations à deux inconnues, on combinera les coefficiens a, b des inconnues de la première équation, et on aura ab, ba; on mettra un accent à la seconde lettre de chaque arrangement; on réunira les deux arrangemens par le signe —, et le dénominateur demandé sera $ab'-ba'$. Si maintenant on veut avoir la valeur de x, on formera le numérateur de cette valeur, en mettant c à la place de a dans $ab'-ba'$, et ce numérateur sera $cb'-bc'$; de sorte que $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$, ce qui s'accorde avec les valeurs trouvées (nos. 193 et 194). Pour avoir y, on mettra c à la place de b dans $ab'-ba'$, et on aura $ac'-ca'$ pour le numérateur, et $y=\frac{ac'-ca'}{ab-ba'}$.

2°. Si l'on avait trois équations et trois inconnues (a, b, c étant les coefficiens des inconnues x, y et z, et d étant le second membre de la première équation), pour avoir le dénominateur commun à toutes les valeurs des inconnues, on prendra le dénominateur $ab'-ba'$ du cas de deux équations, et on introduira le nouveau coefficient c dans chaque terme de ce premier dénominateur, en lui faisant occuper toutes les places possibles, en commençant par la dernière place, et on liera les termes alternativement par le signe + et le signe —, ainsi qu'il suit: $ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''$....$(a)$ Ensuite, pour avoir la valeur de x, on remplacera le coefficient a de x par d, et on aura $x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$;

Pour avoir la valeur de y, on remplacera le coefficient b de y par d, dans l'expression (a), et on aura $y=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$.

Enfin, pour avoir la valeur de z, on remplacera le coefficient c de z par d dans la même expression (a), et on aura :

$$z=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$$

Si l'on avait quatre équations et quatre inconnues, on formerait le dénominateur commun aux valeurs des quatre inconnues, en introduisant le coefficient de la quatrième inconnue dans toutes les places possibles, dans chaque terme du dénominateur du cas où il y a trois équations et trois

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

inconnues, et ensuite on trouverait les numérateurs comme il vient d'être dit pour trois équations. En continuant cette méthode, on parviendrait, de proche en proche, aux valeurs des inconnues, de tant d'équations qu'on voudrait.

Telle est la méthode d'élimination la plus expéditive pour les équations littérales du premier degré.

15^me. LEÇON.

Résolution des Equations du second degré, à une seule inconnue.

196. Si une équation du second degré se présente sous cette forme $x^2=a$; c'est-à-dire si l'équation à résoudre ne renferme que la seconde puissance de l'inconnue, sa résolution consiste seulement en une extraction de racine carrée; de sorte que (n°. 83) $x=\pm\sqrt{a}$. Dans ce cas, l'équation est dite *à deux termes.*

En général, si l'on a $x^n=a$, l'équation proposée sera à deux termes, et, pour la résoudre, il suffira d'extraire de chaque membre la racine marquée par l'exposant de x dans le premier membre; ainsi, on aura généralement $x=\sqrt[n]{a}$, en ayant égard à la règle des signes du n°. 83. Je ne m'étendrai pas davantage sur ces sortes d'équations, du moins pour le moment, et je passerai de suite aux équations complètes du second degré.

Une équation du second degré est complète, quand elle renferme non-seulement la seconde puissance de l'inconnue, mais encore la première.

197. Quelque compliquée que soit une équation complète du second degré (n°. 180), on pourra toujours la ramener à la forme $x^2+px+q=0$.... (1).

En effet, soit l'équation $ax^2-4abx-2a^2bx^2+\frac{x}{2ab}=4a^3b^2c+x^2-5ax$; en faisant passer dans le premier membre tout ce qui est affecté de x et x^2 (n°. 183), il viendra :

$ax^2-4abx-2a^2bx^2+\frac{x}{2ab}-x^2+5ax=4a^3b^2c$, et en réunissant, entre parenthèse, tout ce qui multiplie les mêmes puissances de x, on aura

$(a-2a^2b-1)x^2+(\frac{1}{2ab}-4ab+5a)x=4a^3b^2c$,

Divisons chaque membre par la parenthèse qui multiplie x^2, et nous aurons :

$$x^2+\frac{(\frac{1}{2ab}-4ab+5a)}{a-2a^2b-1}x=\frac{4a^3b^2c}{a-2a^2b-1},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\text{ou} \quad x^2 + \frac{(\frac{1}{2ab} - 4ab + 5a)}{a - 2a^2b - 1}\, x - \frac{4a^3b^2c}{a - 2a^2b - 1} = 0 ;$$

or, si nous faisons

$$\frac{\frac{1}{2ab} - 4ab + 5a}{a - 2a^2b - 1} = p, \text{ et } - \frac{4a^3b^2c}{a - 2a^2b - 1} = q ;$$

nous aurons $x^2 + px + q = 0$, ce qui s'accorde avec l'équation (1).

Ce seul exemple suffit pour faire voir que quelque compliquée que soit une équation du second degré, on pourra toujours, par des transpositions et des réductions, la ramener à la forme $x^2 + px + q = 0$. C'est ce qu'il faudra d'abord faire, en effet, lorsqu'on voudra résoudre une équation de ce degré.

198. L'équation étant ramenée à la forme $x^2 + px + q = 0$, voici le moyen de la résoudre.

On commencera par faire passer le terme tout connu q du premier dans le second membre, ce qui donnera $x^2 + px = -q$; ensuite, on comparera le premier membre de cette équation au carré de $(x + \frac{1}{2}p)$, qui est $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$, et on verra que si dans ce premier membre on ajoutait $\frac{1}{4}p^2$, il deviendrait le carré de $x + \frac{1}{2}p$, c'est-à-dire qu'il serait égal à $(x + \frac{1}{2}p)^2$. Mais si dans le premier membre on ajoute $\frac{1}{4}p^2$, il faudra nécessairement ajouter la même quantité dans le second pour ne pas troubler l'égalité; en faisant donc cette addition de part et d'autre, on aura $(x + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$, et en extrayant la racine carrée de chaque membre (en se souvenant (n°. 83) que la racine carrée doit avoir le double signe) on aura

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

On ne met pas le double signe devant le premier membre, parce que ce double signe ne donnerait rien de plus.

En effet, si l'on mettait ce double signe dans le premier membre, on aurait $\pm(x + \frac{1}{2}p) = \pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, d'où l'on tirerait évidemment

$$+(x + \tfrac{1}{2}p) = +\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}, \quad +(x + \tfrac{1}{2}p) = -\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q},$$
$$-(x + \tfrac{1}{2}p) = +\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}, \quad -(x + \tfrac{1}{2}p) = -\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

Mais en changeant les signes dans les deux membres des deux dernières équations, on aura :

$$(x + \tfrac{1}{2}p) = -\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q} \qquad (x + \tfrac{1}{2}p) = +\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}$$

ce qui conduit aux mêmes conséquences que les deux premières équations.

Etant parvenu à l'équation $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, on n'aura plus, pour avoir la valeur de x, qu'à faire passer le terme $\frac{1}{2}p$ dans le second membre, et on aura $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ pour les valeurs générales de x. Je dis les valeurs, car, à cause du double signe du radical, x a deux valeurs diffé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rentes, l'une est $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$, et l'autre est $x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$.

En effet, si, dans l'équation $x^2+px+q=0$, on met $-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$, ou $-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ à la place de x, le premier membre de cette équation se réduira à zéro dans l'une et dans l'autre substitution.

199. On peut résoudre l'équation $x^2+px+q=0$ d'une autre manière : faisons $x=y-\frac{1}{2}p$; on aura :

$$1^0.\quad x^2=y^2-py+\tfrac{1}{4}p^2;$$
$$2^0.\quad px=\quad +py-\tfrac{1}{2}p^2;$$
$$\text{Et } 3^0.\quad q=\qquad\qquad +q;$$

et en ajoutant ces trois équations membre à membre,

$$x^2+px+q=y^2-\tfrac{1}{4}p^2+q;$$

et, puisque $x^2+px+q=0$, on aura :

$$y^2-\tfrac{1}{4}p^2+q=0;$$
$$\text{d'où}\quad y^2=\tfrac{1}{4}p^2-q,$$

et, en extrayant la racine carrée de chaque membre,

$$y=\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}$$

or $x=y-\frac{1}{2}p$; si donc à la place de y on met sa valeur $\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$, on aura $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$, ce qui s'accorde parfaitement avec la première solution.

200. Si nous comparons la formule $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$, à l'équation générale $x^2+px+q=0$, dans laquelle les termes px et q sont tous les deux positifs, nous verrons que dans la valeur de x, $\frac{1}{2}p$ hors du radical et q sous le radical, ont des signes contraires à ceux des termes px et q de l'équation proposée.

Si l'équation donnée avait la forme $x^2-px+q=0$, en la résolvant par les mêmes moyens que nous avons employés pour résoudre l'équation $x^2+px+q=0$, on trouverait que la valeur de x serait $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$; d'où l'on voit que dans la valeur générale de x, $\frac{1}{2}p$ et q ont encore des signes contraires à ceux des termes px et q de l'équation donnée.

Si l'équation donnée était $x^2+px-q=0$, on trouverait que la valeur de x serait $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$; d'où l'on voit que dans la valeur générale de x, $\frac{1}{2}p$ et q ont encore des signes contraires à ceux des termes px et q de l'équation donnée.

Enfin, si l'équation était $x^2-px-q=0$, on aurait $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$; d'où l'on voit encore que dans la valeur générale de x, $\frac{1}{2}p$ et q ont des signes contraires à ceux des termes px et q de l'équation donnée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

201. Ainsi la formule $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, tirée de l'équation générale $x^2 + px + q = 0$, pourra donner, dans tous les cas, la valeur de x, en donnant à $\frac{1}{2}p$ et à q des signes contraires à ceux des termes px et q de l'équation donnée, quelle que soit cette équation donnée, pourvu qu'elle soit ramenée à la forme $x^2 + px + q = 0$, comme nous l'avons fait au n°. 197.

Supposons, par exemple, qu'on nous propose de résoudre l'équation $x^2 + 8x + 15 = 0$; ici nous aurons $p = 8$ et $q = 15$, et, en substituant dans la formule $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, il viendra $x = -4 \pm \sqrt{16 - 15} = -4 \pm \sqrt{1} = -4 \pm 1$; ainsi, les valeurs de x seront $x = -4 + 1 = -3$ ou $x = -4 - 1 = -5$; d'où l'on voit que les deux valeurs de x sont négatives.

Si dans l'équation proposée, on met -3 à la place de x, on aura $9 - 24 + 15 = 0$; et, si dans la même équation on met -5 à la place de x, on aura $25 - 40 + 15 = 0$, ce qui vérifie cette équation donnée et ce qui confirme qu'une équation du second degré donne deux valeurs pour l'inconnue.

Si l'équation à résoudre était $x^2 - 8x + 15 = 0$, on aurait $p = -8$, et $q = 15$, et par conséquent $x = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm \sqrt{1}$, d'où il s'ensuivrait que les valeurs de x seraient $x = 4 + 1 = 5$, ou $x = 4 - 1 = 3$; d'où l'on voit que les deux valeurs de x sont toutes les deux positives. En mettant 5 à la place de x dans l'équation $x^2 - 8x + 15 = 0$, on trouverait $25 - 40 + 15 = 0$, et, en mettant 3 au lieu de x dans la même équation, on trouverait $9 - 24 + 15 = 0$; ce qui confirme encore qu'une équation du second degré donne deux valeurs pour l'inconnue.

Soit l'équation $x^2 + 4x - 32 = 0$; nous aurons $p = 4$ et $q = -32$; et en substituant dans la formule $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, nous aurons $x = -2 \pm \sqrt{4 + 32} = -2 \pm \sqrt{36} = -2 \pm 6$; de sorte que $x = -2 + 6 = 4$, ou $x = -2 - 6 = -8$. Ainsi, l'une des valeurs de x sera positive et l'autre négative. En substituant chacune de ces valeurs de x dans l'équation proposée, on trouverait que cette équation serait également vérifiée.

Si l'on proposait l'équation $x^2 - 3x - 5 = 0$, on aurait $p = -3$, et $q = -5$, et par conséquent $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 5} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9+20}{4}}$, ou $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$; d'où l'on voit que pour avoir les valeurs de x, il faut ici extraire la racine carrée de 29, laquelle racine est irrationnelle (n°. 85), et est égale à 5,384, à moins de 0,001 près. Ainsi, les valeurs de x ne seront pas exactes, et seront $x = \frac{3}{2} \pm \frac{5,384}{2}$ par approximation.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En les séparant, on aura $x = \frac{3}{2} + \frac{5,384}{2} = \frac{8,384}{2} = 4,192$, ou $x = \frac{3}{2} - \frac{5,384}{2} = -\frac{2,384}{2} = -1,692$.

Dans l'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$, on aurait $p = 2$, $q = 1$, et par conséquent $x = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1 \pm 0$. Ici, les deux valeurs de x deviennent égales, puisque la partie radicale, qui a le double signe, se réduit à zéro.

Si l'on avait $x^2 - 4x + 5 = 0$, on aurait $p = -4$, $q = 5$, et par conséquent $x = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm \sqrt{-1}$; d'où l'on voit que x est ici imaginaire (n°. 83), c'est-à-dire qu'il n'y a aucune valeur réelle de x qui satisfasse à l'équation proposée.

Il résulte de la résolution des équations précédentes, que les valeurs de l'inconnue peuvent être toutes les deux négatives, toutes les deux positives, l'une positive et l'autre négative, toutes les deux irrationnelles, positives ou négatives, et enfin, elles peuvent être toutes les deux imaginaires. Passons aux équations littérales.

Supposons qu'il s'agisse de l'équation $x^2 - 4a^2bx - 5a^4b^2 = 0$, en comparant cette équation à l'équation générale $x^2 + px + q = 0$, on verra que $p = -4a^2b$ et $q = -5a^4b^2$, et, en substituant dans la formule $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, on aura $x = 2a^2b \pm \sqrt{4a^4b^2 + 5a^4b^2}$, d'où $x = 2a^2b \pm \sqrt{9a^4b^2} = 2a^2b \pm 3a^2b$, et en séparant les deux valeurs, $x = 2a^2b + 3a^2b = 5a^2b$, et $x = 2a^2b - 3a^2b = -a^2b$.

Soit l'équation $x^2 + \frac{3a-b}{2c}x + \frac{4cd}{3a} = 0$. Ici on aura $p = \frac{3a-b}{2c}$, et $q = \frac{4cd}{3a}$, et par conséquent $x = -\frac{3a-b}{4c} \pm \sqrt{\frac{(3a-b)^2}{16c^2} - \frac{4cd}{3a}}$.

Je me bornerai aux exemples qui précèdent sur la résolution proprement dite des équations du second degré à une seule inconnue, et je passerai à quelques propriétés, de ces sortes d'équations, qui sont essentielles.

202. En nous fondant sur la théorie de l'extraction des racines, nous avons vu que comme il entrait un radical carré dans l'expression de l'inconnue, cette inconnue devait avoir deux valeurs, tout radical carré devant être précédé du double signe; mais on peut démontrer directement, par la nature même des équations du second degré, que l'inconnue doit avoir en général deux valeurs.

En effet, soit l'équation $x^2 + px + q = 0$; si l'on fait passer le terme tout connu dans le second membre, nous aurons $x^2 + px = -q$, et ajoutant ensuite $\frac{1}{4}p^2$ dans chaque membre, on aura $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$, et le premier membre deviendra le carré de $x + \frac{1}{2}p$: on aura donc

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - q.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Faisons, pour un moment, le second membre de cette équation égal à m^2; on aura $(x+\frac{1}{2}p)^2=m^2$, et, en faisant tout passer dans le premier membre, on aura $(x+\frac{1}{2}p)^2-m^2=0$..... (a). Or, le premier membre de cette équation est la différence de deux carrés (n°. 30); ce membre sera donc égal à la somme des racines de ces carrés, multipliée par la différence de ces mêmes racines; on aura donc :

$$(x+\tfrac{1}{2}p)^2-m^2=(x+\tfrac{1}{2}p-m)\,(x+\tfrac{1}{2}p+m),$$

et par conséquent,

$$(x+\tfrac{1}{2}p-m)\,(x+\tfrac{1}{2}p+m)=0.$$

D'où l'on voit que l'on a un produit composé de deux facteurs, lequel produit est égal à zéro. Or, il est évident que l'on peut rendre ce produit égal à zéro de deux manières : en faisant le facteur $x+\frac{1}{2}p-m=0$, ou le facteur $x+\frac{1}{2}p+m=0$, on aura donc $x=-\frac{1}{2}p+m$, ou $x=-\frac{1}{2}p-m$, ou bien $x=-\frac{1}{2}p\pm m$. Ainsi donc une équation du second degré conduit nécessairement à deux valeurs pour l'inconnue.

Comme nous avons fait $\frac{1}{4}p^2-q=m^2$, il est clair que $m=\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$; si donc à la place de m nous mettons sa valeur $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ dans l'expression ambiguë de x que nous venons de trouver, nous aurons $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$, comme nous l'avions trouvée aux n°s. 198 et 199.

203. Puisque $x=-\frac{1}{2}p+m$ et $x=-\frac{1}{2}p-m$, et que $(x+\frac{1}{2}p+m)\,(x+\frac{1}{2}p-m)=0$, si nous faisons $-\frac{1}{2}p+m=a$, et $-\frac{1}{2}p-m=b$, nous aurons $x=a$ ou $x=b$, et par conséquent

$$(x-a)\,(x-b)=0,$$

c'est-à-dire que *le premier membre d'une équation du second degré de la forme* $x^2+px+q=0$, *peut toujours se décomposer en deux facteurs binomes du premier degré en* x, *ayant tous les deux* x *pour premier terme, et pour second terme, respectivement les deux valeurs de* x, *prises en signes contraires.*

204. Supposons toujours $x=a$ ou $x=b$; nous aurons

$$x^2+px+q=(x-a)\,(x-b),$$

et si nous faisons le produit indiqué dans le second membre de cette dernière équation, il viendra $x^2+px+q=x^2-ax-bx+ab$

$$\text{ou } x^2+px+q=x^2-(a+b)\,x+ab.$$

Mais cette équation est identique, c'est-à-dire qu'elle doit avoir lieu indépendamment d'aucune valeur particulière de x; il faudra donc 1°. que $p=-(a+b)$, et 2°. que $q=ab$.

Il suit de là que 1°. *la somme des valeurs de l'inconnue, d'une équation du second degré, prise en signes contraires, est égale au coefficient du second*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

terme de l'équation donnée ; 2°. le produit des mêmes valeurs est égal au terme tout connu de la même équation.

On pourrait démontrer la même proposition plus directement de cette manière :

Représentons par x' et x'' les deux valeurs de x ; puisque $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, nous aurons

$$x'=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{p^2}{4}-q} \text{ et } x''=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{p^2}{4}-q}.$$

1°. Si nous ajoutons ces deux équations, membre à membre, nous aurons $x'+x''=-p$, ce qui confirme la première conséquence tirée ci-dessus.

2°. Si nous multiplions ces mêmes équations membre à membre, nous aurons $x'x''=q$, toutes réductions faites, ce qui s'accorde avec la seconde conséquence ci-dessus.

Des Equations des Degrés supérieurs qui peuvent se résoudre à la manière de celles du second degré.

205. Si une équation est de la forme $x^{2n}+px^n+q=0$ (c'est-à-dire si cette équation ne renferme l'inconnue que dans deux termes, et de telle manière que le plus haut exposant de cette inconnue soit double du plus petit), cette équation sera résoluble à la manière de celles du second degré, quel que soit n.

En effet, faisons $x^n=y$, nous aurons $y^2+py+q=0$; donc (n°. 198) $y=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$. Si maintenant nous mettons x^n à la place de y, nous aurons $x^n=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$, et par conséquent

$$x=\sqrt[n]{-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

d'où l'on voit qu'effectivement toute équation de la forme $x^{2n}+px^n+q=0$, pourra toujours se résoudre à la manière de celle du second degré, quel que soit n.

En effet, supposons que n soit négatif ; nous aurons

$$x=\sqrt[-n]{-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}}=\left(-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}\right)^{-\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}\right)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}}}.$$

Si n était fractionnaire, si l'on avait, par exemple, $n=\frac{p}{q}$, il en résulterait $x=\sqrt[\frac{p}{q}]{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}}$; d'où (n°. 81) $x=\sqrt[p]{\left(-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}\right)^q}$; ainsi la valeur (a) de x est tout-à-fait indépendante de la valeur de n.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si $n=1$, l'équation $x^{2n}+px^n+q=0$ se réduira à celle du second degré $x^2+px+q=0$.

D'où l'on voit que la résolution des équations du second degré n'est qu'un cas particulier de l'équation beaucoup plus générale $x^{2n}+px^n+q=0$.

206. Supposons que $n=2$, on aura $x^4+px^2+q=0$, et $x=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}}$, de sorte qu'une équation du 4^me. degré, de la forme $x^4+px^2+q=0$, donne quatre valeurs différentes pour l'inconnue, qui sont :

$$x=+\sqrt{-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}},\quad x=-\sqrt{-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}},$$
$$x=+\sqrt{-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}},\quad x=-\sqrt{-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}}.$$

Ces quatre valeurs, comme on voit, sont égales deux à deux, mais de signes contraires.

207. Actuellement, supposons l'équation $y^3-1=0$; il est clair que d'abord on aura $y=1$, que le premier membre de l'équation $y^3-1=0$ est divisible par $y-1$ (n°. 48), et qu'en effectuant la division, le quotient sera $y^2+y+1=0$; d'où l'on tirera

$$y=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}-1}=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{-\tfrac{3}{4}}=-\tfrac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}$$

ainsi, $y=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, ou $y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; donc l'équation $y^3-1=0$ donne pour y les trois valeurs $y=1$, $y=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, dont les deux dernières sont imaginaires. D'où l'on voit *que la racine cubique de l'unité a trois valeurs différentes.*

Cette proposition s'étend à la racine cubique d'un nombre quelconque.

En effet, puisque (n°. 78) la racine d'un produit est égale au produit des racines (de même indice) de ses facteurs; si l'on avait a^3, comme $a^3=1\times a^3$, il est clair que la racine cubique de a^3 serait a multiplié par la racine cubique de l'unité, qui a trois valeurs. Ainsi, $\sqrt[3]{a^3}=a$, $\sqrt[3]{a^3}=\frac{a(-1+\sqrt{-3})}{2}$, ou $\sqrt[3]{a^3}=\frac{a(-1-\sqrt{-3})}{2}$. Si on élève, en effet, chacune de ces racines cubiques au cube, on aura a^3.

Si nous savions résoudre généralement l'équation $y^n-1=0$, nous pourrions démontrer que la racine n^{me}. d'un nombre a autant de valeur qu'il y a d'unités dans n. Mais la résolution de cette équation repose sur des formules que nous ne connaissons pas encore, et que nous ne pouvons pas donner ici: ces formules appartiennent à la trigonométrie.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

208. Supposons à présent que $n=3$, l'équation du n°. 205 deviendra $x^6+px^3+q=0$, et la valeur (a) de x sera $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}}$. Or, nous venons de voir que la racine cubique d'un nombre avait trois valeurs, on aura donc :

$$x=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}}$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}}$$

$$\text{et}\quad x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}}$$

et comme la quantité qui est sous le radical a le double signe, il s'ensuivra que l'inconnue x aura 6 valeurs différentes.

Ainsi, une équation du 6me. degré de la forme $x^6+px^3+q=0$, donne six valeurs différentes pour l'inconnue.

Dans la théorie générale des équations, dont nous ne parlerons point dans cet ouvrage, mais qu'on peut voir dans l'algèbre de M. Lacroix, dans celle de M. Bourdon, etc., on démontre, qu'en général, une équation complète ou non du degré marqué par un nombre entier m quelconque, donne, pour l'inconnue, autant de valeurs différentes (que l'on appelle *racines* de l'équation) qu'il y a d'unités dans m.

16me. LEÇON.

Problêmes sur l'intérêt de l'argent.

209. *Résoudre un problême*, c'est trouver une ou plusieurs quantités, d'après des conditions auxquelles la quantité ou les quantités demandées doivent satisfaire, conjointement avec des quantités données. C'est aussi résoudre un problême que de trouver la démonstration d'une proposition déjà connue, mais qui n'avait pas encore été démontrée, ou qui l'avait été d'une autre manière.

Il n'y a pas de règles fixes pour résoudre un problême : il faut, d'après un mûr examen de l'état de la question, découvrir, comme par inspiration, quelles sont les relations, les rapports qui lient ce que l'on cherche à ce qui est donné, afin de parvenir à déterminer les opérations à faire, sur les quantités données, pour trouver celle ou celles que l'on cherche.

Pour réussir avec le plus de facilité possible, on représente par l'une des dernières lettres de l'alphabet, chacune des quantités demandées, et on opère sur ces lettres comme si, connaissant les quantités qu'elles représentent, on voulait les vérifier. De cette manière on arrive à une ou plusieurs équa-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tions, qu'il ne s'agit plus que de résoudre. Il suit de là que la résolution d'un problème se divise en deux parties : 1°. mettre le problème en équation; 2°. résoudre l'équation ou les équations auxquelles on est conduit. Ayant précédemment donné les moyens de résoudre les équations du premier et celles du second degré, il ne nous reste plus qu'à faire voir, par des exemples, comment on met les problèmes en équation.

210. 1^er. PROBLÈME. *On demande la rente d'un capital de* 12548 *fr., au taux de* 5 *pour* 100 *par an.*

Puisque 100 francs rapportent 5 francs, un franc rapporterait $\frac{5}{100}$ ou $\frac{1}{20}$; mais si 1 franc rapporte $\frac{1}{20}$ de franc, il est clair que 12548 francs rapporteront 12548 fois plus, de sorte que x étant la rente demandée, on aura $x = \frac{12548}{20}$, d'où $x = 627^{fr.}, 40$ c.

On voit, d'après cette solution, *qu'au* 5 *pour* 100 *la rente est le* 20^me *du capital.*

Si l'on veut résoudre le même problème généralement, supposons que a représente le capital, et b le taux d'intérêt pour 100 par an.

Puisque 100 francs rapportent b francs par an, dans le même temps un franc ne rapportera que le 100^me de b, c'est-à-dire $\frac{b}{100}$, mais on veut placer un capital a pendant le même temps; on aura donc autant de fois l'intérêt $\frac{b}{100}$ qu'il y aura de francs dans a: si donc x représente la rente demandée, on aura $x = \frac{ab}{100}$.

Il suit de là que pour avoir la rente annuelle d'un capital quelconque à un taux d'intérêt quelconque pour 100 par an, *il faut multiplier le capital par le taux d'intérêt, et diviser le produit par* 100.

Ainsi, par exemple, si le capital $a = 12548$, et le taux d'intérêt $b = 5$, on aura $x = \frac{12548 \times 5}{100} = \frac{62740}{100} = 627^{fr.}, 40$, comme ci-dessus.

211. 2^me. PROBLÈME. *On demande quel sera le capital qui rapportera* $627^{fr.}, 40$ *par an, au* 5 *pour* 100.

Si le capital proposé est représenté par x, d'après le problème précédent, en regardant x comme connu, la rente sera $\frac{x}{20}$, mais cette rente doit être $627^{fr.}, 40$; donc $\frac{x}{20} = 627,40$, d'où $x = 627,40 \times 20 = 12548$.

Il résulte de là que pour avoir le capital qui doit rapporter une rente donnée, au 5 pour 100, *il faut multiplier cette rente par* 20.

Si l'on veut résoudre ce problème généralement, soit a la rente donnée,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et b le taux d'intérêt; en représentant par x le capital demandé, il est clair que si ce capital était connu, en le multipliant par le taux d'intérêt et le divisant par 100, on aurait la rente; c'est-à-dire que cette rente serait égale à $\frac{bx}{100}$; mais cette rente est donnée égale à a; on aura donc $\frac{bx}{100} = a$, ou $bx = 100a$; d'où $x = \frac{100a}{b}$.

On voit par là que pour avoir le capital qui rapporterait une rente donnée, à un taux d'intérêt annuel quelconque, *il faut multiplier la rente donnée par* 100 *et diviser le produit par le taux d'intérêt.*

212. 3^{me}. PROBLÊME. *On demande ce que rapporterait dans* 7 *mois, un capital de* 1500 *fr., au* 5 *pour* 100 *par an.*

Si dans un an 100 fr. rapportent 5 fr., dans un mois ils ne rapporteront que le 12^{me} de 5 fr., c'est-à-dire $\frac{5}{12}$: dans 7 mois ils rapporteront 7 fois plus que dans un mois; de sorte que l'intérêt de 100 fr. dans 7 mois sera $\frac{7\times5}{12}$. Si dans 7 mois 100 fr. rapportent $\frac{7\times5}{12}$, dans le même temps un franc ne rapportera que $\frac{7\times5}{12\times100}$. Mais on veut placer 1500 fr. pour le même temps; si donc x représente ce que doit rapporter ce capital, on aura $x = \frac{7\times5\times1500}{1200}$ $= \frac{7\times5\times15}{12} = \frac{7\times5\times5}{4} = \frac{175}{4} = 43,75$.

Si l'on veut résoudre le même problême d'une manière générale, soient a le capital, b le nombre de mois, et c le taux d'intérêt. Cela posé, puisque 100 francs rapportent c francs dans un an, dans un mois la même somme rapporterait $\frac{c}{12}$, et dans b mois $\frac{bc}{12}$. Si dans b mois 100 francs rapportent $\frac{bc}{12}$; dans le même temps un franc, qui doit rapporter 100 fois moins, rapportera $\frac{bc}{1200}$; mais on veut placer a francs pour le même temps; si donc x représente ce que ce capital a doit rapporter, on aura $x = \frac{abc}{1200}$.

Il suit de cette solution générale que, pour avoir ce que doit rapporter un capital donné pendant un nombre de mois donnés, *il faudra multiplier le produit du capital et du nombre de mois par le taux d'intérêt annuel, et diviser le dernier produit par* 1200.

Remarque. Si le temps donné était un nombre de jours, au lieu de diviser le dernier produit dont il vient d'être question par 1200, on le diviserait par 36500, par la raison qu'alors, au lieu de regarder l'année composée de 12 mois, on la regarderait composée de 365 jours, ce qui revient à peu près au même.

213. 4^{me}. PROBLÊME. *Un capital de* 1500 *fr. a rapporté* 75 *fr. dans un an, on demande quel a été le taux d'intérêt.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Soit x le taux d'intérêt demandé. Si je le connaissais, et qu'on me demandât la rente du capital 1500 fr., d'après la solution générale du 1^er^. problème, j'aurais $\frac{1500x}{100}$ ou $15x$ pour cette rente ; mais cette rente est 75 fr.; donc $15x = 75$, d'où $x = \frac{75}{15} = 5$.

Pour résoudre ce problème généralement, soient a le capital donné, et b la rente ; en appelant x le taux demandé, si l'on demandait la rente, on aurait $\frac{ax}{100}$ (n°. 210), et comme cette rente est b, il en résultera que $\frac{ax}{100} = b$, d'où $ax = 100b$, et enfin $x = \frac{100b}{a}$.

On voit de là que pour avoir le taux d'intérêt, le capital et la rente étant donnés, *il faut multiplier la rente par* 100 *et diviser le produit par le capital.*

214. 5^me^. PROBLÈME. *Un capital de* 5460 *fr. a rapporté* $573^{fr.},30$ *dans* 21 *mois; on demande quel a été le taux d'intérêt annuel.*

Représentons par x le taux pour 100 par mois ; pour 21 mois l'intérêt de 100 fr. sera $21x$, pour un franc nous n'aurons que $\frac{21x}{100}$, et pour la rente du capital 5460 fr., $\frac{5460 \times 21x}{100}$ ou $\frac{546 \times 21x}{10}$. Or, cette rente est $573^{fr.},3$; donc $\frac{546 \times 21x}{10} = 573{,}3$, ou en faisant le produit de 546 par 21, et en faisant disparaître le dénominateur 10, $11466x = 5733$, d'où $x = \frac{5733}{11466} = \frac{1}{2}$. Or, si le taux par mois est $\frac{1}{2}$, par an il sera $\frac{12}{2} = 6$.

Si l'on veut résoudre ce problème généralement, on représentera le capital par a, la rente donnée par b, le nombre des mois par c, et le taux inconnu pour un mois par x. Cela posé, on observera que si pour un mois l'intérêt de 100 fr. est x, pour c mois il sera cx ; et si l'intérêt de 100 fr. pour c mois est cx, pour le même temps celui d'un franc sera $\frac{cx}{100}$, et par conséquent la rente du capital a sera $\frac{acx}{100}$. Or, cette rente est b, on aura donc $\frac{acx}{100} = b$, d'où $acx = 100b$, et enfin $x = \frac{100b}{ac}$.

Il suit de là que pour avoir le taux d'intérêt pour un mois quand on connaît le capital, la rente et le nombre des mois écoulés, *il faut multiplier la rente par* 100, *et diviser le produit par le capital multiplié par le nombre de mois.*

215. 6^me^. PROBLÈME. *Le capital* 4565 *fr. ayant rapporté* 845 *fr. dans un certain temps, on veut savoir ce que rapportera dans le même temps et au même taux d'intérêt, le capital* 2346 fr.

Si 4565 fr. ont rapporté 845 fr., un franc n'a rapporté que $\frac{845}{4565}$; mais si un franc a rapporté $\frac{845}{4565}$, 2346 fr. rapporteront 2346 fois plus ; de sorte que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

si x est la rente demandée, on aura $x = \frac{2346 \times 845}{4565} = \frac{1982370}{4565} = 434{,}25$ à moins d'un centième près.

216. 7me. PROBLÊME. *Un capital de* 35000 *fr. a rapporté* 2625 *fr. dans* 18 *mois, on demande ce que rapportera* 15465 *fr., au même taux d'intérêt, dans* 23 *mois.*

Puisque dans 18 mois le premier capital 35000 fr. a rapporté 2625 fr., dans un mois il n'aurait rapporté que $\frac{2625}{18}$; si dans un mois 35000 fr. rapportent $\frac{2625}{18}$, un franc ne rapportera que $\frac{2625}{18 \times 35000}$.

Puisqu'un franc rapporte $\frac{2625}{18 \times 35000}$ dans un mois, dans le même temps 15465 fr. rapporteront $\frac{2625 \times 15465}{18 \times 35000}$, et dans 23 mois ce dernier capital rapportera $x = \frac{2625 \times 15465 \times 23}{18 \times 35000} = \frac{933699375}{630000} = 1482{,}06$.

Pour résoudre ce problême d'une manière générale, après avoir représenté par a le premier capital, par b ce qu'il a rapporté, par c le nombre des mois qu'il a resté sur la place ; par d le second capital et par e le nombre des mois qu'il doit rester sur la place ; on observera que b étant ce que a a rapporté dans c mois, dans un mois le capital a n'aurait rapporté que $\frac{b}{c}$. Mais si dans un mois a rapporte $\frac{b}{c}$, un franc ne rapporterait que $\frac{b}{ac}$ dans le même temps. Connaissant ce que doit rapporter un franc dans un mois, il suffira de le multiplier par le second capital d pour avoir ce que ce second capital rapporterait dans le même temps, et on aura $\frac{bd}{ac}$. Enfin, multipliant ce dernier résultat par le nombre e de mois que le second capital doit rester sur la place, on aura $\frac{bde}{ac}$ pour l'intérêt demandé. Ainsi, si l'on représente cet intérêt par x, on aura $x = \frac{bde}{ac}$.

217. 8me. PROBLÊME. *Un particulier doit à un autre une somme a, qu'il ne peut payer qu'au bout d'un an; le débiteur et le créancier conviennent que l'intérêt sera à b pour* 100 *par an, et qu'il sera ajouté à la somme due : on demande de quelle valeur il faudra faire le billet.*

Puisque l'intérêt doit être ajouté au capital, si le capital n'était que de 100 fr., le billet devrait être de $100+b$ fr. Si pour 100 fr. le billet doit être de $100+b$ fr., pour un franc il serait de $\frac{100+b}{100}$; et, par conséquent pour a francs il sera $x = \frac{(100+b)a}{100}$, x étant la valeur du billet.

Il suit de là que *pour avoir la valeur du billet, il faut multiplier la somme*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

due par 100 *augmenté du taux d'intérêt, et diviser le produit par* 100. Ainsi, si l'intérêt était au 5 pour 100, et que la somme due fût 1500 francs,

$$x = \frac{(100+5)\times 1500}{100} = 105\times 15 = 1575 \text{ fr.}$$

218. *Remarque.* Quelquefois celui qui prête se fait payer l'intérêt de manière que, au lieu de donner 100 fr. et de faire signer le billet de $100+b$ (b étant l'intérêt de 100 fr.), comme nous venons de le supposer dans le problême précédent, il ne donne que $100-b$, et fait souscrire le billet de 100. Dans le premier cas on dit que l'escompte *est en dedans*, dans le second on dit qu'il est *en dehors*, et le débiteur se trouve payer, non-seulement l'intérêt de la somme qu'il doit, mais encore l'intérêt de l'intérêt.

219. 9^me^. PROBLÊME. *Un marchand achète pour a francs de marchandise, au comptant; mais ne pouvant payer qu'au bout d'un an, il emprunte la somme au taux annuel de b pour* 100, *l'escompte en dehors; on demande la valeur du billet.*

Puisque l'escompte est en dehors, si le débiteur recevait $100-b$, il ferait son billet de 100 fr.; et, par conséquent, s'il ne recevait qu'un franc, il ne ferait son billet que de $\frac{100}{100-b}$. Mais il reçoit a francs, il faudra donc qu'il fasse son billet $x = \frac{100a}{100-b}$.

C'est-à-dire que *pour avoir la valeur du billet, il faut multiplier la somme reçue par* 100, *et diviser le produit par* 100 *moins le taux annuel d'intérêt.* Si donc l'intérêt était au 5 pour 100, et que la somme empruntée fût de 1500 fr., on aurait $x = \frac{1500\times 100}{100-5} = \frac{150000}{95} = 1578{,}73$, à moins d'un centième près.

220. 10^me^. PROBLÊME. *On veut savoir quelle a été la somme prêtée sur un billet d'un an, dont la valeur est a francs, au b pour* 100, *l'escompte en dedans* (n°. 218).

Puisque l'escompte est en dedans, si la somme prêtée était 100, le billet serait de $100+b$, et si la somme prêtée n'était que d'un franc, le billet ne serait que $\frac{100+b}{100}$, si donc x est la somme prêtée, le billet sera $\frac{(100+b)x}{100}$; mais la valeur du billet est a; donc $\frac{(100+b)x}{100} = a$, d'où $(100+b)x = 100a$, et par conséquent $x = \frac{100a}{100+b}$, ce qui est l'inverse du problême du n°. 217.

Il suit de là que pour avoir le capital d'un billet donné d'un an, il faut multiplier la valeur du billet par 100 *et diviser le produit par* 100 *plus le taux d'intérêt pour* 100 *par an.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ainsi, si le billet était de 1575 fr. au 5 pour 100 par an, on aurait

$$x = \frac{1575 \times 100}{105} = \frac{157500}{105} = 1500.$$

221. 11^me. PROBLÊME. *Un billet d'un an est de a francs, au b pour* 100, *l'escompte étant en dehors; on demande la somme prêtée.*

Puisque l'escompte est en dehors, si le billet n'était que de 100 francs, la somme prêtée serait $100 - b$, et par conséquent, si le billet n'était que d'un franc, la somme prêtée ne serait que $\frac{100-b}{100}$. Or, le billet est de a francs; la somme prêtée, que nous représenterons par x, sera donc $x = \frac{(100-b)a}{100}$; ce qui est l'inverse du problême n°. 219.

Il suit de là que pour avoir la somme prêtée sur un billet donné d'un an, il faut multiplier la valeur du billet par 100 *moins le taux annuel d'intérêt, et diviser le produit par* 100.

222. 12^me. PROBLÊME. *Un marchand reçoit un billet à b mois de date de la valeur de a francs; on demande la valeur actuelle du billet, en supposant l'intérêt à c pour* 100 *par an, et l'escompte en dedans.*

Puisque c est l'intérêt de 100 fr. pour un an, pour un mois l'intérêt de la même somme ne serait que $\frac{c}{12}$, et par conséquent, pour b mois nous aurions $\frac{bc}{12}$. Maintenant, supposons qu'on demande la somme prêtée, d'après le 10^me. problême nous aurions $\frac{100a}{100+d}$, d étant l'intérêt de 100 fr. pour un an; mais comme il ne s'agit que de l'intérêt de b mois, qui est $\frac{bc}{12}$, en appelant x la valeur actuelle du billet en question, nous aurons $x = \frac{100a}{100+\frac{bc}{12}}$.

D'où l'on voit que *pour avoir la valeur actuelle d'un billet, l'escompte étant en dedans, il faut multiplier par* 100 *la somme portée par le billet, et diviser le produit par* 100 *plus l'intérêt de* 100 *fr. pour le nombre de mois qui restent à s'écouler pour arriver à l'échéance du billet en question.*

223. 13^me. PROBLÊME. *Supposons les mêmes choses que dans le problême précédent, mais que l'escompte soit en dehors.*

c étant encore l'intérêt de 100 fr. pour un an, pour un mois l'intérêt de la même somme ne serait que de $\frac{c}{12}$, et par conséquent, pour b mois l'intérêt serait $\frac{bc}{12}$. Si l'on nous demandait la somme prêtée, d'après le 11^me. problême, nous aurions $\frac{(100-d)a}{100}$, d étant l'intérêt de 100 fr. pour un an; mais comme il ne s'agit que de l'intérêt de b mois, qui est $\frac{bc}{12}$, en appelant x la valeur actuelle du billet en question, nous aurons $x = \frac{a\left(100-\frac{bc}{12}\right)}{100}$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où l'on voit que *pour avoir la valeur actuelle d'un billet, l'escompte étant en dehors, il faut retrancher de* 100 *fr. l'intérêt de* 100 *fr. pour le nombre de mois à courir pour arriver à l'échéance du billet, multiplier le reste par la somme portée par le billet, et diviser le produit par* 100.

17^me^. LEÇON.

Suite des Problêmes sur l'Intérêt de l'argent.

224. 14^me^. PROBLÊME. *On demande ce que deviendra un capital a au bout d'un nombre d'années n, en supposant qu'on laisse accumuler les intérêts des intérêts pendant tout le temps n, l'intérêt pour* 100 *par an étant b, et l'escompte étant en dedans.*

Pour savoir ce que deviendra le capital au bout de la première année, on multipliera le capital par la fraction $\frac{(100+b)}{100}$ (n°.217), ce qui donnera $\frac{(100+b)a}{100}$. Puisque le capital est $\frac{(100+b)a}{100}$ au bout de la première année, ou au commencement de la seconde, il est clair qu'il faudra multiplier ce capital par la fraction $\frac{(100+b)}{100}$, pour avoir ce qu'il deviendra au bout de la seconde, et on aura $\left(\frac{100+b}{100}\right)^2 a$. Puisque le capital est $\left(\frac{100+b}{100}\right)^2 a$ au bout de la seconde année, ou au commencement de la troisième, il faudra le multiplier par la fraction $\frac{100+b}{100}$, pour avoir ce qu'il deviendra au bout de la troisième année, et on aura $\left(\frac{100+b}{100}\right)^3 a$, et ainsi de suite; d'où l'on voit que le capital est multiplié par la fraction $\frac{100+b}{100}$, à la première puissance, pour une année, à la 2^me^. pour 2 années, à la 3^me^. pour 3 années, et ainsi de suite; de sorte que pour un nombre n d'années, il faudra multiplier le capital donné par la n^{me}. puissance de la fraction $\frac{100+b}{100}$; si donc x est ce que deviendra ce capital au bout de la n^{me}. année, on aura

$$x=\left(\frac{100+b}{100}\right)^n a. \quad \ldots\ldots (a).$$

Supposons que le nombre d'années $n=6$, le taux d'intérêt $b=5$, et le capital $a=1200$; on aura

$$x=\left(\frac{(100+5)}{100}\right)^6 \times 1200=\left(\frac{105}{100}\right)^6 \times 1200=(1{,}05)^6 \times 1200.$$

Si maintenant on opère par logarithmes, on aura $\mathrm{l}.x=\mathrm{l}(1{,}05)^6+\mathrm{l}.1200$, ou $\mathrm{l}.x=6\,\mathrm{l}(1{,}05)+\mathrm{l}.1200$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On prendra donc le logarithme de 1,05, qui est 0,0211893, on le multipliera par 6, ce qui donnera 0,1271358, qu'on ajoutera au logarithme de 1200, qui est 3,0791812, et on aura $\text{l}.x = 3{,}2063170$, et $x = 1608{,}114$.

225. 15me. PROBLÊME. *On demande combien il faudrait d'années pour qu'un capital représenté par a fût doublé, en laissant accumuler les intérêts et les intérêts des intérêts, l'escompte étant en dedans.*

Pour résoudre ce problême, on mettra $2a$ à la place de x et x à la place de n dans la formule (a) du numéro précédent, et on aura $2a = \left(\frac{100+b}{100}\right)^x a$, ou $2 = \left(\frac{100+b}{100}\right)^x$. D'où l'on voit que la solution du problême est indépendante du capital donné. Ensuite, on emploiera les logarithmes, et on aura $\text{l}.2 = x.\text{l}.\left(\frac{100+b}{100}\right)$, d'où l'on tirera $x = \frac{\text{l}.2}{\text{l}.\left(\frac{100+b}{100}\right)}$.

Supposons que le taux d'intérêt soit de 5 pour 100 par an ; on aura $x = \frac{\text{l}.2}{\text{l}.\frac{105}{100}} = \frac{\text{l}.2}{\text{l}.1{,}05} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = \frac{3010300}{211893}$. Au lieu de faire la division indiquée comme à l'ordinaire, on pourra la faire par logarithmes, et on aura $\text{l}.x = \text{l}.\,3010300 - \text{l}.\,211893 = 6{,}4786098 - 5{,}3261105 = 1{,}1524993$, et $x = 14{,}2069$; ainsi, au 5 pour 100 par an, l'escompte étant en dedans, il faut 14 ans et 0,2069 ou environ 14 ans 2 mois et 14 jours $\frac{1}{2}$ (voyez, arith. n°. 77), pour qu'un capital quelconque soit doublé, en laissant accumuler les intérêts et les intérêts des intérêts.

226. 16me. PROBLÊME. *On demande ce que deviendra un capital représenté par a, au bout d'un nombre d'années représenté par n, au taux d'intérêt représenté par b, l'escompte étant en dehors.*

D'après ce qui a été démontré au n°. 218, à la fin de la première année, ou au commencement de la seconde, le capital serait $\frac{100a}{100-b}$ ou $\frac{100}{100-b} \times a$. Puisque, au commencement de la seconde année, le capital est $\frac{100}{100-b} \times a$, au bout de cette année ou au commencement de la troisième, il deviendra ce même capital $\frac{100}{100-b} \times a$ multiplié par la fraction $\frac{100}{100-b}$, ce qui donnera $\left(\frac{100}{100-b}\right)^2 \times a$. Pour savoir ce que ce capital deviendra au bout de la troisième année, il faudra encore le multiplier par la fraction $\frac{100}{100-b}$, et on aura $\left(\frac{100}{100-b}\right)^3 \times a$, et ainsi de suite ; de sorte qu'au bout de la n^{me}. année, le capital donné sera $\left(\frac{100}{100-b}\right)^n \times a$; ainsi, en appelant x le capital, on aura $x = \left(\frac{100}{100-b}\right)^n \times a$. . . . . (b).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Supposons que le capital $a = 1200$, le nombre d'années $n = 14$, et le taux d'intérêt $b = 5$; on aura $x = \left(\frac{100}{95}\right)^{14} \times 1200$, et en employant les logarithmes,

$$\text{l.}x = 14 \times \text{l.}\frac{100}{95} + \text{l.}1200, \text{ ou } \text{l.}x = 14 \times (\text{l.}100 - \text{l.}95) + \text{l.}1200.$$

D'où
$$\begin{aligned}\text{l.}x &= 14 \times (2{,}00000000 - 1{,}97772361) + 3{,}07918125 \\ &= 14 \times 0{,}02227639 + 3{,}07918125 \\ &= 3{,}39105071, \text{ et par conséquent } x = 2460{,}655.\end{aligned}$$

227. 17^me^. PROBLÊME. *On demande combien il faudrait d'années pour qu'un capital représenté par a fût doublé, en laissant accumuler les intérêts et les intérêts des intérêts, l'escompte étant en dehors.*

D'après l'état de la question, on voit que, dans la formule (b) du numéro précédent, il faudra mettre $2a$ à la place de x, et x à la place de n, et on aura $2a = \left(\frac{100}{100-b}\right)^x \times a$, ce qui se réduit à $2 = \left(\frac{100}{100-b}\right)^x$, et en faisant usage des logarithmes, $\text{l.}2 = x\{\text{l.}100 - \text{l.}(100-b)\}$, d'où

$$x = \frac{\text{l.}2}{\text{l.}100 - \text{l.}(100-b)}.$$

Supposons que le taux d'intérêt $b = 5$, on aura $x = \frac{\text{l.}2}{\text{l.}100 - \text{l.}95}$
$= \frac{0{,}30103000}{2{,}0000000 - 1{,}97772361} = \frac{0{,}30103000}{0{,}02227639} = \frac{30103000}{2227639}$, et en prenant de nouveau les logarithmes, $\text{l.}x = \text{l.}30103000 - \text{l.}2227639 = 7{,}4786098 - 6{,}3478448$
$= 1{,}1307650$, et par conséquent $x = 13{,}5134$; de sorte que, pour qu'un capital quelconque soit doublé en laissant accumuler les intérêts et les intérêts des intérêts, il ne faut que 13 ans et 0,5134, ou 13 ans 6 mois et environ 5 jours, lorsque l'escompte est en dehors, tandis qu'il faut 14 ans 2 mois et environ 15 jours quand l'escompte est en dedans.

228. 18^me^. PROBLÊME. *Un particulier voulant faire des économies, place d'abord un capital représenté par a, et non-seulement il laisse accumuler les intérêts et les intérêts des intérêts, mais encore chaque année il ajoute un nouveau capital représenté par b; l'intérêt étant au taux de c pour 100, l'escompte étant en dedans; on demande quel sera son avoir au bout d'un nombre d'années représenté par n.*

Il est clair qu'au bout de la première année son avoir sera (n°. 217) $\frac{100+c}{100}a$, et qu'au commencement de la seconde il sera $\frac{100+c}{100}a + b$, puisqu'il doit ajouter le nouveau capital b. Si son avoir est $\frac{100+c}{100}a + b$ au commencement de la seconde année, au bout de cette même année, il sera $\left\{\frac{100+c}{100}a + b\right\}\frac{100+c}{100} = \left(\frac{100+c}{100}\right)^2 a + \frac{100+c}{100}b$, et au com-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mencement de la troisième $\left(\frac{100+c}{100}\right)^2 a+\frac{100+c}{100}b+b$. Puisque son avoir au commencement de la troisième année est $\left(\frac{100+c}{100}\right)^2 a+\frac{100+c}{100}b+b$, à la fin de cette troisième année il sera $\left\{\left(\frac{100+c}{100}\right)^2 a+\frac{100+c}{100}b+b\right\}\frac{100+c}{100}$, ou $\left(\frac{100+c}{100}\right)^3 a+\left(\frac{100+c}{100}\right)^2 b+\frac{100+c}{100}b$, et au commencement de la quatrième il sera $\left(\frac{100+c}{100}\right)^3 a+\left(\frac{100+c}{100}\right)^2 b+\frac{100+c}{100}b+b$, et ainsi de suite; de sorte que, au bout de la n^{me}. année, son avoir sera

$$x=\left(\frac{100+c}{100}\right)^n a+\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1}b+\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-2}b+\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-3}b\ldots\ldots\frac{100+c}{100}b.$$

d'où l'on tirera

$$x=\left(\frac{100+c}{100}\right)^n a+b\left\{\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1}+\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-2}+\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-3}\ldots\ldots+\left(\frac{100+c}{100}\right)\right\}$$

$$\text{ou } x=\left(\frac{100+c}{100}\right)^n a+b\left\{\frac{100+c}{100}+\left(\frac{100+c}{100}\right)^2+\left(\frac{100+c}{100}\right)^3\ldots\ldots\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1}\right\}$$

Mais le facteur compris dans la grande parenthèse est une progression géométrique dont le premier terme est $\frac{100+c}{100}$, la raison est égale au premier terme, le dernier terme est $\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1}$, et le nombre des termes $n-1$: on aura donc (n°. 155)

$$\frac{100+c}{100}+\left(\frac{100+c}{100}\right)^2+\ldots\ldots\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1}=\frac{\left(\frac{100+c}{100}\right)^n-\left(\frac{100+c}{100}\right)}{\frac{100+c}{100}-1};$$

$$\text{et par conséquent } x=\left(\frac{100+c}{100}\right)^n a+\frac{b\left\{\left(\frac{100+c}{100}\right)^n-\left(\frac{100+c}{100}\right)\right\}}{\frac{100+c}{100}-1}\ldots\ldots (a).$$

Si nous supposons le taux d'intérêt $c=5$, il viendra

$$x=(1{,}05)^n a+\frac{b\left\{(1{,}05)^n-(1{,}05)\right\}}{0{,}05}\ldots\ldots (b).$$

Supposons donc que le capital primitif $a=15000$, la somme ajoutée au bout de chaque année, qui est $b=1500$, et le nombre d'années $n=5$, en substituant dans la formule (b) on aura

$$x=(1{,}05)^5\times 15000+\frac{1500\left\{(1{,}05)^5-1{,}05\right\}}{0{,}05}\ldots\ldots (1).$$

Cela fait, on élevera 1,05 à la 5^{me}. puissance, et on aura 1,27628. De 1,27628 on retranchera 1,05, et le reste 0,22628 sera la valeur de la grande parenthèse. On multipliera ce reste 0,22628 par 1500, ce qui donnera le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

produit 339,42, qu'on divisera par 0,05, et on aura le quotient 6788,4, qui sera la partie fractionnaire de la formule (1). On multipliera la 5me. puissance de 1,05 qui est 1,27628 par 15000, et le produit 19154,2 sera la première partie de la formule (1) : on aura donc $x = 19154{,}2 + 6788{,}4 = 25942{,}6$.

229. 19me. PROBLÊME. *Un particulier place chez un banquier un certain capital représenté par a; et, chaque année, non-seulement il reçoit les intérêts de son capital, mais encore une certaine portion constante de ce capital; on demande à quoi son capital sera réduit au bout d'un nombre n d'années.*

Son capital resterait intact s'il ne recevait chaque année que l'intérêt; de sorte qu'au bout de la première année son capital serait encore a comme au commencement de cette première année; mais il prélève b, donc son capital doit se réduire à $a - b$. Ce nouveau capital resterait $a - b$ si le particulier ne prélevait que les intérêts, mais il prélève b de plus, donc son avoir se réduira encore de b; et deviendra $a - 2b$, et ainsi de suite; de sorte qu'au bout de la n^{me}. année il sera réduit à $a - nb$.

Remarque. Si l'on voulait savoir à quelle époque le capital serait anéanti, on ferait $a - nb = 0$, d'où l'on tirerait $n = \frac{a}{b}$.

Supposons que $a = 12000$, et $b = 600$; on aura $n = \frac{12000}{600} = 20$; ainsi, d'après ces hypothèses au bout de 20 ans le capital serait anéanti.

230. 20me. PROBLÊME. *Un particulier n'ayant pas assez de son revenu pour vivre, il place chez un banquier tout ce qu'il possède, et reçoit chaque année une somme constante b qui est plus considérable que les intérêts de son capital qui est représenté par a; l'intérêt est à c pour 100 par an, et l'escompte est en dedans; on demande à combien sera réduit son avoir au bout de n années.*

S'il ne retirait rien, au bout de la première année, son capital serait $\left[\frac{100+c}{100}\right]a$; mais comme il retire b, il ne sera que $\left[\frac{100+c}{100}\right]a - b$. Puisque le capital est $\left[\frac{100+c}{100}\right]a - b$ à la fin de la première ou au commencement de la seconde année, au bout de cette seconde année il serait $\left[\frac{100+c}{100}\right]^2 a - \left[\frac{100+c}{100}\right]b$, si le particulier ne recevait rien; mais comme il reçoit b, le capital se réduira à $\left[\frac{100+c}{100}\right]^2 a - \left[\frac{100+c}{100}\right]b - b$ au bout de la seconde année ou au commencement de la 3me.; et, si au bout de cette 3me. il ne recevait rien, il serait $\left[\frac{100+c}{100}\right]^3 a - \left[\frac{100+c}{100}\right]^2 b - \left[\frac{100+c}{100}\right]b$; mais il reçoit b, ce qui réduit le capital à $\left[\frac{100+c}{100}\right]^3 a - \left[\frac{100+c}{100}\right]^2 b - \left[\frac{100+c}{100}\right]b - b$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et ainsi de suite; de sorte que, au bout de la n^{me}. année le capital sera $\left(\frac{100+c}{100}\right)^n a - \left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1} b - \left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-2} b \ldots\ldots - \left(\frac{100+c}{100}\right) b - b$, ou

$$\left(\frac{100+c}{100}\right)^n a - b\left\{\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1} + \left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-2} + \left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-3} \ldots + \left(\frac{100+c}{100}\right) + 1\right\}$$

ou enfin

$$\left(\frac{100+c}{100}\right)^n a - b\left\{1 + \frac{100+c}{100} + \left(\frac{100+c}{100}\right)^2 + \left(\frac{100+c}{100}\right)^3 \ldots + \left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1}\right\}$$

Mais ce qui est dans la grande parenthèse est une progression géométrique, dont le premier terme est 1, la raison $\frac{100+c}{100}$, et le dernier terme est $\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1}$, en vertu de la formule $S = \left(\frac{dr-p}{r-1}\right)$ du n°. 155, on aura donc $\frac{\left(\frac{100+c}{100}\right)^n - 1}{\frac{100+c}{100} - 1}$ au lieu de cette grande parenthèse, et par conséquent, en appelant x la valeur actuelle du capital en question; on aura :

$$x = \left(\frac{100+c}{100}\right)^n a - \frac{\left\{\left(\frac{100+c}{100}\right)^n - 1\right\} b}{\frac{100+c}{100} - 1} \ldots\ldots (a).$$

Si le taux d'intérêt $c = 5$, cette formule générale se réduirait à

$$x = (1{,}05)^n a - \frac{\{(1{,}05)^n - 1\} b}{0{,}05} \ldots\ldots (b).$$

Supposons donc que le capital primitif $a = 15000$, la somme prélevée au bout de chaque année, qui est $b = 1500$; et le nombre d'années $n = 5$, en substituant dans la formule (b), on aura :

$$x = (1{,}05)^5 \times 15000 - \frac{\{(1{,}05)^5 - 1\} \times 1500}{0{,}05} \ldots\ldots (1).$$

Cela fait, on élevera 1,05 à la 5^{me}. puissance, et on aura 1,27628. De 1,27628 on retranchera 1, et le reste 0,27628 sera la valeur de la grande parenthèse; on multipliera ce reste 0,27628 par 1500, ce qui donnera le produit 414,420; qu'on divisera par 0,05, et on aura le quotient 8288,4, qui sera la partie négative de la formule (1). On multipliera la 5^{me}. puissance de 1,05 qui est 1,27628 par 15000, et le produit 19154,2 sera la partie positive de la formule (1); on aura donc $x = 19154{,}2 - 8288{,}4 = 10865{,}8$.

231. *Remarque.* Si l'on demandait à quelle époque le capital serait anéanti, on ferait le premier membre de la formule (b) égal à zéro, ce qui donnerait $(1{,}05)^n a - \frac{\{(1{,}05)^n - 1\} b}{0{,}05} = 0$, ou $0{,}05 \times (1{,}05)^n a - (1{,}05)^n b + b = 0$, d'où $\{(0{,}05) a - b\}(1{,}05)^n + b = 0$, et $(1{,}05)^n = \frac{b}{b - (0{,}05) a}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si maintenant nous prenons les logarithmes, nous aurons n l.1,05 = l.b — l. $\{ b - (0{,}05)\, a \}$, d'où $n = \frac{\text{l.}b - \text{l.}\{ b - (0{,}05)\, a \}}{\text{l.}1{,}05}$.

Supposons que le capital primitif $a = 15000$ et le second capital $b = 1500$; nous aurons $n = \frac{\text{l.}1500 - \text{l.}\{ 1500 - (0{,}05) \times 15000 \}}{\text{l.}1{,}05}$. Maintenant, multiplions 15000 par 0,05, et retranchons le produit 750 de 1500, et le reste 750 sera la valeur de la grande parenthèse : on aura donc $n = \frac{\text{l.}1500 - \text{l.}750}{\text{l.}1{,}05}$. $= \frac{3{,}17609126 - 2{,}87506126}{0{,}02118930} = \frac{0{,}30093000}{0{,}02118930} = \frac{3009300}{211893}$, et en prenant de nouveau les logarithmes, nous aurons :

l.n = l.3009300 — l.211893 = 6,4784655 — 5,3261105 = 1,1523550,

et par conséquent $n = 14{,}2022$ ou 14 ans, 2 mois, 12 jours $\frac{1}{2}$ environ. Ainsi au bout de ce temps cette personne ne posséderait plus rien.

18me. LEÇON.

Divers Problèmes sur les Nombres.

232. 21me. PROBLÈME. *Proposons-nous de partager le nombre a en deux parties dont la différence soit b.*

Soit x et y les deux parties demandées; il est clair que la somme de ces deux parties doit égaler le nombre à partager; ainsi on aura l'équation $x + y = a$; et, puisque la différence des deux parties est b, on aura cette autre équation $x - y = b$. Ajoutons ces deux équations et nous aurons $2x = a + b$; d'où $x = \frac{a+b}{2}$. Retranchons la seconde de la première des mêmes équations, et nous aurons $2y = a - b$, d'où $y = \frac{a-b}{2}$. Ainsi la plus grande partie est $\frac{a+b}{2}$, et la plus petite est $\frac{a-b}{2}$.

233. *Remarque.* On pourrait énoncer le même problème de cette manière : *on donne la somme et la différence de deux nombres; et on demande chacun de ces nombres.* En appelant x le plus grand et y le plus petit, d'après ce qu'on vient de voir on aurait $x = \frac{a+b}{2}$, et $y = \frac{a-b}{2}$. Mais on peut mettre ces deux nombres sous les formes suivantes :

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}, \text{ et } y = \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}.$$

Il suit de là que si l'on donne la somme et la différence de deux nombres, *on aura le plus grand en ajoutant la demi-somme à la demi-différence, et on aura le plus petit en retranchant la demi-différence de la demi-somme.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ce problême trouve souvent son application.

234. 22^me^. PROBLÊME. *On demande de partager un nombre a en trois parties telles, que la première surpasse la seconde de b, et la seconde surpasse la troisième de c.*

Soient x, y et z les trois parties demandées; il est clair que leur somme doit égaler le nombre à partager; ainsi, nous aurons cette première équation $x+y+z=a$. En second lieu, puisque la première surpasse la seconde de b, nous aurons $x-y=b$. Enfin, puisque la seconde surpasse la troisième de la quantité c, nous aurons $y-z=c$; de sorte que le problême donne lieu aux trois équations $x+y+z=a$, $x-y=b$, et $y-z=c$.

Prenons la valeur de y dans la seconde, et nous aurons $y=x-b$,..... (1) mettons-la dans la troisième, et il nous viendra $x-b-z=c$; d'où nous tirerons $z=x-b-c$..... (2). Substituons à y et z leurs valeurs dans la première équation, et nous aurons $x+x-b+x-b-c=a$, ou $3x=a+2b+c$; d'où $x=\frac{a+2b+c}{3}$. Mettons cette valeur de x dans l'équation (1), et il nous viendra $y=\frac{a+2b+c}{3}-b$, et en mettant b en forme de fraction,

$$y=\frac{a+2b+c}{3}-\frac{3b}{3}=\frac{a+2b+c-3b}{3}=\frac{a-b+c}{3}.$$

Mettons en second lieu la valeur de x dans l'équation (2), et nous aurons $z=\frac{a+2b+c}{3}-b-c$, ou $z=\frac{a+2b+c}{3}-\frac{3b}{3}-\frac{3c}{3}$ en mettant b et c en fraction; ce qui se réduit à $z=\frac{a+2b+c-3b-3c}{3}=\frac{a-b-2c}{3}$; ainsi les trois parties du nombre a seront

$$x=\frac{a+2b+c}{3}, y=\frac{a-b+c}{3}, \text{ et } z=\frac{a-b-2c}{3}.$$

Si les nombres $a=150$, $b=6$ et $c=12$, on aura

1°. $x=\frac{150+2\times6+12}{3}=\frac{174}{3}=58$;

2°. $y=\frac{150-6+12}{3}=\frac{156}{3}=52$.

Et 3°. $z=\frac{150-6-2\times12}{3}=\frac{120}{3}=40$.

235. 23^me^. PROBLÊME. *On demande de partager le nombre a en deux parties dont la seconde soit b de fois la première plus c.*

Soient x et y les deux parties; la seconde y sera $y=bx+c$... (1); or, la somme des parties doit égaler le nombre à partager; donc $x+bx+c=a$, ou $(1+b)x=a-c$, d'où $x=\frac{a-c}{1+b}$. Mettons cette valeur de x dans l'équation (1), et nous aurons $y=\frac{b(a-c)}{1+b}+c=\frac{b(a-c)+c(1+b)}{1+b}$, ou

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$y = \frac{ab-bc+c+bc}{1+b}$, en faisant les produits indiqués au numérateur; ce qui se réduit à $y = \frac{ab+c}{1+b}$. Ainsi les deux parties demandées seront $x = \frac{a-c}{1+b}$ et $y = \frac{ab+c}{1+b}$.

Si les nombres $a=120$, $c=12$ et $b=3$ on aura $x = \frac{120-12}{1+3} = \frac{108}{4} = 27$, et $y = \frac{120\times3+12}{1+3} = \frac{360+12}{4} = \frac{372}{4} = 93$; or la somme de ces deux nombres est bien égale au nombre 120 qu'il fallait partager.

236. 24^me^. PROBLÊME. *On demande de partager le nombre* 540 *en trois parties, dont la première soit* 3 *fois plus grande que la seconde et plus* 6, *et dont la troisième soit* 4 *fois plus petite que la seconde et moins* 3.

Soient x la première, y la seconde et z la troisième; puisque la première x doit être 3 fois plus grande que la seconde y et plus 6, on aura $x = 3y + 6$, et puisque la troisième doit être 4 fois plus petite que la seconde y et moins 3, on aura $z = \frac{y}{4} - 3$. Puis on observera que la somme des trois parties doit égaler le nombre à partager, de sorte qu'on aura $x+y+z = 540$. Ainsi on aura les trois équations

$$x+y+z=540,\ x=3y+6,\ \text{et}\ z=\frac{y}{4}-3\ldots\ldots\ldots(1).$$

Si dans la première nous mettons à la place de x et de z leurs valeurs données par les deux dernières équations, nous aurons $3y+6+y+\frac{y}{4}-3=540$, d'où nous tirerons 1°. $12y+4y+y+12=2160$; 2°. $17y=2148$, et 3°. $y = \frac{2148}{17} = 126{,}353$. Si maintenant on met cette valeur de y dans la seconde équation (1), on aura

$$x = 3\times126{,}353+6 = 379{,}059+6 = 385{,}059,$$

et si l'on met la valeur de y dans la troisième équation (1), on aura

$$z = \frac{126{,}353}{4} - 3 = 31{,}588 - 3 = 28{,}588.$$

Ainsi, les trois parties seront $x = 385{,}059$, $y = 126{,}353$ et $z = 28{,}588$, car en effet leur somme 540,000 est bien égale au nombre à partager.

Voici le même problême énoncé et résolu d'une manière générale :

237. 25^me^. PROBLÊME. *On demande de partager le nombre a en trois parties dont la première soit b de fois plus grande que la seconde et plus c, et la troisième d de fois plus petite que la seconde et moins e.*

Soient x la première, y la seconde et z la troisième; puisque la première doit être b de fois plus grande que la seconde et plus c, on aura $x=by+c$, et puisque la troisième doit être d de fois plus petite que la seconde et moins e,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on aura $z = \frac{y}{d} - e$. Puis, on observera que la somme des trois parties doit égaler le nombre à partager, de sorte que $x+y+z=a$. Ainsi on aura les trois équations suivantes :

(1)..... $x+y+z=a$, $x=by+c$, et $z=\frac{y}{d}-e$.

Si dans la première de ces trois équations nous mettons les valeurs de x et de z données par les deux dernières, on aura $by+c+y+\frac{y}{d}-e=a$, ou $bdy+cd+dy+y-ed=ad$, en faisant disparaître le dénominateur. Après avoir fait passer tous les termes connus dans le second membre, et avoir mis entre parenthèse tout ce qui multiplie y dans le premier, on aura $(bd+d+1)y=ad-cd+ed$, d'où $y=\frac{ad-cd+ed}{bd+d+1}$..... (2). Si maintenant on met cette valeur de y dans la seconde des équations (1), on aura $x=\frac{b(ad-cd+ed)}{bd+d+1}+c$, ou $x=\frac{b(ad-cd+ed)+c(bd+d+1)}{bd+d+1}$; en mettant c en forme de fraction. Enfin, si l'on fait les multiplications indiquées dans le numérateur de cette valeur de x, on aura $x=\frac{abd-bcd+bde+bcd+dc+c}{bd+d+1}$, ce qui se réduit à $x=\frac{abd+bde+dc+c}{bd+d+1}$.

Si l'on met la valeur (2) de y dans la troisième équation (1) il viendra $z=\frac{ad-cd+ed}{d(bd+d+1)}-e$, ou $z=\frac{a-c+e}{bd+d+1}-e$, en supprimant le facteur d commun aux deux termes de la fraction. Qu'on mette ensuite e en forme de fraction, et on aura $z=\frac{a-c+e-e(bd+d+1)}{bd+d+1}$.

238. 26^{me}. PROBLÊME. *On demande de partager le nombre* 864 *en deux parties qui soient entre elles* :: 3 : 5.

Soient x et y les deux parties demandées; nous aurons $x+y=864$, et $x:y::3:5$, d'où $5x=3y$ ou $5x-3y=0$; ainsi nous aurons les deux équations $x+y=864$ et $5x-3y=0$..... (1). Multiplions la première par 3, et nous aurons $3x+3y=2592$, et ajoutons ce produit à la seconde équation (1), il nous viendra $8x=2592$, d'où $x=\frac{2592}{8}=324$. Mettons cette valeur de x dans la première équation (1), et nous aurons $324+y=864$; d'où $y=864-324=540$. Ainsi, les parties demandées sont 324 et 540. En effet, leur somme est égale au nombre à partager 864, et on a 324 : 540 :: 3 : 5.

239. 27^{me}. PROBLÊME. *On demande de partager le nombre* 8648 *en trois parties qui soient entre elles* :: 3 : 5 : 7.

Soient x, y et z les parties demandées; on aura d'abord $x+y+z=8648$, et ensuite $x:y::3:5$ et $x:z::3:7$. De ces deux proportions, nous tire-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rons $5x=3y$, ou $5x-3y=0$, et $7x=3z$ ou $7x-3z=0$; ainsi, nous aurons les trois équations $x+y+z=8648$, $5x-3y=0$, et $7x-3z=0$....(1). Des deux dernières nous tirerons (2)..... $y=\frac{5x}{3}$, et $z=\frac{7x}{3}$. Mettons ces valeurs de y et z dans la première, et nous aurons $x+\frac{5x}{3}+\frac{7x}{3}=8648$. Faisons disparaître le dénominateur de cette dernière, et nous aurons $3x+5x+7x=25944$, ou $15x=25944$, d'où $x=\frac{25944}{15}=1729,6$. Mettons cette valeur de x dans chacune des équations (2), et nous aurons $y=\frac{5\times 1729,6}{3}=\frac{8648}{3}=2882,66$, et $z=\frac{7\times 1729,6}{3}=\frac{12107,2}{3}=4035,73$.

240. Résolvons les deux derniers problèmes généralement, et d'abord le premier, dont l'énoncé sera : *on demande de partager le nombre a en deux parties qui soient entre elles* :: $m:n$.

Soient x et y les deux parties demandées; on aura d'abord $x+y=a$, et ensuite $x:y::m:n$, d'où $y=\frac{nx}{m}$. Mettons cette valeur de y dans la première équation, et nous aurons $x+\frac{nx}{m}=a$, ou $mx+nx=ma$, d'où $x=\frac{ma}{m+n}=m\times\frac{a}{m+n}$. Si dans l'équation $y=\frac{nx}{m}$ on met $\frac{ma}{m+n}$ au lieu de x, il nous viendra $y=\frac{nma}{m(m+n)}=\frac{na}{m+n}=n\times\frac{a}{m+n}$.

Il suit de cette solution 1°. *que pour avoir la première partie, il faut multiplier par le nombre m, correspondant à la première partie dans le rapport donné, le quotient du nombre à partager par la somme des termes du rapport des deux parties;* 2°. *pour avoir la seconde, il faut multiplier le même quotient par n correspondant à la seconde partie.*

L'énoncé du second des deux problèmes précédens se généralise de cette manière : *on demande de partager le nombre a en trois parties qui soient entre elles* :: $m:n,p$.

Si donc x, y et z représentent les trois parties demandées, on aura d'abord $x+y+z=a$, et ensuite $x:y::m:n$, et $x:z::m:p$. De ces deux proportions nous tirerons $y=\frac{nx}{m}$, et $z=\frac{px}{m}$..... (1), et si nous mettons ces valeurs de y et de z dans la première équation trouvée, nous aurons $x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a$, ou $mx+nx+px=ma$; d'où $x=\frac{ma}{m+n+p}=m\times\frac{a}{m+n+p}$. Si au lieu de x nous mettons $\frac{ma}{m+n+p}$ dans la valeur (1) ci-dessus de y, nous aurons $y=\frac{nma}{m(m+n+p)}=\frac{na}{m+n+p}=n\times\frac{a}{m+n+p}$. Enfin, si nous mettons la valeur $\frac{ma}{m+n+p}$ de x dans celle (1) de z, nous aurons $z=\frac{pma}{m(m+n+p)}=\frac{pa}{m+n+p}=p\times\frac{a}{m+n+p}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En examinant les valeurs des trois parties demandées, on verra que 1°. *pour avoir la première, il faut multiplier le nombre m, qui lui correspond dans les rapports donnés, par le quotient du nombre à partager, divisé par la somme des trois termes des rapports donnés;* 2°. *pour avoir la seconde, il faut multiplier le même quotient par le nombre n qui correspond à cette seconde partie dans les rapports donnés;* 3°. *enfin, pour avoir la troisième partie, il faut multiplier le même quotient par le nombre p qui lui correspond dans les rapports donnés.*

Cette règle a lieu quelque soit le nombre des parties dans lesquelles on veut diviser le nombre à partager, et quelque soit le rapport de ces parties, et elle n'est autre chose que ce qu'on appelle la *règle de société.* En effet, cette dernière n'a d'autre objet que de partager un *bénéfice* ou une *perte* en autant de parties qu'il y a d'associés, de manière que ces parties soient entre elles comme les mises de fonds des associés.

Il résulte de là que pour partager un bénéfice ou une perte entre un certain nombre d'associés, il faut diviser le bénéfice ou la perte par la somme des mises de fonds de tous les associés, et ensuite multiplier le quotient 1°. par la mise du premier associé pour avoir sa part du bénéfice ou de la perte; 2°. par la mise du second associé pour avoir sa part du bénéfice ou de la perte; 3°. par la mise du troisième associé pour avoir sa part du bénéfice ou de la perte, et ainsi de suite.

241. 28^me^. PROBLÈME. *On demande quel est le nombre dont le* $\frac{1}{3}$, *le* $\frac{1}{4}$, *les* $\frac{2}{5}$ *et les* $\frac{5}{6}$ *réunis plus* 12 *font* 160.

Soit x le nombre demandé : son tiers sera $\frac{x}{3}$, son quart $\frac{x}{4}$; ses deux cinquièmes $\frac{2x}{5}$, et ses cinq sixièmes $\frac{5x}{6}$, d'après l'état de la question, on aura donc $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{2x}{5}+\frac{5x}{6}+12=160$.

Passons le terme 12 dans le second membre, ce qui donnera $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{2x}{5}+\frac{5x}{6}=160-12=148$, et mettons ensuite au même dénominateur, et faisons disparaître ce dénominateur; nous aurons $20x+15x+24x+50x=8880$, ce qui se réduit à $109x=8880$, d'où $x=\frac{8880}{109}=81+\frac{51}{109}$.

242. 29^me^. PROBLÈME. On demande un nombre tel que, si on l'augmente de 12 et de 26, on ait deux sommes qui soient entre elles :: 5 : 7.

Soit x le nombre demandé, la première somme sera $x+12$, et la seconde $x+26$; d'après l'état de la question, on aura donc $x+12 : x+26 :: 5 : 7$; d'où $7(x+12)=5(x+26)$, ou $7x+84=5x+130$, ou en

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

transposant $7x-5x=130-84$, ce qui se réduit à $2x=46$; d'où $x=\frac{46}{2}=23$. En effet, $23+12=35$, et $23+26=49$; mais, d'après l'état de la question, on doit avoir $35:49::5:7$, et c'est ce qui a lieu en effet, puisque $\frac{35}{49}=\frac{5}{7}$.

Si en général on nous demandait *un nombre tel, qu'étant augmenté de a et de b les deux sommes fussent entre elles* $::m:n$; en appelant x le nombre demandé, on aurait $x+a:x+b::m:n$; d'où $n(x+a)=m(x+b)$, ou $nx+an=mx+mb$, ou encore $(n-m)x=mb-an$; d'où $x=\frac{mb-an}{n-m}$.

243. 30me. PROBLÈME. *On demande deux nombres tels, que si l'on ôte une unité au premier pour l'ajouter à l'autre, les deux résultats soient égaux, et que si l'on ôte une unité au second pour l'ajouter au premier, ce dernier résultat soit double de l'autre.*

Soient x et y les deux nombres demandés : d'après la première partie de l'état de la question, on aura $x-1=y+1$, et d'après la seconde $x+1=2(y-1)$ ou $x+1=2y-2$: ainsi, on aura les deux équations $x-1=y+1$, $x+1=2y-2$. Si on les retranche l'une de l'autre, la première de la seconde, par exemple; on aura $2=y-3$; d'où $y=5$. Mettons cette valeur de y dans la première de nos équations, et nous aurons $x-1=5+1$; d'où nous tirerons $x=5+1+1=7$. Ainsi, les nombres demandés sont 7 et 5. Et en effet, si du premier nous ôtons une unité pour l'ajouter au second, les résultats seront 6, et si du second on retranche une unité pour la joindre au premier, les résultats seront 8 et 4, de sorte que le premier sera double du second.

En général, *supposons qu'on nous demande deux nombres tels, que si l'on ôte a unités du premier pour les ajouter au second, le second résultat soit b de fois plus grand que le premier; et que, si l'on ôte c d'unités du second pour les ajouter au premier, ce dernier résultat soit d de fois plus grand que le second.*

D'après la première partie de l'énoncé, nous aurons $b(x-a)=y+a$, et d'après la seconde partie $x+c=d(y-c)$. En effectuant les multiplications indiquées, nous aurons les deux équations

$$bx-ab=y+a, \text{ et } x+c=dy-ed \ldots\ldots\ldots (1).$$

Multiplions la seconde par b, et retranchons-la de la première, nous aurons $-bc-ab=y-bdy+a+bed$, ou en passant les y dans le premier membre, et toutes les quantités connues dans le second,

$bdy-y=a+bed+ab+bc$, ou $y(bd-1)=a+bed+ab+bc$, d'où

$$y=\frac{a+bed+ab+bc}{bd-1}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Actuellement, multiplions la première équation par d, et retranchons la seconde du produit; nous aurons

$bdx - x - abd - c = ad + ed$, ou $(bd - 1)x = ad + ed + abd + c$, d'où

$$x = \frac{ad+ed+abd+c}{bd+1}.$$

19^me. LEÇON.

Suite des Problèmes sur les Nombres.

244. 31^me. PROBLÊME. *On a deux fontaines dont la première coulant seule peut remplir un certain bassin dans 4 heures, et dont la seconde coulant seule peut remplir le même bassin dans 6 heures; on demande combien ces deux fontaines mettraient de temps pour remplir le même bassin, en les faisant couler toutes les deux à la fois.*

Si la première fontaine peut remplir le bassin en question dans 4 heures, il est clair que dans une heure elle en remplira le $\frac{1}{4}$; et puisque la seconde peut remplir le même bassin dans 6 heures, dans une heure elle en rempliera le $\frac{1}{6}$. Ainsi dans une heure les deux fontaines, coulant ensemble, fourniront une quantité d'eau exprimée par $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$, ou $\frac{6+4}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$. Si donc x est le nombre d'heures qu'il faudra aux deux fontaines, coulant ensemble, pour remplir le bassin, la quantité d'eau contenue dans ce bassin sera $\frac{5x}{12}$, et par conséquent, comme nous avons regardé le contenu du bassin comme étant l'unité, $\frac{5x}{12} = 1$, ou $5x = 12$; d'où $x = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.

245. 32^me. PROBLÊME. *Une fontaine coulant seule peut remplir un certain bassin dans 4 heures; une autre fontaine coulant seule peut vider le même bassin dans 6 heures; on demande en combien de temps ces deux fontaines, coulant ensemble rempliront ce bassin.*

Puisque la première fontaine peut remplir le bassin dans 4 heures, dans une heure elle en remplira le $\frac{1}{4}$; et puisque la seconde peut le vider dans 6 heures, dans une heure elle en videra le $\frac{1}{6}$: la quantité d'eau qu'il y aura au bout d'une heure dans le bassin sera donc $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$ ou $\frac{6-4}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$; si donc x est le nombre d'heures qu'il faudra aux deux fontaines pour remplir le bassin, on aura $\frac{x}{12} = 1$, d'où $x = 12$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

246. 33me. PROBLÊME. *Deux fontaines coulant successivement pendant* 12 *heures, ont rempli un bassin contenant* 260 *litres d'eau; la première fontaine fournissait* 25 *litres d'eau par heure, et la seconde* 17; *on demande combien chaque fontaine a coulé de temps.*

Soient x et y les temps demandés; puisque les fontaines ont coulés successivement pendant 12 heures, on aura $x+y=12$. Et puisque la quantité d'eau qu'elles ont fourni est 260 litres, la première ayant fourni 25 litres à l'heure, et la seconde 17, on aura $25x+17y=260$; de sorte qu'on aura les deux équations $x+y=12$, $25x+17y=260$.

Multiplions la première par 17, ce qui donnera $17x+17y=204$, et retranchons le produit de la seconde équation; il nous viendra $8x=56$; d'où $x=\frac{56}{8}=7$. Mettons cette valeur de x dans la première équation, et nous aurons $7+y=12$, d'où $y=12-7=5$.

247. 34me. PROBLÊME. *On a du vin à* 25s. *le litre et à* 20s., *et on veut en former une pièce de* 350 *litres qui coûte* 8150s.

Soient x le nombre de litres qu'il faut prendre à 25s., et y le nombre qu'il faut en prendre à 20s.; puisque la pièce doit se composer de 350 litres, on aura $x+y=350$, les x litres à 25s. coûteront $25x$, et les y litres à 20s. coûterons $20y$; on aura donc $25x+20y=8150$, ainsi on aura les deux équations

$$x+y=350 \text{ et } 25x+20y=8150 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Multiplions la première par 20, et nous aurons $20x+20y=7000$, retranchons cette dernière équation de la seconde, et il nous viendra $5x=1150$; d'où nous tirerons $x=\frac{1150}{5}=230$.

Mettons cette valeur de x dans la première équation (1), et il nous viendra $230+y=350$; d'où $y=350-230=120$.

248. 35me. PROBLÊME. *On veut payer* 162f. *en* 29 *pièces de deux espèces; la première de* 6f. *et la seconde de* 5f., *on demande le nombre de pièces qu'il faudra de chaque espèce.*

Soient x le nombre des pièces à 6f., et y le nombre des pièces à 5f.; puisqu'il faut 29 pièces, on aura $x+y=29$, les x pièces à 6 francs feront $6x$, et les y pièces à 5 francs feront $5y$, et comme la somme à payer est 162f., on aura $6x+5y=162$; ainsi on aura les deux équations $x+y=29$ et $6x+5y=162$....(1) Multiplions la première par 5, ce qui donnera $5x+5y=145$, et retranchons le produit de la seconde, et il nous viendra $x=17$.

Mettons cette valeur de x dans la première équation (1), et il en résultera

$$17+y=29, \text{ d'où } y=29-17=12.$$

249. 36me. PROBLÊME. *Un particulier achète* 100 *oranges, à condition*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'il payera 12^{s}. *par orange qui sera bonne, et qu'il recevra, au contraire,* 5^{s}. *par orange qui sera mauvaise; tout compte fait, il paye* 435^{s}.*; on demande le nombre des bonnes oranges et le nombre des mauvaises.*

Soient x le nombre des bonnes oranges, et y le nombre des mauvaises; puisque le nombre total des oranges est 100, on aura $x+y=100$. Ensuite, x étant le nombre des bonnes oranges, et chaque bonne orange coûtant 12^{s}., on aura $12x$ pour ce que devra payer l'acheteur; mais comme y est le nombre des mauvaises, et que le vendeur doit 5^{s}. pour chacune, l'acheteur recevra $5y$; de sorte que pour avoir ce que ce dernier doit payer en définitive, il faudra retrancher $5y$ de $12x$; or, il a payé 435^{s}.; donc $12x-5y=435$. Ainsi on aura les deux équations

$$x+y=100, \text{ et } 12x-5y=435..... (1).$$

Multiplions la première par 5, ce qui nous donnera $5x+5y=500$, et ajoutons le produit à la seconde; nous aurons $17x=935$; d'où $x=\frac{935}{17}=55$.

Mettons cette valeur de x dans la première équation (1), et nous aurons

$$55+y=100, \text{ d'où } y=100-55=45.$$

250. 37^{me}. PROBLÊME. *Pour payer un certain nombre de toises d'ouvrage à raison de* 15^{f}.*; la toise il me manque* 15^{f}.*; mais si ce n'était qu'à* 12^{f}. *la toise, il me resterait* 12^{f}., *combien y a-t-il de toises à payer, et combien ai-je d'argent?*

Soient x le nombre de toises, et y le nombre de francs. Puisque pour payer les x toises à 15^{f}. la toise il me manque 15^{f}. j'aurai $15x=y+15$, et puisqu'en payant les x toises à 12^{f}. j'ai 12^{f}. de reste, j'aurai $12x=y-12$. Retranchons cette dernière équation de la première, et nous aurons $3x=15+12=27$; d'où $x=\frac{27}{3}=9$. Mettons cette valeur de x dans l'une des équations trouvée, dans la seconde, par exemple, et nous aurons $12\times 9=y-12$; d'où nous tirerons $y=108+12=120$,

Ainsi il y avait 9 toises d'ouvrage et j'avais 120^{f}.

251. 38^{me}. PROBLÊME. *Un père en mourant laisse un certain nombre d'enfans et un certain héritage, et il ordonne, par son testament, que le partage se fera de manière que le premier enfant prélevera* 100^{f}. *et le* 10^{me}. *du reste; le deuxième* 200^{f}. *et le* 10^{me}. *du reste; le troisième* 300^{f}. *et le* 10^{me}. *du reste, et les autres ainsi de suite; de sorte que le partage se trouve être fait par portions égales; on demande quels ont été l'héritage, le nombre d'enfans et la part de chacun.*

Appelons x l'héritage, et formons les parts des deux premiers enfans; celle du premier se composera de $100+\frac{x-100}{10}$, ce qui se réduit à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\frac{1000+x-100}{10}$, ou $\frac{x+900}{10}$. Pour avoir la part du second, nous retrancherons celle du premier de l'héritage x, ce qui nous donnera $x-\frac{x+900}{10}$, qui se réduit à $\frac{10x-x-900}{10}=\frac{9x-900}{10}$. Ensuite, comme la part du second s'obtient en retranchant 200^{f}. sur ce que le premier a laissé de l'héritage, et en ajoutant le 10^{me}. du reste à ces 200^{f}. prélevés, nous aurons d'abord pour le reste $\frac{9x-900}{10}-200=\frac{9x-900-2000}{10}=\frac{9x-2900}{10}$, et pour la part cherchée $200+\frac{9x-2900}{100}=\frac{20000+9x-2900}{100}=\frac{9x+17100}{100}$. Mais la part du premier vient d'être trouvée égale à $\frac{x+900}{10}$; or, ces deux parts doivent être égales; donc $\frac{x+900}{10}=\frac{9x+17100}{100}$. Mettons au même dénominateur, ce qui donnera

$$10x+9000=9x+17100, \text{ ou } 10x-9x=17100-9000,$$

et, en réduisant, $x=8100$. Ainsi l'héritage était de 8100^{f}.

Mettons la valeur 8100 de l'héritage dans la part du premier enfant, qui est $\frac{x+900}{10}$, et nous aurons $\frac{8100+900}{10}=\frac{9000}{10}=900$ pour la part de chaque enfant.

Si donc nous divisons l'héritage 8100 par la part 900 de chaque enfant, le quotient $\frac{8100}{900}=\frac{81}{9}=9$ sera le nombre d'enfans.

252. 39^{me}. PROBLÈME. *On demande une fraction telle que, si l'on ajoute* 1 *au numérateur elle soit égale à* $\frac{1}{3}$, *et si l'on ajoute* 1 *au dénominateur elle soit égale à* $\frac{1}{4}$.

Soit $\frac{x}{y}$ la fraction demandée; dans le premier cas de l'énoncé nous aurons $\frac{x+1}{y}=\frac{1}{3}$, et dans le second $\frac{x}{y+1}=\frac{1}{4}$. Faisons disparaître les dénominateurs de ces deux équations et nous aurons

$$3x+3=y \text{ et } 4x=y+1 \ldots\ldots (1).$$

Retranchons la première de la seconde, et il nous viendra

$$x-3=1, \text{ d'où } x=1+3=4.$$

Mettons cette valeur de x dans la première équation (1), et il résultera $3\times 4+3=y$ ou $y=12+3=15$. Ainsi la fraction demandée sera $\frac{4}{15}$.

253. 40^{me}. PROBLÈME. *Une personne a trois espèces de monnaie;* 7 *pièces de la première espèce,* 9 *pièces de la seconde et* 11 *de la troisième font* 128^{f}.; 15 *pièces de la première espèce,* 12 *de la seconde et* 18 *de la troisième font* 219^{f}, *et enfin* 24 *pièces de la première espèce,* 16 *de la seconde et* 4 *de la troisième font* 192^{f}.; *on demande la valeur de chaque espèce de monnaie.*

Soient x la valeur de la première espèce, y celle de la seconde et z celle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la troisième : d'après l'état de la question il est clair qu'on aura $7x+9y+11z=128$, $15x+12y+18z=219$ et $24x+16y+4z=192$, ou

$7x+9y+11z=128$, $5x+4y+6z=73$, et $6x+4y+z=48$..... (1).

En éliminant z (n°. 191) entre la première et la troisième, et entre la seconde et la troisième, on aura (2)..... $59x+35y=400$, $31x+20y=215$, et en éliminant y entre ces deux dernières $19x=95$, d'où $x=\frac{95}{19}=5$.

En mettant cette valeur de x dans la seconde équation (2), il viendra $31\times 5+20y=215$; ou $20y=215-155$, d'où $y=\frac{60}{20}=3$. Enfin, en mettant les valeurs de x et de y dans la troisième équation (1), on aura

$6\times 5+4\times 3+z=48$, ou $z=48-30-12$, d'où $z=48-42=6$.

Ainsi la première espèce de monnaie est de 5^{f}., la seconde de 3^{f}. et la troisième de 6^{f}.

254. 41^{me}. PROBLÊME. *On demande de partager le nombre* 12 *en deux parties dont le produit soit* 35.

Soit x l'une des parties demandées, $12-x$ sera l'autre; et comme le produit des deux parties doit égaler 35, on aura $x(12-x)=35$, ou $12x-x^2=35$ ou bien encore $x^2-12x+35=0$. Si maintenant nous comparons cette équation à l'équation générale (n°. 201) $x^2+px+q=0$ du second degré, qui donne $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, on verra que $p=-12$, et $q=35$, et que par conséquent $x=6\pm\sqrt{36-35}=6\pm 1$. Ainsi la première partie du nombre à partager sera 7, et la seconde 5.

255. 42^{me}. PROBLÊME. *Trouver deux nombres dont la somme soit a et le produit b.*

x et y étant les nombres demandés, d'après l'état de la question on aura $x+y=a$ et $xy=b$. De la dernière de ces équations on tirera $y=\frac{b}{x}$, et en écrivant cette valeur de y dans la première, on aura $x+\frac{b}{x}=a$, d'où $x^2+b=ax$, ou $x^2-ax+b=0$. Ainsi (n°. 201) on aura $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$. Les deux nombres demandés seront donc $\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$ et $\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$.

256. 43^{me}. PROBLÊME. *On demande deux nombres dont la différence soit a et le produit b.*

En appelant x et y les nombres demandés, on aura les deux équations $x-y=a$ et $xy=b$, lesquelles conduiront à celle-ci $x^2-ax-b=0$, qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donnera $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$; de sorte que les deux nombres demandés seront $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$ et $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$.

257. 44me. PROBLÊME. *On demande de partager le nombre* 340 *en deux parties, dont l'une soit moyenne proportionnelle entre le nombre donné* 340 *et l'autre partie, ce qui s'appelle diviser un nombre en moyenne et extrême raison.*

Soit x la partie moyenne; l'autre partie sera $340 - x$, et d'après l'état de la question on aura $340 : x :: x : 340 - x$, d'où l'on tirera $x^2 = 340\,(340 - x) = 115600 - 340x$ ou $x^2 + 340x - 115600 = 0$, ce qui donnera (n°. 201)

$$x = -170 \pm \sqrt{28900 + 115600},$$

$$\text{ou } x = -170 \pm \sqrt{144500},$$

$$\text{et enfin } x = -170 \pm 380{,}13.$$

Ainsi la partie moyenne est $-170 + 380{,}13 = 210{,}13$, et par conséquent l'autre partie sera $340 - 210{,}13 = 129{,}87$.

On remarquera que nous ne tenons point compte de la valeur négative de x, parce que cette valeur ne convient point à l'état de la question. Cette valeur négative est $x = -550{,}13$.

258. 45me. PROBLÊME. *On demande un nombre qui soit moyen proportionnel entre* 340 *et* 340 *plus le nombre demandé lui-même.*

Soit x ce nombre demandé; d'après l'état de la question on aura $340 : x :: x : 340 + x$, d'où l'on tirera l'équation $x^2 = 340\,(340 + x) = 115600 + 340x$, ou $x^2 - 340x = 115600$, ce qui donnera $x = 170 \pm \sqrt{28900 + 115600}$ ou $x = 170 \pm 380{,}13$, ou enfin $x = 170 + 380{,}13 = 550{,}13$.

On remarquera que nous ne prenons point la valeur négative, qui est la même, abstraction faite du signe, que la valeur positive du problême précédent, et que la valeur positive que nous prenons ici est la même que la valeur négative du même problême précédent. Ainsi, ces deux problêmes sont l'inverse l'un de l'autre.

259. 46me. PROBLÊME. *Diviser le nombre a en deux parties, dont les carrés soient entre eux :: m : n.*

Soit x la première partie, la seconde sera $a - x$, et d'après l'état de la question on aura $m : n :: x^2 : (a - x)^2$; d'où $nx^2 = m\,(a^2 - 2ax + x^2)$ ou $nx^2 - mx^2 + 2amx = ma^2$, ou bien $x^2\,(n - m) + 2amx = ma^2$, ou encore $x^2 + \frac{2am}{n-m}\,x = \frac{ma^2}{n-m}$; d'où l'on tirera (n°. 201)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$x=-\frac{am}{n-m}\pm\sqrt{\frac{a^2m^2}{(n-m)^2}+\frac{ma^2}{n-m}}$ ou $x=-\frac{am}{m-n}\pm\frac{a}{n-m}\sqrt{m^2+nm-m^2}$, ou enfin $x=-\frac{am}{m-n}\pm\frac{a}{m-n}\sqrt{nm}=\frac{am\pm a\sqrt{nm}}{m-n}$.

En partant de la proportion $m:n::x^2:(a-x)^2$, on pourrait résoudre ce problême plus simplement, en extrayant la racine carrée (n°. 139) de tous les termes de cette proportion, ce qui donnerait $\sqrt{m}:\sqrt{n}::x:a-x$, et par conséquent $a\sqrt{m}-x\sqrt{m}=x\sqrt{n}$, ou $x(\sqrt{m}+\sqrt{n})=a\sqrt{m}$; d'où $x=\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$.

Faisons voir que la première valeur de x est la même que cette dernière. En effet, $m=\sqrt{m}\times\sqrt{m}$, $n=\sqrt{n}\times\sqrt{n}$, et $\sqrt{nm}=\sqrt{n}\times\sqrt{m}$; on pourra donc mettre $\sqrt{m}\times\sqrt{m}$ au lieu de m, $\sqrt{n}\times\sqrt{n}$, au lieu de n, et $\sqrt{n}\times\sqrt{m}$ au lieu de $\sqrt{nm}$ dans $x=\frac{am\pm a\sqrt{nm}}{m-n}$, et il viendra $x=\frac{a\sqrt{m}\sqrt{m}-a\sqrt{n}\sqrt{m}}{\sqrt{m}\sqrt{m}-\sqrt{n}\sqrt{n}}=\frac{a\sqrt{m}(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{\sqrt{m}\sqrt{m}-\sqrt{n}\sqrt{n}}$, en ne prenant que le signe inférieur dans le numérateur, et, puisque le dénominateur est la différence de deux carrés (n°. 30), on aura $x=\frac{a\sqrt{m}(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}=\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$, comme ci-dessus.

260. 47^me^. PROBLÊME. *On demande deux nombres tels que, 3 fois le carré de l'un égale 7 fois le carré de l'autre moins 8, et 4 fois le premier égale 9 fois le second moins 12.*

Soient x le premier nombre demandé, et y le second: on aura $3x^2=7y^2-8$, d'après la première partie de l'énoncé, et $4x=9y-12$, d'après la seconde. Ainsi, la solution de notre problême dépend des deux équations $3x^2=7y^2-8$, et $4x=9y-12$..... (1). Prenons la valeur de x dans la seconde de ces deux équations, et substituons-la dans la première, et nous aurons 1°. $x=\frac{9y-12}{4}$, et 2°. $\frac{3(9y-12)^2}{16}=7y^2-8$, ou en développant et faisant disparaître le dénominateur, $3(81y^2-216y+144)=112y^2-128$ ou $243y^2-648y+432=112y^2-128$, et en transposant et réduisant, $131y^2-648y+560=0$, et en divisant par le coefficient 131 de y^2, $y^2-\frac{648}{131}y+\frac{560}{131}=0$; d'où $y=\frac{324}{131}\pm\sqrt{\frac{104976}{(131)^2}-\frac{560}{131}}$, ou $y=\frac{324}{131}\pm\sqrt{\frac{104976-560\times131}{131\times131}}$, ou encore $y=\frac{324}{131}\pm\sqrt{\frac{104976-73360}{131\times131}}$, ce qui se réduit à $y=\frac{324}{131}\pm\sqrt{\frac{31616}{131\times131}}$, et enfin $y=\frac{324}{131}\pm\frac{177,808}{131}$, ou

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en séparant les deux valeurs de y, on aura $y = \frac{324}{131} + \frac{177,808}{131} = \frac{501,808}{131} = 3,8305$, et $y = \frac{324}{131} - \frac{177,808}{131} = \frac{146,192}{131} = 1,1159$.

Reprenons les équations (1), et de la seconde tirons la valeur de y, qui sera $y = \frac{4x+12}{9}$, pour la mettre dans la première, et nous aurons

$$3x^2 = \frac{7(4x+12)^2}{81} - 8 = \frac{7(16x^2+96x+144)}{81} - 8,$$

ou $243x^2 = 112x^2 + 672x + 1008 - 648$, ou en transposant et réduisant $131x^2 - 672x - 360 = 0$, et en divisant par le coefficient 131 de x^2, $x^2 - \frac{672}{131}x - \frac{360}{131} = 0$, d'où $x = \frac{336}{131} \pm \sqrt{\frac{112896}{131\times131} + \frac{360\times131}{131\times131}}$, ou $x = \frac{336}{131} \pm \sqrt{\frac{160056}{131\times131}} = \frac{336}{131} \pm \frac{400,07}{131}$, et en séparant les valeurs de x,

$$\text{on aura } x = \frac{336}{131} + \frac{400,07}{131} = \frac{736,07}{131} = 5,6188, \text{ et}$$

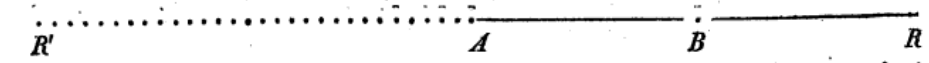
$$x = \frac{336}{131} - \frac{400,07}{131} = -\frac{64,07}{131} = -0,489.$$

Ainsi notre problème nous conduit à deux valeurs différentes pour chaque inconnue, et l'une de ces inconnues est une fois positive et une fois négative, tandis que l'autre est les deux fois positive. Il faut bien faire attention de ne pas croiser les valeurs trouvées pour le nombre qu'on cherchait; car la première valeur de x ne peut correspondre qu'à la première valeur de y, et la seconde valeur de x à la seconde valeur de y.

20^me. LEÇON.

Interprétation précise de quelques résultats particuliers auxquels conduisent la résolution des problèmes du premier et celle des problèmes du second degré. Résolution des problèmes indéterminés du premier degré.

261. 48^me. PROBLÊME. *Un courrier part du point A et fait b lieues par heure; un autre courrier part du point B et fait c lieues par heure; la distance comprise entre les points A et B est a et les deux courriers se dirigent vers le point R; on demande à quelle distance du point A les deux courriers se rencontreront au point R.*



Soit x la distance AR; $x-a$ sera la distance BR, puisque $AB=a$; ainsi le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

courrier parti du point A fera un chemin représenté par x, et celui parti du point B fera un chemin représenté par $x-a$. Il est clair que les deux courriers partant au même instant des points respectifs A et B, et arrivant tous les deux au point R au même instant, les temps que ces deux courriers resteront en chemin seront égaux. Or, puisque le premier courrier fait b lieues par heure et qu'il a le chemin x à parcourir, il est évident que le temps qu'il lui faudra sera $\frac{x}{b}$; et puisque le second courrier fait c lieues par heure, et qu'il a le chemin $x-a$ à parcourir, le temps qu'il lui faudra sera $\frac{x-a}{c}$; mais ces temps sont égaux; donc $\frac{x-a}{c}=\frac{x}{b}$, ou $bx-ab=cx$, ou encore $(b-c)x=ab$; d'où

$$x=\frac{ab}{b-c}\ldots\ldots(a).$$

Voyons maintenant ce que deviendra x en faisant toutes les hypothèses possibles sur les quantités a, b et c.

Ces hypothèses sont que, $a>0$, $a=0$, et, dans chacun de ces deux cas $b>c$, $b=c$, et $b<c$.

262. Supposons $a>0$, et 1°. $b>c$; il est clair que $b-c$ sera un reste positif quelconque, et que ab sera un produit positif quelconque; d'où il suit que la fraction $\frac{ab}{b-c}$ sera un quotient positif quelconque : donc, dans ce cas, la valeur de x est tout-à-fait naturelle. 2°. Supposons $b=c$; dans ce cas $b-c=0$, et la valeur (a) de x devient $x=\frac{ab}{0}$. Voyons ce que signifie $\frac{ab}{0}$. Pour cela rappelons-nous (n°. 62, arith.) que plus le dénominateur d'une fraction diminue, plus la valeur de la fraction augmente. Or, le dénominateur 0 est le plus petit de tous les dénominateurs possibles; donc la fraction $\frac{ab}{0}$ est plus grande que toutes les quantités qu'on pourra imaginer, c'est-à-dire, que cette fraction *est infiniment grande*. Ainsi, dans le cas où $b=c$, c'est-à-dire dans le cas où les deux courriers vont également vîte, la distance AR, par rapport au point A, du point où ces deux courriers se rencontreront, sera infiniment grande, tant qu'il y aura une distance $AB=a$ quelconque entre les points de départ de ces deux courriers. Voilà ce que nous donne le calcul; mais si l'on fait réflexion que les deux courriers allant également vîte ils ne peuvent jamais se rencontrer, puisque la distance $AB=a$ qui les sépare restera toujours la même, on verra que *lorsqu'un problême conduit à une valeur infiniment grande pour l'inconnue, cela vient de ce que ce que l'on demande est impossible.*

263. 3°. Supposons toujours $a>0$, et $b<c$; dans ce cas $b-c$ sera

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

un reste négatif (n°. 18), et la valeur (a) de x aura par conséquent le signe —, puisque $+ab$ divisé par un diviseur négatif donne un quotient négatif : la distance AR, par rapport au point A, à laquelle les deux courriers doivent se rencontrer sera donc négative, ce qui semble n'avoir aucun sens. Si nous remontons à l'état de la question, nous verrons que $b<c$ veut dire que le courrier qui est en arrière va moins vîte que celui qui est en avant, et que, par conséquent, tant que les courriers iront de gauche à droite, loin de se rencontrer jamais, la distance qui les sépare augmentera sans cesse ; ce qui annoncerait que le problême est tout-à-fait absurde. Mais, si au lieu de faire aller les deux courriers de gauche à droite, on les fait aller de droite à gauche, alors il est évident qu'ils se rencontreront en un certain point R' distant du point A de la quantité $AR'=x$, prise dans un sens directement contraire de la distance AR. Ainsi, dans ce cas, le problême n'est absurde que parce que l'on a supposé les courriers allant dans une direction opposée à celle qu'il fallait, tandis que dans le cas de l'infini le problême reste impossible quelle que soit la direction qu'on suppose aux deux courriers. Ainsi, *quand on est conduit à une valeur négative pour l'inconnue, on doit en conclure qu'il faut renverser l'état de la question pour ce qui regarde le sens suivant lequel il faut prendre la valeur de l'inconnue.* Nous aurons plusieurs occasions de nous convaincre que cette conséquence est générale.

264. Si maintenant nous supposons $a=0$, ce qui veut dire que les deux courriers partent du même point, et que $b>c$, la valeur (a) de x sera $x=\frac{0}{b-c}=0$: c'est-à-dire que, *les courriers se rencontreront à une distance nulle du point de départ, ou, en d'autres termes, ne pourront être ensemble qu'à l'instant de leur départ, s'ils partent du même point, et s'ils vont avec des vitesses différentes.* Il est évident, en effet, d'après ces hypothèses, que les deux courriers doivent nécessairement se séparer dès l'instant de leur départ, pour ne plus se rencontrer, s'ils se dirigent en ligne droite.

265. Si lorsque $a=0$, on a $b=c$, la valeur de x sera $x=\frac{0}{0}$. Ce symbole algébrique $\frac{0}{0}$ signifie une quantité quelconque ; en effet, le dividende est 0, le produit du quotient par le diviseur doit donc être 0 ; mais le diviseur est 0 ; donc, quel que soit le quotient, le produit de ce quotient par le diviseur 0 sera toujours 0 ; donc enfin $\frac{0}{0}$ est la quantité qu'on voudra. D'après les hypothèses dont il s'agit ici, il est clair que les deux courriers partent du même point, et qu'ils vont également vîte ; et, par conséquent, ils ne pourront jamais se séparer ; donc, on les trouvera toujours ensemble à quelque distance du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

point de départ qu'on les considère : c'est donc comme s'ils se rencontraient toujours. Lors donc qu'on parviendra à une valeur de l'inconnue de la forme $\frac{0}{0}$, on en conclura que le problême, par sa nature, est indéterminé. Mais souvent la valeur de l'inconnue se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ sans que le problême soit indéterminé, ce qui arrive lorsque la fraction, qui est la valeur de l'inconnue, n'est pas à sa plus simple expression ; et que le facteur commun à ses deux termes devient zéro d'après les hypothèses établies.

En effet, si $x = \frac{a^2-b^2}{a-b}$, en faisant $a=b$, on voit que $x = \frac{0}{0}$, et cependant, la vraie valeur de x est $x = 2a$ dans la même hypothèse ; car $x = \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b}$ et par conséquent $x=a+b$; or si $a=b$, il est clair que $x=2a$. Il est donc démontré qu'une quantité peut se présenter sous la forme de $\frac{0}{0}$ sans être essentiellement indéterminée : avant de prononcer sur la réalité de l'indétermination de la valeur d'une fraction, il faut donc s'assurer que cette fraction est à sa plus simple expression. Continuons la discussion des problêmes. En voici encore un dont la discussion confirme tout ce qui précède.

266. 49^me^. PROBLÊME. *Une fontaine peut remplir un certain bassin dans un nombre d'heures représenté par a, et une autre fontaine peut vider le même bassin dans un nombre d'heures représenté par b ; on demande le temps qu'il faudrait à ces deux fontaines coulant ensemble, pour remplir ce bassin, la première tendant à le remplir, et la seconde à le vider.*

Puisque la première peut remplir le bassin dans a heures, dans une heure elle en remplira une partie exprimée par $\frac{1}{a}$; et puisque la seconde peut vider le même bassin dans b heures, dans une heure elle en videra une partie exprimée par $\frac{1}{b}$. Il est clair que par heure il restera dans le bassin une quantité d'eau égale à celle fournie dans le même temps par la fontaine qui tend à le remplir, moins celle que perd dans le même temps celle qui tend à le vider ; c'est-à-dire que par heure il y aura $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ d'eau dans le bassin. Si donc x est le temps qu'il faut aux deux fontaines pour remplir le bassin, la quantité d'eau que peut contenir ce dernier sera $x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$, et par conséquent on aura $x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 1$. Si donc on met les deux fractions au même dénominateur, on aura $x\left(\frac{b-a}{ab}\right) = 1$, et en faisant disparaître ce dénominateur, $x(b-a) = ab$; d'où $x = \frac{ab}{b-a}$ ..... (b).

Ici nous pouvons avoir $b > a$, $b = a$, et $b < a$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Quand $b > a$, cela veut dire que la fontaine qui tend à vider le bassin coule moins vîte que celle qui tend à le remplir, et que, par conséquent, le bassin finira par être plein au bout d'un certain temps : c'est ce que le calcul indique aussi, car $b > a$ donne un dénominateur positif plus grand que zéro, et par conséquent la fraction $\frac{ab}{b-a}$ aura une valeur quelconque positive.

Si $b = a$, la fontaine qui tend à vider le bassin ira aussi vîte que celle qui tend à le remplir; d'où il suit que dans ce cas il est impossible que le bassin se remplisse jamais. Le calcul nous annonce encore cette impossibilité, puisque $b = a$ donne o pour le dénominateur de la valeur de x, sans que le numérateur s'évanouisse, d'où il suit que $x = \frac{ab}{0}$; c'est-à-dire que x ou le temps qu'il faudrait aux deux fontaines pour remplir le bassin est infiniment grand; donc ce bassin ne sera jamais plein.

Enfin si $b < a$, la fontaine qui tend à vider le bassin ira plus vîte que celle qui tend à le remplir, et par conséquent, non-seulement le bassin ne sera jamais plein, mais encore la fontaine qui tend à le vider ne coulera jamais avec toute son intensité. Mais si l'on renverse l'état de la question, c'est-à-dire si l'on suppose que le bassin soit plein, et qu'on demande le temps qu'il faut pour le vider, alors tout rentre dans l'ordre naturel des choses, et toute difficulté disparaît. Le calcul, dans la même hypothèse, nous fait voir que la valeur de x est négative, c'est-à-dire que le temps qu'il faudrait aux deux fontaines pour remplir le bassin est négatif; ce qui n'a aucun sens raisonnable tant qu'on envisage la question sous son premier point de vue. Mais si l'on renverse la question, et qu'on suppose, comme ci-dessus, que le bassin soit plein, et qu'on demande le temps qu'il faut pour le vider, alors, pour mettre le problême en équation, il faudrait raisonner de la manière suivante : puisque la fontaine qui tend à vider le bassin le viderait dans b heures, dans une heure elle en videra une partie exprimée par $\frac{1}{b}$; mais celle qui tend à le remplir y introduira par heure une quantité d'eau exprimée par $\frac{1}{a}$; l'eau qui sera perdue dans une heure sera donc $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$, et dans x heures $x\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$; on aura donc $x\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = 1$, d'où $x = \frac{ab}{a-b}$. Or $b < a$, donc x aura une valeur quelconque positive. Il suit donc de là, comme du n°. 263, *que lorsqu'on parvient à une valeur négative pour l'inconnue, il faut renverser la question pour qu'elle ait un sens raisonnable.*

Si maintenant nous supposons que le bassin soit plein, la quantité qu'il faudra pour le remplir sera zéro; c'est-à-dire que $ab = 0$; si en même temps nous supposons que $b = a$, c'est-à-dire que les deux fontaines coulent éga-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

lement vîte, et qu'on demande toujours le temps qu'il faudra pour le remplir, il est clair que ce temps sera tout ce qu'on voudra, puisque ce bassin sera toujours plein. Aussi, dans ces hypothèses, le calcul conduit à la même conséquence. En effet, l'équation $x = \frac{ab}{b-a}$ peut se ramener à la forme $\frac{x(b-a)}{ab} = 1$, mais on sait que 1 est la quantité d'eau qu'il faut pour remplir le bassin; dans le cas présent, le bassin étant plein, au lieu de 1 il faut mettre 0 dans le second membre de cette équation, d'où il résulte que $\frac{x(b-a)}{ab} = 0$, ou $x(b-a) = 0$, ou enfin $x = \frac{0}{b-a}$. Si les vitesses étaient inégales, on aurait $x = 0$; en effet, le bassin étant plein, il est clair qu'il faut 0 heure pour le remplir, et si $b = a$, on aura $x = \frac{0}{0}$, ce qui veut dire que le bassin sera toujours plein.

Passons à présent à la discussion des problêmes du second degré.

267. 50me. PROBLÊME. *Supposons qu'on nous demande de partager le nombre a en deux parties dont le produit soit b.*

Soit x l'une des parties, l'autre partie sera $a-x$; on aura donc $x(a-x) = b$, ou $ax - x^2 = b$, ou encore $x^2 - ax = -b$, et enfin $x^2 - ax + b = 0$. De là on tirera donc (n°. 201) $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ ..... (a).

D'après cette valeur de x on voit que, tant que $\frac{a^2}{4} > b$, le radical $\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ sera réel, et par conséquent aussi la valeur de x. Mais $\frac{a^2}{4}$ n'est autre chose que le carré de la moitié du coefficient a de x de l'équation à laquelle la question a donné lieu, lequel coefficient n'est autre chose que le nombre à partager; *donc le problême proposé sera possible dans tous les cas où le carré de la moitié du nombre à partager sera plus grand que b qui est le produit que doivent donner les deux parties demandées.*

On peut se rendre compte de cette vérité par un exemple.

Supposons qu'il s'agisse de partager 12 en deux parties dont le produit soit 35 : comme le carré de la moitié du nombre 12 à partager, qui est 36, est plus grand que le produit 35 des deux parties demandées, le problême sera possible; et en effet, en mettant 12 au lieu de a et 35 au lieu de b dans la formule (a), il viendra $x = 6 \pm \sqrt{36-35} = 6 \pm 1$. Ainsi, en ne prenant que le signe supérieur, $x = 7$. Or, si de 12 qui est le nombre à partager, on retranche 7, qui est la première partie, on aura 5, qui sera la seconde : c'est précisément ce qu'on aurait trouvé si l'on avait pris le signe inférieur de la valeur de x ci-dessus.

Pour que le problême soit possible il n'est pas nécessaire que $\frac{a^2}{4} > b$, il

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

suffit que $\frac{a^2}{4}=b$, dans lequel cas $\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=0$, et $x=\frac{a}{2}$.

268. Mais si $\frac{a^2}{4}<b$, alors la quantité soumise au radical dans la valeur de x serait négative, et la quantité $\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$ serait imaginaire, et par conséquent x aussi; d'où il s'ensuivrait que le problème serait impossible.

En effet, si par exemple, le nombre à partager $a=12$, et que le produit des deux parties doive être 40, le problème sera impossible, car de quelque manière que l'on partage 12 en deux parties, jamais le produit de ces deux parties ne pourra égaler 40; car 36 est le plus grand produit qu'on puisse obtenir, en divisant 12 en deux parties, et c'est lorsque ces deux parties sont égales. Si l'on met 12 au lieu de a, et 40 au lieu de b dans la valeur (a) de x, il viendra $x=6\pm\sqrt{36-40}=6\pm\sqrt{-4}$, ce qui donne une valeur imaginaire pour x: ainsi, toutes les fois qu'on sera conduit à une valeur imaginaire pour l'inconnue d'un problème, ce problème sera impossible.

269. Une équation du second degré ne peut conduire à des racines imaginaires, que lorsque le terme tout connu a le signe + dans le premier membre de l'équation, le second membre étant 0; car si l'on avait $x^2\pm ax-b=0$, en résolvant cette équation on aurait $x=\mp\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}$, d'où l'on voit évidemment que, quel que soit le rapport de $\frac{a^2}{4}$ à b, le radical $\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}$ sera réel, puisque toutes les quantités qui le composent sont essentiellement positives.

Ainsi, par exemple, si l'on nous proposait *de trouver un nombre tel qu'en ajoutant ou retranchant a fois ce nombre du carré de ce même nombre, la somme ou la différence fût égale à un nombre donné b*, on trouverait que ce nombre $x=\mp\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}$, et le problème serait toujours possible, quels que fussent les nombres donnés a et b.

Je ne pousserai pas plus loin ces discussions, parce que, par la suite, j'aurai toujours l'attention de discuter les problèmes auxquels notre sujet principal donnera lieu.

Problèmes indéterminés du premier degré.

270. 51^me^. PROBLÈME. *On demande de partager le nombre* 12 *en deux parties.*

Soient x et y les parties demandées; on aura seulement $x+y=12$, puisqu'on ne donne aucune autre condition. Comme cette équation unique renferme deux inconnues x et y, il est clair qu'on ne pourra avoir la valeur de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'une qu'en supposant l'autre connue. Car si de l'équation $x+y=12$ on tire la valeur de x, on aura $x=12-y$, et il est évident qu'on ne pourra avoir x qu'autant que l'on connaîtra y. Or, l'état de la question ne déterminant point cette valeur de y, on pourra la prendre arbitrairement, de sorte qu'on pourra donner une infinité de valeurs différentes à cette inconnue y : l'autre inconnue prendra un pareil nombre de valeurs différentes, qui dépendront de celles de y.

Cependant on peut établir des conditions qui, sans donner lieu à une équation de plus, restreindront le nombre des valeurs des inconnues. Ainsi, par exemple, on peut exiger que toutes les valeurs de ces inconnues soient des nombres *entiers positifs*, et alors les problèmes indéterminés donnent lieu à une théorie très-intéressante, tandis que sans ces conditions, ils n'offriraient rien de remarquable.

D'après ces conditions, l'équation $x=12-y$, au lieu de donner une infinité de valeurs pour x et pour y, n'en aura que 13, en y comprenant même la valeur 0 : c'est-à-dire qu'en faisant y respectivement égal à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12, x sera respectivement égal à 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 et 0.

271. 52^{me}. PROBLÈME. *On demande de combien de manières on pourra payer* 25^f. *avec des pièces de* 2^f. *et des pièces de* 3^f.

Soient x le nombre des pièces à 2^f., et y celui des pièces à 3^f.; on aura $2x+3y=25$. Résolvons cette équation par rapport à x, et nous aurons $x=\frac{25-3y}{2}$; effectuons la division par 2 autant que possible, et il nous viendra $x=12-y+\frac{1-y}{2}$ ..... (1). Comme x doit être un nombre entier, il est nécessaire que la fraction $\frac{1-y}{2}$ soit un nombre entier; et comme ce nombre entier doit être positif, il faudra prendre $\frac{y-1}{2}$ au lieu de $\frac{1-y}{2}$, ou bien A étant ce nombre entier, on fera $\frac{1-y}{2}=-A$, ce qui revient à $\frac{y-1}{2}=A$; d'où $y=2A+1$ ..... (2). Mettons la valeur de y et celle de $\frac{1-y}{2}$, dans la valeur (1) de x, et nous aurons $x=12-2A-1-A=11-3A$: ainsi les valeurs des inconnues seront liées par les relations

$$x=11-3A, \text{ et } y=2A+1 \ldots\ldots (a).$$

Si maintenant on donne des valeurs positives à A, depuis $A=0$ jusqu'à $A=3$, on aura pour x les valeurs respectives $x=11$, $x=8$, $x=5$, $x=2$, et pour y les valeurs $y=1$, $y=3$, $y=5$, $y=7$.

Si l'on faisait $A=4$, x deviendrait négatif, et à plus forte raison si $A>4$, ce qui est contraire à l'état de la question. Ainsi il n'y a que quatre manières de payer 25^f. avec des pièces de 2^f. et des pièces de 3^f.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

272. 53^me. PROBLÊME. *On demande de combien de manières on pourrait payer* 25^f. *en donnant des pièces de* 3^f. *et recevant en échange des pièces de* 2^f.

x étant le nombre des pièces de 3^f. qu'on doit donner, et y étant le nombre des pièces de 2^f. qu'on doit recevoir, on aura $3x - 2y = 25$. Résolvons cette équation par rapport à y, qui a le plus petit coefficient, et nous aurons

$$(1) \ldots\ldots y = \frac{3x-25}{2} = x - 12 + \frac{x-1}{2}.$$

Comme il faut que y soit un nombre entier, il faut aussi que la fraction $\frac{x-1}{2}$ soit un nombre entier; soit A ce nombre entier, nous aurons $\frac{x-1}{2} = A$; d'où $x = 2A + 1$.

Mettons cette valeur de x dans celle (1) de y, et nous aurons

$$y = 2A + 1 - 12 + A = 3A - 11;$$

de sorte que les inconnues, dans ce cas, seront liées par les relations

$$x = 2A + 1, \text{ et } y = 3A - 11 \ldots\ldots\ldots (2).$$

D'après ces relations on voit qu'on pourra donner à A des valeurs positives depuis $A = 4$ jusqu'à $A = \infty$ (*), et que les valeurs des inconnues x et y seront respectivement

pour x, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, etc.
pour y, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, etc.;

d'où l'on voit qu'il y aura une infinité de manières de payer 25.^f en donnant des pièces de 3.^f, et recevant en échange des pièces de 2.^f

On observera que la suite des valeurs de x forme une progression arithmétique croissante dont la raison est 2, et que celle des valeurs de y forme une autre progression arithmétique croissante dont la raison est 3.

273. 54^me. PROBLÊME. *On veut payer* 488.^f *avec des pièces de* 5.^f *et des pièces de* 24.^f *; on demande de combien de manières on pourra faire ce payement.*

Soient x le nombre des pièces de 5.^f et y le nombre des pièces de 24.^f; on aura $5x + 24y = 488$; tirons la valeur de x, qui a le plus petit coefficient, et nous aurons

$$x = \frac{488 - 24y}{5} = 97 - 4y + \frac{3 - 4y}{5} \ldots\ldots\ldots (1).$$

Comme il faut que x soit un nombre entier, il faut que la fraction $\frac{3-4y}{5}$ soit aussi un nombre entier, et comme ce nombre entier doit être positif, on fera $\frac{3-4y}{5} = -A \ldots\ldots$ (2), ou $\frac{4y-3}{5} = A$, A étant un nombre entier quelconque. De l'équation $\frac{4y-3}{5} = A$, on tirera $y = \frac{5A+3}{4} = A + \frac{A+3}{4} \ldots\ldots$ (3). Comme y doit être un nombre entier, il faut que la fraction $\frac{A+3}{4}$ en soit

(*) Le signe ∞ sert à représenter l'infini.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

un aussi ; B étant ce nombre entier, on aura $\frac{A+3}{4} = B$; d'où $A = 4B - 3$. Mettant cette valeur de A dans l'équation (3), et dans l'équation (2), on aura

$$y = 4B - 3 + B = 5B - 3, \text{ et } \frac{3-4y}{5} = -4B + 3;$$

et mettant ces valeurs de y et de $\frac{3-4y}{5}$ dans l'équation (1), on aura $x = 97 - 20B + 12 - 4B + 3$, d'où $x = 112 - 24B$. Ainsi, les relations qui lient les inconnues x et y, sont $x = 112 - 24B$, et $y = 5B - 3$.

Les valeurs qu'on peut donner à B seront comprises depuis $B = 1$ jusqu'à $B = 4$. En faisant $B = 1$, $B = 2$, $B = 3$ et $B = 4$, on aura respectivement pour les valeurs de x, 88, 64, 40, 16, et pour celles de y, 2, 7, 12 et 17. Il suit de là que le payement en question pourra se faire de quatre manières.

Si pour faire le même payement on donnait des pièces de 24.^{f}, et qu'on reçût des pièces de 5.^{f}, en appelant x les pièces de 24.^{f} et y celles de 5.^{f}, en raisonnant comme nous l'avons fait précédemment, on trouvera les relations $x = 5B - 3$, et $y = 24B - 112$; d'où l'on voit que les valeurs de B seront depuis $B = 5$, jusqu'à $B = \infty$; c'est-à-dire qu'il y aura une infinité de manières de faire le payement en question.

En voilà assez, ce me semble, pour faire sentir la marche à suivre pour résoudre les problêmes qu'on voudra, du premier et du second degré. Pour procurer au lecteur l'occasion de s'exercer, je vais donner les énoncés de quelques problêmes avec leurs réponses.

Enoncés de quelques problêmes à résoudre.

1er. PROBLÊME. On a payé une somme de 743.^{l} 15.^{s} 8.^{d} pour prix de 43.^{t} 5.^{p} 4.^{po} d'ouvrage ; on demande combien il faudra payer, sur le même pied, 77.^{t} 3.^{p} 8.^{po}

Réponse : 1315.^{l} 5.^{s} 5.^{d} $\frac{25}{79}$.

2^{me}. PROBLÊME. Une garnison n'a plus que pour 27 jours de vivres, mais en tenant encore huit jours elle peut espérer du secours ; on demande à combien il faut réduire la portion de chaque soldat.

Réponse : $\frac{27}{35}$ de la ration ordinaire.

3^{e}. PROBLÊME. Trois compagnies d'ouvriers se présentent pour creuser un canal ; la première peut le faire en 40 jours, la seconde en 36 et la troisième dans 28 ; on demande combien il faudra de temps pour faire le même ouvrage, en les employant toutes les trois à la fois.

Réponse : 11.^{j} $\frac{67}{283}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4^me^. PROBLÊME. Un courrier, marchant 15 heures par jour, fait une route de 375 lieues dans 20 jours; on demande combien il devra marcher d'heures par jour, pour faire 400 lieues dans 18 jours, en lui supposant toujours la même vîtesse.

Réponse : 17.^{h} $\frac{7}{9}$.

5^me^. PROBLÊME. Une somme de 7400^{fr}. a rapporté pendant 27 mois 832.^{l} 10.^{s}; on demande combien une autre somme de 8500.^{l} doit rapporter sur le même taux d'intérêt pendant 45 mois.

Réponse : 1593.^{l} 15.^{s}

6^me^. PROBLÊME. On a payé une somme de 206.^{l} 1.^{s} 3.^{d} pendant 7 mois, pour les intérêts d'une autre somme inconnue à $4\frac{1}{2}$ pour 100 par an; on demande quel est le principal.

Réponse : 7850^{l}.

7^me^. PROBLÊME. Trois marchands se sont associés, le premier pour une somme de 75000.^{l}, le second pour 54000.^{l}, et le troisième pour 240000.^{l}; le bénéfice résultant de leur société est de 141000.^{l}; on demande ce qui revient à chacun.

Réponse : x étant la part du premier, y celle du second, et z celle du troisième, on trouvera $x = 29268.^{l}\frac{12}{41}$, $y = 21073.^{l}\frac{7}{41}$ et $z = 93658.^{l}\frac{22}{41}$.

8^me^. PROBLÊME. Un père en mourant laisse sa femme enceinte d'un premier enfant; il ordonne, par son testament, que, si l'enfant qui naîtra est un garçon, il ait les $\frac{3}{5}$ du bien et la mère les $\frac{2}{5}$, et si elle accouche d'une fille, la mère ait les $\frac{3}{4}$ du bien et la fille $\frac{1}{4}$: il arrive que la mère met au monde un garçon et une fille; on demande comment il faut partager le bien du père, suivant les intentions exprimées au testament.

Réponse : Il faudra diviser le bien en dix-sept parties égales, dont on donnera 9 au fils, 6 à la mère, et 2 à la fille.

9^me^. PROBLÊME. Un particulier demande à un autre ce qu'il a gagné d'écus au jeu; celui-ci lui répond : si j'avais encore gagné la moitié, le quart, les deux tiers et 5 par dessus, j'en aurais gagné 150.

Réponse : 60.

10^me^. PROBLÊME. Trouver l'escompte d'une somme de 7800.^{l} 15.^{s} 6.^{d} à 6 pour 100, escompte en dedans.

Réponse : 7359.^{l} 4.^{s} 5.^{d} $\frac{11}{53}$.

11^me^. PROBLÊME. Un imprimeur achète pour 15640.^{l} de papier dont il consent de payer l'escompte à 6 pour 100 d'intérêt par an, avec la faculté de diminuer l'escompte à raison du temps qu'il pourrait payer avant l'é-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

chéance du billet : il vient s'acquitter au bout de 240 jours; on demande ce qu'il doit donner au marchand qui lui a livré son papier.

Réponse : 15336.^{l} 16.^{s} 5.^{d} $\frac{47}{3869}$.

12^{me}. PROBLÊME. Un ouvrier travaillant chez un particulier pendant 12 jours, et ayant eu avec lui, pendant les 7 premiers jours, sa femme et son fils, a reçu 74^{f}.; il a travaillé ensuite chez le même particulier pendant 8 autres jours sur 5 desquels il a eu avec lui sa femme et son fils, et il a reçu, pour ce temps, 50^{f}.; on demande combien il gagnait par jour pour sa part, et combien gagnaient ensemble dans le même temps, sa femme et son fils.

Réponse : Le prix de la journée de l'ouvrier $= 5^{f}$., et celui de la journée de sa femme et de son fils $= 2^{f}$.

13^{me}. PROBLÊME. On a acheté séparément les charges de trois voitures :

La première qui contenait 30 mesures de seigle, 20 d'orge, et 10 de froment, a coûté 230^{f}.

La seconde, qui contenait 15 mesures de seigle, 6 d'orge et 12 de froment, a coûté 138^{f}.

La troisième, qui contenait 10 mesures de seigle, 5 d'orge et 4 de froment, a coûté 75^{f}.

On demande à combien revient la mesure de seigle, celle d'orge et celle de froment.

Réponse : x étant le prix de la mesure de seigle, y de celle d'orge, et z de celle de froment, on aura $x = 4$, $y = 3$ et $z = 5$.

14^{me}. PROBLÊME. Un homme qui s'est chargé de transporter des vases de porcelaine de trois grandeurs a fait ce marché : qu'il payerait autant par chaque vase qu'il casserait, qu'il recevrait pour ceux qu'il rendrait en bon état.

On lui donne d'abord 2 petits vases, 4 moyens et 9 grands ; il casse les moyens, rend tous les autres en bon état, et reçoit une somme de 28^{f}.

On lui donne ensuite 7 petits vases, 3 moyens et 5 grands ; cette fois il rend les petits et les moyens, il casse les 5 grands, et il reçoit seulement 3^{f}.

Enfin, on lui remet 9 petits vases, 10 moyens et 11 grands qu'il casse, et ne reçoit en conséquence que 4^{f}. On demande ce qu'on a payé pour le transport d'un vase de chaque grandeur.

Réponse : x étant le prix des petits, y celui des moyens, et z celui des grands, on aura $x = 2$, $y = 3$, et $z = 4$.

Les énoncés de problêmes qu'on vient de lire sont tirés de l'arithmétique de Mauduit, et de l'algèbre de M. Lacroix, où l'on en trouvera la solution.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

SECTION III.

GEOMÉTRIE PLANE.

1re. LEÇON.

Objet de la Géométrie en général; la ligne droite, et les angles.

1. La géométrie a pour objet tout ce qui est relatif à l'étendue et à la forme des corps, sans s'occuper de la cause qui donne aux corps l'étendue et la forme.

2. L'étendue d'un corps a toujours trois dimensions, qu'on désigne sous les noms de *longueur*, *largeur* et *hauteur* ou *épaisseur*, ou *profondeur*.

3. Ce qui détermine l'étendue et la forme d'un corps est ce qu'on appelle *surface*. La surface d'un corps est donc ce que le corps offre à notre vue ou à notre tact; de sorte qu'il faut entendre que la surface ne fait point partie du corps, et qu'elle n'en est pourtant pas séparée; c'est-à-dire qu'une surface n'a point d'épaisseur : elle n'a que deux dimensions : *longueur* et *largeur*.

On peut supposer le corps anéanti, et consever l'idée de sa surface; mais alors la surface sera un être idéal qui n'aura aucune existence réelle, auquel pourtant nous pourrons attacher la double idée de longueur et de largeur, sans épaisseur, indépendamment de la forme que cette surface pourra avoir par abstraction.

4. En considérant les surfaces isolément des corps qu'elles peuvent terminer, on conçoit que deux surfaces peuvent s'intercepter, et que leur intersection est un nouvel être idéal différent des surfaces et des corps. On lui donne le nom de *ligne*. Puisque les surfaces n'ont point d'épaisseur, les lignes ne peuvent point en avoir non plus; de plus elles ne pourront point avoir de largeur, sans quoi elles seraient des surfaces; donc les lignes n'ont qu'une seule dimension : longueur. Les *bords* ou les *limites* d'une surface sont aussi des *lignes*.

5. Les extrémités d'une ligne s'appellent *points*. Le *lieu* où deux lignes se coupent est aussi un *point*. Le point n'a aucune étendue.

6. Les lignes sont *droites* ou *courbes*. Il n'y a qu'une seule espèce de ligne droite, mais il y en a une infinité de courbes différentes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La *ligne droite* est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre. Quant aux lignes courbes, nous les définirons plus tard.

7. Les surfaces sont *planes* ou *courbes*. Il n'y a qu'une seule espèce de surface plane; mais il y en a une infinité de courbes différentes.

Une surface est *plane*, lorsqu'on peut faire coïncider une ligne droite avec cette surface dans toutes les directions imaginables; c'est-à-dire, lorsqu'en prenant deux points à volonté sur la surface, et en joignant ces deux points par une ligne droite, la ligne droite est toute entière dans la surface.

Les surfaces planes prennent très-souvent le nom de *plan*. Il faut donc bien se garder de donner au mot *plan* la même signification que celle qu'on lui donne en architecture : *les architectes appellent* PLAN, *la trace d'un édifice quelconque sur le sol;* tandis que pour nous, du moins jusqu'à ce qu'il soit fait mention du contraire, *un plan sera une surface plane indéfiniment prolongée dans tous les sens, et ayant, dans l'espace, la position qu'il nous conviendra de lui supposer.*

Quant aux surfaces courbes, nous les définirons plus tard.

8. Nous diviserons la géométrie en deux parties. Dans la première nous comprendrons toutes les figures planes qui n'ont, par conséquent, qu'une ou deux dimensions, et dans la seconde nous comprendrons toutes les figures situées dans l'espace d'une manière quelconque, et qui seront à une, à deux ou à trois dimensions. Nous désignerons la première partie par le nom de *géométrie plane*, et la seconde, sous celui de *géométrie à trois dimensions*. C'est de la première qu'il va d'abord être question, comme étant la plus simple, et comme servant de base à la seconde.

Ainsi, dans tout ce qui va suivre, et jusqu'à ce qu'il soit fait mention du contraire, il faudra sans cesse avoir présent à l'esprit, que les figures dont il sera question seront toujours situées dans un même plan; c'est-à-dire que tous les points de ces figures coïncideront avec un plan. Entrons en matière.

De la Ligne droite.

9. La ligne droite ne peut se définir rigoureusement, parce qu'elle est au nombre de ces notions que nous acquérons pour ainsi dire en naissant; parce qu'elle renferme, en un mot, une idée simple. Mais on donne une idée très-nette de la ligne droite, en disant *qu'une ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre*, par la raison que nous avons le sentiment intime de ce que c'est que le plus court chemin d'un point à un autre, sans pouvoir dire néanmoins ce que c'est que ce plus court chemin; ces deux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

idées ne sont au fond qu'une seule et même idée, dont il est pourtant nécessaire de sentir l'identité, et c'est heureusement ce que tout le monde sent parfaitement.

10. THÉORÈME 1^er^. *Deux points sont nécessaires et suffisans pour déterminer la direction d'une ligne droite.*

En effet, si l'on n'a qu'un seul point A (fig. 1), il est évident que par ce même point on pourra mener une infinité de lignes droites AB, AC, AD, AE, AF, etc.; mais que si l'on a deux points A et B (fig. 2), par ces deux points on ne pourra mener qu'une seule ligne droite AB, du moins entre ces deux points A et B; car si on pouvait en mener plusieurs, il y aurait plusieurs chemins plus courts pour aller d'un point à un autre, ce qui est évidemment impossible.

11. *Corollaire.* Il suit de là que deux lignes droites ne peuvent se couper qu'en un seul point; car si deux droites pouvaient se couper en deux points, par ces deux points il se trouverait menées deux droites différentes, ce qui serait contraire à la proposition précédente.

12. THÉORÈME 2. *Tout chemin brisé* ABC (fig. 3) *qui aboutit aux extrémités d'une droite* AC *est plus grand que cette droite.*

En effet, si le chemin brisé ABC n'était pas plus grand que la droite AC, ce chemin brisé serait égal ou plus petit que la ligne droite; or, s'il était égal à la ligne droite, il serait le plus court chemin pour aller du point A au point C; donc il serait la droite AC elle-même, ce qui est contraire à l'hypothèse, et s'il était plus petit que la ligne droite AC, il serait plus petit que le plus court chemin pour aller du point A au point C, ce qui est absurbe.

13. THÉORÈME 3. *De deux chemins brisés* ACB, ADB (fig. 4), *qui aboutissent aux mêmes points* A *et* B, *celui qui s'écarte le plus de la ligne droite* AB, *qui joint les points* A *et* B, *est le plus grand.*

En effet, il est évident que, si l'on prolonge la droite AD, cette droite rencontrera la droite BC, puisque cette droite BC rencontre la droite AC qui passe par dessus la droite AD; on aura donc le chemin brisé DEB qui aboutira aux extrémités de la droite DB, et par conséquent $DB < BE + ED$. Si maintenant nous ajoutons la même quantité AD dans chaque membre de cette inégalité, nous ne changerons point l'ordre des grandeurs, et nous aurons $AD + DB < BE + ED + AD$. Mais si l'on considère la figure, on verra que $ED + AD = AE$, d'où il s'ensuivra que $AD + DB < BE + AE$.... (1). En second lieu, si l'on compare le chemin brisé ACE à la ligne droite AE, on aura $AE < AC + CE$, et en ajoutant de part et d'autre la quantité EB, il viendra $AE + EB < AC + CE + EB$; ou $AE + EB < AC + CB$, à cause

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que CE+EB=BC. Si dans le premier membre de cette dernière inégalité on met AD+DB au lieu de AE+EB, comme nous avons trouvé AD+DB<AE+EB, on aura, à plus forte raison, AD+DB<AC+CB, et la proposition sera démontrée.

Des Angles.

14. DÉFINITIONS. Si deux droites AB, AC (fig. 5) se rencontrent en un point A, l'écartement de ces deux droites, l'une par rapport à l'autre, est ce qu'on appelle *angle.*

L'angle que deux droites forment en se rencontrant est aussi ce qu'on appelle *l'inclinaison de ces droites, l'une par rapport à l'autre.*

Le point A où les deux droites AB, AC se coupent est le *sommet* de l'angle. Les droites AB, AC elles-mêmes en sont les côtés.

Il est important de remarquer que la grandeur de l'angle ne dépend que de l'écartement des côtés, et nullement de la grandeur de ces mêmes côtés.

Pour désigner un angle, on se sert de trois lettres dont une est placée près du sommet, et les deux autres le long des côtés, ainsi qu'on le voit pour l'angle dont il s'agit (fig. 5). Quand on écrit ou qu'on exprime verbalement ces lettres pour désigner un angle, on a soin d'écrire ou d'exprimer verbalement la lettre du sommet entre les deux autres; ainsi, par exemple, pour désigner l'angle de la figure 5, on écrira et on dira l'angle BAC, ou CAB, et jamais ABC, ni CBA.

Quand un même point ne sert de sommet qu'à un même angle, on se contente de le désigner par la lettre du sommet seulement.

15. DÉFINITIONS. Si deux droites AB, CD (fig. 6) se rencontrent de manière que les angles adjacens ADC, CDB qu'elles forment soient égaux entre eux, les deux droites AB, CD seront dites *perpendiculaires* l'une à l'autre, et les deux angles ADC, BDC s'appeleront *angles droits.*

Tout angle comme ADE (fig. 6) qui est plus grand qu'un angle droit ADC, est dit *obtus*, et tout angle comme EDB plus petit qu'un angle droit CDB est dit *aigu.* Les angles obtus et ceux qui sont aigus prennent aussi le nom d'*angles obliques.*

16. THÉORÈME 4. *Les angles droits sont tous égaux entre eux.*

Cette proposition n'est point du tout une suite immédiate de la définition des angles droits.

En effet, si les droites AB, CD (fig. 7) sont perpendiculaires entre elles, ainsi que les droites EF, GH, on aura bien l'angle ACD=DCB, et l'angle EGH=HGF, mais de ce que ces deux égalités ont lieu, il ne s'ensuit pas

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que ACD = EGH; car de ce que 3 = 3, et 2 = 2, il ne s'ensuit point que 3 soit égal à 2. La proposition a donc besoin d'être démontrée.

Pour cela, prenons les quatre distances CA, CB, GE, GF (fig. 7) égales entre elles, ce qui donnera AB = EF, et transportons l'une des deux figures sur l'autre, de manière que le point E de l'un soit sur le point A de l'autre, et le point F de la première, sur le point B de la seconde (ce qui est possible, puisque AB = EF); comme par deux points donnés on ne peut mener qu'une seule ligne droite (n°. 10), la droite EF coïncidera dans toute son étendue avec la droite AB, et le milieu G de EF coïncidera avec le milieu C de AB. Mais le point G appartient à la droite GH, et le point C à la droite CD; ces deux droites GH, CD auront donc un point de commun; il ne restera donc plus qu'à faire voir que la droite GH doit prendre la direction de CD.

Supposons que cela ne soit pas vrai, et que la droite GH prenne la direction CI ou CK, CI, par exemple; l'angle ACI ne sera autre chose que l'angle EGH, et l'angle ICB ne sera autre chose que l'angle HGF; mais EGH=HGF; il faut donc que ACI = ICB, ce qui sera impossible, tant que la droite CI ne coïncidera pas avec CD; mais il faut nécessairement que ACI = ICB; il faut donc aussi nécessairement que la droite CI coïncide avec CD, ou, en d'autres termes, que les angles droits ACD, EGH soient égaux entre eux; ce qu'il fallait démontrer.

17. THÉORÈME 5. *Si deux droites* AB, CD (fig. 8) *se rencontrent d'une manière quelconque, elles formeront deux angles adjacens* ACD, DCB, *dont la somme sera égale à deux angles droits.*

En effet, par le point C où les deux droites se rencontrent, élevons une perpendiculaire CE à la droite AB; les angles ACE, ECB seront droits, et il est évident qu'on aura ACD = ACE + ECD, et DCB = ECB — ECD; ajoutons ces deux égalités membre à membre, et il nous viendra ACD + DCB = ACE + ECB + ECD — ECD (1), ce qui se réduira à ACD + DCB = ACE + ECB, à cause des deux termes semblables et de signes contraires qui sont dans le second membre de l'égalité (1). Mais le second membre de la dernière se compose de deux angles droits, et le premier membre des deux angles adjacens formés par les droites AB, CD; donc la proposition est démontrée.

18. *Remarque.* En général, quand deux angles valent ensemble deux angles droits, on dit que ces deux angles sont *supplémens* l'un de l'autre.

Il suit de là que le supplément d'un angle est ce qui manque à cet angle pour égaler deux angles droits.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il suit encore de là que deux angles sont égaux lorsqu'ils ont le même supplément.

Quand deux angles valent ensemble un seul angle droit, ces deux angles sont *complémens* l'un de l'autre ; de sorte que le complément d'un angle est ce qui manque à cet angle pour égaler un angle droit.

Deux angles qui ont le même complément sont évidemment égaux.

Il faut distinguer deux sortes de supplémens, et deux sortes de complémens : les supplémens et les complémens *positifs*, et les supplémens et les complémens *négatifs*.

Le supplément ou le complément est positif, quand il faut l'ajouter à l'angle en question pour avoir deux angles droits ou un seul ; et il est négatif, quand, au contraire, il faut le retrancher de l'angle en question pour avoir deux angles droits ou un seul.

Ainsi, pour que deux angles soient égaux, il ne suffit pas que leurs supplémens ou leurs complémens soient de même grandeur, il faut de plus qu'ils soient tous les deux positifs ou tous les deux négatifs.

19. THÉORÈME 6. *Si deux angles* ACD, DCB (fig. 9) *sont adjacens, et que leur somme soit égale à deux angles droits, les deux côtés extérieurs* CA, CB *seront le prolongement l'un de l'autre.*

En effet, si BC n'est pas le prolongement de AC, ce prolongement sera une droite CE différente de CB, qui passera par le point C, de sorte que la ligne ACE sera droite. Mais si la ligne ACE est droite, les angles adjacens ACD, DCE vaudront ensemble deux angles droits ; or, par hypothèse les angles ACD, DCB valent aussi ensemble deux angles droits ; donc ACD + DCE = ACD + DCB. Mais ces deux sommes égales ont un terme commun ACD ; les deux autres termes seront donc égaux ; c'est-à-dire que l'angle DCE sera donc égal à l'angle DCB, ce qui ne peut avoir lieu, à moins que la droite CE ne coïncide avec CB, ou, en d'autres termes, à moins que la droite CB ne soit le prolongement de AC, ce qu'il fallait démontrer.

20. *Si deux lignes droites ont deux points* A *et* B (fig. 10) *de communs, quelque loin qu'on prolonge ces deux droites, elles seront toujours l'une sur l'autre.*

En effet, il est clair qu'entre les deux points communs A et B aux deux droites, ces deux droites coïncideront, puisque par deux points donnés on ne peut mener qu'une seule ligne droite ; ainsi, si ces deux droites ne coïncident pas dans quelqu'endroit, ce ne pourra être qu'au-delà de l'un des points communs A et B. Supposons donc que passé le point B, l'une prenne la direction BC, et l'autre la direction BD ; les lignes ABC, ABD seront également

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

droites; si donc par le point B, nous menons BE perpendiculaires à la partie commune AB aux deux droites, puisque les lignes ABC, ABD sont droites, les angles EBC, EBD seront droits, mais les angles droits sont égaux entre eux (n°. 16); donc EBC = EBD, ce qui ne peut avoir lieu, à moins que la droite BD ne coïncide avec BC; donc, etc.

21. THÉORÈME 7. *Si par un point* C *d'une droite* AB (fig. 11) *on mène, au-dessus de cette droite* AB, *tant de droites* CD, CE, CF, *etc., qu'on voudra, la somme de tous les angles, formés par cette suite de droites, sera toujours égale à deux angles droits.*

En effet, par le point C, sommet commun à tous ces angles, élevons une perpendiculaire CG à la droite AB; la somme de tous les angles compris dans l'angle droit GCB sera égale à cet angle droit, et la somme de tous les angles compris dans l'angle droit GCA sera égale à ce second angle droit; donc la somme de tous les angles dont il s'agit sera égale à deux angles droits.

22. *Corollaire.* Il suit de là que *tant d'angles qu'on voudra qui auront leur sommet au même point* C (fig. 12) *et dont les côtés seront situés dans un même plan, vaudront toujours ensemble quatre angles droits.*

Car si par le sommet commun C on mène une droite AB, tous les angles qui seront situés au-dessus de cette droite AB vaudront ensemble deux angles droits, et tous ceux qui seront situés au-dessous de cette même droite AB vaudront aussi deux angles droits; tous ces angles réunis formeront donc une somme qui sera égale à quatre angles droits.

23. THÉORÈME 8. *Si deux droites* AB, CD (fig. 13) *se coupent comme on voudra; les angles* AEC, DEB, *ou* AED, CEB, *opposés par le sommet, seront égaux.*

En effet, puisque la ligne AEB est droite, l'angle AED est le supplément de l'angle DEB; et puisque la ligne CED est droite aussi, le même angle AED est le supplément de l'angle AEC: les deux angles DEB, AEC, ont donc le même supplément; donc (n°. 18) ils sont égaux. De même l'angle AEC est à la fois le supplément des angles AED, CEB; donc ces deux derniers angles sont égaux; donc enfin, etc.

24. THÉORÈME 9. *Si la ligne* AEB (fig. 13) *est droite, et qu'en même temps les angles* AEC, DEB (*qui sont opposés par le sommet*) *soient égaux entre eux, les côtés* CE, DE, *de ces angles, seront l'un le prolongement de l'autre.*

Pour démontrer cette proposition, il suffira d'observer que la ligne AEB étant droite, l'angle DEB sera le supplément de AED; mais les angles AEC, DEB sont égaux par hypothèse, donc, au lieu de l'angle DEB, on pourra

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

prendre son égal AEC pour le supplément de AED; or, ces deux derniers angles, supplément l'un de l'autre, sont adjacens; donc (n°. 19) les côtés EC, ED sont l'un le prolongement de l'autre; donc, etc.

25. THÉORÈME 10. *Si quatre angles* DEB, AED, AEC *et* CEB (fig. 13) *sont tels que, ayant leur sommet au même point* E, *les opposés par le sommet* DEB, AEC *et* AED, CEB *soient égaux entre eux, les côtés de ces angles seront deux à deux le prolongement l'un de l'autre.*

D'abord on observera que la somme de ces quatre angles est égale à quatre angles droits (n°. 22): si donc nous prenons l'angle droit pour unité, nous aurons AEC+AED+DEB+CEB = 4.... (1). Mais nous avons AEC = DEB et AED = CEB..... (2); ajoutons ces deux égalités membre à membre, et nous aurons AEC + AED = DEB + CEB; le premier membre de l'égalité (1), qui peut se mettre sous cette forme (AEC+AED)+(DEB+CEB)=4 se compose donc de deux sommes partielles égales; donc l'une de ces deux sommes égalera la moitié du second membre; nous aurons donc AEC + AED = 2; mais ces deux angles AEC, AED sont adjacens, les côtés extérieurs CE, ED de ces deux angles (n°. 19) sont donc le prolongement l'un de l'autre, ce qui réduit la proposition actuelle à celle du numéro précédent.

2me. LEÇON.

Les Perpendiculaires; les Obliques, et les Triangles.

26. *Définition.* Toute droite, comme DA (fig. 14), menée d'un point donné D hors d'une droite AB, qui n'est pas perpendiculaire à la droite AB, prend le nom d'*oblique.*

27. THÉORÈME 11. *Si par un point* D (fig. 14), *pris hors d'une droite* AB, *on abaisse une perpendiculaire* DC *à la droite* AB, *et une oblique quelconque* DA, *la perpendiculaire* DC *sera plus courte que l'oblique* DA.

En effet, prolongeons la perpendiculaire DC d'une quantité CE = CD, et joignons les points A et E par la droite AE. Cela posé, je dis d'abord que le chemin DAE sera brisé, puisque par deux points donnés D et E (n°. 10) on ne peut mener qu'une seule droite DE; ce qui nous donnera DE<DA+AE ou DC + CE < DA + AE, ou encore 2DC < DA + AE, ... (1); ensuite, je dis que DA = AE; car les angles ACD, ACE sont égaux comme étant droits, et par construction CE = CD; si donc on fait tourner la figure AEC

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

autour de la droite AC pour la faire tomber sur la figure ADC ; la droite CE coïncidera avec son égale CD, de manière que le point E tombera sur le point D ; mais le point A restera sur lui-même; donc la droite AE coïncidera avec la droite AD; donc enfin AE = AD, ce qui réduit l'inégalité (1) à 2DC < 2DA, d'où DC < DA; ce qu'il fallait démontrer.

28. THÉORÈME 12. *Réciproquement, si la droite* DC (fig. 14) *est le plus court chemin du point* D *à la droite* AB, *la droite* DC *sera perpendiculaire à* AB.

En effet, si la droite DC n'était pas perpendiculaire à AB, par le point D on pourrait abaisser une droite qui serait perpendiculaire à AB, et, d'après la proposition précédente, cette perpendiculaire serait le plus court chemin du point D à la droite AB; de ce point D pour aller à la droite AB, il y aurait donc deux chemins plus courts, qui suivraient, l'un la direction oblique, et l'autre la direction perpendiculaire; mais ces deux chemins plus courts seraient évidemment égaux; l'oblique serait donc égale à la perpendiculaire abaissée du même point D, ce qui serait contraire à la proposition précédente; donc si, etc.

29. *Corollaire* 1. Il suit de là que *pour aller d'un point à une droite, il n'y a qu'un seul plus court chemin, et que ce seul plus court chemin est la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.* Par conséquent, la vraie distance d'un point à une droite, est la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite.

30. *Corollaire* 2. Il suit encore de là que, *par un point donné hors d'une droite, on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à cette droite.* Car si l'on pouvait en abaisser deux, il y aurait deux chemins plus courts, dans des directions différentes pour aller d'un point à une droite, ce qui est impossible.

31. THÉORÈME 13. *Par un point donné* D *sur une droite* AB (fig. 6), *on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire* DC *à cette droite* AB.

Car si l'on pouvait en élever une seconde DE, les angles CDB, EDB seraient égaux, comme étant droits, ce qui est évidemment impossible, puisque la partie ne peut pas égaler le tout.

32. THÉORÈME 14. *Si par un point* E *donné hors d'une droite* AB (fig. 15) *on abaisse une perpendiculaire* ED *et différentes obliques, 1°. les obliques qui s'écarteront également de la perpendiculaire seront égales, et 2°. de deux obliques inégalement écartées de la perpendiculaire, celle qui s'en écartera le plus sera la plus grande.*

1°. Supposons que les deux obliques CE, BE soient également écartées de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la perpendiculaire ED; c'est-à-dire, supposons que les distances DC, DB soient égales: je dis que les deux obliques CE, BE seront égales. En effet, les angles CDE, BDE sont égaux comme étant droits; on pourra donc faire tourner l'angle EDB autour du côté ED, de manière qu'il vienne coïncider avec son égal EDC; mais le point E tourne sur lui-même, et DB = DC; le point B tombera donc sur le point C : les extrémités des droites EB, CE coïncideront donc; elles seront donc égales.

2°. Supposons que les deux obliques EB, EA soient inégalement écartées de la perpendiculaire ED, c'est-à-dire que la distance DA>DB; je dis qu'on aura AE>EB. En effet, si l'on porte DB de D en C, le point C sera entre les points D et A, et l'oblique EC = EB. Cela posé, prolongeons la perpendiculaire ED d'une quantité DF = DE, et, par le point F et les points C et A, menons les droites FC, FA : les obliques CE, CF seront égales comme étant également écartées de la perpendiculaire AD à la droite EF, et il en sera de même des obliques AE, AF. De plus le chemin brisé EAF sera plus grand que le chemin brisé ECF; donc la moitié EA du premier sera plus grande que la moitié CE du second, ou plus grande que l'oblique EB = CE; ce qu'il fallait démontrer.

33. THÉORÈME 15. *Réciproquement, si par un point* D (fig. 15) *pris hors d'une droite* AB, *on abaisse une perpendiculaire et différentes obliques; 1°. les obliques égales s'écarteront également de la perpendiculaire, et 2°. de deux obliques inégales, la plus grande sera celle qui s'écartera le plus de la perpendiculaire.*

1°. Si les obliques CE, BE sont égales, elles seront également écartées de la perpendiculaire; c'est-à-dire que DC = DB.

En effet, si cela n'est pas vrai, DC sera plus grand ou plus petit que DB. Mais si DC était plus grand que DB, CE serait plus grand que EB, ce qui est contre l'hypothèse; donc DC n'est pas plus grand que DB. Si DC était plus petit que DB, CE serait plus petit que BE, ce qui est encore contre l'hypothèse; donc CD ne peut être ni plus grand ni plus petit que DB; donc enfin CD = DB.

2°. Supposons que AE soit plus grand que BE; je dis que AD > DB.

En effet, si AD n'est pas plus grand que DB, AD sera plus petit que DB, ou ces deux distances seront égales. Mais si AD était plus petit que DB, AE serait plus petit que BE, ce qui est contre l'hypothèse; donc on ne peut avoir AD<DB. Si AD = DB, AE serait égal à BE, ce qui est encore contre l'hypothèse; donc AD > DB; ce qu'il fallait démontrer.

34. THÉORÈME 16. *Si par le milieu* C *d'une droite* AB (fig. 16) *on élève*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

une perpendiculaire CD *à la droite* AB, *tous les points de cette perpendiculaire* CD *seront à égales distances des extrémités* A *et* B *de la droite* AB.

En effet, par un point quelconque D de la perpendiculaire CD, menons les droites DA, DB aux extrémités de la droite AB; ces droites DA, DB seront des obliques également écartées de la perpendiculaire CD, puisque le point C est au milieu de AB; donc ces obliques seront égales; donc le point D quelconque de la perpendiculaire CD élevée au milieu de la droite AB, sera à égales distances des extrémités de cette droite AB.

35. THÉORÈME. 17. *Il n'y a que les points de la perpendiculaire* CD *élevée sur le milieu d'une droite* AB (fig. 16), *qui soient à égales distances des extrémités* A, B *de la droite* AB.

Si l'on prend un point E hors de la perpendiculaire CD élevée sur le milieu de la droite AB, en menant, par ce point E, les droites EA, EB aux extrémités de la droite AB, on aura $EA > EB$. En effet, le point E étant de l'autre côté de la droite CD par rapport au point A, la droite EA coupera la droite CD au point D; et, puisque la droite CD est perpendiculaire au milieu de la droite AB, le point D sera à égales distances des extrémités A et B de la droite AB: on aura donc $AD = BD$; mais en comparant le chemin brisé BDE à la droite EB, on aura $BD + DE > EB$, ou $AD + DE > EB$, en mettant AD à la place de son égal BD; or $AD + DE = AE$; donc $AE > EB$; ce qu'il fallait démontrer.

Les Triangles.

36. DÉFINITION. Deux droites AB, AC (fig. 17) qui forment un angle CAB enferment un espace qui, dans le sens opposé au sommet A, s'étend à l'infini. Pour limiter cet espace, il est évident qu'il faut au moins une troisième droite BC qui coupe à la fois les deux côtés AB, AC de l'angle CAB. L'*espace* ABC, enfermé par les trois droites AB, AC et BC, est ce qu'on appelle un *triangle*, parce qu'il a trois angles A, B et C: les trois droites qui forment le triangle en sont les *côtés*.

Quand les trois côtés sont égaux, le triangle s'appelle *équilatéral*; si deux côtés seulement sont égaux, le triangle est *isocèle*, et si les trois côtés sont inégaux, il est *scalène*.

Si un triangle a un angle droit, il est dit *rectangle*, et le côté opposé à l'angle droit s'appelle *hypothénuse*. Ainsi, si dans le triangle ABC (fig. 17) l'angle B est droit, le côté AC sera l'hypothénuse.

37. THÉORÈME 18. *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypothénuse égale, et l'un des angles aigus.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Supposons les deux triangles rectangles ABC, *abc* (fig. 17); si l'angle A=*a*, et l'hypothénuse AC=*ac*; en faisant coïncider les angles égaux A, *a*, les hypothénuses AC, *ac* coïncideront aussi. Le point *c* sera donc sur le point C; je dis maintenant que le côté *cb* coïncidera avec CB, car autrement il serait possible d'abaisser deux perpendiculaires par le même point C sur le côté AB, ce qui est impossible (n° 31); donc, etc.

38. THÉORÈME 19. *Deux triangles rectangles* ABC, *abc* (fig. 17) *sont égaux lorsqu'ils ont l'hypothénuse et un côté de l'angle droit égaux.*

Supposons donc que l'hypothénuse AC soit égale à l'hypothénuse *ac*, et que le côté BC soit égal au côté *bc*; en faisant coïncider les angles droits B et *b*, ainsi que les côtés égaux BC, *bc*; si les hypothénuses ne coïncidaient pas en même temps, ainsi que les côtés AB, *ab*, deux obliques égales pourraient être également éloignées de la perpendiculaire, ce qui est impossible; donc, etc.

39. THÉORÈME 20. *Deux triangles quelconques qui ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun, sont égaux.*

En effet, supposons (fig. 18) que les deux triangles ABC, *abc* soient tels que le côté AB du premier soit égal au côté *ab* du second; que l'angle A du premier soit égal à l'angle *a* du second, et que l'angle B du premier soit égal à l'angle *b* du second: en superposant ces deux triangles de manière que le côté *ab* du second coïncide avec son égal AB du premier, à cause que *a*=A, et *b*=B, il est clair que le côté *ac* prendra la direction de AC, et *bc* celle de BC; donc le point *c* tombera sur le point C; donc enfin les deux triangles ABC, *abc*, seront parfaitement égaux, puisque, superposés, ils coïncident dans toutes leurs parties.

40. THÉORÈME 21. *Deux triangles quelconques qui ont un angle égal compris entre côtés égaux, chacun à chacun, sont égaux.*

Supposons (fig. 18) que l'angle A du triangle ABC, soit égal à l'angle *a* du triangle *abc*; que le côté AB du premier soit égal au côté *ab* du second, et le côté AC du premier, soit égal au côté *ac* du second: en superposant les deux triangles de manière que les deux angles égaux A et *a* coïncident, à cause qu'on a AB=*ab*, et AC=*ac*, il est clair que le point *b* coïncidera avec le point B, et le point *c* avec le point C; mais par deux points donnés on ne peut mener qu'une ligne droite; donc les deux côtés *bc*, BC coïncideront, et par conséquent les deux triangles seront égaux.

41. THÉORÈME 22. *Si deux triangles* ABC, *abc* (fig. 19) *sont tels, que le côté* AB *du premier soit égal au côté ab du second, que le côté* BC *du premier soit égal au côté bc du second, mais que l'angle* ABC *du premier triangle soit*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

plus grand que l'angle correspondant b du second, le troisième côté AC *du premier triangle sera plus grand que le troisième côté ac du second.*

En effet, transportons le triangle *abc* sur l'autre ABC, de manière que le côté *ba* coïncide avec son égal BA; comme l'angle *b* est plus petit que ABC, le côté *bc* prendra une direction intérieure BD. Quant au point *c*, il tombera ou dans le triangle ABC en un point D, ou sur le côté AC du même triangle en un point O, ou en dehors de ce même triangle ABC en un point E. Ainsi, la proposition présente trois cas qu'il faut examiner séparément.

Premier Cas. Supposons que le point *c* tombe au point D dans le triangle ABC; le triangle ABD ne sera autre chose que le triangle *abc*, de sorte que $BD = bc$, et $DA = ac$; si donc nous démontrons que $DA < AC$, il sera démontré que $ac < AC$; ce qu'il s'agit de démontrer.

Or, si nous comparons les deux chemins brisés BDA, BCA, nous verrons que (1)... $BD + DA < BC + AC$; mais par hypothèse $BC = bc$, et $BD = bc$, donc $BC = BD$; nous pourrons donc retrancher BD dans le premier membre de l'inégalité (1), et BC dans le second, sans troubler l'ordre des grandeurs; donc $DA < AC$; ce qu'il fallait démontrer.

Deuxième Cas. Si le point *c* tombe sur le côté AC au point O, la proposition aura évidemment lieu, puisque OC est évidemment plus petit que AC, et que OC n'est autre chose que *ac*.

Troisième Cas. Enfin, supposons que le point *c* tombe au point E hors du triangle ABC; comme le triangle EBA n'est autre chose que le triangle *abc*, $EA = ac$, et il suffira, par conséquent, de démontrer que $EA < AC$, pour faire voir qu'enfin la proposition a lieu dans tous les cas possibles.

Or, si nous considérons les triangles EOA et BOC, nous verrons que $EA < EO + OA$, et que $BC < BO + CO$. Si donc nous ajoutons ces deux inégalités membre à membre, nous aurons $CB + EA < EO + OB + CO + AO$..... (2). Mais $EO + OB = BE$, et $CO + OA = AC$; si donc nous substituons dans l'inégalité (2), il nous viendra $CB + EA < BE + AC$..... (3). Maintenant, si nous nous rappelons que $CB = cb$, et que BE n'est autre chose que *cb*, nous aurons $CB = BE$; nous pourrons donc retrancher CB du premier membre de l'inégalité (3), et BE du second, sans troubler l'ordre des grandeurs; donc $AE < AC$; ce qu'il fallait démontrer.

42. THÉORÈME 23. *Réciproquement, si deux triangles* ABC, *abc* (fig. 19) *ont deux côtés égaux,* AB *et* BC, *ab et bc, chacun à chacun, mais que le troisième côté* AC *du premier triangle soit plus grand que le troisième côté ac du second, l'angle* ABC *opposé au côté* AC *sera plus grand que l'angle b opposé au côté ac.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, si l'angle ABC n'est pas plus grand que l'angle b, ou ce sera le contraire, ou ces deux angles seront égaux. Si ces deux angles étaient égaux, comme AB$=ab$, et BC$=bc$, on aurait (n°. 40) AC$=ac$, ce qui est contre l'hypothèse ; et si b était plus grand que ABC, en vertu de la proposition précédente, on aurait $ac>$AC, ce qui est encore contre l'hypothèse ; donc l'angle ABC$>b$.

43. THÉORÈME 24. *Si deux triangles quelconques ont les trois côtés égaux, chacun à chacun, ils auront les trois angles égaux, chacun à chacun.*

Supposons donc que le côté AB (fig. 18) du triangle ABC, soit égal au côté ab du triangle abc; que le côté AC du premier, soit égal au côté ac du second, et que le côté BC du premier soit égal au côté bc du second : l'angle A$=a$, l'angle B$=b$, et l'angle C$=c$.

En effet, si cela n'est pas vrai, l'angle A, par exemple, sera plus grand ou plus petit que l'angle a. Mais, dans le premier cas, le côté BC, opposé à l'angle A, serait plus grand que le côté bc opposé à l'angle a, ce qui est contre l'hypothèse, puisqu'on suppose que BC$=bc$; et dans le second cas on aurait BC$<bc$, ce qui est encore contre l'hypothèse ; donc l'angle A$=a$, les deux triangles ont donc un angle égal compris entre côté égaux, chacun à chacun ; donc (n°. 40) ils sont égaux; donc les angles B et C sont respectivement égaux aux angles b et c. On observera que dans les triangles égaux, les angles égaux sont opposés aux côtés égaux, et réciproquement.

44. THÉORÈME 25. *Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

En effet, soit le triangle isocèle ACB (fig. 20), dans lequel les côtés égaux sont AC et BC; si l'on divise le côté AB en deux parties égales au point D, et que par le point D et le point C on mène la droite DC, les triangles ADC, DBC seront égaux; car le côté DC sera commun à ces deux triangles; par hypothèse AC$=$CB, et AD$=$DB, puisque le point D est au milieu de AB; les deux triangles ADC, DCB auront donc les trois côtés égaux; donc ils seront égaux; donc l'angle A$=$B; ce qu'il fallait démontrer.

45. THÉORÈME 26. *Réciproquement, si l'angle* B *est égal à l'angle* A (fig. 20), *le côté* AC *opposé au premier angle* B, *égalera le côté* BC *opposé au second angle* A.

Supposons que ce ne soit pas vrai, et que le côté BC soit plus petit que AC; faisons AE$=$BC, le point E sera au-dessous du point C. Si nous menons la droite BE, le triangle ABE sera nécessairement plus petit que le triangle ABC, et cependant, d'après nos hypothèses, ces deux triangles devraient être égaux, car ils ont le côté AB commun, le côté AE$=$BC par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

NOTE SUR LES PARALLELES.

(3me. leçon, Géométrie plane.)

Les propositions depuis le N°. 48 (page 239) jusques et y compris le corollaire N°. 52, sont vraies dans le fond, mais leurs démonstrations portent à faux, la première, qui sert de base aux autres, étant fondée sur une vérité qui n'est pas démontrée. Ainsi la théorie que j'ai donnée des parallèles n'est rigoureuse qu'en admettant comme axiome que, *deux droites situées dans un même plan peuvent être partout à égales distances l'une de l'autre.* On ne tiendra donc pas compte de ces propositions, et on ne fera commencer ce qui est relatif aux parallèles, qu'à partir du N°. 53.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

construction, et par hypothèse principale les angles EAB, ABC sont égaux; donc (n°. 40) ces deux triangles seraient égaux, ce qui est impossible, à moins que le point E ne soit sur le point C, ou, en d'autres termes, à moins que BC ne soit égal à AC.

46. THÉORÈME 27. *Dans tout triangle* ABC (fig. 21) *le plus grand côté est toujours opposé au plus grand angle.*

Supposons que l'angle ACB soit le plus grand; sur le côté AC et au point C comme sommet, on pourra faire un angle ACD égal à l'angle A, et la droite CD sera intérieure au triangle ABC, puisque l'angle ACB est le plus grand : la droite CD coupera donc le côté AB en un certain point D. De plus, le triangle ACD est isocèle, puisque les angles A et ACD sont égaux, c'est-à-dire que $AD = DC$. Mais dans le triangle CDB, on a $BC < CD + DB$, et puisque $CD = AD$, on aura $BC < AD + DB$; or $AD + DB = AB$; donc $BC < AB$; ce qu'il fallait démontrer.

47. THÉORÈME 28. *Réciproquement, dans tout triangle, le plus grand angle est opposé au plus grand côté.*

En effet, si l'angle ACB (fig. 21), opposé au plus grand côté AB, n'est pas le plus grand, il sera plus petit que l'un A des deux autres angles, ou il lui sera égal. Si l'angle ACB est plus petit que l'angle A, d'après la proposition qui précède, le côté CB sera plus grand que AB, ce qui est contre l'hypothèse; et si l'angle ACB est égal à l'angle A, le côté $AB = BC$, ce qui est encore contre l'hypothèse; donc l'angle ACB ne peut être ni plus petit que l'angle A, ni égal à cet angle A, donc $ACB > A$; donc, etc.

3^me^. LEÇON.

Les Parallèles.

48. THÉORÈME 29. *Supposons que sur une droite* AB (fig. 22) *on prenne trois points* A, E *et* B *à égales distances, et que par ces trois points on élève les perpendiculaires* AC, EF *et* BD; *je dis que si ces trois perpendiculaires sont égales entre elles, en joignant leurs extrémités* C, F *et* D *par les droites* CF, FD, *ces deux droites seront l'une le prolongement de l'autre.*

En effet, faisons tourner la figure EBDF autour de la droite EF, pour la faire tomber sur la figure EFCA; comme les angles FEB, FEA sont droits, ils sont égaux, et la droite EB prendra la direction de EA; et, comme $EB = EA$, le point B tombera sur le point A. Mais les angles EBD, EAC sont droits; donc la droite BD prendra la direction de AC; et, puisque

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

BD = AC, le point D tombera sur le point C; mais le point F est resté sur lui-même; donc la droite FD coïncidera avec FC; donc les angles EFD, EFC sont égaux; or, ces deux angles sont adjacens, donc ils sont droits (n°. 16), et les droites FD, FC sont l'une le prolongement de l'autre.

49. THÉORÈME 30. *Supposons que sur une droite* AB (fig. 22) *on prenne trois points* A, E *et* B *à égales distances; que par ces trois points on élève les droites* AC, EF *et* BD *perpendiculaires à la droite* AB, *et que les deux extrêmes* AC, BD *soient égales entre elles; je dis que si, par les extrémités* C *et* D *de ces deux droites* AC, BD *on mène une droite* CD, *cette droite* CD *coupera la droite* EF *en un point* F, *de manière que* EF *sera égal à chacune des droites* AC, BD.

En effet, si EF n'est pas égale aux deux autres droites AC, BD, on aura EF plus grand ou plus petit que ces deux droites; supposons EF < AC, en faisant E*a* égal à AC ou BD, le point *a* sera au-dessous du point F; et, puisque les trois droites AC, E*a*, BD, perpendiculaires à AB, sont égales, les droites C*a*, *a*D qui joignent les trois points C, *a* et D seront l'une le prolongement de l'autre, c'est-à-dire que la ligne C*a*D sera droite; par les deux mêmes points C et D on pourrait donc mener deux droites différentes, ce qui est impossible; donc EF ne peut pas être plus grand que AC ou BD; on démontrerait de même que EF ne peut pas être plus petit que ces mêmes droites AC, BD; donc enfin cette droite EF est égale aux droites AC, BD.

50. THÉORÈME 31. *Si une droite* CD *a deux points* C *et* D *à égales distances de la droite* AB (fig. 23), *tous les points de la droite* CD, *compris entre les premiers* C *et* D, *seront à la même distance de la droite* AB.

En effet, par les points C et D abaissons les droites CA, DB perpendiculaires à AB; ces deux droites CA, DB seront égales, puisque les points C et D sont à égales distances de la droite AB (n°. 30). Cela fait, sur le milieu *e* de la droite AB, si l'on élève la droite *ef* perpendiculaire à AB, cette droite *ef* sera égale aux deux autres AC, BD (n°. 49); d'où l'on voit que la droite CD ayant deux points à égales distances de la droite AB, elle a nécessairement un troisième point F à la même distance de la droite AB. Si au milieu *g* et *h* de chacune des droites A*e*, *e*B, on élève les droites *gk*, *hi*, perpendiculaires à AB, ces deux droites *gk*, *hi* seront égales aux premières AC, *ef*, BD; de sorte que la droite CD ayant deux points C et D à égales distances de la droite AB, cette droite CD a au moins trois autres points à la même distance de cette droite AB. Il est évident, maintenant, que si l'on continue de subdiviser en deux parties égales les distances A*g*, *ge*, *eh*, etc., aussi loin qu'on voudra, on trouvera finalement que la droite CD, ayant deux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

points à égales distances de la droite AB, tous les points de cette droite CD, compris entre les points C et D, seront à égales distances de la droite AB.

51. THÉORÈME 32. *Supposons toujours que la droite* CD (fig. 23) *ait deux points* C *et* D *à égales distances de la droite* AB; *je dis que quelque loin que l'on prolonge la droite* CD *au-delà des points* C *et* D, *elle restera toujours à la même distance de la droite* AB.

En effet, après avoir abaissé par les points C et D les perpendiculaires CA, DB, prenons, au-delà du point B, un point E sur la droite AB, de manière que la distance BE = AB; par le point E, élevons, à la droite AB, la perpendiculaire EF, et faisons la droite EF égale à chacune des droites AC, BD; en joignant les points D et F par une droite DF, cette droite DF (n°. 49) sera le prolongement de CD; si, au-delà du point E, sur la droite AE prolongée, on faisait la distance EG = EA; et qu'on élevât, par le point G, une perpendiculaire GH, à la droite AE; en faisant GH = EF = BD, ou = AC, et en joignant les points F et H par la droite FH, cette droite FH serait le prolongement de CF (n°. 49), et ainsi de suite; donc si une droite CD a deux points à égales distances d'une droite AB, tous les points de la droite CD, quelque loin qu'on la prolonge, seront à la même distance de la droite AB prolongée indéfiniment.

52. *Corollaire.* Il suit de là que deux droites peuvent être dirigées de telle manière, l'une par rapport à l'autre, que ces deux droites soient partout à égales distances l'une de l'autre.

53. DÉFINITION. Je dis maintenant qu'on appelle PARALLÈLES *deux droites qui sont partout à égales distances l'une de l'autre.*

54. THÉORÈME 33. *Si deux droites* AB, CD (fig. 22) *sont parallèles, toute droite* EF *qui sera perpendiculaire à l'une* AB *de ces parallèles, le sera également à l'autre* CD.

En effet, prenons deux points A et B, sur la droite AB, de manière que les distances EA, EB soient égales entre elles; et par chacun de ces points A et B élevons, à la droite AB, les perpendiculaires AC, BD: les angles FEB, FEA, étant droits, sont égaux; si donc on fait tourner la figure EBDF autour de la droite EF, comme sur un axe, pour la faire tomber sur la figure EACF, la droite EB prendra la direction de EA, et comme EB = EA, le point B tombera sur le point A. Mais les angles EBD, EAC sont droits; donc la droite BD prendra la direction de AC. Or, les droites AB, CD sont parallèles; donc elles sont partout à égales distances; donc les points C et D de la droite CD sont à égales distances de la droite AB; mais les distances des points C et D par rapport à AB, sont les perpendiculaires CA, DB; donc ces

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

perpendiculaires CA, DB sont égales ; de plus, l'extrémité B de l'une est sur l'extrémité A de l'autre, et leurs directions coïncident : l'extrémité D de l'une coïncidera donc avec l'extrémité C de l'autre; mais le point F reste sur lui-même ; donc la droite FD coïncide avec la droite FC ; donc les deux angles EFD, EFC sont égaux; mais ils sont adjacens, donc (n°. 16) ils sont droits, et la droite EF est perpendiculaire sur la droite CD; ce qu'il fallait démontrer.

55. THÉORÈME 34. *Réciproquement, si deux droites* AB, CD (fig. 22) *sont perpendiculaires à une troisième* EF, *elles seront partout à égales distances, et seront par conséquent parallèles.*

En effet, si par les points A et B pris, sur la droite AB, à égales distances du point E, on élève, à la droite AB, les perpendiculaires AC, BD, et qu'ensuite on fasse tourner la figure EBDF sur la droite EF, pour la faire tomber sur l'autre figure EACF; la droite EB prendra la direction EA, les angles FEB, FEA étant droits, et la droite FD prendra la direction de FC, les angles EFD, EFC étant droits aussi. De plus, EB=EA, et les angles EBD, EAC sont droits; donc le point B tombera sur le point A, et la droite BD prendra la direction de AC; mais déjà nous avons vu que la droite FD avait pris la direction de FC; donc le point D coïncide avec le point C ; donc les perpendiculaires BD, AC à la droite AB, sont égales; donc les points C et D de la droite CD sont à égales distances de la droite AB; donc (n°. 51) les droites AB, CD sont partout à égales distances l'une de l'autre; donc elles sont parallèles (n°. 53).

56. THÉORÈME 35. *Par un point donné* F (fig. 24) *hors d'une droite* AB, *on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite* AB.

En effet, supposons qu'on puisse en mener deux CD, HG; si par le point F on abaisse une perpendiculaire FE à la droite AB, cette droite FE sera aussi perpendiculaire aux droites FD, FG (n°. 54); par un même point F pris sur une droite EF on pourrait donc élever deux perpendiculaires différentes à cette même droite FE, ce qui est impossible (n°. 32); donc par un point donné, etc.

57. THÉORÈME 36. *Si deux droites* AB, CD (fig. 24) *sont parallèles à une troisième* IK, *elles seront parallèles entre elles.*

En effet, si à la droite AB on mène la perpendiculaire EF, cette droite EF sera perpendiculaire à IK, puisque IK est parallèle à AB; mais IK est aussi parallèle à CD; donc la droite EF perpendiculaire à IK le sera à CD ; les droites AB, CD sont donc perpendiculaires à la même droite EF, donc elles sont parallèles; donc, etc.

58. DÉFINITIONS. Lorsque deux droites parallèles AB, CD (fig. 25) sont

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

coupées par une troisième GH, indéfiniment prolongée, qu'on appelle *sécante*, on distingue plusieurs angles formés par les parallèles et la sécante.

1°. *Les angles intérieurs du même côté de la sécante*, qui sont FED et EFB, ou FEC et EFA.

2°. *Les angles extérieurs du même côté de la sécante*, qui sont GFB et HED, ou GFA et HEC.

3°. *Les angles correspondans*, qui sont du même côté de la sécante, mais dont l'un est intérieur, et l'autre extérieur aux parallèles: tels sont les angles HED, HFB, ou GFB, GED, ou GFA, GEC, ou enfin HEC, HFA.

4°. *Les angles alternes-internes*, qui sont dans les parallèles, mais l'un à droite et l'autre à gauche de la sécante : tels sont les angles EFB, FEC, ou EFA, FED.

5°. *Les angles alternes-externes*, qui sont hors des parallèles, mais l'un à droite et l'autre à gauche de la sécante : tels sont les angles HED, GFA, ou HEC, GFB.

59. THÉORÈME 37. *Si deux droites parallèles* AB, CD (fig. 25) *sont coupées par une sécante* GH, *les angles alternes-internes seront égaux.*

En effet, par le milieu I de la droite EF, abaissons, à la droite AB, la perpendiculaire LK; les droites AB, CD étant parallèles, la droite LK sera aussi perpendiculaire à CD (n°. 54): les deux triangles FIK, LIE seront, par conséquent, rectangles. Or, ces deux triangles ont les hypothénuses EI, IF égales, puisque le point I est au milieu de EF, et, de plus, les angles FIK, LIE sont égaux comme étant opposés par le sommet (n°. 23); donc (n°. 37) ces deux triangles sont égaux; donc l'angle EFB = FEC; ce qu'il fallait démontrer.

60. THÉORÈME 38. *Réciproquement, si deux droites* AB, CD (fig. 25) *sont coupées par une sécante* GH, *et que les angles alternes-internes soient égaux, les droites* AB, CD *seront parallèles.*

Par le milieu I de la droite FE, abaissons encore la perpendiculaire LK sur la droite AB; les triangles FIK, ILE seront égaux. En effet, les côtés FI, IE sont égaux, puisque le point I est au milieu de EF; les angles FIK, LIE sont égaux, comme étant opposés par le sommet, et les angles CEF, EFB, qui sont alternes-internes, sont égaux par hypothèse; donc les triangles FIK, LIE ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun; donc (n°. 39) ils sont égaux; donc les troisièmes angles AKL, KLD sont égaux; mais l'angle AKL est droit; donc l'angle KLD est droit aussi; donc la droite CD est perpendiculaire à LK; mais la droite AB est aussi perpendiculaire à LK; donc (n°. 55) enfin les droites AB, CD sont parallèles; ce qu'il fallait démontrer.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

61. THÉORÈME 39. *Si deux droites* AB, CD (fig. 25) *sont parallèles, et qu'on les coupes par une sécante* GH, *les angles correspondans seront égaux.*

S'il s'agissait des angles HFB, HED, on verrait qu'en effet ils sont égaux, car les angles CEF, HFB sont égaux, comme alternes-internes, et les angles CEF, HED, comme opposés par le sommet; donc les angles correspondans HFB, HED sont égaux, puisqu'ils sont égaux au même angle CEF.

62. THÉORÈME 40. *Réciproquement, si deux droites* AB, CD (fig. 25) *sont coupées par une sécante* GH, *et que les angles correspondans soient égaux, les angles alternes-internes seront égaux, et par conséquent* (n°. 60) *les droites* AB, CD *seront parallèles.*

Supposons que les angles correspondans égaux soient HED, HFB; on aura les angles alternes-internes CEF, EFB qui seront égaux, car par hypothèse HED = HFB, et l'angle CEF = HED, comme opposés par le sommet; donc HFB = CEF; ce qu'il fallait démontrer.

63. THEORÈME 41. *Si deux droites* AB, CD (fig. 25) *sont parallèles et coupées par une sécante* GH, *les angles alternes-externes seront égaux.*

En effet, les droites AB, CD étant parallèles, les angles correspondans sont égaux; ainsi on aura l'angle HED = HFB; mais les angles HFB, AFG sont opposés par le sommet, donc HFB = AFG; donc les angles alternes-externes HED, AFG sont égaux au même angle HFB; donc ils sont égaux entre eux; ce qu'il fallait démontrer.

64. THÉORÈME 42. *Réciproquement, si deux droites* AB, CD (fig. 25) *sont coupées par une sécante* HG, *et que les angles alternes-externes soient égaux, les angles correspondans seront égaux, et, par conséquent, les droites* AB, CD *seront parallèles.*

En effet, d'après l'hypothèse, on a l'angle HED = AFG; mais les angles AFG, HFB sont opposés par le sommet, donc AFG=HFB; donc les angles correspondans HED, HFB sont égaux au même angle AFG; donc ils sont égaux entre eux; ce qu'il fallait démontrer.

65. THÉORÈME 43. *Si deux droites* AB, CD (fig. 25) *sont parallèles et coupées par une sécante* HG, *les angles intérieurs ou extérieurs du même côté de la sécante seront supplémens l'un de l'autre.*

Supposons qu'il s'agisse des angles intérieurs FED, EFB; je dis que ces deux angles sont supplémens l'un de l'autre. En effet, les droites AB, CD étant parallèles, les angles correspondans EFB, HED sont égaux; mais deux angles égaux ont le même supplément; et le supplément de HED est FED;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donc les angles intérieurs FED, EFB du même côté de la sécante sont supplémens l'un de l'autre.

On démontrerait de même que les angles extérieurs HED, GFB du même côté de la sécante, sont aussi supplémens l'un de l'autre.

66. THÉORÈME 44. *Réciproquement, si deux droites* AB, CD (fig. 25) *sont coupées par une sécante* GH, *et que les angles intérieurs ou extérieurs du même côté de la sécante soient supplémens l'un de l'autre, les droites* AB, CD *seront parallèles.*

Supposons que les angles intérieurs FED, EFB soient ceux qui sont supplémens l'un de l'autre; comme l'angle FED est aussi supplément de l'angle HED, il s'ensuit que les angles correspondans HED, EFB sont égaux, et que par conséquent, les droites AB, CD sont parallèles. On serait parvenu à la même conséquence si l'on était parti de l'hypothèse que les angles extérieurs CEH, AFG du même côté de la sécante, sont supplémens l'un de l'autre, ou, etc.

67. THÉORÈME 45. *Supposons que les droites b'b, c'c* (fig. 26) *soient respectivement parallèles aux côtés* AB, AC *de l'angle* BAC; *je dis que les angles cab, b'ac' seront chacun égal à l'angle* BAC, *et que les angles bac', cab' seront chacun supplémens du même angle* BAC.

En effet, si l'on prolonge la droite *c'c* jusqu'à sa rencontre en B avec la droite AB, à cause que les droites *c'c*, AC sont parallèles, les angles BAC, AB*a* seront égaux comme alternes-internes, et à cause que les droites AB, *b'b* sont parallèles, les angles AB*a*, B*ab* seront égaux par la même raison, et les angles AB*a*, *b'ac'* seront égaux comme correspondans; mais l'angle AB*a* = BAC; donc BAC = *cab* = *b'ac'*. Les angles AB*a*, B*ab'* sont supplémens l'un de l'autre; mais AB*a* = BAC; donc aussi les angles BAC, B*ab'* sont supplémens l'un de l'autre; or, les angles *b'ac*, *c'ab* sont égaux comme étant opposés par le sommet; donc les angles BAC, *c'ab* sont aussi supplémens l'un de l'autre.

68. *Corollaire.* Il suit donc de là que *deux angles sont égaux ou supplémens l'un de l'autre, quand ils ont leurs côtés respectivement parallèles, quelle que soit d'ailleurs la manière dont les sommets soient tournés l'un par rapport à l'autre.*

69. THÉORÈME 46. *La somme des trois angles d'un triangle quelconque* ABC (fig. 27) *est égale à deux angles droits.*

En effet, prolongeons indéfiniment vers D l'un AB des côtés du triangle ABC, et par le sommet B, menons la droite BE parallèle à AC; les angles ABC, CBE et EBD vaudront ensemble deux angles droits. Mais l'angle ABC est un de ceux du triangle ABC, les angles ACB, CBE sont alternes-internes,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce qui donne ACB = CBE, et les angles CAB, EBD sont correspondans; les trois angles du triangle ABC sont donc égaux, chacun à chacun, aux angles qui ont leur sommet au point B, et dont la somme est égale à deux angles droits; donc la somme des trois angles d'un triangle quelconque est égale à deux angles droits.

70. *Corollaire.* Il suit de là 1°. qu'un triangle ne peut avoir qu'un seul angle qui soit droit, et à plus forte raison obtus; car s'il avait deux angles droits, le troisième angle serait nul, ce qui est impossible; 2°. que lorsque deux triangles ont deux angles égaux, chacun à chacun, les troisièmes angles sont nécessairement égaux; car ces troisièmes angles ne sont autres choses que ce qui manque à la somme des deux premiers pour égaler deux angles droits, et 3°. que dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémens l'un de l'autre (n°. 18).

71. THÉORÈME 47. *Deux droites parallèles comprises entre deux autres droites parallèles sont égales.*

Supposons que les droites AB, DC (fig. 28) soient parallèles, ainsi que les droites AD, BC; il faut démontrer que AB = DC et AD = BC.

Pour celà, par les points D et B, menons la droite DB; nous aurons les triangles ABD, BDC qui seront égaux. En effet, les droites AB, DC étant parallèles, les angles ABD, CDB sont égaux comme alternes-internes; et les droites AD, BC étant aussi parallèles, les angles ADB, DBC sont égaux par la même raison. De plus, le côté BD est commun aux deux triangles; donc ces deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun; donc ils sont égaux; donc enfin AB = DC et AD = BC.

72. THÉORÈME 48. *Si deux droites* AB, CD (fig. 28) *sont égales et en même temps parallèles, les droites* AD, BC *qui passent par leurs extrémités* A *et* D, B *et* C, *seront également parallèles.*

En effet, menons la droite DB par les points D et B; les deux triangles ABD, BDC seront égaux; car ils auront le côté BD commun, et, par hypothèse, les côtés AB, DC égaux entre eux. De plus, les droites AB, DC étant parallèles, les angles alternes-internes ABD, BDC sont égaux; donc les deux triangles ABD, BDC sont égaux, puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux, chacun à chacun; les angles de ces triangles sont donc égaux, chacun à chacun; donc les angles ADB, DBC sont égaux. Mais ces angles sont alternes-internes; donc les droites AD, BC sont parallèles et en même temps égales.

73. THÉORÈME 49. *Si les deux droites* AB, DC (fig. 28) *sont égales, ainsi que les droites* AD, BC, *ces droites égales seront aussi parallèles.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, en menant la droite DB, on aura les triangles ADB, DBC qui seront égaux, comme ayant les trois côtés égaux, chacun à chacun; les angles de ces taiangles seront donc égaux, chacun à chacun; donc les angles ABD, BDC seront égaux; mais ces angles sont alternes-internes; donc les droites AB, DC sont parallèles. De plus, les angles ADB, DBC étant égaux, les droites AD, BC sont aussi parallèles; ce qu'il fallait démontrer.

74. THÉORÈME 50. *Deux droites qui se rencontrent ne sont pas partout à égales distances.*

Car le point où ces deux droites se rencontrent appartient à toutes les deux, de sorte qu'en ce point les deux droites sont à une distance nulle; si donc elles étaient partout à la même distance, elles coïncideraient dans toute leur étendue et ne formeraient qu'une seule et même droite, ce qui est contre l'hypothèse.

75. *Corollaire.* Il suit de là que *deux droites parallèles ne peuvent jamais se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge l'une et l'autre;* car si elles se rencontraient elles ne seraient pas partout à égales distances, ou elles se confondraient.

76. THÉORÈME 51. *Si les extrémités* C *et* D *d'une droite* CD (fig. 29) *ne sont pas à égales distances d'une seconde droite* AB, *en abaissant, par les points* C *et* D *de la droite* CD, *les perpendiculaires* CA, DB *sur la droite* AB; *en divisant la distance* AB *en autant de parties égales qu'on voudra, et, par ces points de divisions* E, F, *etc., en élevant les perpendiculaires* EG, FH, *etc., à la droite* AB, *les perpendiculaires* BD, FH, EG, *etc., iront en décroissant de la même quantité, en allant successivement de la plus grande* BD *à la plus petite* AC.

D'abord ces perpendiculaires iront en diminuant, en allant successivement de la plus grande à la plus petite; car il est évident que, prises dans le même ordre, elles ne peuvent pas aller en augmentant, et, de plus, elles ne peuvent pas être égales, puisque, si elles étaient égales, la droite CD aurait tous ses points à égales distances de la droite AB; ce qui est contre l'hypothèse.

Ainsi donc, si par les points H, G, C on mène les droites HL, GK, CI, parallèles à la droite AB, ces droites HL, GK, CI rencontreront, la première la droite BD, la seconde la droite FH, et la troisième la droite EG, respectivement aux points L, K, I situés au-dessous des points D, H, G. De plus, les droites HL, GK, CI sont respectivement égales aux droites FB, EF, AE; comme parallèles comprises entre des parallèles, mais ces dernières sont égales entre elles; donc les premières seront aussi égales entre elles; d'où il suit que les triangles HDL, GHK, CGI, ont tous un côté égal. De plus les angles

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

HLD, GKH, CIG sont égaux comme ayant les côtés parallèles, ainsi que les angles DHL, HGK, GCI; donc les triangles HDL, GHK, CGL, ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun; donc ils sont égaux; donc les côtés LD, KH, IG, sont égaux. Maintenant il est évident que pour passer de la perpendiculaire BD à la perpendiculaire FH, il faut, de BD, retrancher DL; pour passer de la perpendiculaire FH à la perpendiculaire EG, il faut, de FH, retrancher HK, et ainsi de suite; car on a BL=FH, FK=EG, etc., comme parallèles comprises entre parallèles; donc enfin les perpendiculaires BD, FH, EG, AC vont en diminuant successivement de la même quantité; ce qu'il fallait démontrer.

77. THÉORÈME 52. *Les mêmes choses que dans la proposition précédente ayant lieu, supposons, de plus, qu'on prolonge indéfiniment la droite* DC *du côté du point* C, *ainsi que la droite* AB; *que sur le prolongement de cette dernière, et à partir du point* A, *on porte les distances* AN, NO, *etc., égales à* AE; *que par les points* N, O, *etc., on élève à la droite* AB *les perpendiculaires* NQ, OP, *etc.; je dis que ces nouvelles perpendiculaires continueront de décroître successivement de la même quantité que les précédentes* BD, FH, EG, AC.

En effet, si par les points Q, P, etc., on mène les droites QR, PS, etc. parallèles à OB, les triangles QRC, PSQ, etc. seront dans les mêmes circonstances que les triangles CIG, GKH, etc.; donc CR = QS =, etc., d'où il suit que la proposition dont il s'agit est démontrée.

78. THÉORÈME 53. *Si la droite* CD (fig. 29) *a deux points* C *et* D *inégalement éloignés d'une droite* UV, *ces deux droites prolongées suffisamment du côté où elles sont le moins écartées l'une de l'autre se rencontreront.*

En effet, parallèlement à la droite UV, menons la droite MB à une distance quelconque au-dessous de UV; comme deux droites parallèles sont partout à égales distances l'une de l'autre, la droite CD ayant deux points inégalement éloignés de la droite UV, ces mêmes points de la droite CD seront aussi inégalement distans de la droite MB; en supposant donc les mêmes constructions que dans les deux dernières propositions, il est clair qu'il sera toujours possible de prendre assez de points N, O, J, M, etc., au-delà du point A, sur la droite MB (de manière que les distances AN, NO, OJ, etc., soient égales entre elles), pour que la somme des différences CR, QS, PY, etc. des perpendiculaires AC, NQ, OP, etc. soit plus grande que la distance CC′ du point C, de la droite CD (qui est le plus près de la droite MB), pour arriver à la droite UV; donc la droite CD, prolongée, aura au moins un point situé au-dessous de la droite UV; donc les deux droites CD, UV, suffisamment prolongées, se rencontreront en un point T.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

79. THÉORÈME 54. *Deux droites, qui sont situées dans un même plan, et qui ne peuvent jamais se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge l'une et l'autre, sont partout à égales distances, et par conséquent parallèles.*

En effet, d'après ce qui précède, si ces deux droites n'étaient pas partout à égales distances, elles se rencontreraient, ce qui est contre l'hypothèse; donc ces deux droites sont partout également distantes; donc elles sont parallèles.

En examinant ce qui précède sur les parallèles, on verra qu'il n'y a pas une seule proposition ni une seule réciproque, qui ne soit rigoureusement démontrée, ce que personne n'avait fait jusqu'ici (1).

---

(1) « Beaucoup d'auteurs, a dit M. Lacroix (Elémens de géométrie à l'usage de l'école centrale » des Quatre-Nations, par S. F. Lacroix, septième édition, revue et corrigée, 1808), beaucoup » d'auteurs ont fait, pour en venir à bout, des efforts inutiles; et d'autres, comme *Bezout*, ont » dissimulé le vice du raisonnement, ce qui me semble contraire au devoir rigoureux que s'impose » tout auteur d'ouvrages élémentaires, de ne donner jamais que des notions exactes, et surtout d'en » faire connaître avec soin l'origine. J'ai jugé convenable de mettre en évidence ce point délicat, » en formant, à l'exemple d'*Euclide*, une demande, mais que je crois plus aisée à accorder que » la sienne, parce qu'elle présente la difficulté réduite à ses moindres termes. »

« Plusieurs géomètres ont essayé de prouver la vérité de cette demande, soit directement, » soit en transposant la difficulté; presque tous sont tombés dans de très-grandes longueurs, ou » dans l'inconvénient de compliquer, par des raisonnemens obscurs, des propositions dont la preuve » directe est extrêmement simple. On doit cependant excepter de ce reproche la démonstration » donnée par M. Bertrand : elle m'a paru la plus simple et la plus ingénieuse de toutes celles que je » connais, etc. »

La démonstration de M. Bertrand n'est qu'une explication comme celle de M. Legendre, et n'est point, et ne peut point être regardée comme une démonstration rigoureuse (*voyez l'ouvrage cité plus haut*).

Je crois que tous les géomètres qui se sont occupés d'établir une théorie rigoureuse des parallèles y seraient parvenus comme je crois l'avoir fait (ainsi qu'on a pu s'en convaincre par ce que j'ai dit à ce sujet), s'ils avaient fait attention qu'en partant de la définition banale des parallèles, *qu'elles sont deux droites situées dans un même plan, et qu'elles ne peuvent jamais se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge l'une et l'autre*, il était impossible d'en pouvoir rien déduire de direct, en ce que cette définition renferme l'infini comme idée principale; et que dans l'infini nous ne pouvons voir que l'infini : il était donc impossible de pouvoir déduire les propriétés particulières des parallèles, d'après cette définition beaucoup trop générale et trop vague. Il fallait donc l'abandonner puisqu'elle était défectueuse, et en adopter une autre plus intimement liée à la nature de la ligne droite. Il me semble que les propriétés de l'hyperbole relativement à ses asymptotes, auraient dû éveiller l'attention des géomètres sur le vice de cette définition que Mauduit semble avoir senti, puisqu'il appelle *parallèles, deux droites qui, dans un même plan, sont également inclinées d'un même côté sur une seule et même droite;* mais soit qu'il ait craint de tomber dans des raisonnemens obscurs et longs, soit qu'il n'ait point saisi la chaîne des idées, il ne donne pas, des parallèles, une théorie plus satisfaisante que les autres géomètres. Ainsi, si je ne me trompe, celle qu'on vient de lire est la première qui soit aussi rigoureuse que les autres parties de la géométrie.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4^me^. LEÇON.

Les Droites proportionnelles et les Triangles semblables.

80. THÉORÈME 55. *Supposons que le côté* AB *du triangle* ABC (fig. 30) *soit divisé en un certain nombre de parties égales, en* 5, *par exemple; si par les points de divisions* D, E, F *et* G, *on mène les droites* DH, EI, FK *et* GL, *parallèles au côté* BC, *ces parallèles diviseront le côté* AC *en un même nombre de parties égales entre elles.*

En effet, si par les points H, I, K et L on mène les droites HM, IN, KO et LP parallèles à AB, les triangles ADH, HMI, INK, KOL, LPC seront tous égaux; car 1°. ces triangles ont les côtés AD, HM, IN, KO, LP qui sont égaux, puisqu'ils sont tous égaux aux parties égales de la droite AB, comme parallèles comprises entre des parallèles; 2°. les angles de ces triangles sont égaux, chacun à chacun, puisqu'ils ont les côtés parallèles; ces triangles ont donc un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun; donc ils sont égaux; donc, enfin, le côté AC est divisé en autant de parties égales que le côté AB par les parallèles, à la droite BC, menée par les points de divisions de AB.

81. *Corollaire.* Il suit de cette proposition, 1°. que si l'on prolonge les côtés AB, AC (fig. 31) indéfiniment vers les points V et X, et que l'on porte sur le prolongement de AB, autant de parties de AB qu'on voudra; en menant, par les points T, V,..., les droites TS, VX,... parallèles à BC, le prolongement de AC sera coupé en parties égales, lesquelles parties seront égales aux parties de AC; c'est-à-dire qu'on aura GC = CS = SX =, etc. Car les triangles CUS, SYX,... sont évidemment égaux aux triangles ADI, IOH,...;

2°. Si l'on prolonge les côtés BA, CA, au-delà du sommet A, et que sur le prolongement de AB on porte autant de divisions de AB qu'on voudra; si par les points K, L..., on mène les droites KN, LM,... parallèles à BC, le prolongement de CA sera coupé en parties égales, lesquelles seront égales aux parties de AC; c'est-à-dire que AI = AN = NM =, etc.; car les triangles AKN, RNM,..... sont évidemment égaux aux triangles ADI, etc.

82. THÉORÈME 56. *Si dans un triangle* ABC (fig. 32 et 33) *on mène une droite* DE *parallèle à un côté* BC, *les deux autres côtés* AB, AC *seront coupés proportionnellement; c'est-à-dire qu'on aura* AB : AD :: AC : AE.

En effet, d'abord supposons qu'il soit possible de diviser AB en parties égales de manière que dans la longueur AD il se trouve un nombre complet

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de ces parties égales; c'est-à-dire, en d'autres termes, supposons que les droites AB, AD soient *commensurables;* d'après la proposition précédente, il est clair que si par les points de division de la droite AB on mène des parallèles à la droite BC, le côté AC sera divisé en un même nombre de parties égales entre elles; et que, la droite AD contenant un nombre complet des parties égales de AB, AE contiendra le même nombre complet des parties égales de AC; si donc on suppose que AB soit divisé en 60 parties égales, et que AD contienne 47 de ces parties, AC sera de même divisé en 60 parties égales, et AE contiendra 47 de ces dernières parties égales; on aura donc AB : AD :: 60 : 47, et AC : AE :: 60 : 47; donc (alg., n°. 137) AB : AD :: AC : AE.

En second lieu, supposons qu'il ne soit plus possible de diviser AB en parties égales de manière que AD contienne un nombre complet de ces mêmes parties; c'est-à-dire, supposons que les longueurs AB, AD n'aient point de mesure commune, que ces longueurs, en un mot, soient *incommensurables;* je dis que la proposition aura encore lieu; c'est-à-dire que si la droite DE est parallèle à BC, quel que soit le rapport des droites AB, AD, on aura

$$AB : AD :: AC : AE \ldots\ldots (1).$$

Si cela n'est pas vrai, il est clair que le quatrième terme de la proportion (1) sera trop grand ou trop petit; supposons qu'il soit trop grand, et qu'au lieu de AE il ne faille que AO; on aura donc

$$AB : AD :: AC : AO \ldots\ldots (2).$$

Par le point O menons la droite OF parallèle à BC; il est clair qu'on pourra toujours diviser AB en un assez grand nombre de parties égales, pour que ces parties soient plus petites que la distance FD, quelque petite que soit cette distance FD: il y aura donc au moins un point de division entre les points F et D (en supposant, pour la figure 33, qu'on porte, sur le prolongement de AB, un nombre indéfini des parties égales de AB); soit I, ce point; la distance AI sera commensurable avec AB; si donc par le point I on mène la droite IL parallèle à BC, on aura AB : AI :: AC : AL, ou (alg., n°. 135) AI : AB :: AL : AC; multiplions cette dernière proportion par celle (2) ci-dessus, en faisant abstraction des termes communs aux moyens et aux extrêmes (alg., n°. 138), et nous aurons AI : AD :: AL : AO. Mais dans cette proportion nous avons AI $<$ AD; il faudra donc que AL $<$ AO, or, c'est le contraire; AO est donc trop petit; donc AE de la proportion (1) n'est pas trop grand. On démontrerait d'une manière semblable que AE n'est pas trop petit; donc (pourvu que DE soit parallèle à BC) on aura toujours la proportion (1) ci-dessus.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

83. *Corollaire* 1. De la proportion AB : AD :: AC : AE, on tire 1°. AB : AC :: AD : AE (alg., n°. 135); 2°. AB : AC :: AB—AD : AC—AE (alg., n°. 144) ou AB : AC :: DB : EC, car AB—AD = DB, et AC—AE = EC; 3°. de la proportion AB : AC :: AD : AE, il résultera AB — AD : AC — AE :: AD : AE, ou DB : EC :: AD : AE (comparez toutes ces proportions avec les figures, pour en bien retenir le sens).

84. *Corollaire* 2. La droite DE étant toujours parallèle à BC (fig. 34), il suit encore de là que AC : AE :: BC : DE; car si par le point E on mène la droite EF parallèle à AB, on aura AC : AE :: BC : BF; mais BF = DE (comme parallèles comprises entre parallèles); donc AC : AE :: BC : DE, et puisque AC : AE :: AB : AD, on aura aussi AB : AD :: BC : DE.

85. *Corollaire* 3. Il suit encore de là que *si l'un* AB (fig. 35 et 36) *des côtés d'un triangle quelconque* ABC *est divisé d'une certaine manière, et que par les points de division on mène des droites* FC, GC (fig. 35) ou FH, GI (fig. 36) *au sommet* C; *si, ensuite, on mène une droite quelconque* DE (fig. 35 et 36) *parallèle à* AB, *cette droite* DE *sera divisée de la même manière que la droite* AE *par les droites* FC, GC (fig. 35) *ou* FH, GI (fig. 36); *de sorte qu'on aura*

AC : CD :: AF : DH :: FG : HI :: GB : IE :: AB : DE.

En effet, il est évident d'abord que AC : CD :: AF : DH :: CF : CH, en ne considérant que le triangle ACF, dans lequel la droite DH est parallèle à AF; mais si l'on considère le triangle FCG, dans lequel la droite HI est parallèle à FG, on aura CF : CH :: FG : HI, donc

AC : CD :: AF : DH :: FG : HI, etc.

86. THÉORÈME 57. *Réciproquement, si les côtés* AB, AC (fig. 37 et 38) *d'un triangle* ABC *sont coupés proportionnellement par une droite* DE, *cette droite* DE *sera parallèle à* BC.

En effet, si la droite DE n'est pas parallèle à BC, par le point D on pourra mener une droite DF qui soit parallèle à BC, ce qui donnera AB : AD :: AC : AF; mais par hypothèse AB : AD :: AC : AE; or, ces deux proportions ont les trois premiers termes communs; donc les quatrièmes doivent être égaux; ce qui ne peut avoir lieu, à moins que la parallèle DF à BC ne coïncide avec DE; donc cette dernière DE est parallèle à BC; ce qu'il fallait démontrer.

87. THÉORÈME 58. *Si l'on divise en deux parties égales, par une droite* CD (fig. 39), *l'un des angles* ACB *d'un triangle quelconque* ABC, *le côté* AB *opposé à cet angle sera coupé en deux segmens* AD, DB *proportionnels aux deux autres côtés* AC, CB; *c'est-à-dire qu'on aura* AD : DB :: AC : CB.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, si l'on prolonge le côté AC vers le point E, et que par le point B on mène la droite BE parallèle à DC, on aura le triangle ABE, dans lequel la droite DC, parallèle à BE, coupera les côtés AB, AE proportionnellement; de sorte (n°. 83) qu'on aura AD : DB :: AC : CE....(1). Mais le triangle CBE est isocèle; car l'angle BEC = ACD (n°. 61), et l'angle CBE = DCB (n°. 59); or, la droite DC divise l'angle ACB en deux parties égales; donc l'angle ACD = DCB; donc aussi l'angle CBE = BEC; donc (n°. 45) CB = CE; si donc on met CB à la place de CE dans la proportion (1), on aura AD : DB :: AC : CB; ce qu'il fallait démontrer.

Les Triangles semblables.

88. DÉFINITIONS. Deux triangles sont dits *semblables* lorsqu'ils ont les côtés homologues proportionnels et les angles égaux, chacun à chacun.

On appelle côtés *homologues* ceux qui sont semblablement placés dans les deux triangles.

Comme dans un triangle il y a trois angles et trois côtés, il s'ensuit qu'il y a six conditions nécessaires pour que deux triangles soient semblables; mais nous allons voir que trois de ces six conditions ayant lieu, les trois autres s'ensuivent nécessairement.

89. THÉORÈME 59. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels.*

Supposons, en effet, que les deux triangles ABC, *abc* (fig. 40) aient l'angle A = *a*, et que les côtés AB, AC et *ab*, *ac* donnent la proportion AB : *ab* :: AC : *ac*... (1); si l'on porte le petit triangle *abc* sur le grand ABC, de manière que l'angle *a* coïncide avec son égal A; le petit triangle deviendra ADE, de sorte que AD = *ab*, et AE = *ac*; la proportion (1) deviendra donc AB : AD :: AC : AE; donc la droite DE divise les côtés AB, AC proportionnellement; donc (n°. 86) cette droite DE est parallèle à BC, et (n°. 84) on a AB : AD ou *ab* :: BC : DE ou *bc*; donc les trois côtés de ces deux triangles sont proportionnels, et les angles sont égaux, puisque DE est parallèle à BC; donc enfin ces deux triangles sont semblables.

90. THÉORÈME 60. *Si deux triangles ont les angles égaux, chacun à chacun, ils auront les côtés homologues proportionnels, et seront par conséquent semblables.*

Supposons, en effet, que les deux triangles ABC, *abc* (fig. 40) aient les angles A = *a*, B = *b* et C = *c*; plaçons le petit sur le grand triangle, de manière que l'angle *a* coïncide avec son égal A; le petit triangle deviendra ADE, de sorte que AD = *ab*, AE = *ac* et DE = *bc*, et les angles du triangle ADE ne seront autre chose que les angles du triangle *abc*; mais l'angle *b* = B;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donc l'angle ADE = B; donc DE est parallèle (n°. 62) à BC; d'où il suit que AB : AD ou *ab* :: BC : DE ou *bc* :: AC : AE ou *ac*; donc les deux triangles ABC, *abc*, ayant les angles égaux, ont aussi les côtés homologues proportionnels; donc ils sont semblables.

Remarque. Comme (n°. 70) lorsque deux triangles ont deux angles égaux ils les ont tous les trois; il s'ensuit que deux triangles qui ont deux angles égaux sont semblables.

91. THÉORÈME 61. *Réciproquement, si deux triangles ont les trois côtés homologues proportionnels, ils auront aussi les trois angles égaux, chacun à chacun, et seront par conséquent semblables.*

Supposons donc que les triangles ABC, *abc* (fig. 41) soient tels, qu'on ait AB : *ab* :: AC : *ac* :: BC : *bc*... (1); je dis que ces triangles auront les angles égaux, chacun à chacun. En effet, sur le côté *ab* du petit triangle, faisons l'angle *abd* = B et l'angle *bad* = A; nous aurons le triangle *abd* qui aura les trois angles égaux, chacun à chacun, aux angles du triangle ABC; on aura donc AB : *ab* :: AC : *ad* :: BC : *bd*.

Si nous comparons cette suite de rapports égaux à la suite (1) ci-dessus, nous verrons que ces deux suites ont un rapport commun qui est AB : *ab*; donc tous les autres rapports sont égaux; ainsi nous aurons AC : *ac* :: AC : *ad* ou AC : AC :: *ac* : *ad*; donc *ad* = *ac*; et BC : *bc* :: BC : *bd* ou BC : BC :: *bc* : *bd*; donc *bd* = *bc*; il suit donc de là que les deux triangles *abc*, *abd* ont les trois côtés égaux; ces deux triangles ont donc aussi les trois angles égaux, chacun à chacun; mais les angles du triangle *abd* sont égaux, chacun à chacun, aux angles du triangle ABC; donc les angles du triangle *abc* sont aussi égaux, chacun à chacun, aux angles du triangle ABC; ce qu'il fallait démontrer.

92. *Corollaire.* Il suit de ce qui précède sur les triangles semblables, et du n°. 68, que deux triangles qui ont les côtés parallèles sont semblables, car ils ont les angles égaux.

Il sera démontré aussi que deux triangles, qui ont les côtés perpendiculaires, ont les angles égaux, et sont par conséquent semblables.

5^me^. LEÇON.

Les Polygones.

93. DÉFINITIONS. On appelle *figure plane*, une surface plane terminée de toutes parts par des lignes. Si ces lignes sont droites, la figure prend le nom de *polygone*. Les droites qui terminent le polygone s'appellent les *côtés*, et leur ensemble forme le *contour* ou le *périmètre* du polygone.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les polygones sont *réguliers* ou *irréguliers*. Ils sont réguliers, lorsqu'ils ont les côtés et les angles égaux. Ils sont irréguliers dans toute autre circonstance.

Les polygones sont *convexes* ou à *angles rentrans*. Un polygone est convexe quand une droite ne peut couper le contour qu'en deux points.

Les polygones se distinguent encore par le nombre de leurs côtés. Le plus simple de tous s'appelle *trilatère*, parce qu'il a trois côtés, et *triangle* parce qu'il a trois angles (n°. 36). Celui qui a quatre côtés s'appelle *quadrilatère;* celui qui en a cinq, *pentagone;* celui qui en a six, *exagone;* sept, *eptagone;* huit, *octogone;* neuf, *ennéagone;* dix, *décagone;* douze, *duodécagone*, etc.; ou bien on se contente d'énoncer le nombre des côtés du polygone que l'on veut désigner.

On appelle *diagonale* une droite qui joint les sommets de deux angles non adjacens dans un polygone quelconque.

94. THÉORÈME 62. *Deux polygones quelconques sont égaux lorsqu'ils ont les côtés et les angles égaux, chacun à chacun. Il n'est pas besoin de dire que le nombre des côtés est le même dans les deux polygones.*

Supposons, en effet, que les polygones ABCDEFG, *abcdefg* (fig. 42) soient tels, que les côtés, AB = *ab*, BC = *bc*, CD = *cd*, etc., et que les angles, A = *a*, B = *b*, C = *c*, D = *d*, etc., il est clair qu'on pourra poser ces deux polygones l'un sur l'autre, de manière que l'angle *a* coïncide avec son égal A, d'où il résultera que, 1°. le côté *ab* coïncidera avec son égal AB, et le côté *ag* avec son égal AG; 2°. le point *b* tombera sur le point B, et comme l'angle *b* est égal à l'angle B, le côté *bc* coïncidera avec BC; 3°. le point *c* tombera sur le point C, et comme l'angle *c* = C, le côté *cd* coïncidera avec CD; etc.: les deux polygones coïncideront donc dans tous leurs points; donc ils seront égaux.

95. THÉORÈME 63. *Si deux polygones quelconques sont égaux, on pourra toujours les décomposer en un même nombre de triangles égaux, chacun à chacun, et semblablement disposés.*

Soient les deux polygones égaux ABCDEFG, *abcdefg* (fig. 42); si dans ces deux polygones on mène les diagonales BD, BE, BF, BG, et *bd*, *be*, *bf*, *bg*, par les sommets homologues; je dis que les triangles BCD = *bcd*, BDE = *bde*, BEF = *bef*, BFG = *bfg*, etc.

En effet, 1°. le triangle BCD = *bcd*, car l'angle C = *c*, et les côtés BC = *bc* et CD = *cd*; donc les deux triangles BCD, *bcd* sont égaux, puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux, chacun à chacun; 2°. le triangle BDE = *bde*; car l'angle CDE = *cde*, et l'angle CDB = *cdb*; donc

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CDE — CDB = *cde* — *cdb*, ou BDE = *bde*. De plus, BD = *bd* et DE = *de*; donc les deux triangles BDE, *bde* sont égaux, puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux, chacun à chacun; 3°. etc. La proposition se trouve donc démontrée.

96. THÉORÈME 64. *Réciproquement, si deux polygones se composent d'un même nombre de triangle égaux, chacun à chacun, et semblablement disposés, les deux polygones seront égaux.*

Supposons donc (fig. 42) que les triangles BCD = *bcd*, BDE = *bde*, etc., 1°. l'angle C = *c*, les côtés BC = *bc* et CD = *cd*; 2°. comme les angles BDC = *bdc* et BDE = *bde*, on aura BDC + BDE = *bdc* + *bde* ou CDE = *cde*, et DE = *de*, etc. Les deux polygones ont donc les côtés et les angles égaux, chacun à chacun; donc ils sont égaux.

97. DÉFINITION. Deux polygones sont *semblables* quand ils ont le même nombre de côtés, les angles égaux, chacun à chacun, et les côtés homologues proportionnels.

98. THÉORÈME 65. *Deux polygones semblables peuvent toujours se décomposer en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés.*

Supposons (fig. 43) que les deux polygones ABCDE, *abcde* soient semblables, et menons les diagonales AC, AD,... dans le premier, et par les sommets homologues les diagonales *ac*, *ad*,... dans le second; les triangles *abc*, *acd*, *ade*,...., seront respectivement semblables aux triangles ABC, ACD, ADE.

En effet, les deux polygones étant semblables, ils ont les angles égaux, chacun à chacun, et les côtés homologues proportionnels : on aura donc l'angle B = *b*, et AB : *ab* :: BC : *bc*; donc les triangles ABC, *abc* sont semblables, puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc BC : *bc* :: AC : *ac*, et l'angle ACB = *acb*. Mais BC : *bc* :: CD : *cd*, à cause que les polygones sont semblables; donc AC : *ac* :: CD : *cd*; de plus, l'angle BCD = *bcd*, et ACB = *acb*; donc ACD = *acd*; les deux triangles ACD, *acd* ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels; ces deux triangles sont donc semblables, etc.

99. THÉORÈME 66. *Réciproquement, si deux polygones se composent d'un même nombre de triangles semblables, chacun à chacun, et semblablement disposés, ces deux polygones seront semblables.*

Supposons (fig. 43) que les triangles ABC, ACD, ADE soient respectivement semblables aux triangles *abc*, *acd*, *ade*; je dis que les deux polygones ABCDE, *abcde* seront semblables.

En effet, d'abord puisque les triangles dans lesquels se composent les po-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

lygones sont semblables, chacun à chacun, les angles de ces triangles sont égaux, chacun à chacun; ainsi on aura l'angle B = b; l'angle C = c, car ces deux angles se composent de deux angles égaux, chacun à chacun; l'angle D = d, par la même raison, etc.; donc ces deux polygones ont les angles égaux. Mais la similitude des triangles donne AB : ab :: BC : bc :: AC : ac :: CD : cd, etc., donc les côtés de ces mêmes polygones sont proportionnels; donc ces polygones sont semblables.

100. THÉORÈME 67. *Les contours ou périmètres des polygones semblables sont entre eux comme les côtés homologues de ces polygones.*

Soient ABCDE, *abcde* (fig. 43) deux polygones semblables; on aura AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: EA : ea; mais dans une suite de rapports égaux (alg., n°. 141), la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent; donc

$$AB + BC + DC + DE + EA : ab + bc + dc + de + ea :: AB : ab.$$

Or, le premier terme de cette proportion n'est autre chose que le contour du grand polygone, et le second terme le contour du petit; appelons donc C et c ces deux contours, et nous aurons C : c :: AB : ab; ce qu'il fallait démontrer.

101. THÉORÈME 68. *La somme de tous les angles intérieurs d'un polygone convexe quelconque est toujours égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a d'unités moins deux dans le nombre des côtés du polygone.*

En effet, s'il s'agit du polygone ABCDE (fig. 43), en menant les diagonales AC, AD, ce polygone se trouvera décomposé en autant de triangles qu'il y a de côtés moins deux dans le polygone. Or, il est évident que l'ensemble des angles de ces triangles forme la somme des angles intérieurs du polygone; mais l'ensemble de tous les angles de ces triangles est égal à autant de fois deux angles droits (n°. 69) qu'il y a de ces triangles, ou, en d'autres termes, qu'il y a de côtés moins deux dans le polygone; si donc n est le nombre des côtés du polygone, en prenant l'angle droit pour unité, la somme de tous les angles intérieurs d'un polygone quelconque sera égale à $2(n-2)$.

102. *Corollaire.* Il suit de là que les quatre angles d'un quadrilatère valent ensemble quatre angles droits. Car dans ce cas $n=4$, et $n-2=2$; donc $2(n-2)=2\times 2=4$.

103. THÉORÈME 69. *Si deux angles* CAB, CDE (fig. 44) *ont les côtés perpendiculaires, ils seront égaux.*

En effet, le quadrilatère ACDB a deux angles droits ACD, ABD; mais les quatre angles valent quatre angles droits; donc les deux autres angles CAB, CDB sont supplémens l'un de l'autre; mais les deux angles CDB, CDE

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sont aussi supplémens l'un de l'autre; donc les angles CAB, CDE ont le même supplément; donc ils sont égaux; ce qu'il fallait démontrer.

104. *Corollaire.* Il suit de là que deux triangles qui ont les côtés respectivement perpendiculaires ont les angles égaux, et sont par conséquent semblables (n°. 90).

105. DÉFINITION. Si l'on prolonge les côtés d'un polygone ABCDE (fig. 45), les angles BAF, CBG, DCH, etc., seront ce qu'on appelle les angles *extérieurs* du polygone.

106. THÉORÈME 70. *La somme de tous les angles extérieurs d'un polygone quelconque est toujours égale à quatre angles droits.*

En effet, il est évident qu'en ajoutant les angles extérieurs aux angles intérieurs, on aura autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés dans le polygone; ainsi n étant le nombre des côtés, $2n$ sera la somme totale des angles du polygone; mais si l'on ne veut avoir que la somme des angles extérieurs, il est clair que de la somme totale il faudra retrancher la somme des angles intérieurs, qui est $2(n-2)$ ou $2n-4$; on aura donc pour la somme des angles extérieurs $2n-2n+4=4$; ce qu'il fallait démontrer.

107. THÉORÈME 71. *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables.*

En effet, la somme des angles intérieurs de ces deux polygones est la même, puisque le nombre des côtés est le même; mais les polygones sont réguliers; les angles de chacun d'eux sont donc égaux entre eux; ces deux polygones auront donc les angles égaux, puisque ces angles seront des fractions semblables de la même somme. De plus, les côtés de chacun des polygones sont égaux entre eux; en comparant donc les côtés de l'un aux côtés de l'autre, on aura une suite de rapports identiques; donc les côtés homologues seront proportionnels; donc les deux polygones seront semblables.

108. THÉORÈME 72. *Si sur les milieux* F *et* G *des deux côtés contigus* AB, BC *d'un polygone régulier quelconque* (fig. 46) *on élève les perpendiculaires* FO, GO, *ces deux perpendiculaires se rencontreront en un point* O *qui sera également éloigné de chaque côté du polygone.*

Par le point O abaissons les droites OH, OI, OK,..., perpendiculaires aux côtés CD, DE, EL,...; je dis que ces droites seront égales entre elles et aux droites FO, GO. En effet, le quadrilatère GOHC = FOGB; car si l'on fait tourner le premier autour de la droite OG, comme les angles OGC, OGB sont droits, GC prendra la direction de GB; mais le point G est le milieu de BC; donc le point C tombera sur le point B, et comme les angles DCB, CBA sont égaux, la droite CH prendra la direction de BF. Je dis maintenant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que le point H tombera sur le point F, car si cela n'avait pas lieu, par le même point O on pourrait abaisser deux perpendiculaires différentes sur la même droite AB, ce qui est impossible; donc les deux droites OF, OH sont égales, puisqu'elles coïncident. En continuant cette manière de raisonner, on démontrerait que le point O est à égales distances des autres côtés du polygone. On observera que les droites OH, OI,..., tombent sur les milieux des côtés du polygone.

109. *Corollaire* 1. Il suit de là que *le point* O *est aussi à égales distances des sommets* A, B, C,..., *du polygone*, car les droites AO, BO, CO,..., sont égales comme étant des obliques également écartées de la perpendiculaire.

110. *Corollaire* 2. Il suit de là évidemment que les triangles AOB, BOC, COD, etc., seront égaux entre eux.

111. DÉFINITION. Ce point O situé intérieurement à égales distances des côtés du polygone et des sommets, s'appelle le *centre*. Et la perpendiculaire OF abaissée du centre O sur un côté se nomme l'*apothême*.

112. DÉFINITION. On appelle *parallélogramme* un quadrilatère ABCD (fig. 47) dont les côtés opposés sont parallèles.

113. *Corollaire* 1. Il suit de cette définition que les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux, puisqu'ils sont des parallèles compris entre des parallèles (n°. 71).

114. *Corollaire* 2. Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux, ils seront parallèles (n°. 73), et le quadrilatère sera, par conséquent, un parallélogramme.

115. *Corollaire* 3. Si dans un quadrilatère deux côtés opposés sont égaux et parallèles, les deux autres côtés (n°. 72) seront aussi égaux et parallèles, et par conséquent la figure sera un parallélogramme.

116. *Corollaire* 4. Dans tout parallélogramme, les angles adjacens au même côté valent ensemble deux angles droits; car ces deux angles A et B (fig. 47) sont intérieurs aux parallèles AD, BC, et du même côté de la sécante AB (n°. 65).

117. *Corollaire* 5. Il suit de là que les angles opposés A et C ou B et D dans tout parallélogramme ABCD (fig. 47) sont égaux; car l'angle B est à la fois le supplément des angles A et C; donc $A = C$; et l'angle A est à la fois le supplément des angles B et D; donc $B = D$.

118. *Corollaire* 6. Il suit de là que les quatre angles d'un parallélogramme valent quatre angles droits; car les angles A et B valent ensemble deux angles droits, et les deux angles D et C aussi; donc ces quatre angles valent ensemble quatre angles droits, ce qui s'accorde avec le théorème 68, car le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

nombre des côtés du parallélogramme étant quatre, le nombre de ces côtés moins deux sera deux, et par conséquent la somme de ses quatre angles sera quatre angles droits.

119. *Corollaire* 7. Donc chaque angle d'un parallélogramme peut être droit. Dans le cas où les angles sont droits, le parallélogramme prend le nom de *rectangle;* et si, de plus, les côtés sont égaux, il prend le nom de *carré.* Quand les angles ne sont pas droits et que les quatre côtés sont égaux, alors le parallélogramme prend le nom de *losange.*

120. THÉORÈME 73. *Si dans un quadrilatère les angles opposés sont égaux, ce quadrilatère sera un parallélogramme.*

En effet (fig. 47), si l'angle A=C, et l'angle B=D; on aura A+B=C+D; mais les quatre angles d'un quadrilatère valent quatre angles droits (n°. 102); donc $A+B+C+D=4$ ou $(A+B)+(C+D)=4$; or, le premier membre de cette égalité se compose de deux sommes partielles égales; chacune d'elles égalera donc la moitié du second membre; donc A+B=2...(1); donc (n°. 66) les côtés AD, BC sont parallèles; mais au lieu de B dans l'égalité (1) on pourrait mettre son égal D; d'où $A+D=2$; donc AB est parallèle à DC; donc enfin le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

121. THÉORÈME 74. *Les diagonales* AC, BD (fig. 47) *d'un parallélogramme* ABCD *quelconque, se coupent mutuellement en deux parties égales.*

En effet, les triangles AIB, DIC sont égaux; car le côté AB du premier est égal et parallèle au côté DC du second; l'angle IAB=ICD comme alternes-internes, ainsi que l'angle IBA = IDC; donc AI = IC et IB = ID; ce qu'il fallait démontrer.

122. THÉORÈME 75. *Si les diagonales* AC, BD *d'un quadrilatère se coupent mutuellement en deux parties égales, ce quadrilatère sera un parallélogramme.*

En effet, les triangles AIB, DIC seront égaux, puisqu'ils auront un angle égal, comme opposé au sommet, compris entre côtés égaux, chacun à chacun; l'angle IAB sera donc égal à l'angle ICD; donc les côtés AB, DC seront parallèles; mais ces côtés sont aussi égaux; donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme, puisqu'il a deux côtés opposés égaux et parallèles (n°. 115).

123. THÉORÈME 76. *Les diagonales d'un losange* ABCD (fig. 48) *sont réciproquement perpendiculaires au milieu l'une de l'autre.*

En effet, les extrémités B et D de la diagonale BD sont à égales distances des extrémités A et C de la diagonale AC; donc (n°. 35) ces deux diagonales sont, etc.

Il en est évidemment de même pour le carré.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

6me. LEÇON.

L'aire ou superficie des Polygones.

124. DÉFINITIONS. On appelle *aire* ou *superficie* d'un polygone ou d'une surface limitée quelconque, la grandeur du polygone ou de la surface quelconque, comparativement à une mesure de même espèce, c'est-à-dire à une mesure à deux dimensions, qui est par conséquent une surface. Cette *surface unité* pourrait être quelconque, mais pour plus de facilité dans la pratique, on la suppose toujours plane. De plus, cette unité pourrait être un polygone quelconque, ou toute autre figure; mais il est plus simple de lui supposer la forme d'un carré.

Il suit de là que l'aire ou la superficie d'une surface limitée quelconque *est le nombre de fois que cette surface contient le carré unité.*

Ce carré unité s'appelle *pied carré, toise carrée, mètre carré*, etc., suivant que ses côtés ont un pied, une toise, un mètre ou, etc. de longueur.

Deux surfaces quelconques, planes ou courbes, sont dites *équivalentes*, lorsqu'elles ont la même superficie.

Il ne faut pas confondre les figures équivalentes avec les figures égales : deux figures équivalentes peuvent être de forme très-différente; mais deux figures égales ont nécessairement la même forme et la même superficie. Il faut aussi distinguer les figures semblables, qui ne sont ni égales ni équivalentes.

On appelle *hauteur* d'un triangle, la perpendiculaire abaissée de l'un des sommets sur le côté opposé, qui prend le nom de *base* du triangle. La *hauteur* d'un parallélogramme est la perpendiculaire menée à l'un des côtés qui prend le nom de *base*, par un point quelconque du côté opposé.

125. THÉORÈME 77. *Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalens.*

Soient ABCD, *abcd* (fig. 49) les deux parallélogrammes qui ont la même base et la même hauteur; on les transportera l'un sur l'autre, de manière que les bases égales coïncident (fig. 50); de sorte que le parallélogramme ABCD (fig. 49) devienne ABCD (fig. 50), et le parallélogramme *abcd* (fig. 49) devienne ABEF (fig. 50). Comme les hauteurs de ces deux parallélogrammes sont égales, il est clair que les deux côtés DC, FE seront le prolongement l'un de l'autre; d'où il résultera que ces deux quadrilatères formeront la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

figure ABED. Or, il est évident que si l'on retranche le triangle BCE de la figure ABED, il restera le parallélogramme ABCD, et si de la même figure ABED on retranche le triangle AFD, il restera le parallélogramme ABEF; si donc les triangles BCE, AFD étaient égaux, les deux parallélogrammes ABCD, ABEF seraient équivalens. Or, c'est en effet ce qui a lieu; car ces deux triangles ont un angle égal compris entre côtés égaux, chacun à chacun, puisque les deux angles CBE, DAF ont les côtés respectivement égaux et parallèles, comme étant les côtés opposés de mêmes parallélogrammes; donc, etc.

126. *Corollaire* 1. Il suit de là qu'*un parallélogramme quelconque peut se convertir en un rectangle de même base, de même hauteur et de même superficie que le parallélogramme.*

127. *Corollaire* 2. Comme tout triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur que le triangle (puisque la diagonale AC partage le parallélogramme ABCD (fig. 47) en deux triangles égaux), il suit encore de là que *deux triangles de même base et de même hauteur sont équivalens.*

128. THÉORÈME 78. *Deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et ceux qui ont même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Soient ABCD, *abcd* (fig. 51) deux rectangles de même base AB, *ab*, et supposons que les hauteurs AD, *ad* soient commensurables, qu'elles soient entre elles, par exemple, :: 11 : 5; c'est-à-dire qu'en divisant la première en 11 parties égales, et la seconde en 5, les parties de l'une soient égales aux parties de l'autre : on aura donc AD : *ad* :: 11 : 5..... (1).

Si maintenant, par les points de divisions de AD, on mène des droites comme EF parallèles à la base AB, le rectangle ABCD sera décomposé en 11 petits rectangles évidemment égaux entre eux; de même, si par les points de division de *ad* on mène des droites, comme *ef*, parallèles à la base *ab*, le rectangle *abcd* sera décomposé en 5 petits rectangles évidemment égaux entre eux et aux rectangles dans lesquels le grand ABCD est décomposé; si donc on prend ces petits rectangles comme mesure, on aura ABCD : *abcd* :: 11 : 5; mais cette dernière proportion a un rapport commun avec la proportion (1); donc (alg., n°. 137) ABCD : *abcd* :: AD : *ad*; c'est-à-dire que deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, quand leurs hauteurs sont commensurables. Je dis maintenant que cette proportion a lieu lors même que les hauteurs sont incommensurables.

En effet, supposons que les deux rectangles ABCD, EFGH (fig. 52) aient

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des bases égales AB, EF, mais que les hauteurs AD, EH soient incommensurables. Dans ce cas, transportons le rectangle EFGH sur l'autre ABCD, de manière que les bases égales coïncident : le rectangle EFGH deviendra ABKI ; je dis maintenant qu'on aura ABCD : ABKI :: AD : AI..... (1).

Si cette proportion n'est pas vraie, il n'y a que le dernier terme AI qui puisse en empêcher, en étant trop grand ou trop petit. Supposons qu'il soit trop grand, et qu'au lieu de AI il ne faille que AL; en conséquence on aura ABCD : ABKI :: AD : AL..... (2).

Mais quelque petite que soit la quantité LI dont il faille diminuer AI, on pourra toujours diviser AD en un assez grand nombre de parties égales pour que chacune de ces parties soit plus petite que LI : il y aura donc au moins un point de division entre les points L et I, soit *m* ce point; la longueur A*m* sera commensurable avec AD; si donc par le point *m* on mène *mn* parallèle à AB, on aura le rectangle AB*nm*, qui, comparé au rectangle ABCD, donnera la proportion AB*nm* : ABCD :: A*m* : AD. Multiplions, par ordre, cette dernière proportion par la proportion (2), et nous aurons AB*nm* : ABKI :: A*m* : AL; mais AB*nm* < ABKI; il faudrait donc que A*m* < AL, et le contraire a lieu; donc AI n'est pas trop grand; on démontrerait de même que AI n'est pas trop petit; donc enfin la proportion (1) a lieu, quelque soit le rapport des hauteurs des deux rectangles.

Comme dans un rectangle on peut prendre la base pour la hauteur ou la hauteur pour la base, il s'ensuit que *deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

129. *Corollaire* 1. Puisque tout parallélogramme peut être changé en un rectangle de même base, de même hauteur et de même superficie (n°. 126), il en résulte que deux parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et ceux qui ont même hauteur, sont entre eux comme leurs bases.

130. *Corollaire* 2. Les triangles sont les moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur; donc les triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et ceux qui ont même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

131. THÉORÈME 79. *Deux rectangles quelconques sont entre eux comme le produit de leurs bases par leurs hauteurs.*

Soient ABCD, *abcd* (fig. 53) deux rectangles quelconques; transportons le petit *abcd* sur le grand, de manière que l'angle *abc* coïncide avec son égal ABC; le rectangle *abcd* deviendra EBGF. Prolongeons le côté EF jusqu'à sa rencontre en H avec le côté DC; nous aurons les rectangles ABCD, EBCH,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui auront la même hauteur, d'où ABCD : EBCH :: AB : EB..... (1), et les deux rectangles EBCH, EBGF, qui auront la même base; donc EBCH : EBGF :: BC : BG. Si donc on multiplie, par ordre, cette dernière proportion par la proportion (1), on aura ABCD : EBGF :: AB×BC : EB×BG...(2); ce qu'il fallait démontrer.

132. *Corollaire* 1. Si donc le rectangle EBGF est un carré, et que ce carré soit l'unité de superficie; en prenant les côtés de ce carré pour unité de longueur, la proportion (2) ci-dessus se réduira à ABCD : 1 :: AB × BC : 1; si donc on fait le produit des extrêmes et celui des moyens dans cette dernière proportion, on aura ABCD = AB × BC. D'où il s'ensuit que *la superficie d'un rectangle est égale à un nombre d'unités superficielles égal au nombre d'unités linéaires du produit de la base par la hauteur du rectangle*, ou, par abréviation, *la superficie d'un rectangle est égale au produit de la base par la hauteur.*

133. *Corollaire* 2. Comme tout parallélogramme peut se transformer en un rectangle de même base, de même hauteur et de même superficie, et que la superficie d'un rectangle est égale au produit de la base par la hauteur, il s'ensuit que *la superficie d'un parallélogramme quelconque est égale de même au produit de la base par la hauteur du parallélogramme.*

134. *Corollaire* 3. Puisqu'un triangle est toujours la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur que le triangle, il s'ensuit que la superficie de ce dernier n'est que la moitié de celle du parallélogramme, qui est égale au produit de la base par la hauteur; mais (arith., n°. 45) la moitié d'un produit composé de deux facteurs s'obtient en multipliant l'un des facteurs par la moitié de l'autre; donc, *la superficie d'un triangle est égale à la base multipliée par la moitié de la hauteur*, ou *à la hauteur multipliée par la moitié de la base.*

135. *Corollaire* 4. Il suit de ce qui précède que, pour avoir la surface d'un polygone quelconque ABCDEFG (fig. 42), il suffit de décomposer ce polygone en triangles BDC, BDE, etc.; de prendre la surface de chacun de ces triangles, et de faire ensuite la somme des surfaces de tous ces triangles; il est évident que cette somme sera la surface demandée.

136. DÉFINITION. Tout quadrilatère ABCD (fig. 54) qui n'a que deux côtés AB, DC parallèles, se nomme *trapèze*, et les côtés parallèles prennent le nom de *bases* du trapèze. La hauteur est la perpendiculaire EF abaissée d'un point quelconque de l'une des bases sur l'autre.

137. THÉORÈME 80. *La superficie d'un trapèze est égale à la demi-somme des deux bases multipliées par la hauteur.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, si l'on mène la diagonale AC (fig. 54), on partagera le trapèze en deux triangles ACB, ACD, dont la hauteur sera celle du trapèze; or, la superficie du premier ACB $= EF \times \frac{AB}{2}$, et la superficie du second ADC $= EF \times \frac{DC}{2}$; mais la somme des deux triangles est égale au trapèze; donc $ABCD = EF \times \frac{AB}{2} + EF \times \frac{DC}{2}$ ou $ABCD = EF \times \frac{AB+DC}{2}$, à cause du facteur commun EF; donc, etc.

138. THÉORÈME 81. *Si par le milieu* I *d'un côté* BC *du trapèze* ABCD (fig. 54) *on mène une droite* GH *parallèle à l'autre côté* AD, *et qu'on prolonge la base* DC *jusqu'à sa rencontre en* H *avec la droite* GH, *on aura un parallélogramme* AGHD *qui sera équivalent au trapèze* ABCD.

En effet, le triangle GIB, qu'on retranche, est égal au triangle CIH, qu'on ajoute, pour passer du trapèze au parallélogramme; car ces deux triangles ont les angles égaux, comme alternes-internes ou comme opposés par le sommet, et de plus un côté égal, puisque le point I est au milieu de BC; donc, etc.

139. *Corollaire* 1. La surface du parallélogramme AGHD est égale à $AG \times EF$, mais celle du trapèze est égale à $\frac{AB+DC}{2} \times EF$; donc $AG = \frac{AB+DC}{2}$; c'est-à-dire que *la base du parallélogramme est égale à la demi-somme des bases du trapèze.*

140. *Corollaire* 2. Si par le point I, milieu de BC ou de GH on mène une parallèle IK à AB, cette droite IK sera à égales distances des bases du trapèze, et, comme cette droite KI est égale à AG, elle sera aussi égale à la demi-somme des bases du trapèze.

141. *Corollaire* 3. Il suit de là que *la superficie d'un trapèze est égale à la hauteur multipliée par une droite menée à égales distances des bases.*

142. THÉORÈME 82. *La superficie d'un polygone régulier est égale au contour ou périmètre du polygone multiplié par la moitié de l'apothème, ou à la moitié du contour, multipliée par l'apothème toute entière.*

Supposons qu'il s'agisse du polygone régulier ABCDE... (fig. 46); si par le centre O on mène les diagonales OA, OB, OC, etc., on décomposera le polygone en autant de triangles égaux (n°. 110) qu'il y a de côtés dans le polygone; abaissons l'apothème OF sur la base AB de l'un de ces triangles; la superficie du triangle ABO sera $AB \times \frac{OF}{2}$, mais tous les autres triangles auront la même superficie; pour avoir celle du polygone il suffira donc de multiplier $AB \times \frac{OF}{2}$ par le nombre des triangles, ou en d'autres termes par le nombre des côtés du polygone; soit n ce nombre de côtés : la super-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ficie du polygone sera donc $n \times AB \times \frac{OF}{2}$; mais le produit $n \times AB$ est évidemment le contour du polygone; en l'appelant C, on aura donc $C \times \frac{OF}{2}$ pour la superficie demandée; ce qu'il fallait démontrer.

7^me^ LEÇON.

Comparaisons des Superficies des Polygones.

143. THÉORÈME 83. *Les superficies de deux triangles qui ont un angle égal sont entre elles comme les produits des côtés qui comprennent l'angle égal; c'est-à-dire que si les triangles* ABC, *abc* (fig. 55) *ont l'angle* A=*a*, *on aura*

$$ABC : abc :: AB \times AC : ab \times ac.$$

En effet, transportons le triangle *abc* sur l'autre ABC, de manière que l'angle *a* coïncide avec son égal A; le triangle *abc* deviendra ADE. Menons la droite EB; nous aurons les deux triangles AED, AEB, qui auront leur sommet au même point E et leurs bases sur une même droite AB; ces deux triangles auront donc la même hauteur, et (n°. 130) ils seront entre eux comme leurs bases; c'est-à-dire que AEB : AED :: AB : AD... (1). De plus, les triangles AEB, ABC ont leur sommet au même point B et leurs bases sur une même droite AC; ces deux triangles ont donc la même hauteur, ils seront donc entre eux comme leurs bases; c'est-à-dire qu'on aura ABC : AEB :: AC : AE. Multiplions, par ordre, cette dernière proportion par celle (1) ci-dessus, et nous aurons ABC : AED :: AB × AC : AE × AD; ce qu'il fallait démontrer.

144. *Corollaire* 1. Si les deux triangles étaient équivalens, on aurait (1)..... AB × AC = AE × AD, ce qui revient à AB : AE :: AD : AC; car si dans cette proportion on fait le produit des extrêmes et celui des moyens, on aura l'égalité (1). Il suit de là que si deux triangles sont équivalens et ont un angle égal, *les côtés qui comprendront cet angle égal seront réciproquement proportionnels.*

145. *Corollaire* 2. Si l'un des deux triangles est isocèle, les côtés égaux comprenant l'angle égal, *l'un de ces côtés égaux sera moyen proportionnel entre les deux côtés correspondans dans le second triangle.* Car (fig. 56) si les deux triangles ABC, *abc*, ayant l'angle C = *c*, sont équivalens, et que le triangle *abc* soit isocèle, on aura AC : *ac* :: *cb* : CB; mais *ac* = *bc*; donc AC : *ac* :: *ac* : BC.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

146. THÉORÈME 84. *Les superficies des triangles semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.*

En effet, soient ABC, *abc* (fig. 40) deux triangles semblables; ces deux triangles auront les angles égaux; donc, en considérant les angles égaux A et *a*, d'après la proposition précédente, on aura

$$ABC : abc :: AB \times AC : ab \times ac. \ldots\ldots (1).$$

Mais en vertu de la similitude des triangles, on a $AB : ab :: AC : ac$; multiplions cette proportion par l'identique $AB : ab :: AB : ab$, et nous aurons $(AB)^2$ (*) $: (ab)^2 :: AB \times AC : ab \times ac$; mais cette dernière proportion a le rapport commun $AB \times AC : ab \times ac$ avec celle (1) ci-dessus; donc $ABC : abc :: (AB)^2 : (ab)^2$; ce qu'il fallait démontrer.

147. *Corollaire.* Ainsi, si les côtés de l'un étaient 5 et les côtés de l'autre 2, les superficies seraient entre elles :: 25 : 4, et non pas :: 5 : 2.

148. THÉORÈME 85. *Les superficies des polygones semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.*

En effet, soient ABCDE, *abcde* (fig. 43) deux polygones semblables; en décomposant ces polygones en un même nombre de triangles semblables (n°. 98), chacun à chacun, on aura

1°. $ABC : abc :: (AB)^2 : (ab)^2$;

2°. $ACD : acd :: (DC)^2 : (dc)^2$;

Et 3°. $ADE : ade :: (DE)^2 : (de)^2$;

mais les polygones étant semblables, on a $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de$; or (alg., n°. 139) on peut carrer tous les termes d'une suite de rapports égaux; on aura donc $(AB)^2 : (ab)^2 :: (BC)^2 : (bc)^2 :: (CD)^2 : (cd)^2 :: (DE)^2 : (de)^2$. Les seconds rapports des trois premières proportions sont donc égaux; donc $ABC : abc :: ACD : acd :: ADE : ade :: (AB)^2 : (ab)^2$. Mais dans toute suite de rapports égaux, la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent; on aura donc $ABC + ACD + ADE : abc + acd + ade :: (AB)^2 : (ab)^2$. Le premier terme de cette proportion n'est évidemment autre chose que la superficie du grand polygone, et le second que celle du petit; appelons P et *p* ces superficies, et nous aurons $P : p :: (AB)^2 : (ab)^2$; ce qu'il fallait démontrer.

149. THÉORÈME 86. *Si par le sommet* C *de l'angle droit d'un triangle rectangle* ABC (fig. 57) *on abaisse une perpendiculaire* CD *sur l'hypothénuse*

(*) Au lieu d'écrire $(AB)^2$ pour désigner le carré fait sur la droite AB, on est dans l'usage d'écrire $\overline{AB}^2$; mais comme on pourrait confondre le trait qui est sur les deux lettres AB avec le signe —, je crois plus convenable d'écrire $(AB)^2$; et en effet cette indication ne peut se confondre avec aucune autre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

AB, *le triangle* ABC *sera décomposé en deux triangles* ADC, DCB *semblables au grand, et par conséquent entre eux.*

En effet, ces deux triangles sont rectangles ainsi que le grand, et, de plus, ils ont chacun un angle commun avec le grand; les trois angles de ces deux triangles sont donc égaux, chacun à chacun, à ceux du grand triangle; ces deux triangles sont donc semblables au grand, et par conséquent entre eux.

150. *Corollaire* 1. Il suit de là que la perpendiculaire CD est moyenne proportionnelle entre les deux segmens AD, DB de l'hypothénuse. Car de ce que les triangles ADC, DCB sont semblables, il en résulte en effet,

$$AD : DC :: DC : DB.$$

151. *Corollaire* 2. Il résulte aussi de là que chaque côté AC, BC de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière et le segment adjacent, car 1°. de ce que les triangles ABC, ADC sont semblables, on a en effet AB : AC :: AC : AD, et 2°. de ce que les triangles ABC, DBC sont semblables, on a aussi en effet AB : BC :: BC : BD.

152. *Corollaire* 3. Si dans ces deux proportions on fait le produit des moyens et celui des extrêmes, on aura $(AC)^2 = AB \times AD$, et $(BC)^2 = AB \times DB$; ajoutons ces deux égalités, membre à membre, et nous aurons $(AC)^2 + (BC)^2 = AB \times AD + AB \times DB = AB \times (AD + DB)$; mais $AD + DB = AB$; donc $(AC)^2 + (BC)^2 = AB \times AB = (AB)^2$; il suit donc de là que *la somme des carrés formés sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est égale au carré formé sur l'hypothénuse* (fig. 58).

153. *Corollaire* 4. De l'égalité $(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$, on tire $(AC)^2 = (AB)^2 - (BC)^2$; c'est-à-dire que, *le carré fait sur l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal à celui fait sur l'hypothénuse, moins celui fait sur l'autre côté de l'angle droit.*

154. *Corollaire* 5. De ce que $(AC)^2 = AB \times AD$, et $(BC)^2 = AB \times AD$, il s'ensuit que $(AC)^2 : (BC)^2 :: AB \times AD : AB \times DB$, ou $(AC)^2 : (BC)^2 :: AD : DB$; c'est-à-dire que, *les carrés formés sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont entre eux comme les segmens correspondans de l'hypothénuse.*

155. THÉORÈME 87. *Si l'on construit trois figures semblables* (fig. 59) P, Q, R, *de manière que les côtés homologues soient les trois côtés d'un triangle rectangle* ABC, *la figure construite sur l'hypothénuse égalera la somme des deux autres.*

En effet, les figures semblables étant entre elles comme les carrés des côtés homologues (n°. 148), on aura $P : Q :: (AC)^2 : (CB)^2$, mais (alg., n°. 140) dans toute proportion le premier terme est à la somme des deux premiers, comme le troisième est à la somme des deux derniers, donc $P : P + Q ::$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$(AC)^2 : (AC)^2 + (CB)^2$ ou $P : P + Q :: (AC)^2 : (AB)^2$; or, on a aussi $P : R :: (AC)^2 : (AB)^2$; à cause des rapports commun, on aura donc $P : R :: P : P+Q$; mais dans cette dernière proportion les antécédens sont égaux; les conséquens le seront aussi; donc enfin $R = P + Q$; ce qu'il fallait démontrer.

156. *Remarque.* Nous avons vu (n°. 132) que le produit de deux lignes était une surface; cela posé, si l'on se rappelle 1°. que le carré de la somme de deux quantités est égal à la somme des carrés de ces quantités plus deux fois leur produit (alg., n°. 28), on verra que *le carré formé sur la somme de deux droites est égal à la somme des carrés formés sur chacune de ces droites, plus deux fois le rectangle dont l'une des droites serait la base et l'autre la hauteur;* 2°. que le carré de la différence de deux quantités est égal à la somme des carrés de ces quantités moins deux fois leur produit (alg., n°. 29), on verra que *le carré formé sur la différence de deux droites est égal à la somme des carrés formés sur ces mêmes droites et moins deux fois leur rectangle;* 3°. que la différence des carrés de deux quantités est égale au produit de la somme par la différence de ces mêmes quantités (alg., n°. 30); on verra enfin que *la différence des carrés formés sur deux droites est égale à un rectangle dont la base serait la somme, et la hauteur la différence de ces deux droites* (*).

157. THÉORÈME 88. *Dans un triangle quelconque* ABC (fig. 60), *si l'on considère un côté* AC *opposé à un angle aigu* ABC, *en abaissant par le point* C *une perpendiculaire* CD *au côté* AB, *on aura*

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2AB \times DB.$$

En effet, le triangle ACD étant rectangle, on aura $(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$... (1). Mais $AD = AB - DB$ ou $AD = BD - AB$; donc $(AD)^2 = (AB)^2 + (DB)^2 - 2AB \times DB$.. (2); de plus, DC est le côté de l'angle droit CDB du triangle rectangle CBD; donc $(DC)^2 = (CB)^2 - (DB)^2$; ajoutons cette dernière égalité à l'égalité (2), et nous aurons (3)..... $(AD)^2 + (DC)^2 = (AB)^2 + (CB)^2 - 2AB \times DB$, en observant que $(DB)^2$ se trouve avec le signe — dans la dernière égalité, et avec le signe + dans l'égalité (2). Mais le premier membre de l'égalité (3) est le second de l'égalité (1); donc $(AC)^2 = (AB)^2 + (CB)^2 - 2AB \times DB$; ce qu'il fallait démontrer.

158. THÉORÈME 89. *Dans un triangle quelconque* ABC (fig. 61) *si l'on considère un côté* AC *opposé à un angle obtus* ABC, *en abaissant par le point* C *une perpendiculaire* CD *sur le côté* AB *prolongé, on aura*

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + 2AB \times BD.$$

(*) On a l'habitude de démontrer ces propositions au moyen de figures, mais je crois nécessaire de se servir du calcul, le plutôt possible, pour démontrer les propositions de la géométrie, parce qu'il faut enfin en venir là.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, le triangle ACD étant rectangle, on aura $(AC)^2=(AD)^2+(DC)^2$... (1); Mais $AD=AB+BD$; donc $(AD)^2=(AB)^2+(DB)^2+2AB\times BD$... (2). De plus, AC est l'un des côtés de l'angle droit du triangle rectangle BCD, donc $(DC)^2=(BC)^2-(DB)^2$. Ajoutons cette dernière égalité à l'égalité (2), en faisant attention que $(DC)^2$ se trouve en signes contraires, et nous aurons $(AD)^2+(DC)^2=(AB)^2+(BC)^2+2AB\times BD$. Or, le premier membre de cette dernière égalité est égal au second de l'égalité (1); donc $(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2+2AB\times BD$; ce qu'il fallait démontrer.

159. *Corollaire.* Il suit des deux dernières propositions que si l'on a un triangle dans lequel le carré de l'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, ce triangle sera rectangle, et l'angle droit sera opposé au côté dont le carré sera égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Car si cet angle était obtus, le carré du côté opposé serait égal, non-seulement à la somme des carrés des deux autres côtés, mais plus encore quelque chose, ce qui est contre l'hypothèse; et si cet angle était aigu, le carré du côté opposé serait égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins quelque chose, ce qui est encore contre l'hypothèse; donc cet angle serait droit; donc enfin le triangle en question serait rectangle.

160. THÉORÈME 90. *Si dans un triangle quelconque* ABC (fig. 62) *on divise un côté quelconque* AB *en deux parties égales par une droite* CD *menée par le sommet opposé* C, *on aura* $(AC)^2+(CB)^2=2(AD)^2+2(DC)^2$.

En effet, la droite CD rencontre la droite AB de manière que les angles adjacens ADC, BDC, qui valent ensemble deux angles droits, seront tels, que l'un ADC sera aigu, et l'autre CDB sera obtus, à moins que les côtés AC, CB ne soient égaux (n°. 44), dans lequel cas la proposition aurait évidemment lieu. En considérant le triangle ADC, on aura (n°. 157) donc $(AC)^2=(AD)^2+(DC)^2-2AD\times DI$..... (1), et en considérant le triangle DCB, on aura (n°. 158) $(CB)^2=(DB)^2+(DC)^2+2DB\times DI$ ou $(CB)^2=(AD)^2+(DC)^2+2AD\times DI$.... (2), à cause que $DB=AD$; si donc on ajoute les deux égalités (1) et (2), membre à membre, on aura $(AC)^2+(CB)^2=2(AD)^2+2(DC)^2$; ce qu'il fallait démontrer.

161. THÉORÈME 91. *La somme des carrés faits sur les côtés d'un parallélogramme est égale à celle des carrés faits sur les diagonales.*

En effet, les diagonales AC, BD (fig. 47) de tout parallélogramme ABCD se coupent mutuellement en deux parties égales au point I; par conséquent le triangle ADC nous donnera (n°. 160) $(AD)^2+(DC)^2=2(AI)^2+2(DI)^2$; et le triangle ABC nous donnera $(AB)^2+(BC)^2=2(AI)^2+2(BI)^2$ ou $2(DI)^2$; ajoutons ces deux égalités, membre à membre, et nous aurons $(AD)^2+(DC)^2+$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$(AB)^2+(BC)^2=4(AI)^2+4(DI)^2$..... (1); mais le carré de la moitié d'une droite est évidemment le quart du carré de cette droite; 4 fois le carré de la moitié de chaque diagonale égalera donc le carré de la diagonale; le second membre de l'égalité (1) sera donc $(AC)^2+(DB)^2$; donc enfin $(AD)^2+(DC)^2+(AB)^2+(BC)^2=(AC)^2+(DB)^2$; ce qu'il fallait démontrer.

8me. LEÇON.

Le Cercle.

162. DÉFINITIONS. *Le cercle* est une surface plane terminée de toutes parts par une ligne courbe dont tous les points sont à égales distances d'un point intérieur pris dans le même plan.

La courbe qui termine le cercle se nomme *circonférence;* le point situé à égales distances de tous ceux de la circonférence s'appelle le *centre.*

La courbe DCBD (fig. 63) sera donc une circonférence de cercle, si tous ses points sont à égales distances du point A, qui sera le centre.

Toute droite AB qui va du centre à un point quelconque B de la circonférence, est ce qu'on appelle un *rayon.* Tous les rayons sont égaux, puisqu'ils mesurent la distance constante du centre à la circonférence.

Toute droite DC qui passe par le centre et qui se termine de part et d'autre à la circonférence, est un *diamètre;* tous les diamètres du cercle sont égaux, puisqu'ils se composent de deux rayons.

Toute droite GH qui coupe la circonférence en deux points et qui se prolonge indéfiniment de part et d'autre est une *sécante.*

On appelle *corde* toute droite EF qui, sans passer par le centre, se termine de part et d'autre à la circonférence.

Une droite IK est dite *tangente* à la circonférence du cercle, lorsque cette droite ne touche la circonférence qu'en un seul point L, auquel on donne le nom de *point de contact.*

On dit aussi, dans les mêmes circonstances, que le cercle est tangent à la droite IK.

Toute portion de la circonférence s'appelle *arc de cercle.*

Un *segment* de cercle est une portion du cercle comprise entre un arc et la corde EF qui passe par les extrémités E et F de cet arc; et un *secteur* de cercle est une portion du cercle comprise entre deux rayons AB, AC, qui forment un angle quelconque BAC, et l'arc de cercle BC qui joint les extrémités de ces deux rayons.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

163. THÉORÈME 92. *Tous les diamètres partagent le cercle et la circonférence en deux parties égales.*

En effet, si par le centre C on mène un diamètre AB (fig. 64) quelconque, en faisant tourner la partie ADB autour de ce diamètre, comme axe, pour la faire tomber sur l'autre partie AEB, je dis que la première partie ADB tombera sur la seconde AEB, car si cela n'était pas vrai, la partie ADB tomberait en dedans ou en dehors; mais dans ces cas il est évident que, comme le centre C reste sur lui-même, il y aurait des rayons de grandeur différente, ce qui est contraire à la définition de la circonférence du cercle; donc, etc.

164. THÉORÈME 93. *Si deux cercles ont le même rayon, ces deux cercles pourront coïncider.*

En effet, en faisant coïncider les centres, il est clair que les circonférences coïncideront, car autrement elles n'auraient pas le même rayon, ce qui serait contre l'hypothèse.

Ce que nous disons de deux cercles entiers doit s'entendre de deux arcs quelconques qui auront le même rayon.

165. THÉORÈME 94. *Le diamètre d'un cercle est plus grand qu'une corde quelconque.*

En effet, soit la corde AD et le diamètre AB (fig. 64) mené par l'extrémité A de la corde AD; si par l'autre extrémité D de la corde on mène le rayon CD, le triangle CAD nous fera voir que $AC + CD > AD$; mais les côtés AC, CD de ce triangle sont des rayons du cercle; donc leur somme $AC + CD =$ le diamètre AB; donc $AB > AD$; ce qu'il fallait démontrer.

166. THÉORÈME 95. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les cordes égales soutendent des arcs égaux.*

Soient AB, CD (fig. 65) les cordes qu'on suppose égales; par les extrémités de ces cordes on menera les rayons AI, BI, CI et DI, ce qui donnera les deux triangles ABI, ICD, qui seront égaux, puisqu'ils auront les trois côtés égaux, chacun à chacun : on pourra donc faire coïncider ces deux triangles de manière que le côté AB coïncide avec son égal CD, le sommet I restant sur lui-même; donc les deux arcs de cercle AB, CD coïncideront également; donc ils seront égaux.

167. THÉORÈME 96. *Réciproquement, dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les arcs égaux sont soutendus par des cordes égales.*

Soient en effet AB, CD (fig. 65) les arcs égaux; on pourra les faire coïncider de manière que le point A tombe sur le point C et le point B sur le point D; les extrémités des cordes AB, CD coïncideront donc; elles seront donc égales.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

168. THÉORÈME 97. *Si, dans le même cercle ou dans de cercles égaux, deux cordes sont inégales, la plus grande soutendra le plus grand arc, ces arcs étant supposés plus petits qu'une demi-circonférence.*

Soit la corde AB (fig. 66) plus grande que la corde CD; si aux extrémités de ces cordes on mène les rayons AI, BI, DI et CI, on aura les triangles ABI, CDI, qui auront deux côtés égaux comme rayons du même cercle, mais le troisième côté AB de l'un sera plus grand que le troisième côté CD de l'autre: donc (n°. 42) l'angle AIB du premier sera plus grand que l'angle CID du second; si donc on superpose ces deux triangles de manière que le côté AI coïncide avec CI, l'autre côté BI prendra une direction IE extérieure à l'angle CID; donc le point B sera en E au-delà du point D; donc l'arc AB est plus grand que l'arc CD.

169. THÉORÈME 98. *Si, dans le même cercle ou dans de cercles égaux, deux arcs de cercle* AB, CD (fig. 66) *sont inégaux, le plus grand* AB *sera soutendu par la plus grande corde, ces arcs étant moindres qu'une demi-circonférence.*

En effet, en superposant ces deux arcs de manière que l'extrémité A du grand coïncide avec l'extrémité C du petit, il est clair que l'autre extrémité B du grand tombera en E sur le prolongement du petit CD; les rayons IA, IB qui vont aux extrémités A, B du grand formeront donc un angle AIB qui sera plus grand que celui formé par les rayons menés aux extrémités du petit arc CD; mais les deux triangles AIB, CID ont deux côtés égaux; donc (n°. 41) la corde AB est plus grande que CD.

170. THÉORÈME 99. *La plus grande droite qu'on puisse mener par un point donné* A (fig. 67) *dans un cercle, est celle* AB *qui passe par le centre* C.

En effet, si l'on mène une autre droite AD quelconque qui ne passe pas par le centre, en menant le rayon CD, on aura $AD < AC + CD$; mais $CD = CB$, d'où $AD < AC + CB$; or $AC + CB = AB$; donc enfin $AD < AB$.

171. THÉORÈME 100. *La plus petite droite qu'on puisse mener par un point* A *donné dans un cercle* (fig. 68) *est celle* AB *dont le prolongement passerait par le centre* C.

En effet, si l'on mène, par le point A, une autre droite AD qui, prolongée, ne passe pas par le centre, en menant ensuite le rayon CD, on aura $AD + AC > DC$. Or $DC = BC = BA + AC$; donc $AD + AC > BA + AC$, ou $AD > BA$, en supprimant le terme commun AC.

172. THÉORÈME 101. *La plus grande droite qu'on puisse mener d'un point* A *donné hors d'un cercle* (fig. 69) *est celle* AB *qui passe par le centre* C.

Si par le point donné A on menait, en effet, une droite AD qui ne passât

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pas par le centre, en menant le rayon CD, on aurait $AD < AC + CD$. Or $CD = CB$; donc $AD < AC + CB$ ou $AD < AB$; ce qu'il fallait démontrer.

173. THÉORÈME 102. *La plus petite droite qu'on puisse mener par un point* A *donné hors d'un cercle* (fig. 69) *est celle* AF *dont le prolongement passerait par le centre* C.

En effet, si l'on en mène une autre AE (fig. 69) dont le prolongement ne passe pas par le centre, en menant le rayon CE, on aura $AC < AE + EC$. Or $AC = AF + FC = AF + CE$; donc $AF + CE < AE + EC$, ou $AF < AE$, en supprimant le terme commun CE de part et d'autre; ce qu'il fallait démontrer.

174. THÉORÈME 103. *Si par le centre* D (fig. 70) *d'un cercle on abaisse une perpendiculaire* CD *sur une corde* AB, *cette perpendiculaire passera par le milieu de la corde* AB *et le milieu de l'arc* ACB *soutendu par la corde* AB.

En effet, le centre D est à égales distances des points A et B, puisque ces points sont sur la circonférence du cercle; donc le point D appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite AB; mais par un point donné D hors d'une droite AB on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à cette droite AB; donc, enfin, la droite DC abaissée du centre D sur la corde AB divise cette corde AB en deux parties égales au point I. Cette droite DC divise aussi l'arc ACB en deux parties égales au point C, car le point C, appartenant à la perpendiculaire DC sur le milieu de AB, est à égales distances des points A et B; les cordes AC, CB sont donc égales; mais les cordes égales soutendent des arcs égaux; donc enfin l'arc ACB est divisé en deux parties égales au point C.

175. THÉORÈME 104. *Si, sur le milieu de la corde* AB (fig. 70), *on élève une perpendiculaire* CD, *cette perpendiculaire passera par le centre, et divisera l'arc* ACB *soutendu par la corde* AB *en deux parties égales.*

En effet, si la perpendiculaire CD sur le milieu de AB ne passait pas par le centre, comme le centre est à égales distances des extrémités A et B de la corde AB, il y aurait des points qui ne seraient pas sur cette perpendiculaire, qui seraient pourtant à égales distances des extrémités de la droite AB, ce qui (n°. 35) est impossible; donc la perpendiculaire CD sur le milieu de AB passe par le centre, et divise en deux parties égales (n°. 174) l'arc ACB.

176. THÉORÈME 105. *Si par le centre* D *et le milieu* C *de l'arc* ACB (fig. 70) *on mène le rayon* CD, *il sera perpendiculaire au milieu de la corde* AB.

En effet, le centre D est à égales distances des extrémités A et B de la corde AB; donc le point D appartient à la perpendiculaire menée au milieu

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la droite AB. De plus, le point C étant le milieu de l'arc ACB, les cordes AC, CB sont égales; le point C est donc à égales distances des extrémités de la corde AB; le point C appartient donc aussi à la perpendiculaire menée par le milieu de la droite AB; donc la droite CD qui passe par les points C et D sera perpendiculaire au milieu de la droite AB.

177. THÉORÈME 106. *Dans le même cercle ou dans de cercles égaux, les cordes égales* AB, CD (fig. 71) *sont à égales distances du centre.*

En effet, si par le centre G on abaisse une perpendiculaire GE, GF sur chacune de ces cordes, ces perpendiculaires seront les distances du centre à ces cordes; il faut donc démontrer que ces perpendiculaires sont égales.

Pour cela, menons les rayons AG, CG; les triangles AGE, CGF seront égaux. Car ces triangles sont rectangles, les hypothénuses sont égales puisqu'elles sont des rayons du cercle; les côtés AE, CF sont égaux, puisqu'ils sont les moitiés des cordes égales AB, CD; donc GE = GF; ce qu'il fallait démontrer.

178. THÉORÈME 107. *Réciproquement, dans le même cercle ou dans de cercles égaux, les cordes qui sont à égales distances du centre sont égales.*

En effet, soient AB, CD (fig. 71) deux cordes également écartées du centre G; abaissons par ce centre G, les droites GE, GF respectivement perpendiculaires sur les cordes AB, CD; ces droites GE, GF sont égales et divisent les cordes en deux également. Menons les rayons AG, CG, les triangles rectangles AGE, CGF seront égaux comme ayant l'hypothénuse et un côté de l'angle droit égaux; donc AE=CF, et par conséquent AB=CD; ce qu'il fallait démontrer.

179. THÉORÈME 108. *Dans le même cercle ou dans de cercles égaux, si deux cordes sont inégales, la plus grande sera le plus près du centre.*

En effet, soit la corde CH plus grande que la corde AB (fig. 71); par l'extrémité C de la grande CH, menons la droite CD, de manière que CD=AB; comme la plus grande corde soutend le plus grand arc, le point D sera entre les points C et H, et par conséquent la corde CH sera comprise entre le centre et la corde CD; donc cette dernière sera plus loin du centre que CH; mais CD et AB étant deux cordes égales, sont à égales distances du centre; donc enfin, etc.

180. THÉORÈME 109. *Réciproquement, dans le même cercle ou dans de cercles égaux, si deux cordes sont à inégales distances du centre, celle qui s'en approchera le plus sera la plus grande.*

En effet, soit CH la corde (fig. 71) qui est plus près du centre que la corde AB; je dis que CH > AB; car, si cela n'est pas vrai, ces deux cordes seront

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

égales; mais si elles étaient égales elles seraient à égales distances du centre; ce qui est contre l'hypothèse; ou bien la corde AB > CH; mais dans ce dernier cas la corde AB serait plus près du centre que la corde CH, ce qui est encore contre l'hypothèse; donc, enfin, la corde CH > AB.

181. THÉORÈME 110. *Par trois points donnés, non en ligne droite, on peut toujours faire passer une circonférence de cercle, mais on n'en pourra faire passer qu'une.*

En effet, soient A, B, C (fig. 72) les trois points donnés; si l'on joint ces trois points par les droites AB, BC, et qu'au milieu de ces droites on mène les perpendiculaires ED, FD, ces perpendiculaires se rencontreront en un point D qui sera également éloigné des trois points A, B et C. Car ce point D étant sur la perpendiculaire ED élevée sur le milieu de AB, est à égales distances des points A et B; et ce même point D étant sur la perpendiculaire DF élevée sur le milieu de BC, est à égales distances des points B et C; les distances AD, DC sont donc égales à une troisième DB, donc elles sont égales entre elles; donc, par le point D, comme centre, et avec le rayon DA, on pourra décrire une circonférence de cercle ABC qui passe par les trois points donnés A, B et C.

Je dis maintenant qu'on n'en peut décrire qu'une seule; car si l'on pouvait en décrire deux, il faudrait qu'elles eussent des centres différens, sans cela elles coïncideraient l'une avec l'autre, et n'en formeraient qu'une seule. Supposons donc que le centre de la seconde soit le point I, situé même, si l'on veut, sur la perpendiculaire FD; ce point I sera bien à égales distances des points B et C; mais comme il n'est plus sur la perpendiculaire ED élevée sur le milieu de AB, ce point I ne sera pas à égales distances des points A et B; donc la circonférence qui passera par les points C et B ne passera pas par le point A; donc cette seconde circonférence ne passera pas par les trois points donnés; donc enfin, etc.

182. *Corollaire.* Il suit de là que deux circonférences de cercle de rayons différens, ne peuvent se couper qu'en deux points, ou n'avoir que deux points de communs, ce qui est la même chose.

183. THÉORÈME 111. *Si une droite* AB *est tangente à une circonférence au point* D (fig. 73), *le rayon* CD *mené au point de contact* D *sera perpendiculaire à la tangente* AB.

En effet, puisque la droite AB est tangente à la circonférence, cette droite est toute entière au dehors de cette circonférence, de manière pourtant qu'elle a le point de contact D de commun avec la circonférence; si donc on mène une droite quelconque CE par le centre à la rencontre de la tangente AB, le point E où cette droite CE rencontrera la tangente, sera hors de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

circonférence; donc cette droite CE > que le rayon CD; ce rayon CD est donc la plus courte distance du centre à la tangente; donc (n°. 29) ce rayon CD mené au point de contact est perpendiculaire à la tangente.

184. THÉORÈME 112. *Réciproquement, si à l'extrémité* D *d'un rayon* CD (fig. 73) *on mène une perpendiculaire* AB; *cette droite* AB *sera tangente à la circonférence.*

En effet, la droite CD étant perpendiculaire à AB, elle est la plus courte distance du centre du cercle à la droite AB; mais cette droite CD est le rayon du cercle; tout autre point de la droite AB, différent du point D, est donc à une distance du centre C plus grande que le rayon du cercle; cette droite AB a donc tous ces points hors de la circonférence, excepté le point D qui est dessus; donc enfin la droite AB est tangente au cercle au point D.

185. THÉORÈME 113. *Si deux circonférences de cercle se coupent aux points* A *et* B (fig. 74 et 75), *la droite* CD *qui joint les centres* C *et* D *est perpendiculaire au milieu de la droite* AB *qui joint les points* A *et* B *d'intersection des deux circonférences.*

En effet, le centre C est à égales distances des points A et B, et il en est de même pour le centre D; donc ces deux centres appartiennent à la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite AB; donc la droite CD est cette perpendiculaire.

186. THÉORÈME 114. *Si deux circonférences de cercle se coupent en deux points* A *et* B (fig. 74 et 75), *la distance des centres sera plus petite que la somme ou plus grande que la différence des rayons.*

En effet, les points A et B étant hors de la droite CD qui joint les centres, il est clair que les rayons forment un chemin brisé CAD ou CBD qui est plus grand que cette distance CD des centres; ainsi on a CD<CA+AD. Mais on a aussi AD < DC+CA. Si de chaque membre de cette dernière égalité nous retranchons CA, il nous viendra AD — CA < DC; donc aussi la distance DC des centres est plus grande que la différence des rayons.

187. THÉORÈME 115. *Si la distance des centres est égale à la somme ou à la différence des rayons, les deux cercles seront tangens l'un à l'autre, et le point de contact sera sur la droite qui joint les deux centres.*

En effet, d'abord il est clair que les deux cercles ont un point A (fig. 76 et 77) de commun sur la droite CD qui joint les centres; car dans le cas où la distance des centres (fig. 76) égale la somme des deux rayons, les extrémités des deux rayons se toucheront évidemment au point A, et dans le cas où la distance des centres (fig. 77) est égale à la différence des rayons, il en sera de même, car le grand rayon dépassera le centre du petit cercle d'une quantité

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

égale au petit rayon. Il ne reste donc plus qu'à démontrer que ce point A est le seul qui soit commun aux deux cercles.

Supposons, par impossible, que le point B soit un second point commun aux deux cercles; en menant par les centres les droites CB, DB à ce point B, on aura (fig. 76) $CB + BD > CD$; mais $CD = CA + AD$, d'où $CB + BD > CA + AD$..... (1), et $BC = CA$, comme rayon du grand cercle; on pourra donc retrancher BC dans le premier, et CA dans le second membre de l'inégalité (1), ce qui donnera $DB > AD$. Mais AD est le rayon du petit cercle; donc le point B est hors de la circonférence de ce petit cercle; donc enfin le point B n'appartient qu'au grand cercle. De plus (fig. 77), $CB < CD + DB$; or $CB = CA = CD + DA$; donc $CD + DA < CD + DB$, ou $DA < DB$; mais DA est le rayon du petit cercle; donc le point B est hors de ce petit cercle; donc, etc.

188. THÉORÈME 116. *Réciproquement, si deux cercles sont tangens* (fig. 76 et 77) *la droite* CD *qui joint les deux centres sera égale à la somme ou à la différence des rayons, et passera par le point de contact* A.

En effet, la droite CD est égale à la somme (fig. 76) ou à la différence (fig. 77) des rayons, car si cela n'était pas vrai, cette droite serait plus petite ou plus grande que cette somme ou cette différence. Si la droite CD était plus grande que la somme et plus petite que la différence des rayons, il est évident que les deux cercles ne pourraient point se toucher, et si cette même droite était plus petite que la somme ou plus grande que la différence des rayons, les deux cercles se couperaient en deux points; dans l'un et l'autre cas ils ne seraient donc pas tangens, ce qui serait contre l'hypothèse; donc la droite CD qui joint les centres est égale à la somme (fig. 76) ou à la différence (fig. 77) des rayons. Je dis, maintenant, qu'elle passe par le point de contact A; car si ce point de contact n'était pas sur la droite CD, les deux rayons menés à ce point de contact formeraient un chemin brisé qui serait plus grand que la droite CD; cette droite CD serait donc plus petite que la somme (fig. 76), et plus grande que la différence (fig. 77) des rayons; ce qui serait contraire à ce que nous venons de démontrer; donc enfin le point de contact est sur la droite qui joint les deux centres.

189. THÉORÈME 117. *Dans le même cercle, deux droites parallèles interceptent entre elles des arcs égaux.*

1°. Supposons qu'il s'agisse des parallèles AB, CD (fig. 78), je dis que l'arc $AC = BD$. Car si par le centre I on mène la droite IK perpendiculaire à l'une AB de ces parallèles, la droite IK sera perpendiculaire à l'autre CD, et divisera en deux parties égales les arcs AKB, CKD; on aura donc $AK = BK$, et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CK = DK; retranchons la seconde de ces égalités de la première, et nous aurons AK — CK = BK — DK, ou AC = BD; ce qu'il fallait démontrer.

2°. Supposons que l'une des droites parallèles soit une corde AB, et l'autre une tangente EF; je dis que l'arc AK = BK; car la perpendiculaire IK abaissée du centre I sur la corde AB sera perpendiculaire à la tangente EF, et passera, par conséquent, par le point de contact K; mais la droite IK divise en deux parties égales l'arc AKB soutendu par la corde AB; donc AK = BK.

3°. Supposons que les deux parallèles dont il s'agit soient les deux tangentes EF, GH; si par le centre I on abaisse une perpendiculaire KL, cette perpendiculaire sera commune aux deux tangentes, passera évidemment par les deux points de contact et sera un diamètre; donc elle divisera la circonférence en deux parties égales aux points L et K; ce qu'il fallait démontrer.

9^me. LEÇON.

Les Angles par rapport au Cercle.

190. THÉORÈME 118. *Si deux angles égaux ont leur sommet au centre du même cercle ou de cercles égaux, les arcs compris entre les côtés de ces angles seront égaux.*

En effet, soient les angles égaux ACB, DCE (fig. 79); si l'on fait coïncider ces angles égaux, il est évident que les arcs AB, DE coïncideront aussi; donc ces deux arcs sont égaux.

191. THÉORÈME 119. *Si deux angles, qui ont leur sommet au centre du même cercle ou de cercles égaux, comprennent, entre leurs côtés, des arcs égaux, ces angles seront égaux.*

En effet, Soient ACB, DCE (fig. 79) les angles qui comprennent des arcs AB, DE égaux; si l'on fait coïncider ces arcs égaux, il est évident que les angles ACB, DCE coïncideront également, et seront par conséquent égaux.

192. THÉORÈME 120. *Si par les sommets de deux angles quelconques* ACB, DFE (fig. 80), *comme centres, et avec le même rayon on décrit des arcs de cercle* AB, DE *entre les côtés de ces angles, ces arcs seront entre eux comme les angles; c'est-à-dire qu'on aura* ACB : DFE :: AB : DE.

Supposons d'abord que les deux arcs AB, DE soient commensurables, qu'ils soient, par exemple, :: 5 : 3; c'est-à-dire que si l'on divise l'arc AB en

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

5 parties égales; et l'arc DE en 3, les parties de AB soient égales à celles de DE. Si par les points de division de ces deux arcs on mène des droites au sommet de chaque angle, chacun de ces angles sera divisé en autant d'angles égaux qu'il y a de parties égales dans l'arc correspondant; on aura donc 5 de ces petits angles égaux dans l'angle ACB, et 3 dans l'angle DFE; ces deux angles seront donc entre eux :: 5 : 3; mais les deux arcs AB, DE sont dans le même rapport; on aura donc ACB : DFE :: AB : DE.

En second lieu, supposons que les arcs AB, DE (fig. 81) compris entre les côtés des angles ACB, DFE, et décrits, avec le même rayon, par les sommets des angles, ne soient plus commensurables; je dis qu'on aura toujours ACB : DFE :: AB : DE..... (1).

En effet, portons l'angle DFE sur l'angle ACB, de manière que le côté DF coïncide avec AC; l'arc DE deviendra AG, et l'angle DFE l'angle ACG; de sorte que la proportion (1), si elle est vraie, deviendra

$$ACB : ACG :: AB : AG \ldots\ldots (2).$$

Si cette proportion n'est pas vraie, ce sera parce que le dernier terme AG sera trop grand ou trop petit; supposons qu'il soit trop petit, et qu'au lieu de AG il faille AO, de sorte qu'on ait ACB : ACG :: AB : AO...(3). Quelque petit que soit l'arc GO, il sera toujours possible de diviser l'arc AB en un assez grand nombre de parties égales pour que ces parties soient encore plus petites que GO; on aura donc au moins un point I compris entre les points G et O, de sorte que AI sera commensurable avec AB; si donc nous menons la droite CI, nous aurons nécessairement ACI : ACB :: AI : AB. Multiplions cette dernière proportion par celle (3) ci-dessus, et nous aurons ACI : ACG :: AI : AO; mais l'angle ACI $>$ ACG, il faudrait donc que l'arc AI $>$ AO, or c'est le contraire; donc AO est trop grand, ou, en d'autres termes, AG de la proportion (2) n'est pas trop petit; on démontrerait que ce terme AG n'est pas trop grand, par un raisonnement analogue; donc enfin, on a toujours la proportion (2) ou la proportion (1), pourvu que les arcs AB, DE compris entre les côtés des angles soient décrits des sommets, comme centres, avec le même rayon.

193. *Corollaire.* Si donc l'arc DE était l'unité d'arc, et l'angle DFE l'unité d'angle, on aurait ACB : 1 :: AB : 1; d'où ACB = AB; c'est-à-dire que l'angle ACB contiendra autant d'unités d'angle que l'arc AB contiendra d'unités d'arc. Il suit donc de là que *la mesure d'un angle est l'arc de cercle compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre;* en entendant, par cette expression, que ce n'est pas la grandeur absolue de l'arc, mais le nombre d'unités d'arc qu'il comprend qui est la mesure de l'angle.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

194. *Remarque.* Pour fixer l'unité d'arc, les géomètres sont convenus de diviser la circonférence d'un cercle quelconque en 360 parties égales, qu'on appelle *degrés;* le degré en 60 parties égales, qu'on appelle *minutes;* la minute en 60 parties égales, qu'on appelle *secondes;* la seconde en 60 parties égales, qu'on appelle *tierces;* etc. C'est le degré qui est l'unité principale des arcs, et l'angle qui répond à un arc d'un degré et l'unité principale des angles qu'on appelle aussi *degré.* L'angle qui répond à l'arc d'une minute se nomme *minute,* etc.

Quand on écrit un nombre de degrés, pour se dispenser d'écrire à la suite du nombre le mot *degré,* on est dans l'usage de mettre le signe o à la droite, et un peu au-dessus du nombre. Ainsi, par exemple, pour écrire 25 degrés, on écrit 25^{o}. Quand le nombre de degrés est accompagné de minutes, de secondes, de tierces, etc., on se sert d'un accent pour les minutes, de deux pour les secondes, de trois pour les tierces, et ainsi de suite. S'il s'agissait, par exemple, d'écrire 37 degrés, 15 minutes, 45 secondes et 18 tierces, on écrirait $37^{o}., 15', 45'', 18'''$.

A l'époque où l'on a établi en France le nouveau système de mesures, on a changé la division de la circonférence du cercle pour avoir le degré; de sorte qu'au lieu de la diviser en 360 parties égales, on l'a divisée en 400. Le degré a été divisé en 100 minutes; la minute en 100 secondes; etc.

Certainement cette nouvelle division offre des avantages pour les calculs; mais non pas dans la pratique, soit parce que 360 a un bien plus grand nombre de diviseurs exacts que 400, soit parce que la presque totalité des instrumens de pratique sont encore divisés en 360 degrés, soit enfin parce qu'il n'y a, je crois, qu'une seule table trigonométrique qui soit calculée d'après la nouvelle division. Toutes ces raisons me font préférer dans cet ouvrage l'ancienne division à la nouvelle; mais il sera facile au lecteur de ramener à la nouvelle division les calculs qu'il trouvera dans ce livre, en faisant attention que le degré ancien est les $\frac{400}{360}$ ou $\frac{10}{9}$ du nouveau, ou que le nouveau et les 0,9 de l'ancien.

195. *Corollaire.* Il est évident, d'après ce qui précède sur la mesure des angles, 1°. que quatre angles droits valent ensemble $360^{o}.$; 2°. que deux angles droits valent ensemble $180^{o}.$; 3°. qu'un seul angle droit est de $90^{o}.$; 4°. que tout angle plus grand que $90^{o}.$ est obtus, et que tout angle plus petit est aigu; 5°. que deux angles adjacens valent ensemble $180^{o}.$; 6°. que le complément d'un angle est ce qui manque à cet angle, ou ce qu'il faudrait en retrancher, pour avoir $90^{o}.$, et 7°. que le supplément d'un angle est ce qu'il faudrait ajouter à cet angle ou en retrancher pour avoir $180^{o}.$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

196. THÉORÈME 121. *Tout angle* ACB (fig. 82) *qui a son sommet* C *sur la circonférence d'un cercle, et qui est formé par une corde* AC *et un diamètre* BC, *a pour mesure la moitié de l'arc* AB *compris entre ses côtés.*

En effet, si par le centre I du cercle on mène le diamètre DE parallèle au côté AC, l'angle DIB = ACB; mais la mesure de l'angle DIB, qui a son sommet au centre (n°. 193), a pour mesure l'arc DB; cet arc DB sera donc aussi la mesure de l'angle en question ACB. Il faut donc démontrer que l'arc DB est la moitié de AB. Or, les angles DIB, CIE sont égaux comme opposés par le sommet; donc l'arc DB = CE; mais CE = AD, à cause des parallèles AC, DE (n°. 189); donc AD = DB; donc DB est la moitié de AB; donc enfin l'angle $ACB = \frac{AB}{2}$; ce qu'il fallait démontrer.

197. THÉORÈME 122. *Tout angle* ACB (fig. 83) *qui a son sommet sur la circonférence, et qui est formé par deux cordes quelconques* AC, CB (le centre I du cercle étant situé dans l'angle), *a pour mesure la moitié de l'arc* AB *compris entre ces côtés.*

En effet, si, par le centre I du cercle et le sommet C de l'angle, nous menons le diamètre CD, d'après la proposition précédente, nous aurons $ACD = \frac{AD}{2}$, et $DCB = \frac{DB}{2}$; ajoutons ces deux égalités membre à membre, et nous aurons $ACD + DCB = \frac{AD+DB}{2}$; mais ACD+DCB=ACB, et AD+DB=AB; donc $ACB = \frac{AB}{2}$; ce qu'il fallait démontrer.

198. *Corollaire.* Il suit de là que si un angle ACB (fig. 84), qui a son sommet à la circonférence et dont les côtés CA, CB passent par les extrémités A et B du diamètre AB, cet angle sera droit, car il aura pour mesure la moitié de la demi-circonférence.

199. THÉORÈME 123. *Tout angle* ACB (fig. 85) *qui a son sommet* C *sur la circonférence, et qui est formé par deux cordes quelconques* AC, BC (le centre I du cercle étant situé hors de l'angle), *a pour mesure la moitié de l'arc* AB *compris entre ses côtés.*

En effet, si par le sommet C de l'angle ACB, nous menons le diamètre CD, nous aurons $ACD = \frac{AD}{2}$, et $BCD = \frac{DB}{2}$; retranchons la seconde, de ces deux égalités, de la première, et il nous viendra $ACD - BCD = \frac{AD-DB}{2}$. Mais ACD−BCD=ACB, et AD−DB=AB; donc $ACB = \frac{AB}{2}$; ce qu'il fallait démontrer.

200. *Corollaire.* Il suit de là et de la proposition précédente, que tous les angles ACB, ADB, AEB,..., (fig. 86) qui ont leur sommet à la circonférence,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et dont les côtés passent par les extrémités de la même corde AB, sont tous égaux entre eux; car ils ont la même mesure.

Le segment ACDEB dans lequel les angles égaux ACB, ADB,..., sont inscrits, est ce qu'on appelle *un segment capable d'un angle donné* ACB.

201. THÉORÈME 124. *Tout angle* ACB (fig. 87) *qui a son sommet* C *à la circonférence, et qui est formé par une corde* AC *et le prolongement* BC *d'une autre* DC, *a pour mesure la moitié de la somme des arcs soutendus par les deux cordes* AC, DC.

En effet, si par le point D nous menons la droite DE parallèle à AC, l'angle EDB = ACB; mais l'angle EDB a pour mesure la moitié de l'arc EAC, l'angle ACB aura donc la même mesure; donc $ACB = \frac{EAC}{2} = \frac{EA+AC}{2}$; mais l'arc EA = DC, à cause des parallèles AC, ED; donc enfin $ACB = \frac{DC+AC}{2}$; ce qu'il fallait démontrer.

202. THÉORÈME 125. *Tout angle* ACB (fig. 88) *formé par une corde* BC *et une tangente* CA (le sommet étant le point C de contact), *a pour mesure la moitié de l'arc* BC *compris dans l'angle.*

En effet, par le point B, menons la corde BD parallèle à la tangente CA; les angles DBC, BCA seront égaux comme alternes-internes; mais la mesure de l'angle DBC est la moitié de l'arc DC; donc l'angle BCA aura la même mesure; c'est-à-dire que $BCA = \frac{DC}{2}$. Or l'arc CD = BC, à cause des parallèles AC, BD; donc enfin $BCA = \frac{BC}{2}$; ce qu'il fallait démontrer.

203. THÉORÈME 126. *Tout angle* ACB (fig. 89) *qui a son sommet* C *hors de la circonférence d'un cercle, a pour mesure la demi-différence des deux arcs compris entre ses côtés.*

Pour démontrer cette proposition, par le point F, menons la droite FD parallèle au côté AC; l'angle DFB = ACB; mais la mesure de l'angle DFB est la moitié de l'arc DB; donc $ACB = \frac{DB}{2}$. Or DB = AB − AD, et AD = EF, à cause des parallèles DF, AC; donc DB = AB − EF, et par conséquent $ACB = \frac{AB-EF}{2}$; ce qu'il fallait démontrer.

204. THÉORÈME 127. *Tout angle* ACB (fig. 90) *qui a son sommet* C *dans le cercle, a pour mesure la demi-somme des arcs* AB, DE *compris entre ses côtés et leurs prolongemens.*

En effet, si par le point E nous menons la droite EF parallèle à DB, l'angle AEF = ACB; mais la mesure de l'angle AEF est la moitié de l'arc ABF; l'angle ACB aura par conséquent la même mesure, de sorte que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$ACB = \frac{ABF}{2} = \frac{AB+BF}{2}$, Or, BF=DE, à cause des parallèles BD, FE; donc enfin $ACB = \frac{AB+DE}{2}$; ce qu'il fallait démontrer.

10^me. LEÇON.

Les Lignes proportionnelles considérées dans le Cercle.

205. THÉORÈME 128. *Si deux cordes* AB, DC (fig. 91) *se coupent comme on voudra en un point* I, *le produit des deux parties* AI, IB *de la première, sera égal à celui des deux parties* DI, IC *de l'autre; c'est-à-dire qu'on aura*

$$AI \times IB = DI \times IC.$$

En effet, en menant les cordes AC, BD, nous aurons les triangles AIC, DIB qui seront semblables, car ces triangles auront un angle opposé par le sommet, et les angles CAB, CDB seront égaux, ainsi que les angles ACD, ABD, comme ayant pour mesure la moitié des mêmes arcs; donc AI : ID :: IC : IB; d'où AI × IB = ID × IC; ce qu'il fallait démontrer.

206. *Corollaire.* Si l'une AB des cordes était un diamètre (fig. 92), et que l'autre DC fût perpendiculaire à la première, on aurait toujours AI : ID :: IC : IB, ou AI × IB = ID × IC; mais dans ce cas IC = ID; donc AI : IC :: IC : IB, ou AI × IB = $(IC)^2$; d'où il suit que *toute perpendiculaire* CI, *abaissée d'un point de la circonférence sur le diamètre du cercle, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens* AI, IB *du diamètre.*

Ce corollaire est une suite du n°. 154, car si l'on mène les cordes AC, CB, le triangle ACB sera rectangle, puisque l'angle ACB est droit (n°. 198).

207. THÉORÈME 129. *Soit* AB (fig. 93) *le diamètre d'un cercle; si par la même extrémité* A *de ce diamètre* AB *on mène les cordes* AC, AD, AE, *etc., et que par les extrémités* C, D, E, *etc. de ces cordes, on abaisse au diamètre* AB *les perpendiculaires* CF, DG, EH, *etc.; je dis qu'on aura*

$$(AC)^2 : (AD)^2 : (AE)^2 : (AB)^2 :: AF : AG : AH : AB.$$

En effet, si par l'autre extrémité B du diamètre AB, on mène les cordes CB, DB, EB, etc., les triangles ACB, ADB, AEB, etc. seront rectangles, puisque les angles ACB, ADB, AEB, etc. sont droit (n°. 198). Or, d'après le n°. 152 on aura $(AC)^2 = AB \times AF$, $(AD)^2 = AB \times AG$, $(AE)^2 = AB \times AH$,... et $(AB)^2 = AB \times AB$; donc $(AC)^2 : (AD)^2 : (AE)^2 : (AB)^2 :: AF : AG : AH : AB$.

208. THÉORÈME 130. *Si par un point* A (fig. 94) *pris hors de la circonfé-*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rence d'un cercle on mène deux sécantes quelconques AB, AC, *le produit de la première sécante entière par sa partie extérieure égalera celui de l'autre sécante entière par sa partie extérieure ; de sorte qu'on aura*

$$AB \times AD = AC \times AE.$$

En effet, en menant les cordes BE et DC, on aura les triangles AEB, ACD qui seront semblables; car l'angle A est commun aux deux, et les angles ABE, ACD sont égaux, comme ayant pour mesure la moitié de l'arc DE (n°. 199); donc ces triangles AEB, ACD sont semblables, puisqu'ils ont deux angles égaux (n°. 99); donc AB : AC :: AE : AD; d'où $AB \times AD = AC \times AE$; ce qu'il fallait démontrer.

209. THÉORÈME 131. *Si par un point* A (fig. 95) *pris hors de la circonférence d'un cercle on mène une tangente* AB, *et une sécante quelconque* AC, *la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure, ou, en d'autres termes, le carré de la tangente sera égal au produit de la sécante entière par sa partie extérieure ; de sorte qu'on aura*

$$AC : AB :: AB : AD, \text{ ou } (AB)^2 = AC \times AD.$$

En effet, si l'on mène les cordes BC, BD, on aura les triangles ACB, ADB qui seront semblables, car ils ont l'angle commun A, et les angles ACB, ABD qui sont égaux, puisqu'ils ont pour mesure la moitié de l'arc BD (voyez le n°. 199 pour l'angle ACB, et le n°. 202 pour l'angle ABD); donc AC : AB :: AB : AD; d'où $(AB)^2 = AC \times AD$.

210. THÉORÈME 132. *Si deux arcs de cercle* AB, *ab* (fig. 96) *situés dans des cercles différens ont le même nombre de degrés, les cordes* AB, *ab, qui soutendront ces arcs, seront proportionnelles aux rayons.*

En effet, en menant les rayons CA, CB, *ca* et *cb*, on aura les triangles ACB, *abc* qui seront semblables; car ces deux triangles ont les angles égaux C et *c*, puisque les arcs AB, *ab* qui les mesurent ont le même nombre de degrés, et de plus ces triangles sont isocèles, les autres angles sont donc égaux; donc ces deux triangles sont semblables ; donc AB : *ab* :: AC : *ac*; ce qu'il fallait démontrer.

211. THÉORÈME 133. *Réciproquement, si dans deux cercles différens on a deux cordes* AB, *ab* (fig. 96) *qui soient entre elles comme les rayons, les arcs soutendus par ces cordes auront le même nombre de degrés.*

En effet, menons les rayons AC, BC, *ac* et *bc* aux extrémités de ces cordes, et nous aurons les triangles ACB, *abc*, qui seront isocèles, et qui, d'après l'hypothèse, donneront AB : *ab* :: AC : *ac* :: BC : *bc*; ces deux triangles ont donc les côtés homologues proportionnels, ils auront donc les angles égaux (n°. 91), donc les angles C, *c* sont égaux, et par conséquent les arcs AB,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ab qui mesurent ces angles égaux auront le même nombre de degrés; ce qu'il fallait démontrer.

212. THÉORÈME 134. *Si dans des cercles différens on a deux cordes* AB, *ab proportionnelles aux rayons; en abaissant par les centres les perpendiculaires* CD, *cd sur les cordes, ces perpendiculaires seront proportionnelles aux cordes et aux rayons.*

En effet, il est évident que les triangles ACD, *acd* sont semblables, puisqu'ils sont rectangles, et que les angles A, *a* sont égaux à cause de la similitude des triangles ABC, *abc*; on aura donc CD : *cd* :: AD : *ad* :: AC : *ac*, ou CD : *cd* :: AB : *ab*; ce qu'il fallait démontrer.

213. THÉORÈME 135. *Réciproquement, si dans deux cercles différens on a deux cordes* AB, *ab* (fig. 97) *dont les distances aux centres sont proportionnelles aux rayons, ces cordes seront aussi proportionnelles aux rayons, et par conséquent les arcs qu'elles soutendent auront le même nombre de degrés.*

En effet, par les centres C, *c*, abaissons sur les cordes AB, *ab*, les perpendiculaires CD, *cd*, lesquelles seront les distances des cordes aux centres, et menons les rayons AC, BC, *ac*, *bc*, et nous aurons les triangles ABC, *abc* qui seront semblables. Car si nous faisons CE et CF = *ac*, et nous menons la droite EF, elle sera parallèle à AB, et les deux triangles ADC, ECG seront semblables; nous aurons donc AC : CE :: CD : CG; mais, par hypothèse, AC : *ac* :: CD : *cd*; et *ac* = CE; ces deux proportions ont donc les trois premiers termes égaux; les quatrièmes le seront donc aussi; si donc on transporte le triangle *abc* de manière que *cd* vienne coïncider avec son égal CG, la base *ab* prendra la direction de EF, puisque les angles *adc*, EGC sont droits. Maintenant, je dis que *ab* = EF, c'est-à-dire que le point *a* tombera sur le point E, et le point *b* sur le point F, car les obliques égales *ac* et EC ou *bc* et FC s'écartent également de la perpendiculaire (n°. 32). Donc les triangles *abc*, ECF sont égaux; mais ECF est semblable à ABC; donc aussi *abc* est semblable à ABC; de sorte que les angles ACB, *acb* sont égaux; donc les arcs AB, *ab* ont le même nombre de degrés, donc les cordes AB, *ab* sont proportionnelles aux rayons.

214. THÉORÈME 136. *Si l'on mène une tangente* OP *commune à deux cercles* (fig. 97 et 98), *et la droite* DC, *prolongée, qui joint les centres* D *et* C; *si par le point* A, *où ces deux droites se coupent, on mène une droite quelconque* HM *qui rencontre les deux cercles; si par les points, où cette dernière droite rencontre les circonférences des cercles, on mène les rayons* CM, CL, DK *et* DH; *je dis que les triangles* ACM *et* ADK *seront semblables, ainsi que les triangles* ACL *et* ADH.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, par les centres C et D menons les droites CO, DP aux points de contact O et P, et les droites CN, DI perpendiculaires à la droite HM; nous aurons les triangles ACO, ADP qui seront évidemment semblables, ainsi que les triangles ACN, ADI; il en résultera donc que AC : AD :: CO : DP, et que AC : AD :: CN : DI; donc CN : DI :: CO : DP, à cause du rapport commun AC : AD à ces deux proportions; mais CO et DP sont les rayons des cercles; les distances CN, DI des centres aux cordes LM, HK sont donc proportionnelles aux rayons; donc les arcs LM, HK, soutendus par ces cordes, ont le même nombre de degrés (n°. 213); donc les angles LCM, HIK sont égaux. Mais les triangles LCM, HDK sont isocèles; les perpendiculaires CN, DI abaissées de leurs sommets sur leurs bases divisent donc les angles des sommets en deux parties égales; donc les angles NCM, IDK, NCL, IDH donnent NCM = IDK, et NCL = IDH... (1). Mais les droites CN, DI étant parallèles, on a aussi NCB = IDF et NCG = IDE... (2). Si de la première des égalités (2) on retranche la première des égalités (1), on aura NCB — NCM = IDF — IDK, ou MCB = KDF; donc les rayons CM, DK sont parallèles, et les triangles ACM, ADK, sont semblables. Si de la seconde des égalités (2) on retranche la seconde des égalités (1), on aura NCG—NCL = IDE—IDH ou LCG = HDE; donc les rayons CL, DH sont parallèles; donc les triangles ACL, ADH sont semblables, et la proposition se trouve entièrement démontrée.

215. *Corollaire* 1. Il suit de la similitude des triangles ACM, ADK, que AC : AD :: AM : AK..... (1), et que AC : AD :: CM : DK ou AC : AD :: CB : DF. Mais dans cette dernière on tire AC : AD :: AC+CB : AD+DF ou AC : AD :: AB : AF..... (2), et AC : AD :: AC — CB : AD — DF ou AC : AD :: AC—CG : AD—DE, ou enfin, AC : AD :: AG : AE... (3). Or, les proportions (1), (2) et (3) ont le rapport commun AC : AD; donc AM : AK :: AB : AF :: AG : AE; d'où AM×AF = AK×AB, AM×AE = AK × AG.

216. *Corollaire* 2. Il suit de la similitude des triangles ACL, ADH, que AC : AD :: AL : AH..... (1), et que AC : AD :: CL : DH :: CB : DF. Mais de cette dernière on tire AC : AD :: AC + CB ou AB : AD + DF ou AF..... (2), et AC : AD :: AC — CB ou AG : AD — DF ou AE..... (3). Or les proportions (1), (2) et (3) ont le rapport commun AC : AD; donc AL : AH :: AB : AF :: AG : AE; d'où AL×AF = AH×AB et AL×AE = AH × AG.

217. THÉORÈME 137. *Si les deux triangles* ABC, DEC (fig. 99 et 100) *sont semblables, les deux cercles circonscrits à ces triangles seront tangens l'un à*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'autre, et le point de contact sera le sommet C *commun aux deux triangles.*

Pour démontrer que les deux cercles sont tangens, il suffit (n°. 187) de faire voir que la droite qui joint les centres passe par le point C commun aux deux cercles.

Cela posé, en premier lieu, par les centres F et G de ces cercles (fig. 99), menons au point C, les droites FC, GC; et faisons voir que ces deux droites sont l'une le prolongement de l'autre. Pour cela, par le centre F abaissons la droite FL perpendiculaire sur la corde AC; cette droite FL divisera l'arc ALC en deux parties égales; de sorte que la mesure LC de l'angle LFC est la moitié de l'arc ALC; mais l'angle ABC a aussi pour mesure la moitié de l'arc ALC; donc l'angle LFC=ABC. En faisant la même construction sur le centre G et la corde CE, on aura la droite GH qui divisera l'arc CHE en deux parties égales; la mesure CH de l'angle CGH sera donc la moitié de l'arc CHE; mais l'angle CDE a aussi pour mesure la moitié de l'arc CHE; donc l'angle CGH = CDE; ainsi d'une part nous avons LFC=ABC, et de l'autre CGH=CDE; mais les triangles ABC, CDE étant semblables, on a ABC = CDE; donc LFC = CGH. Or, les triangles CKF, CGI sont rectangles en K et I; donc les angles KCF, GCI sont égaux; mais ces angles sont opposés par le sommet, et la ligne KCE est droite; donc (n°. 24) les droites FC, CG sont l'une le prolongement de l'autre; *donc enfin les cercles circonscrits à deux triangles semblables qui ont un angle opposé par le sommet sont tangens.*

En second lieu, par le point C et les centres F et G des deux cercles (fig. 100) menons les droites CF, CG, et faisons voir que la première CF passera par le centre G du petit cercle.

En effet, par les centres F, G, abaissons, à la droite CA, les perpendiculaires FL, GH; la première divisera l'arc ALC en deux parties égales, et la seconde GH divisera l'arc EHC de la même manière; de sorte que la mesure CL de l'angle CFL sera la moitié de l'arc ALC; donc l'angle CFL = CBA, et la mesure CH de l'angle CGH sera la moitié de l'arc EHC; donc l'angle CGH = CDE; mais les angles CBA, CDE sont égaux, à cause de la similitude des triangles ABC, ECD; donc l'angle CFK = CGI; mais les triangles CFK, CGI sont rectangles en K et I; donc les angles ECF, ECG sont égaux; mais ces deux angles égaux ont un côté CE et le sommet C commun, donc enfin les droites CF, CG coïncident; *donc, si deux triangles semblables ont un angle commun, les cercles circonscrits à ces triangles seront tangens.*

218. THÉORÈME 138. *Réciproquement, si les deux cercles* ABC, DEC (fig. 99 et 100) *sont tangens, si par le point de contact* C *on mène deux droites* AE, BD (fig. 99), *et* AC, BC (fig. 100), *et qu'ensuite on joigne les points* A

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et B, D *et* E *par les droites* AB, DE, *ces droites seront parallèles, et par conséquent les triangles* ABC, DEC *seront semblables.*

En effet, dans chacune des deux figures, par les centres F et G des cercles, abaissons les perpendiculaires FL, GH sur la droite AC, et joignons les mêmes centres par la droite FG qui, prolongée, passera par le point de contact C; les droites FL, GH seront parallèles, et comme elles sont coupées par la sécante FG, les angles CFL, CGH seront égaux; mais la mesure CL de l'angle CFL est la moitié de l'arc ALC; or, l'angle ABC a aussi pour mesure la moitié de l'arc ALC; donc ABC = CFL; mais la mesure CH de l'angle CGH est la moitié de l'arc CHE; or, l'angle CDE a aussi pour mesure la moitié de l'arc CHE; donc CDE = CGH; donc l'angle CDE = ABC; donc enfin les droites AB, DE sont parallèles.

11^me^. LEÇON.

Les Polygones inscriptibles et circonscriptibles au cercle, et la superficie du cercle.

219. DÉFINITION. On appelle, en général, *figures inscrites*, celles dont les sommets sont tous sur la circonférence du cercle; et figures circonscrites celles dont les côtés sont tous tangens à la circonférence du cercle.

220. *Corollaire* 1. Il suit de là que tous les polygones réguliers sont inscriptibles au cercle, car (n°. 109) tous les sommets A, B, C, D, etc. (fig. 46) de ces sortes de polygones sont à égales distances du centre O (n°. 111); si donc, avec un rayon égal à la distance du centre O à l'un des sommets, on décrit une circonférence de cercle, par le centre du polygone, cette circonférence passera par tous les sommets de ce dernier.

221. *Corollaire* 2. Il suit encore de là que tous les polygones réguliers sont circonscriptibles au cercle; car toutes les perpendiculaires abaissées du centre du polygone sur les côtés (n°. 108) sont égales; en décrivant donc, par le centre du polygone, une circonférence de cercle avec un rayon égal à l'une de ces perpendiculaires, cette circonférence sera tangente à tous les côtés du polygone (n°. 184).

222. THÉORÈME 139. *Tout quadrilatère qui a deux angles droits* B *et* D (fig. 101) *opposés est inscriptible au cercle.*

En effet, si l'on mène la diagonale AC par les sommets A et C des deux autres angles; en décrivant une circonférence de cercle sur cette diagonale

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

AC comme diamètre, à cause que les angles B et D sont droits, il est évident (n°. 198) que cette circonférence passera par les points B et D; donc, etc.

223. *Corollaire.* Il suit de là que tous les rectangles sont inscriptibles, car ils ont les angles droits.

224. THÉORÈME 140. *Le côté de l'exagone inscrit est égal au rayon du cercle.*

En effet, soit l'exagone ABCDEF (fig. 102); si par le centre O on mène les rayons OA, OB, je dis que le triangle ABO sera équilatéral (n°. 36). Car le polygone ayant six côtés, l'angle AOB est le 6^{me}. de 360°., et par conséquent cet angle est de 60°.; mais la somme des trois angles de ce triangle AOB est de 180°.; la somme des deux angles OAB, ABO sera donc de 180°. — 60°. = 120°.; or, le triangle AOB est isocèle, puisque les côtés OA, OB sont des rayons du cercle; donc les angles OAB, ABO sont égaux; et, comme leur somme est 120°., chacun d'eux est de 60°.; donc les trois angles du triangle AOB sont égaux; donc enfin ce triangle est équilatéral, et par conséquent le côté AB du polygone est égal au rayon AO.

225. *Remarque.* Il est évident que si d'abord l'on inscrit un carré *abcd* et circonscrit un autre carré ABCD (fig. 103) à un même cercle, le carré ABCD circonscrit sera plus grand que l'inscrit *abcd*. Si, ensuite, on double le nombre des côtés de ces deux polygones, on aura deux octogones, l'un inscrit et l'autre circonscrit. L'octogone inscrit sera plus petit que le circonscrit, mais il sera plus grand que le carré inscrit, tandis que l'octogone circonscrit sera plus petit que le carré circonscrit. Si l'on continue de doubler successivement et indéfiniment les côtés des polygones inscrits et circonscrits, il est clair que les circonscrits resteront toujours plus grands que les inscrits d'un même nombre de côtés; que les circonscrits iront en diminuant et les inscrits en augmentant, et que, par conséquent, la différence des polygones inscrits et circonscrits d'un même nombre de côtés ira en diminuant à mesure que le nombre des côtés des polygones augmentera. Lors donc que le nombre des côtés des polygones sera très-grand, la différence des polygones inscrits et circonscrits sera très-petite; on pourra donc pousser l'augmentation du nombre des côtés des polygones assez loin, pour que cette différence soit plus petite que la plus petite quantité qu'on pourra imaginer; mais le cercle se trouvera toujours compris entre les polygones inscrits et circonscrits; la différence du cercle à l'un des polygones sera donc encore moindre; d'où l'on voit que les deux polygones inscrits et circonscrits coïncideraient tous les deux avec le cercle, si le nombre des côtés était infini, les côtés étant infiniment petits.

226. *Corollaire* 1. Il suit de là qu'on peut regarder un cercle comme un poly-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

gone régulier d'une infinité de côtés infiniment petits, dont l'apothême serait le rayon du cercle.

227. *Corollaire* 2. Comme les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables, tous les cercles sont des figures semblables; d'où il suit 1°. que les contours ou circonférences des cercles sont entre eux comme les rayons ou comme les diamètres, et 2°. les superficies des cercles sont entre elles comme les carrés des rayons ou des diamètres; car dans les polygones réguliers semblables, les apothêmes sont proportionnelles aux côtés homologues.

228. *Corollaire* 3. De ce que la superficie d'un polygone est égale au contour multiplié par la moitié de l'apothême (n°. 142), il s'ensuit *que celle d'un cercle sera égale à la circonférence multipliée par la moitié du rayon, ou à la moitié de la circonférence multipliée par le rayon tout entier.* Si donc C représente la circonférence, R le rayon et S la superficie d'un cercle, on aura généralement $S = C \times \frac{R}{2} = \frac{CR}{2}$.

229. *Corollaire* 4. Puisque les circonférences des cercles sont entre elles comme les diamètres, si C et C′ sont les circonférences, et R, R′ les rayons de deux cercles, on aura $C : C' :: 2R : 2R'$, d'où $C = \frac{2RC'}{2R'} = 2R \times \frac{C'}{2R'}$. Mais $\frac{C'}{2R'}$ est le rapport du diamètre à la circonférence de l'un des cercles; si donc l'on connaissait ce rapport (comme ce rapport est le même pour tous les cercles, puisque de la proportion ci-dessus on tire $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$), il suffirait de le multiplier par le diamètre d'un cercle quelconque pour avoir la circonférence de ce cercle quelconque. Appelons p ce rapport, nous aurons $C = 2Rp$.

230. *Corollaire* 5. Si dans l'égalité $S = C \times \frac{R}{2}$ (n°. 228), nous mettons $2Rp$ à la place de C, nous aurons $S = 2Rp \times \frac{R}{2}$ ou $S = R^2p$: d'où il suit *que la superficie d'un cercle est égale au rapport du diamètre à la circonférence multiplié par le carré du rayon* (*).

231. *Corollaire* 6. Si S et S′ sont les superficies, et R, R′ les rayons de deux cercles, on aura $S = pR^2$ et $S' = pR'^2$; d'où $S : S' :: pR^2 : pR'^2 :: R^2 : R'^2$; *c'est-à-dire que les superficies des cercles sont entre elles comme les carrés des rayons*, ce qui s'accorde avec ce qui a été dit (n°. 227).

232. THÉORÈME 141: *La longueur d'un arc est égale à la circonférence*

(*) Nous donnerons, parmi les problêmes, le moyen d'avoir la valeur du rapport p du diamètre à la circonférence d'un cercle.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

entière multipliée par le nombre des degrés de l'arc, et divisée par 360 ; *de sorte que si* A *est la longueur de l'arc, n le nombre de ses degrés, et* C *la circonférence du cercle, nous aurons* $A = \frac{nC}{360}$.

En effet, la longueur d'un degré est évidemment la 360me. partie de la circonférence ; ainsi la longueur d'un degré sera $\frac{C}{360}$, et par conséquent celle de n degrés sera $\frac{nC}{360}$; donc, enfin, $A = \frac{nC}{360}$.

233. *Corollaire* 1. Si dans la formule $A = \frac{nC}{360}$ on met, au lieu de C, sa valeur $2Rp$, trouvée au n°. 229, on aura $A = \frac{2nRp}{360} = \frac{npR}{180}$; *d'où il suit que la longueur d'un arc de cercle est égale au produit du nombre des degrés de l'arc, du rapport du diamètre à la circonférence et du rayon du cercle, divisé par* 180.

234. *Corollaire* 2. Si donc on a deux arcs d'un même nombre de degrés, ces arcs seront entre eux comme les rayons ; car si A et A′ sont ces arcs, n leur nombre de degrés, R, R′ leurs rayons, on aura $A = \frac{np}{180} \times R$, et $A' = \frac{np}{180} \times R'$, donc $A : A' :: R : R'$; ce qu'il fallait démontrer.

235. *Corollaire* 3. Si les nombres des degrés étaient différens, on aurait $A : A' :: nR : n'R'$ ou $\frac{A}{R} : \frac{A'}{R'} :: n : n'$; d'où il suit *que les nombres des degrés sont entre eux comme les arcs divisés par leurs rayons respectifs.*

236. *Corollaire* 4. Puisque les nombres des degrés sont comme les arcs divisés par leurs rayons, et que les angles sont comme les nombres des degrés qui les mesurent, *deux angles mesurés par des arcs de rayons différens seront entre eux comme les arcs divisés par les rayons.*

237. THÉORÈME 142. *La superficie d'un secteur circulaire* ACB (fig. 95) *est égale à la superficie entière du cercle multipliée par le nombre des degrés de l'arc du secteur, et divisée par* 360 ; *de sorte que* S *étant la superficie entière du cercle, n le nombre des degrés de l'arc, sect. la superficie du secteur, on aura* $sect. = \frac{nS}{360}$.

En effet, s'il ne s'agissait que d'un secteur dont l'arc serait d'un degré, il est évident que ce secteur serait la 360me. partie de la superficie entière du cercle ; de sorte que la superficie d'un secteur d'un degré serait $\frac{S}{360}$, et, par conséquent, la superficie d'un secteur de n degrés sera $sect. = \frac{nS}{360}$.

238. *Corollaire* 1. Si dans la formule $sect. = \frac{nS}{360}$ on met, au lieu de S, sa valeur pR^2 trouvée au n°. 230, on aura $sect. = \frac{npR^2}{360}$; *d'où la superficie*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'un secteur est égale au produit du nombre des degrés du secteur, du rapport du diamètre à la circonférence et du carré du rayon, divisé par 360.

239. *Corollaire* 2. Si, dans le même cercle, on avait un autre secteur dont le nombre de degrés serait n', on aurait $\text{sect.}' = \frac{n'p\text{R}^2}{360}$, d'où $\text{sect.} : \text{sect.}' :: n : n'$; *c'est-à-dire que les secteurs seraient entre eux comme les nombres des degrés, ou comme les arcs.*

240. *Corollaire* 3. Si, dans un autre cercle dont le rayon serait R', on avait un secteur d'un même nombre de degrés, on aurait $\text{sect.}' = \frac{np\text{R}'^2}{300}$; d'où $\text{sect.} : \text{sect.}' :: \text{R}^2 : \text{R}'^2$; *c'est-à-dire que les secteurs, qui ont le même nombre de degrés, et qui appartiennent à des cercles différens, sont entre eux comme les carrés des rayons.*

12^me^ LEÇON.

Des Figures Isopérimètres.

241. DÉFINITION. On appelle figures *isopérimètres* celles qui ont le même périmètre ou contour.

242. THÉORÈME 143. *Supposons une droite* AB (fig. 104) *et deux points* C *et* D *quelconques donnés de position hors de cette droite; si par les points* C *et* D *on mène deux droites* CE, DE, *en un même point* E *de la droite* AB, *de manière que les angles* CEA, DEB *soient égaux entre eux, la somme des droites* CE, DE *sera plus petite que celle de deux autres droites* Ce, De *menées des mêmes points* C *et* D *à un autre point e quelconque de la droite* AB.

En effet, si par le point C on abaisse une perpendiculaire CF sur la droite AB, et qu'on prolonge la droite DE jusqu'à sa rencontre en F avec la perpendiculaire CF, je dis que la droite DF = DE + EC... (1). Car les angles DEB, CEA sont égaux par hypothèse, et les angles DEB, AEF comme opposés par le sommet; donc les angles CEA, AEF sont égaux. Mais les deux triangles ACE, AEF sont rectangles et ont un côté commun AE; donc ces triangles sont égaux; donc EF=CE; si donc nous mettons EF à la place de son égal CE, dans l'égalité (1), nous aurons DF = DE + EF, ou DF = DF, donc DF=DE+EC. Je dis maintenant que CE+DE<Ce+De. Car si nous menons la droite eF, nous aurons DF < De + eF; mais eF = Ce, puisque la droite AB est perpendiculaire au milieu de CF; donc DF < De + Ce; or DF = DE + CE; donc DE + CE < De + Ce; ce qu'il fallait démontrer.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

243. THÉORÈME 144. *Si deux triangles* ABC, ABD (fig. 105) *dont l'un* ABC *est isocèle et l'autre* ABD *quelconque, ont même base* AB, *et même contour, celui qui est isocèle aura la plus grande superficie.*

Par les sommets C et D abaissons les perpendiculaires CE, DF sur la base commune AB aux deux triangles ABC, ABD; ces perpendiculaires seront les hauteurs de ces triangles; si donc nous faisons voir que la hauteur CE > DF, à cause de la base commune AB, il sera démontré que le triangle ABC > ABD. Or, si par le sommet D du triangle ABD on mène la droite DH parallèle à la base AB, cette droite DH rencontrera la perpendiculaire CE en un point G, situé au-dessus ou au-dessous du sommet C. Menons à ce point G les droites GA, GB aux extrémités A et B de la base AB; le triangle AGB sera isocèle, et par conséquent les angles AGE, EGB seront égaux; mais les angles HGE, DGE sont droits; donc les angles HGB, DGA sont égaux; donc (n°. 243) AG+GB<AD+DB; mais AD+DB=AC+CB; donc AG+GB<AC+CB; donc le point G est au-dessous du point C, et par conséquent GE=DF<CE; ce qu'il fallait démontrer.

244. THÉORÈME 145. *De tous les triangles inscrits* ACB, ADB (fig. 106) *dans un même segment* ACB, *le plus grand est celui* ACB *qui est isocèle, soit pour le contour, soit pour la superficie.*

En effet, si par les sommets C et D des triangles ACB, ADB on abaisse les perpendiculaires CE, DF à la base commune, celle CE abaissée du sommet C du triangle isocèle, tombera sur le milieu de la base AB (le point C étant à égales distances des extrémités A et B de la corde AB), et passera par le centre O; tandis que l'autre DF ne passera ni par le centre, ni par le milieu de la corde AB. Il suit de là évidemment que la hauteur EC>DF, et que par conséquent ABC > ABD.

Il ne nous reste donc plus qu'à faire voir que le contour AC + CB > AD + DB. Or, prolongeons le côté AD d'une quantité DG = DB, et menons la droite GC; les deux triangles BDC, GDC auront deux côtés égaux, chacun à chacun, car BD = DG et DC est commun aux deux; de plus, l'angle BDC de l'un est égal à l'angle GDC de l'autre; car l'angle BDC a pour mesure la moitié de l'arc BAC, c'est-à-dire $\frac{AB+AC}{2}$, et l'angle GDC, qui est formé par une corde DC et le prolongement DG d'un autre corde AD, a pour mesure la moitié de l'arc CD + DBA, ou $\frac{CDB+AB}{2}$; mais CDB = CA, donc $\frac{CDB+AB}{2} = \frac{AB+BC}{2}$; donc les deux angles BDC, GDC sont égaux; donc les deux triangles BDC, GDC sont aussi égaux, puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux, chacun à chacun; donc enfin CG=CB.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si maintenant nous considérons le triangle GAC, nous verrons que GC+CA >GA, ou GC+CA>GD+DA; mais GC=CB, et GD=BD; donc AC+CB> AD+DB; ce qu'il fallait démontrer.

245. THÉORÈME 146. *Soit un polygone* ABCDE (fig. 107) *dont les côtés sont inégaux; je dis que sans changer le périmètre de ce polygone on pourra augmenter sa superficie.*

En effet, si l'on mène la diagonale AC, on partagera le polygone proposé en deux parties dont l'une sera le triangle ABC, et l'autre le polygone ACDE. Mais le triangle ABC pourrait se changer en un autre AFC qui fût isocèle, de même périmètre, et qui aurait une plus grande superficie (n°. 241); donc le polygone AFCDE serait plus grand que le polygone ABCDE, et ces deux polygones auraient pourtant le même contour.

246. *Corollaire.* Ainsi, tant que les côtés d'un polygone quelconque ne seront pas égaux, ce polygone sera susceptible d'augmentation, sans changer de contour. Mais il ne faut pas en conclure que tout polygone qui a ses côtés égaux n'est plus susceptible d'augmentation, sans changer de contour, car on va voir bientôt que ce serait une erreur.

247. THÉORÈME 147. *De tous les triangles qu'on peut construire avec deux côtés donnés, le plus grand est celui dans lequel l'angle compris par les côtés donnés est droit.*

En effet, soient AB et BC (fig. 108) les côtés donnés; si l'angle ABC est droit, le triangle ABC sera le plus grand de tous ceux qu'on pourra former avec les mêmes côtés. Car si par le point B, comme centre, et avec le rayon BC, on décrit l'arc de cercle ECD; si ensuite on mène les rayons BD et BE, et les droites AD, AE, on aura les deux triangles ABD, ABE, formés par les mêmes côtés donnés; mais dans l'un ABD l'angle compris ABD sera obtus, et dans l'autre ABE l'angle compris ABE sera aigu : je dis que ces deux triangles sont tous les deux plus petits que le triangle rectangle ABC; car la hauteur CD de ce dernier est le rayon du cercle, tandis que celles DF, EG des deux autres sont moindres que le rayon; mais les bases sont égales; donc le triangle rectangle ABC, qui a la plus grande hauteur, est le plus grand.

248. THÉORÈME 148. *De tous les polygones que l'on peut former avec des côtés donnés et un dernier côté indéterminé, le plus grand est celui qui est inscrit dans un demi-cercle dont le côté indéterminé serait le diamètre.*

Soient AB, BC, CD et DE (fig. 109) les côtés donnés, déjà inscrits dans le demi-cercle ABE; si par les points B et E on mène la diagonale BE, le polygone ABCDE sera partagé en deux parties ABE, BCDE, dont la première est un triangle rectangle, puisque son sommet est sur la circonférence en B, et que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les côtés AB, BE passent par les extrémités du diamètre : ce triangle ABE est donc le plus grand qu'on puisse former avec les côtés AB, BE. Or, la partie BCDE pourrait rester la même, et le polygone ABCDE ne pas être inscrit dans un demi-cercle; mais, dans ce cas, le triangle ABE serait plus petit que dans le premier cas, puisqu'il ne serait plus rectangle; donc le polygone entier ABCDE diminuerait aussi; donc ce polygone ABCDE est le plus grand possible quand il est inscrit dans un demi-cercle.

Remarque. La superficie du polygone ABCDE ne changera pas, quelque soit l'ordre que l'on suive en portant les côtés AB, BC, CD, DE sur la demi-circonférence du cercle, pour former ce polygone, car la superficie de ce polygone est égale à celle du demi-cercle moins la somme des segmens AB, BC, CD, DE, qui reste toujours la même.

249. THÉORÈME 149. *Avec des côtés donnés, le plus grand polygone que l'on puisse former est celui qui est inscrit dans un cercle.*

Soient ABCDE, *abcde* (fig. 110) deux polygones formés avec les mêmes côtés, dont l'un ABCDE soit inscrit et l'autre ne le soit pas, je dis que le premier sera plus grand que le second.

En effet, par le centre O du cercle, à un sommet A du polygone ABCDE, menons un diamètre AF, et joignons les points C et D avec le point F par les droites CF, DF; le polygone sera augmenté du triangle DFC, et le contour de DF + FC. Sur le côté $cd = DC$, faisons le triangle $cdf = DCF$, le polygone *abcde* sera augmenté de la même quantité que le premier, ainsi que le contour; si donc le polygone ABCFDE est plus grand que *abcfde*, le polygone ABCDE sera plus grand que *abcde*. Or, la partie ABCF a les côtés respectivement égaux à la partie *abcf*; mais la partie ABCF est inscrite dans un demi-cercle; donc (n°. 248) $ABCF > abcf$. De plus, la partie AEDF a les côtés respectivement égaux aux côtés de la partie *aedf*; mais la partie AEDF est inscrite dans un demi-cercle; donc $AEDF > aedf$. Ajoutons ces deux inégalités, membre à membre, et nous aurons $ABCF + AEDF > abef + aedf$ ou $ABCFDE > abcfde$; ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Cette proposition a lieu lors même que les côtés donnés sont tous égaux entre eux; ainsi donc, un polygone qui a les côtés égaux est plus grand que quand les côtés sont inégaux (n°. 245); mais de ce qu'un polygone a les côtés égaux il ne s'ensuit pas qu'il soit le plus grand qu'on puisse former avec les mêmes côtés, à moins qu'il ne soit inscrit dans un cercle; ce qui confirme ce que nous avons annoncé au n°. 246.

250. THÉORÈME 150. *De deux polygones inscrits de même contour et d'un même nombre de côtés, celui qui sera régulier sera le plus grand.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, le polygone régulier ayant les côtés égaux, il est plus grand que celui qui a les côtés inégaux (n°. 243), et étant inscrit, il est plus grand que tous ceux, de même contour, qui auraient les côtés égaux et en même nombre et qui ne seraient pas inscrits.

251. THÉORÈME 151. *De deux polygones réguliers de même contour, celui qui a le plus grand nombre de côtés est le plus grand.*

Soient BC la moitié d'un côté du polygone qui a le plus grand nombre de côtés, AB son apothême et A son centre; soient EF la moitié d'un côté de l'autre polygone, DE son apothême et D son centre; et plaçons les deux apothêmes sur une même droite AH, les centres A et D étant à une distance quelconque l'un de l'autre : comme les angles CAB, FDE ne sont pas égaux, les côtés AC, DF, prolongés, se rencontreront en un point G; par ce point G, soit abaissée la perpendiculaire GH sur la droite AH; les triangles ACB, AGH seront semblables, ainsi que les triangles DFE, DGH : on aura donc AB : BC :: AH : GH, et DE : EF :: DH : HG, et, de ces deux proportions, on tirera $AB = \frac{BC \times AH}{GH}$ et $DE = \frac{EF \times DH}{GH}$..... (1).

Cela posé, par les points A et D, comme centres, décrivons les arcs HK, HI; nous aurons (n°. 236) l'angle CAB : FDE :: $\frac{HK}{AH} : \frac{HI}{DH}$..... (2). Mais l'angle CAB : 360°. :: BC : C, C étant le contour du polygone qui a le plus de côtés, et l'angle FDE : 360°. :: EF : C, C étant le contour de l'autre polygone; or les deux contours sont égaux; donc CAB : FDE :: BC : FE; mais cette dernière proportion a le rapport commun CAB : FDE avec celle (2) ci-dessus; donc BC : FE :: $\frac{HK}{AH} : \frac{HI}{DH}$. De cette dernière, multiplions les antécédens par AH et les conséquens par DH, et nous aurons

$$BC \times AH : FE \times DH :: HK : HI \text{..... (3).}$$

Cela posé, faisons l'angle MDF = FDE; prolongeons l'arc HI jusqu'en M; avec le rayon AH, et par le centre O pris sur la droite MD, prolongée, décrivons l'arc ML; cet arc coupera l'arc HK en un point L situé sur la droite DG; car à cause de l'égalité des angles MDF, FDE, en faisant tourner la figure DHL autour de la droite DL, le point H coïncidera avec le point M, puisque DH = DM; la droite HA coïncidera avec la droite MO, et le point A avec le point O, puisque MO = AH; donc les deux arcs HL, ML seront l'un sur l'autre; et comme le point L a tourné sur lui-même, il s'ensuit que HL = ML. Maintenant, il est clair que HL + LM > HI + IM, ou HL > HI; mais HK > HL; donc à plus forte raison HK > HI. Il suit de là que dans la proportion (3) on aura BC × AH > FE × DH. Si donc nous remontons aux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

égalités (1), nous verrons que AB>DE; mais AB est l'apothême du polygone qui a le plus de côtés; et DE celle de l'autre; mais les contours sont égaux; donc (n°. 142) le premier polygone est plus grand que le second.

252. *Corollaire.* Comme (n°. 225) un cercle peut être regardé comme un polygone régulier d'une infinité de côtés infiniment petits, il s'ensuit que, *de toutes les figures de même contour, le cercle a la plus grande superficie.*

13^me^. LEÇON.

Moyens de mener des perpendiculaires, de faire des angles et des polygones égaux, etc.

253. PROBLÊME 1. *Sur le milieu d'une droite* AB (fig. 112) *élever une perpendiculaire* CD *à cette droite* AB.

Par les extrémités A et B de la droite AB, comme centres, avec un rayon arbitraire plus grand que la moitié de la droite AB, on décrira deux arcs de cercle qui se couperont aux points C et D, par lesquels on menera la droite CD, qui sera la perpendiculaire demandée. Car les points C et D sont tous les deux à égales distances des extrémités A et B de la droite A (n°. 35).

254. PROBLÊME 2. *Par un point donné* D *sur une droite* AB (fig. 113), *on demande d'élever une perpendiculaire* CD *à cette droite* AB.

On prendra les distances arbitraires DE, DF égales entre elles, et par les points E et F, comme centres, et avec un rayon plus grand que ED, on décrira deux arcs de cercle qui se couperont en un point C, par lequel et le point donné D, on menera la droite CD qui sera la perpendiculaire demandée. Car les points D et C sont à égales distances des points E et F (n°. 35).

255. PROBLÊME 3. *Par un point donné* C *hors d'une droite* AB (fig. 114), *on demande d'abaisser une perpendiculaire à la droite* AB.

Par le point donné C, comme centre, et avec un rayon assez grand, on décrira un arc de cercle AB qui coupera la droite donnée AB en deux points A et B, qui seront à égales distances du point C; par ces points A, B, comme centres, et avec le même rayon, on décrira deux arcs de cercle qui se couperont en un point D qui sera à égales distances des points A, B : la droite CD menée par les points C et D sera donc la perpendiculaire demandée.

256. PROBLÊME 4. *Par l'une* B *des extrémités de la droite* AB (fig. 115) *on demande d'élever une perpendiculaire* BC, *sans prolonger cette droite* AB.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Par un point D pris comme on voudra hors de la droite AB, comme centre, et avec le rayon DB, on décrira un arc de cercle, plus grand qu'une demi-circonférence, qui coupera la droite AB en un point A; par ce point A et le centre D, on menera le diamètre AC, par l'extrémité C duquel et le point donné B on menera la droite BC, qui sera la perpendiculaire demandée. Car l'angle ABC est droit, comme ayant son sommet à la circonférence et ses côtés passant par les extrémités du diamètre AC (n°. 198).

257. PROBLÈME 5. *Par un point* C *donné hors d'une droite* AB (fig. 116) *et vers son extrémité* B, *on demande d'abaisser une perpendiculaire à cette droite* AB.

Pour cela, on prendra un premier point D, arbitrairement sur la droite AB, comme centre, et avec un rayon DC égal à la distance de ce point D au point donné C, on décrira un arc de cercle indéfini vers F; on prendra un second point E, arbitrairement sur la droite AB, comme centre, et avec le rayon EC égal à la distance de ce point E au point donné C, on décrira un second arc de cercle indéfini vers F, qui coupera le premier en un point F, par lequel, et le point donné C, on menera la droite CF qui sera la perpendiculaire demandée.

En effet, si par les points C et F on mène les droites CD et FD au point D, et les droites CE et FE au point E, on aura CD = FD, et CE = EF, comme rayons de mêmes arcs de cercle : les points D et E sont donc à égales distances des extrémités C, F de la droite CF; donc la droite AB est perpendiculaire sur le milieu de CF (n°. 35).

258. *Remarque.* Nous avons vu (n°. 193) que la mesure d'un angle était le nombre de degrés de l'arc de cercle compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre. Pour savoir le nombre des degrés d'un angle, on se sert d'un instrument qu'on appelle *rapporteur*, qui est représenté par la figure 117, et qui consiste, comme on voit, en une demi-circonférence divisée en 180 parties égales, qui sont autant de degrés. Cet instrument se fait en corne ou en cuivre; ceux en corne sont plus commodes, parce que la corne étant transparente, en posant l'instrument sur le papier, on voit les lignes au travers, ce qui permet de mesurer les angles sans compas.

259. PROBLÈME 6. *Un angle étant donné, on demande le nombre des degrés de cet angle.*

On posera le rapporteur de corne sur cet angle, de manière que le centre de l'instrument soit au sommet de l'angle, et qu'un côté de ce dernier coïncide avec le diamètre du rapporteur; le nombre de degrés demandé sera celui auquel l'autre côté de l'angle répondra sous l'instrument.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On conçoit comment, au moyen du rapporteur, on ferait, sur le papier, un angle d'un nombre de degrés donné.

Nous verrons comment on mesure les angles sur le terrain.

260. PROBLÈME 7. *Sur une droite ab* (fig. 118), *faire un angle égal à un angle donné* BAC, *sans en connaître le nombre de degrés.*

Par le point *a* qu'on voudra de la droite *ab*, comme centre, et avec un rayon arbitraire, on décrira un arc de cercle *bc* indéfini; par le sommet A, comme centre, et avec le même rayon *ab*, on décrira l'arc de cercle BC; on fera $bc = BC$; par les points *a* et *c* on menera la droite *ac*, et l'angle *bac* sera l'angle demandé, car les arcs *bc*, BC étant égaux et de même rayon, les angles BAC, *bac* qu'ils mesurent sont égaux (n°. 191).

261. PROBLÈME 8. *Diviser un angle donné* BAC (fig. 119) *en deux parties égales* BAD, DAC *par une droite* AD.

Par le sommet A, comme centre, et avec un rayon arbitraire, on décrira un arc de cercle BC; par les extrémités B et C de cet arc, comme centres, et avec le même rayon, on décrira deux arcs de cercle qui se couperont en un point D, par lequel et le sommet A, de l'angle donné, on menera la droite AD, qui divisera en deux également l'angle donné BAC.

En effet, les points D et A sont évidemment à égales distances des extrémités de la corde BC; donc (n°. 35) la droite AD est perpendiculaire au milieu de la corde BC; donc cette droite AD passe par le milieu de l'arc BC (n°. 175); donc (n°. 191) les angles BAD, DAC sont égaux.

262. PROBLÈME 9. *On donne un angle abc* (fig. 120) *d'un triangle, et les deux côtés* M, N *qui comprennent cet angle; on demande de construire le triangle.*

On menera une droite AB, quelque part qu'on voudra, qu'on fera égale à l'un M des côtés donnés; par l'une A des extrémités de la droite AB, comme sommet, et sur cette droite AB, on fera l'angle $BAC = bac$ (n°. 260); on fera le côté $AC = N$; on joindra les points B et C par la droite BC, et le triangle demandé sera ABC, ce qui est évident d'après le n°. 40.

263. PROBLÈME 10. *On donne un angle bac* (fig. 120) *d'un triangle, un côté* M *adjacent à cet angle, et le côté* N *opposé à ce même angle, et on demande de construire le triangle.*

On fera un angle $BAC = bac$, et le côté AB, de cet angle BAC, égal au côté donné M. Puis, par le point B, comme centre, et avec un rayon égal au second côté donné N, on décrira un arc de cercle CD qui (si le problème est possible) coupera la droite AD en deux points C et D, ou qui sera tangente à cette droite AD. Si l'arc CD coupe la droite AD en deux points C et D,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

comme rien n'indique lequel de ces deux points on doit préférer, par le point B et les points C et D, on menera les droites BC, BD, ce qui donnera les deux triangles ABC, ABD, qui satisferont également à la question. Pour savoir lequel de ces deux triangles il faut prendre, outre les données ci-dessus, il faut, de plus, *qu'on sache si l'angle opposé au côté* AB *doit être aigu ou obtus*. Si cet angle doit être aigu, le triangle demandé sera le triangle ABD, et s'il doit être obtus, le triangle demandé sera le triangle ABC. Dans le cas où l'arc CD est tangent à la droite AD, il n'y a qu'un seul triangle qui satisfasse à la question, et ce triangle unique est rectangle ; car alors la droite BC ou BD est un rayon de l'arc de cercle, qui va au point de contact, et est, par conséquent (n°. 183), perpendiculaire à la tangente AD.

264. PROBLÊME 11. *On donne un côté* M (fig. 121) *d'un triangle, et les deux angles adjacens bac, edf, et on demande de construire le triangle.*

On menera une droite quelconque AB qu'on fera égale au côté donné M ; aux extrémités A et B de cette droite, comme sommet, on fera les angles BAC, ABC respectivement égaux aux angles donnés *bac*, *edf*, et on aura le triangle ABC qui sera le triangle demandé (n°. 39).

265. PROBLÊME 12. *On donne les trois côtés* M, N *et* P (fig. 122) *d'un triangle, et on demande de construire ce triangle.*

On observera que, pour que le problême soit possible, il faut que deux quelconques des côtés donnés pris ensemble soient plus grands que le troisième, car il faut que le chemin brisé ACB ait lieu.

Pour résoudre le problême, on menera une droite quelconque AB, qu'on fera égale à un des côtés donnés M ; par les extrémités A et B de ce côté, comme centres, et avec des rayons respectivement égaux aux deux autres côtés donnés N et P, on décrira des arcs de cercle qui se couperont en un point C, par lequel et les extrémités A et B de la droite AB on menera les droites AC, BC, qui, avec la première AB, formeront le triangle demandé ABC (n°. 43).

266. PROBLÊME 13. *Deux angles d'un triangle étant donnés, trouver le troisième.*

Soient *bac*, *def* (fig. 123) les deux angles donnés ; pour avoir le troisième, on menera une droite AB, quelconque, sur laquelle on décrira une demi-circonférence de cercle, avec un rayon à volonté ; par les sommets des angles donnés *bac*, *def*, comme centres, et avec un rayon égal à celui de la demi-circonférence, on décrira les arcs *bc*, *df* ; on portera le premier *bc* de A en D, et le second *df* de D en E, sur la demi-circonférence ADEB ; par le point E et le centre C on menera le rayon EC, et l'angle ECB sera l'angle demandé. Car, si l'on mène le rayon DC, on aura l'angle ACD = *bac*, et l'angle DCE =

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

def; or, puisque la somme des trois angles d'un triangle est égale à 180°., et que les trois angles ACD, DCE et ECB valent aussi 180°., comme, de plus, les deux premiers de ces trois derniers angles sont les angles donnés, le troisième ECB sera nécessairement le troisième angle du triangle.

267. PROBLÊME 14. *On donne un angle abc* (fig. 124) *d'un parallélogramme, et les deux côtés* M, N *qui comprennent cet angle, et on demande de construire le parallélogramme.*

On fera un angle BAC = *abc*, et on fera les côtés AC, AB de cet angle, respectivement égaux aux côtés donnés M, N; puis, par le point C, comme centre, et avec un rayon égal à N ou AB, on décrira un arc de cercle en D; par le point B, comme centre, et avec un rayon égal à M ou AC, on décrira un second arc de cercle en D, qui coupera le premier au point D, par lequel et les points C et B on menera les droites CD, BD, et on aura le parallélogramme demandé ABDC.

268. PROBLÊME 15. *On donne deux côtés contigus* M, N (fig. 125) *d'un parallélogramme, et la diagonale* O *qui aboutit aux extrémités des côtés donnés; on demande de construire le parallélogramme.*

On menera une droite AB, qu'on fera égale au côté M; par le point A, comme centre, et avec un rayon égal au côté donné N, on décrira un arc de cercle en D; par le point B, comme centre, et avec un rayon égal à la diagonale donnée O, on décrira un second arc en D, qui coupera le premier au point D, auquel on menera la droite AD; par ce point D, comme centre, et avec un rayon égal au côté donné M ou AB, on décrira un arc en C; par le point B, comme centre, et avec un rayon égal aux côtés donnés N ou AD, on décrira un second arc en C, qui coupera le premier au point C, par lequel et les points D et B on menera les droites DC, BC, et on aura le parallélogramme ABCD demandé, ce qui est évident.

269. PROBLÊME 16. *On donne une droite* AB (fig. 126) *et un point* C *hors de cette droite* AB, *et on demande de mener par le point* C, *une droite* CD *parallèle à la droite* AB.

Par le point donné C, comme centre, et avec un rayon arbitraire, on décrira un arc de cercle BD indéfini; par le point B où l'arc DB coupe la droite AB, comme centre, et avec le même rayon, on décrira l'arc de cercle CA; on fera BD = AC, et par le point D et le point donné C on menera la droite CD qui sera parallèle à AB; car les angles alternes-internes BCD, CBA sont égaux (n°. 60).

Remarque 1. On pourrait résoudre ce même problême en faïsant les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

angles alternes-externes égaux, ou les angles correspondans égaux, ou enfin en faisant les angles intérieurs ou extérieurs du même côté de la sécante CB (menée comme on voudra par le point donné C) supplémens l'un de l'autre (voyez les nos. 64, 61 et 66).

Remarque 2. Sans doute chacun de ces moyens est excellent comme théorie, mais pour la pratique ils sont tous beaucoup trop longs, et on aime mieux se servir d'un moyen mécanique, qui est aussi simple que précis, et qui consiste à faire glisser un triangle quelconque *abc* (fig. 127) le long d'une règle AB convenablement placée, ou un T *abcdefg* (fig. 128) le long d'un des bords d'une planche à dessiner ABCD, qui doit être un rectangle le plus parfaitement possible, et les deux branches du T à angle droit, pour qu'on puisse faire glisser ce dernier indifféremment sur l'un des quatre bords de la planche, et donner toujours des lignes parallèles ou perpendiculaires entre elles. Cependant, pour mener des parallèles dans toute sorte de directions, on compose quelquefois la courte branche du T de deux morceaux de bois minces plaqués l'un sur l'autre, mais réunis seulement par un axe autour duquel l'un de ces morceaux de bois peut tourner en glissant sur l'autre qui reste fixe à angle droit sur la grande branche, ainsi qu'on le voit indiqué dans la figure 129.

270. PROBLÈME 17. *On donne une figure plane quelconque abcdefghi* (fig. 130) *et on demande de construire une autre figure* ABCDEFGHI *qui soit parfaitement égale à la première.*

On commencera par mener une droite quelconque $c'g'$ près ou dans la figure *abcdefghi* donnée; puis, par les points les plus remarquables *a*, *b*, *c*, *d*,..... de la figure, on menera des droites bb', cc', dd', ee', etc. parallèles entre elles, mais dans une direction quelconque par rapport à la droite $c'g'$ (qu'on appelle *directrice*), seulement, il faut que ces parallèles rencontrent la directrice $c'g'$, et, quand rien ne s'y oppose, il vaut mieux qu'elles soient à angle droit sur cette directrice. Cela fait, on menera, où l'on voudra, une directrice C′G′ indéfinie; puis on prendra le point C′ à volonté sur cette directrice, et à partir de ce point C′, on fera les distances C′A, C′B′, C′E′, C′F′, etc. respectivement égales aux distances $c'a$, $c'b'$, $c'e'$, $c'f'$, etc.; par les points C′, B′, E′, F′, etc. on menera les droites C′C, B′D, E′E, F′F, etc., de manière qu'elles fassent, avec la directrice C′G′, le même angle que les droites $c'c$, $b'd$, $e'e$, $f'f$, etc., font avec la directrice $c'g'$; ensuite, on fera les hauteurs C′C, B′B, B′D, E′E, F′F, etc., respectivement égales aux hauteurs $c'c$, $b'b$, $b'd$, $e'e$, $f'f$, etc., et, si les points *a*, *b*, *c*, *d*, etc. sont joints par des lignes droites, on joindra de même les points correspondans A, B, C, D, E, etc. par des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

droites, et on aura la figure ABCDEFGHI qui sera parfaitement égale à la figure donnée *abcdefghi*; car, d'après notre construction, il est évident que si l'on superposait ces deux figures, elles coïncideraient dans tous leurs points.

Si les points a, b, c, d, e, f, etc. (fig. 131) étaient réunis par une ligne courbe quelconque, on réunirait de même les points A, B, C, D, E, etc., par une courbe à la main, laquelle serait d'autant plus parfaitement égale à la figure donnée *abcdefghi*, qu'on aurait pris un plus grand nombre de points a, b, c, d, e, f, etc.

271. *Remarque.* On pourrait faire un polygone ABCDEFG (fig. 42) égal à un autre polygone donné *abcdefg*, en décomposant celui-ci en triangles *bcd*, *bde*, *bef*, *bfg* et *bga*, et en construisant, ensuite, une suite de triangles BCD, BDE, BEF, BFG et BGA, respectivement égaux aux premiers : il est clair (n°. 96) que l'ensemble des triangles BCD, BDE, etc. formerait un polygone ABCDEFG qui serait parfaitement égal au polygone donné *abcdefg*.

272. PROBLÈME 18. *On demande* 1°. *le nombre des degrés de la somme des angles intérieurs d'un polygone quelconque dont on connaît le nombre des côtés,* 2°. *le nombre des degrés de chaque angle intérieur des polygones réguliers les plus fréquemment employés dans les arts.*

Nous avons vu (n°. 101) que si n désigne le nombre des côtés d'un polygone quelconque, la somme des angles intérieurs était égale à autant de fois 2 angles droits qu'il y avait d'unités dans $n-2$; mais deux angles droits valent 180°.; le nombre des degrés de la somme des angles intérieurs d'un polygone quelconque sera donc égal à $180^\circ. \times (n-2)$.

1°. Supposons que $n=5$, c'est-à-dire, que le polygone soit un pentagone; la somme demandée sera dans ce cas $180^\circ. \times (5-2) = 180^\circ. \times 3 = 540^\circ.$ Si le pentagone est régulier, les cinq angles seront égaux entre eux, et chacun d'eux sera le 5me. de leur somme 540°.; on aura donc pour l'un de ces angles $\frac{540^\circ.}{5} = 108^\circ.$

2°. Supposons que $n=6$, c'est-à-dire, que ce polygone soit un exagone; on aura pour la somme des 6 angles $180^\circ. \times (6-2) = 180^\circ. \times 4 = 720^\circ.$ Si donc l'exagone est régulier, chacun de ses angles égalera $\frac{720^\circ.}{6} = 120^\circ.$

3°. Supposons que $n=8$, c'est-à-dire, que le polygone soit un octogone; on aura pour la somme des 8 angles $180^\circ. \times (8-2) = 180^\circ. \times 6 = 1080^\circ.$ Si donc l'octogone est régulier, chacun de ses angles égalera $\frac{1080^\circ.}{8} = 135^\circ.$

Ces trois exemples suffisent pour indiquer la marche à suivre pour avoir la mesure des angles intérieurs de tous les polygones qu'on voudra.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

273. *Remarque.* En ne considérant qu'un angle intérieur des polygones réguliers, on remarquera que cet angle augmente à mesure que le nombre des côtés des polygones augmente aussi; car pour le triangle équilatéral, cet angle est de 60°., pour le carré de 90°., pour le pentagone de 108°., pour l'octogone de 135°., etc. Cet angle s'approche donc de plus en plus de 180°. à mesure que le nombre des côtés du polygone augmente; si donc le nombre des côtés est extrêmement grand, cet angle sera extrêmement près de 180°., et enfin il sera égal à 180°. quand le nombre des côtés du polygone sera infini.

274. PROBLÈME 19. *On demande le nombre des degrés de l'un des angles extérieurs d'un polygone régulier.*

Nous avons vu (n°. 106) que la somme de tous les angles extérieurs d'un polygone quelconque était constamment égale à 4 angles droits, et par conséquent à 360°. D'où il suit que, chaque angle extérieur 1°. du triangle équilatéral est égal à $\frac{360°.}{3} = 120°.$; 2°. du carré, est égal à $\frac{360°.}{4} = 90°$; 3°. du pentagone $\frac{360°.}{5} = 72°.$; 4°. de l'exagone $\frac{360}{6} = 60°.$; 5°. de l'octogone $\frac{360°.}{8} = 45°.$; etc. Il est nécessaire de garder ces nombres de degrés dans la mémoire, ainsi que ceux du numéro précédent, parce qu'ils se présentent souvent dans la pratique.

14^me^ LEÇON.

Moyens de trouver des droites proportionnelles à des droites données, de diviser des droites données dans des rapports donnés, de faire des échelles, et des polygones semblables.

275. PROBLÈME 20. *On demande une quatrième proportionnelle à trois droites données* M, N *et* O (fig. 132) *de manière qu'on ait* M : N :: O : x, x *étant la quatrième droite demandée.*

On formera un angle quelconque BAC (fig. 132); on fera le côté AB=M, le côté AC=N, et on menera la droite BC; ensuite, on fera AD=O, et par le point D on menera la droite DE parallèle à BC, et AE = x; car, d'après cette construction et le théorème 56, on a nécessairement AB ou M : AC ou N : AD ou O : AE; donc AE = x.

276. PROBLÈME 21. *On demande une troisième proportionnelle à deux droites données* M, N (fig. 133), *de manière qu'on ait* M : N :: N : x.

Premier procédé. On fera un angle quelconque BAC; on fera le côté

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

AB = M, le côté AC = N, et on menera la droite BC; on fera ensuite AD = N = AC, et par le point D on menera la droite DE parallèle à BC; et AE sera la troisième proportionnelle demandée. En effet, par construction, et d'après le n°. 82, on a AB ou M : AC ou N :: AD ou N : AE; donc AE = x.

Second procédé. On menera une droite indéfini AB (fig. 134), à laquelle on élevera la perpendiculaire BC en un point quelconque B (n°. 254); on fera BA = M, et BC = N; on joindra les points A et C par la droite AC, au milieu de laquelle on menera la perpendiculaire DE (n°. 253) qui rencontrera la droite AB en un point E, par lequel, comme centre, et avec le rayon EA, on décrira une demi-circonférence ADCF qui passera par le point C, et la distance BF sera la troisième proportionnelle demandée; car (n°. 206) AB ou M : BC ou N :: BC : BF.

277. PROBLÈME 22. *On demande une moyenne proportionnelle entre deux droites données* M, N (fig. 135).

Premier procédé. On menera une droite AB quelconque, sur laquelle on fera les distances AD, DB respectivement égales aux droites données M, N; sur la somme AB de ces deux droites, comme diamètre, on décrira une demi-circonférence de cercle ACB; par le point D, où les deux droites données AD, DB se joignent, on élevera une perpendiculaire DC à la droite AB, et cette perpendiculaire DC sera la moyenne proportionnelle demandée; car (n°. 206) on a AD ou M : DC :: DC : DB ou N.

Second procédé. On décrira une demi-circonférence ADB (fig. 136) sur un diamètre AB égal à la plus grande droite donnée M; on fera AC = N; par le point C on élevera la droite CD perpendiculaire au diamètre AB, et on joindra les points A et D par la droite AD, qui sera la moyenne proportionnelle demandée.

Car si l'on mène la corde BD, le triangle ADB sera rectangle, et la droite DC sera la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypothénuse, donc (n°. 151) on aura AB ou M : AD :: AD : AC ou N.

278. PROBLÈME 23, *On demande de diviser la droite* AB (fig. 137) *en deux parties* AD, DB, *telles que l'on ait* AB : AD :: AD : DB, *ou, en d'autres termes, on demande de diviser la droite* AB *en moyenne et extrême raison.* (Voyez alg., n°. 257).

Par l'extrémité B de la droite donnée AB, on élevera une perpendiculaire BC, que l'on fera égale à la moitié de AB; par le point C, comme centre, et avec le rayon CB, on décrira une circonférence de cercle; par l'autre extrémité A de la droite AB, et le centre C, on menera la droite AC, qui cou-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pera la circonférence de cercle au point E ; on fera la distance AD = AE, et le point D divisera la droite donnée AB en deux parties qui donneront AB : AD :: AD : DB, comme l'état de la question l'exige.

En effet, on a (n°. 209) AF : AB :: AB : AE ou AB : AF :: AE : AB. Mais on a aussi AB : AF — AB :: AE : AB — AE. Or, AB = EF, puisque le rayon $BC = \frac{AB}{2}$; donc AF — AB = AE ; et puisque AD = AE, AB — AE = AB — AD = DB ; donc AB : AD :: AD : DB.

279. *Corollaire.* Puisqu'on a AF : AB :: AB : AE, en rabattant les longueurs AF, AE sur la droite AB, prolongée, de manière que AG = AF et AD = AE, on aura AG : AB :: AB : AD. Cette construction pourrait donc servir à résoudre ce problème : *on donne une droite* AB, *et on demande deux points* D *et* G, *sur cette droite ou son prolongement, tels que la droite donnée soit moyenne proportionnelle entre les distances* AG *et* AD.

280. PROBLÈME 24. *Diviser la droite* AB (fig. 138), *en un certain nombre de parties égales, en* 7, *par exemple.*

Par l'une A des extrémités de la droite donnée AB (fig. 138), on menera une droite AC qui fasse un angle quelconque avec AB ; à partir du point A, on portera 7 ouvertures de compas égales entre elles sur la droite AC ; par le 7^me^, point C et l'extrémité B de la droite AB on menera la droite BC, à laquelle, et par les points 1, 2, 3, 4, 5 et 6, on menera les parallèles 11, 22, 33, 44, 55 et 66, et la droite AB sera divisée en 7 parties égales aux points 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Cette solution est une suite immédiate du n°. 80.

281. PROBLÈME 25. *Diviser une droite donnée* AB (fig. 139) *en trois parties qui soient entre elles comme les droites* M, N *et* O.

Par l'une A des extrémités de la droite AB, on menera une droite AC ; à partir du point A, on portera sur la droite AC, les droites données M, N et O les unes à la suite des autres, ce qui donnera les points D, E et C ; on joindra le point C avec la seconde extrémité B de la droite AB par la droite CB ; par les points D et E on menera les droites DF, EG parallèles à CB, lesquelles viendront rencontrer la droite AB aux points F et G, de manière que AD ou M : DE ou N : EC ou O :: AF : FG : GB. (Voyez n°. 83).

282. PROBLÈME 26. *Deux droites* AB, CD (fig. 140) *tendent à se rencontrer en un point* R ; *des points* E, F,..., *sont donnés d'une manière quelconque sur une droite* AC *qui rencontre les droites données* AB, CD ; *on veut par les points* E, F,..., *mener des droites* EG, FH,..., *qui tendent toutes vers le même point* R *que les droites* AB, CD, *et on suppose que le point* R *soit inaccessible.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si l'on supposait le problême résolu, et que la droite BD fût parallèle à AC, on aurait (n°. 83) AE : EF : FC :: BG : GH : HD; si donc on mène la droite BD parallèle à AC, et à une distance quelconque de AC, et que l'on divise celle BD de la même manière que les points E, F,..., divisent la droite AC, ce qui revient au problême précédent, on aura les points G, H,..., par lesquels et les points correspondans E, F,..., on menera les droites EG, FH,..., qui, prolongées, passeront toutes par le point R.

283. PROBLÊME 27. *On demande de diviser la droite* AB (fig. 141), *en trois parties qui soient entre elles comme les carrés des droites données* M, N *et* O.

Sur une droite *ab*, plus grande que la plus grande droite donnée M, comme diamètre, on décrira une demi-circonférence de cercle *acb*; on fera les cordes *ac*, *ad*, *ae*, respectivement égales aux droites données M, N, O; par les points *c*, *d*, *e* on abaissera les droites *ch*, *dg*, *ef* perpendiculaires sur le diamètre *ab*, et on aura $(ac)^2 : (ad)^2 : (ae)^2 :: ah : ag : af$... (1). Car si l'on mène les cordes *bc*, *bd* et *be*, on aura les triangles rectangles *acb*, *adb* et *aeb*, qui donneront (n°. 154) $(ac)^2 = ah \times ab$, $(ad)^2 = ag \times ab$, et $(ae)^2 = af \times ab$; donc la proposition (1) ci-dessus est vraie. Si donc nous divisons la droite donnée AB dans le rapport des droites *ah*, *ag* et *af*, cette droite AB sera divisée en trois parties qui seront entre elles comme les carrés des droites données M, N et O. Ainsi il ne reste donc plus (n°. 281) qu'à mener par le point A une droite quelconque AC; à porter les longueurs *ah*, *ag* et *af* les unes au bout des autres, de A en D, de D en F et de F en G; à joindre les points C et B par la droite CB, et à mener par les points F, D des droites FH, DI parallèles à BC, et le problême sera résolu; de sorte qu'on aura

$$AI : IH : HB :: M^2 : N^2 : O^2.$$

284. *Remarque.* On pourrait demander *de partager la droite* AB *en deux parties qui fussent entre elles comme les carrés des moyennes proportionnelles entre les droites données* M, N, *et* N, O.

Pour résoudre ce problême, après avoir obtenu les moyennes proportionnelles entre M, N, et N, O (n°. 277), on les regardera comme des droites données, et la question se réduira à diviser la droite AB en deux parties qui soient entre elles comme les carrés de ces moyennes proportionnelles, et on la résoudra comme il vient d'être dit.

285. DÉFINITION. On appelle *échelle* une ligne droite d'une longueur quelconque qui est divisée de la même manière que l'unité linéaire que l'on a adoptée parmi toutes celles qui sont en usage. Les parties de l'échelle prennent les mêmes noms que les subdivisions de l'unité dont il s'agit.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ainsi, par exemple, s'il s'agit de la toise, et que la longueur arbitraire de la droite AB (fig. 142) soit l'échelle d'une toise, le 6^{me}. de AB sera celle d'un pied; le 12^{me}. de AC (qui est un pied de l'échelle) sera celle d'un pouce, etc. S'il était question du mètre, et que la droite AB (fig. 143) représentât le mètre, le 10^{me}. de AB représenterait le décimètre, le 10^{me}. de AC (qui est un décimètre) représenterait le centimètre, etc. Suivant le besoin on fait les échelles d'une ou de plusieurs toises, d'un ou de plusieurs mètres.

Une échelle est quelquefois une certaine longueur arbitraire ou dépendante de quelque condition, qui est divisée et subdivisée d'une manière quelconque, et qui n'a aucune relation déterminée avec les mesures ordinaires de longueur. A proportion que nous avancerons, nous verrons l'usage que l'on fait des échelles dans les arts. Pour le moment, nous nous contenterons de dire qu'on ne saurait apporter trop de soin à les faire avec précision.

Lorsque les parties principales d'une échelle sont petites, et qu'il faut les subdiviser en un grand nombre de parties égales, on peut s'y prendre de la manière suivante, pour que chaque subdivision soit appréciable.

Supposons qu'on veuille diviser la longueur AB (fig. 144) en 10 parties égales; par les extrémités A et B de la droite AB, on élevera, à cette dernière, les perpendiculaires AC, BD; on prendra une ouverture de compas à volonté, qu'on portera 10 fois sur chacune des droites AC, BD, à partir des points A et B; par les points 1, 2, 3, etc. on menera des droites qui seront parallèles à AB, et par les points B et C on menera la diagonale BC, qui coupera toutes les parallèles à AB aux points a, b, c, d, e, f, g, h et i, de manière que la distance 1a du point a à la droite BD sera le 10^{me}. de AB; 2b, les deux 10^{mes}. de AB, 3c, les trois 10^{mes}., etc. Cela est assez évident d'après ce qui précède, pour n'avoir pas besoin d'être démontré.

286. PROBLÈME 28. *On demande de faire un triangle abc semblable au triangle* ABC (fig. 145), *sur une droite donnée ab, qui doit être le côté homologue au côté* AB.

Premier procédé. Sur la droite donnée ab, et à chacune de ses extrémités, comme sommet, on fera les angles cab, abc respectivement égaux aux angles CAB, ABC, et on aura le triangle abc semblable au triangle donné ABC, car ces deux triangles ont les trois angles égaux, chacun à chacun (n°. 90).

Second procédé. 1°. On cherchera une quatrième proportionnelle entre ab, AB et AC (n°. 275), c'est-à-dire le quatrième terme de la proportion ab : AB :: AC : x, et $x = ac$; 2°. on cherchera une autre quatrième proportionnelle entre ab, AB et BC, c'est-à-dire le quatrième terme de la proportion ab : AB :: BC : y, et $y = bc$: on aura donc, de cette manière, les trois

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

côtés d'un triangle *abc*, on pourra donc construire ce triangle (n°. 265). Mais les côtés de ce triangle *abc* sont proportionnels à ceux du triangle donné ABC; donc (n°. 91) ce triangle *abc* est semblable à ABC.

Troisième procédé. Supposons que les droites DE, *de* soient deux échelles proportionnelles aux côtés donnés AB, *ab* des triangles ABC, *abc*, et qu'elles soient toutes les deux divisées en un même nombre de parties égales; avec l'échelle DE on mesurera le côté AC, et l'on prendra, pour rayon, autant de parties de l'échelle *de*, que le côté AC contiendra de parties de l'échelle DE, et par le point *a*, comme centre, on décrira un arc de cercle en *c*; on mesurera BC avec l'échelle DE, et on prendra, pour rayon, autant de parties de l'échelle *de*, que le côté BC contiendra de parties de l'échelle DE, et par le point *b*, comme centre, on décrira un arc de cercle en *c*, qui coupera le premier au point *c*, par lequel et les points *a* et *b* on menera les droites *ca*, *cb*, et le triangle *abc* sera semblable à ABC, car ces deux triangles ont visiblement les côtés homologues proportionnels, puisqu'ils sont dans le rapport des deux échelles.

287. PROBLÈME 29. *Faire un polygone semblable à un polygone donné* ABCDEFGH (fig. 146), *sur une droite donnée ab, comme devant être le côté homologue à* AB.

Premier procédé. Puisque (n°. 99) deux polygones sont semblables quand ils sont composés d'un même nombre de triangles semblables, chacun à chacun, et semblablement disposés, on voit de suite qu'en faisant le triangle *abf* semblable au triangle ABF (en employant l'un des procédés du numéro précédent), les triangles *bfe*, *afg*, respectivement semblables aux triangles BFE, AFG; les triangles *bed*, *agh*, respectivement semblables aux triangles BED, AGH, et enfin, le triangle *bcd*, semblable au triangle BCD, on aura le polygone *abcdefgh* semblable au polygone donné ABCDEFGH.

Second procédé. Supposons deux échelles MN, *mn* (fig. 147), proportionnelles aux côtés homologues AB, *ab*, ou supposons qu'au lieu de donner un côté *ab* du polygone demandé, on donne les deux échelles MN, *mn*; on prendra une directrice H′D′, *h′d′*, comme on voudra pour chaque figure; par les points les plus remarquables du polygone donné, on abaissera des perpendiculaires sur la directrice H′D′; sur la directrice *h′d′* on marquera des points *h′*, *a′*, *g′*, *b′*, etc. dont les distances *h′a′*, *h′g′*, *h′b′*, etc., contiennent autant de parties de l'échelle *mn*, que les distances homologues H′A′, H′G′, H′F′, etc. contiennent des parties de l'échelle MN. Puis, par les points *h′*, *a′*, *g′*, *b′*, etc., on élevera les droites *h′h*, *a′a*, *g′g*, *b′b*, etc. perpendiculaires à la directrice *h′d′*; on fera ces perpendiculaires respectivement proportionnelles

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aux homologues H'H, A'A, G'G, etc., au moyen des échelles MN, *mn*, ou autrement, et on aura de cette manière tous les points remarquables de la figure demandée *abcdefgh*. Je laisse au lecteur le plaisir de démontrer lui-même la similitude de ces deux figures.

15^me^. LEÇON.

Problêmes sur la Transformation des Figures planes.

288. PROBLÊME 30. *Transformer un polygone quelconque* ABCDE (fig. 148) *en un triangle équivalent dont le sommet soit au point* D.

Par le point D on menera la diagonale DA ; par le point E, on menera la droite EF, parallèle à la diagonale DA, qui rencontrera le côté BA, prolongé, au point F ; par les points D et F on menera la droite DF, et on aura le triangle ADF qui sera équivalent au triangle ADE, car ces deux triangles ont la même base AD, et la même hauteur, puisque leurs sommets E et F sont sur une même droite EF parallèle à AD ; donc ces deux triangles sont équivalens (n^o^. 127) ; on pourra donc prendre le triangle ADF à la place de ADE sans changer la superficie du polygone donné, lequel deviendra FBCD, et aura un côté de moins. Cela fait, on menera la diagonale DB ; par le point C on menera, à cette diagonale DB, la parallèle CG, qui rencontrera en G le côté AB, prolongé ; par ce point G et le point D on menera la droite DG, et on aura le triangle BDG qui sera équivalent au triangle BDC, comme ayant même base BD, et même hauteur, puisque leurs sommets C et G sont sur une même droite CG parallèle à leur base : on pourra donc prendre le triangle BDG au lieu du triangle BDC, sans altérer la superficie du polygone donné, lequel deviendra enfin le triangle FDG, qui sera celui qu'on demandait.

On conçoit que si le polygone donné avait un plus grand nombre de côtés, en suivant la même marche, on arriverait, de proche en proche, au triangle demandé.

289. *Remarque.* Si le polygone donné était ABCDEFGH (fig. 149), avant de chercher à le transformer en un triangle équivalent, il faudrait faire disparaître ses angles rentrans de la manière qui suit :

Supposons d'abord qu'il s'agisse de faire disparaître l'angle rentrant GFE ; pour cela, on menera la diagonale GE, qui introduira le triangle GFE dans le polygone ; pour que ce dernier ne change pas de superficie, il faudra en retrancher un triangle équivalent à celui GFE qu'on y a introduit ; menons

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donc, par le point F, la droite FI parallèle à la diagonale EG, et par le point I, où la droite FI rencontre un côté GH contigu à la diagonale GE, et le point E, menons la droite EI, qui donnera le triangle GEI équivalent au triangle introduit GEF : à la place de ce dernier on pourra donc, du polygone GEDCBAH, supprimer le triangle GFI, et le polygone donné deviendra IEDCBAH, sans avoir changé de superficie, et aura perdu l'angle rentrant GFE. Pour faire disparaître l'angle rentrant ABC, si la droite *ab*, menée par le point B parallèlement à la diagonale AC, rencontre l'un ou l'autre des côtés CD, AH, adjacens à la diagonale AC, on opérera comme il vient d'être dit; mais comme cette droite *ab* ne rencontre aucun de ces côtés adjacens à la diagonale AC, on s'y prendra de la manière suivante : par l'un D ou H des sommets les plus voisins des points C et A, on menera la droite BH, à laquelle, par le point A, on menera la parallèle A*d*, et on aura introduit en excès le triangle AB*d* dans le polygone donné. Mais si l'on mène la diagonale *d*H, on aura le triangle A*d*H qui sera équivalent au triangle introduit A*d*B; on pourra donc retrancher le triangle A*d*H au lieu du triangle A*d*B, et on aura le polygone *ed*CDEI au lieu du polygone donné. Il nous reste encore un angle rentrant H*d*C à la place de celui ABC que nous avions, mais qui s'enfonce moins que le premier. S'il s'enfonce encore trop, nous opérerons encore comme nous venons de le faire; et s'il y a lieu, nous l'effacerons comme nous avons effacé le premier GFE.

290. PROBLÈME 31. *On donne un triangle* ABC (fig. 150), *et on veut transporter le sommet* C *de ce triangle en un point donné* D, *de sorte que le triangle* ABC *soit changé en un autre équivalent, qui ait une plus grande hauteur, et la base sur celle du triangle donné* ABC.

Par le point donné D, menons les droites DA, DB aux extrémités de la base AB du triangle donné; nous aurons le triangle ADB dont la surface sera plus grande que celle du triangle donné, puisque le point D, par rapport à la base AB, est au-dessus du point C. Pour savoir de combien ces deux triangles diffèrent, par le point C, menons la droite CE parallèle à AB; elle rencontrera la droite AD en un point E, par lequel et le point B si nous menons la droite EB, nous aurons le triangle AEB équivalent au triangle donné ABC; le triangle ADB est donc plus grand qu'il ne faut de tout le triangle BED; en conséquence, menons par le point E une droite EF parallèle à BD, et par le point F, où la droite EF rencontre la base AB, et le point D, menons la droite FD, et le triangle BFD sera équivalent au triangle BED; si donc du triangle ADB nous retranchons le triangle BFD, il nous restera le triangle ADF qui sera le triangle demandé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

291. PROBLÊME 32. *On donne encore un triangle* ABC (fig. 151) *et on veut transporter le sommet de ce triangle en un point donné* D, *de sorte que le triangle* ABC *soit changé en un autre équivalent, mais qui ait une hauteur moindre, et la base sur celle* AB *du triangle donné* ABC.

Par le point donné D, on menera, comme dans le problême précédent, les droites DA, DB aux extrémités de la base AB du triangle ABC, et on aura le triangle ADB qui sera trop petit, puisqu'il a une hauteur moindre que celle du triangle donné ABC. Pour savoir de combien le triangle ADB est trop petit, on prolongera le côté AD jusqu'à ce qu'il rencontre en E la droite CE parallèle à la base AB; par les points E et B, on menera la droite EB, et le triangle BDE sera ce qui manque au triangle ABD pour être équivalent à ABC. Mais si par le point E on mène la droite EF parallèle à DB, et par les points D et F la droite DF, on aura le triangle BDF équivalent à BDE, comme ayant même base et même hauteur; donc, si au triangle ABD on ajoute le triangle BDF, on aura le triangle ADF qui sera équivalent au triangle donné ABC.

292. *Corollaire* 1. Les deux problêmes précédens peuvent donc servir à élever ou à abaisser le sommet d'un triangle autant qu'on voudra, sans changer la superficie de ce triangle; on pourra donc mettre plusieurs triangles à la même hauteur; ce qui peut servir à faire un triangle égal à la somme de plusieurs triangles donnés comme on voudra, ou égal à la différence de deux triangles quelconques. Car dès que les triangles donnés seront soumis à la même hauteur, on n'aura qu'à construire un triangle de même hauteur, et d'une base égale à la somme des bases de ces triangles, ou à la différence des bases des deux triangles dont on voudra avoir la différence.

293. *Corollaire* 2. Comme on peut transformer un polygone en un triangle équivalent, il suit, de ce qui précède, qu'on pourra faire la somme de plusieurs polygones donnés quelconques, ou la différence de deux polygones aussi quelconques.

294. PROBLÊME 33. *On donne un rectangle* ABCD (fig. 152), *et la base ab d'un autre rectangle abcd équivalent au premier; on demande la hauteur de ce second rectangle.*

Appelons x la hauteur demandée; la superficie du rectangle *abcd* sera (n°. 132) $x \times ab$, et celle du rectangle donné ABCD sera AB × AD; mais ces deux rectangles doivent être équivalens; on aura donc $x \times ab = AB \times AD$, d'où $ab : AB :: AD : x$; de sorte que la hauteur *ad* du rectangle demandé *abcd* sera une quatrième proportionnelle à la base *ab* du même rectangle, à la base AB et à la hauteur AD du rectangle donné ABCD. Par conséquent,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le problême se réduit à celui du n°. 274. Ainsi en portant la base *ab* de A en E, et par le point D en menant la droite DF parallèle à celle EB menée par les points B et E, on aura AF pour la hauteur demandée *ad*.

295. *Corollaire.* Si l'on voulait que le rectangle *abcd* fût un certain nombre *n* de fois plus grand ou plus petit que le rectangle donné ABCD, on aurait l'équation $x \times ab = n \times AB \times AD$ ou la proportion $ab : n \times AB :: AD : x$, pour le cas où le rectangle demandé devrait être un certain nombre de fois plus grand que le donné, et alors on voit *que la hauteur demandée serait une quatrième proportionnelle à la base donnée, à n fois celle du rectangle donné, et à la hauteur de ce dernier rectangle.* Pour le cas où le rectangle demandé doit être plus petit, on aurait $x \times ab = \frac{AB}{n} \times AD$, ou $ab : \frac{AB}{n} :: AD : x$; d'où l'on voit *que la hauteur demandée serait une quatrième proportionnelle à la base donnée, à celle du rectangle donné divisée par n, et à la hauteur de ce rectangle donné.*

296. PROBLÊME 34. *On donne un rectangle* ABCD (fig. 152), *et on veut construire un carré équivalent.*

Soit x le côté du carré demandé; sa superficie sera x^2; et celle du rectangle $ABCD = AB \times AD$; or, le carré doit être équivalent au rectangle; donc $x^2 = AB \times AD$, d'où $AB : x :: x : AD$; *c'est-à-dire que pour avoir le côté du carré, il faudra chercher une moyenne proportionnelle entre la base et la hauteur du rectangle, ce qu'on fera comme il a été dit au n°. 277.*

297. *Corollaire* 1. Si le carré devait être *n* fois plus grand que le rectangle on aurait $x^2 = n \times AB \times AD$, d'où $n \times AB : x :: x : AD$; *c'est-à-dire que pour avoir le côté du carré, il faudrait, dans ce cas, chercher une moyenne proportionnelle entre n fois la base et la hauteur ou entre la base et n fois la hauteur du rectangle donné.*

298. *Corollaire* 2. Si le carré devait être *n* fois plus petit que le rectangle, on aurait $nx^2 = AB \times AD$, ou $x^2 = \frac{AB}{n} \times AD$, d'où $\frac{AB}{n} : x :: x : AD$; de sorte que, *pour avoir le côté du carré, il faudrait chercher une moyenne proportionnelle entre la n^{me}. partie de la base et la hauteur, ou entre la base et la n^{me}. partie de la hauteur du rectangle.*

299. *Remarque.* Si au lieu d'un rectangle on donnait un parallélogramme, on conçoit que rien ne changerait dans la solution du problême; mais que si l'on donnait un triangle, il ne faudrait prendre que la moitié de la hauteur ou que la moitié de la base.

300. PROBLÊME 35. *Sur une droite donnée comme base, on demande de construire un rectangle équivalent à un carré donné.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Appelons a le côté du carré donné, b la base donnée du rectangle, et x sa hauteur; on aura $bx = a^2$; d'où $b : a :: a : x$; de sorte que, *pour avoir la hauteur du rectangle, il faudra chercher une troisième proportionnelle à la base de ce rectangle et au côté du carré donné; ce qu'on fera comme il a été dit au n°. 276.*

301. *Corollaire* 1. Si au lieu d'égaler le carré, le rectangle devait être n fois plus grand que ce carré, on aurait $bx = na^2$; d'où $b : na :: a : x$, et alors *pour avoir la hauteur du rectangle, il faudrait chercher une quatrième proportionnelle à la base du rectangle, à n fois le côté du carré, et à une fois ce même côté.*

302. *Corollaire* 2. Si au contraire le rectangle devait être n fois plus petit que le carré, on aurait $nbx = a^2$, d'où $nb : a :: a : x$, et dans ce cas *il faudrait chercher une troisième proportionnelle à n fois la base du rectangle et au côté du carré, pour avoir la hauteur du rectangle.*

303. PROBLÈME 36. *On veut construire un rectangle, dont on connaît la somme de la base et de la hauteur, qui soit équivalent à un carré donné.*

D'après l'état de la question, on voit qu'il s'agit ici de partager la somme donnée de la base et de la hauteur du rectangle demandé, en deux segmens dont le produit soit équivalent à la 2me. puissance du côté du carré donné; or (n°. 206), toute perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence du cercle sur le diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segmens du diamètre, si donc la droite AB (fig. 153) est la somme de la base et de la hauteur du rectangle demandé, que sur cette droite AB, comme diamètre, on décrive une demi-circonférence de cercle, et que parallèlement à ce diamètre AB, et à une distance égale au côté du carré donné, on mène la droite CD, cette droite CD rencontrera la demi-circonférence en deux points C et D tels, que si par l'un C de ces points on abaisse la droite CE perpendiculaire à AB, le pied E de cette perpendiculaire partagera la droite AB en deux segmens AE, EB, dont l'un sera la hauteur et l'autre la base du rectangle demandé; car $AE \times EB = (EC)^2$; or, EC est le côté du carré; donc, etc.

Remarque. Le problème serait impossible si la moitié de la droite AB était plus petite que le côté du carré; car alors la droite CD ne rencontrerait point la demi-circonférence. Cela s'accorde avec ce qui a été dit en algèbre au n°. 268, où il a été démontré qu'il n'était pas possible de partager un nombre donné en deux parties dont le produit devait être plus grand que le carré de la moitié de ce nombre à partager.

304. *Corollaire* 1. Si le rectangle demandé devait être n fois plus grand que le carré, on chercherait d'abord une moyenne proportionnelle entre n fois

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le côté de ce carré et une fois ce même côté, laquelle moyenne proportionnelle serait évidemment le côté d'un carré n fois plus grand que le carré donné, et ensuite, on opérerait comme ci-dessus, en regardant le nouveau carré comme étant le carré donné.

305. *Corollaire* 2. Si le rectangle demandé devait être n fois plus petit que le carré donné, on chercherait d'abord une moyenne proportionnelle entre la n^{me}. partie du côté du carré donné et ce côté tout entier, laquelle moyenne proportionnelle serait évidemment le côté d'un carré n fois plus petit que le carré donné ; et ensuite on opérerait comme ci-dessus.

306. PROBLÊME 37. *On donne la différence entre la base et la hauteur d'un rectangle équivalent à un carré donné, et on demande de construire ce rectangle.*

Soit la droite AB (fig. 154) la différence entre la base et la hauteur du rectangle demandé ; sur cette droite comme diamètre, décrivons une circonférence de cercle AED ; par le point A, extrémité de AB, élevons une perpendiculaire AC à la droite AB (cette droite AC sera tangente au cercle (n°. 184)) ; faisons AC égal au côté du carré donné, et par le point C et le centre O du cercle, menons la droite CD : cette droite CD sera la base, et sa partie extérieure CE sera la hauteur du rectangle demandé ; car 1°. CD—CE $=$ ED $=$ AB, ce qui fait voir que la différence des droites CD et CE est égale à la droite donnée AB, et 2°. CD $\times$ CE $=$ $(AC)^2$ (n°. 209) ; donc, etc.

Remarque. Si le rectangle demandé devait être un certain nombre de fois plus grand ou plus petit que le carré donné, on chercherait d'abord un carré le même nombre de fois plus grand ou plus petit que le carré donné, et ensuite on opérerait sur ce nouveau carré comme il vient d'être dit.

307. PROBLÊME 38. *On demande un carré égal à la somme de deux carrés donnés* ABCD, EFGH (fig. 155).

Puisque (n°. 152) le carré fait sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés faits sur les côtés de l'angle droit, il est clair que pour résoudre le problême dont il s'agit, il suffira de faire un angle droit cab ; de faire les côtés ab, ac de cet angle droit, respectivement égaux aux côtés des carrés donnés, et de joindre ensuite les points c et b par la droite cb qui, étant l'hypothénuse du triangle rectangle abc, sera le côté du carré demandé.

308. PROBLÊME 39. *On demande un carré égal à la différence de deux carrés donnés* ABCD, EFGH (fig. 155).

On fera un angle droit bac, puis, on fera le côté ac $=$ EF ; par le point c, comme centre, et avec un rayon égal à AB, on décrira un arc de cercle qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

coupera le côté ab au point b, et le côté ab, du triangle rectangle abc qu'on obtiendra en menant la droite cb, sera celui du carré demandé, car (n°. 153), on a $(bc)^2-(ac)^2=(ab)^2$, ou $(AB)^2-(EF)^2=(ab)^2$.

309. *Corollaire.* En vertu du théorème 87 (n°. 155), si l'on donnait deux figures semblables quelconques, et que l'on demandât une troisième figure semblable qui fût égale à la somme ou à la différence des deux premières, on opérerait sur les côtés homologues des figures données, comme on l'a dit sur les côtés des carrés donnés, dans les deux problèmes précédens, et on aurait le côté homologue de la figure demandée, sur lequel, comme il a été dit au n°. 287, on construirait cette figure demandée.

310. PROBLÈME 40. *On demande un carré qui soit à un carré donné,* ABCD (fig. 156), *comme les lignes* M *et* N.

On menera une droite ab quelconque, sur laquelle on fera les distances ac, cb respectivement égales aux droites données M, N; sur la somme ab de ces deux distances, comme diamètre, on décrira une demi-circonférence adb; par le point c on élevera la droite cd perpendiculaire à ab, et par le point d, où la droite cd rencontre la demi-circonférence, on menera les droites da, db aux extrémités du diamètre ab, et on aura le triangle rectangle adb qui donnera $(ad)^2 : (db)^2 :: ac : cb$, ou, à cause que $ac=$ M, et $cb=$ N, $(ad)^2 : (db)^2 :: M : N$..... (1).

Si maintenant on fait $de=$ AB, et que par le point e on mène ef parallèle à ab, on aura $ad : db :: ed : df$, et, par conséquent, $(ad)^2 : (db)^2 :: (ed)^2 : (df)^2$; en vertu de la proportion (1) on aura donc $(ed)^2 : (df)^2 :: M : N$. Mais $ed=$ AB; donc df sera le côté du carré demandé.

311. *Corollaire.* Attendu que les figures semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues, si l'on donnait une figure quelconque, et que l'on demandât une figure semblable, telle que la figure donnée fût à la demandée :: M : N, on prendrait l'un quelconque des côtés de la figure donnée, et l'on chercherait le côté homologue de la figure demandée, en opérant parfaitement de la même manière que nous venons de dire pour trouver le côté du carré demandé dans le problème précédent, et ensuite, sur ce côté, on construirait la figure demandée comme il a été dit au n°. 287.

Je laisse au lecteur le plaisir de résoudre, par le calcul, tous les problèmes qui se trouvent dans cette leçon, en supposant que les superficies des figures soient données en nombres.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

16^me^. LEÇON.

Moyens de décrire des Polygones réguliers, de calculer le rapport approché du diamètre à la circonférence du cercle, et de mesurer la superficie des Figures planes quelconques.

312. PROBLÈME 41. *On donne un cercle abcd* (fig. 157), *et on demande d'inscrire et de circonscrire un carré abcd*, ABCD *à ce cercle.*

1°. Pour décrire le carré inscrit, on menera deux diamètres *ac*, *db*, perpendiculaires l'un à l'autre, et on joindra les extrémités de ces diamètres par les droites *ab*, *bc*, *cd* et *da*, qui seront les côtés du carré demandé; ce qui est évident.

2°. Pour décrire le carré circonscrit ABCD, on menera de même deux diamètres *ac*, *bd*, perpendiculaires entre eux, et aux extrémités de ces diamètres on menera, au cercle, les tangentes AB, BC, CD et DA, qui seront evidemment les côtés du carré demandé.

313. *Corollaire.* Si l'on voulait inscrire ou circonscrire un octogone, après avoir mené les diamètres *ac*, *bd* perpendiculaires entre eux, on diviserait chacun des arcs *ab*, *bc*, *cd* et *da* en deux parties égales (n°. 261) et par les points de divisions on menerait des cordes qui seraient les côtés de l'octogone inscrit, ou on menerait des tangentes qui seraient les côtés de l'octogone circonscrit. On conçoit que de l'octogone on passerait aux polygones de 16, 32, 64, 128, etc. côtés, soit inscrits, soit circonscrits, en divisant en deux parties égales les arcs de cercle qui répondent aux côtés de l'octogone, ces nouveaux arcs en deux parties égales, et ainsi de suite, aussi loin qu'on le voudra, et en menant des cordes par les points de divisions pour les polygones inscrits, et des tangentes pour les circonscrits.

Remarque. Puisque lorsque l'on connaît les sommets des polygones réguliers inscrits, on a les polygones circonscrits semblables, en menant des tangentes aux cercles par tous ces sommets, dorénavant nous ne parlerons que des inscrits, afin d'abréger.

314. PROBLÈME 42. *Inscrire un exagone dans un cercle donné* (fig. 102).

Ayant démontré (n°. 224) que le côté de l'exagone inscrit était égal au rayon, on voit évidemment ce qu'il y a à faire pour inscrire un exagone à un cercle donné.

315. *Corollaire* 1. Il est clair que, si l'on mène les droites AE, EC et AC (fig. 102) qui soutendent des arcs doubles de ceux soutendus par les côtés de l'exa-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

gone, ces droites AE, EC et AC seront les côtés du triangle équilatéral inscrit.

316. *Corollaire* 2. Il est clair aussi que, si l'on divise les arcs soutendus par les côtés de l'exagone en deux parties égales, ces nouveaux arcs en deux parties égales, et ainsi de suite, on aura les polygones inscrits de 12, 24, 48, 96, etc. côtés.

317. PROBLÈME 43. *Inscrire un décagone régulier dans un cercle donné.*

Pour cela, on divisera le rayon AB du cercle (fig. 158) en moyenne et extrême raison (n°. 278), et soit D le point de division, de manière qu'on ait AB : AD :: AD : DB; la partie moyenne AD sera le côté du décagone.

En effet, faisons BC = AD, menons le rayon AC, et la droite CD au point D : je dis que les triangles ABC, DBC seront semblables. Car la proportion AB : AD :: AD : DB devient AB : BC :: BC : DB, à cause que BC = AD; donc les deux triangles ABC, DBC ont deux côtés proportionnels, mais l'angle compris par ces côtés est commun aux deux triangles; donc ces deux triangles sont semblables. Or, le triangle ABC est isocèle; donc DBC est aussi isocèle; donc DC = BC, mais BC = AD; d'où il suit que DC = AD; donc l'angle ACD = CAB = DCB. Ainsi la droite DC divise l'angle ACB en deux parties égales entre elles et à l'angle CAB. L'angle ACB égale donc 2CAB; l'angle ABC = ACB sera donc aussi égal à 2CAB; la somme des trois angles du triangle ABC sera donc CAB + 2CAB + 2CAB = 5CAB. Or, les trois angles d'un triangle valent 180°., on aura donc 5CAB = 180°.; doublons les deux membres de cette égalité, et nous aurons 10CAB = 360°., d'où $CAB = \frac{360°.}{10}$; l'angle CAB est donc le 10^me^. de quatre angles droits; et par conséquent la droite BC sera le côté du décagone.

318. *Corollaire* 1. Il est clair que la droite BE qui soutend un arc double de celui soutendu par le côté du décagone sera le côté du pentagone.

319. *Corollaire* 2. Supposons que les droites BE, BF soient les côtés, la première du pentagone, et la seconde de l'exagone; l'arc EF sera la différence entre le 5^me^. et le 6^me^. de la circonférence entière, de sorte que $EF = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{6-5}{30} = \frac{1}{30}$. Ainsi la corde de l'arc EF sera le côté du polygone régulier inscrit de 30 côtés. Il suit donc de là que l'arc EF est le tiers de EC, et par conséquent la moitié de CF qui sera le 15^me^. de la circonférence entière.

320. *Corollaire* 3. En subdivisant en deux parties égales les arcs soutendus par les côtés du décagone et du polygone de 15 côtés, on aura deux suites de polygones dont les nombres des côtés seront 1°. 10, 20, 40, 80, 160, etc., et 2°. 15, 30, 60, 120, 240, 480, etc.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

321. *Remarque.* Les géomètres n'ont point encore découvert des moyens de décrire les polygones réguliers de 7, 11, 13, 17, etc. côtés, en n'employant que les principes de la géométrie élémentaire ; de sorte que ce qui précède est tout ce qu'on sait sur ce sujet. Heureusement que dans la pratique on peut inscrire un polygone régulier quelconque dans un cercle, en divisant, par tâtonnemens, la circonférence en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés.

322. PROBLÈME 44. *On donne la superficie d'un polygone régulier inscrit à un cercle, et celle d'un polygone circonscrit à ce même cercle, semblable au premier ; on demande les superficies de deux autres polygones réguliers, l'un inscrit, et l'autre circonscrit au même cercle, mais d'un nombre de côtés double.*

Supposons que la droite AB (fig. 159) soit un côté du polygone inscrit donné ; que la droite CD parallèle à AB soit le côté du polygone circonscrit semblable au premier ; par le centre I du cercle, abaissons le rayon IE perpendiculaire sur le côté AB ; menons, ensuite, les tangentes AG, BH, et les droites AE, BE, IH et GI : 1°. le triangle AEI sera un des triangles entiers répondans aux côtés AE, EB..... du polygone inscrit d'un nombre de côtés double, et les triangles AFI, IFB seront les moitiés d'un des triangles ABI répondans aux côtés du polygone inscrit primitif : le rapport des triangles AFI, AEI sera donc le même que celui des polygones dont les triangles AFI, AEI sont respectivement des fractions semblables. Ainsi, si a est la superficie du polygone inscrit primitif, et x le polygone inscrit d'un nombre de côté double, on aura $a : x :: \text{AFI} : \text{AEI}$..... (1) ; 2°. le triangle GIH sera un des triangles répondans aux côtés du polygone circonscrit d'un nombre de côtés double, et le triangle CEI sera la moitié de l'un CID des triangles répondans aux côtés du polygone circonscrit primitif : le rapport des triangles CEI, GIH sera donc le même que celui des polygones dont ces triangles sont respectivement des fractions semblables : si donc b est la superficie du polygone circonscrit primitif, et y celle du polygone circonscrit d'un nombre de côtés double, on aura $b : y :: \text{CEI} : \text{GIH}$; mais $\text{GIH} = 2\text{GIE}$; donc $b : y :: \text{CEI} : 2\text{GIE}$, ou $b : \frac{1}{2}y :: \text{CEI} : \text{GIE}$..... (2).

Cela posé, observons que les triangles AFI, AEI, ayant leurs bases sur la même droite IE et leur sommet au même point A, ont même hauteur, et sont entre eux comme leurs bases (n°. 130) ; de sorte qu'on aura $\text{AFI} : \text{AEI} :: \text{IF} : \text{IE}$; cette proportion et la proportion (1) ont donc le rapport commun $\text{AFI} : \text{AEI}$; donc $a : x :: \text{IF} : \text{IE}$... (3). Observons, de plus, que les triangles AEI, CEI, ont leurs bases sur la droite CI et leur sommet au même point

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

E, et qu'ils ont; par conséquent, la même hauteur; ils seront donc comme leurs bases, et nous aurons AEI : CEI :: IA : IC. Mais ces triangles AEI, CEI, sont des fractions semblables des polygones dont ils font parties; le second fait partie du polygone circonscrit primitif, et le premier du polygone inscrit d'un nombre de côtés double; on aura donc AEI : CEI :: x : b, et par conséquent x : b :: IA : IC..... (4). Les parallèles AF, CE donnent IF : IE :: IA : IC; les second rapports des proportions (3) et (4) formant une proportion, les deux premiers formeront aussi une proportion, et on aura $a : x :: x : b$; d'où $x^2 = ab$, ou $x = \sqrt{ab}$. *Ainsi, la superficie du polygone inscrit d'un nombre de côtés double est égale à la racine carrée du produit des superficies des deux polygones primitifs.*

Voyons quelle est la valeur de la superficie du polygone circonscrit d'un nombre de côtés double.

Pour cela, observons que les triangles CIG, GIE ont la même hauteur, et qu'ils sont, par conséquent, entre eux comme leurs bases; c'est-à-dire qu'on aura CIG : GIE :: CG : GE; mais la droite GI divise en deux parties égales l'angle CIE; on aura donc (n°. 87) CG : GE :: CI : IE, et par conséquent CIG : GIE :: CI : IE; d'où CIG + GIE ou CIE : GIE :: CI + IE : IE ou, en vertu de la proportion (2), $b : \frac{1}{2}y ::$ CI + IE : IE..... (5). La proportion (3) peut se changer en celle-ci $a : x ::$ IA : IC, à cause que IF : IE :: IA : IC, et comme IA = IE, on aura enfin $a : x ::$ IE : IC; d'où $a + x : a ::$ IE + IC : IE : mais cette dernière proportion a un rapport commun avec la proportion (5); nous aurons donc $b : \frac{1}{2}y :: a + x : a$, ou $2b : y :: a + x : a$, d'où nous tirerons $y = \frac{2ab}{a+x}$; c'est-à-dire que, *la superficie du polygone circonscrit d'un nombre de côtés double est égale à 2 fois le produit des deux polygones primitifs, divisé par la somme du polygone inscrit primitif, et du polygone inscrit d'un nombre de côtés double.*

323. PROBLÈME 45. *On demande de trouver le rapport approché du diamètre à la circonférence d'un cercle quelconque.*

Supposons que le cercle donné (fig. 157) ait 2 unités de diamètre, et par conséquent une unité de rayon; le carré circonscrit ABCD sera 4, ce qui est évident, et le carré inscrit *abcd* sera 2. Car le côté *ab* de ce carré est l'hypothénuse d'un triangle rectangle *a*I*b* dont les côtés *a*I, I*b* sont tous les deux égaux à l'unité; et (n°. 152) la somme des carrés des côtés *a*I, I*b*, qui est 2, est égale au carré de l'hypothénuse *ab*, qui est le côté du carré inscrit.

Cela posé, si, dans l'équation $x = \sqrt{ab}$ (n°. 322), nous mettons 4 au lieu de b et 2 au lieu de a, nous aurons $x = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{8} = 2{,}8284271$ pour la superficie

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'un octogone inscrit dans le même cercle. Mettons 4 au lieu de b, 2 au lieu de a, et 2,8284271 au lieu de x dans l'équation $y=\frac{2ab}{a+x}$ (n°.322) et nous aurons $y=\frac{2\times2\times4}{2+2,8284271}=\frac{16}{4,8284271}=3,3137085$ pour la superficie d'un octogone circonscrit au même cercle.

Si maintenant on représente par a la superficie de l'octogone inscrit, et par b celle de l'octogone circonscrit, et qu'on opère comme ci-dessus sur les équations $x=\sqrt{ab}$ et $y=\frac{2ab}{a+x}$, en mettant pour a et pour b leurs nouvelles valeurs, on parviendra à la superficie d'un polygone inscrit de 16 côtés, et à celle d'un polygone circonscrit d'un pareil nombre de côtés; ces deux nouveaux polygones conduiront à deux autres polygones de 32 côtés, l'un inscrit et l'autre circonscrit au même cercle, et on continuera de la même manière à passer des deux derniers polygones obtenus, à deux autres polygones d'un nombre de côtés double, jusqu'à ce que les superficies des deux derniers polygones obtenus, l'un inscrit et l'autre circonscrit, diffèrent aussi peu qu'on voudra. Alors, on ajoutera ces deux superficies, on prendra la moitié de la somme, et on regardera cette demi-somme comme la superficie du cercle de 2 unités de diamètre, laquelle sera à très-peu de chose près 3,1415926. (Voyez le tableau de ces opérations, page 126 de la géométrie de M. Legendre, 7^{me}. édition, 1808.)

Puisque la superficie d'un cercle de 2 unités de diamètres est à peu de chose près égale à 3,1415926, et que la superficie d'un cercle en général est (n°. 228) égale à la circonférence multipliée par la moitié du rayon, il est clair que la circonférence du cercle de 2 unités de diamètre sera égale à la superficie 3,1415926 divisée par $\frac{1}{2}$; mais diviser un nombre par $\frac{1}{2}$ c'est le multiplier par 2; ainsi la circonférence du cercle de 2 unités de diamètre sera $2\times3,1415926$. Or, les circonférences des cercles sont entre elles comme les diamètres (n°. 231); si donc un cercle n'avait qu'une unité de diamètre, sa circonférence ne serait que la moitié de celle d'un cercle de 2 unités de diamètre; mais cette dernière $=2\times3,1415926$; donc celle d'une unité de diamètre sera 3,1415926. Tel est le rapport approché du diamètre à la circonférence d'un cercle. Au moyen de ce rapport, *qu'il faut absolument retenir dans la mémoire,* on aura la circonférence d'un cercle quelconque en multipliant ce rapport 3,1415926 par le diamètre de ce cercle quelconque.

Remarque. Dans les calculs de théorie, nous représenterons toujours ce rapport par p, comme nous en sommes convenus au n°. 229, mais dans tous les calculs de pratique, partout où l'on trouvera p et qu'il s'agira de la circonférence ou de la superficie d'un cercle, il faudra y substituer le nombre 3,1415926.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ainsi, en se rappelant les formules des nos. 230 jusqu'à 240, on aura sans peine, 1°. la longueur de la circonférence d'un cercle dont on connaîtra le rayon; 2°. celle d'un arc de cercle d'un nombre de degrés donné et d'un rayon donné; 3°. la superficie entière d'un cercle donné par son rayon, ou celle d'un secteur d'un nombre de degrés donné, etc.; pour cela, il suffira de mettre au lieu de p, le nombre 3,1415926 dans les formules $2p\mathrm{R}$, $\frac{np\mathrm{R}}{180}$, $p\mathrm{R}^2$ et $\frac{np\mathrm{R}^2}{360}$, etc.; il est donc inutile que nous nous appesantissions sur des calculs aussi simples.

324. *Remarque.* Il y a plusieurs autres moyens pour trouver le rapport approché du diamètre à la circonférence; mais nous nous contenterons de celui que nous venons de donner, qui est peut être le plus ingénieux que l'on ait imaginé, en ce que les calculs qu'il exige sont faciles à exécuter, et qu'on peut juger d'un coup-d'œil du degré d'approximation auquel on est parvenu à chaque opération.

Plusieurs géomètres se sont occupés de calculer ce rapport : Archimède, par exemple, a trouvé que ce rapport était à peu près $\frac{22}{7}$, c'est-à-dire qu'un diamètre de 7 unités donnait une circonférence de 22 unités; Métius a trouvé le rapport $\frac{355}{113}$ un peu plus exact que celui d'Archimède, mais moins exact que celui que nous avons trouvé plus haut; et enfin, Séguin, architecte, a trouvé $\frac{1521}{484}$. Mais il est inutile de se surcharger la mémoire de tous ces rapports, par la raison que si l'on développe en décimale les fractions qui les expriment, on trouvera toujours le nombre 3,1415926 d'autant plus parfaitement que le rapport qu'on voudra vérifier sera plus exact, ce dont on peut se rendre compte en se donnant la peine de faire ces développemens. D'ailleurs, le rapport 3,1415926 a l'avantage de dispenser de faire de division pour avoir la circonférence d'un cercle, ce que les autres rapports exigent.

325. PROBLÈME 46. *On demande la superficie d'un polygone quelconque* ABCDEFGH (fig. 160), *mais, ne pouvant entrer dedans, on ne peut le décomposer en triangles comme dans le n°.* 135.

Dans ce cas, on circonscrira un rectangle ou un trapèze *abcd* au polygone donné, de manière que deux côtés *ad*, *bc* soient perpendiculaires à un troisième côté *ab*, dans le cas du trapèze. Cela fait, par les sommets du polygone donné, on abaissera des perpendiculaires sur les côtés du rectangle ou trapèze *abcd*, ainsi qu'on le voit dans la figure, et on prendra ensuite les superficies des trapèzes *e*AB*f*, *f*BC*g*, C*hi*D, D*ik*E, E*lm*F, F*mn*G, *o*GH*p*, *p*HA*q*, ainsi que celles des rectangles *ae*A*q*, *g*C*hb*, et des rectangles ou quadrilatères

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ekcl, *nGod*; on ajoutera toutes ces superficies entre elles, et on en retranchera la somme de la superficie du rectangle ou trapèze *abcd*; le reste sera évidemment la superficie demandée.

326. PROBLÈME 47. *Une droite* AB (fig. 161) *joint les extrémités d'une courbe quelconque* A*m*B, *et on demande la superficie du segment formé par ces deux lignes.*

Pour avoir cette superficie le plus exactement et le plus promptement possible, on divisera la droite AB en un assez grand nombre de parties égales, pour qu'après avoir élevé, à la droite AB, les perpendiculaires *ao*, *bn*, *cm*, *dl*, etc., par les points de division, les parties de courbe A*o*, *on*, *nm*, *ml*, etc. puissent être regardées comme des lignes droites sans erreur sensible. De cette manière, le segment sera décomposé en deux triangles A*ao*, *gh*B aux extrémités, et en un certain nombre de trapèzes. Puis, on observera que les distances A*a*, *ab*, *bc*, *cd*, etc. étant égales entre elles, on aura les superficies $Aao = Aa \times \frac{ao}{2}$, $aonb = Aa \times \frac{ao+bn}{2}$, $bnmc = Aa \times \frac{bn+cm}{2}$, $cmld = Aa \times \frac{cm+dl}{2}$, $dlke = Aa \times \frac{dl+ek}{2}$, $ekif = Aa \times \frac{ek+fi}{2}$, $fihg = Aa \times \frac{fi+gh}{2}$, et $ghB = Aa \times \frac{gh}{2}$, et leur somme $AmB = Aa\,(ao + bn + cm + dl + ek + fi + gh)$..... (1), toutes réductions faites; *d'où l'on voit que la superficie demandée est égale à la distance commune entre les perpendiculaires à la droite* AB, *multipliée par la somme de toutes ces perpendiculaires.*

327. *Corollaire* 1. Si la distance A*a*, commune entre les perpendiculaires à la droite AB, était égale à l'unité linéaire, la superficie du segment A*m*B serait alors égale à la somme des perpendiculaires à la droite AB; ce qui indique de faire autant que possible la distance A*a* égale à l'unité linéaire, puisqu'alors on n'a pas besoin de faire de multiplication pour avoir la superficie demandée.

328. *Corollaire* 2. Si la droite AB n'aboutissait pas aux deux extrémités de la courbe A*m*B, si, par exemple, la courbe s'arrêtait au point *o*, alors le triangle A*ao* manquerait, et dans la formule (1) ci-dessus, la perpendiculaire *ao* n'entrerait plus que divisée par 2; c'est-à-dire que dans la somme des perpendiculaires à la droite AB, il ne faudrait mettre que la moitié de cette perpendiculaire *ao*. On conçoit, en même temps, que si le triangle *gh*B manquait aussi, il ne faudrait prendre aussi que la moitié de la perpendiculaire *gh*.

329. PROBLÈME 48. *On demande la superficie de la figure* AEBFCGDH (fig. 162) *terminée par une courbe quelconque, en supposant qu'on puisse entrer dans la figure.*

On commencera par inscrire dans cette figure le polygone ABCD du plus

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

petit nombre de côtés possible; on prendra les superficies des segmens ABE, BFC, CGD et DHA (n°. 326); on ajoutera la somme de ces superficies à celle du polygone inscrit ABCD, et on aura celle de la figure donnée.

330. PROBLÊME 49. *On demande la superficie de la figure* ABCDEFG (fig. 163) *terminée par une courbe quelconque, en supposant qu'on ne puisse pas entrer dedans.*

On circonscrira un rectangle ou un trapèze *abcd*, de manière que dans le cas du trapèze, deux côtés *ad*, *bc* soient perpendiculaires à un autre côté *ab*; par quatre points A, C, D et F choisis convenablement sur le contour de la figure dont on demande la superficie, on abaissera les perpendiculaires A*e*, C*f*, C*g*, D*h*, D*i*, F*k*, F*l* et A*m*, sur les côtés *ab*, *bc*, *cd*, *da* du rectangle ou trapèze *abcd*, et on aura, d'une part, les segmens de courbe *e*ABC*f*, *g*CD*h*, *i*DEF*k*, *l*EGA*m*, et de l'autre les rectangle *ae*A*m*, *g*C*fb*, et les rectangles ou quadrilatères *k*F*lc*, *i*D*hc*. On prendra la superficie de chacune de ces parties, en observant ce qui a été dit au n°. 328 pour les segmens de courbe; on ajoutera toutes ces superficies partielles, et on en retranchera la somme de la superficie du rectangle ou trapèze circonscrit *abcd*: le reste sera évidemment la superficie demandée.

331. PROBLÊME 50. *On donne les trois côtés* AB, AC *et* BC (fig. 60) *d'un triangle* ABC, *et on suppose qu'on ne puisse pas abaisser la perpendiculaire du sommet sur la base; on demande la superficie de ce triangle.*

Supposons, néanmoins qu'on ait abaissé la perpendiculaire CD du sommet sur la base; d'après le n°. 157 nous aurons $(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2-2AB\times BD$. Faisons $BC=a$, $AC=b$ et $AB=c$, il nous viendra $b^2=c^2+a^2-2c\times BD$; d'où $BD=\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}$. Mais le triangle DBC est rectangle et nous donne (n°. 153.) $(DC)^2=(BC)^2-(BD)^2$; donc $(DC)^2=a^2-\frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{4c^2}=\frac{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{4c^2}$; multiplions de part et d'autre par $\frac{(AB)^2}{4}$ ou $\frac{c^2}{4}$ et nous aurons $\frac{(DC)^2(AB)^2}{4}$ ou $\left(\frac{DC\times AB}{2}\right)^2=\frac{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)}{16}$; mais $\frac{DC\times AB}{2}$ est la superficie du triangle ABC; appelons-la S, et il nous viendra $S^2=\frac{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{16}$. Or, le numérateur du second membre de cette équation est la différence de deux carrés: il sera donc égal à la somme multipliée par la différence des racines de ces carrés; donc

$$S^2=\frac{(2ac+c^2+a^2-b^2)\,(2ac-c^2-a^2+b^2)}{16}.$$

Observons, maintenant, que le premier facteur $2ac+c^2+a^2-b^2=(a+c)^2-b^2=(a+c+b)\,(a+c-b)$, et le second $2ac-c^2-$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$a^2+b^2=b^2-(a-c)^2=(b+a-c)\times(b-a+c)$, et nous verrons que $S^2=\frac{(a+c+b)\,(a+c-b)\,(b+a-c)\,(b-a+c)}{16}=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{b-a+c}{2}\right)$. Le premier facteur est la demi-somme des trois côtés du triangle; le second, qui peut se mettre sous la forme $\frac{a+c+b}{2}-b$, est la différence de cette demi-somme au côté b; le troisième, qui peut se mettre sous la forme $\frac{a+b+c}{2}-c$, est la différence de la même demi-somme au côté c, et enfin le quatrième facteur, qui peut se mettre sous la forme $\frac{a+b+c}{2}-a$, est la différence de cette même demi-somme au troisième côté a; si donc P est la somme des trois côtés du triangle, nous aurons $S^2=\frac{P}{2}\times\left(\frac{P}{2}-a\right)\left(\frac{P}{2}-b\right)\left(\frac{P}{2}-c\right)$; d'où nous tirerons $S=\sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-a\right)\left(\frac{P}{2}-b\right)\left(\frac{P}{2}-c\right)}$; de sorte que, *la superficie d'un triangle est égale à la racine carrée du produit de quatre facteurs dont le premier est la demi-somme des trois côtés du triangle, et les trois autres, sont les différences de chaque côté à la demi-somme des trois côtés.* (*)

332. *Remarque.* Pour achever de donner tout ce qui peut être nécessaire à la mesure des superficies des figures planes, nous allons faire connaître les unités de superficies le plus en usage, tant anciennes que nouvelles, ainsi que les rapports des unes aux autres, comme nous l'avons promis en arithmétique (voyez cette section de cet ouvrage, n°. 87).

Mesures Anciennes de Superficie.

Ces mesures sont de deux espèces : la toise, le pied, le pouce, etc, carrés, qui sont les mesures ordinaires et fondamentales, et les mesures agraires, qui sont plus grandes, et qui servent à mesurer les champs.

Premières Subdivisions des Mesures ordinaires.

La toise carrée vaut. . . . . 36 pieds carrés,
Le pied carré —— . . . . . 144 pouces carrés,
Le pouce carré —— . . . . . 144 lignes carrées,
et ainsi de suite.

(*) On trouvera une autre démonstration de cette proposition dans la géométrie de Mauduit, dans le Cours de mathématiques de Bélidor, etc. Celle qu'on vient de lire, est tirée, pour le fond, de la 5me. note de la géométrie de M. Legendre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Seconde Subdivision des Mesures ordinaires.

La toise se compose de 6 rectangles qui ont une toise de base et un pied de hauteur; ces rectangles s'appellent *toises-pieds*.

La toise-pied se compose de 12 rectangles d'une toise de base et d'un pouce de hauteur, ce qu'on appelle *toises-pouces*.

La toise-pouce se compose de 12 petits rectangles d'une toise de base et d'une ligne de hauteur, qu'on nomme *toises-lignes*, et ainsi de suite.

Les pieds-pouces, pieds-lignes, etc. sont des rectangles qui ont un pied de base, et un pouce, une ligne, etc. de hauteur, et ainsi des autres.

C'est cette dernière loi de subdivision qu'il faut nécessairement adopter lorsque (prenant la toise ou le pied, etc. pour unité) l'on fait les multiplications *complexes* (arith., n°. 80) pour avoir la superficie d'une figure quelconque. Ainsi, par exemple, si l'on demandait la superficie d'un rectangle qui aurait $3^t.\ 4^p.\ 6^{po}.\ 6^l.$ de base et $1^t.\ 3^p.\ 4^{po}.\ 6^l.$ de hauteur, le produit $5^{tt}.\ 5^{tp}.\ 4^{tpo}.\ 6^{tl}.\ 5^{tpt}.$ qu'on obtiendrait en multipliant ces deux dimensions l'une par l'autre serait 5 toises carrées plus 5 toises-pieds, plus 4 toises-pouces, plus 6 toises-lignes et plus 5 toises-points. De même, si l'on demandait la superficie d'un rectangle qui aurait $3^p.\ 4^{po}.\ 6^l.$ de base sur $2^p.\ 9^{po}.\ 4^l.$ de hauteur, le pied étant l'unité principale, le produit $9^{pp}.\ 4^{ppo}.\ 6^{pl}.$ qu'on obtiendrait en multipliant ces deux dimensions serait 9 pieds carrés, plus 4 pieds-pouces et plus de 6 pieds-lignes. Cette loi de subdivision est plus simple que la première, soit pour déterminer la superficie des figures, soit pour en évaluer le prix.

Il est bon d'observer 1°. qu'une toise-pied contient 6 pieds carrés, qu'une toise-pouce contient 72 pouces carrés, qu'une toise-ligne contient 72×12 ou 864 lignes carrées, etc.; 2°. que, comme un pied carré contient 144 pouces carrés, et qu'une toise-pouce contient 72 pouces carrés, la toise-pouce est un demi-pied carré; comme un pouce carré contient 144 lignes carrées, et qu'une toise-ligne contient 72×12 ou 144×6 lignes carrées, une toise-ligne égale 6 pouces carrés, comme une ligne carrée contient 144 points carrés, et une toise-point $72\times12\times12$ ou 72×144 points carrés, une toise-point contient $\frac{72\times144}{144}=72$ lignes carrées ou un demi-pouce carré, etc., parce qu'au moyen de ces observations, il sera facile de passer d'un nombre de toises carrées, toises-pieds, toises-pouces, etc., au nombre de toises carrées, pieds carrés, pouces carrés, etc., et réciproquement.

Mesures Agraires anciennes.

Ces mesures sont l'arpent et la perche. Un arpent se compose toujours de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

100 perches carrées, mais il y a deux perches différentes : la perche de Paris qui est de 18 pieds de côté, et celle des eaux et forêts qui est de 22 pieds de côté.

Quand la perche est de 18 pieds de côté, l'arpent se compose de 32400 pieds carrés, ou 900 toises carrées, la perche étant alors de 324 pieds carrés, ou de 9 toises carrées. Ainsi, l'arpent de Paris est un carré qui a 180 pieds ou 30 toises de côté.

L'arpent des eaux et forêts se compose de 48400 pieds carrés ou $1344\frac{4}{9}$ toises carrées, la perche étant de 484 pieds carrés.

Nouvelles Mesures de Superficie.

Les nouvelles mesures de superficie sont le mètre, le décimètre, le centimètre, etc. carrés, pour les usages ordinaires, et l'hectare et l'are pour la mesure des champs.

Première loi de Subdivisions.

Le mètre carré vaut 100 décimètres carrés, le décimètre carré vaut 100 centimètres carrés, le centimètre carré vaut 100 millimètres carrés, et ainsi de suite.

Seconde loi de Subdivisions.

Le mètre se compose de 10 rectangles qui ont un mètre de base et un décimètre de hauteur, qu'on pourrait appeler *mètres-déci;* le mètre-déci se compose de 10 rectangles d'un mètre de base et d'un centimètre de hauteur, qu'on pourrait appeler *mètres-centi,* et ainsi de suite.

Dans la mesure de la superficie des surfaces, on adopte cette loi de subdivisions pour plus de facilité dans les évaluations.

Quant à l'hectare ou l'arpent métrique, il se compose de 100 ares ou 10000 mètres carrés, et l'are de 100 mètres carrés.

Voici, maintenant, les rapports des mesures anciennes rapportées aux nouvelles, et des nouvelles rapportées aux anciennes.

RAPPORTS DES ANCIENNES MESURES AUX NOUVELLES.

La toise carrée vaut en mètres carrés. . .	$3,^{m}7987436338$
La toise-pied.	$0,^{m}6332239389$
La toise-pouce.	$0,^{m}05276866 15$
La toise-ligne	$0,^{m}0043973884$
etc.	
Le pied carré.	$0,^{m}1055373230$
Le pied-pouce.	$0,^{m}0087947769$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le pied-ligne ou pouce carré. . . . . 0,^{m}0007328980
Le pied-point . . . . . 0,^{m}0000610748
Et la ligne carrée . . . . . 0,^{m}0000050895

RAPPORTS DES NOUVELLES MESURES AUX ANCIENNES.

Le mètre carré vaut en toise carrée 0,^{t}263244929476, ou en pieds carrés 9,^{p}4768
Le mètre-déci . . . . . 0,^{t}0263244929476 . . . . . 0,^{p}94768
Le mètre-centi ou décimètre carré. 0,^{t}00263244929476 . . . . . 0,^{p}094768
Le mètre-milli. . . . . 0,^{t}00026324429476 . . . . . 0,^{p}0094768
etc.
Le centimètre carré. . . . . 0,^{t}00002632449294 76 . . . . . 0,^{p}00094768
Le millimètre carré. . . . . 0,^{t}0000002632449294 76 . . . . . 0,^{p}0000094768

RAPPORTS DES MESURES AGRAIRES DES ANCIENNES AUX NOUVELLES, ET RÉCIPROQUEMENT.

	Pieds carrés.	Toises carrées.	Mètres carrés.
La perche des eaux et forêts.	484	13,44	51,07
L'arpent des eaux et forêts . .	48400	1344,44	5107,20
La perche de Paris.	324	9,00	34,19
L'arpent de Paris	32400	900,00	3418,87
L'are.	947,7	26,32	100,00
L'hectare.	94768,2	2632,45	10000,00

Si l'on veut rapporter les unités superficielles étrangères, anciennes et modernes, aux mesures nationales, on n'aura qu'à carrer les rapports contenus dans le tableau de la page 65 et suivantes de ce volume.

17^{me}. LEÇON.

Problèmes relatifs au Cercle et à la Ligne droite.

333. PROBLÈME 51. *Trouver le centre d'un cercle donné.*

Premier procédé. On menera deux cordes AB, BC (fig. 164) quelconques, qui ne soient pas parallèles; sur le milieu de chacune de ces cordes AB, BC, on élevera une perpendiculaire, et le point O d'intersection de ces deux perpendiculaires OE, OD, sera le centre demandé (n°. 175).

Second procédé. Sur le milieu d'une corde AB quelconque (fig. 164), on élevera une perpendiculaire EF, qui sera un diamètre du cercle, et, par conséquent, le milieu de ce diamètre sera le centre demandé.

334. PROBLÈME 52. *Par trois points* A, B *et* C (fig. 164) *donnés non en ligne droite, on demande de faire passer une circonférence de cercle.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Puisque les trois points donnés A, B et C doivent se trouver sur la circonférence demandée, en les joignant par les droites AB, BC, ces deux droites AB, BC seront des cordes du cercle, et par conséquent le problême actuel se résoudra par le premier procédé du précédent.

335. PROBLÊME 53. *Par trois points* A, B *et* C (fig. 165) *donnés non en ligne droite, on demande de faire passer un arc de cercle sans se servir du centre.*

Joignons les trois points donnés par des droites, de manière à former le triangle ABC, et supposons le problême résolu : les angles ASB, ATB, AUB, AVB inscrits dans le segment de cercle ACB, seront tous égaux à l'angle ACB (n°. 200), si donc nous formions une suite d'angles ASB, ATB, AUB, AVB, etc., égaux à l'angle ACB, les sommets S, T, C, U, V, etc., seraient autant de points de l'arc demandé. Or, la somme des trois angles d'un triangle étant égale à deux angles droits, pour que les angles ASB, ATB, etc., soient égaux à l'angle ACB, il faut nécessairement que la somme des angles adjacens au côté AB reste la même pour tous les triangles ASB, ATB, ACB, AUB, etc. Si donc on fait augmenter l'angle CAB d'une certaine quantité CAS, il faudra diminuer l'autre angle CBA d'une quantité CBS=CAS, afin que l'angle ASB soit égal à l'angle ACB. Il est clair qu'il faudrait raisonner de la même manière pour les autres angles ATB, AUB, AVB, etc.

Voici maintenant le procédé qu'il faut suivre pour se conformer à ce qui vient d'être dit.

Par les sommets A et B des angles CAB, ABC, comme centres, on décrira les arcs de cercles ER, GP avec le même rayon; on divisera l'arc EF compris entre les côtés de l'angle CAB, en autant de parties égales qu'on voudra, en trois, par exemple; à partir du point H, et au-dessus du côté BC, on portera, sur l'arc HP, autant de fois l'une EI des parties égales de l'arc EF, qu'on a de points de division moins un dans ce dernier arc; et ensuite, par le point A et les points de division de l'arc EF, on menera les droites indéfinies AI, AK, etc.; par le point B et les points O, P, etc. (placés sur l'arc HP, comme il vient d'être dit), on menera les droites BP, BO, etc., qui rencontreront respectivement les premières AI, AK, etc., aux points V, U, etc., qui appartiendront à l'arc demandé, car il est évident que nous avons augmenté l'angle ABC successivement des mêmes quantités que nous avons diminué l'angle CAB. En opérant, sur l'arc GH comme nous venons de le faire sur l'arc EF et réciproquement, nous obtiendrons les points S, T, etc. Connaissant les points S, T, C, U, V, on les réunira à la main par une courbe ACB, qui sera l'arc demandé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

336. PROBLÈME 54. *Sur une droite donnée* AB (fig. 166), *on demande de décrire un segment* (n°. 202) AFB *capable d'un angle donné abc.*

Par l'extrémité B de la droite donnée, on menera la droite BC, de manière que l'angle ABC = *abc*; par le point B, on élevera la droite BD perpendiculaire à BC; sur le milieu de la droite AB, on élevera la perpendiculaire ED, et le point D, où les droites BD, ED se rencontrent, sera le centre de l'arc AFB dont le rayon sera DB ou DA; de sorte que si, par un point quelconque F de l'arc AFB, on mène les droites FB, FA aux extrémités de la corde AB, l'angle AFB sera égal à l'angle donné *abc*.

En effet, l'angle ABC est formé par une corde AB et une tangente BC; cet angle ABC aura donc pour mesure (n°. 202) la moitié de l'arc AB compris entre ses côtés; mais l'angle AFB a la même mesure, donc l'angle AFB = ABC; mais, par construction, l'angle ABC = *abc*; donc enfin l'angle AFB, et tous ceux qui auraient leurs sommets sur l'arc AFB et dont les côtés passeraient par les extrémités de la corde AB, seront égaux à l'angle donné *abc*.

337. PROBLÈME 55. *Par une seule opération, on demande les points nécessaires pour abaisser, par les sommets d'un triangle, les trois perpendiculaires aux côtés.*

Sur l'un AB des trois côtés du triangle donné ABC (fig. 167), comme diamètre, on décrira une demi-circonférence de cercle ADEB, qui coupera les deux autres côtés AC, BC, prolongés, s'il est nécessaire, en deux points D et E, par lesquels et les sommets opposés B et A on menera les droites BD, AE qui seront respectivement perpendiculaires aux côtés AC, BC; car les angles ADB, AEB sont droits, comme étant inscrits dans un demi-cercle. Je dis maintenant que si, par le point I, où les deux droites BD, AE se coupent, et par le sommet C, on mène la droite CF, cette droite CF sera perpendiculaire sur AB.

En effet, le quadrilatère IDCE est inscriptible, puisqu'il a deux angles droits IDC, CEI (n°. 222); circonscrivons donc un cercle à ce quadrilatère, et menons la diagonale DE; les angles DCI, DEI seront égaux, comme ayant pour mesure la moitié du même arc DI; mais la mesure de l'angle DEI ou DEA est aussi la moitié de l'arc AD, qui est la mesure de l'angle ABD; donc l'angle DEA = ABD; or, l'angle DEA = DCI ou ACF, donc l'angle ACF = ABD; c'est-à-dire que les deux triangles ADB, ACF ont un angle égal; mais l'angle CAB est commun à ces deux triangles; les deux autres angles ADB, AFC de ces deux triangles sont donc égaux; or, l'angle ADB est droit; l'angle AFC est donc droit aussi, et par conséquent la droite CF est perpendiculaire à AB; ce qu'il fallait démontrer.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

338. PROBLÈME 56. *Par un point donné* A (fig. 168 et 169) *à l'extrémité d'un arc de cercle* AC, *on demande de mener une droite* EA *qui, prolongée, passerait par le centre* O *de l'arc.*

A partir du point donné A, on portera, sur l'arc de cercle AC, deux distances AB, BC, égales entre elles; par les points A et C, comme centre, et avec le même rayon arbitraire, on décrira des arcs de cercle qui se couperont en D; avec le même rayon, et par le point B, comme centre, on décrira un nouvel arc en E; on prendra un rayon égal à la distance BD, et par le point A donné, comme centre, on décrira un arc de cercle qui coupera au point E celui décrit du point B, et, par le point E et le point donné A, on menera la droite EA, qui sera la droite demandée.

En effet, le point D étant à égales distances des extrémités A et C de l'arc AC, et le point B étant le milieu de cet arc AC, il s'ensuit que la droite DB, prolongée, passerait par le centre de l'arc AC; or, les triangles mixtes CBD, BEA, sont égaux entre eux, puisque AB = BC, BE = CD, et AE = BD; si donc on fait glisser le triangle CBD sur son égal BAE, la droite BD ne cessera pas de passer par le centre, l'arc CB coïncidera avec son égal BA, et la droite BD avec AE; donc AE prolongée passerait par le centre.

339. PROBLÈME 57. *Par un point donné sur la circonférence d'un cercle, on demande de mener une tangente à cette circonférence.*

La solution de ce problème (n°. 184) consiste à mener un rayon au point donné, et d'élever une perpendiculaire à l'extrémité de ce rayon.

340. PROBLÈME 58. *Par un point donné hors de la circonférence d'un cercle, on demande de mener une tangente à ce cercle.*

Soit A (fig. 170) le point donné hors du cercle dont le centre est O; on joindra le point donné A et le centre O du cercle par une droite AO; sur cette droite AO, comme diamètre, on décrira une circonférence de cercle ABOD, qui coupera la circonférence donnée en deux points B et D qui seront les points de contact de deux tangentes AB, AD, qui satisferont également à la question; car si l'on mène les rayons OB, OD, ils seront respectivement perpendiculaires aux droites AB, AD, puisque les angles ABO, ADO seront inscrits dans des demi-cercles.

341. PROBLÈME 59. *Parallèlement à une droite donnée* AB (fig. 171), *on demande de mener une tangente à un cercle donné dont le centre est* C.

Par le centre C du cercle, on abaissera la perpendiculaire CD sur la droite donnée AB; par les points E, E, où cette droite CD rencontrera la circonférence de cercle, on menera les droites GF, GF, qui seront chacune la tangente demandée, ce qui est évident.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

342. PROBLÊME 60. *On donne une droite* AB *et un cercle dont le centre est* C (fig. 172), *et on demande de mener une tangente au cercle, qui fasse un angle donné avec la droite donnée* AB.

On menera une droite *ab* qui fasse, avec la droite donnée AB, un angle A*ab* égal à l'angle donné, et le problême se réduira au précédent, la droite *ab* remplaçant la droite AB.

343. PROBLÊME 61. *Perpendiculairement à une droite* DD (fig. 173), *on demande de mener une tangente à un cercle donné dont le centre est* C.

Par le centre C du cercle, on menera un diamètre EE parallèle à la droite donnée DD; par les extrémités E, E de ce diamètre, on abaissera à la droite donnée DD les perpendiculaires ED, ED, qui seront chacune la tangente demandée, ce qui est évident.

344. PROBLÊME 62. *Trois droites, dont deux seulement peuvent être parallèles, étant données comme on voudra, on demande de décrire un cercle qui soit tangent à toutes les trois à la fois.*

Soient AB, BC et CA (fig. 174, 175 et 176) les trois droites données; on divisera les angles ABC, BCA chacun en deux parties égales par les droites BF, CF, et le point F, où les droites BF, CF se couperont, sera le centre du cercle demandé. On aura le rayon, en abaissant, par le point F, une perpendiculaire FK, FI ou FL sur l'une quelconque des trois droites données.

En effet, les trois perpendiculaires FK, FI, FL sont égales entre elles, car les triangles BFK, BFI sont égaux, ainsi que les triangles IFC, LFC; puisque ces triangles sont rectangles, qu'ils ont l'hypothénuse BF, CF commune, et un angle aigu égal (n°. 37), les droites FB, FC divisant les angles ABC, BCA, en deux parties égales; donc FK=FI=FL : ces trois droites seront donc des rayons du cercle demandé, et comme ces rayons sont respectivement perpendiculaires aux trois droites données, ces dernières seront tangentes au cercle décrit du point F, comme centre, et avec le rayon FK, FI ou FL.

345. PROBLÊME 63. *On demande un cercle qui passe par un point donné* A (fig. 177), *et qui soit tangent, à un cercle donné dont le centre est* C, *en un point donné* B *sur la circonférence du cercle donné.*

Si par le centre C du cercle donné et le point de contact B, on mène la droite CB, indéfiniment prolongée, le centre du cercle demandé sera sur cette droite CB (n°. 188). Ensuite, si sur le milieu de la droite AB, menée par les deux points donnés, on mène une perpendiculaire ED, le point D, où cette dernière droite rencontrera la droite CD, sera le centre du cercle demandé. Quant au rayon, il sera égal à BD.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On remarquera que le point donné A, au lieu d'être donné hors du cercle, pourrait être donné intérieurement.

346. PROBLÈME 64. *On donne un cercle dont le centre est* C (fig. 177), *et on demande un cercle, d'un rayon donné, qui soit tangent au premier au point donné* B.

Par le centre C du cercle donné et le point de contact B, on menera la droite CB indéfiniment prolongée; sur le prolongement de cette droite, on fera BD égal au rayon donné, et le point D sera le centre du cercle demandé.

On pourrait porter le rayon donné de B vers C, et alors le cercle demandé serait intérieur au cercle donné.

347. PROBLÈME 65. *Une droite et deux points situés du même côté de la droite étant donnés, on demande de décrire un cercle qui passe par les deux points et qui soit tangent à la droite.*

Il faut distinguer deux cas : le cas où les deux points donnés sont situés à la même distance de la droite donnée, et le cas contraire.

1°. Soient AB la droite (fig. 178), et D et C les points donnés; et supposons que la droite DC qui passe par les points donnés soit parallèle à AB : dans ce cas on élevera une perpendiculaire FE au milieu de la droite DC, et cette droite EF sera aussi perpendiculaire à AB; mais la droite DC doit être une corde au cercle demandé; donc la droite FE passera par le centre de ce cercle. De plus, toute perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente passe par le point de contact; le point E sera donc le point de contact de la tangente AB; le cercle demandé passera donc par les trois points D, C et E; ainsi, la perpendiculaire GI, menée sur le milieu de DE, rencontrera la droite FE en un point I qui sera le centre de ce cercle.

2°. Si la droite DC qui passe par les points donnés D et C (fig. 179), n'est pas parallèle à la droite donnée AB, on la prolongera jusqu'à la rencontre de AB au point E, et, si l'on suppose le problème résolu et que le cercle demandé soit GDC, on verra que la droite CE sera une sécante à ce cercle, ED sa partie extérieure, et EG une tangente menée par le même point E : on aura donc (n°. 209) EC : EG :: EG : ED; mais on connaît EC et ED; on aura donc EG, en décrivant une demi-circonférence CFE sur CE, comme diamètre; en élevant par le point D une perpendiculaire DF sur CE, et en portant EF de E en G ou de E en H, ce qui donnera le point de contact G ou H : le cercle demandé passera donc par les trois points G, D et C, ou H, D et C; ainsi, on trouvera le centre I ou K comme au n°. 334.

On voit que, dans ce cas, le problème est susceptible de deux solutions.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

348. PROBLÈME 66. *Deux droites* AB, AC (fig. 180) *et un point* F *étant donnés, on demande de décrire un cercle qui passe par le point* F, *et qui soit tangent aux deux droites données.*

On divisera en deux parties égales, par une droite AG, l'angle BAC des deux droites données; on prendra un point I quelconque sur la droite AG, par lequel on abaissera la perpendiculaire IK ou IL, et d'un rayon égal à IK ou IL, et du point I comme centre, on décrira le cercle K*m*L*n*. Cela fait, on menera la droite AF par le point F donné et le point A, et par le point *m* ou le point *n*, où la droite AF coupera la circonférence du cercle dont le centre est I, on menera le rayon *m*I ou *n*I; par le point F donné on menera FO parallèle à *m*I ou FG parallèle à *n*I, et le point O ou le point G sera le centre du cercle demandé : en abaissant, par le point O ou le point G, la perpendiculaire OD ou GB sur la droite AB, on aura OD ou GB pour le rayon du même cercle.

En effet, à cause que la droite AG divise l'angle BAC en deux parties égales, tous les cercles qui auront leur centre sur cette droite, et pour rayon la longueur de la perpendiculaire abaissée du point de cette même droite pris pour centre, sur la droite AB ou AC, seront tangens à la fois aux deux droites AB et AC; par conséquent, les cercles qui ont leurs centres en I, O et G, sont tangens à ces deux droites AB et AC : il suffira donc de démontrer que le cercle qui a son centre en O ou celui qui a son centre en G, passe par le point F donné, ce qui revient à démontrer que OF = OD, ou que GF = GB. Or, à cause des parallèles I*m*, OF, on a AI : AO :: I*m* : OF, et à cause des parallèles IK et OD, on a AI : AO :: IK : OD, donc I*m* : OF :: IK : OD; mais I*m* = IK, donc OF = OD. On démontrerait de même que GF = GB.

Remarque. Si les deux droites données étaient parallèles, on menerait une troisième parallèle à égale distance des premières, et par le point donné comme centre, et d'un rayon égal à la moitié de la distance des droites données, on décrirait un arc de cercle qui couperait la troisième parallèle en un point qui serait le centre du cercle demandé.

349. PROBLÈME 67. *Décrire un cercle tangent à deux droites et à un cercle donné.*

Ce problème est susceptible de quatre solutions.

Soient AB et CD (fig. 181 et 182) les droites données, et K le centre du cercle donné dont KH′ est le rayon.

On commencera par mener les droites GH et EF intérieurement (fig. 181) ou extérieurement (fig. 182) respectivement parallèles aux droites données AB et CD, à une distance égale au rayon KH′ du cercle donné. Cela fait, on

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cherchera le centre O ou I d'un cercle GKE ou HKF qui passe par le centre K du cercle donné, et qui soit tangent aux droites GH et EF (n°. 348). On abaissera ensuite les droites AO et OD, ou BI et IC respectivement perpendiculaires aux droites AB et CD, par le point O ou I : les points A et D ou B et C seront les points de contact des droites données AB et CD, et du cercle demandé AHD ou BQC ; quant au rayon du cercle demandé, il est visiblement OA ou IB.

Les raisons sur lesquelles ce procédé se fonde sont assez évidentes d'elles-mêmes.

350. PROBLÈME 68. *Décrire un cercle qui passe par un point donné, et qui soit tangent à un cercle et à une droite donnée.*

Pour que ce problème soit possible, il faut que le point et la droite donnés soient ou tous les deux en dedans, ou tous les deux en dehors du cercle donné. Le cas où le point et la droite donnés sont dans le cercle donné est représenté par la figure 183, et le cas contraire par les figures 184 et 185. Mais la solution est la même à peu près pour l'un et l'autre cas.

Soient M le point et AB la droite donnés, et I le centre du cercle donné CTDT (fig. 183, 184 et 185).

Supposons maintenant que le problème soit résolu, et qu'en conséquence le cercle demandé soit MTFP, son centre le point K, le point de contact du cercle donné et du cercle demandé le point T, le point de contact de la droite AB donnée et du cercle demandé le point F.

Si maintenant on mène le rayon KF au point de contact F, ce rayon sera perpendiculaire à la droite AB, et si on mène le diamètre CD, du cercle donné, perpendiculaire à la même droite AB, ce rayon KF et ce diamètre CD seront parallèles, de sorte que, si on mène la droite TF par le point T et le point F, on aura les deux triangles TKF et TID qui seront semblables, et comme le triangle TKF est isocèle, le triangle TID le sera aussi ; donc ID = IT, mais IT est un rayon du cercle donné ; donc ID sera aussi un rayon du même cercle, et le point D, où la droite TF rencontre CD, est à la circonférence du cercle donné.

Que l'on mène, à présent, MD par le point donné M et l'extrémité D du diamètre CD (fig. 183 et 184), on aura $DM \times DP = DT \times DF$; mais $DT \times DF = DE \times DC$, car le quadrilatère CTFE est inscriptible. En effet, si on mène la droite TC, l'angle CTD sera droit, puisque le sommet T est à la circonférence et les côtés passent par les extrémités du diamètre du cercle donné CTDT ; et de plus, l'angle AEC est droit aussi ; donc le quadrilatère CTFE est inscriptible (n°. 222), donc $DT \times DF = DC \times DE$; d'où

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

il suit que $DM \times DP = DC \times DE$; donc $DM : DC :: DE : DP$; c'est-à-dire que DP est une quatrième proportionnelle aux droites DM, DC, et DE. Ainsi, cherchant cette quatrième proportionnelle, et la portant de D en P, on aura un second point P du cercle MTFP demandé. On aura le centre K et le rayon FK par le procédé donné au n°. 347.

Pour le cas de la figure 185, il est facile de voir (si l'on suppose le problême résolu) par la similitude des triangles TKF, TIC, que la droite TF passe par le point C, extrémité du diamètre du cercle donné. Ainsi, si par le point M donné et le point C on mène la corde MP au cercle demandé, on aura $MC \times CP = CT \times CF$. Mais les triangles semblables CTD et CEF donnent $CT : CE :: CD : CF$; donc $CT \times CF = CE \times CD$: par conséquent $MC \times CP = CE \times CD$, d'où $CM : CD :: CE : CP$. Pour le reste de la solution, on se conduira comme pour les cas précédens.

351. PROBLÊME 69. *Décrire un cercle tangent à une droite et à deux cercles donnés.*

Ce problême présente trois circonstances: 1°. les deux cercles donnés seront en dehors du cercle demandé (fig. 186); 2°. les deux cercles donnés seront dans le cercle demandé (fig. 187); 3°. l'un des cercles donnés sera en dedans et l'autre en dehors du cercle demandé (fig. 188). Mais l'inspection des figures et une seule démonstration suffiront pour entendre ces trois circonstances, qui sont susceptibles chacune de deux solutions.

Soient I et O les centres des cercles donnés, et AB la droite donnée (fig. 186, 187 et 188).

Supposons maintenant que le problême soit résolu, et soit K le centre du cercle demandé.

Du centre O et d'un rayon égal à la différence (fig. 186 et 187) ou à la somme (fig. 188) des rayons donnés IH et OT, on décrira le cercle CD*r*; parallèlement à la droite AB, et à une distance égale au rayon IH, on menera la droite *ab*; on cherchera ensuite le centre K d'un cercle *r*FI passant par le centre I, et tangent au cercle CD*r* et à la droite *ab*; le centre K sera aussi celui du cercle demandé. En effet, en menant la droite KI prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre en H la circonférence dont le centre est I, et la droite KO prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre en T la circonférence donnée dont le centre est O, on aura $KH = KT$, ce qui est facile à voir par la seule inspection des figures.

352. PROBLÊME 70. *Décrire un cercle qui passe par deux points donnés, et qui soit tangent à un cercle donné.*

Il est évident que ce problême n'est possible, qu'autant que les deux points

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donnés sont situés tous les deux au dedans ou tous les deux au dehors du cercle donné. Une seule démonstration suffira pour les deux cas.

Supposons d'abord que les deux points donnés B et C soient situés hors du cercle donné GHD (fig. 189); soient GBC le cercle demandé, et G le point de contact, le problême étant supposé résolu.

Puisque les deux cercles sont tangens, je dis qu'en menant les droites BG, CG et DK, on aura les triangles BGC et KDG, qui seront semblables (n°. 218); de plus, si du point D on mène la tangente DE, le triangle ECD sera semblable au triangle BCG; car l'angle BCG est commun à ces deux triangles, et l'angle EDC ou son opposé par le sommet ADG = GKD, comme ayant pour mesure la moitié du même arc GLD; or GKD = GBC, donc EDC = GBC; donc, enfin, les triangles EDC, BGC sont semblables: on aura donc BC : DC :: CG : CE; d'où CE × BC = DC × CG.

Si on mène la droite CIF comme on voudra par le point C, de manière pourtant qu'elle coupe le cercle donné GHD, on aura DC × CG = CI × CF; donc CE × BC = CI × CF; d'où BC : CF :: CI : CE. Ainsi on aurait le point E en portant de C vers B une quatrième proportionnelle aux trois droites BC, CF et CI.

Il est clair, maintenant, que si du point E on mène la tangente ED au cercle donné, on aura un point D de contact qui sera sur la droite CG qui joint le point de contact G des deux cercles et l'un des points donnés C. Ainsi, en menant la droite CD prolongée jusqu'en G, on aura un troisième point par lequel le cercle demandé doit passer : le problême se réduit donc à celui donné au n°. 334.

Outre la tangente ED au cercle GHD, on sait qu'on peut, par le même point E, en mener une autre EH, ce qui donne une seconde solution du même problême.

En effet, si du point de contact H et du point donné C, par rapport auquel on a déterminé le point E, on mène la droite H*g*C; si par le point donné B et le point *g* d'intersection de la droite HC et de la circonférence donnée, on mène la droite B*g*L, et qu'on joigne les points H et L, l'on aura les triangles H*g*L, B*g*C qui seront semblables. Pour le démontrer, je remarque que les triangles HEC, B*g*C sont semblables; car ces deux triangles ont l'angle HCB commun, et en vertu de la détermination du point E on a BC : CH :: C*g* : CE : ces deux triangles ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels, donc ils sont semblables : donc l'angle EHC = *g*BC; mais l'angle EHC = HL*g*, car ces derniers angles ont pour mesure la moitié du même arc HK*g*; donc HL*g* = *g*BC, et de plus les an-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

gles B*g*C et H*g*L sont égaux, comme étant opposés par le sommet : donc les trois angles des triangles B*g*C et H*g*L sont égaux, chacun à chacun, donc ces deux triangles sont semblables, et par conséquent les deux cercles circonscrits à ces triangles se touchent au sommet *g* commun à ces deux triangles.

Supposons maintenant que les deux points donnés B et C soient situés dans le cercle donné GHDK (fig. 190). Dans ce cas le point E ne sera plus entre les points B et C, mais sur le prolongement de la droite BC qui passe par ces deux points B et C. La distance CE n'en sera pas moins une quatrième proportionnelle aux droites BC, CF et CI. Pour le reste de l'opération, on s'y prendra comme dans le premier cas : il suffit de l'inspection de la figure pour s'en assurer.

353. PROBLÈME 71. *Mener une droite tangente à deux cercles donnés.*

Supposons le problème résolu (fig. 97 et 98), et prolongeons la droite qui joint les centres des cercles donnés jusqu'à ce qu'elle rencontre la tangente commune, et menons les rayons aux points de contact : les triangles semblables ACO, ADP nous donneront AC : AD :: CO : DP ; d'où AC : AC $\pm$ AD :: CO : CO $\pm$ DP, ou CO $\pm$ DP : CO :: DC : AC ; d'où l'on voit que la distance AC, du point A où la tangente OA rencontre la droite qui joint les deux centres, au centre du grand cercle, est une quatrième proportionnelle à la somme ou à la différence des rayons, au grand rayon, et à la distance des centres. Dans la figure 97 il faudra prendre la différence, et dans la figure 98 la somme des deux rayons. Quand on aura le point A, par le procédé du n°. 340, on menera par ce point A une tangente à l'un des cercles donnés, qui sera aussi tangente à l'autre cercle.

354. PROBLÈME 72. *Décrire un cercle qui passe par un point donné, et qui soit tangent à deux cercles donnés.*

Soient A et B (fig. 191 et 192) les centres des cercles donnés, et C le point donné.

Sur le prolongement de la droite AB qui joint les centres donnés, on déterminera le point D où la tangente commune aux deux cercles donnés va rencontrer cette droite AB comme ci-dessus ; on menera ensuite la droite CD sur laquelle on déterminera un point G de manière que l'on ait DC : DF :: DE : DG. Ensuite, on fera passer une circonférence par les deux points C et G, de façon qu'elle soit tangente à l'un des cercles donnés, au cercle dont le centre est A, par exemple ; je dis que cette circonférence de cercle sera aussi tangente au cercle dont le centre est B.

En effet, d'après la construction qui vient d'être expliquée, on a DC $\times$ DG $=$ DF $\times$ DE, et en vertu du n°. 215, si on mène par le point de contact H

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et le point D la droite HD, on aura $DC \times DG = DH \times DN$; donc $DF \times DE = DH \times DN$: d'où il suit que les cercles LRN, HCGN ont un point de commun N. Je dis maintenant qu'ils n'ont que ce point de commun. En effet, les cordes HP, ON sont semblables, mais les cordes HP et HN le sont aussi, donc les cordes HN et ON sont semblables, et les deux cercles HGN, LRN sont tangent au point N.

355. PROBLÊME 73. *Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés.*

Soient A, B et C les centres des cercles donnés. Du centre A et d'un rayon $AE = AM - CK$ (fig. 193), ou d'un rayon $AE = AM + CK$ (fig. 194), qu'on décrive le cercle EG; du centre B et d'un rayon $BF = BL - CK$ (fig. 193) ou d'un rayon $BF = BL + CK$ (fig. 194), qu'on décrive le cercle FH; et, enfin, qu'on décrive un troisième cercle GCH qui soit tangent aux deux premiers et qui passe par le centre donné C, par le procédé du n°. 154, et le centre D ou I de ce nouveau cercle sera celui du cercle demandé, ainsi qu'il est facile de s'en rendre raison par l'examen des figures.

18^me^. LEÇON.

Trigonométrie rectiligne. Préliminaires.

356. Il y a deux méthodes de résoudre les problêmes de géométrie : la méthode *graphique*, et la méthode *numérique*. La première est celle qui emploie la règle et le compas, et la seconde celle qui se sert de l'arithmétique.

La méthode graphique a le défaut de ne conduire qu'à des résultats plus ou moins approchés, à cause de l'imperfection des instrumens dont elle fait usage; tandis que la méthode numérique donne des résultats aussi exacts qu'on peut le désirer. Cependant la première méthode est indispensable dans les arts, et surtout en architecture, tant par l'élégance de ses procédés, que parce qu'elle a l'avantage de peindre aux yeux les objets dont on s'occupe, avantage que, souvent, rien ne peut suppléer. Au reste, ces deux méthodes se prêtent de mutuels secours, qui les rendent également précieuses. C'est en combinant ces deux méthodes avec discernement, et en leur appliquant l'algèbre à propos, que l'on se mettra à même de surmonter toutes les difficultés qui dépendent de la géométrie : c'est ce que nous tâcherons de faire dans ce cours.

La trigonométrie a pour objet de résoudre numériquement les triangles; c'est-à-dire que, connaissant trois des six choses qui entrent dans un triangle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

(angles et côtés), pourvu que parmi les trois choses connues il y ait au moins un côté, la trigonométrie fera connaître numériquement les trois autres choses du triangle.

La trigonométrie étant fondée sur les propriétés des *sinus*, *cosinus*, *tangentes*, *cotangentes*, etc., c'est par l'exposition de ces propriétés que nous allons commencer.

357. On appelle *sinus* d'un arc AM ou d'un angle MIA (fig. 195), la perpendiculaire MP abaissée par une des extrémités M de l'arc sur le rayon IA du cercle qui passe par l'autre extrémité A de cet arc. Pour désigner que PM est le sinus de l'arc AM, on écrit. sin.AM = PM.

358. Le *cosinus* de cet arc AM, est la distance IP du centre du cercle au pied du sinus. Mais si le diamètre CD est perpendiculaire sur le diamètre AB, et que par le point M on mène la droite MQ parallèle à AB, MQ égalera PI, de sorte qu'on peut dire aussi que le cosinus de l'arc AM est la droite MQ. Pour désigner que IP ou QM est le cosinus de l'arc AM, on écrit : cos.AM = IP ou QM. La différence AP entre le rayon et le cosinus s'appelle le *sinus-verse* du même arc que le cosinus ; mais cette ligne trigonométrique n'est pas d'un grand usage dans les élémens. Pour désigner que AP est le sinus-verse de l'arc AM, on écrit sin.ver.AM = AP, et on a toujours sin.ver.AM = R — cos.AM.

359. Si par l'extrémité A de l'arc AM on mène la tangente AT, qui sera parallèle au sinus PM, la longueur AT de cette tangente comprise entre le point A et le point T où la tangente AT rencontre le rayon IM prolongé, sera la *tangente* de l'arc AM. Pour désigner que AT est la tangente de l'arc AM, on écrit : tang.AM = AT.

360. Si par l'extrémité C du rayon IC perpendiculaire à AI, on mène la tangente C*t*, la longueur C*t* de cette tangente, comprise entre le point C et le point *t* où la tangente C*t* rencontre le rayon IM prolongé, sera la cotangente de l'arc AM. Pour désigner que C*t* est la cotangente de l'arc AM, on écrit : cot.AM = C*t*.

361. On appelle *sécante* de l'arc AM, la longueur IT comprise entre le centre du cercle et le point T où la tangente AT rencontre le rayon IM prolongé. Pour désigner que IT est la sécante de l'arc AM, on écrit : séc.AM = IT.

362. Enfin, on appelle *cosécante* de l'arc AM, la longueur I*t* comprise entre le centre du cercle et le point *t* où le rayon IM prolongé rencontre la cotangente C*t*. Pour désigner que I*t* est la cosécante de l'arc AM, on écrit : cosé.AM = I*t*.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Voyons, à présent, quelles sont les relations qui existent entre les arcs de cercle et les lignes trigonométriques qui en dépendent.

363. Premièrement supposons que l'arc AM (fig. 195) soit nul, c'est-à-dire que le point M soit sur le point A ; 1°. le point P sera aussi sur le point A, et par conséquent le sinus PM sera nul, et le cosinus IP deviendra le rayon IA ; de sorte que sin.o = o, et cos.o = R, en représentant le rayon par R.

2°. Le point T, dans la même hypothèse, sera sur le point A, d'où il suit que la tangente AT sera nulle en même temps que l'arc AM ; on aura donc tang.o = o.

3°. A mesure que le point M s'approchera du point A, le point t s'écartera du point C, c'est-à-dire que la cotangente Ct augmentera à mesure que l'arc AM diminuera ; et comme lorsque le point M sera sur le point A, le rayon IM sera parallèle à Ct, ces deux droites IM, Ct ne pouvant plus se rencontrer, la cotangente de l'arc nul sera infinie ; ainsi cot.o = ∞.

4°. Le point T étant sur le point A en même temps que le point M, il s'ensuit que la sécante IT devient le rayon IA ; de sorte que séc.o = R.

5°. Enfin, le rayon IM étant parallèle à la cotangente Ct, la cosécante It devient infinie quand l'arc AM est nul ; c'est-à-dire que cosé.o = ∞.

364. Secondement, supposons que le point M, coïncidant d'abord avec le point A, s'élève au-dessus de ce dernier, de manière que l'arc AM augmente continûment ; il est visible que le sinus, la tangente et la sécante augmenteront, et qu'au contraire le cosinus, la cotangente et la cosécante diminueront dans le même temps. Supposons que l'arc AM = 45°. ; alors les triangles rectangles IPM, IAT seront isocèles, et donneront, par conséquent, IP = PM, et AT = AI ; c'est-à-dire que sin.45°. = cos.45°., et tang.45°. = R. Mais le triangle ICt sera aussi isocèle ; on aura donc Ct = IC, ou cot.45°. = R ; or, tang.45°. = R ; donc cot.45°. = tang.45°.

365. Troisièmement, supposons que le point M continue de s'écarter du point A, et qu'il soit enfin arrivé au point C ; de sorte que AM soit devenu AC = 90°.

1°. Le sinus sera devenu IC = R, c'est-à-dire que sin.90°. = R.

2°. Le cosinus IP sera nul, et on aura cos.90°. = o.

3°. A mesure que l'arc AM augmente, la tangente AT et la sécante IT augmentent aussi, et comme lorsque le point M est parvenu au point C, le rayon IM est devenu parallèle à la tangente AT, il s'ensuit que la tangente et la sécante de l'arc AC sont infinies ; ainsi on a tang.90°. = ∞, et séc.90°. = ∞.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4°. On voit que la cotangente devient nulle quand le point M est au point C, puisque le point t est aussi sur le point C; ainsi, cot.90°. = 0.

5°. Quant à la cosécante, le point t étant au point C en même temps que le point M, elle est égale au rayon IC; de sorte que cosé.90°. = R.

366. Quatrièmement, supposons que le point M s'avance toujours dans le même sens, et qu'il soit arrivé au point M′, de manière que l'arc en question soit devenu AMCM′ < 90°.

1°. Le sinus de cet arc sera P′M′; mais P′M′ est évidemment le sinus de l'arc BM′; or, l'arc BM′ est le supplément de l'arc AMCM′; d'où il suit qu'un arc a le même sinus que son supplément. Appelons a le supplément de l'arc AMCM′, nous aurons AMCM′ = 180°. — a, et, par conséquent, sin.(180°.—a) = sin.a.

2°. Le cosinus de l'arc AMCM′ est égal, en grandeur, à IP′; mais comme nous avons pris positifs les cosinus des arcs moindres que 90°., et que ces cosinus étaient mesurés de droite à gauche, et que ceux des arcs >90°. sont mesurés, au contraire, de gauche à droite, il faut prendre ces derniers avec le signe —, pour indiquer le sens dans lequel ils sont dirigés par rapport au rayon CI perpendiculaire au diamètre AB, et ceci n'est point du tout une convention, mais une suite nécessaire de la nature des choses.

En effet, pour passer, par exemple, du cosinus IP, de l'arc AM, au cosinus Ip de l'arc Am, il est clair que de IP il faudrait retrancher Pp, qui est la distance entre les pieds des sinus PM, pm des mêmes arcs; si donc du cosinus IP de l'arc AM on veut passer au cosinus IP′ de l'arc AMCM′, de IP il faudra retrancher PP′, qui est la distance entre les pieds des sinus PM, P′M′ des mêmes arcs; de sorte qu'en appelant y le cosinus IP′ de l'arc AMCM′, on aura y = IP — PP′; mais PP′ = IP + IP′; donc, en substituant, y = IP — IP — IP′ = — IP′. Ainsi il est démontré que le cosinus d'un arc> 90°. est négatif, et que, par conséquent, cos.AMCM′ = — IP′. Mais IP′ avec le signe + est le cosinus de l'arc M′ supplément de l'arc AMCM′; donc le cosinus d'un arc est égal au cosinus de son supplément pris en signe contraire; donc, cos.(180°. — a) = — cos.a.

Remarque. Il est inutile que nous continuions de considérer les relations des tangentes, cotangentes, sécantes et cosécantes, parce que, ainsi que nous le verrons bientôt, ces relations se déduisent très-simplement de celles des sinus et cosinus.

3°. Au lieu de rapporter l'arc AMCM′ à son supplément BM′, on peut le rapporter à son complément négatif (n°. 18) M′C, que nous représenterons par b, et alors le sinus P′M′ de cet arc AMCM′ sera le cosinus de son com-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

plément M′C ; de sorte que sin.(90°.+b) = cos.b, et le cosinus — QM′ de ce même arc AMCM′ sera le sinus de son complément M′C, ainsi, cos.(90°.+b) = — sin.b.

Si nous revenions à l'arc AM, et que nous le comparions à son complément positif MC, il est évident que son sinus PM serait le cosinus de son complément MC, et que son cosinus IP = QM serait le sinus de son complément MC ; c'est-à-dire que, c étant son complément, on aurait : sin.(90°.—c) = cos.c, et cos.(90°.—c) = sin.c.

367. Cinquièmement. Supposons toujours que le point M continue de se mouvoir dans le même sens, et que de sa position M′ il arrive au point B ; alors l'arc AM sera devenu une demi-circonférence, son sinus sera o et son cosinus — R : on aura donc sin. 180°. = o, et cos. 180°. = —R. Mais si ce point M dépasse le point B, et parvient, par exemple, au point M″, que sera son sinus P′M″ ? Je dis qu'il sera négatif.

En effet, si du sinus P′M′, de l'arc BM′, on voulait passer au sinus $p'n$ de l'arc Bn, P′o étant égal à $p'n$, il est clair que de P′M′ il faudrait retrancher M′o, c'est-à-dire la quantité dont le sinus P′M′ a diminué, en passant de l'arc M′B à l'arc nB ; si donc on veut passer du sinus P′M′ de l'arc M′B, au sinus P′M″ de l'arc BM″, en appelant x ce sinus, on aura x = P′M′—M′M″. Or, M′M″=P′M′+P′M″ ; en substituant on aura donc x=P′M′—P′M′—P′M″ = — P′M″, après les réductions ; donc le sinus de l'arc ACBM″ ou de son supplément négatif BM″ est négatif. Appelons donc d l'arc BM″, et nous aurons sin.(180°.+d) = — sin.d. Ainsi tous les sinus qui seront situés au-dessous du diamètre AB seront négatifs, tandis que ceux situés au-dessus du même diamètre seront positifs. Quant au cosinus de l'arc ACBM″, étant dirigé de gauche à droite, par rapport au centre du cercle, il sera négatif.

368. Il suit de ce qui précède, 1°. que les sinus de tous les arcs compris depuis o jusqu'à 180°. ou 2 angles droits, seront positifs, depuis 2 angles droits jusqu'à 4 seront négatifs, depuis 4 jusqu'à 6 seront positifs, depuis 6 jusqu'à 8 seront négatifs, et ainsi de suite. 2°. les cosinus de tous les arcs compris depuis o jusqu'à 90°. ou 1 angle droit seront positifs, depuis 1 angle droit jusqu'à 3 seront négatifs, depuis 3 jusqu'à 5 seront positifs, depuis 5 jusqu'à 7 seront négatifs, et ainsi de suite, alternativement.

Telles sont les principales relations qui existent entre les arcs et les lignes trigonométriques qui y répondent. Faisons voir, maintenant, les formules algébriques auxquelles ces mêmes lignes peuvent donner lieu.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

19^me^ LEÇON.

Les Formules trigonométriques.

369. THÉORÈME 152. *Le sinus d'un arc est la moitié de la corde qui soutend un arc double.*

En effet, si la corde MM''' est perpendiculaire au rayon AI (fig. 195), cette corde MM''' et l'arc MAM''' seront divisés en deux parties égales, respectivement aux points P et A; mais la moitié PM de la corde MM''' est le sinus de l'arc AM moitié de l'arc MAM''', et c'est ce qu'il fallait démontrer.

370. *Corollaire.* Le côté de l'exagone est égal au rayon du cercle circonscrit, et soutend un arc qui est le 6^me^. de la circonférence du cercle, c'est-à-dire que cet arc est de 60°. : la moitié du côté de l'exagone est donc le sinus d'un arc de 30°.; de sorte que sin. 30°. $= \frac{1}{2}$R.

371. THÉORÈME 153. *Le cosinus d'un arc quelconque est égal à la racine carrée du carré du rayon du cercle, moins le carré du sinus; de sorte que, si a est l'arc en question, on aura* cos.$a = \pm\sqrt{R^2 - \sin.^2 a}$. (*)

En effet, s'il s'agit de l'arc AM, le triangle rectangle PMI donnera PI $= \pm\sqrt{(IM)^2 - (PM)^2}$, ou cos.$a = \pm\sqrt{R^2 - \sin.^2 a}$.

On conçoit que la réciproque a lieu, c'est-à-dire que sin.$a = \pm\sqrt{R^2 - \cos.^2 a}$.

372. *Corollaire.* Il suit de là que quand on connaît le sinus d'un arc, on connaît aussi son cosinus, et réciproquement, quand on connaît le cosinus d'un arc, on connaît aussi son sinus.

373. THÉORÈME 154. *La tangente d'un arc est égale au produit du rayon du cercle et du sinus du même arc divisé par le cosinus de ce même arc, c'est-à-dire que a étant l'arc, on aura* tang.$a = \frac{R \sin. a}{\cos. a}$.

En effet, les triangles semblables IPM, IAT (fig. 195) donnent IP : PM :: IA : AT, ou cos.a : sin.a :: R : tang.$a = \frac{R \sin. a}{\cos. a}$.

374. *Corollaire* 1. Ainsi, lorsque l'on connaîtra le sinus et le cosinus d'un arc, on connaîtra aussi sa tangente.

(*) Sin.^2a désigne le carré du sinus de a; cos.^2a désigne le carré du cosinus de a; tang.^2a désigne le carré de la tangente de a; cot.^2a désigne le carré de la cotangente de a, etc. On remarquera que l'exposant est placé un peu au-dessus, et entre la lettre a qui représente l'arc, et les initiales du nom de la ligne trigonométrique dont il s'agit. Ce que nous disons de l'exposant 2 s'entend de tout autre exposant.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

375. *Corollaire* 2. Nous avons vu (n°. 366) que le cosinus d'un arc $>90°$. était négatif; d'où il suit que $\text{tang.}(90°.+a) = -\frac{\text{R}\sin.(90°.+a)}{\cos.(90°.+a)}$.

376. THÉORÈME 155. *La cotangente d'un arc est égale au produit du rayon et du cosinus de l'arc, divisé par le sinus; de sorte que* $\text{cot.}a = \frac{\text{R}\cos.a}{\sin.a}$.

Car les triangles semblables IQM, IC*t* (fig. 195) donnent IQ ou PM : QM ou IP :: IC : C*t*, et par conséquent $\sin.a : \cos.a :: \text{R} : \text{cot.}a = \frac{\text{R}\cos.a}{\sin.a}$.

377. *Corollaire* 1. Comme le cosinus d'un angle obtus est négatif (n°. 366), on aura $\text{cot.}(90°.+a) = -\frac{\text{R}\cos.(90°.+a)}{\sin.(90°.+a)}$.

378. *Corollaire* 2. Puisque $\text{tang.}a = \frac{\text{R}.\sin.a.}{\cos.a}$ et $\text{cot.}a = \frac{\text{R}.\cos.a}{\sin.a}$, en multipliant ces deux formules membre à membre, on aura $\text{tang.}a\ \text{cot.}a = \frac{\text{R}^2.\sin.a\cos.a}{\sin.a\cos.a} = \text{R}^2$, *d'où il suit que le produit de la tangente et de la cotangente d'un arc quelconque est égal au carré du rayon du cercle.*

379. THÉORÈME 156. *La sécante d'un arc est égale au carré du rayon divisé par le cosinus de cet arc; de sorte que* $\text{séc.}a = \frac{\text{R}^2}{\cos.a}$;

Car les triangles semblables IPM, IAT (fig. 195) donnent IP : IM :: IA : IT, et par conséquent $\cos.a : \text{R} :: \text{R} : \text{séc.}a = \frac{\text{R}^2}{\cos.a}$.

380. *Corollaire.* Nous avons vu (n°. 366) que le cosinus d'un angle obtus était négatif; par conséquent nous aurons $\text{séc.}(90°.+a) = -\frac{\text{R}^2.}{\cos.(90°.+a)}$.

381. THÉORÈME 157. *La cosécante d'un arc est égale au carré du rayon divisé par le sinus du même arc;* de sorte que $\text{cosé.}a = \frac{\text{R}^2}{\sin.a}$.

Car les triangles semblables IQM, IC*t* (fig. 195) donnent IQ ou PM : IM :: IC : I*t*, et par conséquent $\sin.a : \text{R} :: \text{R} : \text{cosé.}a = \frac{\text{R}^2}{\sin.a}$.

Remarque. On voit, par les quatre théorèmes précédens, que si l'on connaît le sinus et le cosinus d'un arc, on en aura facilement la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante; et que lorsqu'on a la tangente, on en déduit directement la cotangente au moyen de la formule $\text{tang.}a\ \text{cot.}a = \text{R}^2$, qui donne $\text{cot.}a = \frac{\text{R}^2}{\text{tang.}a}$. Il nous suffira donc de donner les formules relatives aux sinus, cosinus et tangentes, puisqu'au moyen de celles-ci et des précédentes on aura directement celles des autres lignes trigonométriques.

382. PROBLÈME 74. *On demande le sinus et le cosinus de la somme et ceux de la différence de deux arcs donnés, en fonction des sinus et cosinus de ces arcs.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Supposons que les arcs donnés soient AB, BC (fig. 196), et portons le plus petit BC sur le grand BA, de B en D : AC sera la somme, et AD la différence des arcs donnés. Abaissons les sinus CH, BK, et DP des arcs AC, AB et AD, et menons la corde CD et le rayon OB : le rayon OB divisera la corde CD en deux parties égales au point I. Abaissons, de plus, la perpendiculaire IG par le point I sur la droite AO, et par les points I et D, menons les droites IF, DE parallèles à AO : d'après toutes ces constructions, CH est le sinus de la somme, DP celui de la différence des arcs donnés ; OH est le cosinus de la somme, et OP celui de la différence des mêmes arcs.

1°. Mais CH = HF + FC ou GI + FC, et DP ou GE = GI — EI ; d'ailleurs les triangles DIE, ICF sont égaux, car ils ont un côté DI, IC égal et les angles égaux ; *donc* EI = FC ; donc CH = GI + FC, et DP = GI — FC ; ainsi si nous connaissions GI et FC, en ajoutant ces deux quantités, nous aurions le sinus de la somme, et en les retranchant l'un de l'autre, nous aurions le sinus de la différence des deux arcs donnés.

Or, les triangles semblables OIG, OBK donnent OB : OI : BK : GI, et par conséquent, en appelant a l'arc AB et b l'arc BC, R : cos.b :: sin.a : GI = $\frac{\sin.a\cos.b}{R}$ ....(1) Les triangles OBK, ICF donnent OB : IC :: OK : CF, et par conséquent R : sin.b :: cos.a : CF = $\frac{\sin.b\cos.a}{R}$ ..... (2) La somme des formules (1) et (2) sera donc le sinus de la somme des arcs a et b, c'est-à-dire que sin.$(a+b) = \frac{\sin.a\cos.b+\sin.b\cos.a}{R}$...($a$) ; et la différence de ces mêmes formules, sera le sinus de la différence des mêmes arcs ; c'est-à-dire que sin.$(a-b) = \frac{\sin a\cos.b-\sin.b\cos.a}{R}$.... ($b$)

2°. Le cosinus OH de la somme des deux arcs donnés = OG — HG, et le cosinus OP de la différence des mêmes arcs = OG + GP ; mais GH = GP ; car les triangles DIE, ICF étant égaux, IF = DE, et DE = GP, IF = GH comme parallèles comprises entre parallèles ; donc OH ou cos.$(a+b)$ = OG — IF....(3), et OP ou cos.$(a-b)$ = OG + IF.... (4)

Or, les triangles semblables OBK, OIG donnent OB : OI :: OK : OG, et par conséquent R : cos.b :: cos.a : OG = $\frac{\cos.a\cos.b}{R}$....(5) ; et les triangles semblables OBK, ICF, donnent OB : IC :: BK : IF, et par conséquent R : sin.b :: sin.a : IF = $\frac{\sin.a\sin.b}{R}$....(6). En vertu de la formule (3), si de la formule (5) nous retranchons la formule (6), nous aurons cos.$(a+b)$ = $\frac{\cos.a\cos.b-\sin.a\sin.b}{R}$ .... (c), et en vertu de la formule (4), si nous ajoutons les formules (5) et (6), nous aurons cos.$(a-b) = \frac{\cos.a\cos.b+\sin.a\sin.b}{R}$... ($d$)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Remarque. Les quatre formules (a), (b), (c) et (d) que nous venons de trouver, sont les plus importantes de toutes celles de la trigonométrie, en ce qu'elles renferment implicitement toutes les autres, ainsi que nous allons le voir : il est donc indispensable de les retenir dans la mémoire. A cet effet, on remarquera que les formules (a) et (b), ainsi que celles (c) et (d) peuvent se réunir en une seule, les deux premières en celle-ci :

$$\sin.(a \pm b) = \frac{\sin.a\cos.b \pm \sin.b\cos.a}{R};$$

et les deux dernières en celle-ci : $\cos.(a \pm b) = \frac{\cos.a\cos.b \mp \sin.a\sin.b}{R}$;

A cause de l'importance de ces formules, M. Legendre a démontré, dans son traité de trigonométrie, qu'elles avaient lieu dans tous les cas des arcs a et b. Nous ne répéterons point ici cette démonstration, mais nous ferons observer qu'il faut avoir égard aux relations précédentes pour donner aux termes de ces formules générales, les signes qui leur conviennent, suivant les cas.

383. THÉORÈME 158. *Le sinus d'un arc double d'un autre a, est égal à 2 fois le produit du sinus et du cosinus de l'arc a, divisé par le rayon du cercle; de sorte qu'on a* $\sin.2a = \frac{2\sin.a\cos.a}{R}$.

Soit en effet AD (fig. 197) l'arc donné; si l'on fait DB = AD, l'arc double sera ADB, le sinus de cet arc double sera BC, et si l'on mène la corde AB et le rayon DI, AE ou BE sera le sinus de l'arc donné AD ou DB.

Le cosinus de l'arc AB sera CI, et celui de l'arc AD ou DB sera IH ou IE. Cela posé, menons la droite EG perpendiculaire et EF parallèle à AI, nous aurons les triangles égaux AEG, EFB, qui donneront GE=BF, et les triangles semblables DIH, EIG, qui donneront ID : IE :: DH : GE, ou R : cos.a :: sin.a : GE = $\frac{\sin.a\cos.a}{R}$, en faisant AD=a. Mais BC ou sin.$2a$=CF+FB = GE+FB = 2GE; donc $\sin.2a = \frac{2\sin.a\cos.a}{R}$; ce qu'il fallait démontrer.

Si, dans la formule $\sin.(a+b) = \frac{\sin.a\cos.b + \sin.b\cos.a}{R}$, on fait $b = a$; elle deviendra $\sin.(a+a) = \frac{\sin.a\cos.a + \sin.a\cos.a}{R}$, ou $\sin.2a = \frac{2\sin.a\cos.a}{R}$, comme ci-dessus.

384. THÉORÈME 159. *Le cosinus d'un arc double d'un autre a est égal au carré du cosinus de cet arc a, moins le carré du sinus de ce même arc a, et le tout divisé par le rayon du cercle; de sorte que* $\cos.2a = \frac{\cos.^2a - \sin.^2a}{R}$.

En effet, supposons (fig. 197) la même construction que dans le numéro

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

précédent ; nous aurons les triangles semblables IDH, IEG, qui nous donneront ID : IE :: IH : IG, ou R : cos.a :: cos.a : IG $= \frac{\cos.^2 a}{R}$. De plus, les triangles semblables, IDH, EBF, nous donneront ID : EB :: HD : EF ou R : sin.a :: sin.a : EF $= \frac{\sin.^2 a}{R}$. Mais le cosinus de l'arc double AB ou $2a$ est IC = IG − CG = IG − EF ; donc cos.$2a = \frac{\cos.^2 a - \sin.^2 a}{R}$; ce qu'il fallait démontrer.

Si dans la formule cos.$(a+b) = \frac{\cos.a\cos.b - \sin.a\sin.b}{R}$ on fait $b = a$, elle deviendra cos.$(a+a) = \frac{\cos.a\cos.a - \sin.a\sin.a}{R}$, ou cos.$2a = \frac{\cos.^2 a - \sin.^2 a}{R}$, comme ci-dessus.

385. THÉORÈME 160. *Le sinus de la moitié d'un arc est égal à la racine carrée de la moitié du carré du rayon, moins la moitié du rayon multipliée par le cosinus de l'arc entier ; c'est-à-dire que* sin.$\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R\cos.a}$.

Soit AB l'arc donné (fig. 197) et BC son sinus ; si l'on mène le rayon ID au milieu de cet arc et la corde AB, BE ou AE sera le sinus de la moitié de l'arc AB. Abaissons le sinus DH de l'arc AD : les triangles ABC, IDH seront semblables, et nous donneront AB : ID :: AC : DH ou 2sin.$\frac{1}{2}a$: R :: AC : sin.$\frac{1}{2}a$. Mais AC = AI − IC = R − cos.a ; donc 2sin.$\frac{1}{2}a$: R :: R − cos.a : sin.$\frac{1}{2}a$; d'où 2sin.$^2\frac{1}{2}a = R^2 - R\cos.a$, ou sin.$^2\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R\cos.a$, et par conséquent sin.$\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R.\cos.a}$; ce qu'il fallait démontrer.

Dans la formule cos.$2a = \frac{\cos.^2 a \sin.^2 a}{R}$ on peut mettre $\frac{1}{2}a$ au lieu de a, et faire disparaître le dénominateur R, ce qui donnera R cos.a = cos.$^2\frac{1}{2}a$ − sin.$^2\frac{1}{2}a$....(1) Mais (n°. 371) cos.$^2\frac{1}{2}a = R^2 - \sin.^2\frac{1}{2}a$; en substituant, on aura donc R cos.$a = R^2 - \sin.^2\frac{1}{2}a - \sin.^2\frac{1}{2}a = R^2 - 2\sin.^2\frac{1}{2}a$. Qu'on fasse passer maintenant 2sin.$^2\frac{1}{2}a$ du second dans le premier membre, et R cos.a du premier dans le second, et on aura 2sin.$^2\frac{1}{2}a = R^2 - R\cos.a$, ou sin.$^2\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R\cos.a$, et par conséquent sin.$\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R\cos.a}$.

386. THÉORÈME 161. *Le cosinus de la moitié d'un arc est égal à la racine carrée de la moitié du carré du rayon, plus la moitié du rayon multipliée par le cosinus de l'arc entier ; c'est-à-dire que* cos.$\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R\cos.a}$.

En effet, supposons (fig. 197) les mêmes choses que dans le numéro précédent : le triangle rectangle IDH nous donnera $(IH)^2 = (ID)^2 - (DH)^2$, ou cos.$^2\frac{1}{2} = R^2 - \sin.^2\frac{1}{2}a$. Mais sin.$^2\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R\cos.a$ (n°. 385) ; donc cos.$^2\frac{1}{2}a = R^2 - \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R\cos.a = \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R\cos.a$; d'où cos.$\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R\cos.a}$.

Si, dans la formule (1) ci-dessus nous mettons $R^2 - \cos.^2\frac{1}{2}a$ au lieu de sin.$^2\frac{1}{2}a$ (n°. 385), nous aurons R cos.a = cos.$^2\frac{1}{2}a - R^2 + \cos.^2\frac{1}{2}a = 2\cos.^2\frac{1}{2}a - R^2$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Changeons les signes dans les deux membres, passons $-2\cos.^2\frac{1}{2}a$ dans le premier, et $-R\cos.a$ dans le second, et nous aurons $2\cos.^2\frac{1}{2}a = R^2+R\cos.a$; d'où nous tirerons $\cos.\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}R\cos.a}$; comme ci-dessus.

387. THÉORÈME 162. *La tangente de la somme de deux arcs a et b est égale au carré du rayon multiplié par la somme des tangentes des arcs donnés, et divisé par le carré du rayon moins le produit des mêmes tangentes; c'est-à-dire que* $\text{tang.}(a+b) = \frac{R^2(\text{tang.}a+\text{tang.}b)}{R^2-\text{tang.}a\,\text{tang.}b}$.

En effet, d'après le n°. 373, $\text{tang.}(a+b) = \frac{R\sin.(a+b)}{\cos.(a+b)}$; mais (n°. 382) $\sin.(a+b) = \frac{\sin.a\cos.+\sin.b\cos.a}{R}$, et $\cos.(a+b) = \frac{\cos.a\cos.b-\sin.a\sin.b}{R}$; donc $\text{tang.}(a+b) = \frac{R(\sin.a\cos.b+\sin.b\cos.a)}{\cos.a\cos.b-\sin.a\sin.b}$, ou en divisant le numérateur et le dénominateur du second membre par $\cos.a\cos.b$, $\text{tang.}(a+b) = \frac{R\left(\frac{\sin.a}{\cos.a}+\frac{\sin.b}{\cos.b}\right)}{1-\frac{\sin.a}{\cos.a}\cdot\frac{\sin.b}{\cos.b}}$; or, $\frac{\sin.a}{\cos.a} = \frac{\text{tang.}a}{R}$ et $\frac{\sin.b}{\cos.b} = \frac{\text{tang.}b}{R}$; donc, $\text{tang.}(a+b) = \frac{R\left(\frac{\text{tang.}a}{R}+\frac{\text{tang.}b}{R}\right)}{1-\frac{\text{tang.}a\,\text{tang.}b}{R.}} = \frac{R^2(\text{tang.}a+\text{tang.}b)}{R^2-\text{tang.}a\,\text{tang.}b}$; ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Par un moyen semblable, on démontrerait que $\text{tang.}(a-b) = \frac{R^2(\text{tang.}a-\text{tang.}b}{R^2+\text{tang.}a\,\text{tang.}b}$.

388. *Corollaire.* Si dans la formule $\text{tang.}(a+b) = \frac{R^2(\text{tang.}a+\text{tang.}b)}{R^2-\text{tang.}a\,\text{tang.}b}$, on fait $b=a$, il viendra $\text{tang.}2a = \frac{2R^2\text{tang.}a}{R^2-\text{tang.}^2a}$, d'où il suit que la tangente d'un arc double d'un arc donné est égale à 2 fois le carré du rayon multiplié par la tangente de l'arc donné, et divisé par la différence des carrés du rayon et de la même tangente.

Nous ne pousserons pas plus loin les formules trigonométriques; ceux qui seront curieux d'en connaître un plus grand nombre, pourront consulter les ouvrages de MM. Lacroix, Legendre, Mauduit, etc.

Au moyen des formules qui précèdent, et de quelques autres que nous n'avons pas données, on pourrait calculer les sinus, cosinus, tangentes, etc. des arcs ou angles d'un nombre quelconque de degrés. Nous ne nous arrêterons point à indiquer la manière de faire ces calculs, parce que des savans utiles ont construit des tables dans lesquelles on les trouve tout faits. La plupart de ces tables ne renferment pas les sinus, cosinus, etc. eux-mêmes, mais seulement leurs logarithmes, parce que dans la pratique les logarithmes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sont plus commodes que les sinus, cosinus, etc. naturels. Quant à la manière de se servir de ces tables, nous renverrons le lecteur à l'explication dont elles sont toujours accompagnées. Chaque table de logarithme des nombres, est toujours suivie d'une table de sinus, cosinus, etc. : c'est à celle de Callet que nous renvoyons le lecteur.

20^me^. LEÇON.

Principes de la résolution des Triangles rectilignes.

389. THÉORÈME 163. *Dans tout triangle rectangle, le rayon des tables des sinus est au sinus d'un des angles aigus, comme l'hypothénuse est au côté opposé à cet angle aigu.*

Soit ABC (fig. 198) le triangle proposé; par le sommet A de l'angle aigu CAB, comme centre, et avec le rayon des tables, décrivons l'arc ED, et par le point E, abaissons EG perpendiculaire à AB; nous aurons AE : EG :: AC : BC. Mais AE est le rayon des tables, et EG est le sinus de l'angle A; donc R : sin.A :: AC : BC; ce qu'il fallait démontrer.

390. *Corollaire.* De cette proportion on tire $BC = \frac{AC \times \sin.A}{R}$ d'où *il suit que l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal au sinus de l'angle aigu opposé, multiplié par l'hypothénuse et divisé par le rayon des tables.*

391. THÉORÈME 164. *Dans tout triangle rectangle, le rayon des tables est au cosinus d'un des angles aigus, comme l'hypothénuse est au côté adjacent à cet angle aigu.*

Soit ABC (fig. 198) le triangle proposé; par le sommet A soit décrit l'arc ED avec le rayon des tables, et par le point E, soit abaissée sur AB la perpendiculaire EG; on aura AE : AG :: AC : AB, ou R : cos.A :: AC : AB; ce qu'il fallait démontrer.

392. *Corollaire.* De cette proportion on tire $AB = \frac{AC \times \cos.A}{R}$; *d'où il suit qu'un côté de l'angle droit est égal à l'hypothénuse multipliée par le cosinus de l'angle adjacent au côté, et divisé par le rayon des tables.*

393. THÉORÈME 165. *Dans tout triangle rectangle, le rayon est à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté adjacent à cet angle est au côté opposé.*

Ayant décrit l'arc ED (fig. 198) comme précédemment, par le point D

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on élevera sur AB la perpendiculaire DF, qui sera la tangente de l'angle A, et on aura AD : DF :: AB : BC, ou R : tang.A :: AB : BC.

394. THÉORÈME 166. *Dans un triangle rectiligne quelconque, les sinus des angles sont comme les côtés opposés.*

Soit ABC (fig. 60 et 61) le triangle proposé; si par le sommet C on abaisse la perpendiculaire CD sur le côté AB opposé, prolongé, s'il est nécessaire, on aura les deux triangles rectangles ACD, BCD, qui donneront, d'après ce qui précède (en observant (n°. 365) que le sinus d'un arc est égal à celui de son supplément), R : sin.A :: AC : CD et R : sin.B :: BC : CD; donc sin.A : sin.B :: AC : BC; ce qu'il fallait démontrer.

395. THÉORÈME 167. *Dans un triangle rectiligne quelconque, le cosinus d'un angle est égal au rayon des tables multiplié par la somme des carrés des côtés qui comprennent cet angle, moins le carré du côté opposé, le tout divisé par le double produit des premiers côtés.*

En effet, nous avons vu (n°. 157) que (fig. 60) $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2AB \times DB$. Mais (n°. 391) R : cos.B :: BC : BD $= \frac{BC \times \cos.B}{R}$; en substituant on aura donc $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - \frac{2AB \times BC \times \cos.B}{R}$, d'où $R(AC)^2 = R(AB)^2 + R(CB)^2 - 2AB \times BC \times \cos.B$; d'où $\cos.B = \frac{R((AB)^2 + (BC)^2 - (AC)^2)}{2AB \times BC}$, ce qu'il fallait démontrer.

396. *Remarque* 1. Si l'on appelle a, b et c les côtés d'un triangle, et A, B et C les angles opposés, la formule ci-dessus deviendra $\cos.B = \frac{R(a^2+c^2-b^2)}{2ac}$.

Il est clair qu'on aurait de même $\cos.A = \frac{R(b^2+c^2-a^2)}{2bc}$, et $\cos.C = \frac{R(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$.

397. *Remarque* 2. Ces formules peuvent se changer en d'autres plus commodes pour les calculs logarithmiques.

Pour cela, dans la formule $\sin.\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R\cos.A}$ (n°. 385), à la place de cos.A, on mettra sa valeur trouvée ci-dessus, et on aura $\sin.\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 - \frac{\frac{1}{2}R^2(b^2+c^2-a^2)}{2bc}} = \sqrt{R^2\frac{(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4bc}} = R\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} = R\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$. si au lieu de l'angle A il s'agissait de l'angle B, on n'aurait, dans cette dernière formule, qu'à changer a en b, et b en a, et il viendrait $\sin.\frac{1}{2}B = R\sqrt{\frac{(b+a-c)(b-a+c)}{4ac}}$, et pour l'angle C on aurait : $\sin.\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(c+b-a)(c-b+a)}{4ab}}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

398. THÉORÈME 168. *La somme des sinus de deux arcs est à la différence des mêmes sinus, comme la tangente de la demi-somme des mêmes arcs est à la tangente de la demi-différence de ces arcs.*

Soient AB le grand arc (fig. 199) et AC le petit; sur le diamètre AN, et par les points B et C, on abaissera les perpendiculaires BD, CL, ce qui donnera l'arc AD = AB, CL pour le sinus de l'arc AC et BM pour celui de AB; par le point C, on menera la droite CE parallèle au diamètre AN, et, par le point E, on menera les cordes EB, ED; par le même point E, comme centre, et avec le rayon du cercle ABED, on décrira l'arc HG, et par le point F où cet arc coupe la droite CE, on élevera, à cette droite CE, la perpendiculaire HI. D'après ces constructions, il est évident, 1°. que l'arc CD = AB + AC, puisque AD = AB; 2°. que l'angle CED, ayant pour mesure la moitié de l'arc CD, est la demi-somme des angles donnés; 3°. que CB = AB — AC, et par conséquent que l'angle BEC est la demi-différence des deux angles donnés; 4°. que FI est la tangente de la demi-somme des angles ou arcs donnés, 5°. que FH est la tangente de la demi-différence de ces mêmes arcs; 6°. que KD = KM + MD = CL + MB est la somme des sinus des arcs donnés; et 7°. que KB est la différence des mêmes sinus. Mais les triangles semblables EKD, EFI donnent EK : EF :: KD : FI, et les triangles semblables EKB, EFH donnent EK : EF :: KB : FH; d'où KD : FI :: KB : FH, ou KD : KB :: FI : FH; or, nous venons de voir que KD = sin. AB + sin. AC, que KB = sin. AB — sin. AC, que FI = tang. $\frac{AB+AC}{2}$, et que FH = tang. $\frac{AB-AC}{2}$; donc sin. AB + sin. AC : sin. AB — sin. AC :: tang. $\frac{AB+AC}{2}$: tang. $\frac{AB-AC}{2}$; ce qu'il fallait démontrer.

399. THÉORÈME 169. *Dans un triangle rectiligne quelconque, la somme de deux côtés est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des deux angles opposés à ces côtés est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.*

En effet, soit a et b les côtés donnés, et A et B les angles opposés; d'après le n°. 394, nous aurons $a : b ::$ sin. A : sin. B; d'où $a + b : a - b ::$ sin. A + sin. B : sin. A — sin. B; mais, d'après le théorème précédent, sin. A + sin. B : sin. A — sin. B :: tang. $\frac{A+B}{2}$: tang. $\frac{A-B}{2}$; donc $a + b : a - b ::$ tang. $\frac{A+B}{2}$: tang. $\frac{A-B}{2}$; ce qu'il fallait démontrer.

Tels sont les principes qui renferment tous les cas de la résolution des triangles rectilignes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

21^me^. LEÇON.

Exemples de la Résolution des Triangles rectilignes.

400. PROBLÊME 75. *On connaît l'hypothénuse* $a = 1215$ *d'un triangle rectangle, un angle aigu* $B = 48°$., *et on demande les deux côtés* b *et* c *de l'angle droit, et l'angle aigu* C.

Le principe du n°. 389, donne (1)..... $R : \sin.B :: a : b$, et celui du n°. 391 (2).... $R : \cos.B :: a : c$, on aura donc $R : \sin.48° :: 1215 : b = \frac{1215 \times \sin.48°.}{R}$, et $R : \cos.48° :: 1215 : c = \frac{1215 \times \cos.48°}{R}$.

Cela posé, on opérera par logarithme (voyez les logarithmes, page 161), ainsi qu'il suit :

1°.
$$\begin{aligned} &\log.\,1215 &&= 3{,}0845763\\ +\ &\log.\sin.48° &&= 9{,}8710735\\ &\text{somme} &&= 12{,}9556498\\ -\ &\log.R &&= 10{,}0000000\\ &\text{reste } \log.b &&= 2{,}9556498\\ &\text{et } b &&= 902{,}93 \end{aligned}$$

2°.
$$\begin{aligned} &\log.\,1215 &&= 3{,}0845763\\ +\ &\log.\cos.48° &&= 9{,}8255109\\ &\text{somme} &&= 12{,}9100872\\ -\ &\log.R &&= 10{,}0000000\\ &\text{reste } \log.c &&= 2{,}9100872\\ &\text{et } c &&= 813{,}094. \end{aligned}$$

Quant à l'angle aigu C, on l'aura en retranchant 48°. de 90°., ce qui donnera $C = 42°$.; car la somme des trois angles d'un triangle quelconque étant égale à deux angles droits, dans un triangle rectangle, les deux angles aigus valent ensemble 90°.

401. PROBLÊME 76. *On donne un côté* $b = 902{,}93$ *de l'angle droit d'un triangle rectangle, et l'angle aigu* $B = 48°$. *opposé au côté donné* b, *et on demande l'hypothénuse* a *et l'autre côté* c *de l'angle droit.*

La proportion (1) du problème précédent, fera connaître l'hypothénuse; car, dans cette proportion, tout est connu, excepté l'hypothétuse a. Si donc on substitue les nombres donnés, on aura $R : \sin.48° :: a : 902{,}93$; d'où $a = \frac{R \times 902{,}93}{\sin.48°.}$, et en opérant par logarithmes, on aura:

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

	log.R	= 10,0000000
+	log.902,93	= 2,9556498
	somme	= 12,9556498
—	log.sin.48°.	= 9,8710735
	reste log.a	= 3,0845763
	et enfin, a	= 1215.

Quant au côté c de l'angle droit, il est clair qu'on l'aura par la proportion (2) du problême précédent, ayant préalablement trouvé l'hypothénuse; mais on peut avoir ce côté c directement par le principe du n°. 393, en cherchant l'angle aigu C = 90°. — B = 90°. — 48°. = 42°.; car R : tang.C :: b : c, où R : tang.42°. :: 902,93 : $c = \frac{902,93 \times \text{tang.}42°.}{\text{R}}$, et en prenant les logarithmes, on aura :

	log.902,93	= 2,9556498
+	log.tang.42°.	= 9,9544374
	somme	= 12,9100872
—	log.R	= 10,0000000
	reste log.c	= 2,9100872
	et c	= 813,094

402. PROBLÊME 77. *On donne les trois côtés a, b et c d'un triangle rectangle dont a est l'hypothénuse, et on demande les deux angles aigus* B *et* C.

Le principe du n°. 389 nous donnera R : sin.B :: a : b, et R : sin.C :: a : c, d'où nous tirerons $\text{sin.B} = \frac{\text{R} \cdot b}{a}$, et $\text{sin.C} = \frac{\text{R} \cdot c}{a}$. Si donc $a = 5$, $b = 4$, et $c = 3$, on aura $\text{sin.B} = \frac{\text{R} \times 4}{5}$, et $\text{sin.C} = \frac{\text{R} \times 3}{5}$, et en appliquant les logarithmes,

1°.

	log. R	= 10,0000000
+	log.4	= 0,60205999
	somme	= 10,60205999
—	log.5	= 0,69897000
	reste log.sin.B	= 9,90308999
	d'où B	= 53°.8′;

2°.

	log.R	= 10,0000000
+	log.3	= 0,47712125
	somme	= 10,47712125
—	log.5	= 0,69897000
	reste log.sin.C	= 9,77815125
	d'où C	= 36°. 52′.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour vérifier ces résultats, on les ajoutera ensemble, et si leur somme égale 90°. ils seront bons.

On conçoit que l'un de ces angles étant trouvé, il suffirait de le retrancher de 90°. pour avoir l'autre, mais comme moyen de vérification, il est nécessaire de les calculer séparément, ainsi que nous venons de le faire.

403. PROBLÈME 78. *On donne un côté* $a = 358$ *d'un triangle quelconque, les angles adjacens* B $= 48°$. *et* C $= 75°$., *et on demande le* 3e. *angle* A *et les deux autres côtés b et c de ce triangle.*

Pour avoir le troisième angle A, on se rappelera que la somme des trois angles d'un triangle rectiligne quelconque est égale à 180°., d'où il sera facile d'en conclure que l'angle demandé A$=180°.-$B$-$C$=180°.-48°.-75°. = 180°.- 123°. = 57°.$

Nous avons vu (n°. 394) que sin.A : sin.B :: a : b, et sin.A : sin.C :: a : c; il suffira donc de substituer dans ces proportions les nombres donnés aux lettres qui les représentent, ce qui donnera sin.57°. : sin.48°. :: 358 : $b = \frac{358 \times \text{sin.48°.}}{\text{sin.57°.}}$, et sin.57°. : sin.75°. :: 358 : $c = \frac{358 \times \text{sin.75°.}}{\text{sin.57°.}}$, et d'opérer ensuite par logarithmes, ainsi qu'il suit :

1°.	log.358.	=	2,5538803
+	log.sin.48°.	=	9,8710735
	somme	=	12,42495653
—	log.sin.57°.	=	9,9235914
	reste log.b	=	2,5003651 3
	et on aura b	=	316,494
2°.	log.358	=	2,5538803
+	log.sin.75°.	=	9,9849438
	somme	=	12,53882683
—	log.sin.57°.	=	9,9235914
	reste log.c	=	2,61523543
	et on aura c	=	412,32.

404. PROBLÈME 79. *On donne deux côtés* $b = 365$ *et* $c = 234$, *et l'angle* A $= 65°$. *compris entre les côtés donnés b et c d'un triangle rectiligne quelconque, et on demande les deux autres angles* B *et* C, *et le troisième côté a.*

On connaît la somme des deux angles demandés B et C, puisque le troisième angle A est donné, et que la somme totale est 180°. Or, si de plus nous connaissions leur différence, nous aurions (alg. n°. 233) le plus grand, en ajoutant la demi-différence à la demi-somme, et le plus petit, en retranchant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la demi-différence de la demi-somme. Mais le principe du n°. 399, nous donne $b+c : b-c :: \text{tang.}\frac{B+C}{2} : \text{tang.}\frac{B-C}{2}$; cette proportion nous fera donc connaître la tangente de la demi-différence des deux angles demandés; substituons donc les nombres donnés, et cherchons la valeur de $\frac{B+C}{2}$; que nous trouverons $= 57°.30'$, et il nous viendra $365+234 : 365-234 ::$ tang.$57°.30' :$ tang. x, x étant $\frac{B-C}{2}$, ce qui revient à $599 : 131 ::$ tang.$57°.30' :$ tang.$x = \frac{131 \times \text{tang.}57°.30'}{599}$. Appliquons les logarithmes, et nous aurons :

	log.131	= 2,1172713
+	log.tang.$57°.30'$	= 10,1958127
	somme	= 12,3130840 0
—	log.599	= 2,7774268 2
	reste log.tang.x	= 9,5356571 8

d'où $x = 18°.56'.40''.39'''$,

donc le grand angle $B = 57°.30'. + 18°.56'.40''.39'''. = 76°.26'.40''.39'''$, et le petit $C = 57°.30'. - 18°.56'.40''.39'''. = 38°.33'.19''.21'''$.

Maintenant que nous connaissons les trois angles, nous aurons le troisième côté a demandé, en faisant usage du principe du n°. 394, qui nous donne : sin.B : sin.A :: $b : a$, ou en substituant, sin.$76°.26'.40''.39''' :$ sin.$65°. ::$ 365 : a $\frac{365 \times \text{sin.}65°.}{\text{sin.}76°.26'.40'',39'''.}$. En appliquant les logarithmes, nous aurons :

	log.365	= 2,5622928 6
+	log.sin.$65°.$	= 9,9572757
	somme	= 12,5195685 6
—	log.sin.$76°.26'.40''.39'''$	= 9,9887730 3
	reste log.a	= 2,5318383 6

d'où $a = 340,281$.

405. PROBLÈME 80. *On donne les trois côtés* $a = 203,247$, $b = 365$ *et* $c \times 234$ *d'un triangle rectiligne quelconque, et l'on demande les trois angles* A, B *et* C.

Le principe du n°. 397 nous donne $\sin.\frac{1}{2}A = R\sqrt{\left(\frac{(a+b-c)\ (a-b+c)}{4bc}\right)}$.

Mettons donc les nombres donnés au lieu de a, b et c, dans cette formule, et il viendra

$$a+b-c = 203,247+365-234 = 334,247,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$a-b+c=203{,}247-365+234=72{,}247$; d'où

$\sin.\frac{1}{2}A=R\sqrt{\left(\frac{334{,}247\times 72{,}247}{4\times 365\times 234}\right)}$. En appliquant les logarithmes, il viendra

$\log.\sin.\frac{1}{2}A=\log.R+\frac{1}{2}\log.\left(\frac{334{,}247\times 72{,}247}{4\times 365\times 234}\right)$...(1)(Voy. Alg., n°. 160). Mais

$\log.\left(\frac{334{,}247\times 72{,}24}{4\times 365\times 234}\right)=\log.(334{,}247\times 72{,}247)-\log.(4\times 365\times 234)$...(2);

$\log.(334{,}247\times 72{,}247)=\log.334{,}247+\log.72{,}247$,..... (3) et

$\log.(4\times 365\times 234)=\log.4+\log.365+\log.234$..... (4).

Effectuons les calculs pour les égalités (3) et (4); pour la première nous aurons ;

$$\begin{array}{rl} \log.334{,}247 & = 2{,}5240675 \\ +\ \log.72{,}247 & = 1{,}8588198 \\ \text{somme} & = 4{,}3828873 \end{array}$$

et pour la seconde :

$$\begin{array}{rl} \log.4 & = 0{,}60205999 \\ +\ \log.365 & = 2{,}56229286 \\ +\ \log.234 & = 2{,}36921586 \\ \text{somme} & = 5{,}53356871 \end{array}$$

Substituons ces deux sommes dans l'égalité (2), en observant que c'est la seconde qui a le signe —, et nous aurons :

$\log.\left(\frac{334{,}247\times 72{,}247}{4\times 365\times 234}\right)=4{,}3828873-5{,}53356871=-1{,}15068141$; et substituons enfin dans l'égalité (1), et il nous viendra :

$\log.\sin.\frac{1}{2}A=\log.R-\frac{1}{2}\times 1{,}15068141=\log.R-0{,}5753407=10{,}0000000-0{,}5753407=9{,}4246593$; et dans les tables nous trouverons que $\frac{1}{2}A=15°.25'.5''.$, et par conséquent $A=30°.50'.10''$.

On pourrait calculer les deux autres angles d'après le même principe, mais il sera plus simple, maintenant que l'on connaît un angle et les deux côtés b et c qui le comprennent, de se servir du principe du n°. 399, ainsi que nous l'avons fait au n°. 404.

Ce qui précède sur la trigonométrie étant bien entendu, nous suffira pour les besoins que nous en aurons par la suite; mais il importe que le lecteur s'exerce beaucoup dans les calculs que nous venons d'indiquer, en se donnant un grand nombre d'exemples.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

22^me^. LEÇON.

Notions et Définitions sur les Courbes en général.

406. On peut concevoir les lignes comme étant composées d'une suite de points ne laissant entre eux aucun intervalle, ou comme étant la trace qu'on peut imaginer laissée dans l'espace ou sur un plan par un point mis en mouvement suivant certaine loi déterminée.

Comme un point peut être mu d'une infinité de manières, il s'ensuit qu'il y a une infinité de lignes différentes.

Les lignes sont droites ou courbes.

Il n'y a qu'une espèce de lignes droites, mais il y en a une infinité de courbes différentes. Une ligne courbe n'est ni droite, ni composée de lignes droites.

Toutes les courbes sont comprises dans les quatre classes suivantes : les *courbes fermées*, les *courbes ouvertes*, les *courbes à inflexion* et les *courbes à rebroussement*.

407. La trace d'un point qui, après avoir fait une révolution entière, repasse, dans les révolutions suivantes, par le chemin qu'il a déjà parcouru sans jamais se diriger en ligne droite, est une *courbe fermée*.

408. Si le point, dans son mouvement, s'éloigne sans cesse du lieu d'où il est parti sans se diriger en ligne droite, sa trace sera une *courbe ouverte*.

409. Dans les *courbes à inflexion*, il y a au moins un point tel, que les parties de courbe situées à droite et à gauche de ce point tournent leur concavité en sens contraire l'une de l'autre.

410. Lorsque dans son mouvement un point s'arrête brusquement pour retourner sur ses pas sans repasser par le chemin qu'il a déjà parcouru, et sans jamais se diriger en ligne droite, sa trace est une *courbe à rebroussement*.

411. Ces quatre espèces de courbes sont planes ou à double courbure.

Une courbe est plane, lorsqu'elle a tous ses points situés dans le même plan.

Les courbes à double courbure, au contraire, ne peuvent être tracées que dans l'espace ou sur des surfaces courbes.

Une même courbe peut être fermée, à inflexion et à rebroussement tout à la fois, ou n'être que d'une seule espèce.

Indépendamment de leur forme, on distingue les courbes par le degré de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

leurs équations. Ainsi on dit d'une courbe qu'elle est du second, du troisième, du quatrième, etc. degré ou ordre, selon que son équation est du second, du troisième, du quatrième degré. La ligne du premier degré, c'est-à-dire celle dont l'équation est du premier degré, est droite. Les équations sont algébriques ou transcendantes; de là les courbes algébriques et les courbes transcendantes. Les équations transcendantes sont celles qui renferment des logarithmes ou des arcs de cercle, etc.

412. Puisque, quelle que soit la nature d'une ligne, on peut la concevoir composée d'une suite de points ne laissant entre eux aucun intervalle, il est clair qu'une ligne serait décrite si l'on établissait la position respective de tous les points qui la composent.

La position respective des points d'une ligne plane dépend évidemment de la nature de cette ligne, et de sa position sur son plan.

La nature d'une ligne est donnée par des conditions qu'elle seule peut remplir. Quant à sa position sur son plan, elle dépend de celle d'un nombre suffisant de ses points, ou de quelques autres conditions équivalentes.

Voyons d'abord comment on parvient à déterminer la position d'un ou de plusieurs points sur un plan.

413. Ne pouvant déterminer la position d'un point que d'une manière relative, les géomètres sont convenus de rapporter cette détermination à deux droites prises dans le plan même sur lequel on veut déterminer la position du point en question. Ces droites font, entre elles, un angle quelconque, qui est le plus souvent droit.

Ainsi, par exemple, s'il s'agissait de déterminer la position du point M (fig. 200), on le rapporterait à deux droites B′B, C′C, en menant par ce point M les droites MP, MQ respectivement parallèles aux droites C′C, B′B, et on définirait la position du point M au moyen des distances AP, AQ, en disant que le point M en question est à l'intersection de deux droites PM, QM, respectivement parallèles aux droites données C′C, B′B, et menées par les points P et Q distans du point A des quantités données AP, AQ.

Les distances AP, PM rempliraient évidemment le même objet, puisque si l'on avait ces distances il suffirait de mener par le point P une parallèle PM à la droite AC, et de porter ensuite la distance PM de P en M sur cette droite PM pour avoir la position du point M.

On conçoit de même que, les distances AQ, QM suffiraient pour déterminer le point M. On remarquera, d'ailleurs, qu'à cause du parallélisme des droites AP, QM et AQ, PM, on a AP = QM et AQ = PM.

414. Les distances AP, PM ou AQ, QM qui servent à déterminer la po-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sition du point M, prennent le nom commun de *coordonnées* de ce point M; les droites B′B, C′C auxquelles on rapporte la position de ce point, se nomment les *axes des coordonnées*, et le point A où les axes se rencontrent, se nomme l'origine des *coordonnées*. La distance AP de l'origine au point P où la droite PM rencontre l'axe B′B, s'appelle l'*abscisse*, et l'autre distance PM l'*ordonnée* du point M : si l'on avait pris les distances AQ, QM pour déterminer le point M, l'*abscisse* aurait été AQ et l'*ordonnée* QM. L'axe sur lequel on compte les abscisses se nomme l'*axe des abscisses*, et celui auquel les ordonnées sont toujours parallèles s'appelle l'*axe des ordonnées*. Les coordonnées d'un point ou d'un système de points sont *rectangulaires* ou *obliques*, selon que l'angle BAC des axes est droit ou oblique.

415. Comme ce qui précède sur la détermination de la position d'un point est évidemment applicable à un nombre quelconque de points situés sur le même plan, il s'ensuit que si de tant de points qu'on voudra M, M′, M″,... (fig. 201) d'une courbe quelconque rapportée aux axes AB, AC, on mène des parallèles MP, M′P′, M″P″,... à l'axe AC des ordonnées, les distances AP, AP′, AP″,... seront les abscisses, et les droites PM, P′M′, P″M″,... seront les ordonnées respectives de tous les points M, M′, M″,... de cette courbe.

416. Il suit donc de là que la position respective des points d'une ligne dépend et de la grandeur, et de la direction des coordonnées des points successifs de cette ligne.

Or, les coordonnées des différens points d'une ligne sont des quantités : on pourra donc les ajouter, les soustraire, les multiplier, les diviser, les élever à des puissances, en extraire des racines, etc. Si donc il existait une relation définissable entre les coordonnées successives d'une ligne, il serait possible d'établir une équation qui renfermât cette relation.

En effet, supposons (fig. 202) une courbe ADBE, qui intercepte la droite AB, et telle que, si d'un point quelconque M on abaisse une perpendiculaire MP sur la droite AB, cette perpendiculaire PM soit moyenne proportionnelle entre les segmens AP, PB; en appelant $2a$ la droite AB, x le segment AP, et y la perpendiculaire PM, on aura d'abord le segment $PB = 2a - x$, et puisque $AP : PM :: PM : PB$, on aura $x : y :: y : 2a - x$, d'où

$$y^2 = x(2a - x), \text{ ou } y^2 = 2ax - x^2.$$

Ainsi, si l'on prend les droites AB, AC′ pour les axes des coordonnées de cette courbe, AB étant l'axe des abscisses, l'équation $y^2 = 2ax - x^2$ renfermera la relation des coordonnées de cette courbe; de sorte que quand on donnera à l'abscisse x une valeur numérique égale à AP, ou à AP′, ou, etc., cette équation donnera pour l'ordonnée y, la valeur numérique PM, ou P′M′,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou, etc., de manière que ce point M, ou M′, ou, etc., sera sur la courbe. Or, il est évident qu'il serait également possible d'établir une équation qui renfermât toute autre relation entre les coordonnées x, y d'une courbe quelconque, pourvu que cette relation fût assignable; donc il est démontré que si l'on donne une courbe quelconque par des conditions que cette courbe seule puisse remplir, on pourra toujours exprimer cette courbe par une équation qui n'appartiendra qu'à cette courbe.

417. Il nous reste à démontrer que l'équation qui renferme la relation des coordonnées d'une ligne, donne non-seulement la grandeur, mais encore la direction des coordonnées, pour avoir démontré que cette équation renferme toutes les circonstances de cette ligne; car nous avons vu (n°. 416) que la position respective des points successifs d'une ligne dépend, et de la grandeur, et de la direction des coordonnées de cette ligne.

Or, nous avons vu en algèbre, que quand la valeur de l'inconnu se présente avec le signe —, on doit renverser l'état de la question, et cela dans tous les cas, comme on l'a vu par le problème des courriers (n°. 261) et par celui des fontaines (n°. 266); donc si l'on convient de porter les coordonnées positives dans un sens, il faudra porter nécessairement les coordonnées négatives en sens directement contraire. Il suit de là que l'équation qui renferme la relation des coordonnées d'une ligne quelconque, ne laisse rien à désirer sur la détermination des coordonnées de cette ligne.

Nous conviendrons une fois pour toutes, que les abscisses positives seront portées, à partir de l'origine, de gauche à droite sur l'axe des abscisses, et les ordonnées positives seront portées au-dessus de l'axe des abscisses. Ainsi les abscisses négatives seront portées de droite à gauche sur l'axe des abscisses, à partir toujours de l'origine, et les ordonnées négatives au-dessous de l'axe des abscisses.

Représentons par a l'abscisse, et par b l'ordonnée d'un point quelconque; d'après ce qui précède il est évident qu'on aura pour tous les points situés dans l'angle BAC (fig. 200), $x = +a, y = +b$, pour ceux qui seront dans l'angle BAC′, $x = +a, y = -b$, pour ceux situés dans l'angle B′AC, $x = -a, y = +b$, et enfin, pour ceux qui se trouveront dans l'angle B′AC′ $x = -a, y = -b$. Si le point était sur l'axe des abscisses, on aurait évidemment $x = 0, y = \pm b$; si ce même point était sur l'axe des ordonnées, il est clair qu'on aurait $x = \pm a, y = 0$. Enfin, si ce point était à l'origine, on voit que $x = 0$ et $y = 0$.

418. Je dis maintenant que, si par un moyen quelconque on parvenait à déterminer, à *priori*, les coordonnées d'une suite des points d'une courbe,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

assez rapprochés les uns des autres, il est évident qu'en faisant passer, à la main, une courbe par les extrémités des ordonnées successives, cette courbe serait sensiblement la courbe proposée.

Pour déterminer à *priori* les coordonnées d'une courbe donnée de nature et de position, ainsi que pour en découvrir les propriétés, il y a deux méthodes; la première, est celle que nous avons suivie jusqu'ici pour démontrer les propositions de géométrie qui précèdent, et la seconde consiste à trouver d'abord une équation d'après la nature de la courbe, et de faire ressortir de cette équation toutes les propriétés de cette courbe. Suivant qu'il nous paraîtra plus facile, et surtout plus clair, nous nous servirons indifféremment de ces deux méthodes, notre but n'étant pas de faire un ouvrage de doctrine mathématique, mais d'exposer de la manière la plus facile à comprendre les propositions nécessaires aux jeunes constructeurs.

Avant d'entrer en matière, nous allons donner encore quelques définitions qui nous sont nécessaires.

419. Supposons qu'on ait mené, dans une courbe plane quelconque, une infinité de droites Mm, $M'm'$, $M''m''$.... (fig. 204) parallèles entre elles, et terminée de part et d'autre à la courbe; si une même droite AB coupe en deux parties égales toutes ces parallèles, cette droite AB sera un *diamètre* de la courbe.

420. Tout diamètre perpendiculaire aux droites qu'il divise en deux parties égales prend le nom d'*axe* de la courbe.

421. Si une courbe a plusieurs diamètres, deux de ces diamètres seront dits *conjugués*, si l'un divise en deux parties égales les parallèles à l'autre, et réciproquement.

422. Si deux diamètres conjugués sont perpendiculaires entre eux, ils seront les axes de la courbe.

423. On appelle *tangente*, une ligne droite qui ne fait que toucher une courbe. Dans les courbes qui nous intéressent, les tangentes n'ont qu'un point de commun avec les courbes, quelque loin qu'on les prolonge; mais il y a d'autres courbes auxquelles une ligne droite peut être tangente en un ou plusieurs points, et en même temps sécante en un ou plusieurs autres points.

En général, si deux courbes se touchent en un point, et que par ce point on puisse mener une droite tangente à la fois à ces deux courbes, ces dernières seront tangentes l'une à l'autre.

424. Le point où deux lignes tangentes se touchent se nomme le *point de contact.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

425. On appelle *normale* à une courbe, une ligne droite perpendiculaire à la tangente et menée par le point de contact.

426. Ce qu'on appelle la *sous-tangente* est la distance PT ou qt (fig. 207) comprise entre le point T ou t où la tangente rencontre l'un des axes des coordonnées et le pied P ou q de l'ordonnée du point de contact abaissée sur l'axe rencontré par la tangente.

427. La *sous-normale* est la distance entre le point R ou r, où la normale rencontre l'un des axes des coordonnées, et le pied P ou q de l'ordonnée du point de contact abaissée sur l'axe rencontré par la normale.

428. La longueur de la tangente est la distance MT ou Mt (fig. 207) comprise entre le point de contact M et le point T ou t, où la tangente rencontre l'un des axes des coordonnées.

429. La longueur de la normale est la distance MR ou Mt (fig. 207) comprise entre le point de contact M de la tangente et le point T ou t où la normale rencontre l'un des axes des coordonnées.

430. On appelle *courbes semblables*, celles dans lesquelles on peut inscrire ou circonscrire des polygones semblables. *Diamètres homologues* dans les courbes semblables, ceux qui forment, dans chaque courbe, des angles égaux avec les parallèles qu'ils divisent en deux parties égales. *Diamètres conjugués semblables*, ceux qui font entre eux le même angle dans les courbes semblables. En général, deux diamètres d'une courbe sont semblables à leurs homologues dans une courbe semblable à la première.

23^me^. LEÇON.

De la Parabole rapportée à son axe.

431. DÉFINITION. La parabole est une courbe $m'''AM'''$ (fig. 203) qui jouit de la propriété d'avoir tous ses points à égales distances d'une droite $Q''q'$, et d'un point F donnés fixes. La droite $Q''q'$ donnée s'appelle la *directrice*, et le point F le *foyer* de la parabole. La distance FM′ du foyer F en un point quelconque M′ de la courbe se nomme *rayon vecteur*.

432. THÉORÈME 170. *Soient* EG (fig. 203) *la directrice et* F *le foyer d'une parabole* $m'''AM'''$; *si, par le foyer* F, *on mène une perpendiculaire* DB *à la directrice* EG, *cette perpendiculaire* DB *sera l'axe de la parabole.*

En effet, soit pris un point quelconque M de la courbe, et par ce point, soient menées les droites Mm, MQ respectivement parallèles à la directrice

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

EG et à la droite DB, et la droite MF au foyer : en vertu de la définition de la parabole, on aura QM = FM.

Sur la droite M*m* on pourra toujours prendre un point *m* tel, qu'en menant par ce point *m* une droite *m*F au foyer et une parallèle *mq* à la droite DB, on ait *m*F = *mq* ; de sorte que le point *m* sera sur la parabole. Comme la droite M*m* est parallèle à la directrice FG, on aura *mq* = QM, et par conséquent FM = F*m*.

Les triangles FMP, F*m*P sont rectangles en P; les droites FM, F*m* sont les hypothénuses de ces triangles; ces deux triangles ont le côté PF commun; donc ils sont égaux; donc les côtés PM, P*m* sont égaux, et comme on pourrait raisonner de la même manière sur tout autre point de la courbe, il s'ensuit que la droite DB divise en deux parties égales toutes les droites comme M*m* qui lui sont perpendiculaires, et qui sont terminées de part et d'autre à la parabole; donc, enfin, la droite DB est un axe de cette courbe (n°. 420).

433. THÉORÈME 171. *Le point* A (fig. 203), *où l'axe de la parabole rencontre cette courbe, est à égales distances du foyer* F *et de la directrice* EG; *de sorte qu'on a* AF = AD.

Cette proposition est une suite immédiate de la définition de la parabole. Le point A est le *sommet* de la parabole ou l'*origine* de l'axe.

434. THÉORÈME 172. *La parabole ne peut rencontrer son axe qu'en un seul point.*

En effet, si elle pouvait rencontrer son axe en deux points, l'un A et l'autre B ou B′ (fig. 203), l'un B de ces points serait plus près du foyer que de la directrice; car on aurait DB > FB de la quantité DF, ce qui ne peut être, d'après la définition de la parabole (n°. 431). Si le second point, où la courbe rencontre l'axe, était le point B′, on aurait DB′ < FB′, ce qui serait également contraire à la définition de la courbe.

435. THÉORÈME 173. *L'axe de la parabole divise l'espace indéfini compris par cette courbe en deux parties égales.*

En effet, si l'on mène une suite de perpendiculaires M*m*, M′*m*′, M″*m*″,.... à cet axe AB (fig. 203), il divisera toutes ces perpendiculaires en deux parties égales aux points P, P′, P″. ....; si donc on rabat la partie AM‴P‴ sur l'autre partie A*m*‴P‴, en la faisant tourner sur l'axe AB comme sur une charnière, les points M, M′, M″,..... viendront coïncider avec leurs correspondans *m*, *m*′, *m*″....; d'où il suit que la partie AM‴P‴ coïncidera avec la partie A*m*‴P‴.

436. THÉORÈME 174. *Le sommet* A *de la parabole est, de tous les points de cette courbe, celui qui est le plus près de la directrice et du foyer.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, soit un autre point M quelconque de cette courbe; si, par ce point M on mène la perpendiculaire MQ à la directrice EG et la droite MF au foyer; si, de plus, on joint les points Q et F par la droite FQ, le triangle QFM donnera $QF < QM + FM$. Le triangle DQF est rectangle en D, et QF est l'hypothénuse de ce triangle; d'où il suit que $DF < QF$, et qu'*à fortiori* $DF < QM + FM$.

Observons à présent que $DF = AD + AP$, que $AD = AF$ (n°. 433), que $QM = FM$, et nous verrons que $DF = 2AD$, $QM + FM = 2QM$; et, par conséquent, que $2AD < 2QM$, ou enfin, que $AD < QM$, ou, ce qui revient au même, $AF < FM$.

437. *Corollaire* 1. Il suit de là que les points successifs de la parabole, soit au-dessus, soit au-dessous de l'axe, s'éloignent de plus en plus de la directrice et du foyer, et, par conséquent, du sommet A; d'où l'on voit, et de ce que la parabole ne peut rencontrer son axe qu'en un seul point, qui est le sommet A, que cette courbe est ouverte, et s'étend à l'infini au-dessus et au-dessous de l'axe.

438. *Corollaire* 2. Il suit encore de la dernière proposition que, si par le sommet A on élève une perpendiculaire CC′ à l'axe AB, *cette perpendiculaire sera tangente à la parabole au point* A.

Car 1°. cette droite CC′ sera parallèle à la directrice EG, et aura, par-conséquent, tous ses points également distans de cette directrice;

2°. Le point A de la parabole est, de tous les points de la courbe, celui qui est le plus près de la directrice; or, ce point A est situé sur la droite CC′, donc cette droite CC′ n'a que ce point A de commun avec la parabole; donc enfin cette droite est tangente à la courbe.

439. THÉORÈME 175. *Tout point situé hors de la parabole est plus près de la directrice que du foyer* (fig. 203).

Soit K le point pris hors de la parabole; il faut faire voir que la perpendiculaire KQ″ abaissée de ce point K sur la directrice, est plus petite que la droite FK menée du foyer au même point K.

Or, la droite FK coupe la parabole en un point M′, puisque le foyer est dans la courbe et le point K en dehors : si donc on mène la droite M′Q′ perpendiculaire à la directrice, on aura $M'Q' = FM'$.

Si maintenant nous menons la droite KQ′, le triangle Q′KM′ nous donnera $Q'K < Q'M' + M'K$; et en mettant à la place de Q′M′ son égal FM′, on aura $Q'K < FM' + M'K$; mais $FM' + M'K = FK$; donc $Q'K < FK$.

Mais le triangle Q′KQ″ est rectangle en Q″; Q′K est l'hypothénuse de ce triangle, on a donc $Q'K > KQ''$, donc, *à fortiori*, on aura $KQ'' < FK$; ce qu'il fallait démontrer.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

440. THÉORÈME 176. *Tout point* K′ *situé dans la parabole* (fig. 203) *est plus près du foyer que de la directrice.*

En effet, la droite K′Q, menée par ce point K′ perpendiculairement à la directrice, coupera la parabole en un point M, puisque la directrice est extérieure et le point K′ intérieur à la courbe. Menons donc les droites FK′ et FM, et nous aurons d'abord QM = FM, et ensuite le triangle FMK′ qui nous donnera FK′ < FM + MK′.

En mettant QM à la place de FM dans cette dernière inégalité, il nous viendra FK′ < QM + MK′; mais QM + MK′ = QK′; donc FK′ < QK′; ce qu'il fallait démontrer.

441. *Corollaire.* Il suit des deux dernières propositions, qu'il n'y a que les points de la parabole qui jouissent de la propriété d'être à égales distances du foyer et de la directrice.

442. PROBLÈME 81. *Connaissant la directrice* EG (fig. 203) *et le foyer* F *d'une parabole, décrire cette courbe.*

Après avoir mené, par le foyer F, une perpendiculaire DB, à la directrice, qui sera l'axe de la parabole; par tant de points P, P′, P″....., de cet axe qu'on voudra, on élevera les perpendiculaires M*m*, M′*m*′, M″*m*″..... à ce même axe, et ensuite, toujours du foyer comme centre, et 1°. avec un rayon égal à la distance DP, on décrira un arc de cercle qui coupera en deux points M, *m*, la droite M*m*; 2°. avec un rayon égal à la distance DP′, on décrira un deuxième arc de cercle, qui coupera en deux points M′, *m*′ la seconde droite M′*m*′; 3°. avec un rayon égal à la distance DP″, on décrira un troisième arc de cercle qui coupera la troisième droite M″*m*″, en deux points M″, *m*″, et ainsi de suite, et les point M, *m*; M′, *m*′; M″, *m*″....., seront à la courbe; de sorte que, si par tous ces points on fait passer une courbe à la main, cette courbe sera sensiblement la parabole demandée. On aura le sommet A de cette courbe, en divisant, en deux parties égales, la distance DF.

Pour démontrer que les points qu'on vient d'obtenir sont à la parabole, il faut faire voir que tous ces points sont à égales distances du foyer et de la directrice.

Pour cela, considérons un quelconque M de ces points, et nous le trouverons en effet jouissant de cette propriété; car, si par ce point nous menons une perpendiculaire à la directrice et une droite MF au foyer, nous aurons MQ = DP, puisque ces droites sont des parallèles comprises entre des parallèles; mais, par construction, FM = DP; donc MQ = FM; donc le point M est à égales distances du foyer et de la directrice, donc il est à la parabole.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

443. *Corollaire.* Si l'on donnait la direction de l'axe, le sommet et le foyer de la parabole, on porterait la distance AF (fig. 203), du sommet au foyer, sur le prolongement de l'axe, de A en D, et le point D serait le pied de la directrice (n°. 433). Ainsi, en élevant par le point D une perpendiculaire EG, on aurait la directrice, et le problême se réduirait au précédent.

444. THÉORÈME 177. *Si par un point quelconque* M (fig. 203) *de la parabole on abaisse une perpendiculaire* PM, *sur l'axe* AB, *le carré de cette perpendiculaire sera égal à* 4 *fois la distance* AF, *du sommet au foyer, multipliée par la distance* AP *du même sommet au pied* P *de la perpendiculaire* PM; *de sorte que* $(PM)^2 = 4AF \times AP$.

En effet, le triangle rectangle PMF, donne (1)... $(PM)^2 = (FM)^2 - (PF)^2 = (FM+PF)(FM-PF)$; mais $FM = DP = AD + AP$, et $PF = AF - AP$, ce qui donne $FM+PF = AD+AF = 2AF$, puisque $AD = AF$, et $FM - PF = 2AP$; donc $(FM+PF)(FM-PF) = 4AF \times AP$, et par conséquent, en vertu de l'équation (1), $(PM)^2 = 4AF \times AP$; ce qu'il fallait démontrer.

445. *Remarque.* Si l'on suppose que l'axe AB de la courbe soit celui des abscisses, que l'origine des coordonnées soit au sommet A, et que les coordonnées soient rectangulaires, AP sera l'abscisse, et PM l'ordonnée d'un point quelconque M de la parabole. Si donc nous convenons d'appeler x l'abscisse AP, et y l'ordonnée PM d'un point M quelconque de la courbe, nous aurons généralement $y^2 = 4AF \times x$.

446. *Corollaire.* Il suit de là que le carré d'une ordonnée quelconque de la parabole est égal à 4 fois la distance du sommet ou de l'origine au foyer, multipliée par l'abscisse correspondante.

447. DÉFINITION. On appelle *paramètre* de la parabole relatif à l'axe, le quadruple de la distance du sommet au foyer; ainsi en appelant p ce paramètre, on aura $p = 4AF$.

448. *Corollaire* 1. Il suit de là que la distance du sommet au foyer, ou à la directrice, est égale au quart du paramètre; de sorte (fig. 203) qu'on aura

$$AF = \frac{p}{4} \text{ et } AD = \frac{p}{4}.$$

449. *Corollaire* 2. Il suit encore de la définition précédente, et de ce que $y^2 = 4AF \times x$; que l'on aura généralement $y^2 = px$, c'est-à-dire, *que le carré d'une ordonnée quelconque est égal au paramètre de l'axe multiplié par l'abscisse correspondante.*

450. *Corollaire* 3. Il suit de là que le paramètre est une troisième proportionnelle entre l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque de la parabole; car l'équation $y^2 = px$ donne $x : y :: y : p$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

451. *Corollaire* 4. Il suit du corollaire 2, que les carrés des ordonnées de la parabole sont entre eux comme les abscisses correspondantes.

Car pour un point quelconque on aura $y^2 = px$ et pour un autre point, $y'^2 = px'$, d'où $y^2 : y'^2 :: px : px' :: x : x'$; ce qu'il fallait démontrer.

452. THÉORÈME 178. *Réciproquement, si une courbe est rapportée à des coordonnées rectangulaires, l'origine étant sur un point de cette courbe, et que les carrés des ordonnées soient entre eux comme les abscisses correspondantes, cette courbe sera une parabole.*

En effet, soient deux points M, M″ de cette courbe (fig. 203); après avoir abaissé les ordonnées PM et P″M″, on aura, d'après notre hypothèse,

$$(PM)^2 : (P''M'')^2 :: AP : AP''....(1).$$

A présent, prenons, à droite et à gauche de l'origine A, et sur l'axe AB des abscisses, les distances AF et AD égales entre elles, et de telle grandeur que nous ayons $AP : PM :: PM : 4AF$ ou $4AD$..... (2).

Menons ensuite les droites FM et FM″, et nous aurons les triangles rectangles PMF et P″M″F, qui nous donneront

$$(MF)^2 = (PM)^2 + (PF)^2, \text{ et } (M''F)^2 = (P''M'')^2 + (P''F)^2.... (3).$$

Maintenant, faisons attention que $PF = AF - AP$, et que $P''F = AP'' - AF$, et nous aurons :

$$(4)\begin{cases} (MF)^2 = (PM)^2 + (AF - AP)^2 = (PM)^2 + (AF)^2 - 2AF \times AP + (AP)^2. \\ \text{et } (M''F)^2 = (P''M'')^2 + (AP'' - AF)^2 = (P''M'')^2 + (AP'')^2 - 2AF \times AP'' + (AF)^2. \end{cases}$$

La proportion (1) nous donne $\frac{(PM)^2}{AP} = \frac{(P''M'')^2}{AP''}$ et la proportion (2) $\frac{(PM)^2}{AP} = 4AF$; donc, nous aurons aussi $\frac{(P''M'')^2}{AP''} = 4AF$. De ces deux dernières équations, nous tirerons $(PM)^2 = 4AF \times AP$, et $(P''M'')^2 = 4AF \times AP''$. Actuellement, mettons ces valeurs de $(PM)^2$ et de $(P''M'')^2$ dans chacune des équations (4) ci-dessus, et nous aurons $(FM)^2 = 4AF \times AP + (AF)^2 - 2AF \times AP + (AP)^2$, et $(FM'')^2 = 4AF \times AP'' + (AP'')^2 - 2AF \times AP'' + (AF)^2$, ce qui se réduit à

$$(FM)^2 = (AF)^2 + 2AF \times AP + (AP)^2 = (AF + AP)^2,$$

et $$(FM'')^2 = (AP'')^2 + 2AF \times AP'' + (AF)^2 = (AP'' + AF)^2.$$

Enfin, dans ces dernières équations, si nous mettons AD à la place de son égal AF, il nous viendra

$$(FM)^2 = (AD + AP)^2 = (DP)^2, \text{ et } (FM'')^2 = (AP'' + AD)^2 = (DP'')^2,$$

et partant $FM = DP$, et $FM'' = DP''$. Il suit de là que les points de la courbe en question sont également distans d'un point fixe F et d'une droite EG perpendiculaire à l'axe des abscisses; donc cette courbe est une parabole dont le point F serait le foyer, et la droite EG la directrice (n°. 414).

453. *Corollaire* 1. Il suit des deux propositions précédentes, *qu'il n'y a*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que la parabole qui jouisse de cette propriété que les carrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses correspondantes, et que, par conséquent, toute équation de la forme $y^2=px$, *ne peut renfermer que la relation des coordonnées d'une parabole, dont p serait le paramètre relatif à l'axe.*

454. PROBLÊME 82. *Supposons que l'axe, le sommet et le paramètre d'une parabole soient donnés, et qu'on nous propose de décrire cette courbe.*

Première solution. On pourrait porter le quart du paramètre à droite et à gauche du sommet, sur l'axe, ce qui donnerait le foyer et le pied de la directrice, et opérer ensuite comme il a été expliqué au n°. 442.

Deuxième solution. Par le sommet A (fig. 204), et les points P, P′, P″..., on élevera des perpendiculaires $q''Q''$, Mm, $M'm'$, $M''m''$..... à l'axe AB, et ensuite on portera le paramètre de A en C, et sur les distances CP, CP′, CP″.... comme diamètres, on décrira des circonférences de cercle, qui couperont, chacune en deux points, la droite $q''Q''$; par ces points Q et q, Q′ et q', Q″ et q''....., on menera les droites QM et qm, Q′M′ et $q'm'$, Q″M″ et $q''m''$..... parallèlement à l'axe AB, lesquelles rencontreront respectivement les perpendiculaires Mm, $M'm'$, $M''m''$..... à l'axe, en des points M et m, M′ et m'....., qui seront à la parabole.

En effet, dans le cercle CQPq, on a, pour le point Q, AC : AQ :: AQ : AP; or, AC $=p$, par construction; AQ = PM par la même raison; donc p : PM :: PM : AP; ce qui s'accorde avec ce que donne l'équation $y^2=px$, puisque $p : y :: y : x$; donc le point quelconque M, obtenu comme il vient d'être dit, est à la parabole. Cette solution est le second moyen que nous avons donné au n°. 69 du Traité spécial de coupe des pierres.

455. PROBLÊME 83. *Soient données l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque d'une parabole, et proposons-nous de décrire cette courbe.*

Supposons que DC soit l'abscisse et CB l'ordonnée du point B de la parabole ADB (fig. 205).

Premier procédé. On prolongera d'abord l'ordonnée BC d'une quantité CA = CB, ce qui donnera le point A, qui sera un point de la courbe (n°. 432). Ensuite, on divisera chaque ordonnée, CB et CA, en un certain nombre de parties égales, en quatre, par exemple; par chaque point de division de ces ordonnées, on menera des parallèles à l'axe DC : on divisera l'abscisse DC en un même nombre de parties égales que les ordonnées CB et CA, et, par les points A et B et les points de division de DC, on menera les droites AM, AM′, AM″, ... et Bm, Bm', Bm''.... qui rencontreront les parallèles à DC en des points M, M′, M″.... et m, m', m''....., qui seront à la parabole.

En effet, les triangles ACE et AFM sont semblables et donnent AC : CE

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$:: AF : FM = \frac{CE \times AF}{AC}$. Comme on a divisé BC en quatre parties égales, et que le point F est sur le troisième point, on aura $CF = \frac{3}{4} BC$; et comme $BC = AC$ et que $AF = AC + CF$, il s'ensuit que $AF = BC + \frac{3}{4} BC = \frac{7BC}{4}$. On a aussi divisé CD en quatre parties égales, et le point E est sur le premier point de division; donc $CE = \frac{1}{4} DC$; si donc on substitue $\frac{7BC}{4}$ et $\frac{DC}{4}$ à la place de AF et de CE dans la valeur de FM trouvée ci-dessus, il viendra $FM = \frac{7DC}{16}$. D'ailleurs $DP = DC - CP = DC - FM$; donc en mettant pour FM sa valeur, on aura $DP = DC - \frac{7DC}{16} = \frac{16DC - 7DC}{16} = \frac{9DC}{16}$. On a de plus $PM = CF = \frac{3BC}{4}$; d'où $(PM)^2 = \frac{9(BC)^2}{16}$: si donc on compare $(PM)^2$ à DP, on aura $(PM)^2 : \frac{9(BC)^2}{16} :: DP : \frac{9DC}{16}$, ou en divisant les moyens et les extrêmes par $\frac{9}{16}$, $(PM)^2 : (BC)^2 :: DP : DC$; d'où il suit *que les carrés des ordonnées de la courbe que nous venons de construire, sont entre eux comme les abscisses correspondantes; donc cette courbe est une parabole.*

456. *Remarque.* Si l'on voulait prolonger la parabole au-delà des points A et B, on porterait, sur le prolongement de l'axe, et à partir du point C, un certain nombre des divisions de DC, et sur le prolongement de CA et de CB, on porterait le même nombre des divisions de CA et de CB, et on opérerait ensuite comme il vient d'être dit : c'est le moyen donné au n°. 71 du Traité spécial de Coupe des pierres.

457. *Second procédé. En supposant les mêmes choses que dans le numéro précédent, on pourra décrire la parabole de la manière suivante :*

On divisera chacune des ordonnées CA et CB en parties égales, en quatre, par exemple, on divisera ensuite l'abscisse donnée DC (fig. 206) en un nombre de parties égales qui soit toujours le carré du nombre des parties contenues dans AC ou CB; dans notre exemple, DC sera divisé en 16 parties, puisque AC est divisé en quatre. Puis, par les points de division de AC et de BC, on menera des parallèles à l'axe DC; et, en comptant les divisions de DC, à partir du point D, par le premier point, par le quatrième, par le neuvième, etc., on menera les parallèles $M''m''$, $M'm'$, Mm à AB : ces parallèles rencontreront celles qu'on a déjà menées suivant DC, en des points M et m, M' et m'....., qui seront à la parabole.

En effet, pour le point M' on aura l'abscisse $DP' = 4$ divisions de DC, et pour le point B on aura $DC = 16$ des mêmes divisions. L'ordonnée P'M' du point M' comprend deux divisions de BC, et l'ordonnée CB du point B, comprendra quatre des mêmes divisions : on aura donc $DP' = 4$, $DC = 16$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$(P'M')^2 = 4$, et $(BC)^2 = 16$; donc $DP' : DC :: 4 : 16$, et $(P'M')^2 : (BC)^2 :: 4 : 16$; or, le rapport $4 : 16$ est commun à ces deux proportions; donc $(P'M')^2 : (BC)^2 :: DP : DC$; donc les carrés des ordonnées des points trouvés comme il vient d'être dit, sont entre eux comme les abscisses correspondantes, donc enfin la courbe qui joint tous ces points est une parabole.

Remarque 1. Si l'on voulait prolonger la parabole au-delà des points A et B, on porterait un certain nombre des divisions de BC ou de CA, sur le prolongement de CB et de CA, et on porterait sur le prolongement de DC, et à partir du point C, un nombre de parties de DC égal au carré du nombre de parties de CB qu'on aura portées au-delà des points B et A sur AB.

Remarque 2. D'après ce procédé, on remarquera que les distances AP, PP', P'P''..... successives, comprises entre les pieds des ordonnées, vont en croissant, comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7.....

24^me^. LEÇON.

Suite de la Parabole rapportée à son axe.

458. PROBLÈME 84. *Proposons-nous, maintenant, de trouver la longueur d'un rayon vecteur* FM *quelconque* (fig. 207).

Par le point M, on abaissera l'ordonnée PM, et on aura $FM = DP$; mais $DP = AD + AP$, et comme $AD = \frac{p}{4}$ (n°. 448), on aura $FM = \frac{p}{4} + AP$ ou $FM = \frac{p}{4} + x$, en appelant x l'abscisse AP.

Il suit de là que *la longueur d'un rayon vecteur quelconque est égale au quart du paramètre plus l'abscisse du point de la parabole auquel aboutit ce rayon.*

459. PROBLÈME 85. *Par un point donné sur une parabole, mener une tangente à cette courbe.*

Soit le point M donné sur la parabole (fig. 207); par ce point M, on menera la droite MF au foyer, et la perpendiculaire MQ à la directrice EG; puis, on joindra les points Q et F par une droite QF, à laquelle, par le point donné M, on abaissera une perpendiculaire MT, qui sera la tangente demandée.

Pour démontrer que la droite MT est tangente à la parabole au point M, il faut faire voir que cette droite n'a que ce point M de commun avec la courbe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Or, si nous prenons un autre point m sur cette droite MT, en menant, par ce point m et les points Q et F, les droites mF et mQ, et, par le même point m, si nous abaissons la perpendiculaire mq' à la directrice, nous aurons $Fm = Qm$, à cause que QM = FM et que MT est perpendiculaire sur QF. Mais Qm est l'hypothénuse du triangle rectangle mQq'; donc $Qm > mq'$; donc aussi $Fm > mq'$; donc le point m est plus près de la directrice que du foyer; donc ce point est situé hors de la parabole (n°. 439); donc la droite MT n'a que le point M de commun avec cette courbe; donc enfin cette droite MT est la tangente demandée.

460. THÉORÈME 179. *Les angles* NMm *et* TMF *que forment, avec la tangente* MT, *la droite* MN *parallèle à l'axe* AB *et le rayon vecteur* FM, *qui va au point de contact, sont égaux entre eux* (fig. 207).

En effet, puisque QM = FM, le triangle QMF est isocèle, et la perpendiculaire MT à la base QF de ce triangle, divise l'angle opposé QMF en deux parties égales : donc l'angle QMT = TMF. Mais la droite MN, parallèle à AB, n'est que le prolongement de QM; donc l'angle NMm = QMT, comme opposés par le sommet; mais nous venons de voir que QMT = TMF; donc NMm = TMF; ce qu'il fallait démontrer.

461. *Corollaire* 1. A cause que MN est parallèle à AB, on a MTB = mMN, et par conséquent MTB = TMF, c'est-à-dire que *le triangle* TMF *est isocèle;* d'où il suit que FT = FM.

462. *Corollaire* 2. De là résulte un nouveau moyen de mener, par un point donné sur la parabole, une tangente à cette courbe; car, pour avoir un second point T de cette tangente, il suffira, avec un rayon égal à la distance du foyer au point de contact donné, et du foyer comme centre, de décrire un arc de cercle qui coupera l'axe en un point T, par lequel et le point donné M, on menera la droite MT qui sera la tangente demandée.

463. THÉORÈME 180. *Si par un point* M *quelconque de la parabole on mène une tangente, la distance* AT *du sommet au point* T *où la tangente rencontre l'axe, est toujours égale à l'abscisse* AP *du point de contact.*

En effet, le rayon vecteur $FM = \frac{p}{4} + AP$ (n°. 458); mais FM = FT, donc $FT = \frac{p}{4} + AP$. Or, $AT = FT - AF = FT - \frac{p}{4}$; donc $AT = \frac{p}{4} + AP - \frac{p}{4} = AP$; ce qu'il fallait démontrer.

464. *Corollaire* 1. De là résulte un nouveau moyen de mener une tangente à la parabole par un point donné sur cette courbe; car, si l'on abaisse l'ordonnée du point de contact et que l'on porte l'abscisse AP sur le prolongement de l'axe, de A en T, le point T sera à la tangente demandée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

465. *Corollaire* 2. Il suit aussi de là, que la sous-tangente PT = 2AP.

466. *Corollaire* 3. Il suit encore de là que *si par le sommet* A *de la parabole, on mène la tangente* A*t*, *cette tangente divisera en deux parties égales, au point t, la tangente* MT, *menée en un point quelconque de la courbe;* car la tangente A*t* est parallèle à l'ordonnée PM, et comme le point A est au milieu de TP, le point *t* est aussi au milieu de TM.

467. *Corollaire* 4. La droite FQ est perpendiculaire à la tangente quelconque TM, et comme le triangle TMF est isocèle, cette droite FQ passe par le milieu *t* de la tangente TM; mais la tangente A*t*, menée par le sommet, passe aussi par le même point *t* de la tangente MT; donc *la tangente au sommet et la perpendiculaire menée par le foyer à une tangente quelconque* MT, *passent toutes les deux par le milieu t de la tangente* MT.

468. PROBLÈME 86. *L'axe d'une parabole, la direction et le point de contact d'une tangente étant donnés, proposons-nous de décrire cette courbe.*

Première solution. Prolongeons, s'il est nécessaire, la tangente donnée MT (fig. 207), jusqu'à sa rencontre avec l'axe AB au point T; sur le milieu de la tangente TM, élevons une perpendiculaire *t*F, qui rencontrera l'axe AB en un point F, qui sera le foyer de la parabole en question; par le point *t*, milieu de TM, abaissons une perpendiculaire *t*A à l'axe AB, et le pied A de cette perpendiculaire sera le sommet de notre parabole; par cette construction, le problème sera ramené aux mêmes circonstances que ceux des nos. 442 et 453.

Cette construction est une suite immédiate du numéro précédent.

Deuxième solution. Faisons, au point de contact M comme sommet, et sur la tangente MT, un angle TMF = à l'angle MTB que fait, avec l'axe AB, la tangente donnée TM; en vertu du n°. 161 le point F, où la droite MF ira rencontrer l'axe, sera le foyer. Pour avoir le sommet A, on divisera en deux parties égales la distance TP comprise entre le point T de rencontre de la tangente MT avec l'axe AB, et le pied P de l'ordonnée du point de contact, puisque (n°. 463) nous avons vu que AT = AP.

469. PROBLÈME 87. *Les directions de deux tangentes* MT *et* M′T′ (fig. 207) *et le foyer* F *d'une parabole étant donnés, proposons-nous de décrire cette courbe.*

Par le foyer F donné, menons une perpendiculaire F*t* et F*t′* à chacune des tangentes données MT et M′T′; par les pieds *t* et *t′* de ces perpendiculaires, menons une droite *tt′*, et, par le foyer F, menons une perpendiculaire AB à cette dernière droite *tt′* : la droite AB sera l'axe et le point A le sommet de la parabole, et on décrira la courbe par le moyen du n°. 442.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cette construction est évidente, d'après les nos. 466 et 467.

470. PROBLÈME 88. *Soit données trois droites* TM, T'M' *et tt', toutes les trois non parallèles, et proposons-nous de décrire une parabole tangente à ces trois droites et dont l'axe serait perpendiculaire à la droite moyenne tt'* (fig. 207).

Par les points t et t' où les droites extrêmes rencontrent la moyenne, élevons une perpendiculaire tF, t'F respectivement à chaque droite extrême TM, T'M', ces perpendiculaires se rencontreront en un point F, qui sera le foyer; par le foyer F, menons une perpendiculaire AB à la droite moyenne tt', et cette perpendiculaire AB sera l'axe de la parabole, et la distance AF le quart du paramètre : on pourra donc décrire la parabole par l'un des procédés donnés précédemment.

Cette solution est une suite immédiate des nos. 466 et 467.

471. PROBLÈME 89. *Par un point donné hors de la parabole, il faut mener une tangente à cette courbe.*

Après avoir trouvé la directrice et le foyer, on décrira un arc de cercle FQ, du point donné m, comme centre, et avec un rayon égal à la distance de ce point donné m au foyer (fig. 207); par le point Q, où cet arc de cercle rencontrera la directrice, et par le foyer F, on menera la droite FQ, à laquelle, et par le point donné m, on abaissera une perpendiculaire mT, qui sera la tangente demandée.

En effet, le triangle mQF est isocèle par construction; par conséquent, la perpendiculaire abaissée du sommet de ce triangle sur la base FQ, divise cette base en deux parties égales au point t; ainsi, tous les points de cette perpendiculaire sont à égales distances des points Q et F. Si donc, par le point Q, on mène une parallèle QM à l'axe AB, et si l'on joint le foyer F et le point M, où la droite QM rencontre la droite mT, par une droite FM, on aura QM = FM; d'où il suit que le point M de la droite MT est sur la parabole. Il est évident, actuellement, que cette droite n'a que le point M commun avec la courbe, car les choses sont ramenées au cas du n°. 459.

472. PROBLÈME 90. *Il faut mener une tangente à la parabole, parallèlement à une droite donnée.*

Après avoir déterminé la directrice et le foyer, on menera, par le foyer, une perpendiculaire FQ à la droite donnée HK (fig. 208); par le point Q, où la droite FQ rencontre la directrice, on menera une parallèle QM à l'axe AB, et le point M, où la droite QM rencontrera la parabole, sera le point de contact : en menant donc, par ce point M, une parallèle MT, à la droite donnée HK, on aura la tangente demandée.

Cette construction résulte trop évidemment de ce qui précède pour avoir besoin d'être démontrée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

473. PROBLÈME 91. *Il faut mener une tangente à la parabole perpendiculairement à une droite donnée* (fig. 208).

Après avoir trouvé la directrice et le foyer, on menera, par le foyer F, une parallèle FQ′ à la droite donnée HK; par le point Q′, où la droite Q′M′ rencontre la directrice, on menera une parallèle Q′M′ à l'axe, laquelle rencontrera la parabole en un point M′ qui sera le point de contact : par conséquent, en menant, par ce point M′ une perpendiculaire M′T′ à la droite donnée HK, on aura la tangente demandée.

Cette construction est encore évidente, d'après ce qui précède.

474. THÉORÈME 181. *La sous-normale* PR *relative à l'axe de la parabole* (fig. 207), *est la moitié du paramètre, pour tous les points* M *de la courbe.*

En effet, les triangles semblables TMP et PMR, donnent PT : PM :: PM : PR $= \frac{(PM)^2}{PT}$. Mais $(PM)^2 = p \times AP$, et PT $= 2AP$; donc PR $= \frac{p \times AP}{2AP} = \frac{p}{2}$; ce qu'il fallait démontrer.

475. PROBLÈME 92. *Par un point* M (fig. 207) *donné sur la parabole, il faut mener une normale à cette courbe.*

Première solution. Par le point donné M, on abaissera l'ordonnée PM, et on fera PR $= \frac{p}{2}$; et le point R sera le point où la normale menée par le point M doit couper l'axe; ce qui suit immédiatement de la proposition précédente.

Deuxième solution. Par le point donné M, on menera une parallèle MQ à l'axe; par le point Q où cette droite MQ rencontrera la directrice, on menera une droite QF au foyer, et la droite MR, menée par le point M parallèlement à QF, sera la normale demandée.

En effet, la droite QF est perpendiculaire à la tangente menée par le point M (n°. 459), et toute normale passe par le point de contact perpendiculairement à la tangente; donc la droite MR, qui passe par le point de contact M, et qui est parallèle à la droite QF, est en effet la normale demandée.

476. THÉORÈME 182. *La normale* MR (fig. 207) *divise en deux parties égales l'angle* FMN *formé par le rayon vecteur qui va au point de contact* M, *et la droite* MN *menée par le même point* M *parallèlement à l'axe.*

Car on a TMR $=$ RMm, puisque ces deux angles sont droits; de plus, TMF $=$ mMN (n°. 460); donc TMR $-$ TMF $=$ RMm $-$ mMN, ou FMR $=$ RMN; ce qu'il fallait démontrer.

477. THÉORÈME 183. *Le triangle* FMR *formé par un rayon vecteur* FM *et la normale* MR *qui aboutissent au même point* M *de la courbe, est isocèle* (fig. 207).

Car la normale MR est parallèle à la droite FQ, d'où il suit que les angles

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

MRA et QFA sont égaux entre eux comme correspondans, et les angles QFA et FMR sont aussi égaux, comme alternes-internes ; donc MRA = FMR, et le triangle FMR est isocèle ; d'où FM = FR.

478. *Corollaire.* Il résulte de là un nouveau moyen de mener une normale, par un point donné sur la parabole, qui est très-simple : il suffira de décrire un arc de cercle MR par le foyer, comme centre, avec un rayon égal au rayon vecteur qui va au point donné M ; cet arc coupera l'axe en un point R, par lequel doit passer la normale.

479. PROBLÈME 93. *Il faut mener une normale à la parabole parallèlement à une droite donnée* (fig. 208).

Après avoir déterminé le foyer et la directrice, on menera, par le foyer, une parallèle FQ′ à la droite donnée HK ; par le point Q′, où cette droite FQ′ rencontrera la directrice, on menera une parallèle Q′M′ à l'axe, et le point M′ où cette droite Q′M′ rencontrera la parabole, sera le point par lequel il faudra mener une parallèle M′R′ à la droite donnée HK, pour avoir la normale demandée, qui sera cette droite M′R′ elle-même.

Le lecteur concevra sans peine la véracité de ce procédé.

480. PROBLÈME 94. *Il faut mener une normale à la parabole, perpendiculairement à une droite donnée* (fig. 208).

On déterminera, comme ci-dessus, la directrice et le foyer, et ensuite on menera, par le foyer, une perpendiculaire FQ à la droite donnée HK ; par le point Q où cette droite FQ rencontrera la directrice, on menera une parallèle QM à l'axe, laquelle ira rencontrer la parabole en un point M, qui sera celui par lequel il faudra abaisser une perpendiculaire à la droite donnée HK, pour avoir la normale demandée : cela est évident.

481. THÉORÈME 184. *Soit un cercle rapporté à deux axes rectangulaires* AB *et* AC (fig. 209), *le centre étant en un point* I *quelconque, dont les coordonnées* AP′ *et* P′I *seront représentées par* a *et* b ; *je dis que pour un point* M *quelconque de sa circonférence, on aura* $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, *x et y étant les coordonnées de ce point* M, *et r le rayon du cercle.*

En effet, si par le centre I de ce cercle, on mène une parallèle IQ à l'axe AB des abscisses, le triangle IQM sera rectangle et donnera $(IM)^2=(IQ)^2+(QM)^2$. Mais $IM=r$, $IQ=P'P=AP-AP'=x-a$, et $QM=PM-PQ=PM-P'I=y-b$; donc

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2, \text{ ou } (x-a)^2+(y-b^2)=r^2,$$

comme il a été énoncé.

482. PROBLÈME 95. *Par un point donné hors d'une parabole, il faut mener une normale à cette courbe.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Par le point donné D (fig. 210), abaissez une perpendiculaire DP′ sur l'axe AB ; portez la moitié du paramètre de P′ en Q ; sur le milieu de AQ, élevez une perpendiculaire KI, que vous ferez égale au quart de DP′, et du point I comme centre, et d'un rayon égal à la distance IA ou IQ, décrivez une circonférence de cercle AMQ, qui coupera la parabole en un point M, par lequel et le point donné D, vous menerez une droite DR, qui sera la normale demandée.

Pour le démontrer, supposons qu'en effet la droite DR soit la normale demandée : nous aurons PR $=\frac{1}{2}p$ (n°. 474), et les triangles semblables RMP et RP′D, qui nous donneront PR : PM :: P′R : P′D....(1)

Appelons AP′ = a, P′D = b, AP = x et PM = y ; comme P′R = PR + AP — AP′, nous aurons P′R $=\frac{1}{2}p+x-$ a, et la proportion (1) deviendra $\frac{1}{2}p : y :: \frac{1}{2}p+x-$ a : b; d'où nous tirerons $\frac{1}{2}py+xy-ay=\frac{1}{2}pb$, ou $xy+\frac{1}{2}py-ay-\frac{1}{2}pb=0$.....(2).

Si maintenant de l'équation $y^2=px$ (n°. 449) nous tirons la valeur de x, qui est $x=\frac{y^2}{p}$, pour la substituer dans l'équation (2) ci-dessus, il viendra $\frac{y3}{p}+\frac{1}{2}py-ay-\frac{1}{2}pb=0$, ou en faisant disparaître le dénominateur p, $y^3+\frac{1}{2}p^2y-apy-\frac{1}{2}p^2b=0$. Si actuellement nous multiplions par y, il nous viendra $y^4+\frac{1}{2}p^2y^2-apy^2-\frac{1}{2}p^2by=0$.... (3). Carrons les deux membres de l'équation $y^2=px$, ce qui nous donnera $y^4=p^2x^2$, et mettons cette valeur de y^4 dans l'équation (3), et elle se réduira à $p^2x^2+\frac{1}{2}p^2y^2-apy^2-\frac{1}{2}p^2by=0$...(4). Dans cette équation (4), mettons px à la place de y^2, et nous aurons $p^2x^2+\frac{1}{2}p^3x-ap^2x-\frac{1}{2}p^2by=0$, ce qui se réduira à $x^2+\frac{1}{2}px-ax-\frac{1}{2}by=0$...(5), en divisant par p^2.

Ajoutons à cette dernière équation, l'équation $y^2-px=0$ (qui résulte de $y^2=px$, en faisant tout passer dans le premier membre), et nous aurons $x^2+\frac{1}{2}px-ax+y^2-px-\frac{1}{2}by=0$, ou $x^2-\frac{p+2a}{2}x+y^2-\frac{1}{2}by=0$....(6).

Si maintenant nous ajoutons la quantité $\frac{(p+2a)^2}{16}+\frac{b^2}{16}$ dans chaque membre de l'équation (6), il nous viendra :

$$x^2-\frac{p+2a}{2}x+\frac{(p+2a)^2}{16}+y^2-\frac{1}{2}by+\frac{b^2}{16}=\frac{(p+2a)^2}{16}+\frac{b^2}{16}.$$

Mais $x^2-\frac{p+2a}{2}x+\frac{(p+2a)^2}{16}=(x-\frac{(p+2a)}{4})^2$, et $y^2-\frac{1}{2}by+\frac{b^2}{16}=(y-\frac{b}{4})^2$; donc $(x-\frac{p+2a}{4})^2+(y-\frac{b}{4})^2=\frac{(p+2a)^2+b^2}{16}$..... (7)

Or, si nous comparons cette équation avec celle que nous avons trouvée pour le cercle dans le numéro précédent, nous verrons que celle que nous venons

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de trouver est aussi celle d'un cercle dont $\frac{p+2a}{4}$ serait l'abscisse du centre, $\frac{b}{4}$ l'ordonnée du même point, et que $\frac{(p+2a)^2+b^2}{16}$ serait le carré du rayon.

Mais cette équation renferme les coordonnées x et y du point M où la normale demandée doit rencontrer la parabole; si donc on savait quelle est l'abscisse de ce point, et qu'on la mît à la place de x dans cette même équation, elle donnerait une valeur pour l'ordonnée y, telle qu'en construisant cette ordonnée, son extrémité M serait à la fois sur la circonférence du cercle, et sur celle de la parabole, précisément au point où la normale demandée doit rencontrer cette dernière courbe; ce point se trouve donc en même temps, et sur la circonférence du cercle, et sur celle de la parabole: en décrivant donc le cercle représenté par l'équation (7), il coupera la parabole au point M demandé. Or, c'est effectivement ce que nous avons fait; car, puisque nous avons porté le demi-paramètre de P′ en Q, nous avons $AQ = AP' + \frac{1}{2}p$, ou $AQ = a + \frac{1}{2}p = \frac{2a+p}{2}$. Mais le point K est le pied de la perpendiculaire KI élevée sur le milieu de AQ; donc $AK = \frac{AQ}{2} = \frac{p+2a}{4}$; donc AK est l'abscisse du centre du cercle représentée par l'équation (7); donc le centre I de ce cercle doit se trouver sur la droite KI. Nous avons fait ensuite $KI = \frac{1}{4}DP'$, et comme $DP' = b$, nous avons $KI = \frac{1}{4}b$; donc le point I est le centre du cercle en question.

Il ne nous reste plus qu'à faire voir que le carré du rayon $(AI)^2$ est égal à $\frac{(p+2a)^2+b^2}{16}$.

Or, le triangle rectangle AIK nous donne $(IA)^2 = (AK)^2 + (KI)^2$; et, puisque $AK = \frac{(p+2a)}{4}$ et que $KI = \frac{b}{4}$, il s'ensuit que $(IA)^2 = \frac{(p+2a)^2}{16} + \frac{b^2}{16} = \frac{(p+2a)^2+b^2}{16}$.

483. PROBLÈME 96. *Par un point donné* D′ *dans la parabole* (fig. 210), *il faut mener une normale à cette courbe.*

Par le point donné D′, abaissez une perpendiculaire D′P‴ à l'axe AB; portez le demi-paramètre de P‴ en Q′, et sur le milieu de AQ′, élevez une perpendiculaire K′I′; faites ensuite $K'I' = \frac{1}{4}P'''D'$, et du point I′ comme centre, et avec un rayon égal à I′A, décrivez une circonférence de cercle AMQ′M′ qui coupera la parabole en trois points M, M′ et M″; par chacun de ces trois points et le point donné D′, menez une droite D′M, D′M′ et D′M″, et vous aurez trois normales qui satisfont à la question.

La démonstration de ce problème est la même que celle du numéro précédent.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Remarque. Ceux qui ont présente à l'esprit la théorie générale des équations, ne seront pas surpris que le problème qui vient de nous occuper ait trois solutions dans un cas, et qu'une seule dans l'autre, par la raison que ce problème dépend d'une équation du troisième degré, et qu'une équation du troisième degré a ses trois racines réelles ou elle n'en a qu'une seule.

25me. LEÇON.

La Parabole rapportée à ses diamètres.

484. THÉORÈME 185. *Soient deux droites quelconques* MM′ *et* M″*m parallèles entre elles, et terminées de part et d'autre à la parabole; si, par les points* Q *et* Q′, *milieux de chacune de ces droites, on mène une droite* A′B′, *cette droite* A′B′ *sera parallèle à l'axe* AB *de la parabole* (fig. 211).

Pour démontrer que la droite A′B′ est parallèle à l'axe AB, il faut faire voir que les perpendiculaires Qq et $Q'q'$, à l'axe AB, sont égales entre elles.

Or, pour les points M et M′ de la courbe, on aura $(P'M')^2 = p \times AP'$, et $(PM)^2 = p \times AP$, d'où $(P'M')^2 - (PM)^2 = p\,(AP' - AP)$ ou $(P'M' + PM)(P'M' - PM) = p\,(AP' - AP)$ ou bien encore $2\,(P'M' - PM) \times \frac{(P'M' + PM)}{2} = p\,(AP' - AP)$. Mais $P'M' - PM = P'M' - P'R = M'R$, $\frac{P'M' + PM}{2} = Qq$, et $AP' - AP = MR$; donc $2M'R \times Qq = p \times MR$, et partant $Qq = \frac{p}{2} \times \frac{MR}{M'R}$.

Pour les points M″ et m, on aura $(P''M'')^2 = p \times AP''$ et $(pm)^2 = p \times Ap$, d'où $(P''M'')^2 - (pm)^2 = (P''M'' + pm)(P''M'' - pm) = p\,(AP'' - Ap)$, ou $2\,(P''M'' + pm) \times \frac{(P''M'' - pm)}{2} = p\,(AP'' - Ap)$..... (1). Mais d'abord $P''M'' + pm = R'P'' + P''M'' = R'M''$, et ensuite, si l'on mène la droite mK, par les points m et q', on aura $P''K = P''R' = pm$; car puisque le point Q′ est au milieu de mM'', le point q' sera aussi au milieu de mK, et par conséquent $r'q'$ sera la moitié de R′K; mais $R'K = R'P'' + P''K$, et comme $R'P'' = r'q' = mp$, on aura $2r'q'$ ou $2mp = mp + P''K$, d'où $mp = P''K$. Il résulte de là que $P''M'' - pm = P''M'' - P''K = M''K$, et partant $\frac{P''M'' - pm}{2} = \frac{1}{2}\,M''K = Q'q'$; si donc on substitue, dans l'équation (1), R′M″ à la place de $P''M'' + pm$ et $Q'q'$ à la place de $\frac{P''M' - pm}{2}$, il viendra $2R'M'' \times Q'q' = p \times mR'$, d'où $Q'q' = \frac{p}{2} \times \frac{mR'}{R'M''}$.

Les triangles semblables MRM′ et $mR'M''$, donnent MR ; RM′ :: mR' ; R′M″;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où l'on tire $\frac{MR}{RM'} = \frac{mR'}{R'M''}$. Or, nous venons de trouver $Qq = \frac{p}{2} \times \frac{MR}{RM'}$ et $Q'q' = \frac{p}{2} \times \frac{mR'}{R'M''}$, donc $Qq = Q'q'$; ce qu'il fallait démontrer.

485. THÉORÈME 186. *Réciproquement, si, par le milieu* Q *d'une droite quelconque* MM', *on mène une droite* QB' *parallèlement à l'axe* AB *de la parabole* (fig. 211), *cette droite* QB' *passera par le milieu* Q' *de toute autre droite* M''*m parallèle à la première* MM'.

En effet, en menant une droite par les milieux Q et Q' des parallèles MM' et M''m, cette droite serait parallèle à l'axe, et comme elle passerait par le même point Q que la droite QB' menée parallèlement au même axe, elle coïnciderait avec cette dernière; car, par un même point Q, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une même droite; donc la droite QB', qui passe par le milieu Q de la droite MM', parallèlement à l'axe, coupe la droite M''m en deux parties égales au point Q'.

486. *Corollaire.* Il suit de ces deux propositions, que toute droite, parallèle à l'axe, est un diamètre de la parabole, et réciproquement, que tous les diamètres de cette courbe sont parallèles à l'axe (n°. 419).

487. THÉORÈME 187. *Si, par l'origine* A' *d'un diamètre quelconque* A'B' *de la parabole* (fig. 211), *on mène une droite* A'T *parallèle aux droites* MM', M''m...., *que ce diamètre divise en deux parties égales, cette droite* A'T *sera une tangente à la parabole au point* A'.

En effet, puisque la droite A'T est parallèle à MM', en abaissant l'ordonnée M'P' et en menant la droite MR par le point M, parallèlement à l'axe AB, les triangles TA'P''' et MM'R seront semblables, et donneront TP''' : P'''A' :: MR : M'R. Mais P'''A' = Qq, et dans le n°. 484, nous avons trouvé $Qq = \frac{p \times MR}{2M'R}$; donc en substituant dans la proportion précédente, nous aurons TP''' : $\frac{p \times MR}{2M'R}$ :: MR : M'R, ou en faisant disparaître le dénominateur, TP''' : $p \times MR$ :: MR : 2 $(M'R)^2$, d'où nous tirerons $2TP''' \times (M'R)^2 = p \times (MR)^2$..... (1). Le point A' étant à la parabole, nous aurons $(P'''A')^2 = p \times AP'''$, mais $(P'''A')^2 = (Qq)^2 = \frac{p^2 \times (MR)^2}{4(M'R)^2}$, donc $p \times AP''' = \frac{p^2 \times (MR)^2}{4(M'R)^2}$, ou $4AP''' \times (M'R)^2 = p \times (MR)^2$.

Si maintenant nous comparons cette dernière équation avec l'équation (1) ci-dessus, nous verrons que $2TP''' \times (M'R)^2 = 4AP''' \times (M'R)^2$, ou que $TP''' = 2AP'''$; c'est-à-dire que la distance du pied de l'ordonnée P'''A' du point A' au point T (où la droite A'T, menée par le point A' parallèlement à la droite MM', rencontre l'axe de la courbe) est égale à deux fois l'abscisse AP''' du point A'; donc la droite A'T est tangente à la parabole au point A'.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

488. THÉORÈME 188. *Réciproquement, si à l'origine* A′ *d'un diamètre* A′B′ *quelconque* (fig. 211), *on mène une tangente* TA′, *cette tangente sera parallèle aux droites* MM′, M″*m*..... *qui sont parallèles entre elles, et divisées en deux parties égales par le diamètre* A′B′.

En effet, si la tangente A′T n'était pas parallèle à la droite MM′, par le point A′ on pourrait mener une parallèle à cette droite MM′, qui serait tangente au point A′, d'après ce que nous venons de démontrer; par le même point A′, il y aurait donc deux tangentes à la parabole, ce qui est impossible, donc, etc.

489. THÉORÈME 189. *Supposons qu'à l'origine* A′ *d'un diamètre* A′B′ *quelconque* (fig. 211), *on ait mené une tangente* A′T, *et que, par un point* M *quelconque de la parabole, on ait mené une parallèle* *h*Q *à cette tangente* A′T; *supposons de plus que par l'origine* A *de l'axe, on ait élevé une tangente* A*a*, *et que, par le point* M *de la parabole, on ait abaissé l'ordonnée* PM, *prolongée jusqu'à sa rencontre en b avec le diamètre* A′B′; *je dis*, 1°. *que les triangles* T*t*A *et* *ta*A′ *sont égaux entre eux*; 2°. *que le triangle* TP‴A′ *est équivalent au rectangle* AP‴A′*a*; 3°. *que le triangle* *h*MP *est équivalent au rectangle* AP*ba*, *et* 4°. *que le triangle* *b*MQ *est équivalent au parallélogramme* TA′Q*h*.

1°. Les triangles T*t*A et *at*A′ sont rectangles, et ont les angles égaux chacun à chacun; de plus, les côtés T*t* et *t*A′ sont égaux, puisque la tangente A*a*, au sommet de l'axe, divise la tangente TA′ en deux parties égales (n°. 445): donc ces deux triangles sont égaux.

2°. Le triangle TP‴A′ se compose du triangle TA*t* + du trapèze A*t*A′P‴; mais le rectangle A*a*A′P‴ se compose du même trapèze + le triangle *at*A′ égal à T*t*A; donc le triangle TP‴A′ est équivalent au rectangle A*a*A′P‴.

3°. Le triangle *h*MP est semblable au triangle TP‴A′; donc TP‴A′ : *h*MP :: (A′P‴)² : (MP)²; mais les points A′ et M sont à la parabole; donc (A′P‴)² : (MP)² :: AP‴ : AP. Ces deux proportions nous donnent TP‴A′ : *h*MP :: AP‴ : AP. Les rectangles A*a*A′P‴ et A*ab*P ont même hauteur, ils sont donc entre eux comme leurs bases; donc A*a*A′P‴ : A*ab*P :: AP‴ : AP. Si donc on compare ces deux dernières proportions, on trouvera que TP‴A′ : *h*MP :: A*a*A′P‴ : A*ab*P. Or, on a démontré que TP‴A′ = A*a*A′P‴, donc *h*MP = A*ab*P.

4°. Retranchons ces deux équations membre à membre, et nous aurons TP‴A′ — *h*MP = A*a*A′P‴ — A*ab*P. Mais TP‴A′ — *h*M*p* = TA′S*h* + PMSP‴, et A*a*A′P‴ — A*ab*P = P*b*A′P‴ = PMSP‴ + M*b*A′S; donc TA′S*h* + PMSP‴ = PMSP‴ + M*b*A′S, d'où TA′S*h* = M*b*A′S, en supprimant le terme PMSP‴ commun aux deux membres. Si maintenant nous ajoutons dans chaque

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

membre de cette dernière équation le triangle A′SQ ; nous aurons : TA′Sh + A′SQ = MbA′S + ASQ, ou TA′Qh = MbQ. Ainsi, les quatre parties de notre proposition se trouvent démontrées.

490. THÉORÈME 190. *Je dis maintenant que, si l'on prend un diamètre quelconque* A′B′ (fig. 211) *pour l'axe des abscisses, et pour celui des ordonnées la tangente* TA′, *menée à l'origine de ce diamètre* A′B′, *les carrés des ordonnées seront entre eux comme les abscisses correspondantes.*

En effet, soient deux points quelconques M et m de la parabole; si par ces points on mène les ordonnées MQ et mQ′ parallèles à la tangente A″T, et les ordonnées PMb et mb' à l'axe AB, prolongées jusqu'à leur rencontre en b et b' avec le diamètre A′B′; comme nous venons de démontrer que le triangle bMQ est équivalent au parallélogramme TA′Qh, et, par la même raison, que le triangle mb'Q′ est équivalent au parallélogramme TA′Q′n; nous aurons les deux équations suivantes (1)..... bMQ = TA′Qh et mb'Q′ = TA′Q′n. Mais les parallélogrammes TA′Qh et TA′Q′n ont même hauteur, puisque le diamètre A′B′ est parallèle à l'axe AB; donc TA′Qh : TA′Q′n :: A′Q : A′Q′. Les triangles bMQ et mb'Q′ sont semblables; donc bMQ : mb'Q′ :: (MQ)^2 : (mQ′)^2. Or, en vertu des équations (1), ces deux proportions ont un rapport commun; donc les deux autres rapports nous donnent (MQ)^2 : (MQ′)^2 :: A′Q : A′Q′, d'où il suit ce qu'il fallait démontrer. Il est bon de voir que (QM′)^2 : (Q′M″)^2 :: A′Q : A′Q′, à cause que MQ = M′Q et mQ′ = Q′M″.

491. *Corollaire.* De la proportion (QM′)^2 : (Q′M″)^2 :: A′Q : A′Q′, nous tirerons $\frac{(QM')^2}{A'Q} = \frac{(Q'M'')^2}{A'Q'}$; d'où il suit que le rapport du carré d'une ordonnée à son abscisse, pour un diamètre quelconque, est une quantité constante; si nous la représentons par p', nous aurons $\frac{(QM')^2}{A'Q} = p'$, d'où (QM′)^2 = p' × A′Q, ou $y'^2 = p'x'$, en représentant par y' une ordonnée quelconque, et par x' l'abscisse correspondante.

492. *Remarque.* On voit, d'après cela, que l'équation qui renferme la relation des coordonnées de la parabole rapportée à un diamètre quelconque, est tout-à-fait semblable à celle que nous avons trouvée en rapportant cette courbe à son axe. Cependant il y a cette différence, entre ces équations, que celle relative à l'axe est rapportée à des coordonnées rectangulaires, tandis que celle qui est relative à un diamètre quelconque, est rapportée à des coordonnées obliques, dont l'axe des ordonnées est une tangente menée par le sommet du diamètre auquel on rapporte la courbe.

493. *Corollaire.* L'équation $y^2 = p'x'$ nous donne x' : y' :: y' : p'; d'où il suit que la constante p' est ici, comme dans le cas où l'on rapporte la parabole à son

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

axe, une troisième proportionnelle entre l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque de la courbe. Aussi donne-t-on encore le nom de paramètre à cette constante p' ; mais comme ce paramètre est différent de celui de l'axe, ainsi que nous allons le voir, pour le distinguer, on l'appelle *le paramètre relatif au diamètre auquel on rapporte la courbe.*

494. THÉORÈME 191. *Je dis maintenant que le paramètre relatif à un diamètre* MQ''' *quelconque* (fig. 208) *est égal à* 4 *fois le rayon vecteur* FM, *qui va à l'origine* M *de ce diamètre.*

En effet, si par l'origine A de l'axe on mène l'ordonnée AQ'' au diamètre MQ''', cette ordonnée AQ'' sera égale à la tangente MT, et l'abscisse MQ'' sera égale à TA = AP. Ainsi $(AQ'')^2 = p' \times AP$ et $(AQ'')^2 = (MT)^2$. Mais en vertu du triangle rectangle TMP, on a $(MT)^2 = (TP)^2 + (PM)^2$; or, on se rappelle que TP = 2AP, et que $(PM)^2 = p \times AP$; donc $(MT)^2 = 4(AP)^2 + p \times AP$, et par conséquent on aura $(AQ'')^2 = p' \times AP = 4(AP)^2 + p \times AP$, ce qui se réduit à $p' = 4AP + p = 4(AP + \frac{p}{4})$; mais $AP + \frac{p}{4} = FM$ (n°.458), donc $p' = 4FM$; comme il fallait le démontrer.

495. THÉORÈME 192. *La double ordonnée qui passe par le foyer de la parabole, est égale au paramètre relatif au diamètre auquel on rapporte la courbe.*

Supposons qu'on rapporte la parabole au diamètre MQ'', l'ordonnée qui passera par le foyer F (fig. 208), sera M''Q''', et donnera l'abscisse $MQ''' = TF = TA + AF = AP + \frac{p}{4}$. Mais nous venons de trouver $p' = 4(AP + \frac{p}{4})$, ce qui donne $AP + \frac{p}{4} = \frac{p'}{4}$; on aura donc $MQ''' = \frac{p'}{4}$, et par conséquent, $(M''Q''')^2 = p' \times \frac{p'}{4} = \frac{p'^2}{4}$; d'où on aura $M''Q''' = \frac{p'}{2}$, et partant $2M''Q''' = p'$; ce qu'il fallait démontrer. Si l'on avait rapporté la courbe à son axe, on aurait eu le même résultat, de sorte que la proposition est générale.

496. PROBLÈME 97. *Une parabole étant donnée, il faut trouver la direction des diamètres de cette courbe.*

Menez deux droites quelconques MM' et mM'' (fig. 212), parallèles entre elles; la droite A'B', qui les divisera en deux parties égales, sera la direction demandée. Cette construction est évidente d'après ce qui a été dit sur les diamètres de la parabole, au n°. 486.

497. PROBLÈME 98. *Trouver l'axe d'une parabole donnée.*

Après avoir trouvé, comme ci-dessus, un diamètre quelconque A'B' (fig. 212), on menera à ce diamètre une perpendiculaire M'N' quelconque ; on divisera cette perpendiculaire en deux également au point P', et par ce

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

point P′ on menera une droite AB parallèlement au diamètre quelconque A′B′, et cette droite AB sera l'axe demandé.

Cette solution est encore une suite évidente du n°. 486.

498. PROBLÊME 99. *Mener un diamètre à une parabole donnée, qui fasse avec ses ordonnées un angle donné.*

On cherchera d'abord un diamètre quelconque, comme il a été dit plus haut; on menera ensuite une droite mM″ (fig. 212) qui fasse avec ce diamètre quelconque, un angle égal à l'angle donné, et on divisera cette droite mM″ en deux parties égales au point Q′; puis, par ce point Q′ on menera une droite A′B′ parallèlement au diamètre quelconque trouvé d'abord, et cette droite A′B′ sera le diamètre demandé.

La raison de cette construction est encore évidente.

499. PROBLÊME 100. *Etant donné l'origine d'un diamètre, le paramètre de ce diamètre et la direction des ordonnées d'une parabole, il faut décrire cette courbe.*

Par l'origine A (fig. 213), on élevera une perpendiculaire AQ″ au diamètre donné AB, et on menera la droite Aq'' de manière que son inclinaison sur le diamètre donné AB, soit celle des ordonnées à ce diamètre; on portera ensuite le paramètre donné de A en C, sur le prolongement du diamètre AB; puis, on menera tant de droites Mm, M′m', M″m'' .... qu'on voudra, parallèlement à Aq'', et sur les distances CP, CP′, CP″.... comme diamètres, on décrira une suite de cercles qui couperont la droite R″Q″ aux points Q et R, Q′ et R′, Q″ et R″.... Par le point A, comme centre, on rabattra les distances AQ et AR, AQ′ et AR′, AQ″ et AR″.... sur la droite $q''r''$; par les points q et r, q' et r', q'' et r'' ....., on menera les parallèles qM et rm, q'M′ et $r'm'$, q''M″ et $r''m''$.... au diamètre AB, lesquelles iront rencontrer respectivement les droites Mm, M′m', M″m''... en des points M et m, M′ et m', M″ et m''... qui seront à la parabole.

Ce procédé est le même que celui du n°. 454 (2me. solution), à l'inclinaison près des ordonnées, et se démontre de la même manière, en vertu de ce que la relation des coordonnées de la parabole reste la même, quel que soit le diamètre auquel on rapporte cette courbe.

500. *Corollaire.* Si l'on donnait les coordonnées d'un point quelconque de la parabole rapportée à un diamètre quelconque, on décrirait cette courbe par l'un des procédés donnés aux n°s. 455 et 457, ainsi qu'on le voit par les figures 214 et 215; ou bien on chercherait une troisième proportionnelle entre l'abscisse et l'ordonnée du point donné, pour avoir le paramètre, et ensuite on opérerait comme il a été dit au n°. 499.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

501. THÉORÈME 193. *Si l'on fait* AT = AQ fig. 216), *et que par le point* T *et le point* M′ *dont* AQ *est l'abscisse, on mène une droite* TM′, *je dis que cette droite sera tangente à la parabole, au point* M′, *en supposant la courbe rapportée à un diamètre* AB *quelconque.*

En effet, si par un point quelconque m' de la droite TM′, on mène une ordonnée $m'P''$ au diamètre AB, les triangles TQM′, $TP''m'$ seront semblables, et donneront $TQ : TP'' :: QM' : P''m'$. Mais par construction AT = AQ, $TP'' = TA + AP''$; ce qui donne $TQ = 2AQ$, et $TP'' = AQ + AP''$, et partant $2AQ : AQ + AP'' :: QM' : P''m'$; d'où $P''m' = \frac{QM'(AQ+AP'')}{2AQ}$, et par conséquent (1).... $(P''m')^2 = \frac{(QM')^2((AQ)^2+2AQ\times AP''+(AP'')^2)}{4(AQ)^2}$. La droite $P''m'$ rencontre la parabole en un point M″, d'où il suit qu'on aura $(QM')^2 : (P''M'')^2 :: AQ : AP''$, d'où $(P''M'')^2 = \frac{(QM')^2\times AP''}{AQ}$. Si l'on multiplie les deux termes de la fraction du second membre par 4AQ, on aura $(P''M'')^2 = \frac{(QM')^2\times 4AQ\times AP''}{4(AQ)^2}$, et si l'on retranche cette dernière équation de l'équation (1), il viendra $(P''m')^2 - (P''M'')^2 = \frac{QM')^2((AQ)^2-2AQ\times AP''+(AP')^2)}{4(AQ)^2}$ ou $(P''m')^2 - (P''M'')^2 = \frac{(QM)^2(AP''-AQ)^2}{4(AQ)^2}$. Le second membre de cette équation est un carré, et par conséquent une quantité essentiellement positive; d'où il suit que $P''m' > P''M''$, c'est-à-dire que le point m' est hors de la parabole; il résulte de là que la droite TM′ n'a que le point M′ de commun avec la parabole; donc cette droite TM′ est tangente à cette courbe au point M′.

502. THÉORÈME 194. *Réciproquement, si par un point* M′ (fig. 216), *on mène une tangente* M′T, *et que par le point de contact* M′ *on abaisse l'ordonnée* M′Q, *on aura* AT = AQ.

En effet, nous venons de démontrer que si l'on faisait AT = AP, la droite TM′ serait tangente au point M′; si donc la proposition actuelle n'avait pas lieu, il en résulterait que par un même point de la parabole, on pourrait mener deux tangentes à cette courbe, ce qui est impossible.

503. *Corollaire.* Il suit de là que la sous-tangente QT = 2AQ, comme dans le cas de l'axe, et que la tangente At, menée à l'origine d'un diamètre quelconque AB, coupe en deux parties égales au point t, une autre tangente M′T quelconque à la même courbe.

504. THÉORÈME 195. *Soit ab une double ordonnée à un diamètre quelconque* AB (fig. 216); *si, par un point quelconque* M *de la parabole, on mène un diamètre* MK, *le produit* aK×Kb *des deux segmens* aK *et* Kb *de*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cette double ordonnée ab, sera égal au produit de la droite MK *multipliée par le paramètre du diamètre* AB *; de sorte que* $aK \times Kb = p \times MK$.

Car le point M étant à la parabole, on aura $(PM)^2 = (P'K)^2 = p \times AP$, et le point a étant aussi à la parabole, on aura $(P'a)^2 = p \times AP'$.

En retranchant la première équation de la deuxième, il viendra $(P'a)^2 - (P'K)^2 = p(AP' - AP)$. Mais $(P'a)^2 - (P'K)^2 = (P'a + P'K) \times (P'a - P'K) = Kb \times aK$, et $AP' - AP = PP' = MK$; donc $aK \times Kb = p \times MK$; ce qu'il fallait démontrer.

505. *Corollaire* 1. Si l'on suppose une autre double ordonnée $M''m''$, au même diamètre AB, et que le diamètre MK soit prolongé jusqu'en K', on aura $m''K' \times K'M'' = p \times MK'$; donc, en comparant ce dernier produit avec celui que nous venons de trouver ci-dessus, nous aurons $aK \times Kb : m''K' \times K'M'' :: MK : MK'$, c'est-à-dire que les produits des segmens des droites ab, $M''m''$ .... parallèles entre elles, et coupées par un diamètre MK' quelconque, sont entre eux comme les abscisses MK, MK' ..... correspondantes, comptées sur ce diamètre quelconque. Cette proposition, comme on voit, est plus générale que celles des n^os^. 453 et 490.

506. *Corollaire* 2. Si l'on menait le diamètre mh (fig. 216), on aurait $bh \times ha = p \times mh$; donc $bh \times ha : aK \times Kb :: mh : MK$.

507. PROBLÈME 101. *Trois points et la direction d'un diamètre d'une parabole étant donnés, il faut décrire cette courbe.*

Soient a, b et M les trois points donnés (fig. 217). Par les deux points a et b on menera une droite ab, qu'on divisera en deux parties égales au point P'; par ce point P' et le 3^me^. point M donné, on menera deux droites AP' et MK parallèlement à la direction donnée des diamètres de la courbe. On cherchera ensuite une moyenne proportionnelle Kn entre aK et Kb, et on fera cette proportion : $(Kn)^2 : (P'a)^2 :: MF : AP'$.

Pour construire cette proportion, qui doit nous donner la distance AP', c'est-à-dire l'origine A du diamètre AB, on fera $bC = Kn$, et $bD = P'a$; par les points C et D, on abaissera les perpendiculaires CE et DF sur la droite ab; par le point b on menera une droite bH dans une direction quelconque, et on fera $bG = MK$; on menera ensuite la droite GE, et par le point F une parallèle FH à cette droite GE, ce qui donnera $bH = AP'$, et par conséquent l'origine A du diamètre AB.

Pour démontrer la vérité de cette construction, il suffira de se rappeler que $Ka \times Kb : aP' \times P'b :: MK : AP'$; mais par construction $Ka \times Kb = (Kn)^2$, et $aP' = P'b$; donc $(Kn)^2 : (P'a)^2 :: MK : AP'$; proportion qui est précisément celle que nous avons construite : il ne reste plus qu'à faire voir que notre construction est conforme à cette proportion.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Or, en vertu des propriétés du cercle, nous avons $(bC)^2 : (bD)^2 :: bE : bF$; mais nous avons fait $bC = Kn$, et $bD = P'a$; donc $(Kn)^2 : (P'a)^2 :: bE : bF$.. (1) Les parallèles EG et FH nous donnent $bE : bF :: bG : bH$; mais $bG = MK$, donc $bE : bF :: MK : bH$.

Si maintenant nous comparons cette dernière proportion avec celle que nous avons marquée (1), nous verrons que $(Kn)^2 : (P'a)^2 :: MK : bH$; donc $bH = AP'$; donc le point A est le sommet ou l'origine du diamètre AB.

Par cette construction, comme on voit, le problême proposé se réduit à celui-ci : l'origine d'un diamètre et les coordonnées d'un point de la parabole rapportée à ce diamètre étant données, il faut décrire cette courbe. Or, nous avons enseigné à résoudre ce dernier problême (n°. 500).

On remarquera qu'il faut porter la distance AP' du côté où se trouve situé le point M par rapport à la droite ab, quand ce point M est plus près du diamètre AB que ne l'est le point a ou b, et, au contraire, du côté opposé, quand le point M est plus éloigné de ce diamètre AB que ne l'est le point a ou b.

26^me^. LEÇON.

Suite des propriétés de la Parabole.

508. PROBLÊME 102. *Proposons-nous maintenant de trouver l'expression analytique de la longueur d'une droite d a menée d'un point d, quelconque, à la parabole* (fig. 218), *en supposant la courbe rapportée à son axe* AB.

Si, par le point a d'intersection de la courbe et de la droite da, on mène la droite ag parallèle à l'axe AB, et que par le point donné d on abaisse la perpendiculaire dP' sur l'axe AB, on aura le triangle rectangle agd, qui donnera $(ad)^2 = (ag)^2 + (gd)^2$. Appelons x et y les coordonnées AP, Pa du point a, et a et b celles AP', P'd du point d; comme $ag = PP' = AP - AP'$, et que $gd = P'd - P'g = P'd - Pa$, nous aurons $(ad)^2$ ou $Z^2 = (x-a)^2 + (b-y)^2$...(1)

Le triangle rectangle adg nous donne (n°. 393) $ag : dg :: R : \text{tang}.dag$; d'où $\text{tang}.dag = \frac{R \times dg}{ag}$, ou en faisant le rayon des tables $= 1$, et représentant tang.dag par A, nous aurons $A = \frac{dg}{ag}$, ou $A = \frac{b-y}{x-a}$, d'où $b-y = A(x-a)$..... (2) Mettons cette valeur de $b-y$ dans l'équation (1), et il nous viendra $Z^2 = (x-a)^2 + A^2(x-a)^2$, d'où $x - a = \frac{Z}{\sqrt{A^2+1}}$, ce qui nous donnera $b-y = \frac{AZ}{\sqrt{A^2+1}}$, en vertu de l'équation (2).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

De ces deux dernières expressions nous tirerons

$$x = \frac{Z+a\sqrt{A^2+1}}{\sqrt{A^2+1}} \quad \text{et} \quad y = \frac{-AZ+b\sqrt{A^2+1}}{\sqrt{A^2+1}} \ldots\ldots (3)$$

Mais x et y sont les coordonnées du point a; donc ces coordonnées doivent satisfaire à l'équation $y^2 = px$ de la parabole; substituons les valeurs (3) à la place de x et de y dans cette équation, mise sous la forme $y^2 - px = 0$, et nous aurons $\frac{(-AZ+b\sqrt{A^2+1})^2}{A^2+1} - \frac{p(Z+a\sqrt{A^2+1})}{\sqrt{A^2+1}} = 0$, ou

$(-AZ+b\sqrt{A^2+1})^2 - p(Z+a\sqrt{A^2+1})\sqrt{A^2+1} = 0$, en faisant disparaître le dénominateur. Si maintenant nous développons, il nous viendra

$$A^2Z^2 - 2AbZ\sqrt{A^2+1} + b^2(A^2+1) - pZ\sqrt{A^2+1} - pa(A^2+1) = 0;$$

et en rassemblant ce qui multiplie les mêmes puissances de Z,

$$A^2Z^2 - \{(2Ab+p)\sqrt{A^2+1}\}Z + (b^2-pa)(A^2+1) = 0;$$

ou en divisant par A^2, $Z^2 - \frac{(2Ab+p)\sqrt{A^2+1}}{A^2}Z + \frac{(b^2-pa)(A^2+1)}{A^2} = 0 \ldots (4)$

pour l'équation qui nous donnera la valeur de Z ou de da.

On voit que cette équation est du second degré, et que, par conséquent, elle donnera deux valeurs pour Z : or, une ligne droite db quelconque, coupe, en général, la parabole en deux points b et a, d'où il suit évidemment que l'une des valeurs de Z donnée par l'équation (4) sera la longueur da, et l'autre la longueur db.

Mais le terme tout connu $\frac{(b^2-pa)(A^2+1)}{A^2}$ d'une équation du second degré est égale au produit des racines (alg., n°. 204); d'où il suit que nous aurons $da \times db = \frac{(b^2-pa)(A^2+1)}{A^2}$.

509. *Corollaire* 1. Il est évident que, pour une autre droite db' qui passerait par le même point d, on arriverait à une équation parfaitement semblable à l'équation (4), dans laquelle au lieu de A il y aurait A', et qui donnerait, par conséquent, pour les valeurs de Z, les distances da', et db', de sorte qu'on aurait $da' \times db' = \frac{(b^2-pa)(A'^2+1)}{A'^2}$.

Si donc nous comparons ces deux dernières équations, nous aurons $da \times db : da' \times db' :: \frac{A^2+1}{A^2} : \frac{A'^2+1}{A'^2}$, proportion qui ne dépend que des angles que forment les droites en question db, db' avec l'axe de la parabole; mais tous les diamètres de cette courbe sont parallèles à l'axe; donc cette proportion sera vraie, quel que soit le diamètre auquel on rapporte la courbe.

510. *Corollaire* 2. Comme cette proportion est indépendante des coordonnées du point où les droites se coupent, il s'ensuit que si l'on avait deux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

droites cb, ch, ou ab, mk, respectivement parallèles aux premières; on aurait (n°. 509), $ca \times cb : ce \times ch :: \frac{A^2+1}{A^2} : \frac{A'^2+1}{A'^2}$, et $ai \times ib : mi \times ik :: \frac{A^2+1}{A^2} : \frac{A'^2+1}{A'^2}$, et par conséquent $ad \times db : da' \times db' :: ca \times cb : ce \times ch$, ou $ad \times db : da' \times db' :: ai \times ib : mi \times ik$; ou encore, $ca \times cb : ce \times ch :: ai \times ib : mi \times ik$; c'est-à-dire que les produits des segmens de deux droites qui se coupent en un point quelconque, et qui rencontrent la parabole en deux points, sont entre eux comme les produits des segmens de deux autres droites, respectivement parallèles aux premières, qui se coupent aussi en un point quelconque et qui rencontrent la parabole en deux points.

511. *Corollaire* 3. Si deux de ces droites étaient des tangentes à la parabole, les segmens de chacune de ces droites seraient égaux entre eux, et deviendraient, ceux de la première, $t\mathrm{M}'$, et ceux de la seconde, $t\mathrm{A}$ (fig. 216); de sorte que, si les droites MM'', ab, sont respectivement parallèles à ces tangentes $t\mathrm{M}'$, $t\mathrm{A}$, nous aurons $(t\mathrm{M}')^2 : (t\mathrm{A})^2 :: \mathrm{M}c \times c\mathrm{M}'' : ac \times bc$, c'est-à-dire que les carrés de deux tangentes qui se coupent en un point, sont entre eux comme les produits des segmens des droites respectivement parallèles à ces tangentes, qui se coupent en un point, et qui rencontrent la courbe en deux points.

512. *Corollaire 4.* Supposons que par le point de contact A de la tangente $t\mathrm{A}$ (fig. 216), on mène un diamètre AB, et que par le point M de la droite MM'', on mène un autre diamètre MK, les triangles $\mathrm{M}c\mathrm{K}$, $\mathrm{T}t\mathrm{A}$ seront semblables et donneront $(\mathrm{T}t)^2 : (t\mathrm{A})^2 :: (\mathrm{M}c)^2 : (c\mathrm{K})^2$, ou à cause que $\mathrm{T}t = t\mathrm{M}'$, $(t\mathrm{M}')^2 : (t\mathrm{A})^2 :: (\mathrm{M}c)^2 : (c\mathrm{K})^2$, et partant, $\mathrm{M}c \times c\mathrm{M}'' : ac \times cb :: (\mathrm{M}c)^2 : (c\mathrm{K})^2$.

Si maintenant l'on prenait une moyenne proportionnelle entre les deux segmens de chacune des droites MM'', ab, en les appelant p et q, on aurait

$$p^2 : q^2 :: (\mathrm{M}c)^2 : (c\mathrm{K})^2, \text{ ou } p : q :: \mathrm{M}c : c\mathrm{K}.$$

513. PROBLÈME 103. *Quatre points* M, *a*, M″ *et b* (fig. 219) *d'une parabole étant donnés, il faut trouver la direction des diamètres de cette courbe.*

On joindra, deux à deux, par des droites ab et MM'' (fig. 217) les quatre points donnés, de manière que ces droites se rencontrent en un point c; puis on prendra une moyenne proportionnelle $c\mathrm{D}$ entre les segmens $\mathrm{M}c$ et $c\mathrm{M}''$ de la droite MM'', et une autre $c\mathrm{E}$ entre les segmens ac et cb de la droite ab; cela fait, on fera $c\mathrm{G} = c\mathrm{D}$, et $c\mathrm{H} = c\mathrm{E}$, et par les points G et H on menera la droite GH, qui sera un diamètre de la parabole; car si par le point M on menait la droite MK parallèle à GH, on aurait $c\mathrm{G}$ ou $c\mathrm{D} : c\mathrm{H}$ ou $c\mathrm{E} :: c\mathrm{M} : c\mathrm{K}$, et par conséquent la droite MK serait un diamètre (n°. 512) de la parabole.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

514. PROBLÊME 104. *Supposons qu'il s'agisse de faire passer une parabole par quatre points donnés.*

On cherchera d'abord la direction des diamètres, comme il vient d'être dit, et le problême sera ramené aux mêmes circonstances que celui du n°. 499.

515. DÉFINITION. En général, la circonférence du cercle peut rencontrer une courbe donnée en trois points; si ces trois points sont infiniment près l'un de l'autre, ou viennent se confondre en un seul, le cercle prend alors le nom de *cercle osculateur* de la courbe en question, et le point commun au cercle et à la courbe, prend celui de *point d'osculation*. Le rayon du cercle osculateur se nomme *rayon de courbure* de la courbe proposée, pour le point d'osculation.

516. PROBLÊME 105. *Proposons-nous de trouver le centre et le rayon du cercle osculateur de la parabole, pour un point quelconque d'osculation.*

Soit M ce point (fig. 220); si par ce point on mène une normale MR, il est évident que le centre du cercle osculateur sera quelque part sur cette normale; de sorte que, si nous avions le rayon de ce cercle, nous en aurions le centre en portant le rayon sur la normale MR, à partir du point M d'osculation. Cherchons donc ce rayon.

Pour cela, par le point M menons le diamètre MD, la tangente MC, et l'ordonnée mn, très-près du point M, parallèlement à la tangente MC. Par le pied K de cette ordonnée, menons une parallèle NK à la normale MR; cette droite NK sera perpendiculaire à mn, et comme le diamètre MD est parallèle à l'axe AB de la parabole, les triangles MNK et PMR seront semblables, et donneront MK : NK :: MR : PR..... (1)

Si maintenant nous prenons la droite NK prolongée, pour la direction du diamètre du cercle qui passe par les trois points m, M et n, en nommant le segment NK $= x$, et le rayon $= r$, l'autre segment du diamètre du cercle sera $2r - x$; et comme la perpendiculaire nK, que nous nommerons y, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens x et $2r - x$, nous aurons $y^2 = (2r - x)\,x$ ..... (2)

L'ordonnée nK appartient aussi à la parabole, et elle est relative au diamètre MD; nommons donc l'abscisse MK $= x'$, et nous aurons $y^2 = p'x'$... (3) d'où il suit $x(2r - x) = p'x'$..... (4).

Actuellement, si dans la proportion (1) nous mettons x et x' à la place de NK et de MK, et à la place de PR, sa valeur $\frac{1}{2}p$ (n. 474), il viendra $x' : x :: \text{MR} : \frac{1}{2}p$; d'où $x' = \frac{2x \times \text{MR}}{p}$. Mettons à présent cette valeur de x' dans l'équation (4), et il viendra $x(2r - x) = \frac{2p'x \times \text{MR}}{p}$, ce qui se réduit à $2r - x = \frac{2p' \times \text{MR}}{p}$..... (5).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour que le cercle qui passe par les trois points m, M et n devienne le cercle osculateur au point M, il faut que les deux points m et n viennent coïncider avec le point M, et par conséquent aussi les points N et K; de sorte qu'il faut que $x=0$ dans l'équation (5), ce qui la réduit à $2r=\frac{2p'\times \mathrm{MR}}{p}$, et donne $r=\frac{p'\times \mathrm{MR}}{p}$..... (6)

Si, maintenant, nous nous rappelons que p', qui est le paramètre du diamètre MD, est égal à 4 fois le rayon vecteur qui va au sommet du diamètre MD, et que ce rayon vecteur est égal à $x+\frac{1}{4}p$, x étant l'abscisse du point M, nous verrons que $p'=4(x+\frac{1}{4}p)=4x+p$. D'ailleurs le triangle rectangle PMR donne $\mathrm{MR}=\sqrt{(\mathrm{PR})^2+(\mathrm{PM})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}p^2+px}$: si donc nous substituons dans l'équation (6), nous aurons $r=\frac{(4x+p)\sqrt{\frac{1}{4}p^2+px}}{p}$, ...(7) pour le rayon du cercle osculateur relatif en un point quelconque M, de la parabole rapportée à son axe.

517. *Corollaire* 1. Si nous voulions le rayon de courbure du sommet A de l'axe, il faudrait faire $x=0$ dans l'équation (7), ce qui nous donnerait $r=\frac{p\times\frac{1}{2}p}{p}=\frac{1}{2}p$; c'est-à-dire que le rayon de courbure au sommet de la parabole, est égal à la moitié du paramètre.

518. *Corollaire* 2. Nous venons de voir que le centre d'un cercle osculateur, quelconque, était sur la normale menée au point d'osculation; et nous voyons, d'après l'expression du rayon de courbure, que ce rayon est une fonction de l'abscisse de ce point; de sorte que la grandeur de ce rayon varie quand on passe d'un point d'osculation à un autre. Cela posé, imaginons une infinité de normales à la parabole, et que sur chacune de ces normales on ait déterminé le centre du cercle osculateur qui y répond; je dis que la courbe *abc* (fig. 221) qui joindra tous ces centres, sera ce qu'on appelle la *développée* de la parabole. En général, la développée d'une courbe est le lieu de tous les centres des cercles osculateurs de cette courbe.

519. THÉORÈME 196. *Supposons un fil, flexible et inextensible, enveloppant une certaine courbe abc* (fig. 221); *supposons que l'une des extrémités du fil soit fixée en un point c quelconque de cette courbe abc; et que l'autre extrémité soit en* A, *de manière que ce fil soit en partie en ligne courbe cba, et en partie en ligne droite* aA; *je dis que, si en faisant mouvoir l'extrémité* A, *et tenant le fil toujours également tendu, le point* A *parcourt la circonférence de la parabole qui a la droite* aA *pour demi-paramètre de l'axe, cette courbe abc sera la développée de cette parabole.*

En effet, supposons l'extrémité A du fil en question, parvenue au point

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

M′; dans cette position, le fil sera en partie enveloppé sur la courbe *cba*, et en partie en ligne droite; or, il est évident que la partie en ligne droite *b*M′ est le rayon de courbure de la parabole pour le point M′, car cette ligne droite tourne un instant infiniment petit autour du point *b* comme centre, de sorte que son extrémité M′ décrit un arc infiniment petit, qui est évidemment un arc du cercle osculateur au point M′: donc la droite *b*M′ est le rayon de ce cercle, et par conséquent le point *b*, qui est sur la courbe *abc*, en est le centre. Or, il en serait évidemment de même pour toute autre position du fil; d'où il suit que la courbe en question est le lieu de tous les centres des cercles osculateurs de la parabole dont *a*A serait le demi-paramètre; donc enfin la courbe *abc* est la développée de cette parabole.

520. *Corollaire* 1. Il suit de ce raisonnement que, les normales à la parabole sont des tangentes à sa développée; car on conçoit que la partie *b*M′ du fil qui est en ligne droite, devient, par la tension, naturellement tangente à la développée, et nous venons de démontrer que cette même ligne droite était normale à la parabole.

521. *Corollaire* 2. Nous avons vu (n°. 517) que le rayon de courbure de la parabole au sommet, est égal à la moitié du paramètre; donc, d'après ce qui précède, la développée doit prendre naissance sur l'axe de la parabole, en un point *a* distant du sommet d'une quantité égale au demi-paramètre. D'ailleurs on voit que la développée s'étend à l'infini au-dessus et au-dessous de l'axe, que les deux branches de cette courbe opposent leur convexité l'une à l'autre, et qu'elles forment un point de rebroussement au point *a*; ainsi la développée de la parabole est une courbe ouverte et à rebroussement.

522. *Corollaire* 3. Si l'on accourcissait le fil générateur d'une quantité donnée ME, son extrémité E engendrerait une courbe DEED, dont tous les points seraient également distans de la parabole, et les normales à la parabole seraient en même temps normales à cette courbe. Ainsi, pour décrire cette courbe DEED, il suffira de mener une suite de normales à la parabole, et de porter sur ces normales, et à partir des points de la parabole communs à ces normales, la distance qui doit régner entre les deux courbes. On observera que cette distance doit toujours être moindre que le demi-paramètre, car si elle était plus grande, la courbe qu'on obtiendrait formerait un pli au point où elle rencontrerait l'axe, ce qui ne convient presque jamais.

Nous appelerons cette courbe DEED, la *parallèle à la parabole.*

Au lieu d'accourcir le fil générateur, on pourrait l'alonger, et on aurait une courbe extérieure, qui jouirait des mêmes propriétés que l'intérieure.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

27^me. LEÇON.

L'Ellipse rapportée à ses axes.

523. DÉFINITION. L'*ellipse* est une courbe qui jouit de la propriété que, la somme des distances FM+F'M de chacun de ses points M à deux points fixes F et F' (fig. 222) est constamment égale à une droite prise dans l'ellipse, que nous représenterons pour le moment par $2a$.

Les deux points fixes F et F' se nomment les *foyers*, et les distances FM, F'M les *rayons vecteurs* de l'ellipse.

524. THÉORÈME 197. *Si par les deux foyers on mène une droite* AB, *cette droite rencontrera l'ellipse en deux points* A *et* B (fig. 222).

Car on pourra toujours prendre deux points sur cette droite AB, de telle sorte qu'on ait $AF+AF'=2a$, et $BF+BF'=2a$; ce qui est conforme à la définition que nous venons de donner de l'ellipse.

525. THÉORÈME 198. *Les foyers* F *et* F' *de l'ellipse sont respectivement à égales distances des extrémités de la droite* AB, *interceptée par la courbe* (fig. 222).

En effet, pour les points A et B, où la droite AB rencontre l'ellipse, nous avons $AF+AF'=2a$, et $BF+BF'=2a$, et partant $AF+AF'=BF+BF'$. Mais $AF'=AF+FF'$, et $BF=BF'+FF'$; donc $2AF+FF'=2BF'+FF'$, ou en supprimant le terme FF' commun dans les deux membres, et divisant ensuite par 2, $AF=BF'$. Si à cette dernière équation nous ajoutons FF', il viendra $AF+FF'=BF'+FF'$ ou $AF'=BF$, ce qu'il fallait démontrer.

526. THÉORÈME 199. *La droite* AB *interceptée par l'ellipse, et qui passe par les foyers, est précisément celle que nous avons représentée d'abord par* $2a$ (n°. 524) (fig. 222).

En effet, pour le point A nous avons $AF+AF'=2a$; mais nous venons de trouver $AF=BF'$; donc $BF'+AF'=2a$; or, $BF'+AF'=AB$; donc $AB=2a$.

527. THÉORÈME 200. *Le point* I, *milieu de* AB, *est aussi le milieu de* FF'.

Car si de AI=IB, on retranche AF=BF', on aura AI−AF=IB−BF', ou FI=F'I.

528. THÉORÈME 201. *Si par le point* I *on élève une perpendiculaire à* AB, *cette perpendiculaire rencontrera l'ellipse en deux points* D *et* C.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Car on conçoit que sur cette droite DC on pourra toujours prendre deux points D et C, de manière qu'on ait (fig.222) DF+F′D = AB, et CF+CF′ = AB, ce qui est conforme à la définition de l'ellipse.

529. *Corollaire* 1. Comme la droite DC est perpendiculaire sur le milieu de FF′, on aura FD = F′D, et FC = F′C; et puisque FD + F′D = AB, et que FC+F′C = AB, il s'ensuit que FD = $\frac{1}{2}$AB = AI = BI, et que FC = $\frac{1}{2}$AB = AI = IB; c'est-à-dire, en d'autres termes, que les rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités D et C de la droite DC, sont égaux entre eux et à la moitié de la droite AB.

530. *Corollaire* 2. Il suit de là, que les droites AB et DC de l'ellipse, étant données, on aura les foyers F et F′, en décrivant un arc de cercle de l'une D des extrémités de la droite DC, avec un rayon égal à la moitié de la droite AB : cet arc coupera cette dernière droite en deux points F et F′, qui seront les foyers de l'ellipse.

531. *Corollaire* 3. Il suit encore de là, que AI > ID; car le triangle FDI est rectangle, et FD, qui est l'hypothénuse de ce triangle, est égal à AI, donc AB > DC.

532. *Corollaire* 4. D'ailleurs il est évident que ID = IC, car les triangles rectangles FDI, FCI, sont égaux entre eux comme ayant un côté FI commun et l'hypothénuse égale. Par conséquent les droites AB et CD se coupent mutuellement et perpendiculairement en deux parties égales.

533. THÉORÈME 202. *Soient deux points* M *et m pris sur l'ellipse* (fig.222), *de sorte qu'en menant du même foyer* F *les droites* FM *et* F*m à ces deux points* M *et m, on ait* FM = F*m ; je dis que la droite* M*m qui passera par ces deux points, sera divisée perpendiculairement en deux parties égales au point* P.

En effet, menons les droites MF′ et *m*F′ des mêmes points M et *m* au second foyer F′, et nous aurons FM+F′M = AB, et F*m*+F′*m* = AB, d'où FM+F′M = F*m*+F′*m*. Mais par hypothèse FM = F*m*; donc F′M = F′*m* : il suit de là que les deux foyers F et F′ sont également distans des extrémités M et *m* de la droite M*m*; donc la droite AB qui passe par les foyers est perpendiculaire sur le milieu de M*m*.

534. THÉORÈME 203. *Réciproquement, si une droite* M*m est perpendiculaire à la droite* AB, *cette droite* M*m sera divisée en deux parties égales par la droite* AB.

Car si cela n'était pas vrai, en prenant un point *m*′ sur l'ellipse, de manière que F*m*′ = FM, la droite M*m*′, qui joindrait les points M, *m*′, serait perpendiculaire à AB, et serait divisée par AB en deux parties égales;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mais cette droite Mm' doit coïncider avec Mm, puisque par un point M on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire à la droite AB ; donc cette droite AB divise la droite Mm en deux parties égales.

535. *Corollaire.* Il suit des deux propositions précédentes, que la droite AB est un axe de l'ellipse, puisque cette droite divise en deux parties égales toutes celles qui lui sont perpendiculaires.

536. THÉORÊME 204. *Prenons, sur la droite* AB, *les distances* IP *et* IP'' *égales entre elles ; je dis que, si par les points* P *et* P'' *on mène les droites* Mm *et* $M''m''$ *parallèlement à la droite* DC, *ces droites, terminées de part et d'autre à la courbe, seront égales entre elles* (fig. 222).

D'abord ces droites sont divisées en deux parties égales par l'axe AB : il suffira donc de démontrer que leurs moitiés PM et $P''M''$ sont égales entre elles.

Or, en menant les rayons vecteurs FM, F'M, et FM'', $F'M''$, on aura les triangles rectangles FMP et F'MP, $FM''P''$ et $F'M''P''$, qui donneront, les deux premiers, $(FM)^2=(FP)^2+(PM)^2$ et $(F'M)^2=(F'P)^2+(PM)^2$... (1), et les deux derniers, $(FM'')^2=(FP'')^2+(P''M'')^2$ et $(F'M'')^2=(F'P'')^2+(P''M'')^2$..(2) Retranchons l'une de l'autre, 1°. les équations (1), et 2°. les équations (2), et il viendra (3)....$(FM)^2-(F'M)^2=(FP)^2-(F'P)^2$ et $(F'M'')^2-(FM'')^2=(F'P'')^2-(FP'')^2$. Comme la différence de deux carrés est égale à la somme multipliée par la différence des racines, les équations (3) se réduiront

$$\left.\begin{array}{l}\text{à } (FM+F'M)(FM-F'M)=(FP+F'P)(FP-F'P)\\ \text{et } (F'M''+FM'')(F'M''-FM'')=(F'P''+FP'')(F'P''-FP'')\end{array}\right\}\ (4)$$

La figure 222 nous indique que $FP+F'P=FF'$, et $F'P''+FP''=FF'$; de plus, puisque par hypothèse $IP=IP''$, et que d'ailleurs $IF=IF'$, on aura $F'P=FP''$; donc $FP-F'P=FP-FP''=PP''$, et $F'P''-FP''=F'P''-F'P=PP''$; si donc on substitue dans les équations (4), en observant que la somme de deux rayons vecteurs égale l'axe AB, il viendra $AB(FM-F'M)=PP''\times FF'$, et $AB(F'M''-FM'')=PP''\times FF'$; et partant $FM-F'M=F'M''-FM''$. Mais on a aussi $FM+F'M=F'M''+FM''$, puisque chacune de ces sommes égale AB ; en ajoutant donc ces deux équations, on aura $2FM=2F'M''$ ou $FM=F'M''$, et en les retranchant,

$$2F'M=2FM'' \text{ ou } F'M=FM''.$$

Il suit de là que les deux triangles FMF' et $FM''F'$ ont les trois côtés égaux, donc ces triangles sont parfaitement égaux ; donc les perpendiculaires MP et $M''P''$, abaissées sur leur base commune, sont égales entre elles, et partant $Mm=M''m''$; ce qu'il fallait démontrer.

537. *Corollaire* 1. Il suit de là que si l'on mène la droite MM'' et la droite

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mm'' par les extrémités des droites Mm et $M''m''$, ces droites MM'' et mm'' seront parallèles à l'axe AB, et on aura $QM = QM''$ et $Q'm = Q'm''$; c'est-à-dire, en d'autres termes, que les parallèles à l'axe AB sont divisées perpendiculairement en deux parties égales par la droite DC; donc cette droite DC est un axe de l'ellipse. Ainsi, cette courbe a deux axes perpendiculaires entre eux, qui entrent dans la classe des diamètres conjugués, puisque l'un de ces diamètres divise également les parallèles à l'autre, et réciproquement.

538. *Corollaire* 2. Nous avons démontré (n°. 531) que $AB > DC$; ainsi l'axe AB, qui passe par les foyers, sera le grand, et l'axe DC, qui est perpendiculaire au premier, sera le petit axe de l'ellipse. Le point I, où se coupent les deux axes de l'ellipse, est le *centre* de la courbe.

539. *Corollaire* 3. Il suit encore de la proposition n°. 536 et du corollaire (n°. 537), que la figure $Mmm''M''$ est un rectangle dont les côtés sont respectivement parallèles aux axes de l'ellipse, et dont les diagonales, qui sont égales entre elles, se coupent mutuellement en deux parties égales au centre de l'ellipse; d'où il suit que cette courbe a la propriété d'avoir une infinité de systèmes de quatre points à égales distances du centre, et que sur une droite quelconque Mm'', prise pour diamètre, si l'on décrit une circonférence de cercle, cette circonférence de cercle coupera celle de l'ellipse en quatre points M, m, m'' et M'', tels que si l'on joint ces points par des droites, ces droites seront respectivement parallèles aux axes. De plus, toute droite menée par le centre est divisée, en ce point, en deux parties égales.

540. *Corollaire* 4. Les angles MIB et $M''IA$, que forment les diagonales du rectangle $Mmm''M''$ avec le grand axe AB, sont égaux entre eux; donc, si par le centre de l'ellipse on mène deux droites également inclinées par rapport à l'axe AB, l'une à droite et l'autre à gauche, ces droites seront égales entre elles.

541. *Corollaire* 5. De ce que toute droite qui passe par le centre se termine à l'ellipse, il s'ensuit que cette courbe est fermée.

Je laisse au lecteur le plaisir de démontrer lui-même, 1°. que chaque axe de l'ellipse divise cette courbure en deux parties égales; 2°. que la partie DMB (fig. 222) de la circonférence de l'ellipse, comprise dans l'angle DIB des deux axes, est le quart de la circonférence entière, et qu'il en est de même de la superficie comprise dans le même angle, relativement à la superficie entière de l'ellipse; 3°. que les secteurs elliptiques opposés au sommet, et formés par un axe et une droite quelconque menée par le centre, sont égaux par symétrie; 4°. que les secteurs elliptiques opposés au sommet, et formés par deux droites quelconques qui passent par le centre, sont aussi symétri-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ques et équivalens, et 5°. que toute droite qui passe par le centre; partage l'ellipse en deux parties symétriques et équivalentes.

542. PROBLÊME 106. *Les deux axes d'une ellipse étant donnés, il faut trouver les deux foyers.*

Cette question a été résolue au n°. 530.

543. PROBLÊME 107. *Le grand axe et les foyers d'une ellipse étant donnés, on demande le petit axe* (fig. 222).

On élevera une perpendiculaire DC au milieu du grand axe donné AB, et ensuite, par un foyer F, comme centre, et avec un rayon égal au demi-grand axe AI, on décrira un arc de cercle qui coupera cette perpendiculaire DC en deux points D et C, qui seront les extrémités du petit axe demandé DC (n°. 532).

544. PROBLÊME 108. *Le petit axe et la distance du centre à un foyer étant donnés, on demande le grand axe de l'ellipse.*

Sur le milieu du petit axe DC donné (fig. 222), on élevera une perpendiculaire AB; on portera IF et IF′, égales à la distance du centre à un foyer, et on joindra les points D et F par une droite DF, qui sera la moitié du grand axe : en portant donc DF de I en A et de I en B, on aura AB qui sera l'axe demandé; ce qui est évident d'après ce qui précède.

545. THÉORÈME 205. *Le demi-petit axe* DI *est moyen proportionnel entre les distances d'un foyer aux extrémités du grand axe.*

En effet, le triangle rectangle FDI nous donne $(DI)^2=(FD)^2-(IF)^2=(AI)^2-(IF)^2=(AI+IF)\,(AI-IF)$; mais $AI+IF=AI+IF'=AF'$, et $AI-IF=IB-IF'=F'B$; donc $(DI)^2=AF'\times F'B$; d'où $AF' : DI :: DI : BF'$.

546. *Corollaire* 1. Si nous représentons par $2a$ le grand axe AB, par $2b$ le petit axe DC, et par $2c$ la distance FF′ des foyers; le même triangle rectangle FDI nous donnera $a^2=b^2+c^2$; d'où l'on voit que le carré du demi-grand axe égale le carré du demi-petit axe, plus le carré de la distance du centre à un foyer de l'ellipse.

547. *Corollaire* 2. L'équation $a^2=b^2+c^2$ peut se mettre sous la forme $b^2=a^2-c^2$; d'où il suit que *le carré du demi-petit axe égale le carré du demi-grand axe, moins le carré de la distance du centre à un foyer de l'ellipse,* ce que nous avions déjà vu.

548. *Corollaire* 3. De l'équation $a^2=b^2+c^2$ on tire $c^2=a^2-b^2$, c'est-à-dire que *le carré de la distance d'un foyer au centre est égale au carré du demi-grand axe moins le carré du demi-petit axe.*

549. PROBLÊME 109. *Proposons-nous de décrire une ellipse dont on connaît les deux axes.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On cherchera d'abord les foyers comme il a été dit plus haut, et ensuite on prendra des points a, b, c... (fig. 223) sur le grand axe AB, entre le centre I et un foyer F′; puis, avec un rayon égal à Ba et de chacun des foyers comme centre, on décrira des arcs de cercle en m, m', m'' et m'''; avec un autre rayon égal au reste Aa du grand axe, et pareillement de chaque foyer comme centre, on décrira de nouveaux arcs en m, m', m'' et m''' qui couperont les premiers en des points m, m', m'' et m''' qui seront à l'ellipse.

En effet, si l'on mène les droites Fm, et F′m des foyers à un m quelconque des quatre points que nous venons de construire, on aura Fm + F′m = AB, car d'après la construction on a Fm = Aa, et F′m = Ba; donc Fm + F′m = Aa + Ba = AB; donc le point m est à l'ellipse, ainsi que les trois autres m', m'' et m''', obtenus de la même manière.

En opérant donc de la même manière sur autant de points a, b, c... qu'on voudra, pris sur le grand axe entre le centre et un foyer, on obtiendra une suite de points de l'ellipse aussi rapprochés les uns des autres qu'on voudra, qu'il suffira de réunir à la main par une ligne qui sera sensiblement l'ellipse demandée

550. *Corollaire.* Si au lieu de donner les deux axes, on donnait le grand axe et les foyers, il est évident qu'on pourrait opérer comme il vient d'être dit, sans autre préparation. Mais si l'on donnait le petit axe et la distance du centre à un foyer, il est clair qu'il faudrait commencer par trouver le grand axe, ainsi que nous l'avons expliqué au n°. 544, et ensuite opérer comme ci-dessus.

551. THÉORÈME 206. *Si l'on prend les axes de l'ellipse pour les axes des coordonnées de cette courbe, le grand axe étant celui des abscisses, l'origine sera au centre; et en représentant par x l'abscisse, et par y l'ordonnée d'un point* M *quelconque de l'ellipse* (fig. 222), *la relation des coordonnées de cette courbe sera exprimée par l'équation* $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, *$a$ représentant le demi-grand axe, et b le demi-petit axe.*

En effet, par le point M, abaissons l'ordonnée PM et menons les rayons vecteurs FM et F′M; les triangles rectangles FMP et PMF′ donneront, le premier $(FM)^2 = (FP)^2 + (PM)^2$ et le second $(F'M)^2 = (F'P)^2 + (PM)^2$ (1).

Si nous représentons par z et z' les rayons vecteurs FM et F′M, nous aurons $z + z' = 2a$, d'où $z' = 2a - z$, et, de plus, FP = FI + IP = $c + x$, F′P = IF′ − IP = $c - x$, et PM = y; il nous viendra $z^2 = (c+x)^2 + y^2$ et $(2a-z)^2 = (c-x)^2 + y^2$...(2), et en retranchant ces deux équations l'une de l'autre, $z^2 - (2a-z)^2 = (c+x)^2 - (c-x)^2$, ce qui se réduit à $4a(z-a) = 4cx$ ou

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à $az - a^2 = cx$, en vertu de ce que la différence de deux carrés est égale à la différence des racines multipliées par leur somme ; d'où nous tirerons $z = \frac{a^2+cx}{a}$. Si maintenant nous substituons cette valeur de z dans la première des équations (2), il nous viendra $\frac{(a^2+cx)^2}{a^2} = (c+x)^2 + y^2$; et en développant et faisant disparaître le dénominateur du premier membre, il en résultera $a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2c^2 + 2a^2cx + a^2x^2 + a^2y^2$, ou en réduisant et faisant passer dans le premier membre le terme a^2y^2 et tous les autres dans le second, $a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) - x^2(a^2 - c^2)$.

Mais (n°. 548) $a^2 - c^2 = b^2$, donc $a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2 = b^2(a^2 - x^2)$ d'où nous tirerons enfin $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; ce qu'il fallait démontrer.

552. Il faut remarquer en passant que nous venons de trouver, $z = \frac{a^2+cx}{a}$ et que, puisque $z + z' = 2a$, nous devons avoir $z' = \frac{a^2-cx}{a}$, c'est-à-dire, que l'expression d'un rayon vecteur sera généralement $z = \frac{a^2 \pm cx}{a}$, en faisant attention qu'il faudra prendre le terme cx avec le signe + quand le rayon vecteur dont il s'agira coupera le petit axe, et avec le signe — quand il s'agira de l'autre rayon vecteur. Dans l'un et l'autre cas, x sera l'abscisse du point de la courbe où les deux rayons vecteurs iront aboutir.

553. THÉORÈME 207. *Réciproquement, si l'on a une courbe rapportée à des axes rectangulaires, et que la relation de ses coordonnées soit exprimée par une équation de la forme* $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, *je dis que cette courbe sera une ellipse dont a et b seront les demi-axes* (fig. 222).

En effet, soient AB et DC les axes des coordonnées de cette courbe ; et supposons deux points F et F', pris sur l'axe AB à égales distances de l'origine, et de manière que $(FI)^2 = a^2 - b^2$, ou $c^2 = a^2 - b^2$, en faisant $FI = c$.

Cela posé, soit M un point quelconque de la courbe dont il s'agit, et soient menées par ce point M et les points F et F' les droites FM et F'M, et de plus soit abaissée l'ordonnée PM : de là résulteront deux triangles rectangles FMP et F'MP, qui donneront,

le premier $(FM)^2 = (FP)^2 + (PM)^2$ et le second $(F'M)^2 = (F'P)^2 + (PM)^2$ (1).

Mais $FP = FI + IP = c + x$, $F'I - IP = c - x$, et $(PM)^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ par hypothèse ; en substituant donc dans les équations (1), il viendra $(FM)^2 = (c+x)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ et $(F'M)^2 = (c-x)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, ou en développant et mettant les termes du second membre au même dénominateur, il viendra $(FM)^2 = \frac{a^2c^2 + 2a^2cx + a^2x^2 + a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$, et $(F'M)^2 =$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\frac{a^2c^2-2a^2cx+a^2x^2+a^2b^2-b^2x^2}{a^2}$ ce qui se réduit à

$(FM)^2=\frac{a^2(b^2+c^2)+2a^2cx+x^2(a^2-b^2)}{a^2}$ et $(F'M)^2=\frac{a^2(b^2+c^2)-2a^2cx+x^2(a^2-b^2)}{a^2}$,

et en mettant à la place de b^2+c^2 et de a^2-b^2 leurs valeurs a^2 et c^2 tirées de l'équation $c^2=a^2-b^2$ ci-dessus, $(FM)^2=\frac{a^4+2a^2cx+c^2x^2}{a^2}$ et $(F'M)^2=\frac{a^4-2a^2cx+c^2x^2}{a^2}$. Mais $a^4+2a^2cx+c^2x^2=(a^2+cx)^2$ et $a^4-2a^2cx+c^2x^2=(a^2-cx)^2$, donc $(FM)^2=\frac{(a^2+cx)^2}{a^2}$ et $(F'M)^2=\frac{(a^2-cx)^2}{a^2}$; d'où, en extrayant les racines carrées, $FM=\frac{a^2+cx}{a}$ et $F'M=\frac{a^2-cx}{a}$, et en ajoutant ces deux équations, il nous viendra $FM+F'M=\frac{a^2+cx+a^2-cx}{a}=\frac{2a^2}{a}=2a$, d'où il suit que la somme $FM+F'M$ des distances, à deux points fixes F et F', d'un point M quelconque de la courbe en question, est égale à une constante représentée par $2a$, et que par conséquent cette courbe est une ellipse dont $2a$ est le grand axe.

Il est évident d'ailleurs que les constantes a et b qui entrent dans l'équation proposée sont les axes de l'ellipse; du moins il serait facile de s'en assurer en cherchant les coordonnées des points où la courbe dont il s'agit rencontre les axes des coordonnées, ce qu'on ferait en supposant alternativement $x=0$ et $y=0$ dans l'équation $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$.

Il est évident aussi que les points F et F' sont les foyers de cette ellipse, puisque nous avons fait $IF=IF'=a^2-b^2$.

554. *Corollaire* 1. Il suit des deux dernières propositions, qu'il n'y a que l'ellipse qui réponde à l'équation $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$. Ainsi les conséquences que nous déduirons de cette équation appartiendront nécessairement à l'ellipse.

555. *Corollaire* 2. L'équation $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ nous fait voir que pour un point M quelconque de l'ellipse (fig. 222), nous aurions $(PM)^2=\frac{(DI)^2}{(AI)^2}\{(AI)^2-(PI)^2\}=\frac{(DI)^2}{(AI)^2}(AI+PI)(AI-PI)$, d'où nous tirerons $(PM)^2:(AI+PI)(AI-PI)::(DI)^2:(AI)^2$; mais $AI+PI=AP$, et $AI-PI$ ou $BI-PI=PB$; donc $(PM)^2:AP\times BP::(DI)^2:(AI)^2$; c'est-à-dire que, *le carré d'une ordonnée quelconque de l'ellipse est au produit des segmens correspondans du grand axe, comme le carré du demi-petit axe est au carré du demi-grand axe.*

556. *Corollaire* 3. L'équation $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ donne $x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$. Pour le point M (fig. 222), on a $x=IP=QM$, $y=PM=QI$; donc

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$(QM)^2 = \frac{(AI)^2}{(DI)^2}\{(DI)^2 - (QI)^2\} = \frac{(AI)^2}{(DC)^2}(DI+QI)(DI-QI)$, d'où $(QM)^2 : (DI+QI)(DI-QI) :: (AI)^2 : (DI)^2$; mais $DI+QI$ ou $CI+QI = CQ$, et $DI-QI = DQ$; donc $(QM)^2 : CQ \times DQ :: (AI)^2 : (DI)^2$, c'est-à-dire que, *le carré d'une ordonnée au petit axe est au produit des segmens correspondans de ce petit axe, comme le carre du demi-grand axe est au carré du demi-petit axe.*

557. *Corollaire* 4. Si nous considérons deux points quelconques M et M' de l'ellipse (fig. 224), nous aurons $(PM)^2 : AP \times PB :: (ID)^2 : (AI)^2$, et $(P'M')^2 : AP' \times P'B :: (ID)^2 : (AI)^2$; donc $(PM)^2 : (P'M')^2 :: AP \times PB : AP' \times P'B$; c'est-à-dire que, *les carrés des ordonnées de l'ellipse sont entre eux comme les produits des segmens correspondans du grand axe.*

On démontrerait de la même manière que les carrés des ordonnées au petit axe sont entre eux comme les produits des segmens correspondans de ce petit axe.

558. PROBLÊME 109. *Proposons-nous, à présent, de décrire une ellipse dont on connaît les deux axes sans se servir des foyers.*

Sur le demi-grand axe IB, comme diamètre (fig. 224), décrivons une demi-circonférence de cercle, IQB; prenons le demi-petit axe ID et portons-le de B en R, et sur $BR = ID$, comme diamètre, décrivons une autre demi-circonférence R*r*B; puis, menons une suite de droites MN, M'N', M''N''..... parallèles à DC; par le point I comme centre, et avec les rayons IP, IP', IP''..., décrivons les arcs de cercles PQ, P'Q', P''Q''.....; par le point B et les points Q, Q', Q''..... où ces arcs couperont la demi-circonférence IBQ, menons les droites BQ, BQ', BQ''..... lesquelles couperont la demi-circonférence R*r*B en des points *r*, *r'*, *r''*..... qui donneront les longueurs B*r*, B*r'*, B*r''*....., lesquelles seront respectivement celles des ordonnées PM, P'M', P''M''..... ou leurs égales PN, P'N', P''N''.....

En effet, l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ donne $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Si maintenant nous faisons $x = IP = IQ$, comme $a = IB$, et $b = ID = BR$, nous aurons $y = \pm \frac{BR}{IB}\sqrt{(IB)^2 - (IQ)^2}$; mais $\sqrt{(IB)^2 - (IQ)^2} = BQ$ à cause que le triangle IBQ est rectangle; donc $y = \frac{BR \times BQ}{IB}$; d'où $IB : BR :: BQ : y$. Mais les triangles BIQ et B*r*R sont semblables, donc $IB : BR :: BQ : Br$; or, en comparant cette proportion avec la précédente, on voit que $y = Br$: donc B*r* est l'ordonnée PM qui répond à l'abscisse IP.

Il est évident, d'après cela, que B*r'* est l'ordonnée P'M' ou son égale P'N', etc.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En prenant les abscisses Ip, Ip', Ip''.... respectivement égales à IP, IP'....., on aura les ordonnées pm, $p'm'$, $p''m''$..... ou leurs égales pn, $p'n'$, $p''n''$... respectivement égales aux ordonnées PM, P'M', P''M''.....

559. THÉORÈME 208. *Si l'on décrit une circonférence de cercle sur le grand axe d'une ellipse, et qu'on prenne la même abscisse pour les deux courbes, je dis que l'ordonnée du cercle sera à celle de l'ellipse comme le demi-grand axe est au demi-petit axe; de sorte que si l'on prend l'abscisse commune* IP (fig. 225), *on aura* PN : PM :: IB : ID :: a : b.

En effet, le rayon du cercle sera a, et le triangle rectangle INP donnera $(PN)^2 = (IN)^2 - (IP)^2$, ou $(PN)^2 = a^2 - (IP)^2$, pour le point N. (*)

Pour le point M, de l'ellipse, qui répond à la même abscisse IP, nous aurons $(PM)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-(IP)^2)$; donc $(PN)^2 : (PM)^2 :: 1 : \frac{b^2}{a^2} :: a^2 : b^2$, et en extrayant la racine carrée de tous les termes de cette proportion, il viendra PN : PM :: a : b; ce qu'il fallait démontrer.

560. *Corollaire* 1. Si l'on mène les droites MQ et Nq' parallèlement à l'axe AB, on aura IQ = PM, et Iq' = PN; si donc, dans la proportion du numéro précédent, on met IQ et Iq' à la place de PM et de PN, il viendra Iq' : IQ :: a : b; c'est-à-dire que, *si l'on décrit une circonférence de cercle sur le grand axe de l'ellipse, comme diamètre, si l'on prend le petit axe de la courbe pour celui des abscisses, et des ordonnées égales dans les deux courbes, les abscisses du cercle seront à celle de l'ellipse comme le demi-grand axe est au demi-petit axe.*

On démontrerait les mêmes choses relativement au petit axe, c'est-à-dire que $qn : qm :: b : a$, et que IP'' : IP' :: b : a.

561. *Corollaire* 2. De là résulte plusieurs moyens de décrire l'ellipse dont on connaît les deux axes.

Premier moyen. Du centre I de l'ellipse (fig. 226), on décrira deux circonférences de cercle, l'une avec un rayon égal au demi-grand axe, et l'autre avec un rayon égal au demi-petit axe. On menera, ensuite, tant de rayons IN, IN'.... qu'on voudra; par les points N, N' .... où ces rayons rencontrent la circonférence BNA, on menera des parallèles NM, N'M' ..... au petit axe DC; par les points n, n', ... où les mêmes rayons rencontrent la circonférence QDR, on menera des parallèles nM, n'M' ..... au grand axe AB, et les points M, M', ... où ces dernières parallèles couperont respectivement les premières, seront à l'ellipse.

(*) En général, $y^2 = a^2 - x^2$ est l'équation du cercle, l'origine étant au centre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, prolongeons NM jusqu'à sa rencontre P avec l'axe AB; la droite nM étant parallèle à IP, donnera PN : PM :: NI : In; mais IN = IB = a, et In = ID = b; donc PN : PM :: a : b. Or, PN est l'ordonnée du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre; donc (n°. 559) PM est l'ordonnée de l'ellipse.

Second moyen. Par l'extrémité A de l'axe AB (fig. 227 et 228), menez une droite AB′ quelconque; faites AB′ égal à l'autre axe DC, et sur AB′, comme diamètre, décrivez une demi-circonférence de cercle AD′B′; puis, sur le diamètre AB′, prenez des points Q, Q′, Q″, ... q, q', q'', ... à volonté, et par tous ces points élevez des ordonnées au cercle AD′B′ et menez des parallèles à la droite BB′, qui iront rencontrer l'axe AB en des points P, P′, P″ ..... p, p', p'', ... par lesquels vous éleverez les ordonnées à l'ellipse, sur l'axe AB, et vous ferez ces ordonnées respectivement égales à celle du cercle : la courbe qui passera par les extrémités de ces ordonnées sera l'ellipse en question.

En effet, d'après notre construction, pour le point M on a pM = qr; or, le cercle est décrit sur l'axe AB′ = DC; donc pour que le point M soit à l'ellipse, il faut que l'on ait I′q : Ip :: DI : AI. Mais à cause des parallèles I′I et qp, on a I′q : Ip :: AI′ : AI; or, AI′ = DI, donc enfin I′q : Ip :: DI : AI; donc le point M est à l'ellipse.

On observera, dans ce procédé, qu'en prenant les abscisses I′Q, I′Q′, I′Q″ ..... respectivement égales aux abscisses Iq, Iq', Iq''...., une seule ordonnée du cercle donnera quatre ordonnées de l'ellipse.

Troisième moyen. Avec un rayon égal à la différence des deux axes de l'ellipse, et du point O comme centre, pris arbitrairement sur le petit axe (fig. 226) (de manière, pourtant, que IO soit plus petit que la différence des axes), on décrira un arc de cercle qui coupera le grand axe en un point F, par lequel et le point O on menera une droite OF prolongée : on fera OE = IA, et le point E sera à l'ellipse.

En effet, si par les points E et O on mène les droites EG, OG, respectivement parallèles aux axes DC, AB, on aura les triangles semblables OEG, FEH, qui donneront GE : HE :: OE : FE. Or, GE est l'ordonnée du cercle décrit du point O, comme centre, et avec le rayon OE; HE est celle du point E, par rapport à l'axe AB; OE = AI, et FE = OE — OF, c'est-à-dire FE = ID, puisque OF est la différence des deux axes; donc enfin le point E est à l'ellipse.

C'est sur cette construction qu'est fondé le principe du compas elliptique que nous décrirons plus tard.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

28me. LEÇON.

Suite de l'Ellipse rapportée à ses axes.

562. THÉORÈME 209. *Si l'on suppose un point* E *situé hors de l'ellipse, la somme des distances de ce point aux foyers sera plus grande que le grand axe* (fig. 223).

En effet, le point E étant extérieur, et les foyers intérieurs à l'ellipse, la droite FE, qui joindra un foyer F et le point E, coupera nécessairement l'ellipse en un point m; menons par ce point m un rayon vecteur mF' à l'autre foyer F', et joignons les points F' et E par la droite F'E : le triangle F'mE nous donnera $F'm < F'E + mE$. Ajoutons de part et d'autre la droite Fm, et nous aurons $Fm + F'm < F'E + mE + Fm$. Mais $mE + Fm = FE$; donc $Fm + F'm < F'E + FE$, et comme le point m est sur l'ellipse, $Fm + F'm = AB$; donc $AB < F'E + FE$; ce qu'il fallait démontrer.

563. THÉORÈME 210. *Si l'on suppose un point* G *situé dans l'ellipse, la somme* FG+F'G *des distances de ce point aux foyers sera plus petite que le grand axe* AB (fig. 223).

Le point G et les foyers étant situés dans l'ellipse, la droite FG, menée par un foyer F et le point G, ne pourra rencontrer l'ellipse qu'autant qu'elle sera prolongée vers m; soit donc m le point où cette droite FG rencontre cette courbe, et menons le rayon vecteur F'm et la droite F'G : le triangle F'Gm nous donnera $F'G < F'm + mG$. Si nous ajoutons de part et d'autre la droite GF, nous aurons $F'G + FG < F'm + mG + FG$; mais $mG + GF = Fm$; donc $F'G + FG < F'm + Fm$; ou, à cause que le point m est à l'ellipse, $F'G + FG < AB$; ce qu'il fallait démontrer.

564. PROBLÈME 110. *Par un point donné sur la circonférence d'une ellipse, on propose de mener une tangente à cette courbe* (fig. 229).

Après avoir trouvé les deux foyers F et F', on menera les deux rayons vecteurs FM et F'M au point donné M; on prolongera l'un, F'M, de ces rayons, d'une quantité MQ égale à l'autre rayon FM; on joindra le foyer F et le point Q par une droite QF, à laquelle et par le point donné M, on abaissera une perpendiculaire MT, qui sera la tangente demandée; c'est-à-dire que cette droite MT n'aura que le point M commun avec l'ellipse.

En effet, soit pris un autre point m quelconque sur cette droite MT, et soient menées les droites Qm, Fm et F'm; le triangle F'Qm donnera $F'Q < F'm + mQ$. Mais la droite $mQ = mF$; car, puisque $MQ = MF$, par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

construction, la droite MT est perpendiculaire sur le milieu de FQ; de plus, $F'Q = F'M + MQ = F'M + MF = AB$; si donc on substitue dans l'inégalité précédente, on aura $AB < F'm + Fm$; donc la somme des distances du point m aux foyers est plus grande que le grand axe, par conséquent le point m est hors de l'ellipse; donc la droite MT n'a que le point M commun avec cette courbe.

565. *Corollaire* 1. Le triangle FQM est isocèle, puisque par construction $QM = FM$; donc la perpendiculaire MT abaissée du sommet M sur la base QF donne l'angle $QMT = TMF$. Mais la ligne F'MQ est droite, les angles QMT et tMF' sont opposés au sommet; donc $QMT = tMF'$, et par conséquent $TMF = tMF'$; c'est-à-dire que, *les angles que forment, avec la tangente, les rayons vecteurs menés au point de contact, sont égaux entre eux.*

566. *Corollaire* 2. Il suit de là que la normale MR divise en deux également l'angle formé par les rayons vecteurs qui vont au point de contact de la tangente; car l'angle $TMR = tMR$, puisque ces deux angles sont droits, et on vient de démontrer que $TMF = tMF'$; d'où il suit que $TMR - TMF = tMR - tMF'$, ou $FMR = RMF'$; ce qu'il fallait démontrer.

567. *Corollaire* 3. De là résulte un moyen bien simple de mener une normale à l'ellipse par un point donné sur sa circonférence : on n'aura qu'à diviser en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs menés au point donné, par une droite qui sera la normale demandée.

568. *Corollaire* 4. Si par le point q, milieu de QF, on mène une droite qI au centre de l'ellipse, cette droite qI sera parallèle à la droite F'Q, en ce que cette droite qI divisera en deux parties égales les côtés FF' et FQ du triangle FF'Q; et de plus cette même droite $qI = \frac{1}{2}F'Q$, c'est-à-dire le demi-grand axe, puisque F'Q est la somme des rayons vecteurs.

569. PROBLÈME III. *On donne la grandeur du grand axe d'une ellipse, un foyer et la direction de deux tangentes, et il faut décrire cette courbe.*

Par le foyer F donné (fig. 229), menez une perpendiculaire Fq, Fq' à chacune des tangentes données MT et NT'; par les pieds q et q' de ces perpendiculaires, comme centre, et avec un rayon égal à la moitié du grand axe donné, décrivez deux arcs de cercle qui se couperont en un point I, qui sera le centre de l'ellipse dont il s'agit.

Cela est évident, car cette construction est une suite immédiate de ce qui vient d'être démontré dans le numéro précédent.

Ayant le centre et le foyer, vous menerez une droite AB par ces deux points, laquelle donnera la direction du grand axe. D'après cela, il sera facile d'avoir les deux sommets de cet axe, puisqu'on a sa grandeur, et par suite le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

second foyer et le second axe, et par conséquent de décrire l'ellipse, par l'un des procédés donnés plus haut.

570. *Remarque.* Si, au lieu de donner le foyer, on donnait le centre, on décrirait, de ce centre, un arc de cercle qq' avec un rayon égal au demi-grand axe donné, et par les points q et q', où cet arc rencontrerait les tangentes données MT et NT', on éleverait une perpendiculaire à chacune de ces droites, et le point F, où ces deux perpendiculaires se rencontreraient, serait évidemment l'un des foyers de l'ellipse en question; et ensuite on acheverait la construction comme ci-dessus.

571. PROBLÊME 112. *La direction d'une tangente, un foyer et le centre d'une ellipse étant donnés, on propose de décrire cette courbe* (fig. 229).

Par le centre et le foyer donnés, on menera une droite qui sera la direction du grand axe; puis, par le foyer F donné, on menera une perpendiculaire Fq à la tangente donnée MT, et par le centre I donné, et avec un rayon égal à la distance Iq, on décrira un arc de cercle qA, qui coupera la direction AB du grand axe, en un point A, qui sera un sommet de cet axe; car, d'après ce qui précède, Iq est égal au demi-grand axe. On achevera le problême comme ci-dessus.

572. PROBLÊME 113. *La direction d'une tangente, le centre et l'un des sommets du grand axe d'une ellipse étant donnés, il faut décrire cette courbe* (fig. 229).

Par le sommet A et le centre I donnés, on menera une droite AB qui sera la direction du grand axe, et la distance AI sera la moitié de cet axe; ensuite, par le centre I et avec un rayon égal au demi-grand axe AI, on décrira un arc de cercle Aq qui coupera la tangente donnée MT en un point q, par lequel on élevera une perpendiculaire qF à la tangente donnée MT, qui rencontrera l'axe AB en un point F qui sera un foyer. Le reste de la construction est sans difficulté.

573. PROBLÊME 114. *La direction d'une tangente, l'un des sommets du grand axe et un foyer de l'ellipse étant donnés, on veut décrire cette courbe* (fig. 229).

Par le foyer F donné on abaissera une perpendiculaire Fq à la tangente donnée MT; par le pied q de cette perpendiculaire Fq et le sommet A donné, on menera la droite Aq, au milieu de laquelle on élevera une perpendiculaire SI qui ira rencontrer la droite AB, menée par le sommet A et le foyer F donnés, en un point I qui sera le centre de l'ellipse en question.

Car si nous supposons que le point I soit effectivement le centre de l'ellipse, A le sommet du grand axe, MT une tangente, il est clair que la per-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pendiculaire Fq, menée du foyer F à la tangente MT, nous donnera Iq=IA; donc le triangle AqI est isocèle, et le sommet I de ce triangle, qui est le centre de l'ellipse, est situé sur la perpendiculaire SI élevée sur le milieu de la base Aq. Quant au reste de la construction, c'est comme ci-dessus.

574. PROBLÊME 115. *Par un point donné m hors de l'ellipse* (fig. 229), *on propose de mener une tangente à cette courbe.*

Par le point donné m, comme centre, et avec un rayon égal à la distance Fm, de ce point à un foyer F, on décrira un arc de cercle FQ indéfini; par le second foyer F′, comme centre, et avec un rayon égal au grand axe, on décrira un autre arc de cercle qui coupera le premier en un point Q, par lequel et le foyer F′ on menera une droite QF′ qui coupera l'ellipse en un point M, qui sera le point de contact de la tangente demandée; et par conséquent la droite Mm, qui passera par ce point M et le point donné m, sera cette tangente.

En effet, par construction, nous avons F′Q=AB; mais F′Q=F′M+MQ; donc F′M+MQ=AB. Mais, le point M est à l'ellipse, ce qui donne FM+F′M=AB; donc F′M+MQ=F′M+FM, et partant MQ=FM; d'où il suit que le point M est à égales distances des points F et Q. Mais par construction nous avons aussi le point m à égales distances des mêmes points F et Q; d'où il résulte que la droite Mm, qui passe par les deux points M et m, est perpendiculaire sur le milieu de FQ, et par conséquent cette droite Mm est la tangente demandée (n°. 564).

On observera que ce problême a deux solutions, parce qu'on peut opérer sur le foyer F′ comme on vient de le faire sur le foyer F, et réciproquement, ce qui donnera la seconde tangente mM″.

575. PROBLÊME 116. *On propose de mener une tangente à l'ellipse, parallèlement à une droite donnée* (fig. 230).

Par un foyer F on menera une perpendiculaire FQ à la droite donnée EG; par l'autre foyer F′, comme centre, et avec un rayon égal au grand axe, on décrira un arc de cercle qui coupera en un point Q la droite FQ; par le foyer F′ et le point Q on menera la droite F′Q, qui coupera l'ellipse en un point M qui sera le point de contact : par conséquent la droite MT, menée par ce point M parallèlement à la droite donnée EG, sera la tangente demandée.

Je laisse au lecteur le plaisir de démontrer cette construction.

576. PROBLÊME 117. *Il faut mener une tangente à l'ellipse perpendiculairement à une droite donnée* (fig. 230).

Par un foyer F, menez une parallèle FQ′ à la droite donnée EG; par l'autre foyer F′, comme centre, et avec un rayon égal au grand axe, décrivez un arc

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de cercle qui coupe la droite FQ′ en un point Q′, par lequel et le foyer F′ vous menerez une droite F′Q′ qui coupera l'ellipse en un point M′ qui sera le point de contact : par conséquent la droite M′T′, menée par ce point M′ perpendiculairement à la droite donnée EG, sera la tangente demandée.

Le lecteur démontrera encore cette construction. Chacun de ces derniers problêmes donne lieu à deux solutions, ainsi qu'on le voit dans la figure 230.

577. PROBLÊME 118. *On demande de mener une normale à l'ellipse, perpendiculairement à une droite donnée.*

On trouvera le point où la normale coupe l'ellipse, par la même construction qu'on a trouvé le point de contact de la tangente parallèle à la droite donnée (n°. 575).

578. PROBLÊME 119. *Il s'agit de mener une normale à l'ellipse parallèlement à une droite donnée.*

On trouvera le point où la normale demandée coupera l'ellipse, par le même moyen qu'on a trouvé le point de contact de la tangente perpendiculaire à la droite donnée (n°. 576). On remarquera que les deux problêmes précédens sont susceptibles chacun de deux solutions.

579. THÉORÈME 211. *La distance* IR, *du centre de l'ellipse au point où la normale rencontre le grand axe, égale* $\frac{c^2x}{a^2}$; *c étant la distance du centre au foyer, x l'abscisse du point où la normale rencontre la courbe, et a le demi-grand axe.*

En effet, en supposant la construction du n°. 564 (fig. 229), les triangles F′QF et F′MR sont semblables et donnent F′R : F′F :: F′M : F′Q; mais F′R $=$ F′I $+$ IR $= c +$ IR, FF′ $= 2c$, F′M $= \frac{a^2+cx}{a}$ (n°. 552), et F′Q $= 2a$; donc $c +$ IR : $2c :: \frac{a^2+cx}{a} : 2a :: a^2 + cx : 2a^2$, d'où on tire IR $= \frac{c^2x}{a^2}$.

580. *Corollaire* 1. Les triangles *r*IR et *r*Q′M sont semblables et donnent Ir : *r*Q′ :: IR : Q′M; mais *r*Q′ $=$ Ir $+$ IQ′ $=$ Ir $+ y$, IR $= \frac{c^2x}{a^2}$ et Q′M $=$ IP $= x$, donc Ir : Ir $+ y :: \frac{c^2x}{a^2} : x :: \frac{c^2}{a^2} : 1 :: c^2 : a^2$, d'où il résulte que Ir $= \frac{c^2y}{a^2-c^2} = \frac{c^2y}{b^2}$.

581. *Corollaire* 2. La sous-normale PR $=$ IP $-$ IR, ou, en mettant x à la place de IP et $\frac{c^2x}{a^2}$ à la place de IR, PR $= x - \frac{c^2x}{a^2} = \frac{a^2x-c^2x}{a^2} = \frac{x(a^2-c^2)}{a^2} = \frac{b^2x}{a^2}$.

582. *Corollaire* 3. La sous-normale *r*Q′ $=$ *r*I $+$ IQ′, ou en mettant $\frac{c^2y}{b^2}$ à la place de *r*I, et y à la place de IQ′ $=$ PM, il viendra *r*Q′ $= \frac{c^2y}{b^2} + y = \frac{c^2y+b^2y}{b^2} = \frac{y(b^2+c^2)}{b^2} = \frac{a^2y}{b^2}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

583. *Corollaire* 4. Les triangles semblables PMR et rMQ′ donnent PR : MQ′ ou IP :: PM : rQ′; d'où PR × rQ′ = IP × PM; c'est-à-dire que *les sous-normales sont réciproquement proportionnelles aux coordonnées du point de contact de la tangente.*

584. PROBLÊME 120. *Cherchons actuellement la longueur analytique des normales* MR *et* Mr, *relatives à chaque axe de l'ellipse.*

D'abord pour avoir la première MR, nous considérerons le triangle MRP, qui est rectangle, et qui nous donnera $(MR)^2 = (PM)^2 + (PR)^2$; mais $(PM)^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, et $(PR)^2 = \frac{b^4x^2}{a^4}$; donc $(MR)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + \frac{b^4x^2}{a^4} = \frac{a^2b^2(a^2-x^2)+b^4x^2}{a^4} = \frac{b^2}{a^4}\{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2\}$; et partant $MR = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^2(a^2 - x^2) + b^2x^2}$.

Ensuite, pour avoir la seconde Mr, le triangle rectangle Q′Mr nous donnera $Mr = \sqrt{(MQ')^2 + (rQ')^2}$. Mais $(MQ')^2 = (IP)^2 = x^2$, et $(rQ')^2 = \frac{a^4y^2}{b^4}$, ou à cause que $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, $(rQ')^2 = \frac{a^2}{b^2}(a^2 - x^2)$; donc $Mr = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{b^2}(a^2-x^2)} = \sqrt{\frac{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2}$.

585. *Corollaire* 1. La similitude des triangles TMP et PMR donne PR : PM :: PM : PT; d'où $PT = \frac{(PM)^2}{PR}$; mais $(PM)^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ et $PR = \frac{b^2x}{a^2}$; donc $PT = \frac{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}{\frac{b^2x}{a^2}} = \frac{a^2-x^2}{x}$.

586. *Corollaire* 2. Si l'on met $PT = \frac{a^2-x^2}{x}$ sous la forme $PT = \frac{(a+x)(a-x)}{x}$, comme $a + x = BI + IP = BP$ (fig. 229), et que $a - x = IA - IP = AP$, il en résultera $PT = \frac{AP \times PB}{IP}$, d'où IP : AP :: PB : PT, c'est-à-dire que, *la sous-tangente relative au grand axe est quatrième proportionnelle entre l'abscisse du point de contact et les deux segmens du grand axe.*

587. *Corollaire* 3. Les triangles semblables tMQ′ et Q′Mr donnent Q′r : Q′M :: Q′M : Q′t $= \frac{(Q'M)^2}{Q'r}$. Mais $Q'r = \frac{a^2y}{b^2}$, et l'équation de l'ellipse donne $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$, et comme Q′M = IP = x, on aura $Q't = \frac{\frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)}{\frac{a^2}{b^2}y} = \frac{b^2-y^2}{y}$.

588. *Corollaire* 4. Si l'on met $Q't = \frac{b^2-y^2}{y}$ sous la forme $Q't = \frac{(b+y)(b-y)}{y}$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

comme $b+y=\text{CI}+\text{IQ}'=\text{CQ}'$, et que $b-y=\text{ID}-\text{IQ}'=\text{Q}'\text{D}$, il en résultera $\text{Q}'t=\frac{\text{CQ}'\times\text{Q}'\text{D}}{\text{IQ}'}$; d'où $\text{IQ}' : \text{CQ}' :: \text{Q}'\text{D} : \text{Q}'t$; c'est-à-dire que, *la sous-tangente, relative au petit axe, est quatrième proportionnelle à l'abscisse (relative à cet axe) du point de contact et aux deux segmens de ce même axe.*

589. *Corollaire* 5. La comparaison des triangles semblables TMP et tMQ′ donnera $\text{TP} : \text{MQ}'$ ou $\text{IP} :: \text{PM} : \text{Q}'t$; d'où il suit que *les sous-tangentes* PT *et* Q′t *sont réciproquement proportionnelles aux coordonnées du point de contact.*

590. *Corollaire* 6. Nous avons déjà vu qu'il en était de même des sous-normales : par conséquent $\text{TP} : \text{PR} :: \text{Q}'r : \text{Q}'t$; d'où $\text{TP}\times\text{Q}'t=\text{PR}\times\text{Q}'r$, c'est-à-dire que, *le produit des sous-tangentes est égal à celui des sous-normales.*

591. *Corollaire* 7. On observera que $\text{IT}=\text{IP}+\text{PT}=x+\frac{a^2-x^2}{x}=\frac{x^2+a^2-x^2}{x}=\frac{a^2}{x}$, d'où $x : a :: a : \text{IT}$, c'est-à-dire que, *la distance du centre au point où la tangente rencontre le grand axe est troisième proportionnelle à l'abscisse du point de contact et au demi-grand axe.*

On trouverait de même que la distance du centre au point où la tangente rencontre le petit axe *est troisième proportionnelle à l'abscisse relative au petit axe et à la moitié de cet axe, de sorte qu'on aurait* $\text{IQ}' : \text{ID} :: \text{ID} : \text{I}t$.

592. THÉORÈME 212. *Si l'on décrit une circonférence de cercle sur le grand axe comme diamètre* (fig. 231), *les tangentes* MT *et* NT, *menées à l'ellipse et au cercle par les points* M *et* N *qui répondent à une même abscisse* IP, *se couperont en un point* T *sur le grand axe de l'ellipse.*

En effet, si au point de contact N de la tangente NT du cercle, on mène un rayon IN, les triangles semblables PNI et PNT donneront $\text{IP} : \text{IN} :: \text{IN} : \text{IT}$ ou $x : a :: a : \text{IT}=\frac{a^2}{x}$; mais pour l'ellipse on a aussi $\text{IT}=\frac{a^2}{x}$, donc les deux distances IT sont les mêmes, donc, etc.

On démontrerait, de la même manière, qu'il en est de même relativement au petit axe.

593. PROBLÈME 121. *Cherchons actuellement la longueur analytique de la tangente relative à chaque axe* (fig. 229).

D'abord pour celle relative au grand axe, le triangle rectangle PMT donne $\text{MT}=\sqrt{(\text{PT})^2+(\text{PM})^2}$; et comme $\text{PT}=\frac{a^2-x^2}{x}$ et $(\text{PM})^2=y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, il en résultera $\text{MT}=\sqrt{\frac{(a^2-x^2)^2}{x^2}+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}=$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\sqrt{\frac{a^2(a^2-x^2)^2+b^2x^2(a^2-x^2)}{a^2x^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{ax}\sqrt{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2}.$$

Pour celle relative au petit axe, le triangle rectangle Q′Mt donne Mt = $\sqrt{(\mathrm{Q}'t)^2+(\mathrm{Q}'\mathrm{M})^2}$; et comme $\mathrm{Q}'t = \frac{b^2-y^2}{y}$; ou en mettant $\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ et $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ à la place de y^2 et de y, $\mathrm{Q}'t = \frac{b^2-\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2b^2-b^2a^2+b^2x^2}{ab\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b^2x^2}{a\sqrt{a^2-x^2}}$; de plus Q′M = IP = x : d'où il résultera

$$\mathrm{M}t = \sqrt{\frac{b^2x^4}{a^2(a^2-x^2)}+x^2} = \sqrt{\frac{b^2x^4+a^2x^2(a^2-x^2)}{a^2(a^2-x^2)}} = \frac{x}{a\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2}.$$

594. DÉFINITION. *On appelle paramètre relatif au grand axe de l'ellipse*, une troisième proportionnelle entre le grand et le petit axe, de sorte que si l'on représente ce paramètre par p, on aura $2a : 2b :: 2b : p = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b^2}{a}$.

On a aussi un paramètre relatif au petit axe, qui est une troisième proportionnelle entre le petit et le grand axe.

595. THÉORÈME 213. Je dis maintenant que, *la double ordonnée qui passe par un foyer de l'ellipse, est égale au paramètre relatif au grand axe.*

En effet, l'ordonnée qui passe par un foyer répond à une abscisse qui est égale à la distance du centre à ce foyer; faisant donc $x = c$ dans l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ de l'ellipse, il nous viendra $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-c^2)$; mais $a^2-c^2 = b^2$; donc $y^2 = \frac{b^4}{a^2}$, et partant $y = \frac{b^2}{a}$: en multipliant donc par 2 de part et d'autre, il viendra $2y = \frac{2b^2}{a}$; mais dans le numéro précédent nous avons vu que $p = \frac{2b^2}{a}$; donc $2y = p$; ce qu'il fallait démontrer.

29me. LEÇON.

L'Ellipse rapportée à ses diamètres conjugués.

596. THÉORÈME 214. *Décrivons une circonférence de cercle sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre* (fig. 232); *menons deux diamètres* D′C′ *et* A′B′ *perpendiculaires entre eux, et d'ailleurs dans une direction quelconque; par les extrémités* D′ *et* B′ *de ces diamètres, menons les ordonnées* D′P″ *et* B′P′, *et par les points d′ et b où ces ordonnées rencontrent l'ellipse, menons les*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

droites d'c' et ba au centre de la courbe; puis, par un point quelconque N *de la circonférence du cercle, abaissons les ordonnées* NP *et* NR *sur les diamètres* AB, A'B'; *par le pied* R *de l'ordonnée* NR, *abaissons une perpendiculaire* RQ *sur le diamètre* AB, *et par le point r, où la droite* RQ *rencontre la droite ab, et le point* M, *où l'ordonnée* NP *rencontre l'ellipse, menons la droite rM : je dis que les deux droites* NR *et rM se couperont sur le diamètre* AB *en un point* K.

En effet, supposons d'abord qu'on ait mené la droite NR, et qu'ensuite, par le point K, où cette droite NK coupe l'axe AB, on ait mené les droites MK, *r*K; si nous faisons voir que les angles NKM, *r*KR sont égaux, comme ces deux angles sont opposés par le sommet, il sera démontré que les droites MK, *r*K sont le prolongement l'une de l'autre, et que, par conséquent, les droites NR, M*r* se coupent en un point K de l'axe AB. Or, on a QR : Q*r* :: P'B' : P'*b*; mais en vertu du n°. 559, on a P'B' : P'*b* :: PN : PM; donc QR : Q*r* :: PN : PM; et par conséquent, QR — Q*r* ou R*r* : PN — PM ou MN :: QR : PN. Mais les triangles QNP, QRK sont semblables, ce qui donne l'angle QNP = QRK, et QR : PN :: KR : KN; donc R*r* : MN :: KR : KN; donc les deux triangles KR*r*, KMN ont un angle égal compris entre côté proportionnels; d'où il suit que l'angle RK*r* = NKM; ce qu'il fallait démontrer.

597. *Corollaire* 1. Je dis maintenant que la droite M*r* est parallèle à I*d'*, car, par construction, les triangles ID'P'' et KNP sont semblables puisqu'ils ont les côtés parallèles, donc IP'' : KP :: D'P'' : PN; mais en vertu du numéro 559, on a D'P'' : PN :: P''*d'* : PM; d'où il suit IP'' : KP :: P''*d'* : PM; donc les triangles rectangles I*d'*P'' et KMP sont semblables; donc l'angle *d'*IB = MKB; donc enfin les droites I*d'* et KM sont parallèles.

598. *Corollaire* 2. Il serait facile de démontrer que si l'on prolongeait l'ordonnée NR jusqu'à sa rencontre en N' avec la circonférence du cercle, et que si par ce point N' on abaissait une perpendiculaire N'P''' sur le diamètre AB, la droite M*r* prolongée passerait par le point M' où l'ordonnée N'P''' rencontre l'ellipse. D'après cela, je dis que *r*M' = *r*M, c'est-à-dire, en d'autres termes, que la droite MM' est divisée en deux parties égales par la droite *ab*.

En effet, les triangles KNM, KR*r* et KN'M' donnent KN : KM :: KR : K*r* :: RN' : *r*M'; d'où (1)..... KN + KR ou NR : KM + K*r* ou M*r* :: RN' : *r*M'; mais à cause que la corde NN' est perpendiculaire au diamètre A'B', on a RN' = RN, c'est-à-dire que les antécédens de la proportion (1) sont égaux entre eux; il en sera donc de même pour les conséquens, ce qui donnera *r*M' = *r*M; comme il fallait le démontrer.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

599. *Corollaire* 5. Il suit de là que la droite *ab* est un diamètre de l'ellipse, puisqu'elle divise en deux parties égales toutes les parallèles à $c'd'$.

600. THÉORÈME 215. *Sur le diamètre* A'B' *du cercle, portons la distance* IR' = IR, *et par le point* R' *menons la corde nn' perpendiculaire au diamètre* A'B'; *ensuite, abaissons les ordonnées des points n, n' du cercle sur le diamètre* AB, *et menons la droite mm' par les points m, m' où les ordonnées np''' et n'p' rencontrent l'ellipse; cette droite mm' rencontrera la corde nn', du cercle, sur le diamètre* AB *en un point* K' (n°. 596), *et de plus, les triangles n'm'K' et* K'r'R' *seront respectivement égaux aux triangles* MNK *et* KrR.

En effet, 1°. les triangles rectangles IRK et IR'K' sont égaux puisqu'ils ont un angle opposé au sommet, et que par hypothèse IR' = IR; donc K'R' = KR; donc les triangles K'R'r' et KRr sont égaux entre eux, puisqu'ils ont un côté égal, et que d'ailleurs les côtés sont respectivement parallèles; donc K'r' = Kr.

2°. Les cordes NN' et *nn'* sont égales entre elles puisqu'elles sont à égales distances du centre, et de plus, elles sont divisées en deux parties égales par le diamètre A'B'; donc R'n' = RN; mais nous venons de trouver K'R' = KR; donc R'n' — K'R' = RN — KR, ou K'n' = KN; d'où il suit que les deux triangles K'n'm', KNM sont égaux entre eux, puisqu'ils ont un côté égal et les angles égaux; donc K'm' = KM.

601. *Corollaire* 1. Puisque K'r'=Kr, et que K'm'=KM, on aura K'r'+K'm' = Kr+KM, ou r'm' = rM. D'après ce qui précède, il est évident que r'm = r'm' = rM; d'où il suit que *les ordonnées r'm et rM, à l'ellipse, abaissées sur le diamètre ab, à égales distances du centre, sont égales entre elles, et par conséquent aussi les cordes ou doubles ordonnées* MM' *et mm'*.

602. *Corollaire* 2. *Je dis maintenant que les cordes* MM' *et mm' sont à égales distances du centre, c'est-à-dire qu'on a* Ir' = Ir.

En effet, puisque IR' = IR, et que les deux triangles IR'r' et IRr ont les angles égaux, ces triangles sont égaux et donnent Ir' = Ir; ce qu'il fallait démontrer.

Il faut conclure de là que *les ordonnées, et par conséquent les doubles ordonnées, qui sont à égales distances du centre et rapportées à un diamètre quelconque ab, sont égales entre elles.*

603. *Corollaire* 3. Les doubles ordonnées MM' et *mm'* étant égales et parallèles, il en résulte que la figure MM'*m'm* est un parallélogramme; et comme le diamètre *ab* divise les côtés MM' et *mm'* en deux parties égales, il s'ensuit que les côtés M*m* et M'*m'* sont parallèles au diamètre *ab*. Ensuite il est facile de voir que ces mêmes côtés M*m* et M'*m'* sont divisés en deux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

parties égales par la droite $c'd'$; d'où il suit que *la droite $c'd'$ divise en deux parties égales les parallèles au diamètre ab ; donc cette droite $c'd'$ est un autre diamètre de l'ellipse.*

604. *Corollaire 4.* Puisque les diamètres ab et $c'd'$ sont tels, que l'un d'eux divise en deux parties égales les parallèles à l'autre, *ces deux diamètres sont conjugués* (n°. 421) ; et comme l'on peut former, de la même manière, une infinité de parallélogrammes $Mmm'M'$, il s'ensuit que l'ellipse a une infinité de diamètres conjugués.

605. THÉORÈME 216. *Si par l'origine b du diamètre ab on mène une tangente bT à l'ellipse, je dis que cette tangente sera parallèle au diamètre $c'd'$ conjugué au premier.*

En effet, la tangente TB' au cercle, menée à l'extrémité B' du diamètre $A'B'$, rencontrera la tangente bT en un point T situé sur l'axe AB, puisque les points de contact B' et b ont la même abscisse (n°. 592) ; de plus, cette tangente $B'T$ est parallèle au diamètre $C'D'$, d'où il suit que les triangles $ID'P''$ et $TB'P'$ sont semblables, et donnent $IP'' : TP' :: D'P'' : P'B'$. Mais en vertu des propriétés du cercle et de l'ellipse, on a $D'P'' : P'B' :: P''d' : P'b$; donc $IP'' : TP' :: P''d' : P'b$; d'où il suit que les triangles $Id'P''$ et TbP' sont semblables, et par conséquent les angles $d'IB$, $P'Tb$ sont égaux ; mais ces angles sont alternes-internes ; donc la tengente Tb est parallèle au diamètre $c'd'$ conjugué à ab.

Remarque. On démontrerait de même que la tangente menée à l'extrémité du diamètre $d'c'$ est parallèle au diamètre ab conjugué au premier ; d'où il suit que l'ellipse est inscrite dans le parallélogramme formé sur deux diamètres conjugués quelconques.

606. THÉORÈME 217. *Je dis maintenant que si l'on rapporte l'ellipse à deux diamètres conjugués quelconques, le carré d'une ordonnée quelconque sera au produit des deux segmens du diamètre des abscisses, comme le carré du demi-diamètre parallèle aux ordonnées est au carré du demi-diamètre des abscisses* (fig. 232).

En effet, les triangles semblables KNM, KRr et ID'd', donnent $KN : KM :: KR : Kr :: ID' : Id'$; d'où l'on tire $KN+KR : KM+Kr :: ID' : Id'$, ou $NR : Mr :: ID' : Id'$, ou encore $(NR)^2 : (Mr)^2 :: (ID')^2 : (Id')^2$....(1) Les triangles semblables $Ib'B'$ et IRr donneront $(IB')^2 : (Ib)^2 :: (IR)^2 : (Ir)^2$; d'où $(IB')^2 - (IR)^2 : (Ib)^2 - (Ir)^2 :: (IB')^2 : (Ib)^2$. Mais RN étant l'ordonnée au cercle, on a $(RN)^2 = (IB')^2 - (IR)^2$, et de plus $ID' = IB'$, ce qui donnera $(RN)^2 : (Ib)^2 - (Ir)^2 :: (ID')^2 : (Ib)^2$. Si maintenant nous comparons cette dernière proportion avec la proportion (1), nous trouverons que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$(Mr)^2 : (Ib)^2 - (Ir)^2 :: (Id')^2 : (Ib)^2$...(2) Or, $(Ib)^2 - (Ir)^2 = (Ib + Ir)(Ib - Ir)$, $Ib + Ir = aI + Ir = ar$, et $Ib - Ir = rb$; donc $(Ib)^2 - (Ir)^2 = ar \times rb$, et partant $(Mr)^2 : ar \times rb :: (Id')^2 : (Ib)^2$; ce qu'il fallait démontrer.

607. *Corollaire* 1. Si nous représentons par y les ordonnées Mr, par x les abscisses Ir, par b le demi-diamètre Id', et par a le demi-diamètre Ib, la proportion (2) nous donnera $y^2 : a^2 - x^2 :: b^2 : a^2$, d'où l'on aura $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ pour l'équation de l'ellipse rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, équation qui est la même que celle que nous avons trouvée en rapportant l'ellipse à ses axes, qui sont aussi des diamètres conjugués.

608. *Corollaire* 2. Il est clair, d'après cela, que les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des segmens correspondans du diamètre sur lequel on compte les abscisses, soit qu'on rapporte l'ellipse à ses axes, soit qu'on rapporte cette courbe à deux diamètres quelconques.

609. *Corollaire* 3. On voit encore évidemment de là que, si une ellipse était donnée par deux de ses diamètres conjugués, on pourrait décrire cette courbe en décrivant une autre ellipse sur ces diamètres pris pour les axes de celle-ci, et inclinant ensuite les ordonnées de la même manière que celles de l'ellipse demandée; car les abscisses et les ordonnées n'ayant point changé de grandeur, elles seraient toujours entre elles dans le même rapport (fig. 233).

610. THÉORÈME 218. *Si l'on décrit une circonférence de cercle sur un diamètre quelconque* AB (fig. 234), *pris pour l'axe des abscisses, et que l'on prenne la même abscisse pour les deux courbes, l'ellipse étant rapportée à ses diamètres conjugués, l'ordonnée du cercle sera à celle de l'ellipse comme le demi-diamètre commun aux deux courbes est à la moitié de son conjugué; de sorte qu'en prenant l'abscisse commune* IP, *on aura* PN : PM :: IB : ID :: a : b.

En effet, le rayon du cercle étant a, son équation sera $Y^2 = a^2 - x^2$; et comme celle de l'ellipse est $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, quels que soient les diamètres conjugués auxquels on la rapporte, il s'ensuivra que $Y^2 : y^2 :: (a^2 - x^2) : \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2 :: 1 : \frac{b^2}{a^2} :: a^2 : b^2$, et en extrayant la racine carrée de tous les termes, il viendra $Y : y :: a : b$, ou PN : PM :: IB : ID, comme il a été énoncé.

611. *Corollaire.* Si par les points N et M du cercle et de l'ellipse, on mène les droites Nq' et Mq parallèles au diamètre AB, on aura $Nq' = Mq$, puisque chacune de ces lignes égale IP, $Iq' =$ PN, et $Iq =$ PM. Si donc on substitue ces dernières quantités dans la proportion précédente, il viendra

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$Iq' : Iq :: a : b$; d'ou il suit, en supposant que ID′ soit l'axe des abscisses du cercle, et ID celui des abscisses de l'ellipse, que si l'on prend des ordonnées égales dans le cercle et dans l'ellipse, les abscisses du cercle seront aux abscisses correspondantes de l'ellipse comme le demi-diamètre de l'ellipse sur lequel on a décrit le cercle est à l'autre demi-diamètre conjugué.

612. *Corollaire* 2. De là résulte que le deuxième moyen de décrire l'ellipse, donné au n°. 561, s'étend au cas où cette courbe est rapportée à deux diamètres conjugués quelconques. Ainsi l'on pourra appliquer à la figure 235 les mêmes raisonnemens qu'aux figures 227 et 228.

613. *Remarque.* Supposons (fig. 232) la construction du n°. 596, et par les points M et N, de l'ellipse et du cercle, répondans à la même abscisse IP relative au grand axe AB, menons une tangente MT′ et NT′ à chacune des deux courbes; en vertu du n°. 592, ces deux tangentes couperont le grand axe AB en un même point T′.

614. THÉORÈME 219. *Je dis maintenant que la tangente* MT′, *à l'ellipse, rencontrera le diamètre ab en un point* T″ *de manière que la distance* IT″ *de ce point au centre de l'ellipse sera troisième proportionnelle entre l'abscisse* Ir *du point de contact rapporté aux diamètres conjugués ab et c'd', et le demi-diamètre* Ib (fig. 232).

En effet, la tangente Nt′, au cercle, rencontrera le diamètre A′B′ sur lequel on a abaissé l'ordonnée rectangulaire NR du point de contact N, en un point t', de telle sorte qu'on aura $It' = \frac{(IB')^2}{IR}$ (n°. 592). Mais les triangles semblables IRr, IB′b et It'T″ donnent $IR : Ir :: IB' : Ib$, et $IB' : Ib :: It' : IT''$; d'où l'on tire $IR = \frac{Ir \times IB'}{Ib}$, et $IT'' = \frac{Ib \times It'}{IB'}$.

Si, maintenant, à la place de IR, dans la valeur de It', nous mettons sa valeur $\frac{Ir \times IB'}{Ib}$, il viendra $It' = \frac{IB' \times Ib}{Ir}$; et enfin, si à la place de It', dans la valeur de IT″, nous mettons sa valeur $\frac{IB' \times Ib}{Ir}$, nous aurons $IT'' = \frac{(Ib)^2}{Ir}$ ou $Ir : Ib :: Ib : IT''$; ce qu'il fallait démontrer.

615. *Corollaire* 1. Il suit de là que, soit que l'on rapporte l'ellipse à ses axes ou à deux quelconques de ses diamètres conjugués, la tangente rencontre toujours l'axe des abscisses à une distance du centre qui est troisième proportionnelle entre l'abscisse du point de contact et le demi-diamètre des abscisses.

616. *Corollaire* 2. Il suit de là un moyen général de mener une tangente à l'ellipse par un point donné sur cette courbe: il suffira d'abaisser l'ordonnée

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du point de contact, et de chercher ensuite la troisième proportionnelle dont il vient d'être question.

617. *Corollaire* 3. La sous-tangente PT = IT — IP (fig. 236), ou PT = $\frac{a^2}{x} - x = \frac{a^2-x^2}{x}$.

618. THÉORÈME 220. *Soient deux diamètres conjugués quelconques* MN *et* mn (fig. 236); *si par les extrémités* M *et* n, *de ces diamètres, on mène les ordonnées* MP *et* nP', *on aura* $(IP')^2=(IB)^2-(IP)^2$, ou $(IP)^2=(IB)^2-(IP')^2$ *quels que soient les diamètres conjugués* AB *et* CD *auxquels on rapporte l'ellipse.*

En effet, si par l'extrémité M du diamètre MN on mène une tangente Tt, cette tangente sera parallèle au diamètre *mn* (n°. 605), et les triangles PMT, IP'*n* seront semblables; cela posé, représentons par x et y les coordonnées IP et PM du point M, et par x' et y' celles IP' et P'*n* du point *n*; nous aurons $y'^2 : y^2 :: x'^2 : (PT)^2 = \frac{(a^2-x^2)^2}{x^2}$; et en vertu des propriétés de l'ellipse $y'^2 : y^2 :: a^2 - x'^2 : a^2 - x^2$; donc $x'^2 : \frac{(a^2-x^2)^2}{x^2} :: a^2 - x'^2 : a^2 - x^2$; ou $x'^2x^2 : a^2-x^2 :: a^2-x'^2 : 1$, et partant $x'^2x^2=(a^2-x^2)(a^2-x'^2) = a^4 - a^2x'^2 - a^2x^2 + x^2x'^2$, ce qui se réduit à $0 = a^4 - a^2x'^2 - a^2x^2$, ou $x'^2 = a^2 - x^2$, ou bien encore $x^2 = a^2 - x'^2$; ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. On démontrerait de même que $(IQ')^2=(ID)^2-(IQ)^2$ ou $(P'n)^2=(ID)^2-(PM)^2$, et que $(IQ)^2=(ID)^2-(IQ')^2$ ou $(PM)^2=(ID)^2-(P'n)^2$.

619. THÉORÈME 221. *La somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est égale à la somme des carrés des deux axes.*

En effet, si l'ellipse est rapportée à ses axes, les triangles IMP et I*n*P' (fig. 236) seront rectangles et donneront,

le premier, $(IM)^2=(IP)^2+(PM)^2$, et le second $(In)^2=(IP')^2+(P'n)^2$... (1).

Si maintenant, à la place de $(IP)^2$, on met sa valeur $(IB)^2-(IP')^2$ (n°. 618), et à la place de $(P'n)^2$, sa valeur $(ID)^2-(PM)^2$ (n°. 618), dans les équations (1), il viendra $(IM)^2=(IB)^2-(IP')^2+(PM)^2$ et $(In)^2=(IP')^2+(ID)^2-(PM)^2$; et en ajoutant ces deux équations, il viendra $(IM)^2+(In)^2=(IB)^2+(ID)^2$; ce qu'il fallait démontrer.

621. PROBLÈME 122. *Cherchons maintenant l'expression algébrique de la longueur de la perpendiculaire* IE *abaissée du centre sur la tangente* Tt, *en supposant l'ellipse rapportée à ses axes* AB *et* DC, (fig. 235).

Les triangles semblables TPM et TIE donneront MT : IT :: PM : IE; mais (n°. 593) $MT=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{ax}\sqrt{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2}$, $IT=\frac{a^2}{x}$ (n°. 591) et PM

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$= \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, donc $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{ax}\sqrt{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2} : \frac{a^2}{x} :: \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$: IE, ou $\sqrt{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2} : a^2 :: b$: IE; d'où

$$\text{IE} = \frac{a^2b}{\sqrt{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2}} = \frac{a^2b}{\sqrt{a^4-a^2x^2+b^2x^2}} = \frac{a^2b}{\sqrt{a^4-c^2x^2}};$$

621. PROBLÈME 123. *Supposons toujours que l'ellipse soit rapportée à ses axes, et cherchons l'expression de la longueur du demi-diamètre* IM, *et de son conjugué* In (fig. 236).

Le triangle rectangle IMP nous donnera $(\text{MI})^2 = (\text{IP})^2 + (\text{PM})^2 = x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) = \frac{a^2x^2+a^2b^2-b^2x^2}{a^2}$. Mais, d'après le n°. 619, $(\text{IM})^2 + (\text{I}n)^2 = a^2+b^2$, d'où il suit que $(\text{I}n)^2 = a^2+b^2-(\text{IM})^2 = a^2+b^2-\frac{a^2x^2+a^2b^2-b^2x^2}{a^2}$ ou $(\text{I}n)^2 = \frac{a^4+a^2b^2-a^2x^2-a^2b^2+b^2x^2}{a^2} = \frac{a^4-a^2x^2+b^2x^2}{a^2}$ et partant, $\text{IM} = \frac{\sqrt{a^2x^2+a^2b^2-b^2x^2}}{a^2}$, et $\text{I}n = \frac{\sqrt{a^4-a^2x^2+b^2x^2}}{a}$.

622. *Corollaire.* Si nous multiplions la perpendiculaire IE, par le demi-diamètre In, nous aurons $\text{IE} \times \text{I}n = ab$; mais $\text{IE} \times \text{I}n$ est la superficie du parallélogramme formé sur deux demi-diamètres conjugués quelconques, et ab est celle du rectangle formé sur les deux demi-axes; d'où il suit que, *le parallélogramme formé sur deux diamètres conjugués quelconques est équivalent au parallélogramme formé sur deux autres diamètres conjugués quelconques, ou au rectangle formé sur les deux axes.*

623. THÉORÈME 222. *L'ellipse étant rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, si l'on mène une tangente* Tt (fig. 236) *par un point quelconque* M *de la courbe, le produit des deux tangentes partielles* TM *et* tM *sera égal au carré du demi-diamètre* In *parallèle à cette tangente, de sorte qu'on aura* $\text{MT} \times \text{M}t = (\text{I}n)^2$.

En effet, les triangles semblables TPM, tQM et In P′, donnent les deux proportions TP : TM :: IP′ : In, et QM ou IP : Mt :: IP′ : In; si l'on multiplie ces deux proportions par ordre, il viendra $\text{IP} \times \text{TP} : \text{TM} \times \text{M}t :: (\text{IP}')^2 : (\text{I}n)^2$...(1). Mais $(\text{IP}')^2 = (\text{IB})^2 - (\text{IP})^2$, et $\text{PT} = \frac{(\text{IB})^2-(\text{IP})^2}{\text{IP}}$, ce qui donne $\text{PT} \times \text{IP} = (\text{IB})^2 - (\text{IP})^2$; donc $(\text{IP}')^2 = \text{IP} \times \text{PT}$, et par conséquent les antécédens de la proportions (1) sont égaux entre eux; donc les conséquens le sont aussi, c'est-à-dire que $\text{MT} \times \text{M}t = (\text{I}n)^2$; ce qu'il fallait démontrer.

624. THÉORÈME 223. *Supposons* (fig. 236) *que l'on ait mené une tangente* Tt, *quelconque, que par le centre et le point de contact* M *de cette tangente* Tt *on ait mené un diamètre* IM, *que par l'extrémité* A *du diamètre* AB *on ait mené une droite* AM′ *parallèle au diamètre* IM, *et que par le point* M′ *et l'ex-*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trémité B *du diamètre* AB, *on ait mené la droite* BM′; *je dis que cette droite* BM′ *sera parallèle à la tangente t*T.

En effet, abaissons les ordonnées MP et M′P″ du point de contact M et du point M′ où les droites AM′ et BM′ se coupent sur l'ellipse, nous aurons $(PM)^2 : (P''M')^2 :: AP \times PB : AP'' \times P''B$... (1). D'ailleurs, les triangles semblables IMP, AM′P″, donnent $PM : P''M' :: IP : AP''$... (2). Si donc on divise terme à terme la proportion (1) par la proportion (2), il viendra $PM : P''M' :: \frac{AP \times PB}{IP} : P''B$.

Or, $AP = AI + IP$, et $PB = IB - IP = AI - IP$; d'où $AP \times PB = (AI)^2 - (IP)^2$; donc $PM : P''M' :: \frac{(AI)^2 - (IP)^2}{IP}$ ou $PT : P''B$; donc les triangles PMT, P″M′B ont deux côtés proportionnels, et il est évident que les angles MPT, M′P″T, compris entre ces côtés, sont égaux; donc ces deux triangles sont semblables, et par conséquent les angles MTP et M′BP″ sont égaux, d'où il suit que la tangente T*t* est parallèle à la droite BM′; ce qu'il fallait démontrer.

625. *Corollaire* 1. Il suit de là que si l'une des droites AM′, BM′ est parallèle à un diamètre quelconque, l'autre sera parallèle au diamètre conjugué au premier; de sorte que si AM′ est parallèle à MN, M′B le sera à *mn*.

Si donc il s'agissait d'avoir le diamètre conjugué à un diamètre donné, *il suffirait de mener la droite* AM′ *parallèle au diamètre donné* MN, *de joindre les points* M′, B *par une droite* M′B, *et par le centre* I *de l'ellipse, de mener une parallèle mn à cette droite* M′B.

626. *Corollaire* 2. De là résulte aussi un moyen bien simple de mener une tangente T*t* par un point donné sur l'ellipse : *il suffira de mener un diamètre au point de contact* M, *donné, par l'extrémité* A *du diamètre quelconque* AB, *de mener une droite* AM′ *parallèle au diamètre* IM; *de joindre le point* M′ *et l'autre extrémité* B *du diamètre* AB *par une droite* M′B, *et de mener par le point de contact* M, *une parallèle t*T, *à cette droite* M′B, *laquelle sera évidemment la tangente demandée.*

627. *Remarque.* Les propriétés des droites AM′ et M′B fournissent aussi un moyen bien simple de mener une tangente à l'ellipse parallèlement ou perpendiculairement à une droite donnée; il en serait de même s'il s'agissait de la normale; mais comme ces constructions sont faciles à trouver, je les proposerai comme problèmes au lecteur.

628. DÉFINITION. Les droites AM′, M′B se nomment *cordes supplémentaires.*

Le lecteur fera bien de s'exercer à démontrer que les droites D*m*′, *m*′C qui aboutissent aux extrémités du diamètre DC, conjugué à AB, jouissent des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mêmes propriétés que les premières AM′, M′B. De là les droites Dm', m'C se nomment aussi *cordes supplémentaires*.

629. *Corollaire* 3. Puisque tout ce qui précède a lieu, quels que soient les diamètres conjugués auxquels on rapporte l'ellipse, il s'ensuit que les mêmes choses subsistent relativement aux axes.

630. *Corollaire* 4. Supposons donc que l'on rapporte l'ellipse à ses axes (fig. 231); je dis que l'angle AM′B de deux cordes supplémentaires quelconques AM′, M′B, qui aboutissent aux extrémités du grand axe, est nécessairement obtus.

En effet, si l'on décrit une circonférence de cercle sur le grand axe comme diamètre, tous les points de cette circonférence seront extérieurs à l'ellipse; d'où il suit que le sommet M′ de l'angle des deux cordes supplémentaires AM′, M′B est nécessairement intérieur au cercle; donc cet angle est obtus.

631. *Corollaire* 5. Il est évident que le point où la circonférence du cercle décrit sur le grand axe rencontre le petit axe de l'ellipse, est, de tous les points de cette circonférence, celui qui s'éloigne le plus de l'ellipse; donc l'angle des deux cordes supplémentaires relatives au grand axe, et qui aboutissent à l'extrémité du petit axe, est le maximum.

632. *Corollaire* 6. Mais ces deux cordes forment, avec le grand axe, deux angles égaux; d'où il suit que les diamètres conjugués, respectivement parallèles à ces cordes, sont égaux entre eux (n°. 540), et sont de tous les diamètres conjugués, ceux qui forment entre eux le plus grand angle obtus.

633. *Remarque.* Si donc on rapportait l'ellipse à ses diamètres conjugués égaux, son équation deviendrait de la même forme que celle du cercle (n°. 559), puisque b étant égal à a, l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ se réduirait à $y^2 = a^2 - x^2$; d'où il suit que si l'on obliquait les ordonnées d'un cercle, en les faisant tourner sur leurs pieds de la même quantité, on aurait une ellipse.

634. *Corollaire* 7. Si donc on avait les deux diamètres conjugés égaux d'une ellipse, cette remarque fournirait un moyen bien simple de décrire cette courbe; car il suffirait de décrire un cercle sur un des diamètres donnés, et d'incliner ensuite les ordonnées du cercle parallèlement à l'autre diamètre de l'ellipse, en les faisant tourner sur leurs pieds.

635. THÉORÈME 224. *L'angle de deux cordes supplémentaires relatives au petit axe est nécessairement aigu* (fig. 231).

Car si l'on décrit une circonférence de cercle sur le petit axe comme diamètre, elle sera intérieure à l'ellipse; d'où il suit que le sommet m de l'angle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de deux cordes supplémentaires D*m*, *m*C relatives au petit axe, est extérieur au cercle; donc cet angle est aigu.

636. *Corollaire.* Il est évident que le sommet du grand axe est, de tous les points de l'ellipse, celui qui est le plus extérieur au cercle décrit sur le petit axe; d'où il suit que les deux cordes supplémentaires, relatives au petit axe, qui aboutissent à l'extrémité du grand axe, forment un angle qui est le minimum.

637. PROBLÈME 124. *Supposons actuellement que la circonférence d'une ellipse soit donnée* (fig. 237) *et qu'il s'agisse de trouver son centre et ses axes.*

On menera deux droites MN, *mn*, quelconques, parallèles entre elles, que l'on divisera en deux parties égales aux points P, P′, par lesquels on menera une droite EF qui sera évidemment un diamètre : par conséquent le point I, milieu de ce diamètre, sera le centre demandé.

Pour avoir les axes AB et CD, en vertu du numéro 539, on décrira une circonférence de cercle GHK, du centre de l'ellipse, et d'un rayon tel que cette circonférence de cercle coupe celle de l'ellipse aux points G, H et K; par ces points G, H et K, on menera les droites GH et HK, auxquelles, et par le centre I, on menera les parallèles AB et CD, qui seront les axes demandés.

638. PROBLÈME 125. *Une ellipse étant décrite et rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, proposons-nous de trouver les directions de deux autres diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné.*

Puisque, si de deux cordes supplémentaires, l'une est parallèle à un diamètre, l'autre est parallèle au diamètre conjugué au premier, il s'ensuit que le problème proposé revient à celui-ci : *une ellipse étant décrite et rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, il faut trouver deux cordes supplémentaires qui fassent entre elles un angle donné.*

Il est clair que pour résoudre ce problème, il suffira de décrire, sur le diamètre auquel on rapporte les cordes supplémentaires, un segment de cercle capable de l'angle donné (n°. 200), et de mener ensuite les cordes au point où la circonférence du cercle rencontrera celle de l'ellipse, et par le centre de l'ellipse de mener enfin deux diamètres parallèles à ces cordes, lesquels seront les diamètres demandés.

Remarque. On conçoit que le problème ne sera possible qu'autant que l'angle donné sera plus petit ou, au plus, égal à l'angle des deux cordes supplémentaires, relatives au grand axe, qui passent par une extrémité du petit axe; et plus grand ou, au moins, égal à l'angle des deux cordes supplémentaires, relatives au petit axe, qui passent par une extrémité du grand axe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

639. PROBLÈME 126. *Connaissant deux diamètres conjugués* AB, DC (fig. 138), *donnés de grandeur et de position, il faut trouver deux autres diamètres conjugués* A′B′, D′C′ *qui fassent entre eux un angle donné, sans décrire l'ellipse.*

Par l'extrémité B de l'un des diamètres donnés, menez une tangente Tt; cette tangente sera parallèle au diamètre DC conjugué à AB; prenez ensuite BE, sur le prolongement de AB, de manière que IB : ID :: ID : BE; puis, élevez une perpendiculaire GF sur le milieu de IE; par un point quelconque F de cette perpendiculaire GF, abaissez la droite FL perpendiculairement à la tangente Tt; sur la droite LF, faites un angle LFM égal à l'angle donné; par le point G et le point E, menez la droite GH, et faites FH = FM, en décrivant du point F, comme centre, et avec un rayon égal FM, un arc de cercle qui coupe la droite GE en un point H; menez la droite FH et par le point E une parallèle EK à cette droite FH; par le point K, où la droite EK rencontre la perpendiculaire GF élevée sur le milieu de IE, comme centre, et avec un rayon KE = KI, décrivez une circonférence de cercle ItET, qui coupera en deux points T et t, la tangente Tt, par lesquels et le centre I, vous menerez les droites TA′ et tD′, qui seront les diamètres demandés, quant à la direction.

Menons le rayon Kt, et démontrons que ce rayon est parallèle à FM. Pour cela, nous considérerons que les parallèles KE, FH nous donnent GK : GF :: EK : FH; mais, par construction, FH = FM, et EK = Kt, comme rayons du même cercle; donc GK : GF :: Kt : FM; de plus, les triangles GMF, GtK ont un angle commun MGF; donc Kt est parallèle à FM.

Puisque la droite Kt est parallèle à FM, en abaissant la droite KN perpendiculairement à Tt, nous aurons l'angle tKN = MFL, et par conséquent à l'angle donné. Il est évident, à présent, que l'angle tIT est égal à l'angle donné; car cet angle tIT a son sommet à la circonférence du cercle, et a, par conséquent, pour mesure la moitié de l'arc tET; or, l'angle tKN, égal à l'angle donné, a aussi pour mesure la moitié du même arc, puisqu'il a son sommet au centre et un côté perpendiculaire à la corde tT; donc ces deux angles sont égaux, et partant l'angle tIT est égal à l'angle donné. Il reste à faire voir que les droites A′B′, C′D′ sont des diamètres conjugués; or, cela est évident, puisque, par construction, nous avons IB × BE = (ID)², et qu'en vertu des propriétés du cercle IB × BE = tB × BT; d'où il suit que tB × BT = (ID)², ce qui n'a lieu que dans le cas où les diamètres A′B′, D′C′ sont conjugués (n°. 623).

Pour trouver les grandeurs des diamètres conjugués A′B′, D′C′, il faut se

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rappeler que $IT = \frac{(IB')^2}{IP}$, et $It = \frac{(IC')^2}{IQ}$ (n°. 614), d'où l'on voit que $(IB')^2 = IP \times IT$ et $(IC')^2 = IQ \times It$; c'est-à-dire que *pour avoir le demi-diamètre* IB', *il faudra prendre une moyenne proportionnelle entre l'abscisse* IP *du point de contact de la tangente* T*t* *et la distance* IT *du centre* I *au point* T, *où la même tangente* T*t* *rencontre ce diamètre* IB' *prolongé; et pour avoir le demi-diamètre* IC', *il faudra prendre une moyenne proportionnelle entre* IQ *et* I*t*.

640. *Corollaire.* Si les diamètres conjugués demandés étaient les axes de l'ellipse, l'angle *t*IT devant être droit, il est clair que la tangente *t*T devrait être le diamètre du cercle I*t*ET; et que, par conséquent, le centre de ce cercle devrait être sur cette tangente *t*T; mais ce même centre devrait être aussi sur la perpendiculaire GF élevée sur le milieu de la droite IE, trouvé comme il a été dit; donc le point G, où la perpendiculaire GF rencontrerait la tangente *t*T, serait le centre du cercle I*t*ET. Quant au reste de la construction, il n'y a aucune différence entre celle-ci et celle du cas précédent.

30^me^. LEÇON.

Suite des Propriétés de l'Ellipse.

641. PROBLÈME 127. *Proposons-nous maintenant de trouver l'expression analytique de la longueur d'une sécante* d'M' *menée par un point donné d* (fig. 239), *en rapportant l'ellipse à ses axes.*

Par le point M', menons une parallèle M'*m* à l'axe AB, et par le point donné *d* une perpendiculaire *d*Q au même axe : le triangle rectangle *dm*M' nous donnera $(dM')^2 = (mM')^2 + (md)^2$; appelons x et y les coordonnées du point M' et a, b celles IQ et Q*d* du point donné *d*; comme $mM' = QP' = QI + IP'$, et que $md = Qd - Qm = Qd - P'M'$, nous aurons $mM' = x + a$ et $md = b - y = -(y - b)$; donc $(dM')^2 = (x+a)^2 + (y-b)^2$, ou en représentant d'M' par Z, $Z^2 = (x+a)^2 + (y-b)^2$.... (1). Si maintenant nous représentons par A la tangente trigonométrique de l'angle $dM'm$, et que nous résolvions le triangle rectangle $dM'm$, en faisant le rayon des tables $= 1$, nous aurons $dm = A \times M'm$, d'où $-(y-b) = A(x+a)$, ou $(y-b) = -A(x+a)$..... (2). Cela posé substituons cette valeur de $y - b$ dans l'équation (1), et il nous viendra $Z^2 = (x+a)^2 + A^2(x+a)^2 = (x+a)^2(1+A^2)$, d'où $(x+a)^2 = \frac{Z^2}{1+A^2}$, et partant $x + a = \frac{Z}{\sqrt{1+A^2}}$. Mettons cette valeur de $x + a$ dans l'équation (2), et nous aurons $y - b =$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\frac{-AZ}{\sqrt{1+A^2}}$. Ces deux dernières équations nous donneront

(3)..... $x = \frac{Z-a\sqrt{1+A^2}}{\sqrt{1+A^2}}$ et $y = -\frac{AZ-b\sqrt{1+A^2}}{\sqrt{1-A^2}}$. Les coordonnées x, y étant celles du point M′ où la droite dM′ rencontre l'ellipse, il s'ensuit que ces coordonnées doivent satisfaire à l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ de cette courbe ; laquelle équation peut se mettre sous la forme $a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0$ en faisant disparaître le dénominateur a^2 et passant tout dans le premier membre. Si actuellement nous mettons à la place de x et y, dans cette équation, les valeurs données par les équations (3), nous aurons

$\frac{a^2(AZ-b\sqrt{1+A^2})^2}{1+A^2} + \frac{b^2(Z-a\sqrt{1+A^2})^2}{1+A^2} - a^2b^2 = 0$, et en développant et faisant disparaître le dénominateur $1+A^2$,

$$\left.\begin{array}{l} a^2\{A^2Z^2-2AbZ\sqrt{1+A^2}+b^2(1+A^2)\} \\ +b^2\{Z^2-2aZ\sqrt{1+A^2}+a^2(1+A^2)\} - a^2b^2(1+A^2) \end{array}\right\} = 0$$

et en rassemblant, entre parenthèses, ce qui multiplie les mêmes puissances de Z, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} Z^2(a^2A^2+b^2) - \{(2a^2Ab+2b^2a)\sqrt{1+A^2}\}Z \\ +(a^2b^2+b^2a^2-a^2b^2)(1+A^2) \end{array}\right\} = 0,$$

et en divisant par $(a^2A^2+b^2)$, il viendra

(4) .... $Z^2 - \frac{(2a^2Ab+2b^2a)\sqrt{1+A^2}}{a^2A^2+b^2}Z + \frac{(a^2b^2+b^2a^2-a^2b^2)(1+A^2)}{a^2A^2+b^2} = 0.$

Ainsi Z, qui est la longueur demandée dM′, dépend d'une équation du second degré. Mais une équation du second degré a deux racines ; donc l'équation (4) nous donnera, non-seulement la longueur de la sécante entière dM′, mais encore celle de sa partie extérieure dM. En effet, il est facile de voir que si nous raisonnions sur le triangle dnM comme nous l'avons fait sur le triangle dmM′, nous serions conduits à la même équation pour la valeur de dM. D'ailleurs nous avons vu (alg. n°. 204) que le dernier terme ou le terme tout connu d'une équation du second degré est égal au produit des racines de cette équation ; par conséquent nous aurons

$$d\text{M}' \times d\text{M} = \frac{(a^2b^2+b^2a^2-a^2b^2)(1+A^2)}{a^2A^2+b^2} \text{..... (5).}$$

642. *Corollaire* 1. Dans l'équation (5), il n'entre que les coordonnées b et a du point donné d, les demi-axes a et b de l'ellipse, et la quantité A, qui est la tangente trigonométrique de l'angle dM′m ou de l'angle que forme la sécante en question avec le grand axe AB de l'ellipse ; par conséquent, pour une autre sécante dN′ qui passerait par le même point d, nous aurions $d\text{N}' \times d\text{N} = \frac{(a^2b^2+b^2a^2-a^2b^2)(1+A^2)}{a^2A^2+b^2}$ ..... (6), car il n'y aurait de variable,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

alors, que la quantité A qui dépend de l'angle que fait la sécante en question avec le grand axe de l'ellipse : si donc nous comparons les équations (5) et (6), nous aurons $dM' \times dM : dN' \times dN :: \frac{1+A^2}{a^2A^2+b^2} : \frac{1+A'^2}{a^2A'^2+b^2}$; proportion qui ne dépend plus des coordonnées a, b du point d où se coupent les deux sécantes dM', dN', mais seulement des angles que forment ces sécantes avec le grand axe de l'ellipse : donc cette proportion subsistera pour deux autres sécantes ou pour deux cordes, quelconques, parallèles aux sécantes primitives; donc pour les deux cordes ab, NN', nous aurons aussi $ac \times cb : Nc \times cN' :: \frac{1+A^2}{a^2A^2+b^2} : \frac{1+A'^2}{a^2A'^2+b^2}$. Si donc nous comparons la proportion ci-dessus avec cette dernière, nous aurons $dM' \times dM : dN' \times dN :: ac \times cb : Nc \times cN'$; or cette dernière proportion est tout-à-fait indépendante, et du point où les cordes ou les sécantes se coupent, et des angles que forment ces mêmes droites avec le grand axe de l'ellipse : on pourra donc énoncer le théorème de cette manière : *si deux sécantes ou deux cordes quelconques qui se coupent sont parallèles à deux autres sécantes ou à deux autres cordes, les rapports des produits des segmens des droites parallèles seront égaux.*

643. *Corollaire* 2. Il suit de là que si deux sécantes dM',dN' ou deux cordes ab, NN' sont parallèles à deux diamètres quelconques, on aura : $dM' \times dM : dN' \times dN :: A'I \times IB'$ ou $(A'I)^2 : C'I \times ID'$ ou $(ID')^2$, et $ac \times cb : Nc \times cN' :: A'I \times IB'$ ou $(A'I)^2 : C'I \times ID'$ ou $(ID')^2$; c'est-à-dire que, *le rapport des produits des segmens de deux sécantes ou de deux cordes qui se coupent, est égal au rapport des carrés des demi-diamètres respectivement parallèles à ces sécantes ou à ces cordes.*

644. PROBLÊME 128. *Proposons-nous maintenant de circonscrire une ellipse à un parallélogramme abcd* (fig. 241), *un diamètre* AB *parallèle aux côtés opposés ab, dc étant donné.*

Par les milieux des côtés opposés du parallélogramme donné, nous menerons les droites AB et CD, qui seront les directions de deux diamètres conjugués (n°. 604). Cela fait, il ne s'agira plus que de déterminer le demi-diamètre IC, car le diamètre AB étant donné, nous aurons tout ce qui est nécessaire pour décrire l'ellipse par l'un des procédés donnés précédemment.

Pour déterminer le demi-diamètre IC, nous porterons le demi-diamètre donné de I en A et en B, ce qui nous donnera les segmens AP, PB du diamètre AB. Ensuite, en vertu de la proposition précédente, nous aurons $AP \times PB : (Pb)^2 :: (IB)^2 : (IC)^2$. Si maintenant nous prenons une moyenne proportionnelle Pg entre AP et PB, il nous viendra $(Pg)^2 : (Pb)^2 :: (IB)^2 : (IC)^2$ ou $Pg : Pb :: IB : IC$; en cherchant donc une quatrième proportionnelle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aux droites Pg, Pb et IB, nous aurons le demi-diamètre IC. Pour cela, nous n'aurons qu'à faire Ph = IB, joindre les points g et b par une droite gb, et, par le point h, mener hk parallèle à gb : Pk sera le demi-diamètre cherché IC.

645. PROBLÈME 129. *Supposons toujours qu'il s'agisse de circonscrire une ellipse à un parallélogramme donné abcd* (fig. 241), *mais qu'au lieu de donner l'un des diamètres* AB, CD, *on donne le rapport* $m : n$ *de ces diamètres.*

D'après ces conditions, on aura AP×PB : (Pc)^2 :: (IB)^2 : (IC)^2 :: $m^2 : n^2$; mais AP = AI + IP et PB = IB − IP = AI − IP; d'où AP × PB = (AI)^2 − (IP)^2, et partant (AI)^2 − (IP)^2 : (Pc)^2 :: $m^2 : n^2$, d'où on aura $(AI)^2 - (IP)^2 = \frac{m^2 \times (Pc)^2}{n^2}$, et $(AI)^2 = \left(\frac{m \times Pc}{n}\right)^2 + (IP)^2$, ou $AI = \sqrt{\left(\frac{m \times Pc}{n}\right)^2 + (IP)^2}$..... (1). Ainsi, pour avoir le demi-diamètre AI, il faut construire cette expression, ce qu'on fera de la manière suivante : la fraction $\frac{m \times Pc}{n}$ donne $n : m$ :: Pc : un quatrième terme, que l'on obtiendra en faisant Pn = n, Pm = m, en joignant les points m et n par une droite mn, et en menant par le point c une parallèle cq à la droite mn, et on aura Pq pour la valeur de la fraction $\frac{m \times PC}{n}$; en substituant donc cette valeur Pq dans l'équation (1), il viendra $AI = \sqrt{(Pq)^2 + (IP)^2}$; d'où l'on voit que AI est l'hypothénuse d'un triangle rectangle. Menant donc au point P une perpendiculaire Pr au diamètre AB, et faisant Pr = PI, on aura qr = AI.

On pourrait trouver le demi-diamètre IC de la même manière que l'on vient de trouver AI, ou bien terminer le problème comme dans le numéro précédent.

646. PROBLÈME 130. *Supposons encore qu'il s'agisse de circonscrire une ellipse à un parallélogramme donné abcd, mais au lieu de donner un diamètre ou le rapport des diamètres* AB, CD, *supposons que l'on donne un point e de la courbe* (fig. 241).

Après avoir mené les diamètres AB, CD par les milieux des côtés opposés du parallélogramme donné *abcd*, par le point donné e, on menera une parallèle ef au diamètre CD, et l'on fera P'f = P'e, ce qui donnera évidemment le point f sur la courbe. Cela posé, on aura $ao \times ob$: $eo \times of$ :: (AI)^2 : (IC)^2, ou, en prenant des moyennes proportionnelles oX, oV entre les segmens ao, ob et eo, of, on aura (oX)^2 : (oV)^2 :: (AI)^2 : (IC)^2. Ainsi, l'on connaît le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rapport des diamètres AB, CD; donc ce problême se réduit à celui du numéro précédent.

647. PROBLÊME 131. *Proposons-nous, maintenant, de faire passer une ellipse par cinq points donnés a, b, c, d et e* (fig. 242).

On joindra deux à deux quatre des cinq points donnés par deux droites *ac* et *bd*, de manière que les deux droites *ac* et *bd* se coupent en un point *f*, et par le cinquième point *e*, on menera deux droites *em*, *ek* respectivement parallèles aux droites *ac*, *bd*. Cela posé, il est clair qu'on aura, en vertu du n°. 642, $af \times fc : ag \times gc :: bf \times fd : eg \times gk$, et $bf \times fd : bh \times hd :: af \times fc : eh \times hm$, ou bien, si l'on prend des moyennes proportionnelles $P^2 : Q^2 :: R^2 : x^2$, et $R^2 : S^2 :: P^2 : y^2$, ou $P : Q :: R : x$, et $R : S :: P : y$. Ces deux dernières proportions feront donc connaître x et y; or $x^2 = eg \times gk$ et $y^2 = eh \times hm$; donc $gk = \frac{x^2}{eg}$ et $hm = \frac{y^2}{eh}$. Ainsi, en construisant ces dernières expressions, on aura les distances *gk* et *hm*, ce qui donnera les points *k* et *m* où les droites *ek* et *em* rencontrent l'ellipse. Actuellement, il est évident que les cordes *bd*, *ke* étant parallèles, la droite EF, qui les coupera en deux parties égales, sera un diamètre; de même, les cordes *ac*, *em* étant aussi parallèles, la droite CD, qui les coupera en deux parties égales, sera un diamètre; donc le point I, où ces deux diamètres se couperont, sera le centre de l'ellipse demandée.

Il est facile de voir à présent que, si l'on fait IK = IG; si, par le point K on mène la droite *no* parallèle à *ac*, si l'on fait K*n* et K*o* = G*c* ou à G*a*, et si l'on mène les droites *ao* et *cn*, la figure *acno* sera un parallélogramme inscrit à l'ellipse demandée. Ainsi, la droite AB, qui passera par les milieux des côtés *ao* et *cn*, sera le diamètre conjugué à CD. Enfin, comme on connaît en outre la corde *me* parallèle au diamètre AB, il est évident que le problême est ramené à celui du numéro précédent.

648. PROBLÊME 132. *On demande l'équation de l'ellipse rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, l'origine des coordonnées étant l'extrémité de l'un de ces diamètres.*

Supposons, par exemple, que nous rapportions l'ellipse aux diamètres conjugués (fig. 236) AB, DC; en supposant l'origine au centre I, l'équation de la courbe est $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; or, si nous transportons l'origine au sommet A du diamètre AB des abscisses, l'ordonnée PM d'un point quelconque M de la courbe ne changera pas, mais l'abscisse sera AP au lieu de IP; or, on voit que IP = AP — AI ou $x = x' - a$, en représentant IP par x, et AP par x'; si donc on met $x' - a$ à la place de x dans l'équation

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ci-dessus, on aura $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\{a^2-(x'-a)^2\} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2 + 2ax' - a^2)$, ou $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax' - x'^2)$, pour l'équation de l'ellipse, dans l'hypothèse actuelle. On conçoit que l'on peut supprimer l'accent de x.

649. PROBLÈME 133. *Proposons-nous de trouver l'expression analytique du rayon du cercle osculateur à l'ellipse pour un point* M *quelconque d'osculation* (n°. 515) (fig. 243).

Par le point donné M, menons une tangente EF et le diamètre MB′, et déterminons le diamètre D′C′, conjugué à MB′, et une double ordonnée mn; puis, menons la normale MR et par le point Q une parallèle NQ à cette normale : les triangles QMN et MIR seront semblables et nous donneront MQ : NQ :: MI : MR..... (1).

Le cercle qui passera par les trois points n, N et m, et qui aura son origine au point N, nous donnera $(Qm)^2 = 2r \times NQ - (NQ)^2$. Mais comme le point m est à l'ellipse, en prenant le point M pour l'origine, nous aurons $(Qm)^2 = \frac{(IC')^2}{(MI)^2}\{2.IM \times MQ - (MQ)^2\}$ (n°. 648); donc $2r \times NQ - (NQ)^2 = \frac{(C'I)^2}{(MI)^2}\{2.IM \times MQ - (MQ)^2\}$. Mettons, dans cette équation, à la place de NQ sa valeur tirée de la proportion (1), qui est $NQ = \frac{MQ \times MR}{MI}$, et nous aurons $\frac{2r \times MQ \times MR}{MI} - \frac{(MQ)^2 \times (MR)^2}{(MI)^3} = \frac{(C'I)^2}{(MI)^2}\{2.IM \times MQ - (MQ)^2\}$; multipliant de part et d'autre par $(MI)^2$, et divisant par MQ, il viendra $2r \times MR \times MI - MQ \times (MR)^2 = (C'I)^2\{2.IM - MQ\}$..... (2).

Pour que le cercle qui passe par les trois points n, N et m soit le cercle osculateur au point M, il faut que les deux points n et m viennent coïncider avec le point N, c'est-à-dire, en d'autres termes, il faut que le point Q coïncide avec le point N; d'où il suit évidemment que les points N et Q coïncideront avec le point M, ce qui donnera $MQ = 0$, et réduira l'équation (2) à $r \times MR \times MI = IM \times (C'I)^2$, d'où $r = \frac{(C'I)^2}{MR}$..... (3); d'où l'on voit que le rayon du cercle osculateur est une troisième proportionnelle à la normale MR abaissée du point M d'osculation sur le diamètre D′C′ parallèle à la tangente EF menée au même point M, et à la moitié IC′ du même diamètre D′C′.

650. *Corollaire* 1. *Rapportons de nouveau l'ellipse au centre, et rappelons-nous,* 1°. *que l'expression analytique du demi-diamètre* IC′ *parallèle à la tangente* EF (n°. 621), *est* $(IC')^2 = \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{a^2}$; 2°. que la valeur de la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente (n°. 620) a pour expression $\frac{a^2b}{\sqrt{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}}$; or, MR est égale à la perpendiculaire IS abaissée

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du centre sur la tangente EF, puisque le diamètre D'C' est parallèle à cette tangente EF, et que la normale MR, perpendiculaire à la tangente, l'est aussi au diamètre D'C'; donc $MR = \frac{a^2b}{\sqrt{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}}$. Si donc nous mettons à la place de $(IC')^2$ et de MR, leurs valeurs, dans l'équation (3), il nous viendra $r = \frac{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)\sqrt{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}}{a^4b}$ pour l'expression du rayon de courbure pour un point quelconque de l'ellipse, x étant l'abscisse de ce point, l'origine étant au centre, et la courbe étant rapportée à ses axes.

Cette expression peut se mettre sous une forme plus simple, en y introduisant la distance du centre au foyer, que nous avons représentée par c, car alors elle devient $r = \frac{(a^4 - c^2x^2)\sqrt{a^4 - c^2x^2}}{a^4b}$.

651. *Corollaire* 2. Maintenant, cherchons ce que devient l'expression $r = \frac{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)\sqrt{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}}{a^4b}$ lorsque le point d'osculation est le sommet A du grand axe.

Dans ce cas, il est évident que $x = -a$, et par conséquent on a $r = \frac{(a^4 - a^4 + a^2b^2)\sqrt{a^4 - a^4 + a^2b^2}}{a^4b} = \frac{a^2b^2\sqrt{a^2b^2}}{a^4b} = \frac{a^3b^3}{a^4b} = \frac{b^2}{a}$; c'est-à-dire que *le rayon de courbure pour le point* A *est une troisième proportionnelle entre le demi-grand axe et le demi-petit axe* (*bien entendu qu'il en est de même pour le sommet* B); *d'où il suit que, d'après le n°.* 594, *le rayon de courbure au sommet du grand axe est égal au demi-paramètre, et, par conséquent, à l'ordonnée dont le pied est le foyer de l'ellipse* (n°. 595).

652. *Corollaire* 3. Pour le cas où le point d'osculation serait à l'extrémité C ou D du petit axe, on aurait $x = 0$, et partant $r = \frac{a^4\sqrt{a^4}}{a^4b} = \frac{a^2}{b}$, c'est-à-dire que, *le rayon de courbure pour le point* C *ou le point* D *est une troisième proportionnelle entre le demi-petit axe et le demi-grand axe.*

Corollaire 4. Il suit de là que *le rayon de courbure aux sommets du grand axe est plus petit que celui des extrémités du petit axe.*

653. *Corollaire* 5. Il suit encore de là que *le rayon de courbure du sommet du grand axe est plus petit que le demi-grand axe, et que celui du sommet du petit axe est plus grand que le demi-petit axe.*

654. *Remarque.* Il est évident que le centre d'un cercle osculateur est sur la normale menée par le point d'osculation; et, puisque le rayon de courbure est une fonction de l'abscisse du point d'osculation, le rayon du cercle osculateur varie à mesure qu'on passe d'un point d'osculation à un autre.

655. DÉFINITION. Cela posé, imaginons que l'on ait mené une infinité de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

normales à l'ellipse, et que l'on ait déterminé les centres des cercles osculateurs correspondans; je dis que la courbe *a*R*dcbfega* qui joindra tous ces centres sera ce qu'on appelle la *développée de l'ellipse.*

656. THÉORÈME 225. *Si une courbe dcb se termine aux points d et b où elle rencontre les deux axes* DC, AB *d'une ellipse* ACBD, *de manière que la distance* C*d soit troisième proportionnelle entre le demi-petit axe et le demi-grand axe, et que la distance* B*b soit troisième proportionnelle entre le demi-grand axe et le demi-petit axe; si, de plus, cette courbe est telle qu'en fixant l'extrémité d'un fil flexible et inextensible au point d, et donnant d'abord à ce fil la longueur et la direction d*C*; si, enfin, l'extrémité de ce fil, toujours tendu, parcourt la circonférence du quart d'ellipse* CM′B, *je dis que cette courbe dcb sera le quart de la développée de l'ellipse.*

En effet, supposons l'extrémité C du fil parvenue au point M′; dans cette position, le fil sera en partie enveloppé sur la courbe *dcb*, et en partie en ligne droite; or, il est évident que la partie en ligne droite *c*M′ est le rayon de courbure du point M′, car cette ligne droite *c*M′ tourne un instant infiniment petit autour du point *c* de la courbe *dcb*; de sorte que son extrémité M′ décrit un arc de cercle infiniment petit, qui est évidemment un arc du cercle osculateur au point M′; donc le point *c* est le centre de ce cercle osculateur, et il en serait de même de toute autre position intermédiaire du fil. De plus, au moment où le fil se met en mouvement, son extrémité C décrit un arc de cercle au point C infiniment petit, avec un rayon égal à C*d*, et comme nous avons supposé que C*d* est troisième proportionnelle entre le demi-petit axe et le demi-grand axe, il s'ensuit (n°. 652) que le point *d* est le centre du cercle osculateur du point C. Enfin, quand le point M′ du fil en question est arrivé au point B, la partie en ligne droite de ce fil est *b*B, et comme, par hypothèse, *b*B est troisième proportionnelle entre le demi-grand axe et le demi-petit axe, il en résulte (n°. 651) que le point *b* est le centre du cercle osculateur du point B : donc la courbe *dcb* est le lieu de tous les centres des cercles osculateurs des points compris entre les points C et B du quart d'ellipse CB; donc cette courbe est le quart de la développée de l'ellipse ou la développée du quart d'ellipse CB.

On conçoit que chaque quart de l'ellipse ACBD aura sa développée, de sorte que la développée totale de l'ellipse sera une courbe *ahdcbfeg* qui aura quatre points de rebroussement *a*, *d*, *b* et *e*.

657. THÉORÈME 226. *Je dis maintenant que les normales à l'ellipse sont des tangentes à la développée.*

Car la partie rectiligne du fil est naturellement tangente à la développée;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en vertu de la tension de ce fil; et cette même partie de ce fil est évidemment normale à l'ellipse.

658. *Corollaire* 1. Il suit de là que les axes de l'ellipse sont aussi des tangentes à la développée.

659. *Remarque.* Si l'on accourcissait ou si l'on alongeait le fil générateur d'une certaine quantité M'L ou M'L', l'extrémité L ou L' de ce fil engendrerait une courbe TLK ou T'L'K' dont tous les points seraient également distans de la circonférence de l'ellipse, et toutes les normales à l'ellipse seraient aussi normales à cette courbe TLK ou T'L'K', que nous appelerons la *parallèle à l'ellipse.*

660. *Corollaire* 2. Il suit de là que pour décrire la parallèle à l'ellipse, il faut mener une suite de normales à l'ellipse, et faire toutes ces normales égales à la distance qui doit régner entre ces deux courbes.

31^me. LEÇON.

L'Hyperbole rapportée à ses axes.

661. DÉFINITIONS. L'*hyperbole* est une courbe qui jouit de la propriété que la différence des distances MF, MF' (fig. 244) de chacun de ses points M à deux points fixes F et F' est constamment égale à une quantité donnée que nous représenterons par $2a$.

Les deux points fixes F et F' se nomment les *foyers*, et les distances des foyers au même point de la courbe, les *rayons vecteurs* de l'hyperbole.

662. THÉORÈME 227. *Si par les deux foyers on mène une droite* AB, *cette droite rencontrera l'hyperbole en deux points* A *et* B.

Car on pourra toujours prendre deux points A et B sur cette droite AB, de telle sorte qu'on ait $AF' - AF = 2a$, et $BF - BF' = 2a$, ce qui est conforme à la définition que nous venons de donner de l'hyperbole.

663. THÉORÈME 228. *Les foyers* F, F' *de l'hyperbole sont à égales distances des extrémités de la droite* AB, *interceptée par la courbe.*

En effet, pour les points A et B, on a $AF' - AF = 2a$ et $BF - BF' = 2a$, et partant $AF' - AF = BF - BF'$. Mais $AF' = AB + BF'$ et $BF = AB + AF$; donc $AB + BF' - AF = AB + AF - BF'$, ou $BF' - AF = AF - BF'$, d'où $2BF' = 2AF$, ou $BF' = AF$..... (1), en passant tous les AF dans le second membre et tous les BF' dans le premier.

Si à l'équation (1) on ajoute AB, on aura $AB + BF' = AB + AF$, ou $AF' = BF'$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

664. THÉORÈME 229. *La distance* AB *des points* A *et* B, *où la droite* AB (fig. 244) *rencontre la courbe, est précisément la quantité que nous avons représentée par* $2a$.

En effet, pour le point A nous avons (n°. 661) $AF' - AF = 2a$; or, $AF = BF'$, donc $AF' - BF' = 2a$; mais $AF' - BF' = AB$; donc $AB = 2a$.

665. THÉORÈME 230. *Le point* I, *milieu de* AB, *est aussi le milieu de* FF'.

En effet, si l'on ajoute AF à AI et BF' à IB, comme AI=IB, et que AF=BF', on aura $AI + AF = IB + BF'$, ou $IF = IF'$; ce qu'il fallait démontrer.

666. THÉORÈME 231. *La distance* FF' *des foyers est plus grande que la partie* AB *de la droite qui passe par les foyers.*

Car pour que $AF' - AF = AB$, il faut que $AF' > AB$; donc à plus forte raison $FF' > AB$.

667. THÉORÈME 232. *Si sur le milieu de* FF' *on élève une perpendiculaire* CD, *je dis que cette perpendiculaire* CD *ne rencontrera point la courbe.*

Car tous les points de cette perpendiculaire sont à égales distances des foyers, tandis que les points de la courbe sont nécessairement inégalement éloignés des mêmes points, puisque la différence de deux rayons vecteurs est toujours égale à AB.

668. *Remarque.* Nous avons vu que cette courbe avait deux points A et B sur la droite qui passe par les foyers; de plus, le pied I de la perpendiculaire CD élevée sur le milieu de FF' est aussi le milieu de AB; donc les points A et B de la courbe sont situés, l'un à gauche et l'autre à droite de la perpendiculaire CD; d'où il suit que, *la courbe se partage en deux branches isolées, situées l'une à droite et l'autre à gauche de la perpendiculaire* CD.

669. THÉORÈME 233. *Soient deux points* M, N, *pris sur l'hyperbole* (fig. 244), *de sorte qu'en menant du même foyer* F *les droites* FM, FN *à ces deux points, on ait* $FM = FN$; *je dis que la droite* MN *qui passera par les deux points* M, N *sera divisée perpendiculairement en deux parties égales au point* P *par la droite* FF' *qui passe par les foyers.*

En effet, menons les droites MF', NF', des mêmes points M, N au second foyer F', et nous aurons $FM - F'M = FN - F'N$; mais par l'hypothèse $FM = FN$; donc $F'M = F'N$; d'où il suit que les deux foyers sont à égales distances des extrémités M et N de la droite MN; donc la droite qui passe par les foyers est perpendiculaire sur le milieu de la droite MN; donc MP=NP.

670. THÉORÈME 234. *Réciproquement, si une droite* MN *rencontre l'hyperbole de part et d'autre aux points* M *et* N, *et est perpendiculaire à la droite qui passe par les foyers, cette droite sera divisée en deux parties égales au point* P (fig. 244).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, si par le foyer F on mène les droites FM, FN, ces droites seront égales entre elles; car si cela n'était pas vrai, comme il serait possible de prendre un point N′ sur la courbe, de manière qu'on eut FM = FN′ (n°. 669), et de mener ensuite une droite MN′ qui serait perpendiculaire sur la droite FF′, il s'ensuivrait que par un même point M on pourrait abaisser deux perpendiculaires sur la droite FF′, ce qui est impossible : donc FM = FN, d'où il suit que les triangles rectangles FMP, FNP ont l'hypothénuse égale et un côte commun FP; donc PM = PN; ce qu'il fallait démontrer.

671. *Corollaire.* Il suit de là que la droite FF′, qui passe par les foyers, divise, en deux parties égales, les droites qui lui sont perpendiculaires et qui sont terminées de part et d'autre à la courbe. Par conséquent la partie AB de cette droite FF′, interceptée par la courbe, est l'axe de l'hyperbole.

672. THÉORÈME 235. *Prenons sur l'axe* AB, *prolongé, les distances* IP, IQ *égales entre elles, et par les points* P *et* Q *élevons les droites* MN *et mn perpendiculaires à l'axe* AB; *je dis que les deux droites* MN, *mn, terminées à la courbe, seront égales entre elles* (fig. 244).

D'abord on observera que ces droites sont divisées en deux parties égales aux points P et Q; ainsi, il suffira de faire voir que leurs moitiés PM, Qm sont égales entre elles.

Or, en menant les rayons vecteurs FM, F′M, F′m et Fm, on aura les triangles rectangles FMP, F′MP, F′mQ et FmQ qui donneront, les deux premiers, $(FM)^2 = (FP)^2 + (PM)^2$ et $(F'M)^2 = (F'P)^2 + (PM)^2$... (1) et les deux derniers $(F'm)^2 = (F'Q)^2 + (Qm)^2$ et $(Fm)^2 = (FQ)^2 + (Qm)^2$... (2). Retranchons l'une de l'autre, 1°. les équations (1); et 2°. les équations (2); et il viendra

$(FM)^2 - (F'M)^2 = (FP)^2 - (F'P)^2$, et $(F'm)^2 - (Fm)^2 = (F'Q)^2 - (FQ)^2$... (3).

Comme la différence des carrés est égale au produit de la somme par la différence des racines, les équations (3) se réduiront à

$$\left.\begin{array}{l}(FM + F'M)\,(FM - F'M) = (FP + F'P)\,(FP - F'P)\\ \text{et } (F'm + Fm)\,(F'm - Fm) = (F'Q + FQ)\,(F'Q - FQ)\end{array}\right\} \ldots (4).$$

La figure 244 nous indique que $FP - F'P = FF'$ et $F'Q - FQ = FF'$; et $FP = IF + IP$, $F'P = IP - IF'$, d'où $FP + F'P = 2IP$; $F'Q = IF' + IQ$, et $FQ = IQ - IF$; d'où $F'Q + FQ = 2IQ$; d'ailleurs on sait que $FM - MF' = AB$, et que $F'm - Fm = AB$; si donc nous substituons dans les équations (4), nous aurons $AB(FM + F'M) = 2IP \times FF'$ et $AB(F'm + Fm) = 2IQ \times FF'$; d'où il suit que $FM + F'M = F'm + Fm$, à cause que par hypothèse $IQ = IP$; mais $FM - F'M = F'm - Fm$, d'où, en ajoutant, $2FM = 2F'm$ ou $FM = F'm$, et en retranchant, $2F'M = 2Fm$ ou $F'M = Fm$; donc

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les triangles FMF', F*m*F' ont les trois côtés égaux; donc les perpendiculaires MP, *m*Q abaissées sur leurs bases sont égales; donc enfin les droites MN, *mn* sont égales entre elles, comme il a été énoncé.

673. *Corollaire* 1. Il suit de là que si l'on mène les droites M*m*, N*n* par les extrémités des droites MN, *mn*, la figure MN*nm* sera un rectangle dont le point I, milieu de QP, sera le centre. Par conséquent, la perpendiculaire DC, élevée sur le milieu de AB, divisera perpendiculairement en deux parties égales les parallèles M*m*, N*n*, à l'axe AB; donc, quoique la droite DC ne rencontre point la courbe, cette droite sera, par analogie, le second axe de l'hyperbole; quant à sa grandeur, nous la donnerons tout-à-l'heure.

674. DÉFINITION. Le point I où se coupent les deux axes AB, CD, est le *centre* de l'hyperbole.

675. *Corollaire* 1. Les diagonales M*n*, *m*N du rectangles MN*nm* sont égales entre elles et se coupent mutuellement en deux parties égales au point I; donc l'hyperbole, comme l'ellipse, jouit de la propriété d'avoir une infinité de systèmes de quatre points situés à égales distances du centre.

De plus, il est évident que si l'on mène par le centre I une droite M*n* qui rencontre la courbe de part et d'autre aux points M et *n*, cette droite sera divisée en deux parties égales par le centre; et si, sur la droite M*n*, comme diamètre, on décrit une demi-circonférence de cercle *nm*M; si par le point *m*, où cette circonférence de cercle rencontrera l'hyperbole et les extrémités *n* et M du diamètre *n*M, on mène les droites *nm*, *m*M, ces droites seront respectivement parallèles aux axes CD, AB.

676. *Corollaire* 2. Les angles MIB, *m*IA que forment les diagonales M*n*, *m*N du rectangle MN*nm*, avec l'axe AB, sont égaux entre eux; d'où il suit que, *si deux droites* M*n*, *m*N, *qui passent par le centre et qui rencontrent la courbe, sont également inclinées sur l'axe* AB, *l'une à droite et l'autre à gauche, ces droites seront égales entre elles; et de plus, si deux droites sont également inclinées par rapport à l'axe* AB *ou à l'axe* DC, *l'une à droite et l'autre à gauche, si l'une rencontre la courbe, l'autre la rencontrera également; et réciproquement, si l'une ne rencontre pas la courbe, l'autre ne la rencontrera pas non plus.*

677. *Corollaire* 3. Si l'hypothénuse du triangle rectangle AID est égale à IF, le côté ID sera la moitié du second axe de l'hyperbole. Par conséquent $(ID)^2 = (AD)^2 - (AI)^2 = (IF)^2 - (AI)^2 = (IF + AI)(IF - AI)$; mais $IF + AI = IF + IB = FB$, et $IF - AI = AF$; partant $(ID)^2 = FB \times FA$; c'est-à-dire que, *le demi-second axe est moyen proportionnel entre les distances d'un foyer aux extrémités du premier axe.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

678. *Corollaire 4.* Appelons a le demi-premier axe, b le demi-second axe, et c la distance du centre à un foyer, nous aurons $c^2 = a^2 + b^2$, $b^2 = c^2 - a^2$, et $a^2 = c^2 - b^2$. De là il est facile de voir ce qu'il y aurait à faire pour trouver les foyers si l'on donnait les deux axes, et pour trouver un axe si l'on donnait les foyers et l'autre axe, etc.

679. PROBLÈME 134. *Supposons qu'une hyperbole soit donnée par ses deux axes, ou par un axe et ses foyers, et proposons-nous de décrire cette courbe.*

Sur le premier axe AB, on prendra des points a, b, c, d..... au-delà d'un foyer F′ (fig. 244); ensuite, avec la distance Ba, comme rayon, et de chaque foyer comme centre, on décrira des arcs de cercle 1, 1′, 1″ et 1‴; avec un rayon égal à Aa, et des foyers comme centre, on décrira de nouveaux arcs de cercle qui couperont les premiers aux points 1, 1′, 1″ et 1‴. Avec un rayon égal à Bb, et des foyers comme centre, on décrira des arcs de cercle en 2, 2′, 2″ et 2‴; avec un rayon égal à Ab, et des foyers comme centre, on décrira de nouveaux arcs de cercle qui couperont les derniers en des points 2, 2′, 2″ et 2‴. Avec un rayon égal à Bc et des foyers comme centre, on décrira des arcs de cercle en M, N, n et m; avec un rayon égal à Ac et des foyers comme centre, on décrira de nouveaux arcs de cercle qui couperont les derniers aux points M, N, n et m; et ainsi de suite : de cette manière on obtiendra autant de points 1, 1′, 1″, 1‴; 2, 2′, 2″, 2‴; M, N, n, m..... de l'hyperbole qu'on voudra.

Démontrons, qu'en effet, le point M, quelconque, obtenu comme il vient d'être dit, est sur l'hyperbole.

Pour cela, il suffira de se rappeler que nous avons fait FM = Ac, et F′M = Bc, et d'observer que FM − F′M = Ac − Bc = AB.

680. PROBLÈME 135. *En partant de cette propriété de l'hyperbole, que la différence de deux rayons vecteurs quelconques est égale au premier axe, et prenant pour les axes des coordonnées, les axes mêmes de la courbe, cherchons la relation des coordonnées de cette courbe.*

Soit M un point quelconque de l'hyperbole; en menant les rayons vecteurs FM, F′M (fig. 244), et l'ordonnée PM, on aura les triangles rectangles FMP et F′MP, qui donneront, le premier

$$(FM)^2 = (FP)^2 + (PM)^2$$ et le second $$(F'M)^2 = (F'P)^2 + (PM)^2 \ldots (1).$$

Représentons par Z le rayon FM, par Z′ l'autre rayon F′M, et par a le demi-premier axe AI; d'après la définition de l'hyperbole on aura $Z - Z' = 2a$, d'où $Z' = Z - 2a$.

Remarquons, à présent, que FP = FI + IP, et que F′P = IP − IF′ : si

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donc nous représentons par c les distances IF et IF′, qui sont égales entre elles, et par x l'abscisse IP, nous aurons $FP = x + c$, et $F'P = x - c$; et en substituant dans les équations (1) en faisant $PM = y$, il viendra

$$Z^2 = (x+c)^2 + y^2 \text{ et } (Z - 2a)^2 = (x-c)^2 + y^2 \ldots\ldots (2).$$

Retranchons maintenant les équations (2), membre à membre, ce qui nous donnera $Z^2 - (Z - 2a)^2 = (x+c)^2 - (x-c)^2$; et faisons attention que la différence des carrés étant égale au produit de la somme par la différence des racines, nous aurons $2a(2Z - 2a) = 4cx$, ou $aZ - a^2 = cx$, d'où $Z = \frac{a^2+cx}{a}$.

Si maintenant nous mettons cette valeur de Z dans la première des équations (2), il nous viendra $\frac{(a^2+cx)^2}{a^2} = (x+c)^2 + y^2$, et en développant dans les deux membres et faisant disparaître le dénominateur du premier, $a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$, ce qui se réduit à $a^2y^2 - (c^2 - a^2)x^2 + a^2(c^2 - a^2) = 0$. Mais (n°. 678) nous avons fait $c^2 - a^2 = b^2$, donc $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$; d'où on aura $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, pour la relation des coordonnées de l'hyperbole.

On voit que cette relation ne diffère de celle qui a lieu entre les coordonnées de l'ellipse, que par le signe de la parenthèse qui est $(a^2 - x^2)$ pour l'ellipse, et $(x^2 - a^2)$ pour l'hyperbole.

681. *Remarque.* Observons en passant que $Z = \frac{a^2+cx}{a}$, et que, comme $Z' = 2a - Z$, on a $Z' = \frac{cx-a^2}{a}$. Or, $Z = FM$, et $Z' = F'M$; donc la longueur du rayon vecteur qui coupe le second axe DC a pour expression $\frac{a^2+cx}{a}$, tandis que l'expression de l'autre est $\frac{cx-a^2}{a}$, ainsi, en général, nous aurons pour l'expression d'un rayon vecteur $Z = \frac{cx \pm a^2}{a}$.

682. THÉORÈME 236. *Je dis, maintenant, que toute équation de la forme* $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ *exprime la relation des coordonnées d'une hyperbole dont a et b seraient les demi-axes, en supposant les coordonnées rectangulaires.*

En effet, soient AB et CD les axes des coordonnées de la courbe en question (fig. 244); et prenons sur l'axe AB des abscisses, à droite et à gauche de l'origine I, les distances IF′ et IF égales entre elles, et telles que $(IF)^2 = a^2 + b^2$ et représentons par c la distance IF ou IF′, ce qui donnera $c^2 = a^2 + b^2$....(1).

Cela posé, soient menées par un point M, quelconque, de la courbe en question, les droites MF et MF′ aux deux points F et F′, et soit abaissée l'or-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donnée MP : on aura deux triangles rectangles FMP, F′MP qui donneront

$$(FM)^2 = (FP)^2 + (PM)^2 \text{ et } (F'M)^2 = (F'P)^2 + (PM)^2 \ldots\ldots (2).$$

Mais $FP = IF + IP = c + x$, $F'P = IP - IF' = x - c$, et $(PM)^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ par hypothèse ; en substituant donc dans les équations (2), il viendra $(FM)^2 = (x+c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ et $(F'M)^2 = (x-c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ et en développant et mettant tous les termes des seconds membres au même dénominateur, il en résultera $(FM)^2 = \frac{a^2x^2 + 2ca^2x + a^2c^2 + b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}$ et $(F'M)^2 = \frac{a^2x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}$, ce qui se réduit à $(FM)^2 = \frac{a^2(c^2 - b^2) + x^2(a^2 + b^2) + 2ca^2x}{a^2}$ et $(F'M)^2 = \frac{a^2(c^2 - b^2) + x^2(a^2 + b^2) - 2a^2cx}{a^2}$. Si à la place de $c^2 - b^2$ et de $a^2 + b^2$ nous mettons leurs valeurs a^2 et c^2 tirées de l'équation (1) ci-dessus, il viendra $(FM)^2 = \frac{a^4 + c^2x^2 + 2ca^2x}{a^2} = \frac{(a^2 + cx)^2}{a^2}$ et $(F'M)^2 = \frac{a^4 + c^2x^2 - 2ca^2x}{a^2} = \frac{(cx - a^2)^2}{a^2}$, et en extrayant les racines carrées on aura $FM = \frac{a^2 + cx}{a}$, et $F'M = \frac{cx - a^2}{a}$; d'où $FM - F'M = \frac{a^2 + cx - cx + a^2}{a} = \frac{2a^2}{a} = 2a$; d'où il suit que la différence des distances d'un point M quelconque de la courbe représentée par l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, à deux points fixes F et F′ pris à égales distances de l'origine, est constamment égale à $2a$; donc cette courbe est une hyperbole, dont a est le demi-premier axe, b le demi-second axe, car, de plus, on a $c^2 = a^2 + b^2$, et les points fixes F et F′ sont les foyers.

Puisque l'hyperbole nous conduit à l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, et que cette équation nous conduit à l'hyperbole ; il s'ensuit que tout ce que nous déduirons de cette équation appartiendra à l'hyperbole.

683. *Corollaire* 1. Si l'on résout l'équation de l'hyperbole par rapport à y, on aura $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, d'où l'on voit que, si x était plus petit que a, la quantité qui est sous le radical serait négative, et que, par conséquent, les valeurs de y, qui répondrait à toutes les valeurs de x plus petites que a, seraient imaginaires.

Il suit de là que, *de tous les points de l'hyperbole, les sommets du premier axe sont les plus près du second axe.*

684. *Corollaire* 2. Si donc par les sommets A et B de la courbe on élève les perpendiculaires GE, KL, *ces perpendiculaires seront des tangentes à l'hyperbole.*

685. *Corollaire* 3. L'expression $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ nous fait voir que y

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

augmentera en même temps que x, et que x peut augmenter depuis $x=a$ jusqu'à $x=\infty$, et par conséquent y augmentera depuis $y=0$ jusqu'à $y=\infty$; d'où il suit que, *les deux branches de l'hyperbole sont des courbes ouvertes qui s'étendent à l'infini, l'une à droite et l'autre à gauche, et que ces deux branches sont écartées l'une de l'autre d'une quantité égale au premier axe.*

*686. *Corollaire* 4. De là il suit aussi que, *les foyers sont intérieurs à la courbe, un dans chaque branche.*

32^me^. LEÇON.

Suite de l'Hyperbole rapportée à ses axes, et propriétés des Asymptotes.

687. THÉORÈME 237. *Je dis maintenant que si l'on prend un point* O *hors de la courbe, la différence des distances de ce point aux foyers sera moindre que la différence de deux rayons vecteurs ou que le premier axe* (fig. 244).

En effet, la droite OF′ coupera l'hyperbole en un point M′, puisque le foyer est intérieur et le point O extérieur à la courbe ; si par le point M′ on mène le rayon FM′, on aura le triangle FM′O qui donnera $FO-OM'<FM'$. Si maintenant on retranche de part et d'autre la quantité M′F′, on aura $FO-OM'-M'F'<FM'-M'F'$, ou $FO-OF'<FM'-M'F'$ ou $<AB$; ce qu'il fallait démontrer.

688. THÉORÈME 238. *Si l'on prend un point* O′ *dans l'intérieur de l'une des branches de l'hyperbole, la différence des distances de ce point aux foyers sera plus grande que la différence de deux rayons vecteurs* (fig. 244).

En effet, si par le point M′, où la droite FO′ coupe la branche dans laquelle le point O′ est situé, on mène le rayon M′F′, on aura le triangle O′M′F′ qui donnera $F'M'>F'O'-O'M'$; si donc de la même quantité FM′ on retranche 1°. F′M′ et 2°. $F'O'-O'M'$, on aura $FM'-F'M'<FM'-F'O'+O'M'$, car, plus on retranche de la même quantité, et moins il reste. Mais $FM'+M'O'=FO'$; donc $FM'-F'M'<FO'-O'F'$; ce qu'il fallait démontrer.

689. *Corollaire.* La réciproque de ces deux propositions a lieu ; c'est-à-dire que si la différence des distances d'un point aux deux foyers est moindre que celle de deux rayons vecteurs, ce point sera hors de l'hyperbole, et si le contraire a lieu, ce point sera dans la courbe. En effet, si, dans le premier cas, le point était intérieur, la différence des distances de ce point aux foyers serait plus grande que celle de deux rayons vecteurs, ce qui est contraire à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

notre hypothèse; et si ce point était sur la courbe, la différence en question serait égale à celle de deux rayons vecteurs : donc ce point ne peut être ni en dedans de la courbe, ni sur la courbe, donc il est en dehors.

On démontrerait, par un raisonnement semblable, que, dans le second cas, le point est intérieur.

690. PROBLÈME 136. *Par un point donné* M *sur une branche d'hyperbole* (fig. 245), *il faut mener une tangente* MT.

Par les foyers F et F′, on menera les rayons vecteurs FM, F′M au point donné M, et on fera ME = MF′; par le point E et le foyer F′, on menera la droite EF′, à laquelle, et par le point donné M, on abaissera une perpendiculaire MT, qui sera la tangente demandée.

En effet, prenons un point m sur la droite MT, différent de M, et, par ce point m, menons les droites mF, mE et mF′, le triangle FEm nous donnera Fm — mE < FE; mais FE = FM — ME = FM — MF′, et mE = mF′, puisque la droite mT est perpendiculaire sur le milieu de F′E; donc Fm — mF′ < FM — MF′; donc le point m est hors de la courbe; donc la droite MT n'a que le point M de commun avec cette courbe; donc cette droite MT est la tangente demandée.

691. *Corollaire* 1. Il suit de cette construction, que la tangente MT divise en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs qui aboutissent au point de contact. Car, par construction, le triangle EMF′ est isocèle, et, par conséquent, la perpendiculaire, abaissée du sommet sur la base, divise l'angle de ce sommet en deux parties égales; donc l'angle FMT = F′MT.

692. *Corollaire* 2. La construction du numéro 690 peut servir aussi à mener une normale par un point donné M sur une branche de l'hyperbole; car, puisque la tangente MT est perpendiculaire à la droite F′E, il est clair que la normale MR sera parallèle à cette droite F′E.

693. *Corollaire* 3. Les triangles FMR, FEF′ sont semblables, à cause des parallèles EF′, MR, et donnent FE : FF′ :: FM : FR; mais FE = FM — ME = FM — MF′ = AB = $2a$, EF′ = $2c$ et FM = $\frac{cx+a^2}{a}$; donc $2a : 2c :: \frac{cx+a^2}{a}$: FR ou $a : c :: \frac{cx+a^2}{a}$: FR = $\frac{c^2x+a^2c}{a^2}$. D'après la figure 245, on voit que IR = FR — IF = FR — c; si donc à la place de FR nous mettons sa valeur $\frac{c^2x+a^2c}{a^2}$, nous aurons IR = $\frac{c^2x+a^2c}{a^2} - c = \frac{c^2x+a^2c-a^2c}{a^2} = \frac{c^2x}{a^2}$.

694. *Corollaire* 4. La sous-normale PR = IR — IP; d'où, en substituant PR = $\frac{c^2x}{a^2} - x = \frac{c^2x-a^2x}{a^2}$, ou PR = $\frac{x(c^2-a^2)}{a^2} = \frac{b^2x}{a^2}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

695. *Corollaire* 5. Les triangles semblables RMP, MQ*r*, donnent RP : PM :: QM : Q*r* (1) ou $\frac{b^2x}{a^2} : y :: x : Qr = \frac{a^2y}{b^2}$. Si à Q*r* on ajoute PM = IQ, on aura $Ir = Qr + PM = \frac{a^2y}{b^2} + y = \frac{a^2y + b^2y}{b^2} = \frac{y(a^2+b^2)}{b^2} = \frac{c^2y}{b^2}$.

696. *Corollaire* 6. La proportion (1) du numéro 695 nous fait voir que les sous-normales sont réciproquement proportionnelles aux coordonnées du point où la normale rencontre la courbe.

697. *Corollaire* 7. Le triangle rectangle PMR nous donne $MR = \sqrt{(PR)^2+(PM)^2}$; mais $PR = \frac{b^2x}{a^2}$, et $(PM)^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; donc $MR = \sqrt{\frac{b^4x^2}{a^4} + \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)} = \sqrt{\frac{b^2}{a^4}\{b^2x^2+a^2(x^2-a^2)\}} = \frac{b}{a^2}\sqrt{b^2x^2+a^2(x^2-a^2)}$.

On trouverait, par le triangle rectangle QM*r*, que $Mr = \frac{1}{b}\sqrt{b^2x^2+a^2(x^2-a^2)}$.

698. *Corollaire* 8. De ce que le point I est le milieu de FF′ et le point *n* le milieu de F′E, il s'ensuit que $In = \frac{FE}{2} = \frac{AB}{2} = AI = IB$. Mais les triangles semblables FTM, I*n*T, nous donnent FM : I*n* :: FT : IT; or $FM = \frac{cx+a^2}{a}$, et $In = IB = a$; donc $\frac{cx+a^2}{a} : a :: FT : IT$, ou $cx + a^2 : a^2 :: FT : IT$; d'où $cx : a^2 :: FT - IT : IT$; mais $FT - IT = FI = c$, donc $cx : a^2 :: c : IT = \frac{a^2}{x}$.

699. *Corollaire* 9. La sous-tangente PT = IP − IT, et partant $PT = x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2-a^2}{x}$.

700. *Corollaire* 10. Les triangles semblables TMP, IT*t*, nous donnent PT : IT :: PM : I*t*, ou $\frac{x^2-a^2}{x} : \frac{a^2}{x} :: y : It = \frac{a^2y}{x^2-a^2}$, mais l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$ nous donne $x^2 - a^2 = \frac{a^2y^2}{b^2}$; donc $It = \frac{b^2a^2y}{a^2y^2} = \frac{b^2}{y}$.

701. *Corollaire* 11. La sous-tangente $Qt = IQ + It$; partant $Qt = y + \frac{b^2}{y} = \frac{y^2+b^2}{y}$.

702. *Corollaire* 12. Le triangle rectangle TMP, donne $MT = \sqrt{(PT)^2+(PM)^2}$; mais $PT = \frac{x^2-a^2}{x}$, et $(PM)^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, donc $MT = \sqrt{\frac{(x^2-a^2)^2}{x^2} + \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)} = \sqrt{\frac{(x^2-a^2)}{a^2x^2}\{a^2(x^2-a^2) + b^2x^2\}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax}\sqrt{b^2x^2+a^2(x^2-a^2)}$. Le triangle rectangle *t*MQ donnera $Mt = \frac{x}{a\sqrt{x^2-a^2}}\sqrt{b^2x^2+a^2(x^2-a^2)}$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

703. PROBLÈME 137. *On donne la grandeur du premier axe d'une hyperbole, un foyer et la direction de deux tangentes, et il faut décrire cette courbe.*

Par le foyer F′ donné (fig. 245), on menera une perpendiculaire F′*n*, F′*n*′, à chaque tangente donnée MT, M″T′; par les pieds *n* et *n*′ de ces perpendiculaires, comme centres, et avec un rayon égal au demi-axe donné, on décrira deux arcs de cercle qui se couperont en un point I, qui sera le centre de l'hyperbole : la droite, qui passera par ce point I et le foyer donné, sera donc le premier axe AB de l'hyperbole. Cette construction est évidente, puisque I*n* = IB (n°. 698).

Il est clair, maintenant, qu'on pourra décrire la courbe par le procédé du numéro 679, car il suffira de porter le demi-axe donné de I en B et en A, et de porter ensuite IF′ de I en F, pour avoir les sommets et les foyers de cette courbe.

704. *Remarque.* Si au lieu de donner le foyer on donnait le centre I, on décrirait de ce centre, avec un rayon égal au demi-axe donné, un arc de cercle *nn*′, qui couperait les deux tangentes chacune en un point *n*, *n*′, par lequel on menerait des perpendiculaires à ces tangentes, lesquelles se couperaient en un point F′, qui serait le foyer. Le reste se ferait comme ci-dessus.

705. PROBLÈME 138. *La direction d'une tangente, un foyer et le centre d'une hyperbole étant donnés, décrire cette courbe* (fig. 245).

Par le centre et le foyer donnés, on menera une droite qui sera la direction du premier axe de l'hyperbole demandée; puis, par le foyer F′ donné, on menera une perpendiculaire F′*n* à la tangente MT donnée, et, par le centre I donné, et avec un rayon égal à la distance I*n* du centre au pied *n* de la perpendiculaire F′*n* à la droite MT, on décrira un arc de cercle *n*B, qui coupera la droite IF′ en un point B, qui sera un sommet de la courbe. Le reste n'offre plus de difficulté.

706. PROBLÈME 139. *La direction d'une tangente* MT, *l'un* B *des sommets du premier axe, et le foyer* F′ *du même côté étant donnés, on demande de décrire l'hyperbole* (fig. 245).

Par le foyer donné F′, on abaissera une perpendiculaire F′*n* sur la tangente donnée MT; par le pied *n* de cette perpendiculaire F′*n* et le sommet donné B, on menera une droite B*n* au milieu de laquelle on élevera une perpendiculaire SI, qui ira rencontrer la droite AB menée par le sommet B et le foyer F′ donnés, en un point I, qui sera le centre de l'hyperbole demandée. La démonstration de cette construction est la même que celle que nous avons donnée au n°. 573, au sujet de l'ellipse.

707. PROBLÈME 140. *Par un point donné hors de l'hyperbole, il faut mener une tangente à cette courbe.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Par le point m donné (fig. 245), comme centre, et avec l'intervalle $m\mathrm{F}'$, de ce point donné m à un foyer F', comme rayon, on décrira un arc de cercle indéfini $\mathrm{F}'\mathrm{E}$; par l'autre foyer, comme centre, et avec un rayon égal au premier axe, on décrira un autre arc de cercle qui coupera le premier en un point E, par lequel et le foyer F on menera une droite FE, et, par le point M où cette droite FE rencontrera la courbe, et le point donné m, on menera une droite $m\mathrm{M}$, qui sera la tangente demandée.

La démonstration de ce procédé est la même que celle que nous avons donnée au numéro 574, pour le problème analogue sur l'ellipse.

708. PROBLÈME 141. *On propose de mener une tangente à l'hyperbole parallèlement ou perpendiculairement à une droite donnée de position.*

Les constructions de ces deux problèmes sont les mêmes que celles que nous avons données aux numéros 575 et 576, pour l'ellipse.

709. PROBLÈME 142. *Mener une normale à l'hyperbole parallèlement ou perpendiculairement à une droite donnée.*

Même construction que pour l'ellipse (nos. 577 et 578).

710. DÉFINITION. Le *paramètre* de l'hyperbole est une troisième proportionnelle entre le premier et le second axe; de sorte qu'en le représentant par p, nous aurons $2a : 2b :: 2b : p$, ou $a : b :: 2b : p = \frac{2b^2}{a}$.

711. THÉORÈME 239. *Je dis maintenant que la double ordonnée qui passe par un foyer est égale au paramètre.*

En effet, l'abscisse de ce point est $x = \mathrm{IF} = c$; si donc nous mettons cette valeur de x dans l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ de l'hyperbole, nous aurons $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(c^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 + b^2 - a^2) = \frac{b^4}{a^2}$; d'où $y = \frac{b^2}{a}$, et partant, $2y = \frac{2b^2}{a} = p$.

712. DÉFINITION. Toute tangente qui ne peut toucher sa courbe qu'à l'infini, est nommée *asymptote*.

713. *Corollaire.* D'après cette définition des asymptotes, il est évident qu'il y a des courbes qui n'en ont point; car, pour qu'une courbe ait des asymptotes, il faut qu'elle s'étende à l'infini, et cette condition, qui est nécessaire, n'est pas suffisante.

714. PROBLÈME 143. *Voyons maintenant si l'hyperbole possède des asymptotes.*

Pour cela (fig. 246), menons une tangente MT par un point quelconque M de cette courbe, et, par le sommet B du premier axe AB, élevons la perpendiculaire EE' à cet axe, et cherchons les expressions des lignes BT et BG.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

D'abord nous avons trouvé $IT = \frac{a^2}{x}$ (n°. 698), et nous avons $BT = IB - IT = a - IT$; donc $BT = a - \frac{a^2}{x}$.

Ensuite, les triangles semblables TBG, TPM, nous donneront PT : BT :: PM : BG. Mais (n°. 699) $PT = \frac{x^2 - a^2}{x}$, et $PM = y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, donc $\frac{x^2 - a^2}{x} : a - \frac{a^2}{x} :: \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} : BG$, ou $(x^2 - a^2) : x - a :: b\sqrt{x^2 - a^2} : BG$,

d'où $BG = \frac{b(x-a)\sqrt{x^2-a^2}}{x^2-a^2} = \frac{b(x-a)}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{b\left(1-\frac{a}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}$; ainsi donc

$$BT = a - \frac{a^2}{x}, \text{ et } BG = \frac{b\left(1-\frac{a}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (1).}$$

Pour que la tangente TM devienne une asymptote, il faut (n°. 712) que le point de contact M soit à l'infini, c'est-à-dire, en d'autres termes, il faut que x soit infini; mais, en faisant x infini, les fractions $\frac{a^2}{x^2}$ et $\frac{a}{x}$ se réduisent à zéro; ce qui réduit les expressions (1) aux suivantes : $BT = a$, et $BG = b$; c'est-à-dire, que l'hyperbole a deux asymptotes IE, IE′ et ces deux asymptotes passent par le centre et rencontrent la tangente EE′, du sommet B, à des distances BE, BE′ égales à b, ou, en d'autres termes, au demi-second axe.

De là, il est facile de voir ce qu'il faut faire pour mener les asymptotes de l'hyperbole.

Remarque. Si les deux axes de l'hyperbole étaient égaux, les triangles IBE, IBE′ seraient isocèles, et comme ils sont rectangles, les angles EIB, E′IB seraient de 45°., et par conséquent leur somme EIE′, ou l'angle des asymptotes serait droit.

715. DÉFINITION. On appelle *équilatère* une hyperbole dont les deux axes sont égaux, ou, ce qui revient au même, celle dont les asymptotes sont perpendiculaires entre elles.

716. THÉORÈME 240. *Si par un point* M′ *d'une branche d'hyperbole* (fig. 246) *on mène une perpendiculaire* R′o, *à l'axe* AB, *prolongée jusqu'aux asymptotes; je dis qu'on aura* 1°. $M'R' = mo$; 2°. $M'R' \times M'o = b^2$ *ou* $R'm \times mo = b^2$.

En effet, 1°. on a $P'M' = P'm$ et $P'R' = P'o$, puisque P″I divise l'angle RI*r* en deux parties égales; donc $P'R' - P'M' = P'o - P'm$ ou $M'R' = mo$, ce que, 1°. il fallait démontrer.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

2°. Les triangles semblables IBE, IP′R′, donnent IB : BE :: IP′ : P′R′ = $\frac{IP' \times BE}{IB}$; d'où $(P'R')^2 = \frac{(BE)^2}{(IB)^2} \times (IP')^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (IP')^2$..... (1); mais le point M′ étant à l'hyperbole, nous aurons $(P'M')^2 = \frac{b^2}{a^2}\{(IP')^2 - a^2\}$; si donc nous retranchons cette dernière équation de l'équation (1), il nous viendra $(P'R')^2 - (P'M')^2 = \frac{b^2}{a^2}\{(IP')^2 - (IP')^2 + a^2\} = b^2$, ou $(P'R' + P'M') \times (P'R' - P'M') = b^2$; mais $P'R' + P'M' = P'R' + P'm = R'm$, et $P'R' - P'M' = P'o - P'm = mo$; donc $R'm \times om = b^2$, et, puisque $om = M'R'$ et $R'm = M'o$, on aura aussi $M'R' \times M'o = b^2$.

717. *Corollaire* 1. Si donc on avait une autre perpendiculaire R*q* au premier axe AB, on aurait $RS \times Sq = b^2$, et $RM'' \times M''q = b^2$, et partant, $R'm \times om = R'M' \times M'o = RS \times Sq = RM'' \times M''q$, ou bien R′*m* : RS :: S*q* : *om* :: etc.

718. *Corollaire* 2. Si, par les points S et *m* d'une branche de la courbe on mène deux droites quelconques R″*r* et R‴*p*, parallèles entre elles, les triangles SRR″, *m*R′R‴ et S*rq*, *mpo* seront respectivement semblables, et donneront, les premiers, RS : R′*m* :: R″S : *m*R‴, et les derniers, S*q* : *mo* :: S*r* : *mp*.

Si nous multiplions ces proportions par ordre, nous aurons : $RS \times Sq : R'm \times mo :: R''S \times Sr : mR''' \times mp$. Mais (n°. 717) $RS \times Sq = R'm \times mo$; donc aussi $R''S \times Sr = mR''' \times mp$, c'est-à-dire que, *si l'on mène deux droites quelconques* R″*r*, *p*R‴, *parallèles entre elles, et terminées aux asymptotes, l'hyperbole coupera chacune de ces droites en un point* S, *m*, *de manière que le produit des segmens* R″S, S*r de la première, égalera celui des segmens m*R‴, *mp de la seconde.*

719. *Corollaire* 3. Si, par les points N et M, où les parallèles quelconques *r*R″ et *p*R‴ menées par les points S et *m* rencontrent la même branche de l'hyperbole, on abaisse les perpendiculaires *r*′S′, *r*″S″, à l'axe, on aura les triangles semblables *r*NS′, *p*MS″, et *r*′NR″, *r*″MR‴, qui donneront, les premiers S′N : S″M :: *r*N : *p*M, et les derniers *r*′N : *r*″M :: NR″ : MR‴. Si nous multiplions ces deux proportions par ordre, nous aurons S′N×*r*′N : S″M×*r*″M :: *r*N × NR″ : *p*M × MR‴. Mais (n°. 717), S′N × *r*′N = S″M × *r*″M, donc aussi *r*N × NR″ = *p*M × MR‴.

720. *Corollaire* 4. Si l'une des parallèles quelconques *r*R″, *p*R‴, était tangente à la courbe, les deux points S, N ou *m* et M d'intersection de cette droite avec la courbe, se reduiraient en un seul qui serait le point de contact; ainsi, en supposant la tangente *r*‴S‴ parallèle à la droite *r*R″, on aura, d'après ce qui précède, R″S×S*r* = S‴K×K*r*‴, et *r*N×NR″ = S‴K×K*r*‴; donc R″S × S*r* = *r*N × NR″.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si maintenant nous faisons attention que $R''S = SN + NR''$, et que $rN = rS + SN$, nous verrons que $Sr \times SN + Sr \times NR'' = Sr \times NR'' + SN \times NR''$; d'où, en retranchant la partie commune aux deux membres, $Sr \times SN = SN \times NR''$, et divisant ensuite par SN, facteur commun, $Sr = NR''$.... (2); d'où il suit que, *si dans une branche de l'hyperbole, on mène une droite quelconque* rR'', *terminée de part et d'autre aux asymptotes, les parties* rS, $R''N$, *de cette droite, comprises entre la courbe et une asymptote, sont égales entre elles.*

Il est évident que les distances rN, $R''S$ sont aussi égales entre elles, car si l'on ajoute la quantité SN dans chaque membre de l'équation (2), il viendra $Sr + SN = NR'' + SN$ ou $rN = R''S$.

721. THÉORÈME 241. *Si par un point m quelconque de l'une des branches de l'hyperbole* (fig. 246) *on mène une parallèle* mm' *au premier axe, on aura,* 1°. $mo' = y'm'$, *et* 2°. $mo' \times my' = a^2$ *ou* $o'm' \times y'm' = a^2$.

En effet, 1°. on a $Qm = Qm'$, et $Qo' = Qy'$, et par conséquent $Qm - Qo' = Qm' - Qy'$. Mais $Qm - Qo' = mo'$, et $Qm' - Qy' = y'm'$; donc, 1°. $mo' = y'm'$.

2°. Les triangles semblables IQy', IBE' donnent $IB : y'Q :: BE' : IQ$, d'où $y'Q = \frac{IB \times IQ}{BE'} = \frac{a}{b} \times IQ$, et partant, $(y'Q)^2 = \frac{a^2}{b^2} \times (IQ)^2$..... (1)

Le point m est à la courbe, et on a $P'm = IQ$; d'où il suit que $(IQ)^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, ce qui donne x^2 ou $(IP')^2 = (Qm)^2 = \frac{a^2}{b^2}\{(IQ)^2 + b^2\}$.

Si de cette dernière équation nous retranchons l'équation (1), il nous viendra $(Qm)^2 - (y'Q)^2 = \frac{a^2}{b^2}\{(IQ)^2 + b^2 - (IQ)^2\} = a^2$; mais, $(Qm)^2 - (y'Q)^2 = (Qm + y'Q)(Qm - y'Q)$, $Qm + y'Q = my'$, et $Qm - y'Q = Qm - o'Q = mo'$, et partant $my' \times mo' = a^2$. Enfin, il est facile de voir qu'on aurait aussi $o'm' \times y'm' = a^2$, et par conséquent, $my' \times mo' = m'y' \times m'o'$. Si donc on avait une autre parallèle Sm''' à l'axe, on aurait de même $Sy \times So = a^2$, ou $om''' \times ym''' = a^2$; d'où il suit que $my' \times mo' = Sy \times So = m'y' \times m'o' = om''' \times ym'''$.

722. *Corollaire* 1. Si par deux points S et m quelconques d'une branche d'hyperbole, on mène deux droites parallèles entre elles, de manière qu'elles rencontrent l'autre branche aux points m'' et m^{IV}, et deux autres droites Sm''' et mm' parallèles au premier axe AB, les triangles SyX, $my'X'$ et Sot, $mo't'$ seront respectivement semblables, et donneront, les premiers, $Sy : my' :: SX : mX'$, et les derniers $So : mo' :: St : mt'$.

Si nous multiplions ces proportions par ordre, nous aurons : $Sy \times So : my' \times mo' :: SX \times St : mX' \times mt'$; mais (n°. 721) $Sy \times So = my' \times mo'$, donc $SX \times St = mX' \times mt'$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On démontrerait de même que $m''X \times XS = m^{IV}X' \times X'm$; d'où il suit que, *si l'on mène deux droites quelconques* Sm'', mm^{IV} *parallèles entre elles, et terminées aux deux branches de l'hyperbole, les produits des distances* SX, St, *et* mX', mt', *ou* $m''X$, $m''t$ *et* $m^{IV}X'$, $m^{IV}t'$ *d'une extrémité de chacune de ces droites aux points où ces mêmes droites rencontrent les asymptotes, seront égaux.*

723. *Corollaire* 2. Si l'une des parallèles quelconques Sm'', mm^{IV}, passait par le centre, la proposition serait encore vraie, et comme les points où cette droite rencontrerait les asymptotes, se réduiraient en un seul qui serait le centre de la courbe, on aurait $(KI)^2 = SX \times St$, et $(KI)^2 = m''X \times m''t$; d'où $SX \times St = m''X \times m''t$; mais $SX = Sm'' - m''X$, et $m''t = m''S - tS$; donc $St \times Sm'' - St \times m''X = m''X \times m''S - m''X \times St$; et en supprimant le produit commun, il résulte $St = m''X$...(1); c'est-à-dire que, *si l'on mène une droite quelconque qui rencontre les deux branches de l'hyperbole, les parties de cette droite, comprises entre la courbe et les asymptotes, seront égales entre elles.*

Il est évident que les distances SX, tm'' sont aussi égales entre elles; car, en ajoutant la quantité tX dans chaque membre de l'équation (1), on aura $St + tX = m''X + tX$, ou $SX = m''t$.

724. *Corollaire* 3. De cette proposition et de celle du numéro 720, résulte un moyen bien simple de décrire une hyperbole dont on connaît un point et les asymptotes.

En effet, soient AB et CF les asymptotes, et M le point donné (fig. 247). Par le point M, si l'on mène tant de droites EF, GH..... MM''', MM^{IV}....., qu'on voudra, et qu'ensuite on fasse $FM' = EM$, $HM'' = GM$, ... $F'M''' = E'M$, $H'M^{IV} = G'M$, ...; il est évident que les points M', M''..... M''', M^{IV}, ... seront à l'hyperbole.

725. *Corollaire* 4. Il suit évidemment de ce que pour une droite quelconque rR'' (fig. 246) on a $rS = NR''$ et $SR'' = rN$, que pour une tangente $S'''r'''$ on aura $S'''K = r'''K$, car alors les deux points d'intersection de la droite et de la courbe, se réduisent au point de contact K. Quant à la droite K'K qui passe par le centre et qui se termine de part et d'autre à la courbe, nous avons vu qu'elle était divisée en deux parties égales par le centre, ce qu'on déduirait des considérations précédentes.

726. *Corollaire* 5. De là résulte un moyen bien simple pour mener une tangente à une branche d'hyperbole, dont on connaît les asymptotes AB, CD (fig. 247), par un point m de la courbe; car, si l'on suppose que ST soit la tangente demandée; d'après ce qui précède, le point de contact m sera le milieu de ST; si donc par le point m on mène la droite mp parallèle à l'asymp-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tote AB, la distance IS sera divisée en deux parties égales au point p; d'où il suit que pour mener la tangente ST, il suffira de mener la droite mp par le point donné, parallèlement à l'asymptote AB, et ensuite, de faire $pS = pI$; la droite menée par le point S et le point m, sera la tangente demandée.

727. THÉORÈME 242. *Si par deux points* E *et* F *d'une branche d'hyperbole on mène les droites* EH *et* FG, EL *et* FK (fig. 249) *respectivement parallèles aux asymptotes, on aura toujours* $HE \times EL = GF \times FK$.

En effet, par les mêmes points E et F, menons deux droites quelconques pm, bd, parallèles entre elles, prolongées jusqu'aux asymptotes; les triangles HEm, GFd seront semblables et donneront $Em : Fd :: HE : GF$; et les triangles LEp, KFb, qui seront semblables aussi, donneront $Ep : Fb :: EL : FK$. Multiplions ces deux proportions par ordre, et nous aurons $Em \times Ep : Fd \times Fb :: EH \times EL : GF \times FK$; mais (n°. 718) $Em \times Ep = Fd \times Fb$; donc $EH \times EL = GF \times FK$; ce qu'il fallait démontrer.

728. *Corollaire* 1. Il est clair que si, par le sommet a de la courbe, on mène les droites aQ, aR respectivement parallèles aux asymptotes, on aura $aQ \times aR = EH \times EL = GF \times FK$, ou, ce qui revient au même, $aQ \times IQ = IH \times HE = IG \times GF$.

729. *Corollaire* 2. Comme le sommet a de la courbe est un point remarquable, on peut regarder les coordonnées IQ, aQ de ce point rapporté aux asymptotes, comme des constantes; représentons-les par a et b, et représentons par x et y les coordonnées IH et HE ou IG et GF d'un point quelconque E ou F, ou, etc. de la courbe : nous aurons $xy = ab$ pour l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

730. *Corollaire* 3. Il est visible que, si l'hyperbole était équilatère, les triangles IRa, IQa seraient isocèles et égaux, et que, par conséquent, IQ = Qa, ou $a = b$, ce qui réduirait l'équation $xy = ab$ à celle-ci $xy = a^2$.

33^me^. LEÇON.

L'Hyperbole rapportée à ses diamètres conjugués.

731. THÉORÈME 243. *Je dis maintenant que, si par le point de contact* K *d'une tangente quelconque* $r'''S'''$ *et par le centre de l'hyperbole on mène une droite* IK *prolongée indéfiniment, cette droite* IK *sera un diamètre de la courbe, et les droites que ce diamètre divisera en deux parties égales, seront parallèles à la tangente* r''' S''' (fig. 246).

En effet, soit $R''r$ une droite quelconque parallèle à la tangente $r'''S'''$;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'abord on aura (1)..... $q'R'' = q'r$, en vertu des triangles semblables IKr''', $Iq'R''$, et $Ir'''S'''$, $IR''r$, la tangente $r'''S'''$ étant divisée en deux également au point K; mais on a aussi $SR'' = rN$, en vertu des propositions précédentes; si donc on retranche l'équation (1) de cette dernière, on aura $SR'' - q'R'' = rN - q'r$. Mais $SR'' - q'R'' = Sq'$ et $rN - q'r = q'N$; donc $Sq' = q'N$; donc la droite IK divise en deux parties égales toute parallèle rR'' à la tangente $r'''S'''$; donc enfin la droite IK est un diamètre de l'hyperbole.

Il serait facile de démontrer que la réciproque de cette proposition est vraie, c'est-à-dire que si par le milieu q' d'une droite quelconque $R''r$ on menait une droite au centre, cette droite $q'I$ diviserait en deux parties égales les parallèles à la droite $R''r$, et passerait par le point de contact K de la tangente $r'''S'''$, parallèle à cette même droite $R''r$.

732. THÉORÈME 244. *Si par l'extrémité* K' *du diamètre* KK' *qui passe par le point de contact* K *de la tangente* $r'''S'''$, *on mène une parallèle* $S^{IV}r^{IV}$ *à cette tangente, cette parallèle* $S^{IV}r^{IV}$ *sera égale à la tangente* $S'''r'''$ *et sera divisée en deux parties égales par le diamètre* KK'.

En effet, les triangles $Kr'''I$, $IK'S^{IV}$ et $S'''KI$, $IK'r^{IV}$ sont respectivement égaux, puisque $IK = IK'$, et que ces triangles ont visiblement les angles égaux : donc $K'r^{IV} = KS'''$ et $K'S^{IV} = Kr'''$; donc 1°. $K'r^{IV} + K'S^{IV} = KS''' + Kr'''$ ou $r^{IV}S^{IV} = r'''S'''$, et 2°. à cause que $KS''' = Kr'''$, on a $K'r^{IV} = K'S^{IV}$; ce qu'il fallait démontrer.

733. *Corollaire* 1. Il suit de là que, la droite $S^{IV}r^{IV}$ est tangente à l'hyperbole au point K'; de sorte que les tangentes aux extrémités d'un diamètre quelconque sont parallèles et égales entre elles.

734. *Corollaire* 2. Il suit encore de là que, si l'on mène deux tangentes parallèles, la droite qui joindra les points de contact passera par le centre et sera par conséquent un diamètre.

735. *Corollaire* 3. On voit encore de là que, si l'on joint, deux à deux, les points où deux tangentes parallèles rencontrent les asymptotes, par des droites $S'''S^{IV}$, $r'''r^{IV}$, on aura un parallélogramme $S'''r'''r^{IV}S^{IV}$ dont les côtés $S'''S^{IV}$, $r'''r^{IV}$ seront parallèles au diamètre qui passera par les points de contact K, K' des tangentes en question $S'''r'''$, $S^{IV}r^{IV}$.

736. THÉORÈME 245. *Je dis maintenant que, si par le centre de l'hyperbole on mène une parallèle* $q''q'''$ *aux tangentes menées aux extrémités d'un diamètre quelconque* KK', *cette droite* $q''q'''$ *divisera en deux parties égales toute parallèle* Sm'' *au diamètre* KK', *et terminée de part et d'autre à la courbe aux points* S *et* m''.

En effet, la droite $q''q'''$ divise en deux parties égales la droite $S'''S^{IV}$ qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

passe par les extrémités des tangentes menées aux points K et K′; or, cette droite $S'''S^{IV}$ est parallèle au diamètre KK′, et par conséquent à la droite Sm''; donc la droite $q''q'''$ divise aussi en deux parties égales la droite tX; d'où il suit que $tq'' = q''X$. Mais nous avons vu que $tm'' = SX$, donc $tm'' - tq'' = SX - q''X$, ou $m''q'' = Sq''$; ce qu'il fallait démontrer.

737. *Corollaire* 1. Il suit de là que, la droite $q''q'''$ est un diamètre, et que ce diamètre est conjugué au diamètre KK′.

738. *Corollaire* 2. Il suit encore de là que, si l'on prend, sur le diamètre KK′, à droite et à gauche du centre, des abscisses IP^{V}, Iq' égales entre elles, les ordonnées $P^{V}n$, $q'N$ seront égales entre elles.

739. PROBLÈME 144. *Cherchons maintenant la relation qu'il y a entre les coordonnées d'un point quelconque de l'hyperbole, en rapportant cette courbe à ses diamètres conjugués.*

Soit le point N, quelconque, rapporté aux diamètres conjugués KK′, $q''q'''$; en menant par ce point N la droite $R''r$ parallèlement au diamètre $q''q'''$, et par l'origine K du diamètre KK′, la tangente $r'''S'''$: $q'N$ sera l'ordonnée, et Iq' l'abscisse du point N, et les triangles semblables IKr''', $Iq'R''$ donneront $(q'R'')^2 : (Kr''')^2 :: (Iq')^2 : (IK)^2$...(1). Mais $SR'' \times Sr = KS''' \times Kr'''$, ou $SR'' \times Sr = (Kr''')^2$, puisque $KS''' = Kr'''$; or, $SR'' = q'R'' + q'S = q'R'' + q'N$, et $Sr = q'r - q'S = q'R'' - q'N$, et par conséquent $SR'' \times Sr = (q'R'')^2 - (q'N)^2$; donc $(Kr''')^2 = (q'R'')^2 - (q'N)^2$. Si nous mettons cette valeur de $(Kr''')^2$ dans la proportion (1), il nous viendra $(q'R'')^2 : (q'R'')^2 - (q'N)^2 :: (Iq')^2 : (IK)^2$, d'où $(q'R'')^2 : (q'N)^2 :: (Iq')^2 : (Iq')^2 - (IK)^2$, ce qui donne $(q'R'')^2 = \frac{(q'N)^2 \times (Iq')^2}{(Iq')^2 - (IK)^2}$. Mettons cette valeur de $(q'R'')^2$ encore dans la proportion (1), et nous aurons $\frac{(q'N)^2 \times (Iq')^2}{(Iq')^2 - (IK)^2} : (Kr''')^2 :: (Iq')^2 : (IK)^2$, et en divisant les antécédens par $(Iq')^2$, et les multipliant par $(Iq')^2 - (IK)^2$, il viendra $(q'N)^2 : (Kr''')^2 :: (Iq')^2 - (IK)^2 : (IK)^2$. Si nous représentons par y l'ordonnée $q'N$, par x l'abscisse Iq', par a le demi-diamètre IK, et par b la moitié Kr''' de la tangente $S'''r'''$, nous aurons $y^2 : b^2 :: x^2 - a^2 : a^2$, d'où nous tirerons $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ pour la relation demandée.

740. *Remarque.* On voit que cette équation est semblable à celle que nous avons trouvée en rapportant l'hyperbole à ses axes, ce qui doit être, puisque les axes sont des diamètres conjugués. Ainsi, nous pourrons nous servir de cette équation, tant que l'origine sera au centre, que l'hyperbole soit rapportée à ses axes ou à ses diamètres conjugués, en se rappelant que dans le premier cas les coordonnées sont rectangulaires, et a et b représentent les demi-axes, et que dans le second cas les coordonnées sont obliques, et a et b re-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

présentent les demi-diamètres conjugués. Il faut bien se rappeler aussi, que dans les deux cas, les ordonnées sont parallèles aux tangentes menées aux extrémités du diamètre des x, et que ces tangentes sont égales au diamètre des y.

741. THÉORÈME 246. *Je dis maintenant que le carré d'une ordonnée quelconque est au produit des distances du pied de cette ordonnée, aux extrémités du diamètre des x, comme le carré du demi-diamètre des y est au carré du demi-diamètre des x, quels que soient les diamètres conjugués auxquels on rapporte la courbe.*

En effet, l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ nous donne $y^2 : x^2 - a^2 :: b^2 : a^2$; mais s'il s'agissait du point n (fig. 246), $y = P^{\nu}n$, $x = IP^{\nu}$, et comme $a = IK = IK'$, nous aurions $(P^{\nu}n)^2 : (IP^{\nu})^2 - (IK')^2 :: b^2 : a^2$; or $(IP^{\nu})^2 - (IK')^2 = (IP^{\nu} + IK')(IP^{\nu} - IK')$; $IP^{\nu} + IK'$ ou $IP^{\nu} + IK = KP^{\nu}$, et $IP^{\nu} - IK' = K'P^{\nu}$; donc $(P^{\nu}n)^2 : KP^{\nu} \times K'P^{\nu} :: b^2 : a^2$; ce qu'il fallait démontrer.

742. THÉORÈME 247. *Si l'on considérait deux points successifs quelconques de l'hyperbole, les carrés des ordonnées seraient entre eux comme les produits des distances des pieds respectifs de ces ordonnées aux extrémités du diamètre des x.*

En effet, considérons les points M et N (fig. 246), nous aurons : $(qM)^2 : Kq \times K'q :: b^2 : a^2$, et $(q'N)^2 : Kq' \times K'q' :: b^2 : a^2$; donc $(qM)^2 : (q'N)^2 :: Kq \times K'q : Kq' \times K'q'$; ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Cette propriété appartient aussi à l'ellipse, mais il y a cette différence entre l'ellipse et l'hyperbole, que le pied de l'ordonnée d'un point quelconque de l'ellipse tombe sur le diamètre des x, tandis que dans l'hyperbole le pied d'une ordonnée quelconque tombe nécessairement sur le prolongement du diamètre des x.

743. *Corollaire.* De ce que l'équation de l'hyperbole reste la même, soit qu'on la rapporte à ses axes ou à deux diamètres conjugués quelconques, il s'ensuit que si une hyperbole était donnée par deux diamètres conjugués, on parviendrait à décrire cette courbe, en déterminant ses coordonnées sur ses diamètres conjugués pris comme axes, et inclinant ensuite les coordonnées de la même manière que celles de l'hyperbole demandée; car les coordonnées n'ayant point changé de grandeur, elles auraient toujours entre elles la même relation, ainsi qu'il est facile de le voir dans la figure 248.

744. THÉORÈME 248. *Supposons l'hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués quelconques* AB, CD (fig. 249), *et que, par un point* M *de la courbe, on ait abaissé l'ordonnée* MP; *si l'on prend un point* T *sur le diamètre* AB *des abscisses, de manière que* $IT = \frac{(AI)^2}{IP}$, *je dis que la droite* TM *qui passera par le point* T *et le point* M *sera tangente à la courbe au point* M.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, par un point quelconque t de la droite Tt, menons une ordonnée tP′ au diamètre AB, les triangles semblables TMP, TtP′ donneront $PT : TP' :: PM : P't$; mais $PT = IP - IT = IP - \frac{(AI)^2}{IP} = \frac{(IP)^2 - (AI)^2}{IP}$, $TP' = IP' - IT = IP' - \frac{(AI)^2}{IP} = \frac{IP' \times IP - (AI)^2}{IP}$; donc,

$$\frac{(IP)^2-(AI)^2}{IP} : \frac{IP' \times IP - (AI)^2}{IP} :: PM : P't = \frac{PM\{IP' \times IP-(AI)^2\}}{(IP)^2-(AI)^2},$$

ou $$(P't)^2 = \frac{(PM)^2\{IP' \times IP - (AI)^2\}^2}{\{(IP)^2-(AI)^2\}^2} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Les points M et M′ étant à l'hyperbole, nous aurons $(P'M')^2 : (PM)^2 :: (IP')^2 - (AI)^2 : (IP)^2 - (AI)^2$; d'où $(P'M')^2 = \frac{(PM)^2\{(IP')^2-(AI)^2\}}{(IP)^2-(AI)^2}$.

Retranchons cette dernière équation de l'équation (1), et il nous viendra

$$(P't)^2 - (P'M')^2 = \frac{(PM)^2\{IP' \times IP - (AI)^2\}^2}{\{(IP)^2-(AI)^2\}^2} - \frac{(PM)^2\{(IP')^2-(AI)^2\}}{(IP)^2-(AI)^2}$$

$$= \frac{(PM)^2\left\{\{(IP') \times IP-(AI)^2\}^2 - \{(IP')^2-(AI)^2\}\{(IP)^2-(AI)^2\}\right\}}{\{(IP)^2-(AI)^2\}^2}$$

$$= \frac{(PM)^2\left\{\begin{array}{r}(IP')^2 \times (IP)^2 - 2(AI)^2 \times IP' \times IP + (AI)^4 - (IP')^2 \times (IP)^2 \\ + (IP')^2 \times (AI)^2 + (AI)^2 \times (IP)^2 - (AI)^4\end{array}\right\}}{\{(IP)^2-(AI)^2\}^2}$$

$$= \frac{(PM)^2\{(IP')^2 \times (AI)^2 + (AI)^2 \times (IP)^2 - 2(AI)^2 \times IP' \times IP\}}{\{(IP)^2-(AI)^2\}^2}$$

$$= \frac{(AI)^2 \times (PM)^2\{(IP')^2 + (IP)^2 - 2IP' \times IP\}}{\{(IP)^2-(AI)^2\}^2}, \text{ et enfin}$$

$$(P't)^2 - (P'M')^2 = \frac{(AI)^2 \times (PM)^2 \times (IP'-IP)^2}{\{(IP')^2-(AI)^2\}^2}.$$

Le second membre de cette équation est essentiellement positif, puisque c'est un carré; donc la différence $(P't)^2 - (P'M')^2$ le sera aussi; d'où il suit que $P't > P'M'$, donc le point t est hors de la courbe, donc enfin la droite MT n'a que le point M de commun avec l'hyperbole.

745. THÉORÈME 249. *Réciproquement, si par le point* M *on mène une tangente* TM, *la distance* IT *du centre au point* T *où cette tangente rencontre le diamètre des abscisses, sera égale à* $\frac{(AI)^2}{IP}$.

En effet, nous venons de démontrer que si $IT = \frac{(AI)^2}{IP}$, la droite TM était tangente à la courbe au point M; si donc la tangente menée au point M ne rencontrait pas le diamètre des abscisses au point T, il y aurait deux tangentes différentes au même point M de la courbe, ce qui est impossible; donc la proposition est démontrée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

746. *Corollaire* 1. Il suit de ce que $IT = \frac{(AI)^2}{IP}$, que la distance du centre au point où la tangente rencontre le diamètre des abscisses, est troisième proportionnelle à l'abscisse du point de contact et au demi-diamètre des abscisses, comme dans le cas où l'on rapporte l'hyperbole à ses axes.

747. *Corollaire* 2. La sous-tangente $PT = IP - IT$ (fig. 249), d'où $PT = IP - \frac{(AI)^2}{IP} = \frac{(IP)^2 - (AI)^2}{IP} = \frac{x^2 - a^2}{x}$.

748. THÉORÈME 250. *Par le point de contact* M *d'une tangente* T*t quelconque* (fig. 249), *soit menée une droite* MI *au centre de l'hyperbole; puis, supposons que par l'extrémité* B *du diamètre* AB *des abscisses, on ait mené une parallèle* BM′ *à la droite* MI, *et que par le point* M′, *où la droite* BM′ *rencontre la courbe, on ait mené une droite* M′A *à l'extrémité* A *du diamètre* AB, *la courbe étant rapportée à deux diamètres conjugués* AB, CD *quelconques : je dis que la droite* AM′ *sera parallèle à la tangente* T*t*.

En effet, abaissons les ordonnées MP, M′P′, du point de contact M et du point M′ où les droites BM′, AM′ se rencontrent sur l'hyperbole; nous aurons $(PM)^2 : (P'M')^2 :: BP \times AP : BP' \times AP'$..... (1).

D'ailleurs les triangles semblables IPM, BM′P′ donnent $PM : P'M' :: IP : BP'$..... (2). Divisons par ordre la proportion (1) par la proportion (2), et nous aurons $PM : P'M' :: \frac{BP \times AP}{IP} : AP'$; mais $BP \times AP = (IP)^2 - (AI)^2$; d'où $\frac{BP \times AP}{IP} = \frac{(IP)^2 - (AI)^2}{IP} = PT$ (n°. 747); donc $PM : P'M' :: PT : AP'$; d'où il suit que les deux triangles TMP, AM′P′ sont semblables, puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, et que, par conséquent, les angles *t*TP′, M′AP′ sont égaux entre eux; c'est-à-dire que la droite AM′ est parallèle à la tangente T*t*; ce qu'il fallait démontrer.

749. *Corollaire* 1. Nous avons vu (n°. 736) que la droite D′C′ parallèle à la tangente T*t* (fig. 249) était le diamètre conjugué à celui qui passait par le point de contact M de cette tangente T*t*. Il suit donc de la proposition précédente que, pour avoir la direction D′C′ du diamètre conjugué au diamètre MN, il suffira de mener, par l'extrémité B du diamètre AB, une droite BM′ parallèle au diamètre MN; de joindre les points A et M′ par une droite AM′, et de mener, par le centre de la courbe, une parallèle D′C′ à cette droite AM′, et la droite D′C′ sera la direction demandée.

Quant à la grandeur de ce diamètre, on l'aura en menant les asymptotes de la courbe, la tangente T*t* à l'extrémité du diamètre MN, et la longueur de la partie de cette tangente interceptée par les asymptotes sera la grandeur demandée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

750. *Corollaire* 2. De la proposition du numéro 749, on voit suivre un moyen bien simple de mener une tangente ou une normale à l'hyperbole par un point donné sur la courbe; car, il suffira de mener un diamètre au point donné M (fig. 249), par l'extrémité B du diamètre donné AB, de mener une droite BM′, parallèle au diamètre MI; de joindre les points A et M′ par la droite M′A, et, par le point donné M, de mener une parallèle Tt à cette droite M′A, pour avoir la tangente, ou une perpendiculaire RS à cette même droite M′A, pour avoir la normale.

On conçoit aussi comment, en vertu des propriétés des droites BM′, AM′, que nous appelerons *cordes supplémentaires*, on parviendrait à mener une tangente ou une normale parallèlement ou perpendiculairement à une droite donnée.

On remarquera que les propriétés que nous venons de démontrer sur les cordes supplémentaires BM′, AM′ (fig. 249) sont vraies pour tous les systèmes de diamètres conjugués, de l'hyperbole, et que, par conséquent, elles auront lieu pour les axes.

751. *Corollaire* 3. Puisque deux cordes supplémentaires sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués, il s'ensuit que l'angle de deux cordes supplémentaires est égal à celui des deux diamètres conjugués qui leur répondent.

752. *Corollaire* 4. Si donc il s'agissait de mener deux diamètres conjugués à une hyperbole décrite et rapportée à un diamètre quelconque, les deux diamètres demandés devant faire entre eux un angle donné, il est clair qu'il suffirait de décrire, sur le diamètre AB donné (fig. 249), un segment de cercle capable de l'angle donné; de mener, par le point M′, où le cercle rencontrerait l'hyperbole, des droites M′A, M′B aux extrémités du diamètre donné AB, qui seraient les cordes supplémentaires auxquelles les diamètres demandés seraient respectivement parallèles.

753. PROBLÈME 145. *Supposons que les deux branches d'une hyperbole soient données, et qu'il s'agisse d'en trouver le centre et les axes.*

On menera deux droites *ab*, *cd*, quelconques, parallèles entre elles (fig. 250), et par le milieu de ces droites, on menera la droite *ef*, qui sera un diamètre (n°. 736): si donc on divise la partie *gh* de cette droite *ef* interceptée par la courbe, en deux également au point I, ce point I sera le centre.

Si maintenant du point I, comme centre, et d'un rayon arbitraire, on décrit une circonférence de cercle, et que l'on joigne les points F, E et G, où cette circonférence coupe l'hyperbole, par les droites GE, GF, ces droites seront respectivement parallèles aux axes de la courbe, puisque les points

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

F, E et G seront à égales distances du centre (n°. 675); si donc par le centre I on mène les droites AB, DC respectivement parallèles aux droites EG, GF, ces droites AB, CD seront les axes demandés.

Pour avoir la grandeur de l'axe DC, on menera une tangente à la courbe en un point quelconque M, au moyen des cordes supplémentaires, et comme (n°. 700) nous avons trouvé $It = \frac{b^2}{y}$, on verra que $b^2 = y \times It$, c'est-à-dire que le demi-second axe est moyen proportionnel entre It et l'ordonnée PM du point de contact M de la tangente.

754. *Corollaire.* Si l'on n'avait qu'une branche *dho* de l'hyperbole, et qu'on voulût néanmoins en avoir les axes, on menerait d'abord deux droites quelconques *cd*, *ik*, parallèles entre elles, que l'on diviserait également en deux par une droite *pf*; et ensuite deux autres droites *ml*, *no*, aussi parallèles entre elles, et que l'on diviserait également en deux par une droite *qr*: les deux droites *pf*, *qr* se rencontreraient en un point I qui serait le centre de la courbe; car tous les diamètres de cette courbe se coupent au centre, et il est évident que les deux droites *pf*, *qr* sont des diamètres.

Pour avoir les axes, par le point I, comme centre, et d'un rayon arbitraire on décrira un arc de cercle qui coupera l'hyperbole en deux points G et F, par lesquels on menera une droite GF, qui sera parallèle au second axe CD: on aura donc le second axe en menant par le point I une parallèle DC à la droite GF. Si par le point I on élève ensuite une perpendiculaire à la même droite GF, on aura le premier axe AB.

Quant à la grandeur du second axe, on l'obtiendra comme ci-dessus.

755. *Remarque.* Par un raisonnement analogue à celui que nous avons employé pour l'ellipse, aux n°s. 619 et 622, on démontrerait 1°. que le rectangle des axes est équivalent au parallélogramme de deux diamètres conjugués quelconques; 2°. que la différence des carrés des demi-axes est égale à celle des carrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques.

34me. LEÇON.

Suite des propriétés de l'Hyperbole.

756. PROBLÈME 146. *Proposons-nous maintenant de trouver la longueur d'une droite dM menée par un point quelconque d, donné hors de l'hyperbole, en supposant cette courbe rapportée à ses axes* (fig. 251).

Si par le point M où la droite *d*M rencontre l'hyperbole, on mène une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

parallèle MK au premier axe AB, et si l'on abaisse l'ordonnée dP′ du point d donné, on aura le triangle rectangle dKM, qui donnera

$$(\mathrm{M}d)^2 = (\mathrm{KM})^2 + (\mathrm{K}d)^2.$$

Appelons x, y les coordonnées IP, PM du point M, et x', y' celles IP′, P′d du point d : comme $\mathrm{KM} = \mathrm{P'P} = \mathrm{IP'} + \mathrm{IP}$, et que $\mathrm{K}d = \mathrm{P'}d - \mathrm{P'K} = \mathrm{P'}d - \mathrm{PM}$, nous aurons $\mathrm{KM} = x + x'$ et $\mathrm{K}d = y' - y = -(y - y')$; donc $(d\mathrm{M})^2$ ou $\mathrm{Z}^2 = (x+x')^2 + (y-y')^2$..... (1)

Si maintenant nous représentons par A la tangente trigonométrique de l'angle dMK, en résolvant le triangle dMK, nous aurons $d\mathrm{K} = \mathrm{A} \times \mathrm{MK}$ ou $y - y' = -\mathrm{A}(x + x')$..... (2). Substituons cette valeur de $y - y'$ dans l'équation (1), et il nous viendra $\mathrm{Z}^2 = (x+x')^2 + \mathrm{A}^2(x+x')^2 = (1+\mathrm{A})^2(x+x')^2$; d'où $x + x' = \frac{\mathrm{Z}}{\sqrt{1+\mathrm{A}^2}}$..... (3). Substituons cette valeur de $x + x'$ dans l'équation (2), et nous aurons $y - y' = -\frac{\mathrm{AZ}}{\sqrt{1+\mathrm{A}^2}}$..... (4). Des deux expressions (3) et (4), nous tirerons $x = \frac{\mathrm{Z} - x'\sqrt{1+\mathrm{A}^2}}{\sqrt{1+\mathrm{A}^2}}$ et $y = -\frac{\mathrm{AZ} - y'\sqrt{1+\mathrm{A}^2}}{\sqrt{1+\mathrm{A}^2}}$.

Les coordonnées x, y étant celles IP, PM du point M où la droite dM rencontre l'hyperbole, il faut qu'elles satisfassent à l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ de cette courbe; si donc nous substituons les valeurs de x et y dans cette équation mise sous la forme $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$, nous aurons

$$\frac{a^2\{\mathrm{AZ} - y'\sqrt{1+\mathrm{A}^2}\}^2}{1+\mathrm{A}^2} - \frac{b^2\{\mathrm{Z} - x'\sqrt{1+\mathrm{A}^2}\}^2}{1+\mathrm{A}^2} + a^2b^2 = 0,$$

ou en développant et faisant disparaître le dénominateur $1+\mathrm{A}^2$,

$$\left.\begin{aligned} &a^2\mathrm{A}^2\mathrm{Z}^2 - 2a^2\mathrm{A}y'\mathrm{Z}\sqrt{1+\mathrm{A}^2} + a^2y'^2(1+\mathrm{A}^2) - \\ &b^2\mathrm{Z}^2 + 2b^2x'\mathrm{Z}\sqrt{1+\mathrm{A}^2} - b^2x'^2(1+\mathrm{A}^2) + a^2b^2(1+\mathrm{A}^2) \end{aligned}\right\} = 0,$$

et en rassemblant ce qui multiplie les mêmes puissances de Z,

$$(a^2\mathrm{A}^2 - b^2)\mathrm{Z}^2 - \{(2a^2\mathrm{A}y' - 2b^2x')\sqrt{1+\mathrm{A}^2}\}\mathrm{Z} + (a^2y'^2 - b^2x'^2 + a^2b^2)(1+\mathrm{A}^2) = 0;$$

et enfin, divisant par $(a^2\mathrm{A}^2 - b^2)$,

$$(5)..... \mathrm{Z}^2 - \frac{(2a^2\mathrm{A}y' - 2b^2x')\sqrt{1+\mathrm{A}^2}}{a^2\mathrm{A}^2 - b^2}\mathrm{Z} + \frac{(a^2y'^2 - b^2x'^2 + a^2b^2)(1+\mathrm{A}^2)}{a^2\mathrm{A}^2 - b^2} = 0.$$

Cette équation étant du second degré, donnera deux valeurs pour Z, qui seront les longueurs dM et dm. Or, le terme tout connu de cette équation est égal au produit des deux racines; donc

$$d\mathrm{M} \times dm = \frac{(a^2y'^2 - b^2x'^2 + a^2b^2)(1+\mathrm{A}^2)}{a^2\mathrm{A}^2 - b^2}..... (6)$$

757. *Corollaire* 1. Il est évident que pour une autre droite dm' ou dn qui passerait par le même point d, on arriverait à une équation tout-à-fait semblable à l'équation (5), car tout resterait le même, excepté A qui exprime la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

direction de la droite; on aurait donc $d\mathrm{M}' \times dm' = \frac{(a^2y'^2 - b^2x'^2 + a^2b^2)(1+\mathrm{A}'^2)}{a^2\mathrm{A}'^2 - b^2}$, ou $d\mathrm{N} \times dn = \frac{(a^2y''^2 - b^2x''^2 + a^2b^2)(1+\mathrm{A}''^2)}{a^2\mathrm{A}''^2 - b^2}$.

Si nous comparons l'équation (6) à chacune de ces dernières, nous aurons $d\mathrm{M} \times dm : d\mathrm{M}' \times dm' :: \frac{1+\mathrm{A}^2}{a^2\mathrm{A}^2-b^2} : \frac{1+\mathrm{A}'^2}{a^2\mathrm{A}'^2-b^2}$, et $d\mathrm{M} \times dm : d\mathrm{N} \times dn :: \frac{1+\mathrm{A}^2}{a^2\mathrm{A}^2-b^2} : \frac{1+\mathrm{A}''^2}{a^2\mathrm{A}''^2-b^2}$, proportions qui sont indépendantes des coordonnées du point d où se coupent les sécantes dm, dm', dn; mais elles dépendent des angles que forment ces droites avec le premier axe AB de l'hyperbole : ces proportions subsisteront donc pour toutes autres sécantes $d'm''$, dm' ou pour toutes cordes $\mathrm{M}m$, $\mathrm{M}^{\mathrm{IV}}m^{\mathrm{IV}}$ ou $\mathrm{M}''m''$, $\mathrm{M}'''m'''$ respectivement parallèles aux premières sécantes dm, dm', dn; ainsi on aura $d\mathrm{M} \times dm : d\mathrm{M}' \times dm' :: d'm'' \times d'\mathrm{M}'' : d'm' \times d'\mathrm{M}'$, ou $d\mathrm{M} \times dm : d\mathrm{M}' \times dm' :: \mathrm{M}b \times bm : \mathrm{M}^{\mathrm{IV}}b \times bm^{\mathrm{IV}}$, ou encore $d\mathrm{M} \times dm : d\mathrm{N} \times nd :: \mathrm{M}''a \times am'' : \mathrm{M}'''a \times am'''$.

Ces proportions étant indépendantes, et du point où les droites en question se coupent, et de l'angle qu'elles forment avec le premier axe de l'hyperbole, il en résulte que, si deux sécantes ou deux cordes qui se coupent sont parallèles à deux autres sécantes ou à deux autres cordes, les produits des segmens des premières seront entre eux comme les produits des segmens des secondes.

758. THÉORÈME 251. *Soit une hyperbole* $d\mathrm{A}a$, $c\mathrm{B}b$ (fig. 252) *rapportée à deux diamètres conjugués* AB, CD *quelconques; par le point* a *quelconque pris sur l'une des branches de la courbe, soit menée une parallèle* ab *au diamètre* AB, *et soit de plus une double ordonnée* fh; *je dis qu'on aura*

$$he \times ef : ae \times ab :: b^2 : a^2.$$

En effet, pour le point f on a $(\mathrm{P}''f)^2 = \frac{b^2}{a^2}\{(\mathrm{IP}'')^2 - a^2\}$, et pour le point a, $(\mathrm{P}'a)^2 = \frac{b^2}{a^2}\{(\mathrm{IP}')^2 - a^2\}$; d'où $(\mathrm{P}''f)^2 - (\mathrm{P}'a)^2 = \frac{b^2}{a^2}\{(\mathrm{IP}'')^2 - (\mathrm{IP}')^2\}$, ou $(\mathrm{P}''f + \mathrm{P}'a)(\mathrm{P}''f - \mathrm{P}'a) = \frac{b^2}{a^2}(\mathrm{IP}'' + \mathrm{IP}')(\mathrm{IP}'' - \mathrm{IP}')$; mais $\mathrm{P}''f + \mathrm{P}'a = \mathrm{P}''h + \mathrm{P}''e = he$, $\mathrm{P}''f - \mathrm{P}'a = \mathrm{P}''f - \mathrm{P}''e = ef$, $\mathrm{IP}'' - \mathrm{IP}' = \mathrm{P}'\mathrm{P}'' = ae$, et $\mathrm{IP}'' + \mathrm{IP}' = \mathrm{IP}'' + \mathrm{IP} = \mathrm{P}''\mathrm{P} = eb$; donc $he \times ef = \frac{b^2}{a^2} \times ae \times ab$, d'où il suit que $he \times ef : ae \times cb :: b^2 : a^2$; ce qu'il fallait démontrer.

759. PROBLÈME 147. *Un parallélogramme* $abcd$ *étant donné* (fig. 252), *on demande de décrire les deux branches d'une hyperbole, de manière que chaque branche passe par deux sommets du parallélogramme, ainsi qu'on le voit dans la figure* 252, *en supposant que le rapport des deux diamètres conjugués parallèles aux côtés du parallélogramme soit donné.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Supposons que ces deux diamètres soient dans le rapport de $m : n$.

Par les milieux des côtés opposés du parallélogramme *abcd*, menons les droites P'P, DC, qui seront les directions des diamètres conjugués en question; puis, portons $IE = m$, par le point E, menons une parallèle EF au diamètre DC, et faisons EF et $EF' = n$; les droites qui passeront par les points I, F et I, F' seront les asymptotes de l'hyperbole demandée.

En effet, si nous supposons le problême résolu, en menant par le sommet B, la tangente BG, on aura les triangles semblables IBG, IEF qui donneront IB : BG :: IE : EF; mais IB est le demi-premier diamètre, et BG (n°. 740) est le demi-second diamètre; de plus, $IE = m$, et $EF = n$; donc $a : b :: m : n$: donc enfin les droites IF, IF' sont les asymptotes de l'hyperbole demandée.

Maintenant, il est facile de voir que le problême proposé se réduit à celui du numéro 724.

760. PROBLÊME 148. *Supposons qu'il s'agisse, comme ci-dessus, de décrire les deux branches d'une hyperbole qui passent par les sommets d'un parallélogramme donné abcd* (fig. 252), *en supposant de plus que l'une aAd des deux branches soit assujétie à passer par un point donné f.*

Après avoir mené par les milieux des côtés opposés du parallélogramme *abcd* les droites AB, CD, qui seront les directions de deux diamètres conjugués de l'hyperbole demandée, on menera par le point donné *f* une parallèle *fh* au diamètre CD, et on fera $P''h = P''f$, et le point *h* sera évidemment un point de la courbe demandée; et on aura (n°. 758) $he \times ef : ae \times ab :: b^2 : a^2$, ou en prenant des moyennes proportionnelles eN, aN' entre *he*, *ef*, et entre *ae*, *ab*, $(eN)^2 : (aN')^2 :: b^2 : a^2$, ou $eN : aN' :: b : a$; nous obtenons donc par là le rapport des diamètres *b* et *a* qui est eN : aN'; par conséquent le problême est ramené à celui du numéro précédent.

Ce problême renferme plusieurs circonstances que le lecteur fera bien de rechercher.

761. PROBLÊME 149. *Supposons encore qu'il s'agisse, comme ci-dessus, de décrire les deux branches d'une hyperbole qui passent par les sommets a, b, c et d d'un parallélogramme abcd* (fig. 252), *mais que dans ce cas on donne le diamètre* AB *qui doit rencontrer la courbe.*

Si nous supposons le problême résolu, les asymptotes IK, IK' rencontreront le côté *ab* du parallélogramme *abcd* en deux points K, K' qui nous donneront (n°. 721) $(IB)^2 = aK \times Kb$, et $(IB)^2 = aK' \times K'b$; si donc, sur le côté *ab* comme diamètre, on décrit une demi-circonférence de cercle *a*MM'*b*, qu'ensuite on mène une parallèle MM' à la droite *ab*, à une distance KM

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

égale à la moitié IB du diamètre AB, et que par les points M, M′ où cette droite MM′ rencontre la demi-circonférence AMM′*b*, on abaisse les perpendiculaires MK, M′K′, les points K et K′ seront les lieux où les asymptotes IK, IK′ rencontreront le côté *ab* du parallélogramme *abcd* : on menera donc ces asymptotes, et on terminera le problême comme il a été enseigné au numéro 724.

762. PROBLÊME 150. *Proposons-nous maintenant de faire passer une hyperbole par cinq points donnés a, b, c, d et h* (fig. 253 et 254).

On supposera le problême résolu, on joindra quatre *a*, *b*, *c* et *d* des points donnés par deux droites *ab*, *dc* qui se couperont en un certain point *g*, et on menera par le cinquième point *h*, les droites *hl*, *hk* respectivement parallèles aux droites *ab*, *dc*, qui rencontreront la courbe l'une en un point *e* et l'autre en un point *l*; de sorte qu'en vertu du numéro 757 nous aurons

$$(1)\ldots\ldots \begin{cases} ag\times gb : dg\times gc :: am\times mb : hm\times ml\ldots\ldots \text{ (fig. 253)} \\ dg\times gc : ag\times gb :: dm\times mc : hm\times ml\ldots\ldots \text{ (fig. 254)} \end{cases}$$

$$(2)\ldots \text{ et } \begin{cases} dg\times gc : ag\times gb :: dk\times kc : kh\times ke\ldots\ldots \text{ (fig. 253)} \\ ag\times gb : gd\times gc :: ak\times bk : kh\times ke\ldots\ldots \text{ (fig. 254)} \end{cases}$$

or, il est évident que, réciproquement, si les proportions (1) et (2) ont lieu, les points *e* et *l* seront à l'hyperbole dans les deux figures; si donc l'on prend des moyennes proportionnelles entre les segmens *ag*, *gb*; *dg*, *gc*; *am*, *mb* (fig. 253); *dm*, *mc* (fig. 254); *dk*, *kc* (fig. 253); et *ak*, *bk* (fig. 254), en appelant respectivement ces moyennes proportionnelles G*b*, C*c*, *m*D et *b*H, on aura

$$(Gb)^2 : (Cc)^2 :: (mD)^2 : hm\times ml \text{ ou } x^2\ldots \text{ (fig. 253)}$$
$$(Cc)^2 : (Gb)^2 :: (mD)^2 : hm\times ml \text{ ou } x'^2\ldots \text{ (fig. 254)}$$
$$\text{et } (Cc)^2 : (Gb)^2 :: (bH)^2 : kh\times ke \text{ ou } y^2\ldots \text{ (fig. 253)}$$
$$(Gb)^2 : (Cc)^2 :: (bH)^2 : kh\times ke \text{ ou } y'^2\ldots \text{ (fig. 254)},$$

ou bien $Gb : cC :: mD : x\ldots$ (fig. 253) $Cc : Gb :: mD : x'\ldots$ (fig. 254);

et $Cc : Gb :: bH : y\ldots$ (fig. 253) $Gb : Cc :: bH : y'\ldots$ (fig. 254).

Ainsi, en construisant ces quatre proportions on aura les quantités x, x', y et y', et comme nous avons fait $x^2 = hm\times ml$, $x'^2 = hm\times ml$, $y^2 = kh\times ke$, et $y'^2 = kh\times ke$, et que *hm*, *hk*, pour les deux figures, sont des quantités connues, il en résultera $ml = \frac{x^2}{hm}$, $ml = \frac{x'^2}{hm}$, $ke = \frac{y^2}{kh}$ et $ke = \frac{y'^2}{kh}$, ou

$$hm : x :: x : ml\ldots\ldots \text{ (fig. 253)} \quad hm : x' :: x' : ml\ldots\ldots \text{ (fig. 254)}$$
$$kh : y :: y : ke\ldots\ldots \text{ (fig. 253)} \quad kh : y' :: y' : ke\ldots\ldots \text{ (fig. 254)};$$

au moyen de ces quatre dernières proportions on obtiendra donc les distances *ml*, *ke* pour chaque figure, et par conséquent les points *l* et *e* de la courbe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si maintenant (fig. 254), on divise en deux parties égales les doubles ordonnées *dc* et *he* par une droite PR, cette droite PR sera un diamètre, puisque les doubles ordonnées *dc*, *he* sont parallèles entre elles; si de plus on divise également en deux les droites *ab*, *hl*, qui sont aussi parallèles entre elles, par la droite *no*, cette droite *no* sera un second diamètre, d'où il suit que le point I où les deux diamètres PR, *no* se coupent, est le centre de l'hyperbole demandée.

Actuellement, si l'on mène par les points *d* et *c* les droites *dd'*, *cc'* parallèlement au diamètre AB, et que par un point P', pris sur ce diamètre AB de manière que IP' = IP, on mène une droite *d'c'* parallèle à la double ordonnée *dc*, il est clair que le problême en question sera réduit à celui du numéro 760, puisque les quatre sommets *d*, *c*, *c'* et *d'* du parallélogramme *dcc'd'*, doivent se trouver sur la courbe, et que l'une *dec* des deux branches doit passer par un point donné *e*.

Si l'on fait la même construction dans la figure 253, on arrivera aux mêmes conséquences; ainsi l'on peut regarder le problême comme résolu.

763. PROBLÊME 151. *On demande l'expression algébrique de la longueur de la perpendiculaire* IE (fig. 255) *abaissée du centre de l'hyperbole sur une tangente* NE *quelconque de cette courbe rapportée à ses axes.*

Pour cela, on observera que les triangles ITE, TMP sont semblables et donnent TM : PM :: IT : IE... (1). Mais (n°. 702)

$\mathrm{TM} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax}\sqrt{b^2x^2+a^2(x^2-a^2)}$; $\mathrm{PM} = y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, et (n°. 698) $\mathrm{IT} = \frac{a^2}{x}$; en substituant donc dans la proportion (1), il viendra $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax}\sqrt{b^2x^2+a^2(x^2-a^2)} : \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} :: \frac{a^2}{x} : \mathrm{IE}$, ce qui se réduit à $\sqrt{b^2x^2+a^2(x^2-a^2)} : b :: a^2 : \mathrm{IE} = \frac{a^2b}{\sqrt{b^2x^2+a^2(x^2-a^2)}}$.

764. PROBLÊME 152. *Cherchons actuellement la relation des coordonnées de l'hyperbole, en rapportant cette courbe à deux diamètres conjugués quelconques, l'origine étant à l'extrémité du diamètre des abscisses.*

Dans le cas où l'origine est au centre, on a $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$; supposons que l'on veuille la transporter à l'extrémité B du diamètre AB (fig. 252); si nous considérons un point *b* quelconque, l'ordonnée P*b* ne changera pas, mais l'abscisse sera BP au lieu de IP; ainsi, nous aurons IP = PB + IB, ou $x = x' + a$. Si nous substituons dans l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, nous aurons donc $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\{(x'+a)^2 - a^2\} = \frac{b^2}{a^2}(x'^2+2ax')$ pour la relation demandée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

765. PROBLÈME 153. *Proposons-nous, maintenant, de trouver l'expression algébrique du rayon du cercle osculateur, pour un point quelconque d'osculation.*

Soit M (fig. 255) le point quelconque d'osculation ; par ce point M, on menera la tangente NT et le diamètre IM; on menera le diamètre IR, conjugué à IM, sur lequel on abaissera la normale MR par le point M d'osculation; on menera ensuite une double ordonnée mn, rapportée aux diamètres conjugués IM, IR, et par le point Q où cette double ordonnée coupera le diamètre IM, on abaissera la perpendiculaire QN sur la tangente NT. D'après cette construction, les triangles rectangles IRM, MNQ seront semblables et donneront IM : MR :: MQ : NQ.... (1). L'hyperbole étant rapportée aux droites MN, MQ, on aura (n°. 764) $(Qm)^2=\frac{(Mt)^2}{(IM)^2}\{(MQ)^2+2IM\times MQ\}$; mais le cercle qui passera par les trois points nNm, nous donnera $(Qm)^2=2r\times NQ-(NQ)^2$, donc

$$(2)\ldots\ldots 2r\times NQ-(NQ)^2=\frac{(tM)^2}{(IM)^2}\{(MQ)^2+2IM\times MQ\}$$

Prenons la valeur de NQ dans la proportion (1), que nous trouverons $=\frac{MR\times MQ}{IM}$, et substituons-la dans l'équation (2), il nous viendra $2r\,\frac{MR\times MQ}{IM}-\frac{(MR)^2\times(MQ)^2}{(IM)^2}=\frac{(tM)^2}{(IM)^2}\{(MQ)^2+2IM\times MQ\}$. Multiplions par $(IM)^2$, et divisons par MQ les deux membres de cette équation, et nous aurons (3).... $2r\times MR\times IM-(MR)^2\times MQ=(tM)^2\{MQ+2IM\}$. Maintenant, observons que pour que le cercle qui passe par les trois points n, N et m devienne le cercle osculateur, il faut que les deux points n et m viennent coïncider avec le point N, ainsi que le point Q, et qu'enfin tous ces points viennent coïncider avec le point M; d'où il suit que dans l'équation (3) il faut faire QM = o, ce qui donnera $2r\times MR\times IM=(tM)^2\times 2IM$, ou $r\times MR=(tM)^2$, d'où $r=\frac{(tM)^2}{MR}$.

Mais MR est égal à la perpendiculaire IE abaissée du centre de la courbe sur la tangente menée au point d'osculation ; or, en rapportant la courbe à ses axes, nous avons trouvé (n°. 763) $IE=\frac{a^2b}{\sqrt{b^2x^2+a^2(x^2-a^2)}}$; si donc nous mettons cette expression à la place de MR dans la valeur du rayon du cercle osculateur, il viendra $r=\frac{(tM)^2\sqrt{b^2x^2+a^2(x^2-a^2)}}{a^2b}$: telle est l'expression du rayon du cercle osculateur, le point d'osculation étant rapporté aux axes de la courbe.

766. *Corollaire.* Supposons que le point d'osculation soit l'un des som-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mets de l'hyperbole ; dans ce cas tM deviendra BF $= b$, et $x = a$; donc $r = \frac{b^2\sqrt{a^2b^2}}{a^2b} = \frac{ab^3}{a^2b} = \frac{b^2}{a}$. Mais le paramètre (n°. 710) $p = \frac{2b^2}{a}$; donc *le rayon de courbure du sommet de l'hyperbole est égal à la moitié du paramètre, et par conséquent à l'ordonnée dont le pied est le foyer de la courbe.*

767. *Remarque.* Il est évident que le centre du cercle osculateur est sur la normale menée par le point d'osculation ; et, puisque le rayon de ce cercle est une fonction de l'abscisse du point d'osculation, le rayon de courbure de l'hyperbole varie à mesure qu'on passe d'un point d'osculation à un autre.

Ce que nous avons dit des développées de la parabole et de l'ellipse, nous dispense de parler de celle de l'hyperbole, dont la moitié est *cab.*

35^me^. LEÇON.

Rapprochement des Equations de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole ; quelques propriétés des Courbes semblables, et la superficie de la parabole et de l'ellipse.

768. *Remarque.* Nous avons trouvé qu'en rapportant les trois courbes précédentes à deux diamètres conjugués quelconques, l'origine étant au sommet du diamètre des abscisses, l'équation de la parabole était (n°. 491) $y^2 = px$; celle de l'ellipse (n°. 648) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ et celle de l'hyperbole (n°. 764) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + y^2)$. Mais nous avons vu (n°. 594) que le paramètre de l'ellipse était $p = \frac{2b^2}{a}$, et que (n°. 710) celui de l'hyperbole était de même $p = \frac{2b^2}{a}$, d'où il suit que $\frac{p}{2a} = \frac{b^2}{a^2}$; si donc on substitue dans les équations de l'ellipse et de l'hyperbole, on aura $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2)$; et $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax + x^2)$, et en réduisant dans les seconds membres, il viendra $y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2$, et $y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2$, et par conséquent l'équation de la parabole est $y^2 = px$, celle de l'ellipse, $y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2$, et celle de l'hyperbole $y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2$.

769. *Corollaire.* Il suit de là que, si les trois courbes avaient le même axe et le même sommet, pour une même abscisse, l'ordonnée de la parabole serait plus grande que celle de l'ellipse, et plus petite que celle de l'hyper-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

bole. C'est sur ces différences caractéristiques, qu'Apollonius s'est fondé pour donner à ces trois courbes les noms qu'elles portent.

770. *Corollaire* 2. Si nous représentons par q la fraction $\frac{p}{2a}$, les trois équations ci-dessus seront renfermées dans celle-ci $y^2 = px + qx^2$, en faisant $q = 0$ pour la parabole, q positif pour l'hyperbole, et négatif pour l'ellipse. La même équation renfermera aussi celle du cercle, quand elle sera rapportée à des axes rectangulaires; car l'ellipse dont les deux axes sont égaux devient un cercle, puisque son équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ devient $y^2 = 2ax - x^2$, qui est celle du cercle, l'origine étant à l'extrémité du diamètre. Mais dans ce cas, le paramètre $p = \frac{2a^2}{a} = 2a =$ le diamètre du cercle; d'où il suit que pour le cercle, l'équation $y^2 = px + qx^2$ devient $y^2 = 2ax - x^2$; c'est-à-dire que $p = 2a$, et $q = -1$. Je dis que $q = -1$, parce que $q = \frac{p}{2a}$, ce qui se réduit à $q = \frac{2a}{2a} = 1$, et que pour l'ellipse q est négatif.

771. *Corollaire* 3. On démontre, dans la géométrie analytique, que toute équation du second degré à deux indéterminées, qui n'est pas absurde, peut se mettre sous la forme $y^2 = px + qx^2$, sans changer de nature, et que, par conséquent, *il n'y a que le cercle, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole dont les équations sont du second degré.*

772. THÉORÈME 252. *Supposons que deux paraboles* EAF, *eaf* (fig. 256) *aient deux diamètres semblables* (n°. 430) *situés sur la même droite* AG; *que les origines* A, *a de ces diamètres semblables soient à une distance* A*a quelconque l'une de l'autre; que les paramètres relatifs aux mêmes diamètres soient quelconques l'un par rapport à l'autre, celui de la parabole intérieure étant plus petit que l'autre; si l'on prend les abscisses* AP, *ap de manière qu'elles soient entre elles comme les paramètres, je dis que la droite* MG, *menée par les extrémités* M, *m des ordonnées correspondantes* MP, *mp, coupera le diamètre* AG *en un point* G *tel, qu'on aura* PG : *p*G :: PA : *pa.*

En effet, à cause des parallèles MP, *mp*, on aura PG : *p*G :: PM : *pm*, ou PG : *p*G :: $y : y'$... (1). Mais les équations $y^2 = px$, $y'^2 = p'x'$ donnent $y = \sqrt{px}$ et $y' = \sqrt{p'x'}$; si donc on substitue dans l'équation (1), il viendra PG : *p*G :: $\sqrt{px} : \sqrt{p'x'}$..(2): or, par hypothèse, on a $x : x' :: p : p' = \frac{px'}{x}$. Qu'on substitue cette valeur de p' dans le dernier terme de la proportion (2), et on aura PG : *p*G :: $\sqrt{px} : \sqrt{\frac{px'^2}{x}}$, et en multipliant les deux der-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

niers termes par $\sqrt{px}$, $PG : pG :: px : px'$, ou $PG : pG :: x : x' :: PA : pa$; ce qu'il fallait démontrer.

773. *Corollaire* 1. La proportion $PG : pG :: PA : pa$ donne $PG+PA : pG+pa :: PA : pa$, ou $AG : aG :: PA : pa :: p : p'$.

774. *Corollaire* 2. Si l'on fait attention que $aG = AG - Aa$, et qu'on substitue dans la dernière proportion, on aura $AG : AG - Aa :: p : p'$; d'où $p' \times AG = p \times AG - p \times Aa$, ce qui donnera $AG = \frac{p \times Aa}{p - p'}$; d'où l'on voit que la distance AG reste la même, quelles que soient les abscisses AP, ap, pourvu qu'on ait $AP : ap :: p : p'$.

775. THÉORÈME 253. *Si l'on prend un point* G (fig. 256) *sur le diamètre* AG, *de manière qu'on ait* $AG : aG :: p : p'$, *et que par un point* M *quelconque de la parabole* EAF *on mène la droite* MG *à ce point* G, *les abscisses* AP, ap *des points* M, m *où la droite* MG *rencontre les paraboles, seront entre elles dans le rapport des paramètres.*

En effet, si cela n'était pas vrai, et qu'au lieu de la proportion $p : p' :: AP : ap$, on avait $p : p' :: AP : ap'$; en vertu du n°. 772 la droite qui passerait par les points M et m' couperait le diamètre en un point G' tel qu'on aurait $PG' : pG' :: PA : pa$; d'où il s'ensuivrait (n°. 773) que $AG' : aG' :: PA : pa :: p : p'$; mais par hypothèse $AG : aG :: p : p'$; donc $AG' : aG' :: AG : aG$, d'où $A'G : AG' - Aa :: AG : AG - Aa$, vu que $aG' = AG' - Aa$, et $aG = AG - Aa$; donc $AG \times (AG' - Aa) = AG' \times (AG - Aa)$, ou $AG \times AG' - AG \times Aa = AG \times AG' - AG' \times Aa$, ce qui se réduit à $AG \times Aa = AG' \times Aa$ ou $AG = AG'$; donc, la droite qui passerait par les extrémités des ordonnées PM, pm', non-seulement aurait le point M commun avec celle qui passerait par les extrémités des ordonnées PM, pm, mais encore le point G; donc le point m' coïnciderait avec le point m; donc enfin $AP : ap :: p : p'$.

776. *Corollaire* 1. Si le point G est tel que $AG : aG :: p : p'$; que par un point M quelconque de la parabole EAF, on mène une droite MG à ce point G, et que par les points M, m on abaisse les ordonnées MP, mp, on aura (n°. 773) $AG : aG :: AP : ap$, et (n°. 772) $PG : pG :: AP : ap$; d'où il suit que $AG : aG :: PG : pG$; mais à cause des parallèles PM, pm, $PG : pG :: MG : mG$; donc $MG : mG :: AG : aG$.

777. *Corollaire* 2. Si donc par le point G, déterminé comme ci-dessus, on mène deux droites quelconques GM, GH, on aura $MG : mG :: AG : aG$, et $GH : Gh :: AG : aG$; donc $MG : mG :: GH : Gh$; d'où il suit que *si l'on joint les points* M *et* H, m *et* h *par les droites* MH, mh, *ces droites seront parallèles.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

778. *Corollaire* 3. Il suit de là que si l'on inscrit une portion de polygone CIHMB dans la parabole EAF; que par les sommets C, I, H, M et B on mène des droites au point G, déterminé comme précédemment, et que l'on joigne par des droites les points *c*, *i*, *h*, *m* et *b* où toutes les droites GC, GI, etc. rencontrent la seconde parabole *eaf*, on aura la portion de polygone *cihmb* qui sera semblable à la première CIHMB; car, d'après le corollaire précédent, tous les côtés homologues de ces portions de polygones seront parallèles, ce qui donnera les angles homologues égaux; mais de plus on a GC : G*c* :: GI : G*i* :: GH : G*h* :: GM : G*m* :: GB : G*b*; donc CI : *ci* :: IH : *ih* :: HM : *hm* :: MB : *mb*; donc ces deux portions de polygone sont semblables.

779. *Corollaire* 4. Il suit de là que deux paraboles sont deux courbes nécessairement semblables, quels que soient leurs paramètres, puisqu'on peut toujours leur inscrire des portions de polygone qui soient semblables (n°. 430).

780. *Corollaire* 5. Il n'est pas besoin de démontrer que si deux portions de polygone sont semblables et que l'une soit inscrite dans une parabole, l'autre sera de même inscrite dans une autre parabole, ou du moins, on pourra toujours décrire une parabole qui passe par les sommets de cette seconde portion de polygone.

781. *Corollaire* 6. Il est clair, d'après tout ce qui précède, que, si par le point G, déterminé comme ci-dessus, on mène deux droites quelconque GB, GC, les segmens de parabole CABG, *cab*G seront semblables; ainsi la droite EF, qui passe par le point G, donne les segmens semblables EAF, *eaf*. Il est encore évident que si par deux points quelconques B, C de la parabole CAB on mène deux droites GB, GC au point G, et qu'on mène les droites BC, *bc*, les segmens des paraboles CABC, *cabc* seront semblables, et on aura AK : *ak* :: *p* : *p'*.

782. THÉORÈME 254. *Supposons que deux ellipses* ACBD, *acbd* (fig. 257), *ou deux hyperboles* DAH, *dah* (fig. 258) *soient rapportées à deux diamètres conjugués semblables* (n°. 430); *que les diamètres des abscisses soient sur une même droite* AB (*les origines* A, *a étant à une distance* A*a quelconque l'une de l'autre*), *et que les diamètres auxquels on rapporte ces courbes soient proportionnels : si l'on prend les abscisses* AP, *ap* (fig. 257 et 258) *de manière qu'elles soient entre elles comme les diamètres situés sur la droite* AB; *je dis que la droite* FE, *menée par les extrémités* F, *f des ordonnées* PF, *pf correspondantes aux abscisses* AP, *ap*, *rencontrera la droite* AB, *sur laquelle sont les diamètres des abscisses, en un point* E *tel, qu'on aura* PE : *p*E :: AP : *ap*.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, à cause des parallèles PF, pf, on aura PE : pE :: PF : pf ou PE : pE :: y : y'..... (1). Mais les équations $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax \mp x^2)$, $y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(2a'x' \mp x'^2)$ donnent $y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax \mp x^2}$, $y' = \frac{b'}{a'}\sqrt{2a'x' \mp x'^2}$; donc PE : pE :: $\frac{b}{a}\sqrt{2ax \mp x^2}$: $\frac{b'}{a'}\sqrt{2a'x' \mp x'^2}$. Or, par hypothèse, $a : a' :: b : b'$, d'où $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$; par conséquent, PE : pE :: $\sqrt{2ax \mp x^2}$: $\sqrt{2a'x' \mp x'^2}$. Par hypothèse, nous avons $x : x' :: a : a' = \frac{ax'}{x}$; donc PE : pE :: $\sqrt{2ax \mp x^2}$: $\sqrt{\frac{2ax'^2}{x} \mp x'^2}$ :: $\sqrt{2ax \mp x^2}$: $x'\sqrt{\frac{2a}{x} \mp 1}$. Multiplions les deux derniers termes de cette proportion par $\sqrt{2ax \mp x^2}$, et il viendra PE : pE :: $2ax \mp x^2$: $x'\sqrt{4a^2 \mp 2ax \mp 2ax + x^2}$ :: $x(2a \mp x)$: $x'(2a \mp x)$ :: x : x' ou enfin, PE : pE :: AP : ap; ce qu'il fallait démontrer.

783. *Corollaire* 1. La proportion PE : pE :: AP : ap, donne PE + AP : pE + ap :: AP : ap ou AE : aE :: AP : ap :: a : a' :: AO : ao.

784. *Corollaire* 2. Si l'on fait attention que aE = AE — Aa, et qu'on substitue dans la dernière proportion, on aura AE : AE — Aa :: a : a'; d'où $a' \times$ AE = a(AE — Aa), ce qui donnera AE = $\frac{a \times Aa}{a - a'}$; d'où l'on voit que la distance AE est constante, quelles que soient les abscisses AP, ap, pourvu que AP : ap :: a : a'.

785. THÉORÈME 255. *Supposons deux ellipses ou deux hyperboles, rapportées à deux diamètres conjugués semblables, les diamètres des abscisses étant situés sur une même droite* AB (fig. 257 et 258); *si l'on prend un point* E *sur la droite* AB, *de manière qu'on ait* AE : aE :: a : a', *et que par un point* F *quelconque de l'ellipse* ACBD (fig. 257) *ou de l'hyperbole* DAH (fig. 258) *on mène la droite* FE *au point* E, *les abscisses* AP, ap *des points* F, f, *où la droite* FE *rencontre les deux courbes, seront entre elles dans le rapport des diamètres des abscisses; c'est-à-dire qu'on aura* AP : ap :: a : a'.

En effet, si cela n'était pas vrai, et qu'au lieu de la proportion $a : a'$ :: AP : ap on eût $a : a'$ :: AP : ap'; en vertu du numéro 782, la droite qui passerait par les points F, m' rencontrerait la droite AB en un point E' tel, qu'on aurait PE' : p'E' :: AP : ap'; d'où il s'ensuivrait (n°. 783) que AE' : aE' :: AP : ap' :: a : a'; mais par hypothèse AE : aE :: a : a'; donc AE' : aE' :: AE : aE; mais aE' = AE' — Aa, et aE = AE — Aa; donc AE' : AE' — Aa :: AE : AE — Aa, d'où AE' $\times$ (AE — Aa) = AE $\times$ (AE' — Aa), ou AE' $\times$ AE — AE' $\times$ Aa = AE $\times$ AE' — AE $\times$ Aa, ce qui se réduit à AE' $\times$ Aa = AE $\times$ Aa ou à AE' = AE; donc, la droite qui passerait par les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

extrémités des ordonnées PF, $p'm'$, non-seulement aurait le point M commun avec celle qui passerait par les extrémités des ordonnées PF, pf, mais encore le point E; donc le point m' coïnciderait avec le point m; donc enfin AP : ap :: a : a'.

786. *Corollaire* 1. Si le point E est tel que AE : aE :: a : a'; que par un point F quelconque de l'ellipse ACBD (fig. 257) ou de l'hyperbole DAH (fig. 258) on mène une droite FE à ce point E, et que par les points F, f on abaisse les ordonnées FP, fp; on aura (n°. 783) AE : aE :: AP : ap, et (n°. 782) PE : pE :: AP : ap; d'où il suit que AE : aE :: PE : pE. Mais, à cause des parallèles PF, pf, PE : pE :: EF : Ef; donc AE : aE :: EF : Ef.

787. *Corollaire* 2. Si donc par le point E, déterminé comme ci-dessus, on mène deux droites quelconques EF, EN, on aura AE : aE :: EF : Ef et AE : aE :: EN : En; donc EF : Ef :: EN : En : d'où il suit que, *si l'on joint les points* F, N, *et f, n par les droites* FN, fn, *ces droites seront parallèles.*

788. *Corollaire* 3. Il suit de là que si l'on inscrit un polygone NFGHIKLM (fig. 257) ou une portion de polygone DMNFGH (fig. 258) dans l'ellipse ACBD ou l'hyperbole DAH; que par les sommets de ce polygone ou portion de polygone on mène des droites au point E, déterminé comme ci-dessus, et que l'on joigne, par des droites, les points où celles menées au point E par les sommets du polygone ou portion de polygone inscrit dans la première courbe, rencontre la seconde *acbd* ou *dah*, on aura un polygone *nfghiklm* (fig. 257), ou une portion de polygone *dmnfgh* (fig. 258) qui sera semblable au premier, et qui sera inscrit ou inscrite dans la seconde courbe; car, d'après le corollaire précédent, tous les côtés homologues de ces deux polygones ou portions de polygones seront parallèles, ce qui donnera les angles homologues égaux; mais, de plus, on a EN : En :: EF : Ef :: EG : Eg :: EH : Eh ::, etc. (fig. 257), ou ED : Ed :: EM : Em :: EN : En :: EF : Ef :: EG : Eg ::, etc. (fig. 258); donc (fig. 257) NF : nf :: FG : fg :: GH : gh ::, etc. et (fig. 258) DM : dm :: MN : mn :: NF : nf ::, etc., donc les deux polygones NFGHIKLM, *nfghkm* (fig. 257) ou les deux portions de polygones DMNFGH, *dmnfgh* (fig. 258) sont semblables.

789. *Corollaire* 4. Il suit de là que deux ellipses ou deux hyperboles qui sont rapportées à deux diamètres conjugués semblables et proportionnels sont semblables, puisqu'on peut toujours inscrire des polygones semblables dans les deux ellipses ou les deux hyperboles.

790. Pour donner au lecteur l'occasion de s'exercer, je lui proposerai de démontrer :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1°. Qu'une courbe semblable à une ellipse, est une ellipse dont les axes sont proportionnels à ceux de la première;

2°. Qu'une courbe semblable à une hyperbole est une hyperbole dont les axes sont proportionnels à ceux de la première;

3°. Que deux ellipses ou deux hyperboles semblables ont les diamètres conjugués semblables proportionnels;

4°. Que si deux ellipses semblables ont leurs diamètres homologues situés sur la même droite AB (fig. 257), et qu'on fixe un point E sur cette droite AB de manière que AE : aE :: a : a', a et a' étant les diamètres homologues situés sur la droite AB; en menant deux droites quelconques EC, ED, et par les points C et D, et les points c et d où ces droites rencontrent les ellipses, en menant les droites CD, cd, les segmens DAC, dac seront semblables;

5°. Qu'en faisant la même construction dans l'hyperbole (fig. 258), on aura les segmens DAH, dah, qui seront aussi semblables;

6°. Que si deux segmens d'ellipse DAC, dac (fig. 257) ou deux segmens d'hyperbole DAH, dah (fig. 258) sont semblables, on aura AO : ao :: a : a' ou AI : ai :: a : a';

7°. Que deux ellipses ou deux hyperboles seront semblables, si les distances d'un foyer de chacune au centre et à un sommet de l'axe qui contient les foyers sont proportionnels, et réciproquement;

8°. Que toutes hyperboles semblables qui ont le même centre et les premiers axes sur la même droite, ont les mêmes asymptotes; et réciproquement, si des hyperboles sont comprises dans des asymptotes qui font le même angle, les hyperboles seront semblables;

9°. Enfin, que toutes les lignes, terminées de part et d'autre à la courbe, qui feront avec les axes de l'ellipse de la parabole et de l'hyperbole des angles égaux, seront proportionnelles.

791. THÉORÈME 256. *Supposons deux ellipses, deux hyperboles ou deux paraboles semblables et concentriques, ayant les axes homologues sur les mêmes droites* AB, CD (fig. 259, 260 et 261); *si l'on mène un diamètre* EF *quelconque; que par le point e, où ce diamètre rencontre la courbe intérieure, on mène une tangente eg à cette courbe intérieure, prolongée jusqu'à sa rencontre en g avec la courbe extérieure, et que, parallèlement à cette tangente eg on mène une droite quelconque* HK *qui rencontre les deux courbes chacune en deux points; je dis que* Hh × hK = (eg)^2 ou Hk × kK = (eg)^2, *et que, par conséquent,* Hh × hK = Hk × kK.

D'abord, il est évident, d'après ce qui précède, que le diamètre EF divise les droites HK, hk en deux parties égales au point P; de sorte que ces droites

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sont des doubles ordonnées des deux courbes. Rapportons donc les deux courbes aux diamètres conjugués dont EF serait celui des abscisses, l'origine des coordonnées étant au centre I, et démontrons la proposition pour le cas de l'ellipse (fig. 259); dans ce cas nous aurons $(PH)^2 = \frac{b^2}{a^2}\{a^2 - (IP)^2\}$ et $(Ph)^2 = \frac{b'^2}{a'^2}\{a'^2 - (IP)^2\}$; mais les deux ellipses sont semblables; donc $a : a' :: b : b'$ ou $a^2 : a'^2 :: b^2 : b'^2$; d'où $\frac{b^2}{a^2} = \frac{b'^2}{a'^2}$ et par conséquent $(Ph)^2 = \frac{b^2}{a^2}\{a'^2 - (IP)^2\}$. Retranchons cette équation de la première, et il viendra $(PH)^2 - (Ph)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - a'^2)$..... (1). Or, la tangente *eg* est une ordonnée de l'ellipse extérieure, et répond à l'abscisse $Ie = a'$; donc $(eg)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - a'^2)$: le second membre de cette équation est donc égal à celui de l'équation (1); donc $(PH)^2 - (Ph)^2 = (eg)^2$..... (2). Mais $(PH)^2 - (Ph)^2 = (PH + Ph)(PH - Ph)$; $PH + Ph = PK + Ph = Kh$ ou $PH + Ph = PH + Pk = Hk$, ce qui donne $Kh = Hk$, et $PH - Ph = Hh$ ou $PH - Ph = PK - Pk = kK$; d'où il suit que $(PH)^2 - (Ph)^2 = Kh \times hH = Hk \times kK$; donc d'après l'équation (2) $Kh \times hH = (eg)^2$ ou $Hk \times kK = (eg)^2$.

En appliquant le même raisonnement sur l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ de l'hyperbole, on démontrerait que la proposition a lieu pour cette courbe sans aucune restriction.

Quant à la parabole, elle exige, pour que la même proposition ait lieu, que les paramètres soient égaux; car (fig. 261), on aura dans ce cas $(PH)^2 = p \times EP$, et $(Ph)^2 = p \times eP$; d'où $(PH)^2 - (Ph)^2 = p(EP - eP) = p \times Ee$. Or, la tangente *eg* étant une ordonnée de la parabole extérieure qui répond à l'abscisse Ee, on aura $(eg)^2 = p \times Ee$; donc $(PH)^2 - (Ph)^2 = (eg)^2$. Mais on voit que pour l'ellipse et l'hyperbole il faut que les deux courbes semblables soient concentriques, ou, en d'autres termes, pour un diamètre déterminé EF (fig. 259 et 261) la distance Ee est déterminée, tandis que pour la parabole (fig. 261) cette distance Ee est indéterminée.

Ainsi, pourvu que deux paraboles aient leurs axes sur la même droite, et des paramètres égaux, la proposition aura lieu.

792. *Remarque.* Retenons bien que nous avons vu, en passant, que $Hh = kK$ et $hK = Hk$, pour l'ellipse, et qu'il en est évidemment de même pour les deux autres courbes, quelle que soit la direction de la droite HK.

Il est évident que la proposition a lieu aussi pour deux cercles concentriques.

Cette propriété des courbes du second degré semblables et concentriques est, comme on voit, analogue à celle des asymptotes de l'hyperbole. Aussi,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donne-t-on à ces courbes le nom de *courbes asymptotiques,* lorsqu'elles sont ouvertes, comme la parabole et l'hyperbole, parce qu'alors ces courbes s'approchent de plus en plus l'une de l'autre sans jamais pouvoir se rencontrer.

793. THÉORÈME 257. *Soit un segment de parabole* ABC (fig. 262) *tel, que la droite* AC *soit une double ordonnée au diamètre quelconque* BD *; je dis que le plus grand triangle qu'on pourra inscrire dans ce segment parabolique, la base étant la double ordonnée* AC, *sera celui dont le sommet sera à l'origine* B *du diamètre* BD.

En effet, la tangente EF, menée à l'origine B du diamètre BD, est parallèle à la double ordonnée AC; ce qui fait voir que le point B de la parabole est celui qui s'éloigne le plus de AC; donc le triangle ABC est, de tous les triangles inscrits qui auront la base AC, celui qui a la plus grande hauteur; donc il est le plus grand.

794. *Corollaire* 1. Le diamètre BD partage le triangle ABC en deux autres ABD, DBC égaux entre eux. Si donc nous considérons le segment AKB, et le diamètre KG qui divise la droite AB en deux également en H, en menant les droites AK, KB, le triangle AKB sera le plus grand de tous ceux qu'on pourra inscrire dans le segment AKB, et la droite KH divisera ce triangle AKB en deux autres AKH, HKB égaux entre eux.

795. *Corollaire* 2. Je dis maintenant que le triangle AKB est le quart du triangle ABD. Car, si par les points K, H, on mène les droites KL, HI, parallèles à la droite AC, on aura KL = HI; mais HI = $\frac{1}{2}$AD; donc (n°. 451) (AD)^2 : $\frac{1}{4}$(AD)^2 :: BD : BL ou 4 : 1 :: BD : BL; d'où il suit que BL = $\frac{1}{4}$BD, et par conséquent BL = $\frac{1}{2}$BI = LI : les deux triangles HIB, HKB étant compris entre parallèles ont même hauteur; ils sont donc entre eux comme leurs bases BI et HK = LI = $\frac{1}{2}$BI; donc le triangle HKB est la moitié de HIB. Par conséquent le triangle AKB = HBI; mais le triangle HBI = $\frac{1}{4}$ABD; donc AKB = $\frac{1}{4}$ ABD; ce qu'il fallait démontrer.

796. *Corollaire* 3. Si donc on inscrivait dans chaque segment A*m*K, K*n*B, le plus grand triangle possible, chacun de ces triangles serait le quart du triangle AKH, et leur somme le quart du triangle AKB : il suit donc de là que si l'on continue d'inscrire ainsi des triangles dans les segmens successifs, jusqu'à l'infini, on aura une suite de triangles qui suivront la progression géométrique décroissante $1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{16} : \frac{1}{64} : \frac{1}{128}$, etc., dont la somme sera évidemment la superficie du demi-segment parabolique AKBD, en prenant pour unité le triangle ABD. Mais (alg., n°. 155) la somme de tous les termes d'une progression géométrique est donnée par la formule $S = \frac{dR - P}{R - 1}$;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

or, dans la progression dont il s'agit ici, $R = \frac{1}{4}$; $d = 0$ et $p = 1$; donc $S = \frac{-1}{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$: ainsi la superficie du demi-segment AKBD sera $\frac{4 \times ABD}{3}$. Or $ABD = \frac{1}{2}ADBE$; donc $AKBD = \frac{2}{3} \times ADBE$, ou enfin, $AKBC = \frac{2}{3}AEFC$; *c'est-à-dire que, la superficie d'un segment parabolique quelconque est égale aux deux tiers de celle du parallélogramme circonscrit à ce segment.*

797. *Remarque.* Nous avons vu (n°. 326) que pour avoir la superficie d'un segment de courbe ACBD (fig. 263), il fallait diviser la droite AB en un très-grand nombre de parties égales Aa, ab, bc, cd, etc.; élever, par les points de division, des perpendiculaires kf', lg', mh', ni', etc., et multiplier la somme de toutes ces perpendiculaires par l'une des divisions de la droite AB.

798. *Corollaire* 1. Il suit de là que, si la figure ACBD est une ellipse, et la figure AEBF un cercle décrit sur le grand axe AB de l'ellipse, la superficie du cercle sera à celle de l'ellipse, comme le demi-grand axe est au demi-petit axe. Car les abscisses Aa, Ab, Ac, etc. étant les mêmes pour le cercle et pour l'ellipse, les ordonnées correspondantes (n°. 559) seront entre elles $:: a : b$; donc la somme des ordonnées du cercle est à celle des ordonnées de l'ellipse $:: a : b$. Soient donc S la somme des ordonnées au cercle, et S′ celles des ordonnées à l'ellipse; on aura $S : S' :: a : b$. Multiplions les deux termes du premier rapport par Aa, et il viendra $S \times Aa : S' \times Aa :: a : b$; or, (n°. 326) $S \times Aa$ est la superficie du demi-cercle AEB, et $S' \times Aa$ est celle de la demi-ellipse ACB; donc la proposition est démontrée.

799. *Corollaire* 2. Nous avons vu (n°. 230) que a étant le rayon du cercle et S la superficie, on avait $S = pa^2$; si donc S′ est la superficie de l'ellipse, on aura $pa^2 : S' :: a : b$, d'où l'on tirera $S' = pab$: donc, *la superficie de l'ellipse est égale au produit des demi-axes multiplié par le rapport du diamètre à la circonférence du cercle.*

Nous pourrions encore pousser beaucoup plus loin l'étude des propriétés des courbes du second degré, mais ce qui précède est plus que suffisant pour l'objet que nous nous proposons dans ce cours.

Outre le cercle, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole du second degré, dont nous nous sommes occupés, les géomètres considèrent encore des cercles, des ellipses, des paraboles et des hyperboles de tous les degrés supérieurs; mais ces courbes n'offrent pas assez d'intérêt pour nous, pour que nous nous en occupions ici.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

SECTION IV.

GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS.

1re. LEÇON.

Objet de la Géométrie à trois dimensions; notions générales des surfaces, et la théorie des plans.

La géométrie à trois dimensions a pour objet, comme nous l'avons déjà dit (géom. pl., n°. 8), les lignes, les surfaces et les corps considérés dans l'espace, en un mot, tout ce qui est relatif à la forme et à l'étendue des corps.

L'étendue et la forme des corps dépendent des surfaces qui les terminent.

La meilleure manière d'envisager les surfaces est de les concevoir comme étant la trace qu'on peut imaginer laissée dans l'espace par une ligne, connue de nature, et mise en mouvement d'une manière déterminée. C'est aussi sous ce point de vue qu'on les considère le plus ordinairement.

1. La ligne mise en mouvement dans l'espace, pour engendrer une surface, s'appelle la *génératrice* de cette surface.

La génératrice d'une surface peut être droite ou courbe; quand elle est courbe, elle peut être plane ou à double courbure, et peut conserver sa forme dans tout le cours de la génération, ou en changer à chaque pas.

2. Le mouvement de la génératrice d'une surface se détermine de plusieurs manières. Le plus ordinairement on suppose cette ligne glissant, suivant certaine loi, sur d'autres lignes, connues de nature et de position dans l'espace.

3. Les lignes sur lesquelles la génératrice glisse, se nomment les *directrices*. Les directrices peuvent être des lignes quelconques aussi bien que la génératrice.

4. Le nombre des directrices, dans une surface, ne peut surpasser trois. Souvent il n'en faut que deux et même quelquefois qu'une seule. Quand, dans la génération d'une surface, il y a trois ou deux directrices, l'une d'elles peut être un point.

Si l'on suppose un système de directrices connues de forme et de position

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fixes dans l'espace, on concevra qu'avec la même génératrice on pourra engendrer une infinité de surfaces différentes, en faisant varier la loi du mouvement de la génératrice de toutes les manières possibles; ou bien en conservant la même loi de mouvement, et en faisant varier la forme de la génératrice, soit à chaque instant de la même génération, soit seulement à chaque génération particulière.

De même avec une génératrice donnée, on pourra aussi engendrer une infinité de surfaces différentes, en faisant varier la forme, la position respective et le nombre des directrices, de toutes les manières possibles.

De là nous conclurons que, pour définir une surface, il faut nécessairement établir, 1°. le nombre des directrices, 2°. la forme de chacune d'elles, 3°. leurs positions respectives dans l'espace, 4°. la forme de la génératrice, et 5°. la loi suivant laquelle cette dernière ligne glisse sur les directrices.

5. Les surfaces sont planes ou courbes. Nous avons vu (géom. pl., n°. 7) qu'une *surface plane* ou un *plan* était une surface dans laquelle, prenant deux points à volonté et joignant ces deux points par une droite, cette droite était tout entière dans la surface.

Quant aux surfaces courbes, elles ne sont ni planes ni composées de surfaces planes. Elles sont ou à une seule courbure, ou à double courbure.

6. Les surfaces à une seule courbure sont engendrées par une ligne droite, mais toutes les surfaces engendrées par une ligne droite ne sont pas, pour cela, à une seule courbure. Les surfaces à une seule courbure ont cela de particulier, que tous les plans qui leur sont tangens les touchent nécessairement suivant une ligne droite.

7. Les surfaces à double courbure se distinguent en ce qu'un plan tangent peut ne les toucher que par un point.

8. Parmi les surfaces à une seule courbure, et les surfaces à double courbure, on distingue les surfaces dites de *révolution*. Ces sortes de surfaces sont engendrées par une ligne plane quelconque, qui tourne autour d'une ligne droite, située dans le plan de la génératrice, qu'on appelle *axe de rotation*. Dans cette génération, il faut entendre que la ligne génératrice ne change pas de position par rapport à l'axe de rotation.

La Théorie du Plan.

9. THÉORÈME I. *Une ligne droite qui a deux points communs avec un plan est tout entière dans ce plan, quelque loin qu'on les prolonge l'un et l'autre.*

Ce théorème est une suite immédiate de la définition du plan.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

10. *Corollaire.* Il suit de là qu'autour d'une ligne droite on peut faire passer une infinité de plans différens.

11. THÉORÈME 2. *Deux droites qui se coupent ou qui tendent à se rencontrer dans l'espace sont dans le même plan.*

En effet, autour de l'une de ces droites on peut faire tourner un plan qui, dans son mouvement, rencontrera nécessairement l'autre droite au moins en un point; ainsi, cette seconde droite aura ce point dans le plan qui passe par la première; mais les deux droites se rencontrent, ou prolongées elles se rencontreraient, et comme tous les points de la première droite sont dans le plan, le point d'intersection des deux droites sera dans ce même plan; or, ce point appartient à la seconde droite; donc cette dernière a deux points dans le plan, donc elle y est tout entière.

12. THÉORÈME 3. *Deux droites qui se rencontrent ou qui tendent à se rencontrer, non-seulement sont dans le même plan, mais encore elles en déterminent la position.*

En effet, si par ces deux droites on imagine deux plans, ces deux plans coïncideront nécessairement dans toute l'étendue des deux droites qui, prolongées autant qu'on voudra, ne sortiront jamais des deux plans. De plus, si l'on mène une troisième droite comme on voudra qui coupe les deux premières chacune en un point, comme les deux points d'intersection seront dans les deux plans, cette troisième droite sera dans ces deux plans dans toute son étendue, quelque loin qu'on la prolonge; les deux plans coïncideront donc dans toutes les directions; donc ils se confondront en un seul.

13. *Corollaire* 1. Il suit de là qu'une droite et un point donnés déterminent la position d'un plan; car, par le point, on pourra toujours mener une droite qui rencontre la droite donnée.

14. *Corollaire* 2. Il suit encore de là que trois points donnés comme on voudra, non en ligne droite, déterminent la position d'un plan; car, en joignant ces trois points par des droites, ces droites se rencontreront deux à deux, et seront par conséquent dans le même plan. Ainsi, les trois côtés d'un triangle sont dans le même plan.

15. *Remarque.* Comme la définition des droites parallèles emporte la condition que les droites sont situées dans un même plan, il s'ensuit que deux droites parallèles déterminent la position d'un plan.

16. THÉORÈME 3. *Si deux plans se rencontrent, leur intersection sera une ligne droite.*

En effet, d'abord cette intersection est une ligne; si cette ligne n'est pas droite, elle aura au moins trois de ses points qui ne seront pas en ligne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

droite, mais alors (n°. 14) les deux plans coïncideraient et n'en formeraient qu'un seul, ce qui est contre l'hypothèse.

17. DÉFINITION. Une droite AB (fig. 264) est perpendiculaire à un plan *abcd*, lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites BC, BD, BE, BF, BG, etc., menées par son pied B dans le plan. Le pied B de la perpendiculaire est le point où elle rencontre le plan.

18. THÉORÈME 4. *Si une droite* AB (fig. 265) *est perpendiculaire à deux droites* BC, BD *menées par son pied dans le plan abcd, cette droite* AB *sera perpendiculaire au plan abcd.*

Par le pied B de la droite AB, menons une droite quelconque GH; si nous démontrons que la droite AB est perpendiculaire à cette droite GH, il sera démontré que AB est perpendiculaire à toutes les droites menées par son pied dans le plan *abcd*, et par conséquent à ce plan *abcd* lui-même.

Pour cela, prenons les distances BC, BD, BE et BF égales entre elles; joignons les points C et D par la droite CD, et les points E et F par la droite EF, et, par un même point A de la droite AB et les points C, D, E et F, menons les droites CA, DA, EA et FA; enfin, par le même point A et les points G et H, menons les droites GA, HA. D'après cette construction, 1°. les triangles BCD, BEF sont isocèles et égaux; 2°. les triangles rectangles ABC, ABD, ABE et ABF sont égaux comme ayant les côtés de l'angle droit égaux, ainsi les droites CA, DA, EA et FA sont toutes égales entre elles; d'où il suit que les triangles CAD, FAE sont isocèles et égaux, car ces triangles ont les trois côtés égaux, CD étant égal à EF; 3°. les triangles GBF, BDH sont égaux, car le côté BD = BF, l'angle DBH = FBG, et l'angle HDB = GFB; donc BH = BG, et DH = GF; 4°. les triangles DAH, FAG sont égaux, puisque de l'égalité des triangles DAC, EAF, il s'ensuit que le côté DA = FA et l'angle HDA = GFA, et de plus nous venons de voir que HD = FG; donc HA = GA, donc le point A est à égales distances des points G et H; mais nous venons de voir que BH = BG; donc le point B est au milieu de GH; donc enfin AB est perpendiculaire au milieu de GH; ce qu'il fallait démontrer.

19. THÉORÈME 5. *Si, par un point* A *pris hors d'un plan abcd* (fig. 266), *on abaisse une perpendiculaire* AB *et différentes obliques* AC, AF, AE, *au plan abcd, 1°. la perpendiculaire* AB *sera la plus courte de toutes ces droites; 2°. les obliques* AC, AF, *qui s'écarteront également de la perpendiculaire, seront égales, et 3°. de deux obliques qui s'écarteront inégalement de la perpendiculaire, celle qui s'en écartera le plus sera la plus grande.*

1°. Je dis que la perpendiculaire AB est plus petite que toute oblique AF

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

menée du même point A sur le plan *abcd*; car les droites AB, AF se rencontrant au point A, sont dans le même plan, lequel rencontrera le plan *abcd* suivant la droite BF, le triangle ABF sera rectangle en B, puisque la droite AB, étant perpendiculaire au plan *abcd*, est perpendiculaire à toutes les droites comme BF qui passent par son pied dans ce plan *abcd*, et l'oblique AF sera l'hypothénuse de ce triangle rectangle; donc AF > AB; ce qu'il fallait premièrement démontrer.

2°. Soient AC, AF deux obliques également écartées de la perpendiculaire AB, de sorte que BC = BF; je dis que ces deux obliques seront égales, car elles sont les hypothénuses de deux triangles rectangles ABC, ABF qui ont les côtés de l'angle droit égaux.

3°. Supposons que l'oblique AF soit moins écartée de la perpendiculaire AB que l'oblique AE; de sorte que BE > BF; je dis que AE > AF, car si l'on joint les pieds B et E de la perpendiculaire AB et de l'oblique AE par la droite BE, que l'on fasse BD = BF et que l'on mène l'oblique AD, on aura AD = AF, et il est évident que BD étant plus petit que BE, on aura AD < AE, ces deux obliques AD, AE et la perpendiculaire AB étant dans le même plan (géom. pl. n°. 32).

20. THÉORÈME 6. *Réciproquement, les obliques égales s'écartent également de la perpendiculaire; et de deux obliques inégales, la plus grande est celle qui s'en écarte le plus.*

1°. Soient les obliques égales AC, AF (fig. 266); je dis que BC = BF; car si cela n'était pas vrai, BC serait plus ou moins grand que BF. Mais si BC était plus grand que BF, on aurait AC > AF, ce qui est contre l'hypothèse, et si BC était plus petit que BF, on aurait AC < AF, ce qui est encore contre l'hypothèse; donc BC = BF.

2°. Soit l'oblique AE > AF; je dis que BE > BF, car si cela n'est pas vrai, BE sera égal ou plus petit que BF; mais si BE = BF, on aura AE = AF, ce qui est contre l'hypothèse, et si BE < BF, on aura AE < AF, ce qui est encore contre l'hypothèse; donc BE > BF.

21. *Corollaire* 1. Il suit de là que si par le pied B de la perpendiculaire AB au plan *abcd* (fig. 266), comme centre, on décrit une circonférence de cercle CFDG dans le plan *abcd*, chaque point de la perpendiculaire AB sera à égales distances de cette circonférence; car si par un point quelconque A de la perpendiculaire AB on mène des obliques AC, AF, AD, AG,... à différens points C, F, D, G,..., toutes ces obliques seront égales entre elles, puisqu'elles seront à égales distances de la perpendiculaire AB.

22. *Corollaire* 2. De ce que (n°. 20) les obliques égales s'écartent égale-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ment de la perpendiculaire, il s'ensuit que par chacun des points de la perpendiculaire AB (fig. 266), comme centre, et avec un rayon égal à l'oblique menée de ce point en un point de la circonférence CFDE, on pourrait décrire cette même circonférence.

23. THÉORÈME 7. *Par un point* A *donné hors d'un plan abcd* (fig. 266) *on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire* AB *à ce plan.*

Supposons que cela ne soit pas vrai, et que par le point A on puisse abaisser, outre la perpendiculaire AB, une seconde perpendiculaire AF; si l'on joint les pieds B et F de ces perpendiculaires par la droite BF, cette droite BF sera perpendiculaire à chacune des perpendiculaires AB, AF au plan *abcd* (n°. 17); le triangle ABF aurait donc deux angles droits, ce qui est impossible; donc, etc.

24. THÉORÈME 8. *Par un point* B *donné sur un plan abcd* (fig. 267), *on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à ce plan.*

Car si l'on pouvait en élever deux BA, BC, comme elles partiraient du même point B, elles seraient dans un même plan qui rencontrerait le plan *abcd* suivant la droite BD; dans le plan de ces deux perpendiculaires BA, BC on aurait donc les angles ABD, CBD qui seraient droits; mais les angles droits sont égaux entre eux; donc ABD = CBD, ce qui est impossible; donc, etc.

25. THÉORÈME 9. *Si l'on imagine une droite* AB (fig. 268) *située dans l'espace d'une manière quelconque, et que par un point* B *de cette droite on lui mène deux perpendiculaires* BC, BD *faisant entre elles un angle quelconque* DBC, *le plan qui passera par ces deux perpendiculaires sera perpendiculaire à la première droite* AB.

Car la droite AB sera perpendiculaire à deux droites BC, BD menées par son pied dans le plan DBC (n°. 18).

26. DÉFINITION. Une droite est *parallèle à un plan*, quand la droite est partout à égales distances du plan ou, ce qui revient au même, lorsque la droite ne peut rencontrer le plan, quelque loin qu'on les prolonge l'une et l'autre.

27. THÉORÈME 10. *Toute droite* AB *parallèle à une autre droite* CD *située sur un plan abcd* (fig. 269) *est parallèle au plan abcd qui contient la seconde droite.*

En effet, si la droite AB n'est pas parallèle au plan *abcd*, prolongée, elle rencontrera ce plan. Mais les droites AB, CD étant parallèles, on pourra faire passer un plan par ces deux droites, lequel passera par le point où la droite AB rencontrerait le plan *abcd*; le plan des droites AB, CD, et le plan *abcd* auraient donc une droite CD et un point commun; donc (n°. 12),

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ces deux plans coïncideraient, ce qui est impossible, tant que la droite AB sera hors du plan *abcd*; donc enfin la droite AB est parallèle au plan *abcd*.

28. THÉORÈME 11. *Si une première droite a un de ses points dans un plan, et qu'en même temps elle soit parallèle à une seconde droite située dans ce plan, la première droite sera tout entière dans le plan.*

Car cette première droite sera parallèle au plan, et, par conséquent, elle sera partout à égale distance du plan; mais la droite a un point dans le plan; ce point est donc à une distance nulle du plan; tous les autres points de cette droite seront donc à une distance nulle du plan; donc enfin la droite sera dans le plan.

29. DÉFINITION. Deux plans sont parallèles quand ils sont partout à égales distances l'un de l'autre ou, ce qui revient au même, quand ils ne peuvent jamais se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge l'un et l'autre.

30. THÉORÈME 12. *Si deux plans abcd,* ABCD (fig. 270) *sont parallèles, et qu'on les coupe par un troisième plan* EFGH, *les intersections* EF, GH, *des deux premiers par le troisième, seront parallèles.*

En effet, si ces deux droites EF, HG ne sont pas parallèles, étant dans le même plan, prolongées elles se rencontreront; mais ces droites ne peuvent se rencontrer, à moins que les plans ABCD, *abcd* qui les contiennent ne se rencontrent, ce qui ne peut avoir lieu, puisque ces plans sont parallèles; donc les intersections EF, GH de deux plans parallèles ABCD, *abcd*, coupés par un troisième EFGH, sont parallèles.

31. THÉORÈME 13. *Deux droites parallèles comprises entre deux plans parallèles sont égales.*

Soient EH, FG (fig. 270) les deux droites parallèles comprises entre les plans parallèles ABCD, *abcd*; puisque ces deux droites sont parallèles, on pourra mener un plan EFGH par ces deux droites, lequel rencontrera les deux plans parallèles ABCD, *abcd* suivant les droites EF, HG qui seront parallèles (n°. 30); les droites EH, FG seront donc des parallèles comprises entre des parallèles; donc elles seront égales.

32. THÉORÈME 14. *Si deux angles* BAC, *bac* (fig. 272) *ont les côtés parallèles, et les sommets tournés dans le même sens, ces angles seront égaux, et les plans de ces deux angles seront parallèles.*

En effet, joignons les sommets A et *a* par la droite A*a*; faisons AB = *ab*, AC = *ac*, et joignons les points B et C, *b* et *c* par les droites BC, *bc*, et les points B et *b*, C et *c* par les droites B*b*, C*c*; les droites AB, *ab*, étant parallèles, sont dans le même plan, et comme par construction elles sont égales, la figure AB*ba* sera un parallélogramme; donc les droites A*a*, B*b*, sont égales

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et parallèles. On démontrerait de la même manière que les droites Aa, Cc sont aussi égales et parallèles; donc Bb est égal et en même temps parallèles à Cc : la figure BbcC est donc un parallélogramme; donc BC $=$ bc; d'où il suit que les trois côtés des triangles ABC, abc sont égaux, chacun à chacun; donc ces deux triangles ont les angles égaux, chacun à chacun; donc enfin les angles BAC, bac, qui ont les côtés parallèles et les sommets tournés du même côté, sont égaux.

Je dis maintenant que les plans de ces angles sont parallèles. Car si cela n'avait pas lieu, par le point a on pourrait mener un plan aef parallèle à ABC; mais les trois droites Aa, Be, Cf comprises entre ces plans parallèles, étant parallèles entre elles, sont égales; on aurait donc Aa $=$ Be $=$ Cf, mais Aa $=$ Bb $=$ Cc; donc Be $=$ Bb et Cf $=$ Cc, ce qui ne peut avoir lieu à moins que les points e et f ne coïncident avec les points b et c; c'est-à-dire à moins que le plan aef, parallèle à ABC, ne coïncide avec le plan de l'angle abc; ce qu'il fallait démontrer.

33. THÉORÈME 15. *Si trois droites* Aa, Bb *et* Cc (fig. 272) *sont égales et parallèles, en joignant les extrémités* A, B, C, *et* a, b, c *par les droites* AB, AC, BC, *et* ab, ac, bc, *les triangles* ABC, abc, *formés par ces droites, seront égaux.*

Car les figures ABba, ACca et BCcb sont des parallélogrammes, les côtés opposés Aa, Bb, Cc étant égaux et en même temps parallèles; donc AB $=$ ab, BC $=$ bc et AC $=$ ac; donc les triangles ABC, abc ont les trois côtés égaux, chacun à chacun.

34. THÉORÈME 16. *Si deux plans sont parallèles, et qu'on élève une droite* EF *perpendiculaire à l'un abcd* (fig. 271) *de ces plans, cette droite* EF *sera aussi perpendiculaire à l'autre plan* ABCD.

En effet, si par cette droite EF on fait passer un plan cEFC dans une direction quelconque, comme les plans $abcd$, ABCD sont parallèles, les intersections Ec, FC de ces deux plans par le troisième cEFC seront parallèles (n°. 30); mais la droite Ec est perpendiculaire à la droite EF (n°. 17); donc FC sera perpendiculaire à la même droite EF, et comme la droite FC est menée dans une direction quelconque par le pied F, de la droite EF, dans le plan ABCD, il s'ensuit que EF est perpendiculaire au plan ABCD.

35. THÉORÈME 17. *Si deux plans abcd,* ABCD (fig. 271) *sont perpendiculaires à une même droite* EF, *ces plans seront parallèles.*

Par la droite EF, menons un plan cEFC (fig. 271) dans une direction quelconque; les intersections Ec, FC de ce plan avec les plans donnés seront perpendiculaires à la perpendiculaire EF commune à ces plans donnés; donc

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ces deux droites E*c*, FC seront parallèles; donc les plans *abcd*, ABCD qui les contiennent seront parallèles, les droites E*c*, FC étant menées dans une direction quelconque.

2^me^. LEÇON.

Suite de la Théorie des Plans, et les Angles solides.

36. DÉFINITION. Si deux plans ABCD, ABEF (fig. 273) se rencontrent suivant une droite AB, l'écartement de ces deux plans l'un par rapport à l'autre est ce qu'on appelle l'*inclinaison* ou l'*angle des deux plans*. Cet angle s'appelle aussi *angle dièdre*.

37. THÉORÈME 18. *On peut prendre pour la mesure de l'angle de deux plans* ABCD, ABEF (fig. 273), *celle de l'angle* EBC *formé par les droites* BC, BE *perpendiculaires à l'intersection* AB *des deux plans, et menées par un même point* B *quelconque de cette intersection* AB, *l'une* BC *dans le premier, et l'autre* BE *dans le second plan.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de faire voir que l'angle formé par les perpendiculaires BC, BE ne change pas de grandeur, en quelque point B de l'intersection AB des deux plans qu'elles soient menées.

Soient donc deux autres droites AD, AF, menées dans les deux plans ABCD, ABEF perpendiculairement à l'intersection AB, et par un point quelconque A de cette intersection; il est clair que les deux angles EBC, FAD seront égaux, car ils auront les côtés parallèles, puisqu'ils sont deux à deux dans les mêmes plans, et qu'ils sont perpendiculaires à une même droite.

38. *Corollaire* 1. Les côtés de l'angle EBC étant perpendiculaires à la droite AB, le plan de cet angle est perpendiculaire à la droite AB (n°. 25); d'où il suit *que l'angle de deux plans qui se rencontrent est celui formé par les intersections, avec ces deux plans, d'un troisième plan perpendiculaire à l'intersection des deux premiers.*

39. *Corollaire* 2. Nous appelerons *section droite*, l'intersection avec les plans donnés, du plan perpendiculaire à leur intersection; d'où il s'ensuivra que l'angle de la section droite sera celui des deux plans donnés.

Il est évident que l'angle EBC de la section droite est plus grand que l'angle *a*B*b* formé par les droites *a*B, *b*B non perpendiculaires à l'intersection AB, des plans ABCD, ABEF (fig. 273).

40. *Corollaire* 3. Il suit de là que si l'angle de la section droite de deux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

plans qui se rencontrent est droit, les deux plans seront perpendiculaires l'un à l'autre.

41. *Corollaire* 4. Si deux plans se rencontrent, 1°. les angles adjacens formés par ces deux plans vaudront ensemble deux angles droits et seront, par conséquent, supplémens l'un de l'autre ; 2°. réciproquement, si deux angles adjacens formés par des plans valent ensemble deux angles droits, les plans extérieurs seront le prolongement l'un de l'autre ; 3°. les angles opposés par le sommet seront égaux ; 4°. si autour d'une même droite on fait passer tant de plans qu'on voudra, la somme de tous les angles formés par ces plans sera égale à quatre angles droits ; car, dans tous ces cas, les angles de la section droite de ces plans jouiront de ces diverses propriétés.

42. *Corollaire* 5. Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième, 1°. les angles alternes-internes seront égaux ; 2°. les angles alternes-externes seront aussi égaux ; 3°. les angles correspondans seront égaux ; 4°. les angles intérieurs du même côté du plan sécant seront supplémens l'un de l'autre, et les réciproques de toutes ces propositions auront lieu ; car les angles de la section droite de ces plans jouiront de ces propriétés.

43. THÉORÈME 19. *Si une droite* AB (fig. 274) *est perpendiculaire au plan abcd, tout plan efgh mené par cette droite sera perpendiculaire au premier abcd.*

En effet, si par le pied B de la droite AB, perpendiculaire au plan *abcd*, on mène la droite BC dans le plan *abcd* perpendiculairement à l'intersection *ef* des deux plans, cette droite BC sera perpendiculaire à AB, et comme AB est aussi perpendiculaire à *ef*, il s'ensuivra que l'angle ABC, qui sera droit, sera celui formé par les deux plans ; donc ces deux plans sont perpendiculaires.

44. THÉORÈME 20. *Si deux plans abcd, efgh sont perpendiculaires, et que par un point* B *de leur intersection on élève une droite* AB *perpendiculaire à l'un abcd de ces plans, cette droite* AB *sera située dans l'autre plan efgh.*

En effet, si la droite AB n'était pas située dans le plan *efgh*, par le point B on pourrait toujours mener une droite BD dans ce plan qui fût perpendiculaire à l'intersection *ef* des deux plans donnés ; or, si par le même point B on mène, dans le plan *abcd*, la droite BC perpendiculaire à *ef*, l'angle des deux plans sera DBC ; mais ces deux plans sont perpendiculaires ; donc l'angle DBC est droit ; d'où il s'ensuivra que la droite BD, perpendiculaire aux droites B*e*, BC, sera perpendiculaire au plan *abcd* ; mais par hypothèse la droite AB, menée par le même point B, est perpendiculaire au même plan ; par un même point B pris sur un plan on pourrait donc élever deux perpen-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diculaires différentes, ce qui est impossible ; donc enfin la droite AB est dans le plan *efgh*.

45. *Corollaire.* Il suit de là que *si deux plans* EFGH, IKLM (fig. 275), *sont perpendiculaires à un troisième* ABCD, *leur intersection ab sera perpendiculaire au troisième plan* ABCD.

En effet, si par le point *a* commun aux trois plans, on élevait une perpendiculaire au plan ABCD, cette perpendiculaire serait à la fois située sur les deux autres plans, et par conséquent elle coïnciderait avec l'intersection *ab* de ces deux derniers plans.

46. THÉORÈME 21. *Supposons une oblique* AB (fig. 276) *par rapport à un plan abcd ; que par un point* B *quelconque de cette oblique on abaisse une perpendiculaire* BC *au plan abcd; que par la droite* AC *on joigne le pied* C *de la perpendiculaire et celui* A *de l'oblique, et que par ce dernier point* A *on mène, dans le plan abcd, la droite* DE *perpendiculaire à* AC ; *je dis que cette droite* DE *sera aussi perpendiculaire à l'oblique* AB.

En effet, prenons les distances AD, AE égales entre elles, et joignons le point A et les points D et E par les droites DB, EB : les triangles rectangles DCB, ECB seront égaux, car ils ont le côté commun BC, et les côtés CD, EC qui sont égaux comme étant des obliques également écartées de la perpendiculaire AC sur DE ; donc DB = EB ; dont le point B est à égales distances des points D et E de la droite DE ; mais le point A est au milieu de DE ; donc la droite AB est perpendiculaire à DE ; ce qu'il fallait démontrer.

47. THÉORÈME 22. *Réciproquement, si par le pied de l'oblique* AB, *par rapport au plan abcd* (fig. 276) *on mène, à cette oblique, la perpendiculaire* DE *dans le plan abcd, cette droite* DE *sera perpendiculaire à celle* AC *qui joint le pied de l'oblique* AB, *et celui de la perpendiculaire* BC *abaissée sur le plan abcd par un point* B *quelconque de l'oblique* AB.

En effet, prenons les distances AD, AE égales entre elles, et joignons les points D et E avec le point B par les droites DB, EB ; on aura DB = EB, et les triangles rectangles DCB, ECB qui seront égaux, puisqu'ils ont l'hypothénuse et un côté de l'angle droit égaux ; donc DC=EC ; mais le point A est le milieu de DE ; donc la droite AC est perpendiculaire sur DE.

48. THÉORÈME 23. *La plus courte distance entre deux droites non situées dans le même plan, est la perpendiculaire commune à ces deux droites.*

Soient AB, CD (fig. 277) les deux droites données, et EF leur commune perpendiculaire ; je dis que EF sera plus petite que toute autre droite CE qui coupe les mêmes droites ; car le triangle CEF est rectangle en F, et CE en est l'hypothénuse.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les Angles polyèdres.

49. DÉFINITIONS. On appelle *angle polyèdre* l'espace indéfini renfermé par des plans qui se réunissent en un même point qui est le sommet de l'angle. Les figures 278, 279, 281 représentent des angles polyèdres, dont le sommet est le point S, et les plans qui les forment sont ASB, BSC, CSD, etc. Ces plans se nomment les *faces* de l'angle.

Dans un angle polyèdre, il faut 1°. distinguer le nombre des faces, 2°. les angles dièdres ou inclinaisons de ses faces, et 3°. les angles formés par leurs intersections, auxquelles on donne le nom d'*arêtes*. Les angles formés par les arêtes prennent le nom d'*angles plans*.

Le plus simple des angles polyèdres a trois faces, on l'appelle *angle trièdre*. Les autres angles polyèdres prennent aussi des noms qui désignent le nombre de leurs faces : ces noms sont analogues à ceux des polygones; mais on peut tout aussi bien désigner un angle polyèdre en énonçant en français le nombre de ses faces.

50. THÉORÈME 24. *Dans tout angle trièdre, l'un des angles formé par les arêtes est plus petit que la somme des deux autres.*

Soient S le sommet d'un angle trièdre (fig. 278), ASB, ASC et CSB les trois angles des arêtes; si ASB est le plus grand de ces trois angles, je dis qu'on aura $ASB < ASC + CSB$.

En effet, dans le plan ASB, faisons l'angle $BSD = BSC$; prenons le point C à volonté sur l'arête SC; faisons $SD = SC$, et par le point B quelconque de l'arête SB, et les points C et D, faisons passer un plan BAC qui coupe les trois faces de l'angle polyèdre suivant les droites AB, AC et CB.

Cela posé, il est évident que les triangles DSB, CSB sont égaux, puisque par construction ces triangles ont un angle égal compris entre côtés égaux : donc $BD = BC$. Mais dans le triangle ABC on a $AB < AC + BC$, ou $AD + DB < AC + BC$, et par conséquent $AD < AC$. Les triangles ASD, ASC ont le côté AS commun, les côtés DS, CS égaux, et $AC > AD$; donc (géom. pl., n°. 42), l'angle $ASD < ASC$, mais $BSD = BSC$; si donc nous ajoutons ces deux comparaisons, membre à membre, nous aurons $ASD + BSD < ASC + BSC$, ou $ASB < ASC + BSC$; ce qu'il fallait démontrer.

51. THÉORÈME 25. *Quel que soit le nombre des faces d'un angle polyèdre, la somme des angles formés par les arêtes est toujours moindre que quatre angles droits.*

Soit ABCDS (fig. 279) un angle polyèdre; et soit mené un plan ABCD quelconque qui coupe toutes les faces de cet angle; si, dans ce plan, on prend

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

un point I quelconque, et que par les points A, B, C et D on mène les droites AI, BI, CI et DI, les angles autour du point I vaudront ensemble quatre angles droits, ces angles étant situés dans un même plan. La somme de tous les angles réunis des triangles IAB, BIC, CID et DIA, qui sont en nombre égal au nombre des côtés du polygone ABCD, sera égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de ces triangles; mais pour n'avoir que les angles qui ont leurs sommets au même point I, de cette somme totale il faudrait retrancher la somme des angles intérieurs du polygone; or, la somme des angles des triangles ASB, BSC, CSD et DSA est la même que celle des premiers; si donc pour avoir la somme des angles qui ont leurs sommets au point S, il faut, de la somme des angles des triangles qui ont leurs sommets au même point S, retrancher une somme plus grande que celle des angles intérieurs du polygone ABCD, il est clair que cette somme sera plus petite que quatre angles droits. Mais la somme à retrancher pour avoir celle des angles autour du point S, est celle des angles SAB, SBA, SBC, SCB, SCD, SDA et SAD; si donc la somme de tous ces angles est plus grande que celle des angles intérieurs du polygone ABCD, il sera démontré que la somme des angles formés par les arêtes d'un angle polyèdre quelconque est plus petite que quatre angles droits. Or, les points A, B, C et D sont les sommets d'angles trièdres formés par les faces de l'angle polyèdre en question et par le plan ABCD; mais (n°. 50) la somme de deux angles formés par les arêtes d'un angle trièdre est plus grande que le troisième; donc la somme des angles SAB + SBA + SBC + SCB +, etc., est plus grande que celle des angles intérieurs du polygone ABCD; ce qu'il fallait démontrer.

52. THÉORÈME 26. *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont les trois angles des arêtes égaux, chacun à chacun, et semblablement disposés* (fig. 280).

Soient, les angles trièdres ABCS, *abcs* tels, que les angles ASC = *asc*, ASB = *asb*, et BSC = *bsc*; ces deux angles trièdres seront égaux.

En effet, sur l'arête SB, prenons un point B quelconque; par ce point, abaissons les droites BA, BC perpendiculaires aux arêtes AS, CS et la perpendiculaire BD au plan ASC, et joignons les points A et D, C et D par les droites AD, DC : ces dernières droites (n°. 47) seront perpendiculaires aux arêtes AS, CS; de sorte que les angles rectilignes BAD, BCD seront les inclinaisons des faces ASB, CSB par rapport à la face ASC. Faisons la même construction dans l'angle trièdre *abcs*, en observant de faire *sb* = SB; les angles rectilignes *bad*, *bcd* seront les inclinaisons des faces *asb*, *bsc* par rapport à la face *asc*. Je dis maintenant que les angles BAD = *bad*, BCD = *bcd*;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

car les triangles ASB, *asb* sont égaux, puisque ces deux triangles sont rectangles, qu'ils ont l'hypothénuse SB = *sb* et un angle aigu ASB = *asb*; et il en est de même des triangles BSC, *bsc*; donc AS = *as*, SC = *sc*, BC = *bc* et AB = *ab*. De là il résulte que les deux quadrilatères ASCD, *ascd* sont égaux; car l'angle ASC = *asc*; on pourra faire coïncider ces deux angles, et les côtés égaux SA et *as*, SC et *sc*; mais les droites AD, *ad* ainsi que les droites DC, *dc* sont respectivement perpendiculaires aux arêtes qui coïncident; donc ces droites prendront les mêmes directions; de sorte que les points D et *d* coïncideront aussi; donc AD = *ad* et DC = *cd*; donc les triangles ADB et *adb*, BCD et *bcd*, qui sont rectangles, sont égaux, car ils ont l'hypothénuse et un côté égaux; donc enfin les angles BAD = *bad*, BCD = *bcd*, et par conséquent les faces égales des angles trièdres sont également inclinées. Si donc on fait coïncider les faces égales ASC, *asc*, les autres faces coïncideront en même temps; donc les deux angles trièdres seront égaux.

53. THÉORÈME 27. *Deux angles trièdres* ABCS, *abcs* (fig. 280), *sont égaux lorsqu'ils ont un angle plan* ASC, *asc égal, adjacent à deux inclinaisons égales, chacune à chacune.*

En effet, faisons coïncider les deux angles plans égaux ASC, *asc*, les arêtes AS, *as*, coïncideront, ainsi que les arêtes SC, *sc*, et par conséquent les faces ASC, *asc*; mais les inclinaisons adjacentes sont égales; donc les faces ASB, *asb*, coïncideront nécessairement, ainsi que les faces BSC, *bsc*; donc les angles trièdres seront égaux.

54. THÉORÈME 28. *Deux angles trièdres* ABSC, *absc* (fig. 280) *sont égaux lorsqu'ils ont une inclinaison égale comprise entre deux angles plans* ASC, *asc, et* ASB, *asb égaux, chacun à chacun.*

En effet, faisons coïncider les deux inclinaisons égales; les deux angles plans *asc*, *asb* coïncideront respectivement avec les angles plans ASC, ASB qui leur sont égaux; donc les arêtes *cs*, *bs* coïncideront respectivement avec leurs égales CS, BS, et par conséquent les angles plans *bsc*, BSC; donc enfin les deux angles trièdres sont égaux.

Il sera démontré aussi que deux angles trièdres qui ont les trois angles dièdres égaux, chacun à chacun, sont égaux.

55. THÉORÈME 29. *Deux angles polyèdres quelconques sont égaux, lorsqu'ils sont composés d'un même nombre d'angles trièdres égaux, chacun à chacun, et semblablement disposés.*

Supposons, en effet, que l'angle trièdre ADES soit égal à *ades* (fig. 281), que l'angle trièdre ADCS soit égal à *adcs*, et que l'angle trièdre ABCS soit égal à *abcs*; je dis que les angles polyèdres ABCDES, *abcdes* sont égaux, car

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

il est évident que les deux angles trièdres ADES, *ades* étant égaux, pourront coïncider; mais si ces deux angles trièdres coïncident, les faces ADS, *ads* des deux angles trièdres égaux ADCS, *adcs* coïncideront aussi, et par conséquent ces angles trièdres eux-mêmes, et ainsi de suite pour les autres angles trièdres égaux, chacun à chacun; toutes les parties constituantes des angles polyèdres en question coïncident donc, chacune à chacune; donc ces deux angles polyèdres sont égaux.

56. THÉORÈME 30. *Si deux angles polyèdres sont égaux, c'est-à-dire, si ces deux angles peuvent coïncider, on pourra toujours les décomposer en un même nombre d'angles trièdres égaux, chacun à chacun, et semblablement disposés.*

Supposons donc que les angles polyèdres ABCDES, *abcdes* (fig. 281) soient égaux entre eux; si on les fait coïncider, les arêtes homologues coïncideront, chacune à chacune; et par conséquent le plan qui passera par les arêtes AS, DS coïncidera avec celui qui passera par les arêtes homologues *as*, *ds*; le plan qui passera par les arêtes AS, CS, coïncidera avec celui qui passera par les arêtes homologues *as*, *cs*, et ainsi des autres; d'où il suit évidemment que les deux angles polyèdres égaux en question, seront décomposés en un même nombre d'angles trièdres égaux, chacun à chacun, et semblablement disposés; ce qu'il fallait démontrer.

57. THÉORÈME 31. *Si deux angles polyèdres* ABCDES, *abcdes* (fig. 281) *sont égaux, que l'on fasse trois arêtes* AS, ES *et* DS *de l'un, respectivement égales aux trois arêtes homologues as, es et ds de l'autre, et que par les extrémités* A, E *et* D, *des trois premières, et les extrémités a, e et d des trois autres on fasse passer les plans* AEDCB, *aedcb, ces deux plans couperont les faces des deux angles polyèdres en question, de manière que, les polygones* ABCDE, *abcde seront égaux, ainsi que les triangles homologues formés par les arêtes des angles polyèdres, et les côtés des polygones* ABCDE, *abcde.*

En effet, les angles polyèdres étant égaux, ils pourront coïncider; et dès qu'ils coïncideront, les points A, E et D coïncideront avec les points *a*, *e* et *d*; les plans des polygones ABCDE, *abcde* auront trois points de communs, donc (n°. 14) ces plans coïncideront; mais les faces des angles polyèdres coïncident; donc enfin les polygones ABCDE, *abcde* coïncident également, ainsi que les triangles homologues; ce qu'il fallait démontrer.

58. THÉORÈME 32. *Réciproquement, si deux angles polyèdres ont trois arêtes égales, chacune à chacune, et que les plans menés par les extrémités de ces arêtes coupent les faces des angles polyèdres de manière que les*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

intersections soient des polygones égaux, les deux angles polyèdres seront égaux.

En effet, supposons que les arêtes AS, ES et DS (fig. 281) soient respectivement égales aux arêtes *as*, *es* et *ds*, et que les polygones ABCDE, *abcde* soient égaux; je dis que les angles polyèdres ABCDES, *abcdes* seront égaux. Car, d'après ces hypothèses, les triangles AES et *aes*, ESD et *esd* ont les trois côtés égaux, ce qui donne les angles AES = *aes*, DES = *des*, et, les polygones ABCDE, *abcde* étant égaux, l'angle AED = *aed*; l'angle trièdre formé par les trois angles plans AED, AES, DES est donc égal à celui formé par les angles plans *aed*, *aes*, *des*; si donc on fait coïncider ces deux angles trièdres, les polygones égaux ABCDE, *abcde* et les sommets S, *s* coïncideront aussi, et par conséquent les deux angles polyèdres.

3me. LEÇON.

Les Polyèdres.

59. DÉFINITIONS. On appelle *polyèdre*, tout corps terminé par des surfaces planes. Les intersections des surfaces planes qui terminent le polyèdre, s'appellent les *arêtes*, et forment, sur les surfaces du corps, des polygones qui sont les faces du polyèdre.

Les faces d'un polyèdre sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, des exagones, etc. Ces polygones sont réguliers ou irréguliers; si toutes les faces d'un polyèdre sont des polygones réguliers égaux, le polyèdre est dit régulier; si les faces du polyèdre étaient des polygones réguliers inégaux, le polyèdre serait irrégulier, et à plus forte raison si ses faces étaient des polygones irréguliers.

De cette définition il résulte (ainsi que nous le démontrerons tout-à-l'heure) qu'il n'y a que cinq polyèdres réguliers; mais qu'il y en a une infinité d'irréguliers.

Les polyèdres se distinguent encore par le nombre de leurs faces; le plus simple de tous a quatre faces; il s'appelle *tétraèdre;* celui qui a cinq faces s'appelle *pentaèdre;* celui qui en a six, *exaèdre;* celui qui en a sept, *eptaèdre;* celui qui en a huit, *octaèdre;* neuf, *ennéaèdre;* dix, *décaèdre;* onze, *ondécaèdre;* douze, *duodécaèdre;* etc. Les faces des polyèdres se réunissent de manière à former des angles polyèdres dont les plus simples ont trois faces.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

60. THÉORÈME 33. *Il ne peut y avoir que cinq polyèdres réguliers.*

En effet, les polygones réguliers les plus simples sont les triangles équilatéraux, les carrés, les pentagones, les exagones, etc. Mais un angle du triangle équilatéral (géom. pl., n°. 274) est de 60°., un angle du carré est de 90°., un angle du pentagone est de 108°., un angle de l'exagone est de 120°., etc.; il faut au moins trois angles plans pour former un angle polyèdre, et (n°. 51) la somme de tous les angles plans d'un angle polyèdre est toujours moindre que 360°.; 1°. si donc nous formons un angle polyèdre avec l'angle du triangle équilatéral, comme il est de 60°., en en prenant 3, nous aurons 180°., plus petit que 360°.; si nous en prenons 4, il viendra 240°., plus petit que 360°.; si nous en prenons 5, nous aurons 300°., plus petit que 360°.; mais si nous en prenions 6, nous aurions 360°., ce qui ne peut avoir lieu dans un angle polyèdre; ainsi nous ne pourrons former que 3 angles polyèdres avec l'angle du triangle équilatéral; 2°. en prenant le carré, il est évident que nous ne pourrons former qu'un angle trièdre; 3°. à plus forte raison en prenant le pentagone, et 4°. si nous prenions trois fois l'angle de l'exagone, nous aurions 360°.

Il est clair qu'en prenant trois fois l'angle d'un polygone régulier d'un plus grand nombre de côtés, on aurait plus de 360°., et par conséquent on ne pourrait plus former d'angles polyèdres. Ainsi, on ne pourra former que 3 polyèdres réguliers avec le triangle équilatéral, un avec le carré, et un avec le pentagone, ce qui fait cinq, au plus. Il serait facile de démontrer qu'ils ont lieu tous les cinq.

61. DÉFINITION. On appelle *prisme*, un polyèdre terminé par deux faces ABCDE, GHIKF (fig. 282) égales, opposées et parallèles, qui peuvent être des polygones quelconques, et qui sont réunies par des parallélogrammes ABHG, BCIH, CDKI, DEFK, EAGF, qui sont ce qu'on appelle les *faces latérales*. Les deux faces quelconques, égales et parallèles, sont *les bases*, et les intersections des faces latérales les *arêtes* du prisme : les arêtes d'un prisme sont égales, puisqu'elles sont des parallèles comprises entre deux plans parallèles. Si elles sont perpendiculaires au plan de la base, le prisme est *droit;* il est oblique dans tout autre cas.

Un prisme prend le nom de *parallélipipède*, lorsque ses bases sont des parallélogrammes, de sorte qu'un parallélipipède est un prisme dont toutes les faces sont des parallélogrammes. Il est rectangle, quand ses faces sont des rectangles, et il est droit, quand ses faces latérales sont des rectangles, les deux bases étant des parallélogrammes quelconques.

Les prismes se distinguent par le nombre des côtés de leurs bases : si la base

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

est un triangle, le prisme est dit *triangulaire;* si elle est un quadrilatère, le prisme est dit *quadrilatère*, etc.

62. THÉORÈME 34. *Si l'on coupe un prisme quelconque par deux plans parallèles, les sections abcde, fghik* (fig. 282) *qu'on obtiendra seront égales.*

En effet, les sections de deux plans parallèles coupés par un troisième (n°. 30) sont parallèles; donc les côtés des sections *abcde, fghik* sont parallèles, et par conséquent leurs angles sont égaux, chacun à chacun; mais les côtés de ces sections sont, non-seulement parallèles, mais encore compris entre des parallèles; donc ils sont égaux, chacun à chacun; donc enfin les deux sections sont égales.

63. *Corollaire.* Si ces sections étaient parallèles aux bases, elles seraient égales à ces bases.

64. DÉFINITION. La section faite dans un prisme par un plan perpendiculaire aux arêtes s'appelle la *section droite.* Si le prisme est droit, la section droite sera l'une des bases.

65. THÉORÈME 35. *La superficie d'un prisme quelconque, sans y comprendre celle des deux bases, est égale au contour ou périmètre de la section droite multipliée par la longueur d'une arête.*

En effet, supposons que la section droite soit *abcde* (fig. 282); les côtés de cette section seront perpendiculaires aux arêtes du prisme; de sorte que ces côtés seront les hauteurs des parallélogrammes qui sont les faces latérales du prisme : la superficie de chacun de ces parallélogrammes sera donc égale à l'arête du prisme multipliée par le côté correspondant de la section droite; toutes ces superficies auront donc un facteur commun qui sera l'arête du prisme; la somme de toutes ces superficies (qui est celle dont il est question) sera donc égale à ce facteur commun multiplié par la somme des autres facteurs, qui sera le contour de la section droite; ce qu'il fallait démontrer.

66. THÉORÈME 36. *Deux prismes sont égaux lorsqu'ils ont un angle trièdre formé par trois faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées.*

D'abord il est évident que les angles polyèdres d'un prisme quelconque sont trièdres, et que dans la formation de ces angles trièdres il entre toujours un angle de l'une des bases.

Or, par hypothèse, les deux prismes ont un angle trièdre formé par trois faces égales et semblablement disposées, c'est-à-dire formé par trois angles plans égaux, chacun à chacun; donc ces deux angles trièdres sont égaux (n°. 52); faisons-les coïncider : la première base de l'un des prismes coïncidera avec la première de l'autre; mais les deux autres faces des angles trièdres coïncideront aussi; or, ces deux dernières faces sont des faces latérales des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

prismes, et aboutissent aux bases supérieures; donc ces bases supérieures passeront par les deux mêmes droites qui se coupent; donc ces deux bases coïncideront, toutes les autres faces des prismes coïncideront donc aussi; donc enfin, les deux prismes sont égaux.

67. THÉORÈME 37. *Les faces opposées d'un parallélipipède quelconque sont égales et parallèles.*

Soit le parallélipipède ABCDEFGH (fig. 283), je dis que les faces opposées ABGF, DCHE, sont égales et parallèles; car AB est égal et en même temps parallèle à DC, comme côtés opposés du même parallélogramme; BG est égal et en même temps parallèle à CH par la même raison; les angles ABG, DCH ont donc les côtés parallèles; donc (n°. 32) ces angles sont égaux, et leurs plans sont parallèles; et, de plus, les deux faces ABGF, DCHE sont égales, puisqu'elles ont un angle égal compris entre côtés égaux, chacun à chacun.

68. THÉORÈME 38. *Les diagonales d'un parallélipipède se coupent mutuellement en deux parties égales.*

En effet, si par deux arêtes opposées BC, FE (fig. 283) on mène un plan BCEF, l'intersection de ce plan avec le prisme sera un parallélogramme; mais les diagonales BE, CF du parallélipipède, ne sont autres choses que celles du parallélogramme BCEF; donc ces deux diagonales se coupent en deux parties égales.

69. DÉFINITIONS. On appelle *volume* d'un corps l'étendue à trois dimensions que ce corps occupe dans l'espace. Si deux corps ont le même volume, ils sont *équivalens.*

70. THÉORÈME 39. *Deux parallélipipèdes de même base et de même hauteur sont équivalens.*

En effet, supposons que les deux parallélipipèdes ABCDEFGH, ABCDMIKL (fig. 284) soient disposés de manière que leurs bases ABCD coïncident, et qu'ils soient compris latéralement entre deux plans parallèles ABKF, DCLE. Dans ce cas, les deux parallélipipèdes seront compris dans le prisme ABKFEDCL; or, si de ce prisme on retranche le prisme triangulaire BKGHCL, il restera le parallélipipède ABGFEDCH, et si du même prisme total on retranche le prisme triangulaire AIFEMD, il restera le parallélipipède AIKBCLMD; si donc les deux prismes triangulaires que nous venons de retrancher du même prisme total étaient égaux, les restes ou les parallélipipèdes en question seraient équivalens, et la proposition serait démontrée. Or, les deux prismes triangulaires BKGHCL, AIFEMD, ont les bases BKG AIF égales, puisque les deux angles GBK, FAI ont les côtés BK, AI, et BG

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

AF, respectivement égaux et parallèles, les faces BKLC, AIMD égales, comme faces opposées du même parallélipipède, et les faces BGHC, AFED, par la même raison; ces deux prismes triangulaires ont donc un angle trièdre formé par trois faces égales, chacune à chacune; donc ces deux prismes sont égaux; ce qu'il fallait démontrer.

Si les deux parallélipipèdes en question ABCDMLKI, ABCDQNOP, ayant leurs bases égales en coïncidence, n'étaient plus compris latéralement entre deux plans parallèles; en prolongeant indéfiniment les faces opposées ABKI, DCLM du premier vers les points F et E, et les faces opposées ADQN, BCPO du second vers les points F et G, on formerait un parallélipipède auxiliaire ABCDEFGH, qui serait à la fois équivalent aux deux parallélipipèdes en question qui, par conséquent, seraient eux-mêmes équivalens entre eux.

71. *Corollaire.* Il suit de là qu'un parallélipipède quelconque pourra toujours se transformer en un parallélipipède droit (n°. 61), de même base, de même hauteur, et de même volume.

72. THÉORÈME 40. *Tout parallélipipède droit, peut se changer en un parallélipipède rectangle équivalent, qui aura la même hauteur et une base équivalente.*

Soit, en effet, le parallélipipède droit ABCDEFAK (fig. 285) : si dans la base ABCK on mène les droites BI, AO, perpendiculaires à AB, le rectangle ABIO sera équivalent au parallélogramme ABCK; si, ensuite sur les droites BI, AO on élève les plans BIHG, AOLF, on aura le parallélipipède rectangle ABIHGFLO; or, pour passer du parallélipipède donné à ce dernier, il est clair qu'il faut ajouter le prisme triangulaire AKOLFE, et retrancher le prisme triangulaire BCIHGD du premier parallélipipède; or, il est évident que ces deux prismes triangulaires sont parfaitement égaux; donc le parallélipipède rectangle est équivalent au premier, a la même hauteur et une base équivalente; ce qu'il fallait démontrer.

73. THÉORÈME 41. *Soit un parallélipipède quelconque* ABCDEFGH (fig. 286); *si par les arêtes opposées* AH, CF *on mène un plan, le parallélipipède* ABCDEFGH *sera divisé en deux prismes triangulaires* ABCFGH, ACDEFH, *équivalens.*

Si le parallélipipède était droit, la proposition serait évidente, car alors les deux prismes triangulaires pourraient coïncider, ainsi qu'il est facile de s'en rendre raison. Cela posé, par les extrémités A et H d'une arête AH, menons les plans AMNO, HLKI perpendiculaires à cette arête AH; ces deux plans seront parallèles (n°. 35) et les sections AMNO, HLKI seront égales (n°. 62); je dis maintenant, que le parallélipipède droit AMNOIKLH est équivalent

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

au parallélipipède ABCDEFGH; car pour passer du droit à l'oblique, il est clair qu'il faut retrancher le polyèdre HLKIEFG, et ajouter le polyèdre AMNODCB; or, ces deux polyèdres sont parfaitement égaux, puisque la base AMNO = HLKI, les hauteurs MB = LG, NC = KF et OD = IE, ainsi qu'il est facile de le voir; d'où il suit que ces deux polyèdres peuvent coïncider, et sont, par conséquent, égaux; donc le parallélipipède droit AMNOIKLH est équivalent à l'oblique ABCDEHGF. Menons le plan ANFH, le parallélipipède droit sera divisé en deux prismes triangulaires AMNKHL, ANOIKH parfaitement égaux, et le parallélipipède oblique en deux autres prismes triangulaires ABCFGH, ACDEFH respectivement équivalens à ceux du parallélipipède droit, à cause de la coïncidence des polyèdres AMNODCB, HLKIEFG; donc un parallélipipède quelconque peut toujours se décomposer en deux prismes triangulaires équivalens.

74. *Corollaire.* Il suit de là que tout prisme triangulaire est la moitié d'un parallélipipède de même hauteur, et d'une base double de celle du prisme qui est un triangle. Par conséquent (n°. 70), *les prismes triangulaires de même base et de même hauteur sont équivalens.*

75. THÉORÈME 42. *Deux parallélipipèdes rectangles de même base sont entre eux comme les hauteurs.*

1°. Supposons que les hauteurs AF, IO des parallélipipèdes ABCDEFGH, IKLMNOPQ (fig. 287) de même base soient commensurables; qu'elles soient entre elles, par exemple, comme 7 : 4; en divisant la hauteur AF en 7 parties égales, et celle IO en 4, les parties de AF seront égales à celles de IO, et si par les points de division on mène, dans chaque parallélipipède, des plans *abcd*, *efgh*,....., *iklm*, *nopq*,..... parallèles à leurs bases, on aura 7 petits parallélipipèdes égaux dans le parallélipipède dont la hauteur est représentée par 7, et 4 dans l'autre; si donc on prend ces petits parallélipipèdes pour unités de volume, il est clair que les deux parallélipipèdes en question seront dans le rapport de 7 : 4; mais les hauteurs sont dans le même rapport; donc ABCDEFGH : IKLMNOPQ :: AF : IO; ce que 1°. il fallait démontrer.

2°. Supposons que les hauteurs des deux parallélipipèdes de même base aient des hauteurs incommensurables; dans ce cas, superposons-les de manière que leurs bases égales coïncident, et que ABCDEFGH soit le grand, et ABCDMIKL (fig. 288) le petit; je dis qu'on aura encore ABCDEFGH : ABCDMIKL :: AF : AI..... (1). En effet, si cette proportion n'a pas lieu, c'est que le dernier terme AI est trop grand ou trop petit; supposons qu'il soit trop petit, et qu'au lieu de AI, il faille AN, de sorte que ABCDEFGH : ABCDMIKL :: AF : AN..... (2). Quelque petite que soit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'augmentation IN de AI, il est clair qu'on pourra toujours diviser AF en un assez grand nombre de parties égales pour que ces parties soient encore plus petites que cette augmentation; il y aura donc au moins un point de division a situé entre les points I et N; si donc par ce point a on mène un plan *abcd* parallèle à la base ABCD, on aura un parallélipipède ABCD*dabc* dont la hauteur Aa sera commensurable à celle AF du grand; on aura donc ABCD*dabc* : ABCDEFGH :: Aa : AF; qu'on multiplie par ordre cette dernière proportion par la proportion (2), et on aura ABCD*dabc* : ABCDMIKL :: Aa : AN; mais dans cette dernière le premier terme est plus grand que le second; il faudrait donc Aa > AN, et c'est le contraire; donc AN est trop grand; donc enfin AI de la proportion (1) n'est pas trop petit. On démontrerait de même que AI n'est pas trop grand; donc la proportion (1) a lieu; ce que, définitivement, il fallait démontrer.

76. THÉORÈME 43. *Deux parallélipipèdes rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Soient ABCDEFGH, IKLDEONM (fig. 289) les deux parallélipipèdes de même hauteur, disposés, l'un par rapport à l'autre, ainsi qu'on le voit dans la figure 289; si l'on prolonge la face KLMN jusqu'à sa rencontre PQ avec la face ABGF du grand parallélipipède, on aura un parallélipipède auxiliaire APLDEFQM, qui aura même base que chacun des parallélipipèdes en question, en prenant pour base les faces que le cas exige; donc, on aura ABCDEFGH : APLDEFQM :: AB : AP ou IK, et APLDEFQM : IKLDEONM :: AD : DI; donc, en multipliant par ordre, ABCDEFGH : IKLDEONM :: AB × AD : IK × DI; ce qu'il fallait démontrer.

77. *Corollaire* 1. Il suit, des deux dernières propositions, que deux parallélipipèdes quelconques de mêmes bases ou de bases équivalentes, sont entre eux comme leurs hauteurs, et ceux qui ont mêmes hauteurs sont entre eux comme leurs bases; car il a été démontré (n°. 71 et 72) que tout parallélipipède pouvait se transformer en un parallélipipède rectangle de même hauteur, de base équivalente, et de même volume.

78. *Corollaire* 2. Nous avons vu (n°. 73) que tout prisme triangulaire était la moitié d'un parallélipipède de même hauteur, et de base double; d'où il suit que deux prismes triangulaires de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, et que ceux qui ont la même base ou des bases équivalentes, sont entre eux comme leurs hauteurs.

79. THÉORÈME 44. *Deux parallélipipèdes rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs respectives.*

Soient les deux parallélipipèdes ABCDEFGH, IKLCNOPM (fig. 290)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

disposés sur le même plan, ainsi qu'on le voit dans la figure 290; si l'on prolonge les faces latérales du petit jusqu'à la hauteur du grand, on aura le parallélipipède IKLCHSQR qui aura la même base que le petit et la même hauteur que le grand; il en résultera donc que ABCDEFGH : IKLCHSQR :: AB × BC : IK × IC, et IKLCHSQR : IKLCNOPM :: BG : IO; si donc on multiplie par ordre, on aura (1)..... ABCDEFGH : IKLCNOPM :: AB × BC × BG : IK × IC × IO; ce qu'il fallait démontrer.

80. *Corollaire* 1. Si toutes les faces du parallélipipède IKLCNOPM sont des carrés, ce parallélipipède sera ce qu'on appelle *un cube* ou un *exaèdre régulier*. Prenons ce cube pour unité de volume, et un arête pour unité de longueur; mesurons les dimensions du grand parallélipipède avec l'arête du cube, et la proportion (1) se réduira à celle-ci ABCDEFGH : 1 :: AB × BC × BG : 1; d'où ABCDEFGH = AB × BC × BG; c'est-à-dire que, le volume d'un parallélipipède rectangle est égal à un nombre d'unités de volume égal au nombre d'unités de longueur du produit des trois dimensions du parallélipipède, ou, en d'autres termes, à cause que le produit des deux dimensions de la base donne la superficie de cette base, *le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

81. *Corollaire* 2. Attendu que tout parallélipipède peut se changer (n°. 71 et 72, en un parallélipipède rectangle équivalent, de même hauteur et de bases équivalentes, *le volume d'un parallélipipède quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

82. *Corollaire* 3. Tout parallélipipède est double d'un prisme triangulaire de même hauteur, la base du prisme étant la moitié de celle du parallélipipède; d'où il suit que *le volume d'un prisme triangulaire est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

83. *Corollaire* 4. Un prisme quelconque peut toujours se décomposer en prisme triangulaire; car (fig. 282) si dans la base ABCDE, du prisme ABCDEFGHIK, on mène les diagonales AD, AC, et que par ces diagonales et les arêtes correspondantes on mène les plans ADKG, ACIG, on voit en effet que le prisme ABCDEFGHIK sera divisé en trois prismes triangulaires ADEFGK, ADCIGK et ACBHIG. Or, si nous appelons h la hauteur du prisme total, qui est celle des prismes triangulaires, les volumes de ces derniers seront $h \times$ ADE, $h \times$ ADC et $h \times$ ACB; mais la somme de ces volumes est celle du prisme total; donc ce dernier volume sera égal à $h \times \text{ADE} + h \times \text{ADC} + h \times \text{ACB} = h(\text{ADE} + \text{ADC} + \text{ACB}) = h \times \text{ABCDE}$; c'est-à-dire que, *le volume d'un prisme quelconque est égal au produit de la base par la hauteur.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4^me^. LEÇON.

Suite des Polyèdres; les Pyramides.

84. DÉFINITIONS. Une *pyramide* est un polyèdre terminé par une base, qui peut être un polygone quelconque, dont les côtés sont les bases d'autant de triangles qui se réunissent de manière que leurs sommets sont en un même point situé au-dessus de la base de la pyramide; lequel point est le sommet de cette dernière. L'ensemble de ces triangles forme la surface latérale de la pyramide.

Les pyramides sont régulières ou irrégulières; une pyramide est régulière ou droite, quand sa base est un polygone régulier, et que la perpendiculaire, abaissée du sommet sur la base, tombe sur le centre de cette dernière.

Les pyramides se distinguent par le nombre des côtés de la base; si cette base est un triangle, la pyramide est dite *triangulaire*, et est ce qu'on appelle *tétraèdre;* si elle était un quadrilatère, la pyramide serait quadrangulaire; si elle était un pentagone, la pyramide serait pentagonale; etc.

85. THÉORÈME 45. *Deux pyramides triangulaires sont égales, quand elles ont les quatre faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées.*

En effet, soient deux pyramides triangulaires ABCD, *abcd* (fig. 291) telles, que les faces ABC, ADB, ADC et BDC de l'une, soient respectivement égales aux faces *abc*, *adb*, *adc* et *bdc* de l'autre; les quatre angles trièdres de la première seront respectivement égaux à ceux de la seconde, puisque ces angles trièdres sont respectivement formés par trois angles plans égaux, chacun à chacun (n°. 52); si donc on fait coïncider les deux bases égales ABC, *abc*, toutes les autres faces coïncideront, et par conséquent les pyramides sont égales.

86. THÉORÈME 46. *Deux pyramides triangulaires sont égales quand elles ont trois faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées.*

En effet, supposons que les deux pyramides ABCD, *abcd* (fig. 291) aient les faces ABD, ADC, BDC de l'une, respectivement égales aux faces *abd*, *adc*, *bdc* de l'autre; il en résultera que AB=*ab*, AC=*ac*, et BC=*bc*; d'où il s'ensuivra que les deux faces ABC, *abc* sont deux triangles qui ont les trois côtés égaux, chacun à chacun; donc ces deux triangles sont égaux; donc enfin (n°. 85) les deux pyramides sont égales.

87. THÉORÈME 47. *Deux pyramides triangulaires sont égales, lorsqu'elles ont deux faces adjacentes égales et également inclinées.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Supposons qu'en effet les deux pyramides ABCD, *abcd* (fig. 291) aient les faces adjacentes ABC, ABD de l'une, respectivement égales aux faces adjacentes *abc*, *abd* de l'autre, et que ces faces aient la même inclinaison dans les deux pyramides; l'angle trièdre, qui a son sommet en A, sera égal à l'angle trièdre qui a son sommet en *a* (n°. 54); donc l'angle plan DAC = *dac*; mais par hypothèse AC = *ac* et AD = *ad*; donc les deux triangles ADC, *adc* sont égaux, puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux, chacun à chacun; donc les deux pyramides sont égales, puisqu'elles ont trois faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées (n°. 86).

88. *Remarque.* D'après les propositions des numéros 55, 56, 57 et 58, il est clair que deux pyramides quelconques seront égales quand elles auront l'angle polyèdre du sommet égal, et deux faces latérales adjacentes égales, chacune à chacune, ou lorsqu'elles se composeront d'un même nombre de pyramides triangulaires égales, chacune à chacune, et semblablement disposées; que deux pyramides quelconques égales peuvent toujours se décomposer en un même nombre de pyramides triangulaires égales, chacune à chacune, et semblablement disposées.

89. THÉORÈME 48. *Deux pyramides quelconques sont égales lorsqu'elles ont les bases et deux faces latérales adjacentes égales et semblablement disposées.*

Supposons qu'en effet les deux pyramides ABCDES, *abcdes* (fig. 281) aient les bases égales ABCDE, *abcde*, et les faces latérales ABS et *abs*, AES et *aes* respectivement égales et semblablement disposées; les angles trièdres, qui ont leurs sommets aux points A et *a* seront égaux; on pourra donc les faire coïncider, et alors les bases coïncideront ainsi que les sommets, d'où il suit évidemment que toutes les faces des deux pyramides coïncideront.

90. THÉORÈME 49. *La superficie latérale d'une pyramide régulière quelconque est égale au contour de la base multiplié par la moitié de la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide sur la base d'un triangle latéral* (1).

En effet, il est évident que les triangles qui sont les faces latérales d'une pyramide régulière (n°. 84) sont isocèles et égaux; si donc on appelle *h* l'apothème et *a* l'un des côtés de la base de la pyramide, la superficie d'un triangle sera $a \times \frac{h}{2}$; mais il y aura autant de ces triangles que de faces latérales à la pyramide, ou de côtés à la base; si donc *n* est le nombre de ces

(1) Cette perpendiculaire s'appelle l'*apothème*.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

côtés, la superficie latérale de la pyramide sera $na \times \frac{h}{2}$. Mais n fois le côté a est le contour de la base; si donc on l'appelle c, on aura $c \times \frac{h}{2}$ pour la superficie en question; ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Quant à la superficie latérale d'une pyramide irrégulière, on ne peut l'obtenir qu'en prenant celle de chaque triangle latéral, et faisant ensuite la somme de toutes les superficies partielles.

91. THÉORÈME 50. *Si l'on coupe une pyramide quelconque par deux plans parallèles, les sections seront des polygones semblables.*

Soient *abcde*, *fghik* les sections faites dans la pyramide ABCDES (fig. 292) par deux plans parallèles; en vertu de ce que les intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième sont parallèles, les côtés homologues des deux sections seront parallèles; donc les angles de ces deux polygones seront égaux; d'où il suit qu'il ne reste plus qu'à faire voir que leurs côtés homologues sont proportionnels, pour avoir démontré qu'ils sont semblables. Or, le parallélisme des côtés homologues des deux sections donne $Sa : Sf :: ab : fg :: Sb : Sg :: bc : gh ::$ etc., ce qui fait voir que $ab : fg :: bc : gh ::$ etc.; donc enfin les deux sections parallèles sont des polygones semblables.

92. *Corollaire* 1. Il suit de là que, si l'on coupe une pyramide par un plan parallèle à la base, la section sera semblable à la base.

93. *Corollaire* 2. Il suit de là aussi que deux plans parallèles coupent proportionnellement les arêtes de la pyramide qui aboutissent au sommet.

94. *Remarque.* Il serait aisé de démontrer que, réciproquement, si deux plans coupent proportionnellement les arêtes qui aboutissent au sommet d'une pyramide quelconque, ces deux plans seront parallèles.

95. THÉORÈME 51. *Toute pyramide triangulaire peut se décomposer en deux prismes triangulaires équivalens et en deux pyramides triangulaires égales.*

En effet, divisons en deux également les arêtes de la pyramide triangulaire ABCD (fig. 293), et joignons les points de divisions par des droites; si ensuite nous supposons des plans menés par ces droites, nous verrons que la pyramide ABCD se trouvera décomposée en deux pyramides triangulaires EFGD, HFKB, et en deux prismes triangulaires AHIGEF, HKFGIC. Maintenant, je dis 1°. que les deux pyramides triangulaires EFGD, HBKF sont égales; car il est évident, d'après les hypothèses de la division de la pyramide totale, que les faces de ces deux pyramides partielles sont égales, chacune à chacune; 2°. que les deux prismes triangulaires AHIGFE, HKFGIC sont équivalens. Car, si sur la base HICK on construit le parallélipipède HICKLMGF de même hauteur que le prisme AHIGEF, le prisme triangu-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

laire HKFGIC sera la moitié de ce parallélipipède; mais en menant le plan IKLG, on aura aussi le prisme triangulaire HIKLGF, qui sera la moitié du même parallélipipède; donc les deux prismes HKFGIC, HIKLGF sont équivalens: mais le dernier est la moitié du parallélipipède AIKHFEGL, et est par conséquent équivalent au prisme AHIGEF; ce dernier et le prisme HKFGIC sont donc équivalens à un troisième; donc ils sont équivalens entre eux. Ainsi la proposition se trouve démontrée.

96. *Corollaire* 1. La hauteur du prisme AHIGEF est la moitié de celle de la pyramide ABCD, le plan EFG passant par le milieu des arêtes AD, BD et CD; si donc h est la hauteur de cette dernière, celle du prisme AHIGEF sera $\frac{h}{2}$, et son volume $\frac{h}{2} \times$ AIH; mais AIH $= \frac{1}{4}$ABC; donc AHIGEF $= \frac{h}{2} \times \frac{1}{4}$ABC, et par conséquent le volume des deux prismes réunis qui entrent dans la composition de la pyramide ABCD sera $h \times \frac{1}{4}$ABC. Mais ces deux prismes réunis sont moindres que la pyramide entière; d'où il suit que *le volume d'une pyramide triangulaire quelconque est plus grand que la hauteur de cette pyramide multipliée par le quart de sa base.*

97. *Corollaire* 2. L'un des prismes triangulaires qui entrent dans la composition de la pyramide entière est évidemment plus grand que l'une des pyramides triangulaires partielles; si donc on regarde, pour un moment, les pyramides partielles comme équivalentes aux prismes, et qu'on réunisse leurs volumes à celui des deux prismes réunis, on aura pour volume total $h \times \frac{1}{2}$ABC, et ce volume total étant celui de quatre prismes réunis, sera plus grand que celui de la pyramide entière; d'où il résulte que *le volume d'une pyramide triangulaire quelconque est plus petit que la hauteur de cette pyramide multipliée par la moitié de sa base.*

98. THÉORÈME 52. *Le volume d'une pyramide quelconque est égal à la hauteur de cette pyramide multipliée par le tiers de sa base.*

Je dis donc que le volume de la pyramide ABCD (fig. 293) est égal à $h \times \frac{1}{3}$ABC, h étant la hauteur. En effet, si cela n'a pas lieu, au tiers de la base il faudra ajouter ou retrancher quelque chose; soit m ce quelque chose; nous aurons ABCD $= h \times (\frac{1}{3}$ABC $\pm m)$. Si de part et d'autre nous retranchons le volume des deux prismes partiels réunis (qui est (n°. 96) $h \times \frac{1}{4}$ABC) dans le premier membre de cette égalité, il ne restera plus que le volume des deux pyramides partielles, et nous aurons 2EFGD $= h \times (\frac{1}{3}$ABC $\pm m) - h \times \frac{1}{4}$ABC $= h(\frac{1}{3}$ABC $- \frac{1}{4}$ABC $\pm m) = h(\frac{1}{12}$ABC $\pm m)$. La base ABC est 4 fois EFG: si donc nous substituons, nous aurons 2EFGD $= h(\frac{4}{12}$EFG $\pm m) = h(\frac{1}{3}$EFG $\pm m)$; d'où EFGD $= \frac{h}{2}(\frac{1}{3}$EFG $\pm m) = h'(\frac{1}{3}$EFG $\pm m)$ en fai-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sant $\frac{h}{2} = h'$, qui est la hauteur de la pyramide EFGD. Ainsi la forme du second membre reste la même, en passant de la pyramide ABCD à celle EFGD; si donc on voulait passer de cette dernière à la pyramide *abc*D, après avoir décomposé EFGD de la même manière que ABCD, on aurait $abcD = h''(\frac{1}{3}abc \pm m)$; et si de cette dernière on voulait passer à celle *efg*D, on aurait $efgD = h'''(\frac{1}{3}efg \pm m)$,..... (1), et ainsi de suite, en poussant les choses aussi loin qu'on voudrait; mais les bases ABC, EFG, *abc*, *efg*, etc. vont continuellement de 4 en 4 fois plus petites; on pourra donc pousser les décompositions successives assez loin, pour que la dernière base soit aussi petite que l'on voudra : supposons donc que m ait le signe +, et que, quelque petite que soit cette quantité m, on ait poussé la décomposition assez loin pour que la dernière base *efg* soit telle, que $m > \frac{1}{6}efg$; si au lieu de m on met $\frac{1}{6}efg$ dans la formule (1); comme m est plus grand, nous aurons $efgD > h'''(\frac{1}{3}efg + \frac{1}{6}efg)$, d'où $efgD > h''' \times \frac{1}{2}efg$; de sorte qu'en partant de l'hypothèse qu'il faut multiplier la hauteur par une quantité plus grande que le tiers de la base d'une pyramide triangulaire, pour en avoir le volume, on parviendrait à une pyramide triangulaire dont le volume serait plus grand que la hauteur multipliée par la moitié de la base, ce qui est contraire à ce qui a été démontré au numéro 97; donc le produit de la hauteur par le tiers de la base n'est pas trop petit. Supposons maintenant que m ait le signe —, et que l'on ait poussé la décomposion ci-dessus assez loin pour que $m > \frac{1}{12}efg$; en substituant dans la formule (1), il viendra $efgD < h'''(\frac{1}{3}efg - \frac{1}{12}efg)$; d'où $efgD < h''' \times \frac{1}{4}efg$; de sorte qu'en partant de l'hypothèse qu'il faut multiplier la hauteur par une quantité plus petite que le tiers de la base d'une pyramide triangulaire, pour en avoir le volume, on parviendrait à une pyramide de même espèce, dont le volume serait plus petit que le produit de la hauteur par le quart de la base, ce qui est contraire à ce qui a été démontré au numéro 96; donc enfin *le volume d'une pyramide triangulaire est égal au produit de la hauteur par le tiers de la base, ou du tiers de la hauteur par la base tout entière.*

99. *Corollaire* 1. Il suit de là que le volume d'une pyramide quelconque est égal au produit de la base par le tiers de la hauteur; car toute pyramide peut se décomposer en pyramides triangulaires de même hauteur que la pyramide en question, et la somme des volumes de toutes ces pyramides partielles est le volume de la pyramide entière. Or, ces volumes partiels ont un facteur commun qui est le tiers de la hauteur, et les facteurs inégaux sont les bases triangulaires dont la somme est égale à la base de la pyramide totale; donc *le volume de la pyramide entière sera le produit de la base par le tiers de la hauteur.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

100. *Corollaire* 2. Il résulte de là 1°. que deux pyramides quelconques qui ont la même hauteur et des bases équivalentes ont le même volume; 2°. que deux pyramides qui ont même hauteur sont entre elles comme leur base, et 3°. celles qui ont mêmes bases ou des bases équivalentes, sont entre elles comme leurs hauteurs.

101. THÉORÈME 53. *Un prisme triangulaire tronqué est égal à la somme de trois pyramides triangulaires qui ont pour base celle du prisme, et pour hauteur respectivement celles des trois sommets de la section.*

Soit ABCDEF (fig. 294) un prisme triangulaire tronqué, dont ABC est la base; si par le sommet D et l'arête AB on fait passer le plan ADB, on pourra enlever la pyramide triangulaire ABCD, dont la base est celle ABC du tronc de prisme, et la hauteur du sommet D, et il restera une pyramide quadrangulaire dont la base sera le trapèze ABEF et le sommet le point D.

Si maintenant on fait passer un plan ADE par les arêtes AD, DE, on partagera cette pyramide quadrangulaire en deux pyramides triangulaires ABED, AEFD. L'arête DC du tronc de prisme étant parallèle au plan AFEB sur lequel sont les bases de ces deux pyramides triangulaires, et le point D de cette arête étant le sommet commun de ces deux pyramides, on pourra faire glisser celui de la première ABED, de manière que ce sommet étant au point C, cette première pyramide n'aura pas changé de base, aura conservé la même hauteur et par conséquent le même volume, et aura pris la forme ABCE. La dernière AEFD, sans changer de sommet, pourra prendre la base ABF au lieu de celle AEF qu'il a; car ces deux triangles ABF, AEF ont la même base AF, et leurs sommets B et E sur une même droite BE parallèle à leur base commune; d'où il suit que ces deux triangles sont équivalens, et que, par conséquent, la pyramide ne changera pas de volume, en devenant ABFD. Maintenant, faisons glisser son sommet D jusqu'en C sur l'arête DC; la hauteur, la base et par conséquent le volume resteront les mêmes, et la pyramide deviendra ABCF, de sorte qu'elle aura la base du tronc de prisme et la hauteur du troisième sommet de ce tronc.

102. *Corollaire.* Le volume du tronc de prisme sera donc égal à la somme des volumes des trois pyramides dans lesquelles nous venons de le décomposer; si donc h, h' et h'' sont les hauteurs respectives des trois sommets, les volumes des trois pyramides seront $ABC \times \frac{h}{3}$, $ABC \times \frac{h'}{3}$ et $ABC \times \frac{h''}{3}$, et leur somme, ou le volume du prisme tronqué $ABCDEF = ABC \times \frac{(h+h'+h'')}{3}$.

103. THÉORÈME 54. *Un tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

peut toujours se décomposer en trois pyramides triangulaires qui ont la même hauteur que le tronc, et dont les bases sont, pour la première, la base inférieure du tronc; pour la seconde, la base supérieure, et pour la troisième, une moyenne proportionnelle entre les deux premières.

Soit ABCDEF (fig. 295) un tronc quelconque de pyramide triangulaire; si par le sommet F et l'arête AC on fait passer le plan FAC, on pourra enlever la pyramide triangulaire ABCF, dont la base ABC est l'inférieure du tronc, et le sommet F est sur la base supérieure, c'est-à-dire que cette première pyramide triangulaire a la hauteur du tronc. Ayant enlevé cette première pyramide triangulaire, il restera une pyramide quadrangulaire ACDEF, qu'on pourra partager en deux autres triangulaires CDEF, CAEF, en menant un plan par les arêtes EF, CF. L'une CDEF, de ces deux pyramides triangulaires, aura pour base la base supérieure DEF, et son sommet C sera sur la base inférieure; quant à la dernière CAEF, nous la transformerons en une autre CAEG équivalente, en faisant glisser le sommet F sur une droite FG parallèle à EA, jusqu'au point G. La base de cette dernière pyramide triangulaire étant le triangle ACG, le sommet sera le point E situé sur la base supérieure du tronc; de sorte qu'il ne nous reste plus qu'à faire voir que la base ACG est moyenne proportionnelle entre les deux bases du tronc.

Or, les deux triangles ABC, AGC ont même hauteur; ils seront donc entre eux comme leurs bases; de sorte qu'on aura ABC : AGC :: AB : AG.... (1). Les bases du tronc étant parallèles, les angles BAC, FED sont égaux; d'où il suit que les triangles AGC, FED ont un angle égal; ces triangles seront donc entre eux comme les produits des côtés qui comprennent les angles égaux (géom. pl., n°. 143), c'est-à-dire que AGC : EFD :: AC × AG : ED × EF, proportion qui se réduit à celle-ci : AGC : EFD :: AC : DE,...(2), car AG = EF, comme parallèles comprises entre parallèles. Les triangles ABC, EFD sont semblables et donnent AB : EF ou AG :: AC : DE; les seconds rapports des proportions (1) et (2) sont donc égaux; les premiers le seront aussi et on aura ABC : AGC :: AGC : EFD; ce qui achève de démontrer notre proposition.

104. *Corollaire* 1. Puisque le tronc de pyramide triangulaire ABCDEF (fig. 295) se décompose en trois pyramides triangulaires qui ont toutes les trois la hauteur du tronc, la première ayant pour base l'inférieure du tronc, la seconde la supérieure, et la troisième une moyenne proportionnelle entre les deux autres; en appelant h la hauteur du tronc, B la base inférieure, et b la base supérieure, les volumes de ces trois pyramides seront $\frac{h}{3} \times B$, $\frac{h}{3} \times b$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et $\frac{h}{3} \times \sqrt{B \times b}$, et leur somme ou le volume du tronc ABCDEF $= \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{B \times b})$.

105. *Corollaire* 2. Cette formule a lieu pour un tronc de pyramide quelconque, pourvu que les bases de ce tronc soient régulières. Car, dans ce cas, on peut décomposer les deux bases en triangles au centre, qui, dans chaque base, seront égaux entre eux, et concevoir autant de troncs de pyramide triangulaire qu'il y a de ces triangles dans chaque base, lesquels troncs seront évidemment égaux entre eux. Le volume d'un de ces troncs sera donc $\frac{h}{3}(B + b + \sqrt{B \times b})$, h étant la hauteur du tronc, B la base inférieure et b la base supérieure de l'un des troncs triangulaires. Si n est le nombre de ces troncs triangulaires contenus dans le tronc total, c'est-à-dire, en d'autres termes, si n est le nombre des côtés des bases du tronc total, le volume de ce tronc total sera $\frac{nh}{3}(B + b + \sqrt{B \times b})$ ou $\frac{h}{3}(nB + nb + \sqrt{nB \times nb})$. Mais nB sera la superficie de la base inférieure et nb celle de la base supérieure de ce même tronc total; si donc on appelle A la première de ces deux bases et a la seconde, on aura pour le volume total $\frac{h}{3}(A + a + \sqrt{A \times a})$, expression tout-à-fait semblable à celle du numéro précédent.

106. THÉORÈME 55. *Supposons donné un tronc de pyramide quelconque* ABCDEFGHIK (fig. 296); *je dis que la hauteur* LM *de la pyramide entière* ABCDEL *sera égale au produit de la hauteur* MN, *du tronc, et de l'un des côtés de la base inférieure, divisé par la différence du même côté de la base inférieure au côté correspondant de la base supérieure.*

En effet, par l'une BL des arêtes de la pyramide entière, et par la perpendiculaire LM abaissée du sommet L sur le plan de la base, faisons passer un plan BLM; il rencontrera les deux bases du tronc suivant les droites BM, HN qui seront parallèles; par le point H, menons la droite HO parallèle à LM, et dans la face BLC, menons, par ce point H, la droite HP parallèle à l'arête CL; nous aurons les triangles semblables BHO, BLM, qui donneront BH : BL :: HO : LM, et les triangles semblables BHP, BLC, qui donneront BH : BL :: BP : BC; d'où l'on voit que BP : BC :: HO : LM. Mais BP = BC — PC = BC — HI, et HO = MN; donc BC — HI : BC :: MN : LM $= \frac{BC \times MN}{BC - HI}$; ce qu'il fallait démontrer.

107. *Remarque.* Si l'on avait comparé le triangle BHO à son semblable HLN, et le triangle BHP à son semblable HLI, on aurait tiré les deux proportions HB : HL :: HO : LN, et HB : HL :: BP : HI; d'où il serait résulté

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

BP : HI :: HO : LN ou BC — HI : HI :: MN : LN $= \frac{HI \times MN}{BC-HI}$; ce qui nous fait voir que *la hauteur* LN *de la pyramide partielle* FGHIKL *est égale au produit de la hauteur du tronc par l'un des côtés de la base supérieure, divisé par la différence de ce côté au côté correspondant de la base inférieure.*

108. *Corollaire.* Il est évident que le volume du tronc de pyramide quelconque ABCDEFGHIK (fig. 296) est égal à la pyramide totale ABCDEL moins la pyramide partielle FGHIKL. Or, les hauteurs de ces deux pyramides sont respectivement (n^os. 106 et 107) $\frac{BC \times MN}{BC-HI}$, $\frac{HI \times MN}{BC-HI}$, et, par conséquent, leurs volumes (n°. 99) seront ABCDE $\times \frac{BC \times MN}{3(BC-HI)}$ et FGHIK $\times \frac{HI \times MN}{3(BC-HI)}$ et leur différence ou le volume du tronc ABCDEFGHIK $=$ ABCDE $\times \frac{BC \times MN}{3(BC-HI)}$ — FGHIK $\times \frac{HI \times MN}{3(BC-HI)} = \frac{MN}{3(BC-HI)} \times$ (ABCDE $\times$ BC — FGHIK $\times$ HI).

109. DÉFINITION. Deux polyèdres sont *semblables* lorsqu'ils ont le même nombre de faces; que les faces homologues *sont semblables, chacune à chacune, et qu'elles sont également inclinées les unes par rapport aux autres.*

110. *Corollaire* 1. Il suit évidemment de cette définition, que les arêtes homologues de deux polyèdres semblables sont proportionnelles, car elles sont les côtés de polygones semblables.

111. *Corollaire* 2. Il suit encore évidemment de là que les angles polyèdres homologues de deux polyèdres semblables sont égaux, puisque ces angles polyèdres sont formés par les angles plans homologues de polygones semblables, et que les faces de ces angles plans sont également inclinées, les unes à l'égard des autres.

112. THÉORÈME 56. *Si deux prismes* ABCDEFGHIK, *abcdefghik* (fig. 297) *sont semblables, les sections droites* LMNOP, *lmnop seront des polygones semblables.*

Les deux prismes étant semblables, ils ont (n°. 109) les faces latérales homologues également inclinées; or, les côtés LM, MN, NO,... *lm, mn, no*,... des sections droites sont perpendiculaires aux arêtes latérales des prismes, d'où il suit (n°. 39) que les angles intérieurs de ces sections droites sont les inclinaisons des faces latérales homologues des prismes; donc les deux sections droites ont les angles égaux, chacun à chacun. Je dis, de plus, que les côtés homologues de ces deux sections sont proportionnels. En effet, si par les points homologues H et *h* on mène, aux arêtes BH, *bh*, les perpendiculaires HQ, *hq*, les triangles HQI, *hqi* seront semblables; car la similitude des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

faces homologues BHIC, *bhic* donne l'angle HIQ = *hiq*, et l'angle IHB = *ihb*; mais IHQ = IHB — QHB, et *ihq* = *ihb* — *qhb*; mais les angles QHB, *qhb* sont droits; donc IHQ = *ihq*; c'est-à-dire que les triangles HIQ, *hiq* ont les trois angles égaux, chacun à chacun, et par conséquent les côtés homologues proportionnels; donc HI : *hi* :: HQ ou MN : *hq* ou *mn*. On démontrerait, par un raisonnement semblable, que IK : *ik* :: NO : *no*, KF : *kf* :: OP : *op*, FG : *fg* :: PL : *pl*, etc.; mais la similitude des prismes nous donne HI : *hi* :: IK : *ik* :: KF : *kf* :: FG : *fg*, etc.; donc MN : *mn* :: NO : *no* :: OP : *op* :: PL : *pl*, etc.; donc, enfin, les sections droites de deux prismes semblables sont semblables.

113. *Remarque.* Le lecteur démontrera sans peine que les hauteurs (perpendiculaires aux bases) de deux prismes semblables sont proportionnelles aux arêtes homologues.

114. THÉORÈME 57. *Les superficies de deux prismes semblables sont entre elles comme les carrés des arêtes homologues.*

En effet, soient ABCDEFGHIK, *abcdefghik* (fig. 297) deux prismes semblables; représentons par C le contour de la section droite LMNOP du premier, et par *c* celui de la section droite *lmnop* du second; d'après le n°. 65, la superficie du premier sera C × AG, et celle du second *c* × *ag*: S et S′ étant respectivement ces superficies, on aura S = C × AG, et S′ = *c* × *ag*; d'où S : S′ :: C × AG : *c* × *ag*..... (1); mais (géom. pl., n°. 100) C : *c* :: LM : *lm* et (n°. 112) LM : *lm* :: AB : *ab*, et (n°. 110) AB : *ab* :: AG : *ag*; d'où en remontant on voit que C : *c* :: AG : *ag*. Qu'on multiplie cette dernière proportion par l'identique AG : *ag* :: AG : *ag*, et on aura C × AG : *c* × *ag* :: $(AG)^2$: $(ag)^2$; mais le premier rapport de cette dernière proportion est le même que le second de la proportion (1); donc S : S′ :: $(AG)^2$: $(ag)^2$; ce qu'il fallait démontrer.

115. THÉORÈME 58. *Les volumes de deux prismes semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.*

Soient les deux prismes semblables de la figure 297, et appelons *h* et *h′* les hauteurs respectives de ces deux prismes, B et *b* les superficies de leurs bases, et V et *v* leurs volumes; d'après le numéro 83, on aura V = B × *h* et *v* = *b* × *h′*, d'où il suit que V : *v* :: B × *h* : *b* × *h′*,..... (1). Mais les bases de deux prismes semblables sont semblables (n°. 108); donc (géom. pl., n°. 148) B : *b* :: $(AB)^2$: $(ab)^2$. Mais (n°. 113) les hauteurs *h* et *h′* sont proportionnelles aux arêtes homologues; donc *h* : *h′* :: AB : *ab* ou $h^2 : h'^2 :: (AB)^2 : (ab)^2$; donc aussi $B : b :: h^2 : h'^2$; qu'on multiplie cette dernière proportion par l'identique *h* : *h′* :: *h* : *h′*, et on aura B × *h* : *b* × *h′* :: $h^3 : h'^3$; mais le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

premier rapport de celle-ci est le même que le second de celle (1) ci-dessus; donc $V : v :: h^3 : h'^3$. Or, on a $h : h' :: AB : ab$ ou $h^3 : h'^3 :: (AB)^3 : (ab)^3$; donc enfin $V : v :: (AB)^3 : (ab)^3$; ce qu'il fallait démontrer.

116. THÉORÈME 59. *Les superficies latérales de deux pyramides semblables quelconques sont entre elles comme les carrés des arêtes homologues.*

Soient ABCDEF, *abcdef* (fig. 298) deux pyramides semblables; elles aurons (n°. 109) les faces homologues semblables et (n°. 110) les arêtes homologues proportionnelles. Cela posé, il est clair qu'on aura $ABF : abf :: (AB)^2 : (ab)^2$, $BCF : bcf :: (BC)^2 : (bc)^2$, $CDF : cdf :: (CD)^2 : (cd)^2$, $DEF : def :: (DE)^2 : (de)^2$ et $EAF : eaf :: (EA)^2 : (ea)^2$; mais à cause que les bases sont semblables, $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: EA : ea$, ou $(AB)^2 : (ab)^2 :: (BC)^2 : (bc)^2 :: (CD)^2 : (cd)^2 :: (DE)^2 : (de)^2 :: (EA)^2 : (ea)^2$; donc $ABF : abf :: BCF : bcf :: CDF : cdf :: DEF : def :: EAF : eaf :: (AB)^2 : (ab)^2$. Or, la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent. Si donc on observe que la somme des antécédens de cette suite de rapports égaux (sans y comprendre le dernier) est la superficie latérale de la grande pyramide, et celle des conséquens est la superficie de la petite, en appelant S la première, et S′ la seconde, on aura $S : S' :: (AB)^2 : (ab)^2$; ce qu'il fallait démontrer.

117. THÉORÈME 60. *Les volumes de deux pyramides semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.*

Soient les deux pyramides semblables de la figure 298; et appelons h et h' les hauteurs respectives de ces deux pyramides; B et b les superficies de leurs bases, et V et v leurs volumes; d'après le numéro 99 on aura $V = B \times \frac{h}{3}$ et $v = b \times \frac{h'}{3}$; d'où il suit que $V : v :: B \times \frac{h}{3} : b \times \frac{h'}{3} :: B \times h : b \times h'$..... (1). Mais les bases de deux pyramides semblables sont semblables, ce qui donnera $B : b :: (AB)^2 : (ab)^2$, et il est évident que les hauteurs de deux pyramides sont proportionnelles aux arêtes homologues, d'où il suit que $h : h' :: AB : ab$ ou $h^2 : h'^2 :: (AB)^2 : (ab)^2$, et par conséquent $B : b :: h^2 : h'^2$. Si maintenant on multiplie cette dernière proportion par l'identique $h : h' :: h : h'$, il viendra $B \times h : b \times h' :: h^3 : h'^3$. Or, le premier rapport de cette dernière proportion est le second de la proportion (1); donc $V : v :: h^3 : h'^3 :: (AB)^3 : (ab)^3$; ce qu'il fallait démontrer.

118. THÉORÈME 61. *Les superficies de deux troncs de pyramides semblables sont entre elles comme les carrés des arêtes homologues.*

Cette proposition se démontre comme celle du numéro 116.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

119. THÉORÈME 62. *Les volumes de deux troncs de pyramide semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.*

En effet, il est évident que les deux pyramides totales ainsi que les deux pyramides partielles seront semblables, chacune à chacune. Appelons donc V et v les pyramides totales, et V′ et v' les pyramides partielles, A et a deux arêtes homologues des deux premières, et A′ et a' deux arêtes homologues des deux autres; nous aurons $V : v :: A^3 : a^3$, et $V' : v' :: A'^3 : a'^3$; mais les quatre pyramides sont évidemment semblables; donc $A : a :: A' : a'$ ou $A^3 : a^3 :: A'^3 : a'^3$; donc $V : v :: V' : v' :: A^3 : a^3$; d'où $V - V' : v - v' :: A^3 : a^3$. Mais $V - V'$ est le volume du grand tronc, et $v - v'$ est celui du petit; donc T et T′ étant ces troncs, on aura $T : T' :: A^3 : a^3$; ce qu'il fallait démontrer.

120. THÉORÈME 63. *La somme des carrés des trois arêtes contiguës d'un parallélipipède rectangle, est égale au carré de la diagonale.*

En effet, soit ABCDEFGH (fig. 283) un parallélipipède rectangle quelconque; si l'on mène la diagonale de la face ABCD, le triangle ABC sera rectangle, et donnera $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ ou $(AC)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 \ldots$ (1). Qu'on mène ensuite la diagonale FC, le triangle ACF sera rectangle en A, et donnera $(CF)^2 = (AC)^2 + (AF)^2$, et en substituant au lieu de $(AC)^2$ sa valeur (1), il viendra $(CF)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 + (AF)^2$; ce qu'il fallait démontrer.

121. *Remarque.* Dans tout ce qui précède sur les polyèdres, nous nous sommes contentés de parler des prismes, des parallélipipèdes, des pyramides, des troncs de prismes triangulaires, et des troncs de pyramide quelconques, parce que cela nous a paru suffisant; de plus, nous n'avons considéré ces polyèdres que dans les cas de leur parfaite égalité et de leur parfaite similitude, quoiqu'il y ait des polyèdres dont toutes les parties sont égales ou semblables sans que ces polyèdres puissent coïncider d'aucune manière. Les polyèdres qui sont dans ce cas d'égalité ou de similitude, sont appelés *égaux* ou *semblables par symétries*. Pour se faire une idée des polyèdres symétriques, on n'a qu'à présenter un polyèdre quelconque devant un miroir : l'image qu'on verra dans le miroir sera un polyèdre symétrique à celui qu'on tiendra à la main. On voit que toutes les parties constituantes de deux polyèdres égaux ou semblables par symétries sont égales ou semblables, chacune à chacune; mais que ce qui est à droite dans l'un est à gauche dans l'autre, et réciproquement. Il y a plusieurs propositions sur les polyèdres égaux ou semblables par symétries, qu'on trouvera démontrées dans la géométrie de M. Legendre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

5^me^. LEÇON.

Les Surfaces cylindriques, et les corps que ces surfaces terminent.

122. DÉFINITIONS. Si l'on suppose une ligne droite glissant parallèlement à elle-même sur une courbe quelconque, plane ou à double courbure, la surface engendrée par cette ligne droite sera de l'espèce qu'on appelle *cylindrique;* et si la directrice (n°. 3) a un centre, la droite menée par ce centre parallèlement aux génératrices sera l'*axe* de la surface cylindrique.

La surface prend le nom de la courbe qui a servi de directrice dans la génération : si cette directrice est une circonférence de cercle, la surface prendra le nom de *surface cylindrique circulaire;* si elle est une ellipse, une parabole ou une branche d'hyperbole, etc., la surface prendra le nom de *surface cylindrique elliptique, parabolique,* ou *hyperbolique,* etc.

En général, il faut entendre qu'une surface cylindrique est indéfiniment prolongée de chaque côté de la directrice : si l'on ne considère qu'une certaine partie de la longueur de cette surface comprise entre deux plans parallèles qui coupent toutes les génératrices, le corps terminé par ces deux plans parallèles et la portion de surface cylindrique qu'ils comprendront, sera un *cylindre.* Les portions des plans parallèles, comprises dans les sections de ces plans avec la surface cylindrique, sont *les bases du cylindre* ou *de la surface cylindrique.* La surface et le cylindre sont *droits,* quand les génératrices de la surface sont perpendiculaires aux plans des bases; ils sont *obliques* dans toute autre circonstance. C'est le plus souvent le contour ou circonférence de la base qui sert de directrice dans la génération d'une surface cylindrique.

Toute section faite par un plan perpendiculaire à la génératrice d'un cylindre quelconque s'appelle la *section droite* du cylindre ou de la surface cylindrique. Par conséquent, la section droite d'un cylindre droit est la base même de ce cylindre.

123. THÉORÈME 64. *Dans un cylindre circulaire droit ou oblique, toute section faite par un plan parallèle à la base est un cercle égal à celui qui sert de base au cylindre.*

Soit le cylindre AGBDCH (fig. 299 et 300) dont la base AVBG est un cercle; si l'on mène un plan ENFL parallèle à celui de la base AVBG, la section ENFL sera un cercle égal à AVBG. En effet, par l'axe IK menons un plan GIKH qui coupe la surface cylindrique suivant une génératrice, et le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

plan de la base et celui de la section suivant les droites IG, OL qui seront parallèles; mais l'axe IK et la génératrice GH sont parallèles; donc IG = OL, d'où l'on voit que la distance OL du point O en un point quelconque L du contour ENFL est égale au rayon de la base; or, le plan GIKH est mené par l'axe IK dans une direction quelconque; donc, toutes les distances du point O au contour ENFL de la section sont égales au rayon de la base; donc cette section ENFL est un cercle égal à la base, et son centre O est le point où l'axe du cylindre perce son plan.

124. *Corollaire.* Il suit de là que les deux bases d'un cylindre circulaire, droit ou oblique, sont des cercles égaux, et que la droite IK, qui joint les centres des bases, est l'axe du cylindre.

125. THÉORÈME 65. *Si dans un cylindre elliptique droit ou oblique, on mène un plan parallèle à la base, la section sera une ellipse égale à la base du cylindre.*

Soit le cylindre elliptique AGBDUCH (fig. 300), si l'on mène le plan ENFM parallèle à la base, je dis que la section ENFM sera une ellipse égale à celle de la base.

En effet, si par les deux axes AB, XV de la base et celui IK du cylindre nous menons les plans ABDC, XYUV, ces plans rencontreront évidemment la surface cylindrique suivant les génératrices AC, BD, XY et VU, et le plan de la section ENFM suivant les droites EF, *gh*, qui seront respectivement parallèles aux axes AB, XV, et égales à ces mêmes axes, comme parallèles comprises entre parallèles. De plus, si par une double ordonnée quelconque *ad* de la base on mène un plan *abcd* parallèle à l'axe IK, ce plan rencontrera la surface cylindrique suivant les génératrices *ab*, *dc*, et le plan de la section ENFM suivant la droite MN, qui sera parallèle à la double ordonnée *ad*, et égale à cette double ordonnée, comme parallèles comprises entre des parallèles. En outre, il est évident que, l'intersection EF, du plan ACDB avec celui de la section ENFM, divise en deux également la droite MN au point R, comme l'axe AB divise également en deux la double ordonnée *ad*. Enfin, on voit que MN est parallèle à *gh*, comme *ad* est parallèle à XV, et que OR = I*e*. Il suit donc de tout cela que les ordonnées et les abscisses, ainsi que les axes de la section ENFM, sont respectivement égaux à ceux de la base AXBV, qui est une ellipse; donc cette section ENFM est elle-même une ellipse égale à la base.

126. *Corollaire.* Il suit de là que les deux bases d'un cylindre elliptique quelconque sont deux ellipses égales, et que l'axe du cylindre passe par les centres de ces ellipses.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

127. *Remarque.* On démontrerait, par un raisonnement semblable, 1°. que toute section faite par un plan parallèle à celui de la base d'un cylindre quelconque est égale à cette base, quelle que soit cette dernière; 2°. que par conséquent les bases d'un cylindre d'une espèce quelconque sont deux figures égales, et 3°. que les sections faites, dans un cylindre d'une espèce quelconque, par deux plans parallèles, sont égales.

128. THÉORÈME 66. *Toute section faite par un plan qui coupe toutes les génératrices dans une surface cylindrique quelconque, dont la base est une courbe du second degré, est une courbe de même espèce que la base, c'est-à-dire que si la base est une ellipse, une parabole, ou une hyperbole, la section sera de même une ellipse, une parabole ou une hyperbole.*

En effet, soit une section quelconque F*i*T*k* (fig. 299, 300 et 301) faite par un plan dans une surface cylindrique, droite ou oblique, dont la base est une courbe du second degré; si par l'axe AB de la base on mène un plan ABDC par l'axe ou parallèle à une génératrice, ce plan rencontrera celui de la section suivant la droite FT; et si par le sommet F de cette droite FT, on mène un plan FMEN parallèle à celui de la base, la section de ce plan sera (n°. 127) une courbe égale à celle de la base. Si maintenant on suppose que le plan F*i*T*k* soit tel que son intersection avec le plan FMEN soit tangente à la courbe F*g*E*h* au point F, en menant le diamètre *gh* parallèle à cette tangente, les diamètres FE, *gh* seront conjugués, et en rapportant l'ordonnée MR à ces diamètres conjugués, on aura (géom. pl., n°. 770) $(MR)^2 = p \times FR \pm q(FR)^2$,..... (1), en prenant l'origine au point F. Cela posé, supposons que par la double ordonnée MN on mène un plan MPQN parallèle à une génératrice; ce plan rencontrera celui de la section F*i*T*k* suivant la droite PQ évidemment égale et parallèle à MN, et celui des droites FE, FT suivant la droite RS, qui divisera PQ en deux parties égales au point S, et qui sera parallèle à ET. Puisque MN = PQ, on aura PS = MR, et par conséquent la formule (1) nous donnera $(PS)^2 = p \times FR \pm q(FR)^2$..... (2). Or, les triangles semblables FET, FRS nous donnent FT : FS :: EF : FR $= \frac{FS \times EF}{FT}$. De plus (géom. pl., n°. 770), $q = \frac{p}{FE}$; si donc on substitue dans l'équation (2), il viendra $(PS)^2 = p \times \frac{FS \times FE}{FT} \pm \frac{p \times (FS)^2 \times (EF)^2}{FE \times (FT)^2} = \frac{p \times FE}{FT} \times FS \pm \frac{p \times EF}{(FT)^2} \times (FS)^2$, ou $y^2 = \frac{p \times EF}{(FT)} \times x \pm \frac{p \times EF}{(FT)^2} \times x^2$, en faisant PS = *y* et FS = *x*, ou encore $y^2 = Px \pm Qx^2$, en faisant $\frac{p \times FE}{FT} = P$, et $\frac{p \times EF}{(FT)^2} = Q$; d'où l'on voit que $Q = \frac{P}{FT}$, et que, par conséquent, la courbe F*i*T*k* est ou une ellipse, ou une parabole, ou une hyperbole, suivant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que la courbe F*g*E*h*, ou la base du cylindre, est l'une de ces courbes du second degré; car l'équation $y^2 = Px \pm Qx^2$ est nécessairement celle de l'une de ces courbes (géom. pl., n°. 770).

Pour compléter la démonstration de notre théorème, il faudrait démontrer que la proposition est vraie quelle que soit la position du plan F*i*T*k*; mais il est évident qu'après l'avoir démontrée dans l'hypothèse ci-dessus, si l'on fait tourner le plan autour du diamètre FT, les abscisses, comme FS, ne changeront pas, et les ordonnées de la nouvelle courbe, comme PS, répondantes aux mêmes abscisses, seront dans les mêmes rapports que celles de la première courbe; ce qui suffit pour faire voir que la courbe ne changerait pas de nature. Au surplus, en suivant la marche ci-dessus et en partant de la courbe F*i*T*k*, il sera facile au lecteur de démontrer plus positivement que ce changement n'en apporte aucun dans la nature de la courbe.

129. *Remarque.* Pour donner à cette proposition toute la généralité dont elle est susceptible, il faut regarder le cercle comme étant une ellipse dont les deux axes sont égaux; de sorte que la section faite par un plan quelconque dans une surface cylindrique à base elliptique, ou circulaire, peut être un cercle aussi bien qu'une ellipse.

130. THÉORÈME 65. *La superficie d'un cylindre quelconque, sans y comprendre celle des deux bases, est égale au contour de la section droite multiplié par la longueur d'une génératrice.*

En effet, il est évident qu'un cylindre quelconque peut être regardé comme étant un prisme d'une infinité de faces latérales ou côtés infiniment étroits, et dont la base serait inscrite ou circonscrite à celle du cylindre; or (n°. 65), la superficie latérale d'un prisme est égale au contour de la section droite multiplié par une arête; donc aussi la superficie latérale d'un cylindre sera égale au contour de la section droite, multiplié par une génératrice.

131. *Corollaire* 1. Si le cylindre est droit, comme la section droite est alors la base, sa superficie sera égale au contour de la base, multiplié par une génératrice.

132. *Corollaire* 2. Si le cylindre droit est circulaire, comme la circonférence de la base est $2p$R, (géom. pl. n°. 299) R étant le rayon, si g est la longueur d'une génératrice, la superficie sera $2p$Rg.

133. THÉORÈME 66. *Le volume d'un cylindre quelconque est égal à la superficie de la base, multipliée par la hauteur.*

En effet, nous venons de faire remarquer qu'un cylindre peut être regardé comme étant un prisme d'une infinité de côtés, et dont la base serait inscrite

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou circonscrite à celle du cylindre; or (n°. 83), le volume d'un prisme quelconque est égal à la base multipliée par la hauteur; donc celui du cylindre sera pareillement égal à la base multipliée par la hauteur.

134. Si le cylindre était circulaire, comme la superficie de la base serait (géom. pl., n°. 230) alors égale à $p\mathrm{R}^2$, h étant la hauteur, le volume serait $p\mathrm{R}^2h$.

135. THÉORÈME 67. *Supposons un prisme triangulaire droit* ABCDEF (fig. 302) *dont la base* ABC *soit un triangle rectangle, mais dont l'une des faces* ABEF *soit un carré; si par le sommet* A, *comme centre, on décrit un quart de cercle* BGF *sur la face carrée* ABEF *avec le rayon* AB; *qu'on prenne ce quart de cercle pour la directrice d'une surface cylindrique dont la génératrice serait mue parallèlement à la droite* BC; *la superficie de la portion* BGF*e*C *de cette surface cylindrique inscrite dans le prisme triangulaire* ABCDEF *sera égale à celle du rectangle* BCDE *parallèle aux génératrices.*

En effet, si l'on prend un arc GH infiniment petit sur le quart de cercle BGF; que par les extrémités G et H de cet arc on mène les plans LON, KPM parallèle à la base ABC du prisme, ces plans rencontreront la surface cylindrique suivant les deux génératrices G*e*, H*f*, et le plan du rectangle BCDE suivant les droites parallèles LN, KM. Je dis maintenant que la portion HG*ef* de la surface cylindrique est équivalente à la portion correspondante KLNM du rectangle BCDK. Car si par le milieu I de l'arc HG on mène un plan I*ac* parallèle au plan ABC, son intersection I*d* avec la surface cylindrique sera égale à la demi-somme des génératrices H*f*, G*e*, qui sont les bases d'un trapèze cylindrique qui, à cause de son extrême petitesse, peut être regardé comme plan, et l'arc de cercle HG comme une droite perpendiculaire à ces bases; la superficie de cet élément de la surface cylindrique sera donc égale à $\mathrm{HG}\times\mathrm{I}d$; mais celle du rectangle KLNM est égale à $\mathrm{KL}\times bc$; ainsi il faut faire voir que $\mathrm{HG}\times\mathrm{I}d=\mathrm{KL}\times bc$. Or, le triangle QHG infiniment petit peut être regardé comme un triangle rectiligne rectangle semblable au triangle AI*a*; donc HG : AI ou ab :: QG ou KL : aI, ou HG : KL :: ab : aI; mais les triangles semblables abc, $a\mathrm{I}d$ donnent ab : aI :: bc : Id; donc HG : KL :: bc : Id; d'où $\mathrm{HG}\times\mathrm{I}d=\mathrm{KL}\times bc$; ce qu'il fallait démontrer. Ainsi donc les élémens correspondans du rectangle BCDE et de la portion de surface cylindrique circulaire sont tous égaux, chacun à chacun; donc la somme des premiers élémens ou le rectangle BCDE est égale à celle des seconds ou à la superficie de la portion de surface cylindrique BGF*e*C; d'où il suit qu'enfin la proposition est démontrée.

136. *Corollaire* 1. Le rectangle BCDE ayant même base et même hauteur

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que le triangle ABC, a une superficie double de celle de ce triangle, d'où il suit que la superficie de la portion triangulaire BGF*e*C de surface cylindrique circulaire droite est égale au double de celle du triangle ABC qui en est ce qu'on appelle *la projection orthogonale.*

137. *Corollaire* 2. Supposons un cylindre droit AFBCGD (fig. 303) demi-circulaire ; si dans le rectangle ABCD on mène les droites DE, EC au centre E de la base AFB, et que sur ces droites on élève des plans perpendiculaires à celui du rectangle ABCD, ces plans rencontreront la surface cylindrique de manière qu'on aura les deux triangles cylindriques AFD, BFC, dont les superficies seront respectivement égales au double de leurs projections orthogonales ADE, ECB, ou aux rectangles AEKD, EKCB ; de sorte que leur somme sera égale au rectangle ABCD.

138. *Corollaire* 3. Si donc on voulait avoir la superficie du triangle cylindrique DFCG, qui est ce qui reste de la demi-surface cylindrique, après en avoir retranché les deux triangles cylindriques ADF, FCB, il faudrait, de la superficie de la demi-surface cylindrique, qui est $\frac{cir.AE}{2} \times AD$ ou $p \times AE \times AD$, retrancher celle du rectangle ABCD, qui est $AB \times AD$ ou $2AE \times AD$; de sorte que $DFCG = p \times AE \times AD - 2AE \times AD = (p-2) \times AE \times AD$.

139. *Corollaire* 4. Si l'on suppose le cylindre circulaire droit entier AFBIHDGC (fig. 303), coupé par un plan IDF mené par un diamètre IF de la base, dans une direction quelconque, la portion IAFD de la surface du cylindre se composera évidemment du double du triangle cylindrique AFD, dont la superficie est égale au rectangle AEKD ; par conséquent, la superficie de la portion IAFD sera égale à celle du rectangle ABCD. Si donc on voulait avoir la superficie de ce qui reste de la surface cylindrique entière, après en avoir retranché la portion IAFD, de $2pRg$ qui est celle de la surface entière, il faudrait retrancher $AB \times AD$, qui est celle de la portion à retrancher, ce qui donnerait $2pRg - AB \times AD$; mais $AB = 2R$, et $AD = g$; si donc on appelle S la superficie en question, on aura $S = 2pRg - 2Rg = 2Rg(p-1)$.

140. *Corollaire* 5. Supposons toujours le cylindre circulaire droit entier AFBIHDGC (fig. 303), et coupons-le par deux plans IFD, IFC menés par le même diamètre IF de la base AFBI ; chacune des portions de surfaces cylindriques IAFD, IBFC, enlevées par ces plans, sera égale à la superficie du rectangle ABCD, qui est $2Rg$; leur somme sera donc $4Rg$; si donc on veut la superficie de ce qui reste de la surface entière après en avoir retranché ces deux portions, il faudra, de la superficie entière, qui est $2pRg$, retrancher celle des deux portions supprimées, qui est $4Rg$, et le reste $S = 2pRg - 4Rg = 2Rg(p-2)$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

141. *Remarque.* Si l'on considère la portion ABGFDC de cylindre droit circulaire inscrit dans le prisme triangulaire ABCDEF (fig. 302), le tout tel que nous l'avons supposé au numéro 135, il sera facile de voir qu'on pourra regarder le volume de cette portion de cylindre, comme la somme d'une multitude de pyramides extrêmement petites, dont la réunion des bases formerait le triangle cylindre BGF*e*C, et dont la hauteur commune serait le rayon de la base du cylindre. Il suit donc de là que le volume de la portion de cylindre en question sera égal au tiers du rayon multiplié par la superficie du triangle cylindrique ou du rectangle BCDE. Mais la superficie de ce rectangle est BE $\times$ BC ou R $\times$ h, h représentant BC; donc le volume demandé sera $\frac{R^2h}{3}$.

142. *Corollaire* 1. Supposons un demi-cylindre circulaire droit AFBCGD (fig. 303); que par les droites DE, CE on élève les plans EFD, EFC; le volume de chacune des portions de cylindre AEFD, BEFC sera égal à $\frac{R^2h}{3}$, et, par conséquent, celui des deux portions ensemble sera $\frac{2R^2h}{3}$. Le volume du demi-cylindre sera $\frac{pR^2h}{2}$ (n°. 134); si donc on veut avoir le volume de ce qui reste du demi-cylindre, après en avoir retranché le volume des deux portions réunies dont il vient d'être question, de $\frac{pR^2h}{2}$ il faudra retrancher $\frac{2R^2h}{3}$, et le reste $V = \frac{pR^2h}{2} - \frac{2R^2h}{3} = \frac{3pR^2h - 4R^2h}{6} = \frac{R^2h}{6}(3p - 4)$ sera le volume demandé.

143. *Corollaire* 2. Supposons les mêmes choses que dans le numéro 139; la portion de cylindre IAFD sera évidemment double de AEFD, et par conséquent son volume sera $\frac{2R^2h}{3}$; si donc on voulait avoir le volume de ce qui reste du cylindre entier après en avoir ôté cette portion, de pR^2h il faudrait retrancher $\frac{2R^2h}{3}$, et le reste $V = pR^2h - \frac{2R^2h}{3} = \frac{3pR^2h - 2R^2h}{3} = \frac{R^2h}{3}(3p - 2)$ serait le volume demandé.

144. *Corollaire* 3. Supposons, enfin, les mêmes choses que dans le numéro 140; le volume de chaque portion de cylindre IAFD, IBFC sera $\frac{2R^2h}{3}$, et leur somme $\frac{4R^2h}{3}$; si donc on veut le volume de ce qui reste du cylindre entier, après en avoir supprimé ces deux portions, du volume du cylindre entier, qui est pR^2h, il faudra retrancher $\frac{4R^2h}{3}$, et le reste $V = pR^2h - \frac{4R^2h}{3} = \frac{3pR^2h - 4R^2h}{3} = \frac{R^2h}{3}(3p - 4)$ sera le volume demandé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

145. *Remarque.* Tout ce qui précède depuis le numéro 135, a lieu, non-seulement pour le cylindre droit à base circulaire, mais encore pour tous les cylindres dont la section droite est un cercle.

146. THÉORÈME 68. *Si un cylindre circulaire est coupé par un plan quelconque* LFCI (fig. 303), *le tronc de cylindre* LCGDH *est équivalent et en superficie, et en volume à un cylindre de même base que le tronc, et d'une hauteur égale à la demi-somme de la plus grande et de la plus petite hauteur du tronc.*

En effet, si par le point E, où l'axe du cylindre rencontre le plan de la section, on mène un plan AFBI parallèle à la base, la section de ce plan sera un cercle égal à la base, et il est évident que la partie LFAI qui excède est égale à la partie CFBI qui est en défaut; car si l'on fait tourner la première autour du diamètre IF, il est clair que le point L coïncidera avec le point C, et le demi-cercle IAF avec son égal IBF. Il suit donc de là que le cylindre AFBIHDGC est équivalent, et en superficie, et en volume au tronc LCGDH. Mais la hauteur DL du point L, par rapport au point C, est divisée en deux également au point A par le plan AFBI; d'où il suit que AD est la demi-différence de la plus grande et de la plus petite des hauteurs du tronc. Or, si à la plus petite on ajoute la demi-différence, il est clair qu'on aura la hauteur du cylindre équivalent au tronc, et que cette hauteur sera la demi-somme dont il s'agit.

147. *Corollaire* 1. Il suit de là que pour avoir la superficie d'un tronc de cylindre circulaire, il faudra multiplier le contour de la section droite par la demi-somme de la plus grande et de la plus petite génératrice du tronc.

148. *Corollaire* 2. Il suit aussi de là que le volume d'un tronc de cylindre circulaire est égal à la superficie de la base multipliée par la demi-somme de la plus grande et de la plus petite hauteur du tronc.

Remarque. La proposition a lieu pour un tronc de cylindre quelconque, la base étant une courbe du second degré, pourvu que l'axe de la section du plan sécant soit parallèle à celui de la base.

Dans le cas où la base est une branche d'hyperbole, c'est le premier axe ou l'axe réel de la section qui doit être parallèle à celui de la base du cylindre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

6me. LEÇON.

Les Surfaces coniques, et les Corps que ces surfaces terminent.

149. DÉFINITIONS. Si une droite indéfinie tourne autour d'un point fixe dans l'espace, et glisse en même temps sur une courbe quelconque, plane ou à double courbure, la surface engendrée par cette droite sera de l'espèce qu'on appelle *conique*.

Le point autour duquel tourne la génératrice d'une surface conique, s'appelle le *centre* ou plus communément le *sommet* de la surface.

Si la directrice a un centre, la droite qui passe par ce centre et le sommet de la surface est ce qu'on appelle l'*axe* de la surface.

Si la directrice est une courbe plane ayant un centre, et que le plan de cette directrice soit perpendiculaire à l'axe de la surface conique, cette surface conique sera *droite*. Dans tout autre cas elle sera *oblique*. Mais on appelle plus particulièrement *surface conique droite*, celle dont la directrice est une circonférence de cercle.

Une surface conique, droite ou oblique, est circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique, suivant que la directrice est une circonférence de cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Si l'on réfléchit sur la manière dont une surface conique quelconque est engendrée, en se rappelant que la génératrice est indéfiniment prolongée à droite et à gauche du point autour duquel elle tourne, on verra qu'une surface conique quelconque se compose de deux parties opposées par le sommet, qui ont le point directeur commun. Chacune de ces parties s'appelle *nappe*. Mais le plus souvent on ne considère qu'une seule nappe.

Si l'on ne considère qu'une seule nappe d'une surface conique, et que l'on coupe cette nappe par un plan mené comme on voudra à une certaine distance du sommet, le corps terminé par ce plan et par la partie de la surface comprise entre le sommet et le contour de la section de ce plan sera ce qu'on appelle un *cône*.

Quelle que soit une surface conique, on conçoit qu'on pourra toujours tracer sur cette surface une courbe quelconque qui pourra remplacer la directrice primitive, d'où l'on voit qu'avec des directrices différentes on peut engendrer la même surface conique, et que, par conséquent, le contour de la base d'un cône peut servir de directrice à la surface conique qui le termine.

Le cône sera droit, si le plan de sa base est perpendiculaire à l'axe de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

surface, et particulièrement lorsque sa base sera un cercle. Le nom de la base déterminera celui du cône.

150. THÉORÈME 69. *Toutes les génératrices d'un cône droit à base circulaire sont égales entre elles.*

En effet, les génératrices d'un cône droit ne sont autres choses que des obliques, abaissées du sommet sur le plan de la base, qui s'écartent également de la perpendiculaire abaissée par le même point sur le même plan; donc (n°. 19) elles sont égales.

151. THÉORÈME 70. *Tout plan mené par le sommet d'un cône quelconque et par deux points pris comme on voudra sur le contour de la base, rencontrera la surface conique suivant deux génératrices.*

En effet, si par les deux points pris sur le contour de la base on mène des droites au sommet, il est clair que ces deux droites seront des génératrices; et comme ces génératrices joignent les trois points par lesquels on a fait passer un plan, ces deux génératrices seront dans ce plan; donc ce même plan rencontre la surface suivant ces deux génératrices.

152. DÉFINITIONS. On appelle *section par l'axe* celle faite par un plan mené par l'axe dans un cône quelconque; mais si le cône est oblique, la section qu'on appelle plus particulièrement *par l'axe* est celle d'un plan mené par l'axe perpendiculairement à la base. Pour laisser à cette définition toute sa généralité, nous appelerons cette dernière section, *section orthogonale par l'axe*, afin de la distinguer de toute autre. On voit que dans un cône droit, toutes les sections par l'axe sont orthogonales.

153. THÉORÈME 71. *Toute section faite dans un cône quelconque, à base circulaire ou elliptique, par un plan parallèle à la base, est semblable à cette base.*

1°. Supposons (fig. 304 et 305) que la base ACBD soit un cercle, que FMGN soit une section parallèle à cette base, et, par l'axe ET, menons un plan quelconque PTQ : ce plan rencontrera celui de la base ACBD et celui de la section FMGN suivant les droites PQ, UV, qui seront parallèles; mais l'axe ET divise PQ en deux parties égales, donc cet axe divisera aussi la droite UV en deux parties égales au point K. Ainsi toutes les droites qui passent par le point K sont divisées en deux également par ce point K. Je dis maintenant que toutes les droites qui passent par le point K sont égales entre elles; car si l'on mène deux plans quelconques PTQ, ATB par l'axe, on aura PQ : UV :: ET : KT, et AB : FG :: ET : KT, donc PQ : UV :: AB : FG; mais la base ACBD étant un cercle, PQ = AB; donc UV = FG; d'où il suit que tous les points de la courbe FMGN sont à égales distances du point

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

K, et que, par conséquent, cette courbe est une circonférence de cercle.

2°. Supposons que la base ACBD (fig. 304 et 305) soit une ellipse; si la section FMGN est parallèle à la base, cette section sera une ellipse semblable (géom. pl., n°. 789) à la base. En effet, par les axes AB, CD de la base, menons, par l'axe du cône, les plans ABT, CTD; ces plans couperont celui de la section suivant les droites FG, MN qui seront respectivement parallèles aux axes AB, CD de la base, et par conséquent les angles formés par les droites FG, MN seront égaux à ceux formés par les axes de la base, c'est-à-dire que les droites FG, MN seront perpendiculaires l'une à l'autre; de plus, on aura AB : FG :: ET : KT, et CD : MN :: ET : KT; donc AB : FG :: CD : MN; ainsi les axes de la base sont proportionnels aux droites FG, MN. Par une ordonnée quelconque RS de la base, menons un plan RTS au sommet du cône; ce plan rencontrera le plan de la section FMGN suivant HI parallèle à RS. Menons la droite *m*T par le milieu *m* de l'ordonnée RS; cette droite *m*T divisera en deux parties égales au point O la droite HI. Il suit donc de là que la droite FG divise en deux parties égales les parallèles à MN, et on démontrerait de même que MN divise en deux parties égales les parallèles à FG; donc les droites FG, MN sont des diamètres conjugués de la courbe FMGN; mais ces diamètres sont à angle droit, donc ils sont les axes de cette courbe FMGN. Ainsi les axes de cette courbe sont proportionnels à ceux de la base, ce qui est une première condition de similitude entre ces deux courbes. Mais, de plus, R*m* : HO :: *m*T : OT, *m*T : OT :: ET : KT et ET : KT :: CD : MN; donc R*m* : HO :: CD : MN; en outre, E*m* : KO :: ET : KT :: CD : MN; donc R*m* : HO :: E*m* : KO :: CD : MN; d'où il suit que si les abscisses de ces deux courbes sont dans le rapport des axes homologues, les ordonnées seront dans le même rapport; donc toute section parallèle à la base est semblable à la base; mais cette dernière est une ellipse; donc la section est aussi une ellipse.

154. THÉORÈME 72. *Si l'on coupe un cône quelconque à base circulaire ou elliptique par un plan quelconque qui rencontre toutes les génératrices du cône, la section sera toujours une ellipse.*

Supposons, en effet, qu'il s'agisse de la section quelconque *a*H*cbd*I (fig. 304 et 305), on imaginera le plan de la section prolongé jusqu'à sa rencontre avec celui de la base; soit la droite *no* l'intersection de ces deux plans; par le centre E de la base du cône, on menera le diamètre CD parallèle à la droite *no*, et on menera le diamètre AB de manière qu'il soit le conjugué de CD. Par le diamètre AB, et l'axe du cône on menera un plan qui rencontrera le plan de la section suivant la droite *ab*. Ensuite, on menera deux plans

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

FMGN, *gifh* parallèles à celui de la base, de manière qu'ils rencontrent celui de la section quelconque *a*H*cbd*I suivant les droites HI, *cd* qui seront parallèles, et les sections de ces deux plans seront des cercles ou des ellipses semblables à la base. Les plans ABT, CDT menés par les diamètres conjugués AB, CD de la base et par l'axe ET du cône, rencontreront les plans des sections parallèles à la base suivant les droites FG, MN, et *fg*, *ih*, qui seront des diamètres conjugués de ces sections. De plus, il est facile de voir que les droites HI, *dc* sont parallèles aux diamètres MN, *ih*, et sont, par conséquent, des doubles ordonnées, des sections parallèles à la base, rapportées aux diamètres conjugués dont il vient d'être question.

Cela posé, il est clair qu'on aura $(HO)^2 = \frac{(KN)^2}{(KF)^2} \times FO \times OG$, et $(ce)^2 = \frac{(kh)^2}{(kf)^2} \times fe \times eg$. Mais les deux ellipses FMGN, *gifh* sont semblables à la base et par conséquent semblables entre elles; donc FK : *kf* :: KN : *kh* ou $(FK)^2 : (kf)^2 :: (KN)^2 : (kh)^2$; ce qui donne $\frac{(KN)^2}{(KF)^2} = \frac{(kh)^2}{(kf)^2}$; donc $(HO)^2 = \frac{(KN)^2}{(KF)^2} \times FO \times OG$ et $(ce)^2 = \frac{(KN)^2}{(KF)^2} \times fe \times eg$; donc $(HO)^2 : (ce)^2 :: FO \times OG : fe \times eg$... (1). Les triangles semblables *gea*, F*Oa* donnent FO : *ge* :: *a*O : *ae*, et les triangles semblables *bef*, *b*OG donnent OG : *ef* :: O*b* : *eb*. Multiplions par ordre ces deux dernières proportions, et nous aurons $FO \times OG : fe \times ge :: aO \times Ob : ae \times eb$. Or, le premier rapport de cette dernière proportion est le second de la proportion (1); donc $(HO)^2 : (ce)^2 :: aO \times Ob : ae \times eb$; c'est-à-dire que les carrés des ordonnées de la courbe *a*H*cbd*I sont entre eux comme les produits des segmens de la droite *ab* sur laquelle on compte les abscisses; donc cette courbe est un cercle ou une ellipse.

155. *Corollaire.* Il est évident qu'on peut prendre pour base d'un cône la section faite par un plan quelconque qui rencontrerait toutes les génératrices du cône; or, d'après le numéro 153, toute section parallèle à la base d'un cône (cette base étant un cercle ou une ellipse) est un cercle ou une ellipse semblable à la base; d'où il suit que toutes les sections faites dans un cône par des plans parallèles qui rencontrent toutes les génératrices, sont des cercles ou des ellipses semblables.

156. DÉFINITION. On appelle *plan tangent* à une surface cylindrique ou conique quelconque, un plan qui ne touche la surface que suivant une génératrice.

157. *Corollaire.* Il suit de là que l'intersection du plan tangent et du plan de la base est une droite tangente à la circonférence de la base, et le point de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

contact de cette tangente est le pied de la génératrice suivant laquelle le plan tangent touche la surface.

158. THÉORÈME 73. *Toute section faite dans un cône quelconque à base circulaire ou elliptique, par un plan parallèle à un plan tangent à la surface du cône, est une parabole.*

Supposons qu'en effet la section AIB (fig. 306) soit parallèle au plan tangent dont l'intersection avec le plan de la base est la droite ST, et la génératrice de contact FH. Observons d'abord que l'intersection AB du plan de la section avec celui de la base est parallèle à la droite ST tangente en F à la circonférence de la base, car ces deux droites sont les intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième; d'où il suit (géom. pl., n°. 625) que si par le point de contact F et le centre E de la base on mène le diamètre FG, et le diamètre CD parallèle à AB ou à la tangente ST, ces deux diamètres FG, CD seront conjugués, et la droite AB deviendra une double ordonnée de la base; on aura donc $(AK)^2 = \frac{(CE)^2}{(FE)^2} \times FK \times KG$..... (1). Menons une section LPMO parallèle à la base, cette section sera semblable à la base, et si par les diamètres conjugués FG, CD de cette base et l'axe du cône on mène les plans FHG, CHD, ces plans couperont celui de la section LNMO suivant les droites LM, NO, qui seront les diamètres conjugués homologues aux diamètres FG, CD. De plus, le plan de la section LNMO coupera celui de la section AIB suivant la droite PQ, qui sera à la fois une double ordonnée aux deux sections; nous aurons donc $(PR)^2 = \frac{(Ni)^2}{(Li)^2} \times LR \times RM$... (2). Mais à cause de la similitude des diamètres FG, CD, aux diamètres LM, NO, nous avons $FE : Li :: CE : Ni$ ou $(FE)^2 : (Li)^2 :: (CE)^2 : (Ni)^2$; d'où $\frac{(CE)^2}{(FE)^2} = \frac{(Ni)^2}{(Li)^2}$. Si donc nous substituons dans l'équation (2), il nous viendra $(PR)^2 = \frac{(CE)^2}{(FE)^2} \times LR \times RM$, et si nous comparons cette dernière à l'équation (1), il en résultera $(AK)^2 : (PR)^2 :: FK \times KG : LR \times RM$. Mais les droites FK, LR sont égales comme parallèles comprises entre parallèles; donc $(AK)^2 : (PR)^2 :: KG : RM$. Or, les triangles semblables KIG, RIM donnent $KG : RM :: KI : RI$; donc $(AK)^2 : (PR)^2 :: KI : RI$; les carrés des ordonnées de la section AIB sont donc entre eux comme les abscisses correspondantes; donc cette section est une parabole.

159. THÉORÈME 74. *Toute section faite dans une surface conique quelconque, à base circulaire ou elliptique, par un plan qui rencontre les deux nappes, est une hyperbole.*

Supposons donc un plan qui coupe les deux nappes d'une surface conique

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

suivant les courbes ACB, *acb* (fig. 307); pour démontrer que les courbes ACB, *acb* sont les deux branches d'une hyperbole, dans la base AHBG de la surface conique, menons les diamètres conjugués GH, DE, dont un DE soit parallèle à l'intersection AB du plan de la section avec celui de la base; par ces diamètres conjugués GH, DE et par l'axe de la surface conique, menons les plans GHF*hg*, DEF*ed*, qui rencontreront, suivant les droites LN, QR, le plan d'une section LQNR parallèle à la base, lesquelles droites LN, QR seront les diamètres conjugués, de cette section LQNR, semblables aux diamètres GH, DE de la base : le plan de la section LQNR rencontrera celui de la section ACB, *acb* suivant la droite MO, qui sera une double ordonnée des deux courbes ACB, LQNR. Cela posé, on aura $(AK)^2 = \frac{(DI)^2}{(GI)^2} \times GK \times KH$, et $(MP)^2 = \frac{(QS)^2}{(LS)^2} \times LP \times PN$. Mais les sections GDHE, LQNR sont semblables, ainsi que leurs diamètres conjugués auxquels elles sont rapportées; donc $\frac{(QS)^2}{(LS)^2} = \frac{(DI)^2}{(GI)^2}$; ainsi $(AK)^2 = \frac{(DI)^2}{(GI)^2} \times GK \times KH$, et $(MP)^2 = \frac{(DI)^2}{(GI)^2} \times LP \times PN$, d'où il suit que $(AK)^2 : (MP)^2 :: GK \times KH : LP \times PN$...(1). Or, les triangles semblables GCK, LCP donnent GK : LP :: KC : PC, et les triangles semblables HK*c*, NP*c* donnent KH : PN :: K*c* : P*c*; multiplions ces deux proportions par ordre, et il nous viendra $GK \times KH : LP \times PN :: KC \times Kc : PC \times Pc$; mais le premier rapport de cette dernière proportion est le second de la proportion (1); donc $(AK)^2 : (MP)^2 :: KC \times Kc : PC \times Pc$; donc (géom. pl., n°. 742) la courbe ACB est une branche d'hyperbole.

En relisant cette démonstration, en substituant des lettres italiques au lieu des capitales, on verra que la courbe *acb* est la seconde branche de la même hyperbole. Ainsi, toute section faite dans une surface conique à base circulaire ou elliptique, par un plan qui rencontre les deux nappes, est une hyperbole.

160. *Remarque* 1. Un plan rencontrera les deux nappes d'une surface conique, toutes les fois que ce plan sera parallèle à un autre plan mené par deux génératrices quelconque de la surface.

161. *Remarque* 2. Il résulte des quatre dernières propositions, que de quelque manière que l'on coupe un cône à base circulaire ou elliptique, droit ou oblique, par un plan, la section est toujours un triangle, un cercle, une ellipse, une parabole, ou une hyperbole. Il faut bien retenir qu'on a un triangle, toutes les fois que le plan coupant passe par le sommet de la surface et rencontre la base; un cercle ou une ellipse, toutes les fois que le plan coupant rencontre toutes les génératrices de la même nappe; une parabole, toutes les fois que le plan de la section est parallèle à un plan tangent à la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

surface conique, et une hyperbole, toutes les fois que le plan de la section rencontre les deux nappes de la surface, ou, ce qui revient au même, toutes les fois que ce plan est parallèles à deux génératrices à la fois ou au plan de deux génératrices. En vertu de ce que les sections d'un cône sont des courbes du second degré, on a donné à ces courbes le nom commun de *sections coniques.*

162. THÉORÈME 75. *La superficie d'un cône droit à base circulaire est égale à la circonférence de la base multipliée par la moitié de l'une des génératrices.*

En effet, il est évident qu'on peut regarder un cône droit à base circulaire comme étant une pyramide régulière d'une infinité de faces latérales ou côtés infiniment étroits, et dont la base serait inscrite ou circonscrite à celle du cône; or (n°. 90), la superficie d'une pyramide régulière est égale au contour de la base multiplié par la moitié de l'apothème; donc aussi la superficie d'un cône droit à base circulaire est égale au contour de la base multiplié par la moitié de la génératrice.

163. *Remarque.* Quant à la superficie de tout autre cône, on ne peut l'obtenir qu'en divisant la base en un grand nombre de parties égales, en menant des génératrices à tous les points de division, en regardant les portions de surface comprises entre deux génératrices consécutives et les divisions de la base, comme des triangles plans, et en prenant séparément les superficies de ces triangles pour en faire ensuite la somme, qui sera à peu près la superficie du cône.

164. THÉORÈME 76. *La superficie d'un cône droit à base circulaire est égale à la génératrice multipliée par la circonférence de la section faite par un plan parallèle à la base et mené à la moitié de la hauteur du cône.*

En effet, si l'on mène le triangle par l'axe AEB (fig. 308), et qu'à la moitié de la hauteur du cône on mène un plan parallèle à la base, ce plan et celui de la base seront rencontrés par celui du triangle par l'axe suivant les droites GF, AB qui seront parallèle et dont la première divisera en deux parties égales la hauteur CE du cône : donc GF sera la moitié de AB; donc la circonférence qui a GF pour diamètre, est la moitié de celle dont le diamètre est AB. Or, d'après le numéro 162, la superficie d'un cône droit est égale à la circonférence de la base multipliée par la moitié de la génératrice, ce qui revient à multiplier la moitié de la circonférence de la base par la génératrice tout entière; donc, en vertu de ce qui vient d'être démontré, que la demi-circonférence de la base est égale à la circonférence entière de la section

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

parallèle à cette base et menée à la moitié de la hauteur du cône, la proposition est démontrée.

165. THÉORÈME 77. *La superficie d'un cône droit à base circulaire est égale à la hauteur du cône multipliée par la circonférence d'un cercle dont le rayon serait la longueur de la perpendiculaire menée au milieu de la génératrice, et terminée à l'axe du cône.*

En effet, soit le point F le milieu de la génératrice BE; menons par ce point la droite FK, perpendiculaire à BE, et un plan parallèle à la base, qui rencontrera le plan AEB suivant la droite GF parallèle à AB, et nous aurons les triangles CEB, HFK qui seront semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires; il en résultera donc que BE : CE :: FK : FH :: *cir.*FK : *cir.*FH; d'où il suit que BE × *cir.*FH = CE × *cir.*FK, mais BE × *cir.*FH est la superficie du cône; donc cette même superficie sera aussi égale à CE × *cir.*FK; ce qu'il fallait démontrer.

166. THÉORÈME 78. *La superficie d'un tronc de cône droit à bases circulaires et parallèles est égale à la demi-somme des circonférences des deux bases multipliées par la génératrice du tronc.*

En effet, supposons le cône entier ABE (fig. 308), et par l'extrémité B de la génératrice BE, élevons une perpendiculaire BD à cette génératrice; faisons cette droite BD égale à la circonférence de la base, et par le point D et le sommet E, menons la droite DE; le triangle BED sera évidemment équivalent à la superficie du cône. Si, ensuite, par l'extrémité F du diamètre GF de la base supérieure du tronc, nous menons la droite FP parallèle à BD, je dis que cette droite FP sera égale à la circonférence de la base supérieure; car les triangles semblables BED, FEP donnent BE : FE :: BD : FP, et les triangles semblables BCE, FHE donnent BE : FE :: BC : FH :: *cir.*BC : *cir.*FH; donc, à cause du rapport commun à ces deux proportions, BD : FP :: *cir.*BC : *cir.*FH; mais par hypothèse BD = *cir.*BC; donc FP = *cir.*FH. Il suit de là que le triangle EFP est équivalent à la superficie du petit cône GFE, et par conséquent le trapèze BDPF sera équivalent à la superficie du tronc de cône; mais la superficie du trapèze $BDPF = BF \times \frac{BD+FP}{2}$; donc celle du tronc du cône sera $BF \times \frac{cir.BC + cir.FH}{2}$; ce qu'il fallait démontrer.

167. *Corollaire* 1. Si par le milieu M de la génératrice BF du tronc de cône on mène une droite MO parallèle à la droite BD, cette droite MO multipliée par BF sera la superficie du trapèze BDPF, et par conséquent celle du tronc de cône; mais la droite MO est égale à la circonférence de la section parallèle à la base menée par le point M, par la même raison que la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

droite FP est égale à la circonférence de la section dont le rayon est HF; donc *la superficie d'un tronc de cône est égale à la génératrice multipliée par la circonférence de la section d'un plan mené à égales distances des bases du tronc.*

168. *Corollaire* 2. Si par le milieu M de la génératrice du tronc de cône on mène une perpendiculaire ML, à cette génératrice, qui aille rencontrer l'axe CH, et que par le point F on abaisse, au plan de la base, la perpendiculaire FQ, les triangles QFB, LMI seront semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires; donc BF : QF :: ML : MI :: *cir.*ML : *cir.*MI; d'où il suit que BF × *cir.*MI = QF × *cir.*ML; mais le premier membre de cette égalité est la superficie du tronc de cône (n°. 167); donc aussi le second membre sera la même superficie; c'est-à-dire que, *la superficie d'un tronc de cône est égale à la hauteur de ce tronc multipliée par la circonférence d'un cercle dont le rayon serait la perpendiculaire abaissée par le milieu de la génératrice du tronc et qui rencontre l'axe.*

169. THÉORÈME 79. *Le volume d'un cône quelconque est égal à la superficie de sa base multipliée par le tiers de sa hauteur.*

En effet, on peut regarder un cône comme étant une pyramide d'une infinité de côtés infiniment étroits, dont la base serait inscrite ou circonscrite à la base du cône; or, le volume d'une pyramide quelconque est égal à la superficie de la base multipliée par le tiers de la hauteur; donc il en sera de même pour le volume d'un cône; ce qu'il fallait démontrer.

170. THÉORÈME 80. *Un tronc de cône à base circulaire et parallèle étant donné, la hauteur du cône entier sera égale au rayon de la grande base multiplié par la hauteur du tronc, et divisé par la différence des rayons des deux bases.*

En effet, les triangles semblables BFQ, BEC (fig. 308) donnent BQ : BC :: QF : CE; mais il est évident que BQ = BC — FH = R — r; si donc nous appelons h la hauteur QF du tronc, et H celle CE du cône entier, nous aurons R — r : R :: h : H = $\frac{Rh}{R-r}$; ce qu'il fallait démontrer.

171. *Corollaire.* Si l'on comparait les triangles semblables BFQ, FEH, on verrait que BQ : FH :: QF : HE ou R — r : r :: h : H' = $\frac{rh}{R-r}$; d'où l'on voit que *la hauteur du cône partiel est égale à celle du tronc multipliée par le rayon de la petite base, et divisée par la différence des rayons des deux bases.*

172. *Remarque.* Si le tronc de cône était à base elliptique, on remplacerait les rayons des bases circulaires des formules précédentes, par les demi-axes correspondans des bases elliptiques.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

173. THÉORÈME 81. *Le volume d'un tronc de cône quelconque est égal à la différence des volumes du cône entier et du cône partiel.*

Cette proposition est évidente.

174. *Corollaire* 1. Si le tronc est à bases parallèles et circulaires, les superficies de ces bases seront respectivement $p\mathrm{R}^2$, et pr^2 (géom. pl., n°. 230), et, par conséquent, les volumes des deux cônes seront $\frac{p\mathrm{R}^2}{3} \times \frac{\mathrm{R}h}{\mathrm{R}-r}$, $\frac{pr^2}{3} \times \frac{rh}{\mathrm{R}-r}$, les hauteurs de ces cônes étant (n°. 170) $\frac{\mathrm{R}h}{\mathrm{R}-r}$, $\frac{rh}{\mathrm{R}-r}$. Le volume du tronc de cône sera donc $\mathrm{V} = \frac{p\mathrm{R}^3h}{3(\mathrm{R}-r)} - \frac{pr^3h}{3(\mathrm{R}-r)} = \frac{ph}{3} \times \frac{\mathrm{R}^3-r^3}{\mathrm{R}-r} = \frac{ph}{3}(\mathrm{R}^2+r^2+\mathrm{R}r)$.

7^me. LEÇON.

La Sphère.

175. DÉFINITION. Si l'on imagine un demi-cercle ADB faisant une révolution entière autour de son diamètre AB (fig. 309), la surface qu'engendrera la demi-circonférence ADB sera une *surface sphérique*, et le corps terminé de toutes parts par cette surface sphérique, sera ce qu'on appelle une *sphère*.

176. *Corollaire*. Dans le mouvement du demi-cercle ADB autour du diamètre AB pour engendrer la sphère, le centre I tourne sur lui-même, et comme tous les points de la demi-circonférence génératrice sont à égales distances du centre I, il s'ensuit que tous les points de la surface sphérique sont aussi à égales distances du centre.

177. DÉFINITIONS. La distance du centre en un point quelconque de la surface de la sphère s'appelle *rayon*. Tous les rayons de la sphère sont égaux entre eux, puisqu'ils mesurent la distance du centre à la surface. Toute droite qui passe par le centre, et qui se termine de part et d'autre à la surface, se nomme *diamètre*. Tous les diamètres de la sphère sont égaux, puisqu'ils se composent de deux rayons.

178. THÉORÈME 82. *Toute section faite par un plan dans une sphère est un cercle.*

Soit la section EHFK (fig. 309) faite dans une sphère par un plan quelconque; abaissons, par le centre I de la sphère, une perpendiculaire IG sur le plan de la section, et par le pied G de cette perpendiculaire, menons les droites quelconques HK, EF dans le plan de cette section; par les extrémités

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

H, F, K menons les rayons IH, IF, IK; je dis que les triangles rectangles HGI, FGI, KGI sont égaux comme ayant le côté commun IG, et les hypothénuses égales, comme étant des rayons de la même sphère; donc les distances GH, GF, GK sont égales entre elles; donc tous les points du contour de la section EHFK sont à égales distances du point G; donc enfin cette section est un cercle dont le centre est le pied G de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan de la section.

179. *Corollaire.* Tant que le triangle HKI aura lieu, le diamètre HK de la section EKFH sera plus petit que la somme des deux rayons IH, IK de la sphère ou que le diamètre; mais il est évident que lorsque le centre G de la section coïncidera avec celui I de la sphère, le triangle IHK ne pourra plus avoir lieu, et le diamètre de la section sera celui de la sphère; d'où il suit que le cercle dont le plan passe par le centre de la sphère est le plus grand de tous, et est celui qui, tournant sur son diamètre, engendre la surface sphérique. On l'appelle le *grand cercle.*

180. THÉORÈME 83. *Par deux points donnés sur la surface d'une sphère, on ne peut faire passer qu'un seul arc de grand cercle.*

En effet, le plan de tout grand cercle passe par le centre de la sphère; mais le grand cercle dont il s'agit est assujéti à passer par deux points donnés sur la surface sphérique; le plan de ce cercle passera donc par ces deux points et par le centre de la sphère; mais par trois points donnés on ne peut faire passer qu'un seul et même plan; donc enfin par deux points donnés, etc.

181. THÉORÈME 84. *Par les extrémités du diamètre perpendiculaire au plan d'un cercle quelconque de la sphère, comme centres, on pourra toujours décrire ce cercle.*

En effet, soit AB (fig. 309) le diamètre perpendiculaire au plan du cercle EHFK; ce diamètre passera par le centre G de ce cercle; si donc par les extrémités A et B du diamètre AB on mène des droites à tous les points qu'on voudra de la circonférence du cercle EHFK, ces droites seront des obliques qui s'écarteront également de la perpendiculaire AB au plan EHFK; donc toutes ces obliques seront égales, et par conséquent A et B seront à égales distances de la circonférence du cercle EHFK; donc, etc.

182. DÉFINITION. Les centres pris sur la surface de la sphère pour décrire sur cette surface un cercle grand ou petit se nomment les *pôles* de ce cercle. Le rayon avec lequel on décrit ce cercle est évidemment la corde d'un arc de grand cercle mené d'un pôle à un point quelconque de la circonférence à décrire; ainsi, s'il s'agit de décrire un grand cercle, le rayon sera la corde d'un quart de grand cercle.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

183. THÉORÈME 85. *Deux grands cercles se coupent mutuellement en deux parties égales.*

En effet, les plans de ces deux grands cercles passent par le centre, et par conséquent leur intersection est un diamètre qui leur est commun, et qui les divise en deux parties égales; or, les extrémités de ce diamètre commun sont les points d'intersection des deux circonférences du grand cercle; donc, etc.

184. DÉFINITIONS. On appelle *angle sphérique*, tout angle formé sur la surface de la sphère par deux arcs de grand cercle; *triangle sphérique*, tout triangle formé sur la surface de la sphère par trois arcs de grand cercle, et *polygone sphérique*, tout polygone formé sur la surface de la sphère par des arcs de grand cercle.

185. THÉORÈME 86. *Dans tout triangle sphérique, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.*

Soit le triangle ABC (fig. 310); je dis que $AB < AC + CB$; car si D est le centre de la sphère, les droites DA, DB et DC seront les intersections des plans des côtés du triangle ABC, lesquels plans formeront un angle trièdre dont les angles plans ADB, ADC et CDB auront pour mesure respectivement les côtés AB, AC et CB du triangle ABC; or (n°. 50), nous avons vu qu'un angle plan quelconque d'un angle trièdre est plus petit que la somme des deux autres; donc $AB < AC + CB$.

186. THÉORÈME 87. *La somme des trois côtés d'un triangle sphérique quelconque est toujours moindre qu'une circonférence de grand cercle.*

En effet, soit le triangle ABC (fig. 311); prolongeons les côtés AB, AC jusqu'à leur rencontre en D; nous aurons le triangle BCD, dans lequel $BC < BD + DC$. Ajoutons $AB + AC$ dans chaque membre de cette inégalité, et il viendra $AB + AC + BC < BD + DC + AB + AC$, ou $AB + AC + BC < ABD + ACD$. Mais (n°. 183) ABD et ACD sont des demi-circonférences de cercle; leur somme sera donc une circonférence entière; d'où l'on voit que la proposition est démontrée.

187. *Corollaire.* Il suit de là que la somme de tous les côtés d'un polygone sphérique quelconque est aussi plus petite qu'une circonférence de grand cercle; car si l'on prolonge de part et d'autre les côtés EF, DC et AB (fig. 312), on formera le triangle GIH, dont la somme des trois côtés GI, IH et GH sera moindre qu'une circonférence de grand cercle. Mais le contour du triangle GIH est plus grand que celui du polygone ABCDEF, puisque la somme des côtés AF, ED, CB est moindre que celle des côtés AG, GF, EI, ID, CH et HB; donc à plus forte raison le contour du polygone est-il plus petit qu'une circonférence de grand cercle.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

188. THÉORÈME 88. *Sur la même sphère ou sur deux sphères égales, deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux, chacun à chacun, et semblablement disposés.*

Supposons que les deux triangles ABC, *abc* (fig. 313) aient l'angle A = *a*, le côté AB = *ab* et AC = *ac*; je dis que ces deux triangles seront égaux; car D et *d* étant les centres des sphères, les deux angles trièdres ABCD, *abcd* seront égaux, car ils auront deux faces égales également inclinées; donc ces deux angles trièdres coïncideront, étant superposés, et par conséquent aussi les triangles sphériques ABC, *abc*.

189. THÉORÈME 89. *Sur la même sphère ou sur des sphères égales, deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun, et semblablement disposés.*

Soient les deux triangles ABC, *abc* (fig. 313), ayant le côté AB = *ab*, l'angle CAB = *cab* et l'angle CBA = *cba*, les centres des sphères étant les points D et *d*, les angles trièdres ABCD, *abcd* seront égaux (n°. 53) ayant un angle plan égal adjacent à deux angles dièdres égaux, chacun à chacun; superposés, les deux angles trièdres coïncideraient donc, et par conséquent les triangles sphériques aussi.

190. THÉORÈME 90. *Sur la même sphère ou sur des sphères égales, deux triangles qui ont les trois côtés égaux, chacun à chacun, et semblablement disposés, sont égaux.*

Soient les deux triangles ABC, *abc* (fig. 313) qui ont les trois côtés égaux; si les points D et *d* sont les centres des sphères, les angles trièdres ABCD, *abcd* seront égaux puisqu'ils auront les trois angles plans égaux, chacun à chacun (n°. 52); ces deux angles trièdres, superposés, coïncideront donc, et par conséquent les triangles sphériques aussi.

191. *Corollaire.* Il suit de là que dans un triangle isocèle sphérique ABC (fig. 314), les angles A et C opposés aux côtés égaux BC, AB sont égaux; car si par le milieu D de la base AC et le sommet B on fait passer un arc de grand cercle BD, les triangles ADB, DBC auront les trois côtés égaux; d'où il suit évidemment que les angles A et C sont égaux, quoique les deux triangles ADB, DBC ne sauraient coïncider.

192. *Remarque.* Attendu que les angles sphériques sont les inclinaisons des plans de leurs côtés, il est évident 1°. que si deux arcs de grand cercle se rencontrent, ils formeront deux angles adjacens dont la somme sera égale à deux angles droits; 2°. que les angles opposés par le sommet sont égaux, etc., etc.

193. THÉORÈME 91. *Sur la même sphère ou sur des sphères égales, deux*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

triangles qui ont les trois angles égaux, chacun à chacun, et semblablement disposés, sont égaux.

Soient les deux triangles ABC, *abc* (fig. 315) tels, que les angles A, B et C soient respectivement égaux aux angles *a*, *b* et *c*; si l'on prolonge les côtés AC, BC, des quantités CE, CF respectivement égales à *ac*, *bc*, que par les points E et F on fasse passer un arc de grand cercle EF prolongé de part et d'autre jusqu'à sa rencontre avec le côté AB prolongé vers H et G, on aura le triangle CEF égal au triangle *abc*, car les angles ACB, FCE sont égaux, comme opposés par le sommet; mais l'angle ACB $= c$, donc FCE $= c$, et de plus CE $= ac$ et CF $= bc$ par construction. En outre, les triangles AEH, AEG sont égaux, car ils ont le côté commun AE; l'angle FEC $=$ CAB, les angles adjacens GAC, CAB valent ensemble deux angles droits, ainsi que les angles adjacens FEA, AEH; d'où il suit que GAC $=$ AEH; donc les deux triangles AEH, AEG ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun; donc ces deux triangles sont égaux; donc AH $=$ GE... (1). On démontrerait de la même manière, que les triangles GBF, BFH sont égaux, et que, par conséquent, BH $=$ GF. Retranchons cette égalité de l'égalité (1), et nous aurons AH $-$ BH $=$ GE $-$ GF ou AB $=$ EF. Il suit donc de là que les triangles ABC, CEF ont un côté et les angles égaux, chacun à chacun, donc ils sont égaux; mais les triangles EFC, *abc* sont égaux par construction; donc enfin les triangles ABC, *abc* sont égaux; ce qu'il fallait démontrer.

194. *Corollaire.* Il suit de là que deux angles trièdres qui ont les trois inclinaisons égales, chacune à chacune, sont égaux, car si par les sommets de ces angles trièdres, comme centres, on décrit deux sphères de même rayon, les triangles sphériques, compris entre les faces des angles trièdres, seront égaux comme ayant les trois angles égaux, chacun à chacun; or, les côtés de ces triangles sphériques mesurent les angles plans des angles trièdres; ces angles plans sont donc égaux, chacun à chacun; donc (n°. 52) les deux angles trièdres sont aussi égaux.

195. THÉORÈME 92. *La mesure d'un angle sphérique est égale à l'arc de grand cercle compris entre les côtés de l'angle, et décrits du sommet comme pôle.*

Supposons qu'il s'agisse de l'angle DAE (fig. 316); les plans des côtés de cet angle se rencontreront suivant le diamètre AB de la sphère; si par le centre C on mène les rayons CD, CE perpendiculaires à l'intersection AB, l'angle DCE, formé par ces rayons, sera l'inclinaison des plans des côtés de l'angle sphérique; mais cet angle DCE a pour mesure l'arc de grand

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cercle DE décrit de son sommet C comme centre; or, le sommet A de l'angle sphérique DAE est le pôle de l'arc de grand cercle DE, puisque le diamètre AB est perpendiculaire au plan CDE de l'arc DE, et ce même arc DE est la mesure de l'angle sphérique DAE, étant celle de l'inclinaison des plans des côtés de cet angle sphérique; d'où il suit que la proposition est démontrée.

196. THÉORÈME 93. *Si par les sommets* A, B *et* C *d'un triangle sphérique* ABC (fig. 317), *comme pôles, on décrit les trois arcs de grand cercle bc, ac et ab, on aura un triangle abc tel, que de ses trois sommets a, b et c, comme pôles, on pourra décrire les trois côtés* BC, AC *et* AB *du premier triangle* ABC.

En effet, ayant décrit l'arc de grand cercle *bc* par le pôle A, le point *c* est, par rapport au point A, à une distance égale à la corde du quart du grand cercle, et par le pôle B ayant décrit l'arc de grand cercle *ac*, le point *c* est, par rapport au point B, à une distance égale à la corde du quart du grand cercle; d'où il suit que si par le point *c*, comme pôle, on décrivait un arc de grand cercle, cet arc passerait par les points A et B; mais par deux points donnés on ne peut faire passer qu'un seul arc de grand cercle; donc le côté AB pourrait être décrit du pôle *c*. On démontrerait de même que les côtés AC, AB pourraient être décrits des pôles *b* et *a*; ce qu'il fallait démontrer.

197. DÉFINITION. Les deux triangles ABC, *abc* (fig. 317) sont dits *polaires* l'un de l'autre.

198. THÉORÈME 94. *La mesure d'un angle d'un triangle sphérique est égale à une demi-circonférence de grand cercle, moins le côté opposé du triangle polaire* (fig. 317).

Prolongeons les côtés AB, AC jusqu'à leurs rencontres en *e* et *d* avec le côté *cb* du triangle polaire *abc*; l'arc *de* décrit du pôle A sera la mesure de l'angle A; mais $de = ce + bd - cb$; or les arcs *ce* et *bd* sont des quarts de grand cercle; leur somme égalera donc une demi-circonférence; donc $A = \frac{1}{2}circ. - cb$.

199. *Corollaire* 1. On trouverait de même que $B = \frac{1}{2}circ. - ac$ et que $C = \frac{1}{2}circ. - ab$; si donc on fait la somme des trois angles du triangle sphérique ABC, on aura $A + B + C = \frac{3}{2}circ. - (ab + ac + bc)$.

200. *Corollaire* 2. Il suit de là que la somme des trois angles d'un triangle sphérique quelconque est plus grande qu'une demi-circonférence ou 180°., car pour avoir cette somme, de trois demi-circonférences, il faut retrancher la somme des trois côtés d'un triangle, laquelle somme (n°. 186) est toujours moindre qu'une circonférence entière ou deux demies.

201. *Corollaire* 3. Il suit encore de là que la somme des trois angles d'un

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

triangle sphérique quelconque est toujours moindre que trois demi-circonférences ou six angles droits; car de trois demi-circonférences il faut retrancher la somme des trois côtés du triangle polaire, qui n'est jamais nulle. Ainsi, dans les triangles sphériques, la somme des trois angles n'est pas une quantité constante, mais une quantité qui varie depuis deux angles droits jusqu'à six, sans jamais atteindre à ces deux limites.

202. *Corollaire* 4. De là résulte qu'un triangle sphérique peut avoir deux et même trois angles droits, deux et même trois angles obtus.

Les triangles sphériques qui ont deux angles droits s'appellent *bi-rectangles*, et ceux qui en ont trois, *tri-rectangles*.

8me. LEÇON.

La superficie et le volume de la Sphère et de ses parties.

203. *Remarque.* Supposons qu'à un demi-cercle ADB (fig. 318) on ait inscrit et circonscrit un demi-polygone régulier; si l'on fait tourner les deux demi-polygones et le demi-cercle autour du diamètre AB, les deux polygones engendreront chacun une surface de révolution à pans, en même temps que le demi-cercle engendrera une sphère. La surface de la sphère sera évidemment plus grande que celle engendrée par le demi-polygone inscrit, et plus petite que celle engendrée par le demi-polygone circonscrit. Mais si l'on augmente le nombre des côtés des demi-polygones, la surface inscrite augmentera, et la surface circonscrite diminuera, de sorte que la différence entre les surfaces inscrites et circonscrites pourra devenir plus petite que toute quantité donnée, c'est-à-dire que ces deux surfaces finiront par coïncider avec la sphère, lorsque le nombre des côtés des demi-polygones sera infini.

204. THÉORÈME 95. *La superficie de la surface engendrée par un demi-polygone régulier* ACDEFB (fig. 318), *tournant autour du diamètre* AB *qui passe par deux sommets* A *et* B *du polygone entier, est égale à la circonférence du cercle inscrit au polygone, multipliée par le diamètre* AB *du cercle circonscrit.*

En effet, par les sommets C, D, E et F du demi-polygone ACDEFB, menons les droites CG, DH, EK et FL perpendiculaires au diamètre AB, et par le centre I, menons les droites IO, IO′, IO″, IO‴, etc., au milieu des côtés du polygone; il est clair que ces droites seront perpendiculaires aux côtés du polygone, et seront par conséquent égales. Cela posé, il est visible

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que la surface engendrée par le demi-polygone ACDEFB se compose 1°. d'un cône engendré par le côté AC, dont la superficie (n°. 165) sera égale à AG × *circ.*IO; 2°. d'un tronc de cône engendré par le côté DC, dont la superficie (n°. 168) sera égale à GH × *circ.*IO; 3°. d'un second tronc de cône engendré par le côté DE, dont la superficie sera égale à HK × *circ.*IO; 4°. d'un troisième tronc de cône engendré par le côté EF, dont la superficie sera égale à KL × *circ.*IO, et 5°. d'un cône engendré par le côté FB, dont la superficie sera égale à LB × *circ.*IO; or, si nous faisons la somme de toutes ces superficies partielles, nous aurons évidemment la superficie demandée; si donc nous l'appelons S, nous aurons S = (AG+GH+HK+KL+LB) × *circ.*IO = AB × *circ.*IO; ce qu'il fallait démontrer.

205. *Corollaire* 1. Si le nombre des côtés du demi-polygone générateur augmentait de plus en plus, le rayon IO du cercle inscrit augmenterait aussi de plus en plus, de sorte que ce rayon deviendrait égal à celui IA du demi-cercle dans lequel le demi-polygone est inscrit, si le nombre des côtés de ce dernier était infini, et dans ce dernier cas le demi-polygone engendrerait la sphère; il suit donc de là que, *la superficie de la sphère est égale au diamètre multiplié par la circonférence du grand cercle.*

206. *Corollaire* 2. Nous avons vu (géom. pl., n°. 229) que la circonférence d'un cercle était $2p\mathrm{R}$; la superficie de la sphère sera donc $2p\mathrm{R} \times 2\mathrm{R} = 4p\mathrm{R}^2$; mais (géom. pl., n°. 230) la superficie d'un cercle est $p\mathrm{R}^2$; d'où il suit que *la superficie d'une sphère est quatre fois celle de son grand cercle.*

207. *Corollaire* 3. Si l'on suppose un cylindre dont la base serait le grand cercle et la hauteur le diamètre d'une sphère, c'est-à-dire si l'on suppose un cylindre circonscrit à la sphère, la superficie latérale du cylindre sera égale à la circonférence du grand cercle multipliée par le diamètre de la sphère; d'où l'on voit que la sphère et le cylindre auront la même superficie.

208. *Corollaire* 4. On peut regarder une sphère comme étant composée d'une infinité de pyramides infiniment petites qui auraient toutes leurs sommets au centre, et leurs bases infiniment petites sur la surface de la sphère. Or, à cause de la petitesse des bases, on pourra les regarder comme planes, d'où il s'ensuivra que le volume de l'une de ces petites pyramides sera égal au tiers du rayon de la sphère multiplié par sa base; la somme de toutes ces pyramides, ou le volume de la sphère, sera donc égale à celle de toutes les bases de ces pyramides, ou à la superficie de la sphère, multipliée par le tiers du rayon; donc enfin le *volume de la sphère sera égal à sa superficie multipliée par le tiers de son rayon;* de sorte que, V étant ce volume, on aura $\mathrm{V} = 4p\mathrm{R}^2 \times \frac{\mathrm{R}}{3} = \frac{4p\mathrm{R}^3}{3}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

209. *Corollaire* 5. Le volume du cylindre circonscrit à la sphère est $p\mathrm{R}^2 \times 2\mathrm{R} = 2p\mathrm{R}^3$; si on compare ce volume à celui de la sphère, qui est $\frac{4p\mathrm{R}^3}{3}$, en appelant V celui de la sphère et V′ celui du cylindre, on aura $\mathrm{V} : \mathrm{V}' :: \frac{4p\mathrm{R}^3}{3} : 2p\mathrm{R}^3 :: \frac{2}{3} : 1$; d'où l'on voit que *le volume de la sphère est les deux tiers de celui du cylindre circonscrit.*

210. DÉFINITIONS. Si pendant qu'un demi-cercle ACDB (fig. 319) tourne autour de son diamètre AB, pour engendrer une sphère, on considère l'arc AC ou l'arc CD, cet arc engendrera une portion de la surface de la sphère à laquelle on donne le nom de *zone sphérique.* La zone engendrée par l'arc AC prend plus ordinairement le nom de *calotte sphérique.* Si par les extrémités C et D de l'arc AC ou CD qui engendre une zone on abaisse les perpendiculaires CG, DH au diamètre AB, les cercles décrits par ces perpendiculaires CG, DH seront les bases, et le segment AG ou GH du diamètre AB sera la hauteur de la zone. On appelle *secteur sphérique,* la portion de la sphère engendrée par un secteur circulaire quelconque CIA ou CID, et *segment sphérique,* la portion du volume de la sphère, comprise entre les bases d'une zone quelconque.

211. THÉORÈME 96. *La superficie d'une zone est égale à la circonférence du grand cercle de la sphère multipliée par la hauteur de la zone.*

Supposons qu'il s'agisse de la zone engendrée par l'arc AD (fig. 318), en inscrivant une portion de polygone dans l'arc AD, quel que soit le nombre des côtés de cette portion de polygone, en la faisant tourner autour du diamètre AB, elle engendrera un corps dont la superficie sera égale à la hauteur HA, multipliée par la circonférence de cercle dont le rayon est IO (n°. 204); mais quand le nombre de côtés de la portion de polygone est infini, IO devient IA, et la surface engendrée est alors la zone; donc cette zone est égale à sa hauteur AH multipliée par la circonférence du grand cercle; ce qu'il fallait démontrer.

On démontrerait de même que la zone engendrée par l'arc de cercle EC est égale à la hauteur KG multipliée par la circonférence du grand cercle. Ainsi, h étant la hauteur d'une zone quelconque, et S sa superficie, on aura $\mathrm{S} = 2p\mathrm{R}h$.

212. THÉORÈME 97. *La superficie d'une calotte sphérique* ACF (fig. 319) *est égale à celle d'un cercle dont le rayon est la corde* AF.

En effet, la corde AF est moyenne proportionnelle entre le diamètre AB et le segment AG, de sorte que AB : AF :: AF : AG, ou $\frac{1}{2}$AB ou IA : AF :: $\frac{1}{2}$AF : AG, ou encore *cir.*AI : *cir.*AF :: $\frac{1}{2}$AF : AG; d'où AG × *cir.*AI =

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\frac{1}{2}$AF $\times$ *cir.*AF; mais le premier membre de cette égalité est la superficie de la calotte sphérique, et le second celle du cercle dont le rayon est AF; donc la proposition est démontrée.

213. *Corollaire.* La superficie de la calotte CBF sera aussi $\frac{1}{2}$BF $\times$ *cir.*BF; mais la somme des deux calottes ACF, CBF est la superficie de la sphère; donc la somme des superficies des cercles dont les rayons sont les cordes AF, BF est égale à celle de la sphère, ou à quatre fois celle du grand cercle.

214. THÉORÈME 98. *Le volume d'un secteur sphérique est égal à la superficie de la zone qui lui sert de base, multipliée par le tiers du rayon de la sphère.*

En effet, on peut regarder un secteur comme étant composé d'une infinité de pyramides infiniment petites qui auraient toutes leurs sommets au centre de la sphère, et leurs bases infiniment petites sur la surface de la zone. Il suit évidemment de là que la somme de toutes ces pyramides est égale à la somme de leurs bases ou à la superficie de la zone multipliée par le tiers de leur hauteur commune qui est le rayon de la sphère; donc le volume du secteur sphérique est égal à la superficie de la zone multipliée par le tiers du rayon. Or, la superficie de la zone est (n°. 211) $2p\mathrm{R}h$; si donc on appelle V le volume du secteur, on aura $\mathrm{V} = \frac{2p\mathrm{R}^2h}{3}$.

215. THÉORÈME 99. *Le volume d'un segment de sphère* CAF (fig. 319), *à une seule base, est égal à celui d'un cylindre qui aurait pour base un cercle dont le rayon serait la hauteur* AG, *et pour hauteur le rayon de la sphère moins le tiers de la même hauteur* AG.

En effet, le volume du segment CAF est évidemment égal à celui du secteur ICAF moins celui du cône ICF; or, celui du secteur est $\frac{2p\mathrm{R}^2h}{3}$, h étant la hauteur AG, et celui du cône ICF est égal à (n°. 169) $\frac{p \times (\mathrm{CG})^2 \times \mathrm{IG}}{3}$; donc celui du segment CAF sera $\frac{2p\mathrm{R}^2h}{3} - \frac{p(\mathrm{CG})^2 \times \mathrm{IG}}{3}$. Mais 1°. $(\mathrm{CG})^2 = \mathrm{AG} \times \mathrm{GB} = h(2\mathrm{R} - h) = 2\mathrm{R}h - h^2$, et $\mathrm{IG} = \mathrm{R} - h$, par conséquent, V étant le volume du segment, $\mathrm{V} = \frac{2p\mathrm{R}^2h}{3} - \frac{p(2\mathrm{R}h - h^2)(\mathrm{R} - h)}{3} = \frac{2p\mathrm{R}^2h}{3} - \frac{2p\mathrm{R}^2h - ph^2\mathrm{R} - 2p\mathrm{R}h^2 + ph^3}{3} = \frac{2p\mathrm{R}^2h - 2p\mathrm{R}^2h + ph^2\mathrm{R} + 2p\mathrm{R}h^2 - ph^3}{3} = \frac{ph^2\mathrm{R} + 2p\mathrm{R}h^2 - ph^3}{3} = ph^2\,\frac{(\mathrm{R} + 2\mathrm{R} - h)}{3}$, et enfin $\mathrm{V} = ph^2\left(\mathrm{R} - \frac{h}{3}\right)$; ce qu'il fallait démontrer.

216. *Corollaire.* Si l'on avait un segment de sphère à deux bases, tel que CFED (fig. 319), on prendrait le volume de chacun des segmens à une seule base DAE, CAF, et ensuite, on retrancherait le volume du petit de celui du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

grand : la différence serait évidemment le volume du segment proposé.

217. DÉFINITION. La portion de la surface d'une sphère comprise entre deux demi-grands cercles ADB, AEB (fig. 316) qui se rencontrent à leurs extrémités, est ce que l'on appelle *fuseau sphérique*, et la portion du volume de la sphère comprise entre les plans de ces mêmes demi-grands cercles et terminée par le fuseau, s'appelle *coin* ou *onglet* sphérique.

218. THÉORÈME 100. *La superficie d'un fuseau sphérique est égale à celle de la sphère entière multipliée par le nombre des degrés de l'angle du fuseau et divisé par* 360.

En effet, si l'arc DE (fig. 316), qui mesure l'angle du fuseau ADBEA, était d'un degré, il est clair que le fuseau serait la 360^{me}. partie de la superficie entière de la sphère ; si donc S est cette superficie entière, $\frac{S}{360}$ sera celle du fuseau. Or, si le fuseau était de 2 degrés, de 3 degrés, de 4 degrés, etc., il est clair qu'il serait 2, 3, 4, etc. fois plus grand que celui d'un degré ; d'où il suit que si le nombre des degrés est n, la superficie du fuseau sera $\frac{nS}{360}$; ce qu'il fallait démontrer.

219. *Remarque.* Il est clair que cette proposition a lieu pour le volume d'un onglet ; c'est-à-dire que *le volume d'un onglet est égal à celui de la sphère multiplié par le nombre des degrés de l'angle du fuseau divisé par* 360.

220. THÉORÈME 101. *Si dans une demi-sphère deux demi-grands cercles* ABC, EBD (fig. 320) *se coupent comme on voudra, la somme des deux triangles* ABE, DBC, *que ces deux demi-grands cercles forment, sera équivalente à la superficie du fuseau qui aurait l'angle opposé par le sommet des deux triangles.*

En effet, prolongeons les arcs BA, BE jusqu'à leur rencontre en F ; nous aurons le fuseau FABEF, dont l'angle sera ABE, qui se composera des triangles ABE, AEF ; si donc nous faisons voir que les deux triangles AEF, DBC sont égaux, la proposition sera démontrée. Or, les deux demi-cercles ABC, BAF ont la partie commune AB, ce qui donne AF = BC, et les deux demi-cercles FEB, EBD ont la partie commune EB, ce qui fait que EF = BD ; de plus, les angles DBC, AFE sont égaux ; donc les deux triangles DBC, AEF ont un angle égal compris entre côtés égaux, chacun à chacun ; donc ils sont égaux, puisque d'ailleurs les parties égales sont semblablement disposées ; donc le fuseau FABEF est équivalent à la somme des triangles ABE, DBC.

221. THÉORÈME 102. *La superficie d'un triangle sphérique est égale à celle de la sphère entière multipliée par la somme des trois angles du triangle moins* 180°., *et divisée par 2 fois* 360.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, supposons la demi-sphère DFGI et prolongeons les côtés du triangle ABC jusqu'à leur rencontre avec le grand cercle DFGI : la somme des triangles EAF, IAH sera (n°. 220) un fuseau qui aura l'angle A ; la somme des triangles EBD, GBH sera un fuseau qui aura l'angle B, et la somme des triangles DCI, FCG sera un fuseau qui aura l'angle C. Les superficies de ces fuseaux seront respectivement (n°. 218) $\frac{A\times S}{360}$, $\frac{B\times S}{360}$, $\frac{C\times S}{360}$, S étant la superficie entière de la sphère, et leur somme sera égale à la demi-sphère plus deux fois le triangle ABC, de sorte qu'on aura $\frac{A\times S}{360}+\frac{B\times S}{360}+\frac{C\times S}{360}=\frac{S}{2}+2ABC$ ou $\frac{A\times S}{360}+\frac{B\times S}{360}+\frac{C\times S}{360}-\frac{180S}{360}=2ABC$; d'où il suit que $\frac{(A+B+C-180°.)S}{360}=2ABC$, et par conséquent $ABC=\frac{(A+B+C-180°.)S}{2\times 360}$; ce qu'il fallait démontrer.

222. *Corollaire.* Il est facile de voir de là que le volume d'une pyramide triangulaire sphérique est égal à la superficie du triangle sphérique qui lui sert de base, multipliée par le tiers du rayon de la sphère.

223. *Remarque.* D'après le dernier théorème, il serait facile de démontrer que la *superficie d'un polygone sphérique quelconque est égale à la superficie de la sphère entière, multipliée par la somme de tous les angles intérieurs du polygone, moins autant de fois* 180°. *qu'il y a de côtés moins* 2 *dans le polygone, et divisé par* 2 *fois* 360.

9^me^ LEÇON.

L'Ellipsoïde, la Paraboloïde et l'Hyperboloïde.

224. DÉFINITION. On appelle *ellipsoïde* une surface engendrée par une ellipse tournant autour de l'un de ses axes. Si l'ellipse tourne autour du grand axe, l'ellipsoïde sera allongée, et si elle tourne autour de son petit axe, l'ellipsoïde sera applatie : tout corps terminé par une surface ellipsoïde porte le même nom que cette surface.

225. THÉORÈME 103. *Toute section faite par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation d'une surface quelconque de révolution est un cercle.*

En effet, soit la surface de révolution AFBG (fig. 322) engendrée par la courbe quelconque AFB faisant sa révolution autour de la droite AB ; si l'on considère un point quelconque C de cette courbe AFB, pendant la génération de la surface, on verra que ce point C décrit dans l'espace un cercle, dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation AB, dont le rayon est la per-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pendiculaire CE abaissée par ce point C sur AB. Il est évident que la réciproque a lieu, c'est-à-dire que si l'on mène un plan DUCT perpendiculaire à l'axe de rotation AB, et que par le pied E de cet axe AB et le point C, où le plan rencontre la génératrice AFB, on mène la droite EC, cette droite EC sera perpendiculaire à l'axe AB, d'où l'on voit que la droite EC décrira un cercle autour du point E; donc, etc.

226. THÉORÈME 104. *Toute section faite dans un ellipsoïde par un plan quelconque est une ellipse.*

Soit AFBG (fig. 322) un ellipsoïde coupé par un plan quelconque HNKO; par l'axe de rotation AB, menons un plan AFBG perpendiculaire à celui de la section HNKO : ces deux plans se rencontreront suivant la droite HK, et celui mené par l'axe de rotation rencontrera évidemment l'ellipsoïde suivant une ellipse qui sera la génératrice de la surface.

Cela posé, menons deux plans RFSG, TCUD perpendiculaires à l'axe de rotation, de manière que ces deux plans rencontrent celui de la section HNKO suivant les droites NO, LM, qui seront parallèles, comme étant les intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième. Les sections des plans perpendiculaires à l'axe de rotation (n°. 225) seront des cercles; les intersections GF, DC de ces plans avec celui qui passe par l'axe perpendiculairement au plan de la section quelconque, seront les diamètres de ces cercles, et seront perpendiculaires aux droites NO, LM. Ainsi on aura $(NP)^2 = GP \times PF$ et $(LQ)^2 = DQ \times QC$; d'où $(NP)^2 : (LQ)^2 :: GP \times PF : DQ \times QC$... (1). Mais dans l'ellipse AFBG les cordes GF et DC sont parallèles et coupent la corde HK, de manière (géom. pl., n°. 642) que $GP \times PF : DQ \times QC :: HP \times PK : HQ \times QK$; mais le premier rapport de cette proportion est le second de la proportion (1); donc $(NP)^2 : (LQ)^2 :: HP \times PK : HQ \times QK$; donc la section HNKO est une ellipse.

227. THÉORÈME 105. *Si l'on coupe un ellipsoïde par deux plans parallèles, les sections* ABCD, EFGH (fig. 323) *seront des ellipses semblables.*

En effet, par l'axe de rotation QR de l'ellipsoïde, menons un plan AQGR perpendiculaire à ceux des sections parallèles ABCD, EFGH : ce plan coupera l'ellipsoïde suivant l'ellipse génératrice AQGR, et les plans des sections parallèles suivant les droites AC, EG, qui seront parallèles et terminées de part et d'autre à l'ellipse génératrice AQGR : ces droites AC, EG seront donc des doubles ordonnées rapportées aux diamètres conjugués LK, OP; menons un plan KBLH par le diamètre LK perpendiculairement au plan AQGR, ce plan rencontrera l'ellipsoïde suivant l'ellipse KSLT, et les plans des sections parallèles suivant les droites BD, FH, qui seront perpendiculaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

au plan AQGR, et par conséquent respectivement aux droites AC, EG qui passent par leurs pieds dans le plan AQGR : les droites AC, BD seront donc les axes de l'ellipse ABCD, et les droites EG, FH ceux de l'ellipse EFGH. Mais les axes BD, FH sont des doubles ordonnées de l'ellipse KSLT: on aura donc $(BM)^2 : (FN)^2 :: LM \times MK : LN \times NK$, et $(AM)^2 : (EN)^2 :: LM \times MK : LN \times NK$, puisque les axes AC, EG sont des doubles ordonnées de l'ellipse AQGR; donc $(BM)^2 : (FN)^2 :: (AM)^2 : (EN)^2$, ou $BM : FN :: AM : EN$; d'où il suit que les axes des ellipses ABCD, EFGH sont proportionnels, et que par conséquent ces ellipses sont semblables; ce qu'il fallait démontrer.

228. *Corollaire.* Il suit de là que toute section faite dans un ellipsoïde par un plan parallèle à l'axe de rotation est une ellipse semblable à celle qui est la génératrice de l'ellipsoïde; car l'intersection de tout plan mené par l'axe de rotation donne l'ellipse génératrice, et par cet axe il est toujours possible de mener un plan parallèle à un plan parallèle à l'axe de rotation.

229. DÉFINITION. On appelle *paraboloïde* une surface engendrée par une demi-parabole qui fait une révolution entière autour de son axe. Le corps terminé par cette surface et par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation prend le même nom que la surface. La base d'un paraboloïde est un cercle, puisque toute section plane perpendiculaire à l'axe de rotation d'un corps quelconque de révolution est un cercle.

230. THÉORÈME 106. *Toute section faite dans un paraboloïde par un plan qui n'est pas parallèle à l'axe de rotation, est une ellipse.*

Soit la section quelconque EGHFLO (fig. 324); par l'axe de rotation BD, menons un plan perpendiculaire à celui de la section EGHFLO; ce plan rencontrera le paraboloïde suivant la parabole ABC, et le plan de la section suivant la droite EF. Menons, de plus, deux plans QGP, MHN perpendiculaires à l'axe de rotation, de manière que ces plans rencontrent celui de la section EHFO suivant les droites GO, HL; d'abord les sections de ces plans perpendiculaires à l'axe de rotation sont (n°. 225) des cercles, dont les centres sont sur cet axe de rotation; d'où l'on voit que les intersections QP, MN des plans de ces cercles avec celui de la parabole ABC sont des diamètres à ces mêmes cercles; en outre, les doubles ordonnées GO, HL sont perpendiculaires au plan ABC, puisqu'elles sont les intersections de plans perpendiculaires à celui-là; ces droites sont donc aussi perpendiculaires aux diamètres QP, MN qui passent par leurs pieds dans le plan ABC : on aura donc $(GK)^2 : (HI)^2 :: QK \times KP : MI \times IN$. Mais (géom. pl., n°. 510) à cause du parallélisme des droites QP, MN, on a $QK \times KP : MI \times IN :: EK \times KF : EI \times FI$;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donc $(GK)^2 : (HI)^2 :: EK \times KF : EI \times FI$; donc la section EGHFLO est une ellipse; ce qu'il fallait démontrer.

231. THÉORÈME 107. *Toute section faite dans un paraboloïde par un plan parallèle à l'axe de rotation est une parabole.*

Supposons qu'il s'agisse de la section EHFGI parallèle à l'axe de rotation BD (fig. 325); menons par cet axe de rotation BD un plan PBS perpendiculaire à celui de la section EHFGI : l'intersection PBS du plan PBS avec la surface paraboloïde sera la parabole génératrice, et ce plan PBS rencontrera, en outre, celui de la section EHFGI suivant la droite FL, qui sera parallèle à l'axe BD. Menons, de plus, les plans AECI, QHRG perpendiculaires à l'axe de rotation BD; les intersections de ces plans avec le paraboloïde seront des cercles, et avec le plan EHFGI les droites EI, GH perpendiculaires à LF, qui seront des doubles ordonnées des cercles AECI, QHRG; car ces mêmes droites seront perpendiculaires aux droites PS, QR qui sont les intersections des plans AECI, QHRG avec le plan PBS : on aura donc $(IL)^2 : (HO)^2 :: PL \times LS : QO \times OR$. Mais à cause que la droite FL est un diamètre de la parabole PBS, on aura (géom. pl., n°. 504) $PL \times LS = p \times FL$, et $QO \times OR = p \times FO$; donc $(IL)^2 : (HO)^2 :: p \times FL : p \times FO :: FL : FO$; les carrés des ordonnées de la courbe EHFGI sont donc entre eux comme les abscisses correspondantes; donc (géom. pl., n°. 451) cette courbe est une parabole.

232. THÉORÈME 108. *Si l'on coupe un paraboloïde par deux plans parallèles entre eux, mais non parallèles à l'axe de rotation, les sections de ces plans seront des ellipses semblables.*

Supposons, en effet, que les sections EHFG, *acbd* (fig. 326) soient celles de deux plans parallèles entre eux; par l'axe OP de rotation menons un plan MEPFN perpendiculaire aux plans des deux sections parallèles; ce plan rencontrera ceux de ces deux sections suivant les droites EF, *ab*, qui seront parallèles entre elles, et le paraboloïde suivant la parabole génératrice MEPFN. Par les milieux I, *e* des droites EF, *ab*, menons la droite BD, qui sera un diamètre de la parabole MEPFN; par cette droite BD, menons un plan KHBGL perpendiculaire au plan MEPFN, ce plan sera parallèle à l'axe de rotation PO, et par conséquent son intersection KHBGL avec le paraboloïde sera une parabole. Le plan de cette parabole coupera les plans des sections EHFG, *acbd* suivant les droites parallèles HG, *cd*, et la droite DB est évidemment l'axe de cette même parabole KHBGL, en même temps qu'elle est un diamètre de la parabole MEPFN; de là il résulte que les droites EF, GH sont deux diamètres conjugués de l'ellipse EHFG, et que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les droites *ab*, *cd*, respectivement parallèles aux droites EF, GH, sont des diamètres conjugués, de l'ellipse *acbd*, semblables aux diamètres conjugués EF, GH de l'ellipse EHFG : si donc ces diamètres sont proportionnels, les deux ellipses parallèles EHFG, *acbd* seront semblables. Or, la parabole MEPFN, rapportée au diamètre BD, nous donne $(IF)^2 : (eb)^2 :: BI : Be$, et la parabole KHBGL rapportée à son axe BD nous donne $(IH)^2 : (ce)^2 :: BI : Be$; donc $(IF)^2 : (eb)^2 :: (IH)^2 : (ce)^2$ ou $IF : eb :: IH : ce$; ce qu'il fallait démontrer.

233. *Remarque* 1. Si l'on supposait un hyperboloïde, c'est-à-dire un corps engendré par une demi-hyperbole, tournant autour du premier axe de la courbe, par des raisonnemens et des constructions semblables aux précédens, on démontrerait que toute section faite par un plan qui ne serait point parallèle à l'axe de rotation, est une ellipse; que toutes les sections parallèles entre elles, mais obliques à l'axe de rotation, sont des ellipses semblables, et que toute section faite parallèlement à l'axe de rotation est une hyperbole semblable à la génératrice.

234. *Remarque* 2. Les géomètres considèrent d'autres surfaces du second ordre, outre celles dont nous venons de nous occuper; mais leurs formes ne se prêtant guère aux objets de constructions, nous nous dispenserons d'en parler ici, du moins pour le moment.

235. *Remarque* 3. Il nous importerait maintenant de donner la superficie et le volume de l'ellipsoïde et du paraboloïde; mais pour cela nous attendrons que nous ayons fait connaître les centres de gravités, qui fournissent des moyens fort simples pour résoudre ces questions. De plus, nous pourrions donner ici la manière de lever les plans, et celle de faire les nivellemens sur le terrain; mais nous aimons mieux ne parler de ces deux choses que lorsqu'il s'agira d'établir sur le terrain un édifice ou monument quelconque. Ainsi nous terminerons la première partie de ce cours, en donnant les rapports des mesures de volume et la loi de leurs subdivisions.

Mesures anciennes de volume.

Ces mesures sont la toise et le pied cube. On a aussi la *solive*, qui est un parallélipipède rectangle dont la base est un carré d'un demi-pied de côté, et dont la hauteur est de 12 pieds. La solive sert au toisé de charpente. Attendu que la base de la solive est un quart de pied superficiel, et sa hauteur 12 pieds, son volume est de 3 pieds cubes. Ainsi on peut toiser la charpente en prenant le pied cube pour unité, puisqu'en prenant le tiers du nombre des pieds cubes qu'on aura trouvé, il en résultera le nombre des solives.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Première loi de subdivisions de la Toise et du Pied cubes.

La toise cube vaut. . . . . 216 pieds cubes.
Le pied cube — . . . . . 1728 pouces cubes.
Le pouce cube — . . . . . 1728 lignes cubes.
etc. etc.

Seconde loi de subdivisions de la Toise cube.

La toise cube se compose de 6 parallélipipèdes dont la base est un carré d'une toise, et la hauteur d'un pied. Ces parallélipipèdes se nomment *toises-toises-pieds.*

La toise-toise-pied se compose de 12 parallélipipèdes d'une toise carrée de base et d'un pouce de hauteur : on les appelle *toises-toises-pouces.*

La toise-toise-pouce se compose de 12 parallélipipèdes d'une toise carrée de base et d'une ligne de hauteur : ils prennent le nom de *toises-toises-lignes*, et ainsi de suite.

C'est cette dernière loi de subdivision qu'il faut préférer, pour plus de facilité dans les calculs, lorsque, prenant la toise cube pour unité, l'on fait les multiplications complexes (arith., n°. 80) pour avoir le volume d'un corps quelconque. Ainsi, par exemple, si l'on demandait le volume d'un parallélipipède dont les trois dimensions seraient $2.^{t}\ 4.^{p}\ 8.^{po}$, $1.^{t}\ 2.^{p}\ 4.^{po}$ et $3.^{t}\ 3.^{p}\ 6.^{po}$, le produit $13.^{ttt}\ 4.^{ttp}\ 11.^{ttpo}\ 5.^{ttl}\frac{1}{3}$ qu'on obtiendrait en multipliant le produit des deux premiers facteurs par le troisième, d'après la règle donnée en arithmétique au numéro 80, serait 13 toises cubes, 4 toises-toises-pieds, 11 toises-toises-pouces, 5 toises-toises-lignes et $\frac{1}{3}$.

Seconde loi de subdivisions du Pied cube.

Le pied cube se compose de 12 parallélipipèdes d'un pied carré de base et d'un pouce de hauteur, qu'on appelle *pieds-pieds-pouces.*

Le pied-pied-pouce se compose de 12 parallélipipèdes d'un pied carré de base et d'une ligne de hauteur; on les nomme *pieds-pieds-lignes*, et ainsi de suite.

C'est cette dernière loi de subdivisions du pied cube qu'il faut prendre lorsqu'on veut calculer le volume d'un corps quelconque, par la même raison que nous en avons donnée pour la toise cube.

Observons qu'une toise-toise-pied vaut 36 pieds cubes; qu'une toise-toise-pouce est le 12^{me}. d'une toise-toise-pied, et par conséquent 3 pieds cubes;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'une toise-toise-ligne vaut le 12^{me}. d'une toise-toise-pouce, et par conséquent $\frac{3}{12}$ ou $\frac{1}{4}$ de pied cube, ou en pouces cubes $\frac{1728}{4} = 432$, etc.

Le pied-pied-pouce est le 12^{me}. d'un pied cube ou en pouces cubes $\frac{1728}{12} = 144$; le pied-pied-ligne est le 12^{me}. d'un pied-pied-pouce, et par conséquent 12 pouces cubes, etc.

Première loi de subdivisions du Mètre cube.

Le mètre cube . . .	vaut.	1000 décimètres cubes.
Le décimètre cube	—	1000 centimètres cubes.
Le centimètre cube	—	1000 millimètres cubes.
etc.		etc.

Seconde loi de subdivisions du Mètre cube.

Le mètre cube se compose de 10 parallélipipèdes d'un mètre carré de base et d'un décimètre de hauteur, qu'on appelle *mètres-mètres-décimètres;* un mètre-mètre-décimètre est le 10^{me}. d'un mètre cube, ou 100 décimètres cubes.

Le mètre-mètre-décimètre se compose de 10 parallélipipèdes d'un mètre carré de base et d'un centimètre de hauteur, qu'on nomme *mètres-mètres-centimètres.* Un mètre-mètre-centimètre est le 10^{me}. d'un mètre-mètre-décimètre, ou 10 décimètres cubes.

Le mètre-mètre-centimètre se compose de 10 parallélipipèdes d'un mètre carré de base, et d'un millimètre de hauteur; on les nomme *mètres-mètres-millimètres.* Un mètre-mètre-millimètre est le 10^{me}. d'un mètre-mètre-centimètre, ou 1 décimètre cube, etc.

Rapports des anciennes Mesures aux nouvelles.

La toise cube . . .	vaut en mètres cubes.	. . . . .	7,^{m}4038903430.
La toise-toise-pied	—	——	1, 2339817238.
La toise-toise-pouce	—	——	0, 1028318103.
La toise-toise-ligne	—	——	0, 0085693175.
etc.			etc.
Le pied cube	—	——	0, 0342772701.
Le pied-pied-pouce	—	——	0, 0028564375.
Le pied-pied-ligne	—	——	0, 0002380364.
etc.			etc.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Rapports des nouvelles Mesures aux anciennes.

Le mètre cube vaut en toise cube	0,135064128946,	et en pieds cubes	29,173851852336
Le mètre-mètre-décimètre. . . .	0,01350641289 4,	——	2,9173851852 33
Le mètre-mètre-centimètre. . . .	0,00135064128 9,	——	0,2917385185 23
Le mètre-mètre-millimètre. . . .	0,00013506412 9,	——	0,0291738518 52
etc.	etc.		etc.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TABLE DES MATIÈRES.

SECTION PREMIÈRE.

ARITHMÉTIQUE.

Articles de			Pages
		1re. LEÇON.	
1 à	25.	Préliminaires et la Numération.	1 à 13
		2me. LEÇON.	
26 à	43.	De l'Addition et de la Soustraction.	13 à 23
		3me. LEÇON.	
44 à	53.	De la Multiplication.	24 à 32
		4me. LEÇON.	
54 à	59.	De la Division.	32 à 42
		5me. LEÇON.	
60 à	75.	Des Fractions.	42 à 53
		6me. LEÇON.	
76 à	92.	Suite des Fractions, Multiplication et Division des nombres complexes.	53 à 65
		Tableau des rapports des principales Mesures étrangères, anciennes et modernes, etc.	65 à 68

SECTION DEUXIÈME.

ALGÈBRE.

		1re. LEÇON.	
1 à	21.	Préliminaires, Addition et Soustraction.	69 à 79
		2me. LEÇON.	
22 à	31.	De la Multiplication.	79 à 85
		3me. LEÇON.	
32 à	42.	De la Division.	86 à 93
		4me. LEÇON.	
43 à	54.	Des Fractions.	93 à 100

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

5me. LEÇON.

55 à 66. De l'Élévation aux Puissances, des permutations, des arrangemens, et des produits différens, etc. 100 à 111

6me. LEÇON.

67 à 74. Méthode Abrégée pour trouver le produit de tant de facteurs binomes qu'on voudra, ces binomes ayant un terme commun ; d'où l'on tire la formule du binome de Newton. 111 à 120

7me. LEÇON.

75 à 93. De l'Extraction des Racines en général, et en particulier de l'Extraction de la Racine carrée des nombres. 120 à 131

8me. LEÇON.

94 à 104. De l'Extraction de la Racine cubique des nombres. 131 à 139

9me. LEÇON.

105 à 107. De l'Extraction des Racines des quantités algébriques. 139 à 142

10me. LEÇON.

108 à 122. Calcul des Radicaux. 142 à 147

11me. LEÇON.

123 à 145. Des Proportions arithmétiques et géométriques. 147 à 153

12me. LEÇON.

146 à 155. Des Progressions arithmétiques et géométriques. 154 à 160

13me. LEÇON.

156 à 177. Des Logarithmes. 161 à 167

14me. LEÇON.

178 à 195. Des Équations en général, et en particulier de la résolution des équations du premier degré à une ou plusieurs inconnues. 167 à 178

15me. LEÇON.

196 à 208. De la Résolution des Équations du second degré, et de celles de degrés supérieurs qui se résolvent à la manière de celles du second, à une seule inconnue. 178 à 186

16me. LEÇON.

209 à 223. Problême sur l'intérêt de l'argent. 186 à 193

17me. LEÇON.

224 à 231. Suite des Problêmes sur l'intérêt de l'argent, où il est question des intérêts composés. 193 à 199

18me. LEÇON.

232 à 243. Divers Problêmes sur les nombres. 199 à 206

19me. LEÇON.

244 à 260. Suite des Problêmes sur les nombres. 206 à 213

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

20me. LEÇON.

261 à 273. Interprétation précise de quelques résultats particuliers auxquels conduisent la résolution des problèmes du premier et celle des problèmes du second degré. — Résolution des problèmes indéterminés du premier degré. — Énoncés de quelques problèmes à résoudre. 213 à 224

SECTION TROISIÈME.

GÉOMÉTRIE PLANE.

1re. LEÇON.

1 à 25. Objet de la Géométrie en général; la ligne droite, et les angles. 225 à 232

2me. LEÇON.

26 à 47. Les Perpendiculaires, les Obliques et les Triangles. 232 à 239

3me. LEÇON.

48 à 79. Les Parallèles. 239 à 249

4me. LEÇON.

80 à 92. Les Droites proportionnelles, et les Triangles semblables. 250 à 254

5me. LEÇON.

93 à 123. Les Polygones. 254 à 260

6me. LEÇON.

124 à 142. L'Aire ou Superficie des Polygones. 261 à 266

7me. LEÇON.

143 à 161. Comparaison des Superficies des Polygones. 266 à 271

8me. LEÇON.

162 à 189. Le Cercle. 271 à 279

9me. LEÇON.

190 à 204. Les Angles par rapport au Cercle. 279 à 284

10me. LEÇON.

205 à 218. Les Lignes proportionnelles considérées dans le Cercle. 284 à 289

11me. LEÇON.

219 à 240. Les Polygones inscriptibles et circonscriptibles au cercle, et la superficie du cercle. 289 à 293

12me. LEÇON.

241 à 252. Des Figures isopérimètres. 293 à 298

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

13me. LEÇON.

253 à 274. Moyens de mener des perpendiculaires, de faire des angles et des polygones égaux, etc. 298 à 305

14me. LEÇON.

275 à 287. Moyens de trouver des droites proportionnelles à des droites données; de diviser des droites données dans des rapports donnés; de faire des Échelles et des Polygones semblables. 305 à 311

15me. LEÇON.

288 à 311. Problêmes sur la transformation des figures planes. 311 à 317

16me. LEÇON.

312 à 332. Moyens de décrire des Polygones réguliers; de calculer le rapport approché de la circonférence au diamètre du cercle, et de mesurer la superficie des figures planes quelconques. 318 à 329

17me. LEÇON.

333 à 355. Problêmes relatifs au cercle et à la ligne droite, et problêmes des contacts. 329 à 340

18me. LEÇON.

355 à 368. Trigonométrie rectiligne, préliminaires. 340 à 344

19me. LEÇON.

369 à 388. Les Formules trigonométriques. 345 à 351

20me. LEÇON.

389 à 399. Principes de la résolution des triangles rectilignes. 351 à 353

21me. LEÇON.

400 à 405. De la résolution des triangles rectilignes. 354 à 358

22me. LEÇON.

406 à 430. Notions et Définitions sur les courbes en général. 359 à 363

23me. LEÇON.

431 à 457. De la Parabole rapportée à son axe. 364 à 372

24me. LEÇON.

458 à 483. Suite de la Parabole rapportée à son axe. 372 à 380

25me. LEÇON.

484 à 507. La Parabole rapportée à ses diamètres. 380 à 384

26me. LEÇON.

508 à 522. Suite des propriétés de la parabole. 388 à 393

27me. LEÇON.

523 à 561. L'Ellipse rapportée à ses axes. 394 à 404

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

28me. LEÇON.

562 à 595. Suite de l'Ellipse rapportée à ses axes. 405 à 412

29me. LEÇON.

596 à 640. L'Ellipse rapportée à ses diamètres conjugués. 412 à 424

30me. LEÇON.

641 à 660. Suite des propriétés de l'ellipse. 424 à 432

31me. LEÇON.

661 à 686. L'Hyperbole rapportée à ses axes. 432 à 439

32me. LEÇON.

687 à 730. Suite de l'Hyperbole rapportée à ses axes, et propriétés des asymptotes. 439 à 448

33me. LEÇON.

731 à 755. L'Hyperbole rapportée à ses diamètres conjugués. 448 à 455

34me. LEÇON.

756 à 767. Suite des propriétés de l'Hyperbole. 455 à 462

35me. LEÇON.

768 à 799. Rapprochement des équations de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole; quelques propriétés des courbes semblables, et la superficie de la parabole et de l'ellipse. 462 à 471

SECTION QUATRIÈME.

GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS.

1re. LEÇON.

1 à 35. Objet de la Géométrie à trois dimensions; notions générales des surfaces et la théorie des plans. 472 à 480

2me. LEÇON.

36 à 58. Suite de la Théorie des plans et les angles solides. 480 à 487

3me. LEÇON.

59 à 83. Les Polyèdres. 487 à 494

4me. LEÇON.

84 à 121. Suite des Polyèdres, les Pyramides. 495 à 506

5me. LEÇON.

122 à 148. Les Surfaces cylindriques et les corps que ces surfaces terminent. 507 à 514

6me. LEÇON.

149 à 174. Les Surfaces coniques et les corps que ces surfaces terminent. 515 à 524

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

7^me. LEÇON.

175 à 202. La Sphère. 524 à 530

8^me. LEÇON.

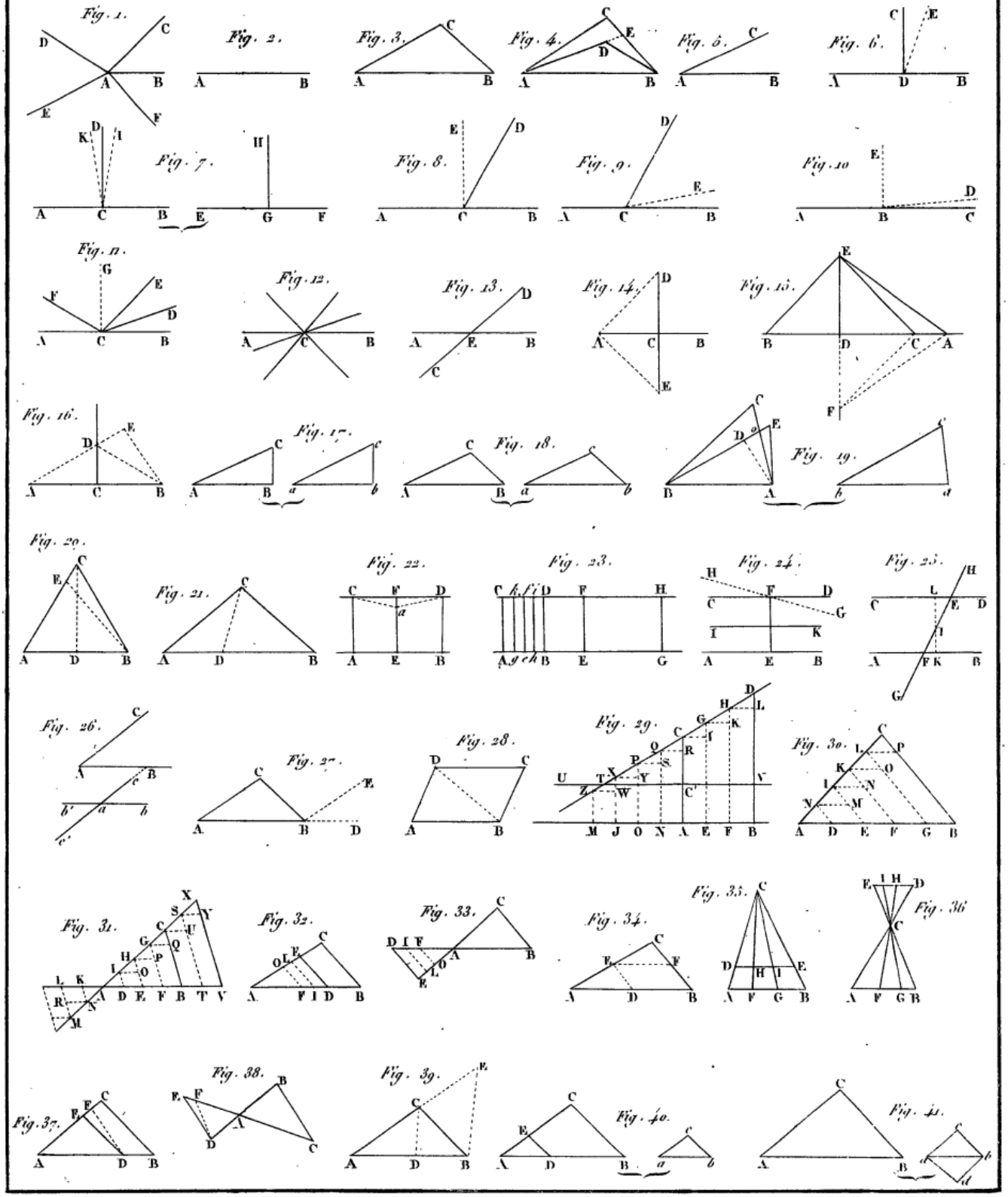
203 à 223. La superficie et le volume de la Sphère et de ses parties. 530 à 535

9^me. et dernière LEÇON.

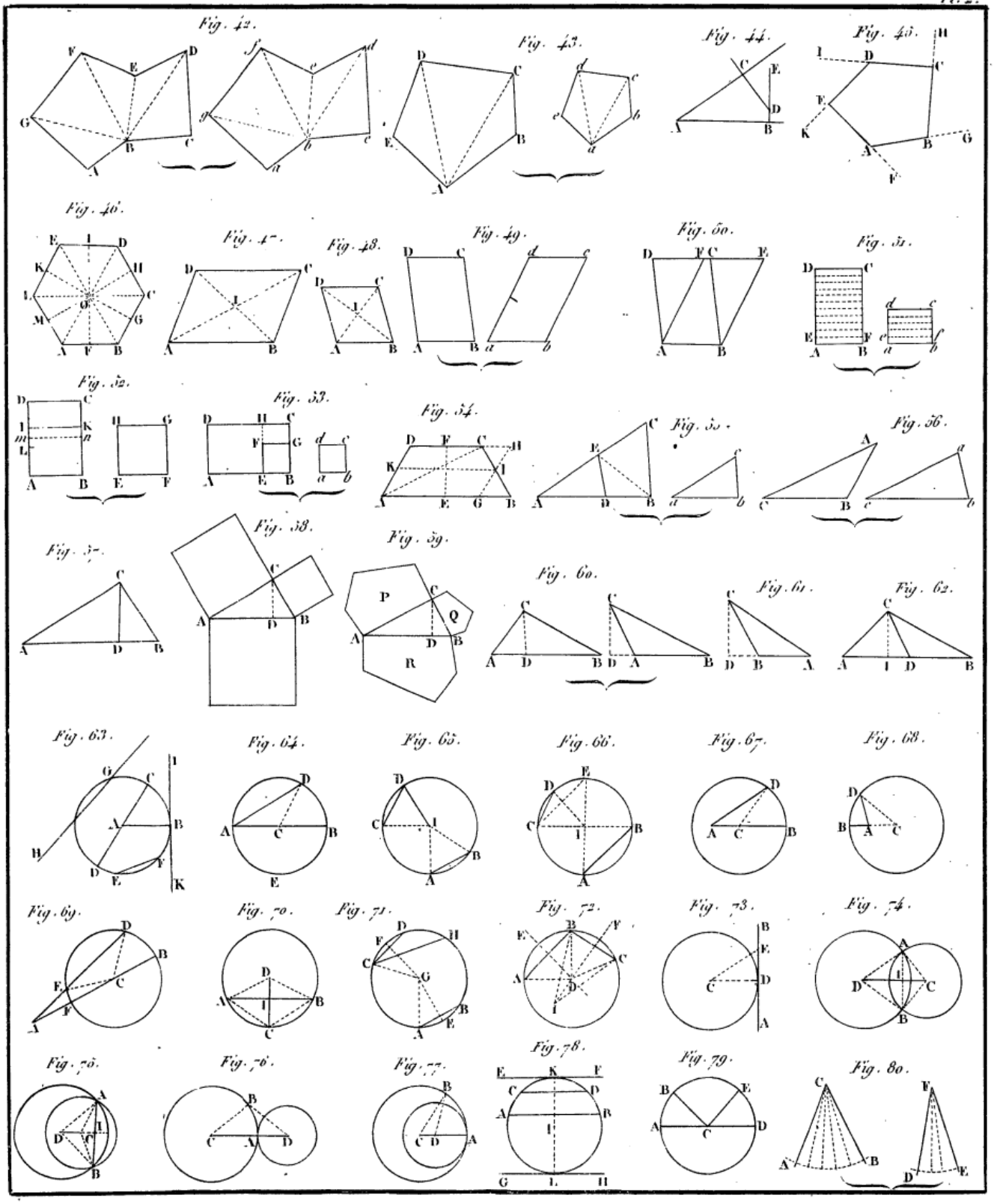
224 à 234. L'Ellipsoïde, la Paraboloïde, l'Hyperboloïde, et les lois de subdivisions des mesures de volumes, tant anciennes que nouvelles, ainsi que les rapports des unes aux autres. 535 à 541

FIN DE LA TABLE.

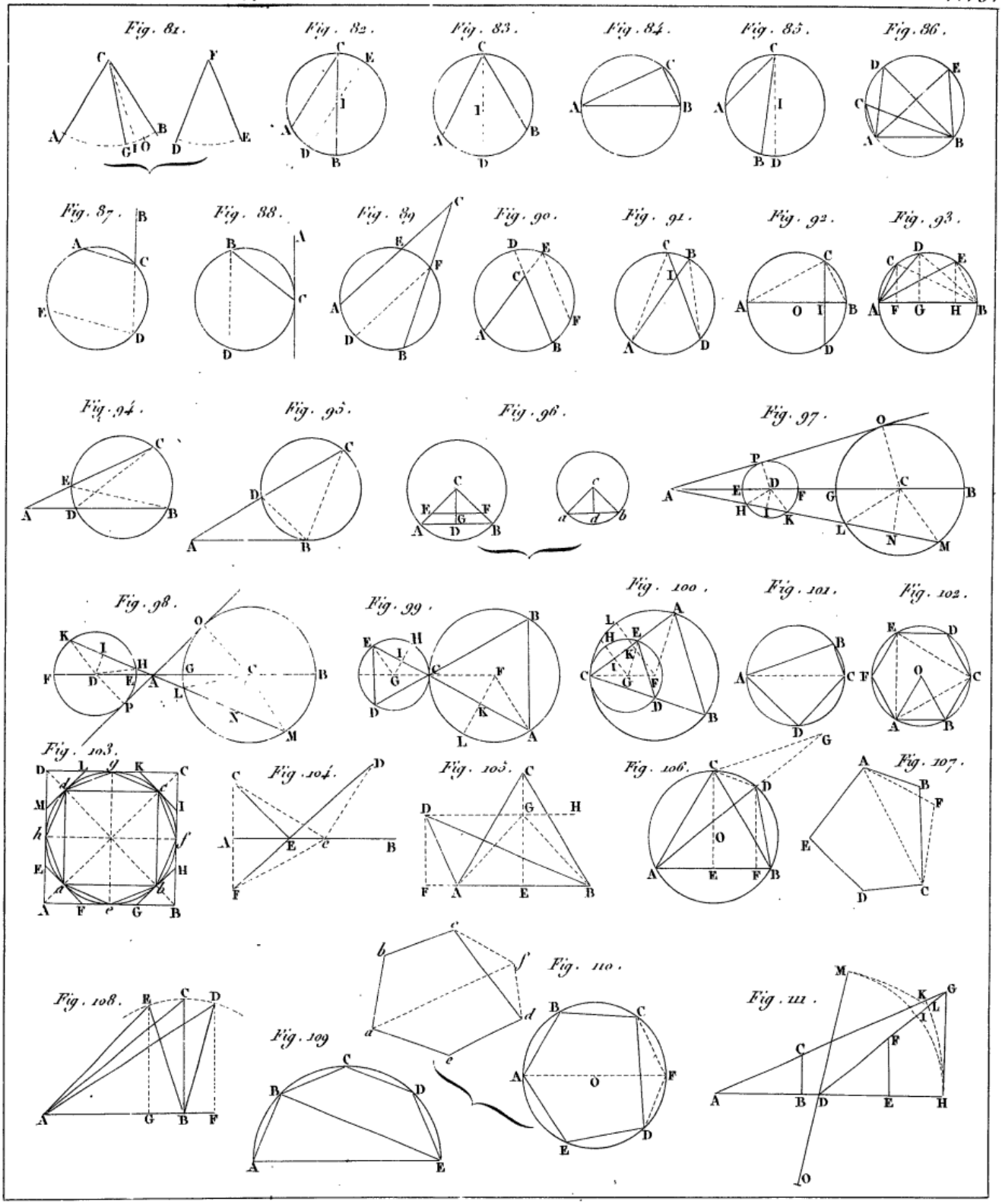
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



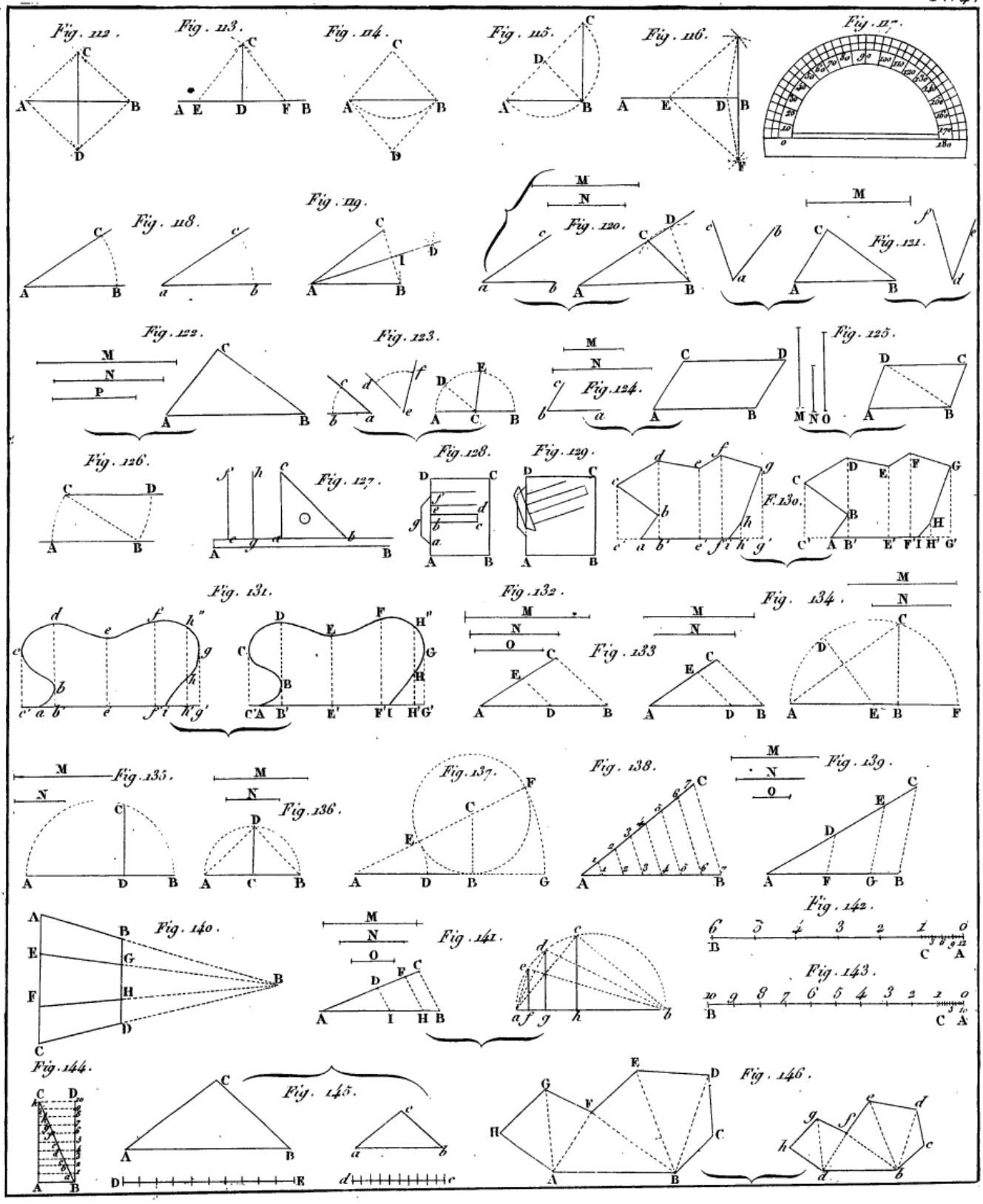
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



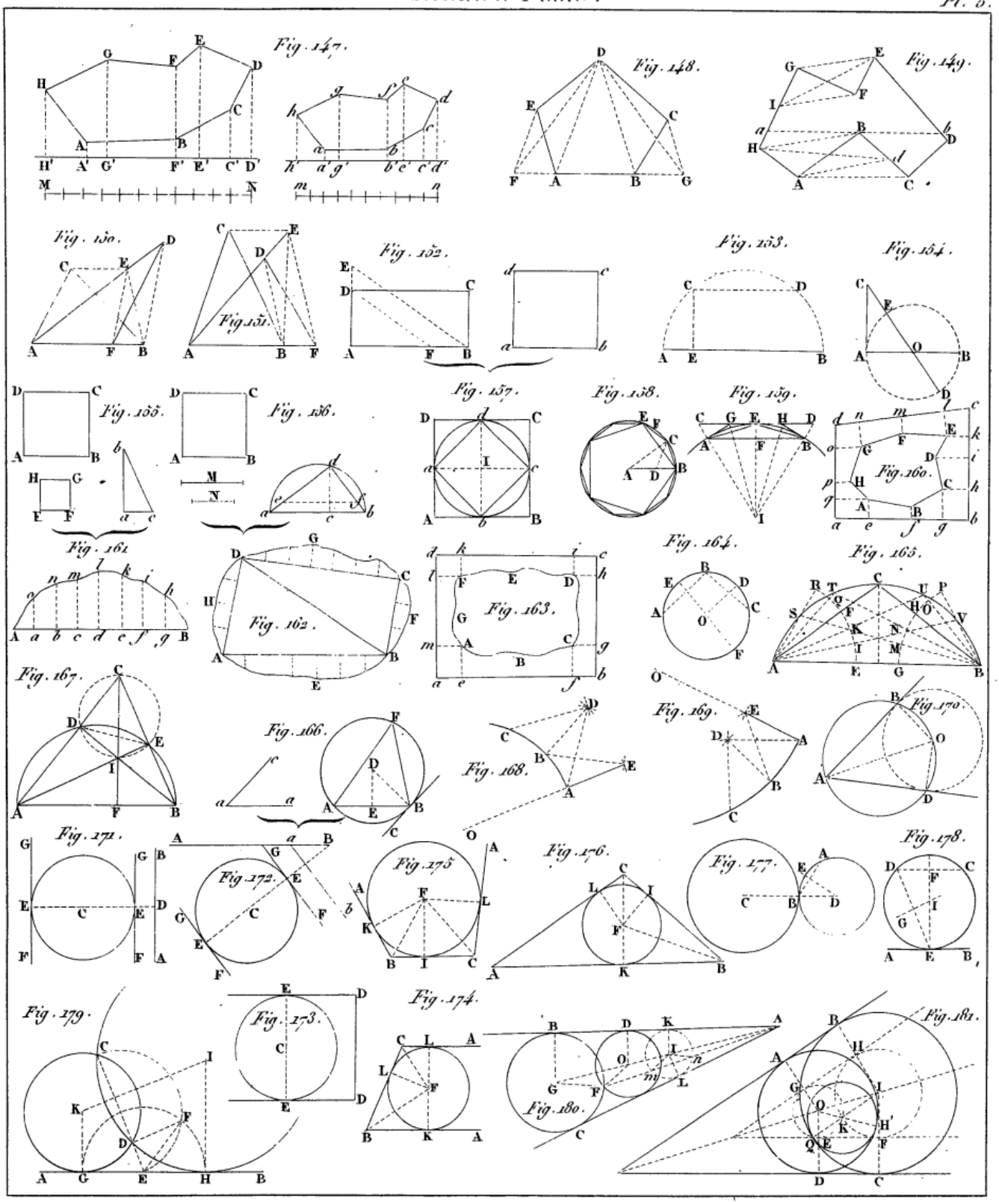
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



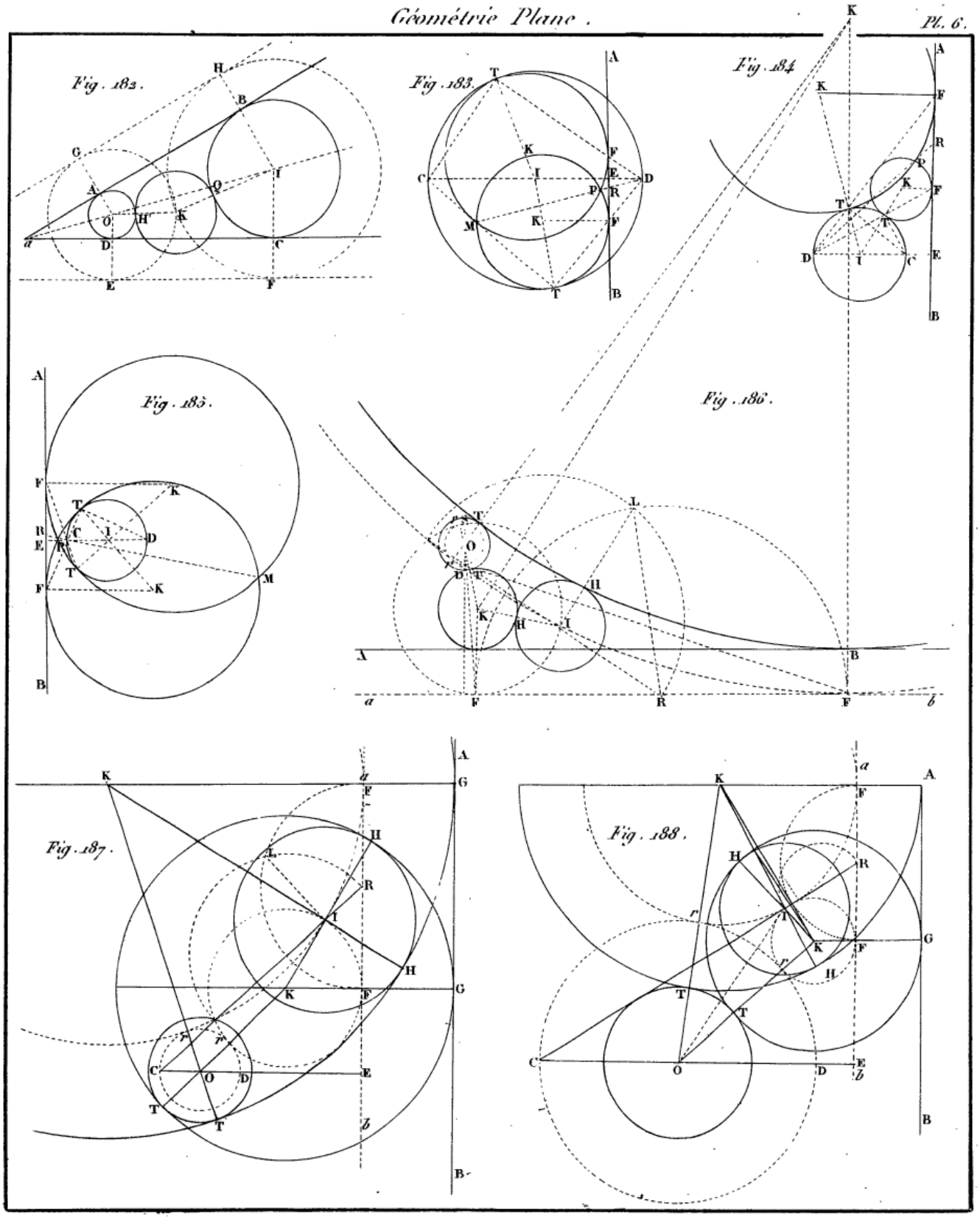
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



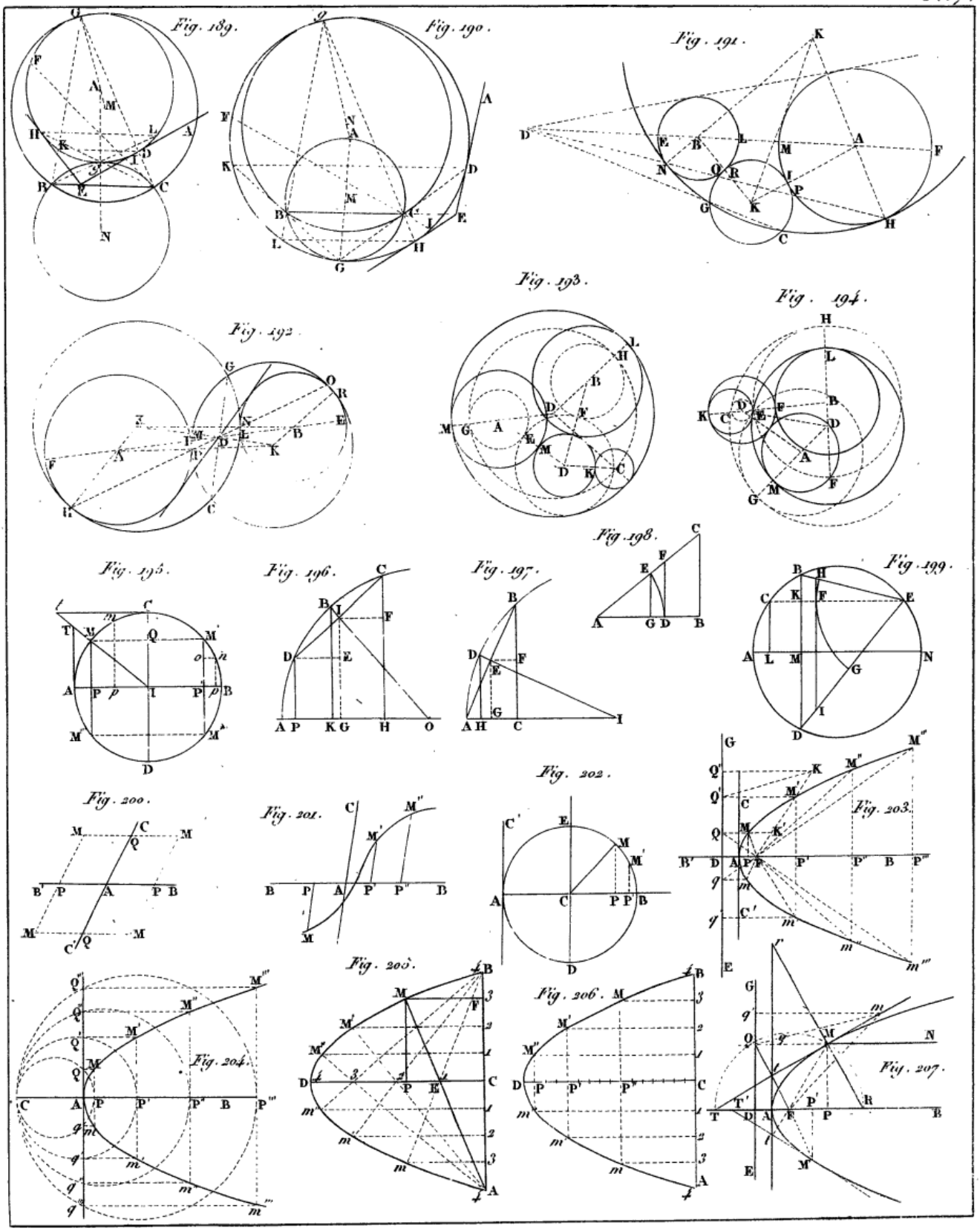
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



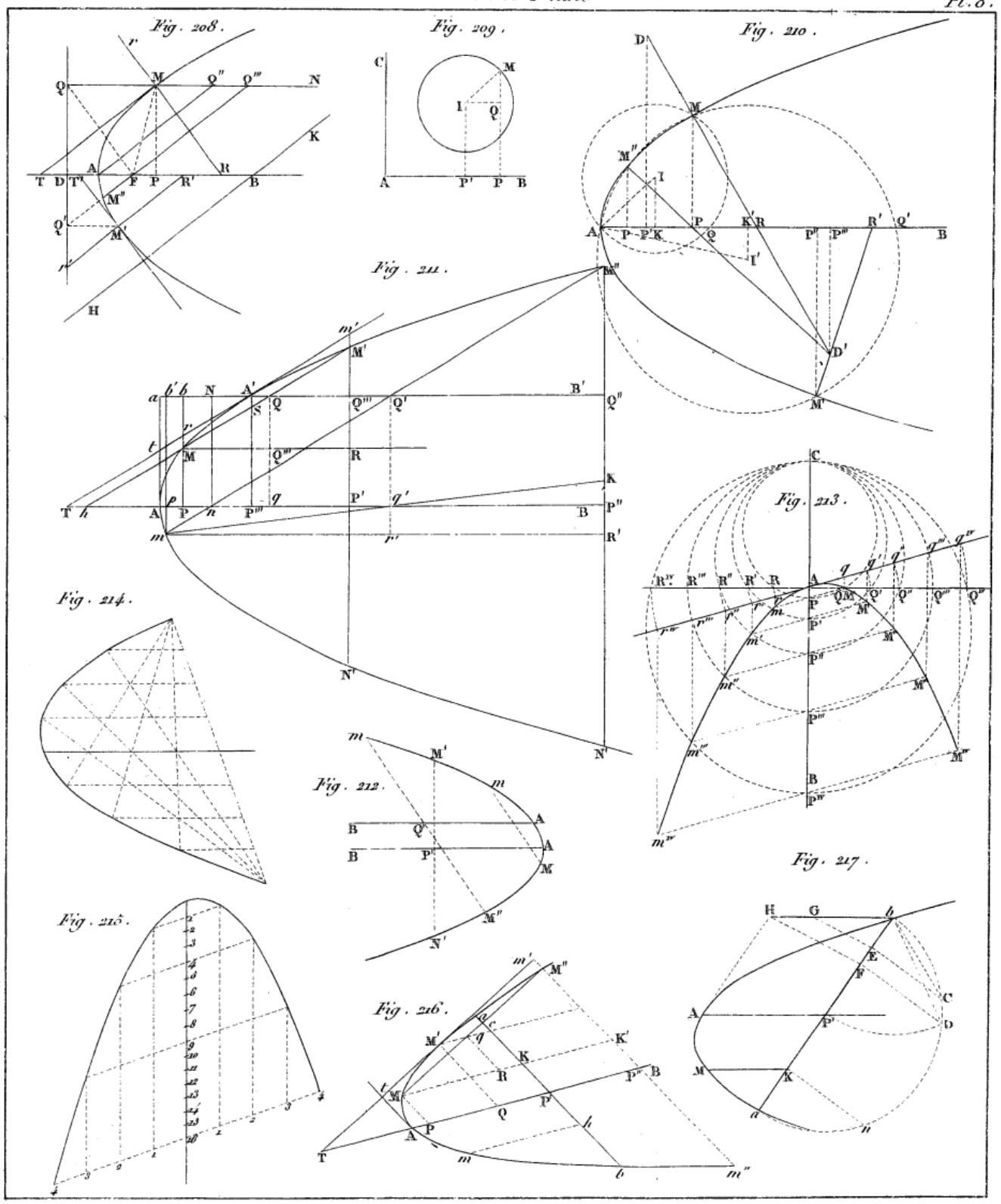
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



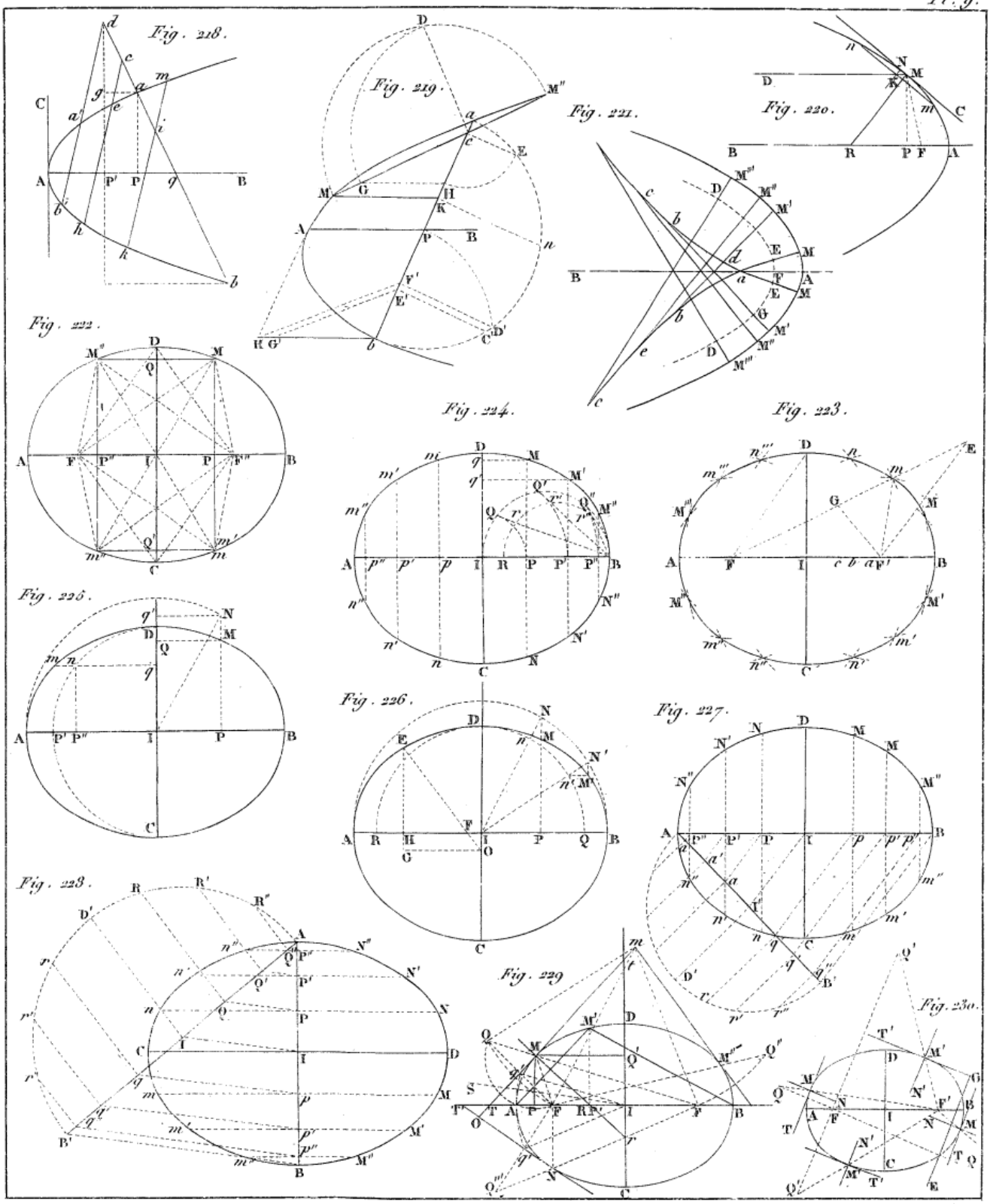
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Fig . 231 .

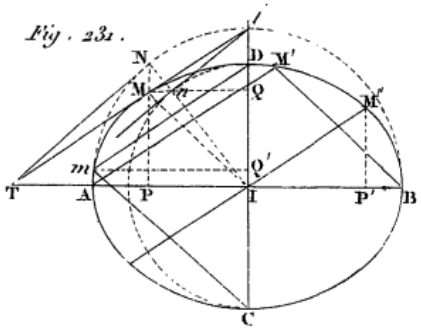


Fig . 232 .

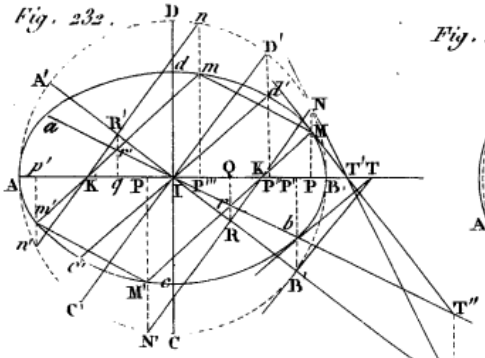


Fig . 234 .

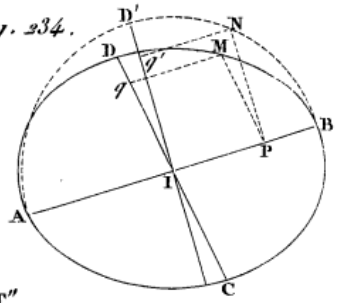


Fig . 235 .

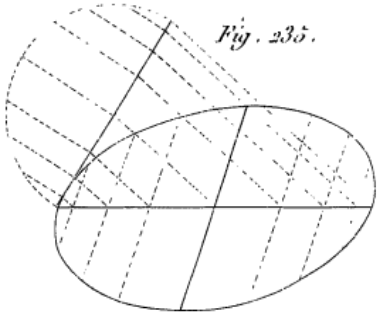


Fig . 233 .

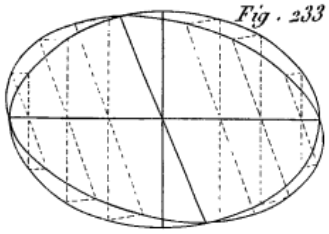


Fig . 236 .

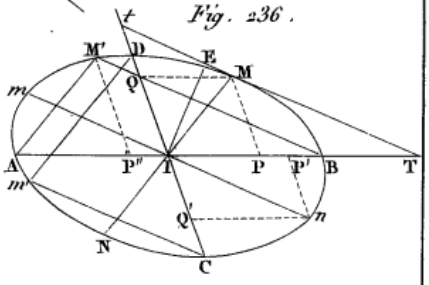


Fig . 237 .

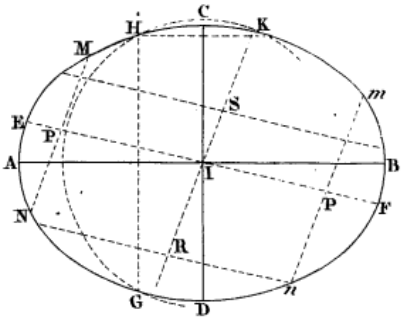


Fig . 238 .

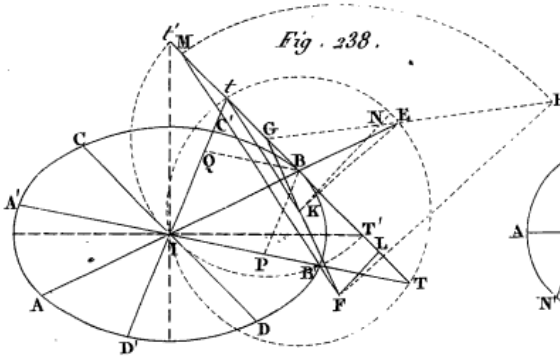


Fig . 239 .

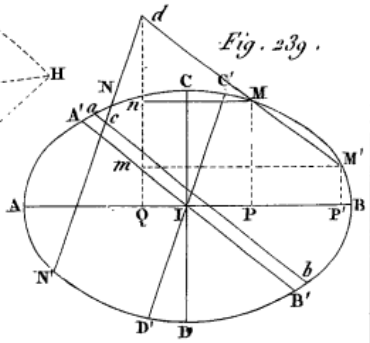


Fig . 241 .

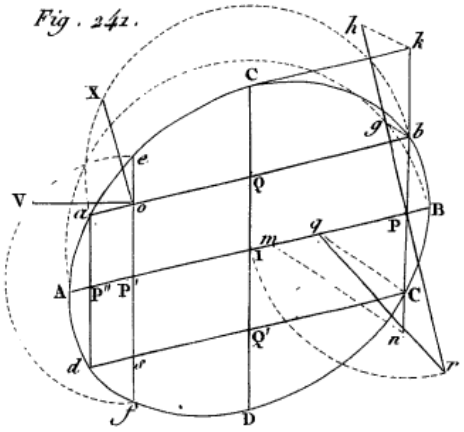


Fig . 242 .

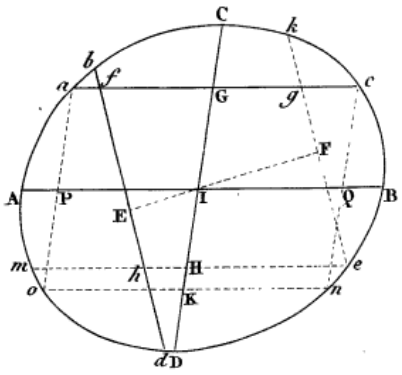
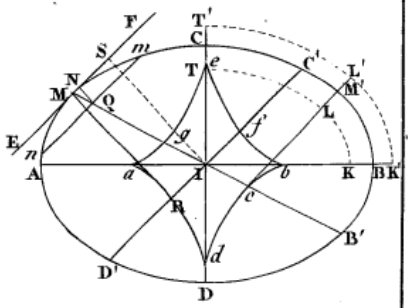


Fig . 243 .



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Fig. 244.

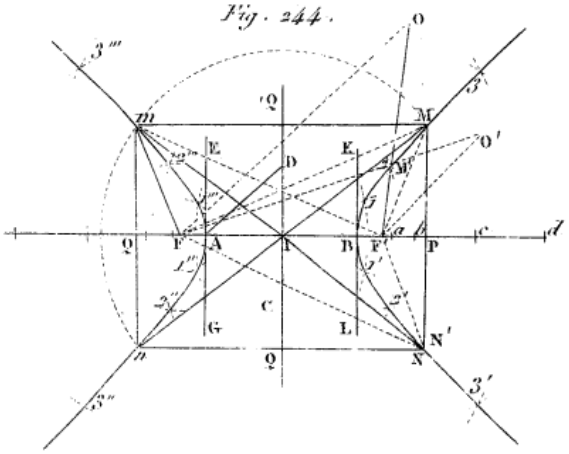


Fig. 245.

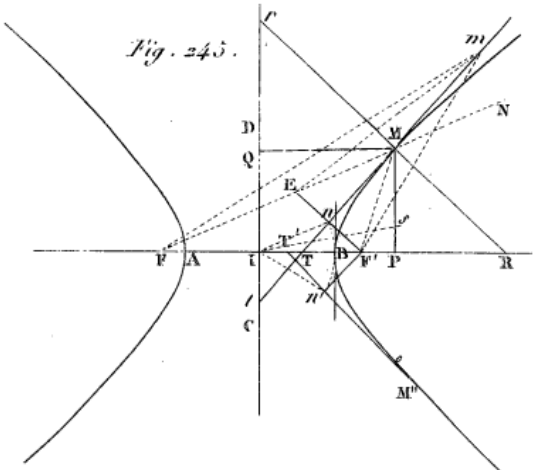


Fig. 246.

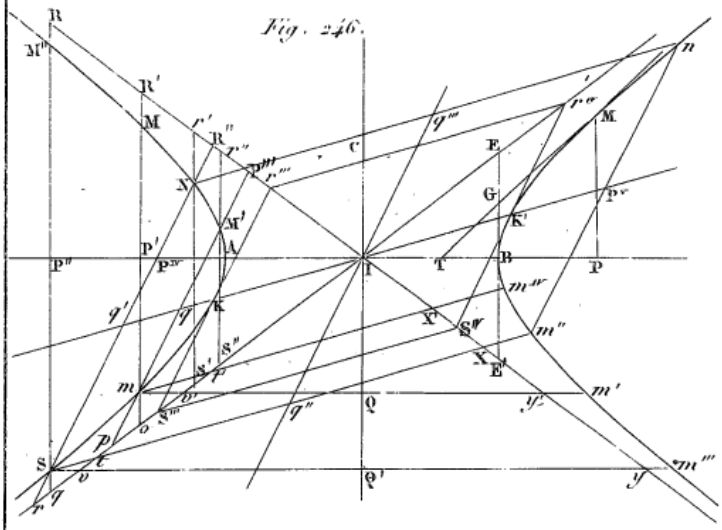


Fig. 247.

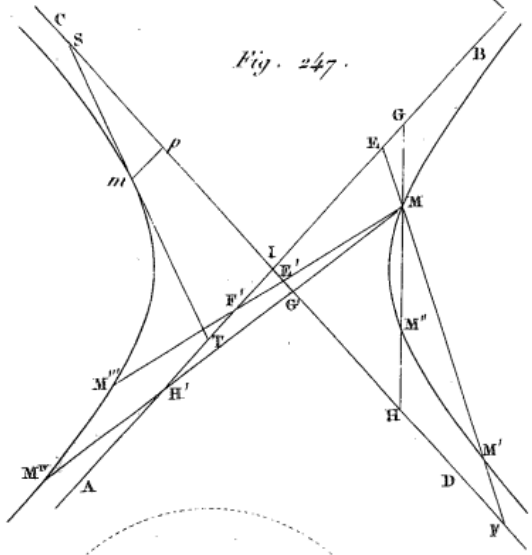


Fig. 248.

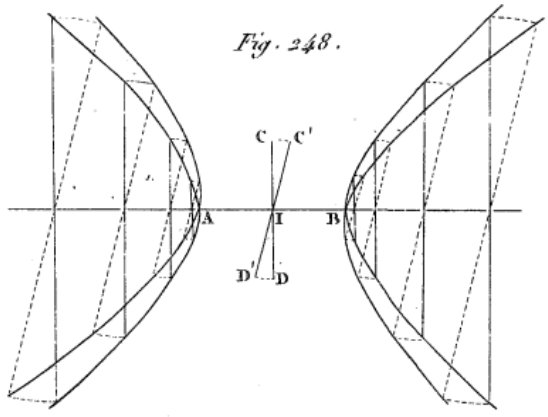
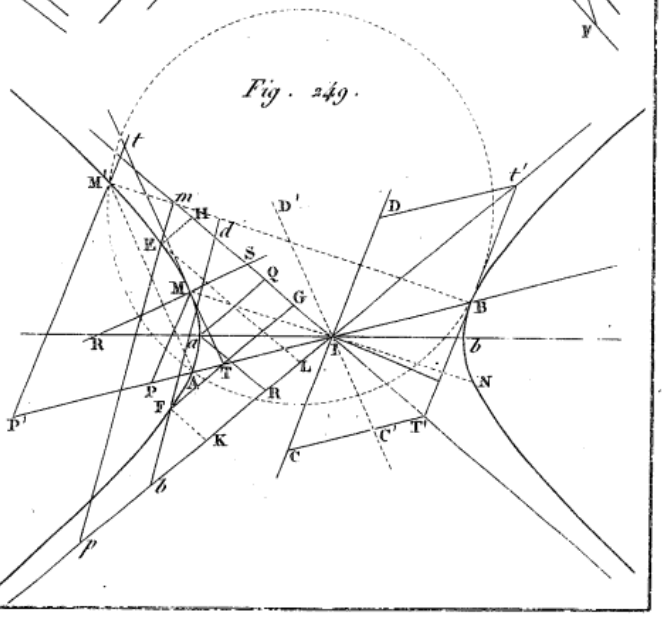


Fig. 249.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Fig. 250.

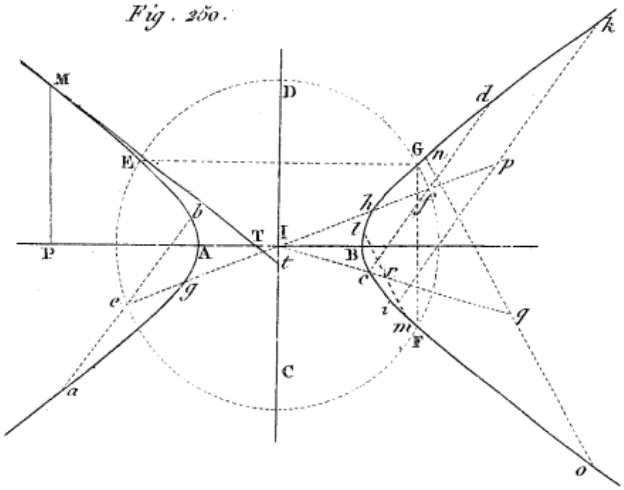


Fig. 252.

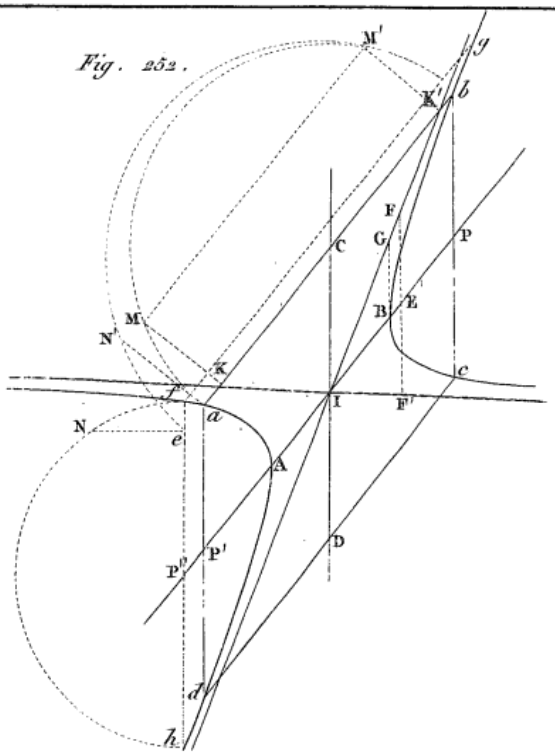


Fig. 251.

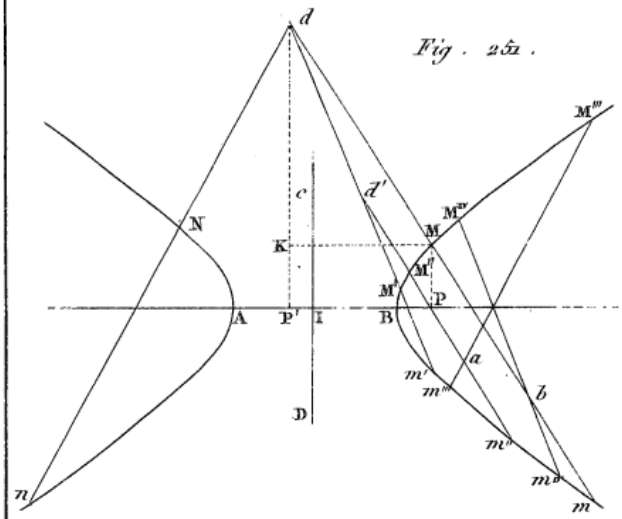


Fig. 254.

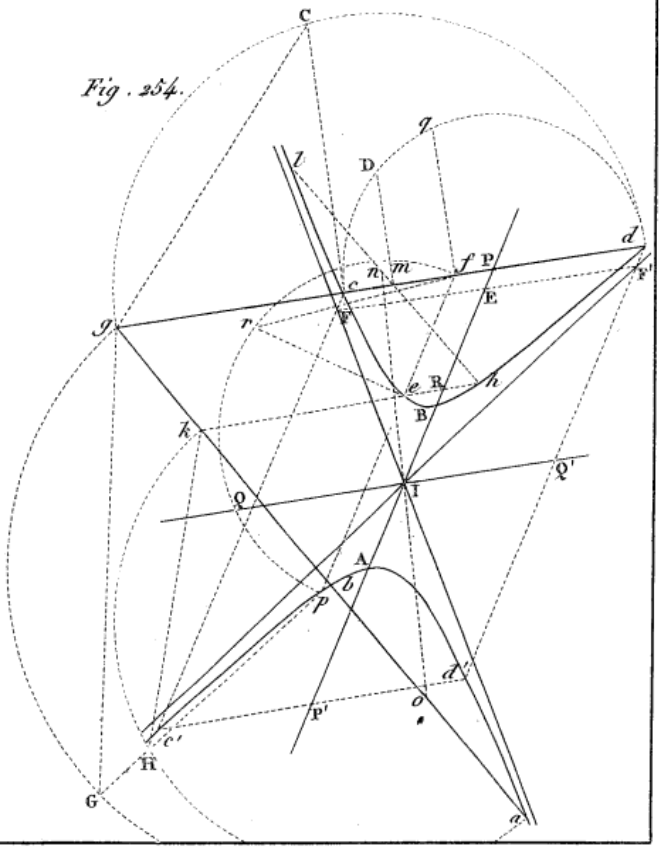
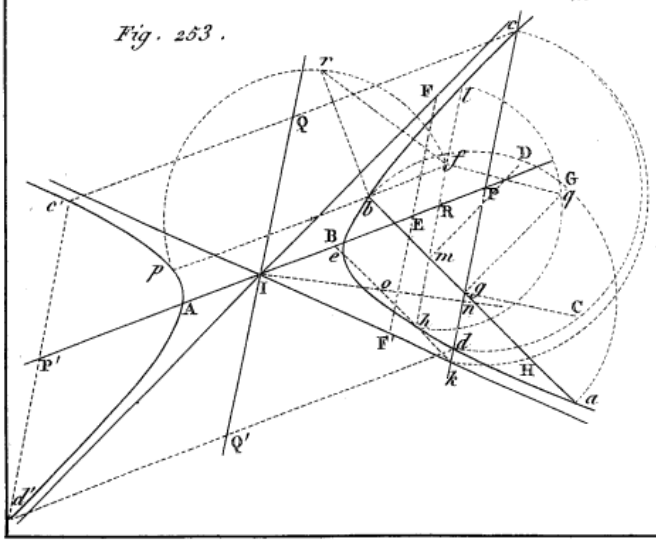


Fig. 253.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Fig. 255.

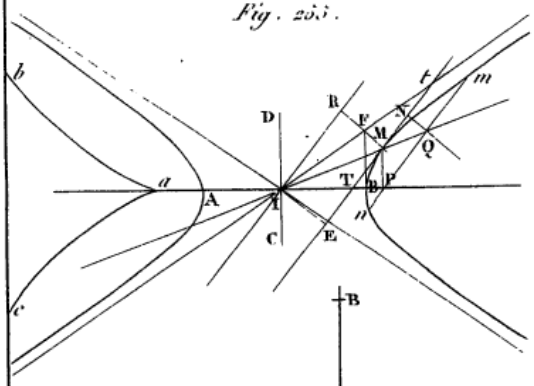


Fig. 256.

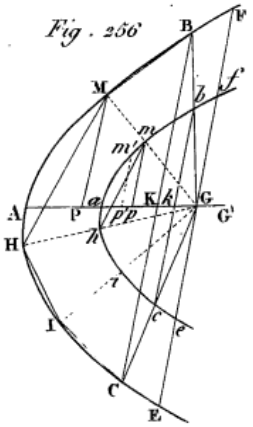


Fig. 257.

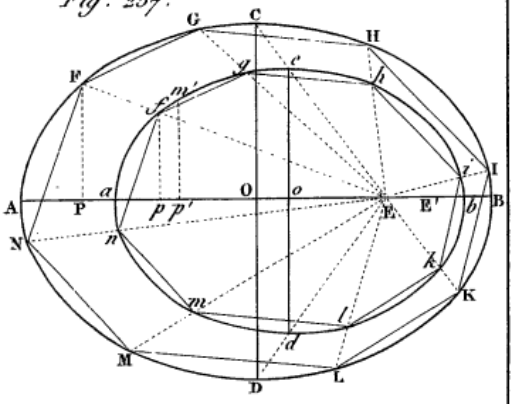


Fig. 258.

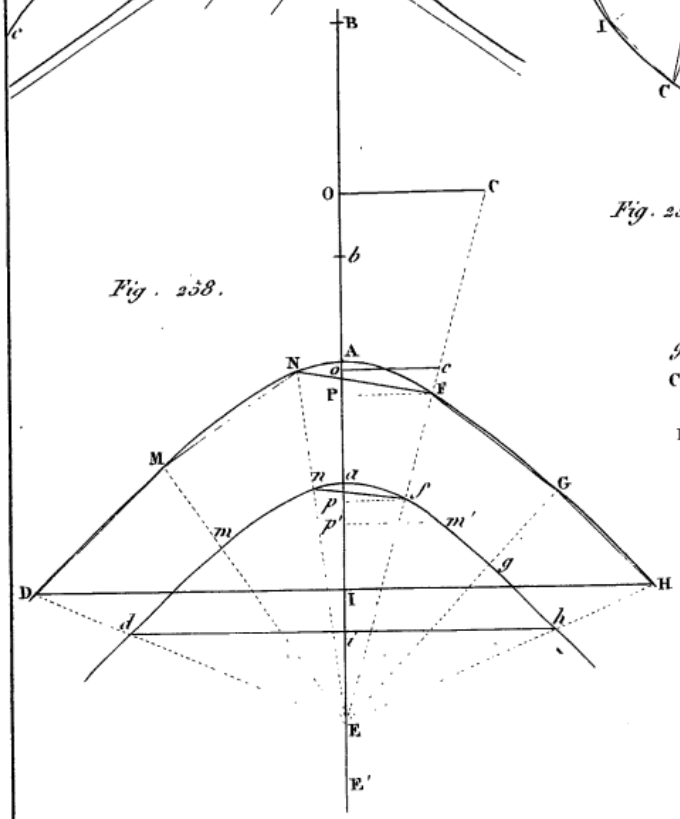


Fig. 259.

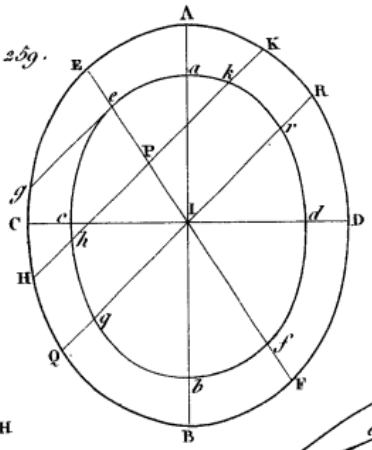


Fig. 260.

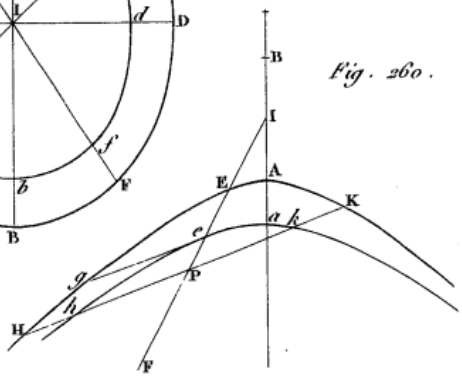


Fig. 261.

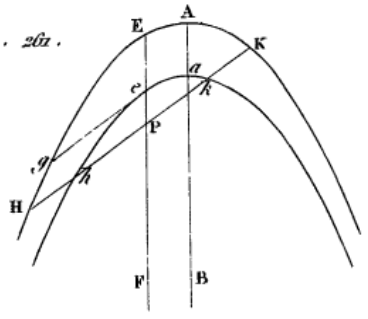


Fig. 262.

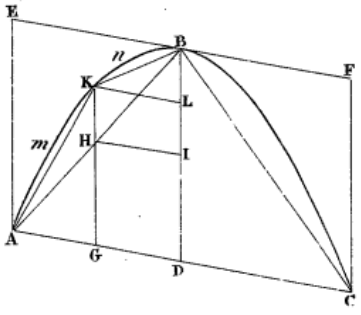
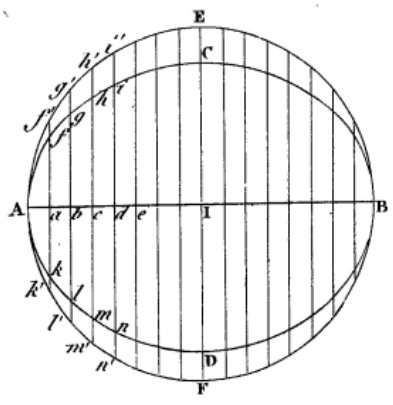
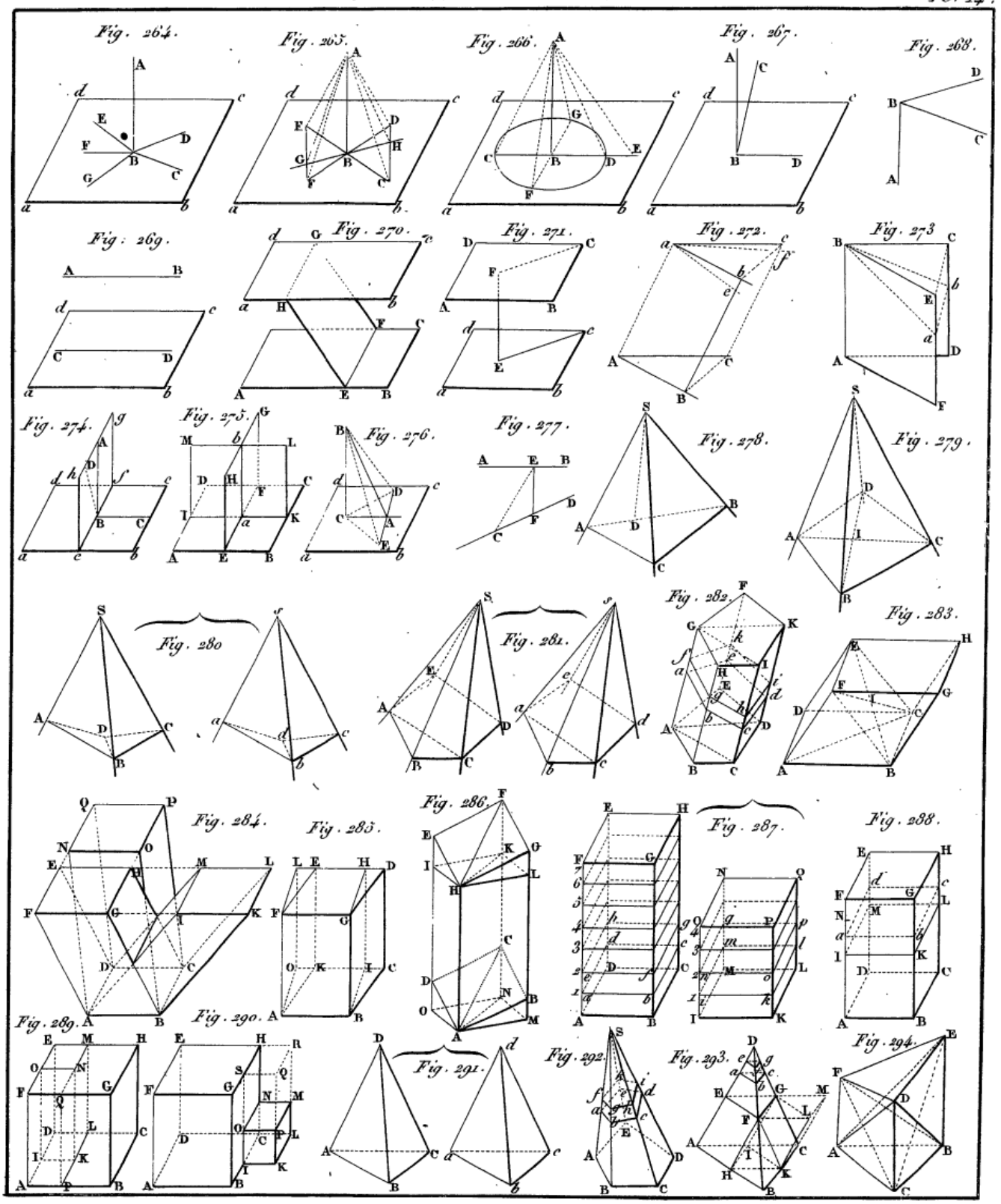


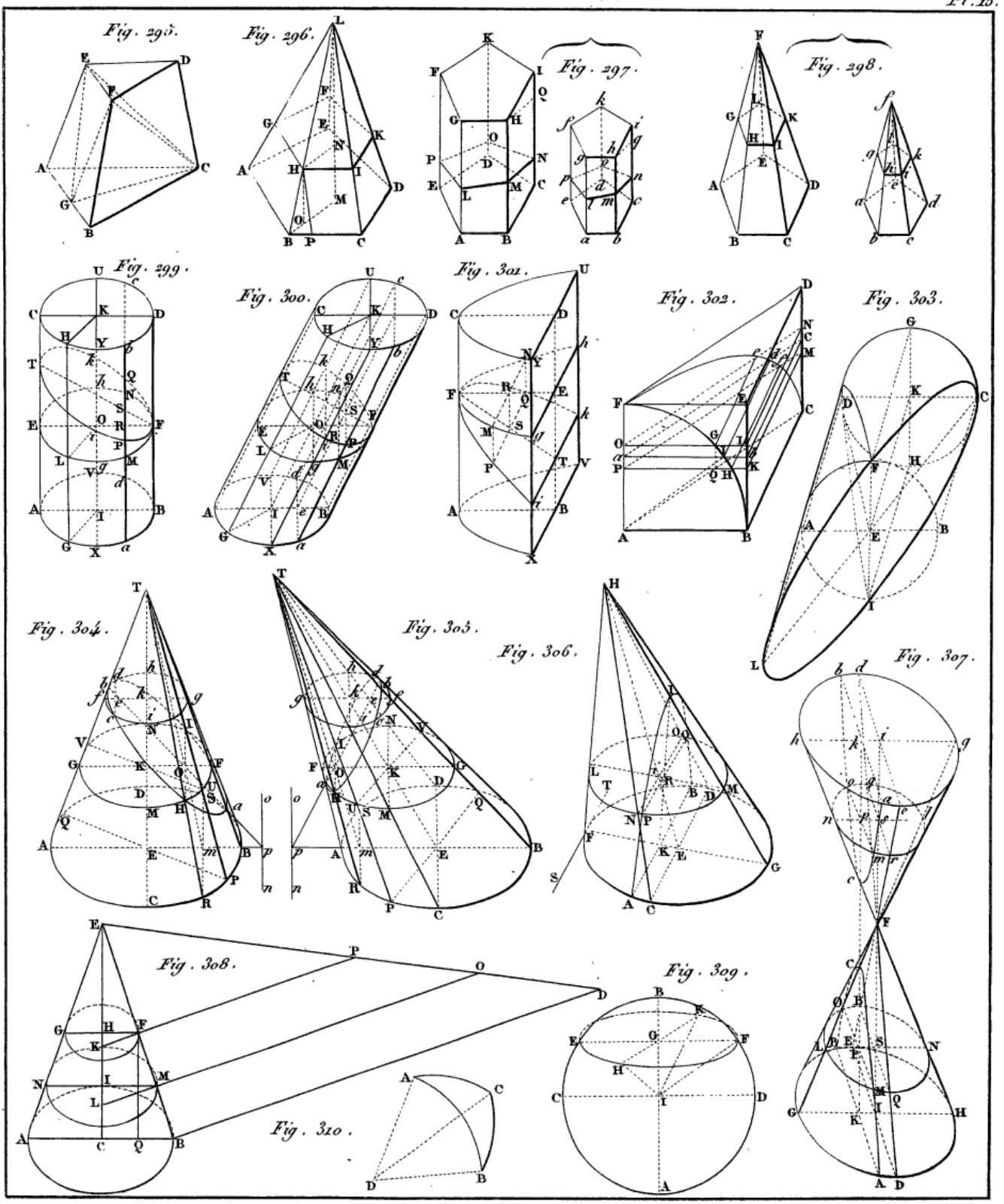
Fig. 263.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Fig. 311.

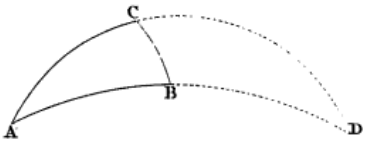


Fig. 312.

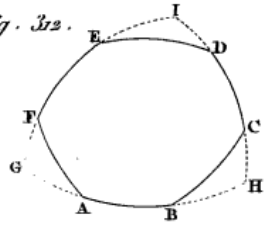


Fig. 313.

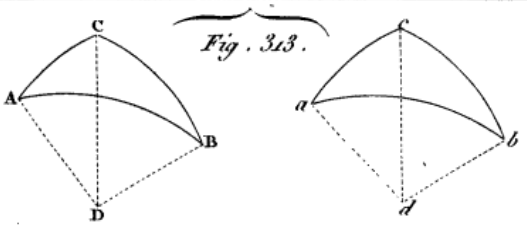


Fig. 314.

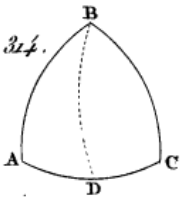


Fig. 315.

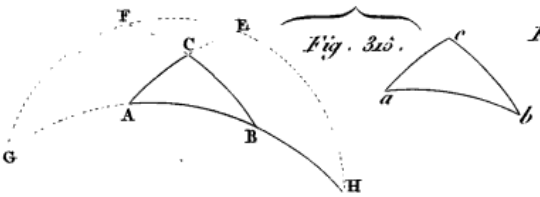


Fig. 316.

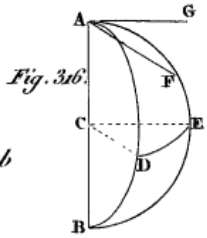


Fig. 317.

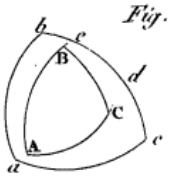


Fig. 318.

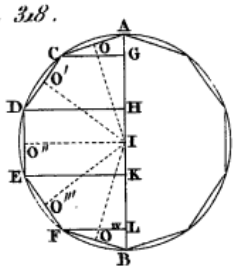


Fig. 319.

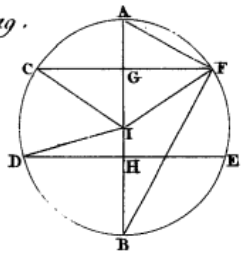


Fig. 320.

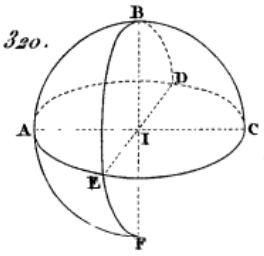


Fig. 321.

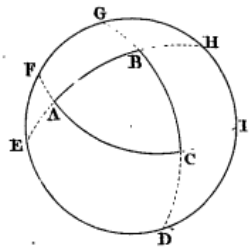


Fig. 322.

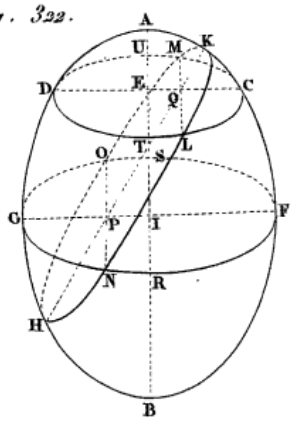


Fig. 323.

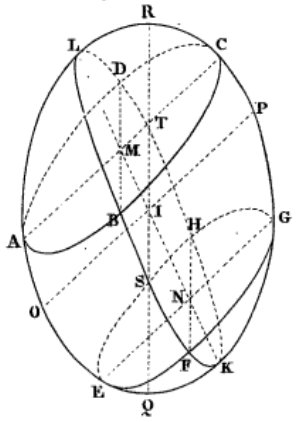


Fig. 324.

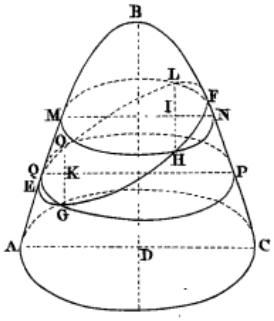


Fig. 325.

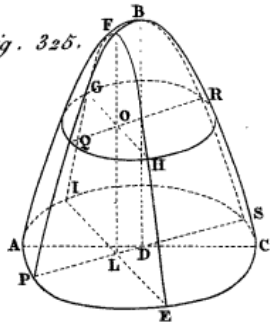
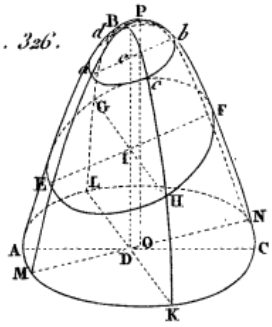


Fig. 326.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires