

## Conditions d'utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- [Le Conservatoire numérique](#) communément appelé [le Cnum](#) constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre ([www.eclydre.fr](http://www.eclydre.fr)).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d'œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n° 78-753 du 17 juillet 1978 :

- la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue ([Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - http://cnum.cnam.fr](#))
- la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- les reproductions de documents protégés par le droit d'auteur, uniquement consultables dans l'enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

4- Pour obtenir la reproduction numérique d'un document du Cnum en haute définition, contacter [cnum\(at\)cnam.fr](mailto:cnum(at)cnam.fr)

5- L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d'utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

## NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

<b>Auteur(s)</b>	Douliot, Jean-Paul (1788-1834)
<b>Titre</b>	Cours élémentaire, théorique et pratique de construction. Quatrième partie. Stabilité des édifices
<b>Adresse</b>	Paris : [Jean-Paul Douliot] : Carilian-Goeury, 1835
<b>Collation</b>	1 vol. (VIII-372 p.-6 pl.-[1] pl. en coul.) ; 26 cm
<b>Cote</b>	CNAM-BIB 4 Ko 9 (4)
<b>Sujet(s)</b>	Constructions, Théorie des Constructions -- Stabilité
<b>Thématique(s)</b>	Construction
<b>Typologie</b>	Ouvrage
<b>Langue</b>	Français
<b>Date de mise en ligne</b>	13/06/2012
<b>Date de génération du PDF</b>	08/07/2020
<b>Permalien</b>	<a href="http://cnum.cnam.fr/redir?4KO9.4">http://cnum.cnam.fr/redir?4KO9.4</a>

# **STABILITÉ DES ÉDIFICES.**

**IMPRIMERIE DE DUCESSEIS, QUAI DES AUGUSTINS, 88**

Droits réservés au [Cnam](#) et à ses partenaires

42 Ko 7

COURS ÉLÉMENTAIRE

42 Ko 9. 4

THÉORIQUE ET PRATIQUE

# DE CONSTRUCTION,

**PAR J.-P. DOULIOT,**

PROFESSEUR D'ARCHITECTURE ET DE CONSTRUCTION A L'ÉCOLE ROYALE DE MATHÉMATIQUES  
ET DE DESSIN EN FAVEUR DES ARTS MÉCANIQUES.

—  
QUATRIÈME PARTIE.  
—

# STABILITÉ DES ÉDIFICES.



PARIS,  
CARILIAN-GOEURY, LIBRAIRE-ÉDITEUR,  
QUAI DES AUGUSTINS, 42.

—  
1838





# PRÉFACE.

---

Dans la préface du *Cours élémentaire théorique et pratique de Construction*, J. P. Douliot s'était engagé à consacrer l'une des parties de cet ouvrage à l'étude des lois de l'équilibre, du mouvement et de la résistance des corps solides et liquides ; aussi, après avoir publié le *Traité de la Coupe des pierres*, celui de *Charpente* et les *Leçons de Mathématiques*, il s'adonna tout entier aux recherches importantes que nécessitait la composition d'un ouvrage sur la *Stabilité des Edifices*.

A peine ce travail était-il commencé, que des élèves en architecture vinrent demander à M. Douliot de le publier par livraisons, et ce professeur s'empressa de mettre au jour les premiers chapitres de son ouvrage, heureux de pouvoir donner aux élèves cette nouvelle preuve du vif intérêt qu'il prenait au développement de leurs études ! Mais bientôt une maladie, peu alarmante dans le principe, vint ralentir la publication de l'ouvrage, et plus tard, prenant un caractère plus sérieux, elle força M. Douliot à renoncer à tout travail ; enfin, au mois d'août 1834, il partit pour Avignon, sa patrie, dans l'espoir d'y recouvrer la santé, et ce fut en novembre de la même année, qu'il y mourut, au sein de sa famille, à laquelle il laisse un nom glorieux à porter.

Ces explications étaient nécessaires pour faire savoir au public dans quelles circonstances cet ouvrage a été publié.

M. Douliot avait l'intention de faire des expériences dont il aurait donné les résultats à la suite des leçons; ainsi, il y a lacune sous ce point de vue, mais sous celui de la théorie, le sujet est traité presque complètement. Un de ses élèves s'est donc chargé du soin de réunir en corps d'ouvrage les livraisons qui avaient paru du vivant de M. Douliot. A la suite des notions de mécanique, qui servent pour ainsi dire d'introduction aux leçons de stabilité, se trouve une théorie nouvelle sur *l'écoulement des liquides*, d'une simplicité remarquable, et qui valut à son auteur les éloges des membres les plus distingués de l'Académie des sciences.

*N. B.* L'*errata* placé à la fin du volume permettra au lecteur de corriger de suite quelques fautes d'impression qui pourraient le retarder dans l'étude de cet ouvrage.

# NOTICE NÉCROLOGIQUE

Sur J.-P. Douliot.

---

Cette courte notice est extraite du discours prononcé par M. Belloc, directeur de l'École royale gratuite de dessin, à la distribution des prix qui eut lieu le 21 décembre 1834, à l'Hôtel-de-Ville, en présence de M. le comte de Rambuteau, préfet du département de la Seine.

« Un jour, un appareilleur, praticien ingénieux, passa devant l'école, et entra dans la classe de mathématiques. Élevé dans les chantiers de construction que dirigeait son père, il avait, tout enfant, manié l'équerre et le marteau. Les compagnons l'appelaient *la Pensée*. Orphelin à quinze ans, employé bien jeune encore aux travaux de maçonnerie du Louvre, il venait prendre sa part des savantes leçons de l'excellent professeur Lavit : il venait demander à la science l'explication raisonnée des opérations qu'il faisait chaque jour.

» Il avait eu cette première éducation pratique que rien ne remplace, mais son esprit méditatif et profond éprouvait le besoin d'aller au-delà. Il entrevoyait déjà la possibilité de formuler en principes clairs et lucides, appuyés sur des calculs mathématiques, sur des dessins ingénieux, tout ce qu'avaient fait ses mains.

» Chargé par M. Caristie, ingénieur des ponts et chaussées, de conduire les travaux du pont d'Aigues, employé plus tard comme appareilleur par M. Hurtaux, il travaillait à la construction du pont d'Iéna, et d'un des plus beaux hôtels de la rue de la Paix, alors même qu'il suivait les cours d'architecture et de mathématiques de l'école royale. Le soir, après de laborieuses journées, il prolongeait ses veilles, et consacrait une partie de ses nuits à de sévères et consciencieuses études.

» Cet homme, Messieurs, doué d'un amour si passionné pour la science, d'une modestie si sincère et si profonde qu'elle allait jusqu'à l'abnégation, vous l'avez tous nommé, c'était Jean-Paul Douliot, votre bon, votre cher professeur, votre ami, votre guide, celui dont la mort prématurée nous a tous consternés, dont l'irréparable perte nous plonge dans un deuil de famille.

» Il y a un an qu'il était là, parmi nous, avec cette attitude calme et grave qui commandait le respect, avec cette physionomie intelligente et douce qui appelait la sympathie. Personne ne savait mieux que lui aplanir les difficultés de l'étude, passer des démonstrations les plus simples aux plus hautes questions de l'art. Toujours préoccupé de l'importance de l'enseignement qui lui était confié, de l'immense utilité qu'il y avait à populariser la connaissance des parties les plus essentielles et malheureusement les plus négligées de l'architecture, il s'était surtout attaché à démontrer la théorie de la stabilité des édifices. Son cours le

construction, unique à Paris, était une des gloires de notre école, et un de ses plus beaux titres à la reconnaissance publique.

» Cet homme, si regrettable, n'est pas mort tout entier, Messieurs ; il laisse plusieurs ouvrages, monumens de son génie, bienfaits qui lui survivent, et qui deviendront des guides pour achever ce qu'il avait si dignement commencé. Nous possédons de lui une *Géométrie pratique*, faite exprès pour l'école ; il a publié un *Traité de Charpente* avec 120 planches explicatives ; un *Cours de Construction*, comprenant ses admirables *Traités de la Coupe des pierres et de la Stabilité des édifices*, qui ont, pour ainsi dire, créé une science qui n'existait pas avant lui, ou qui du moins flottait dans le vague. En 1833, il présenta à l'Académie des sciences, sous le titre d'*Essai d'une théorie rationnelle sur l'Écoulement des liquides*, un mémoire plein d'aperçus neufs et profonds.

» On a peine à concevoir tant de travaux dans une carrière si courte, et dont il faut retrancher les premières années d'expérience pratique.

» C'est à Avignon, dans son pays natal, où les médecins l'avaient envoyé avec l'espoir que l'air et le soleil du midi rétabliraient ses forces épuisées par l'étude, que Jean-Paul Douliot est mort, à quarante-six ans. Son convoi a eu lieu le 9 novembre. Autour de sa dépouille mortelle se pressaient de nombreux amis, les professeurs des écoles spéciales d'Avignon, les élèves du cours d'architecture, ceux de l'école normale, des maçons, des charpentiers empressés d'honorer pour la dernière fois leur guide, leur oracle.

» Malgré la pluie, malgré l'approche de la nuit, tous l'ont accompagné jusqu'au cimetière.

» Il y avait quelque chose de profondément touchant dans l'élan spontané de cette foule silencieuse et recueillie, dans les cérémonies accomplies au fond de la fosse par les *tailleurs de pierres* sur le cercueil de l'auteur de la *Coupe des pierres*, de celui qui était sorti de leurs rangs pour devenir leur maître, pour rendre la science accessible à tous.

» Une souscription a été ouverte à l'Hôtel-de-ville d'Avignon pour élever un monument à la mémoire de Jean-Paul Douliot. Nous ne nous croirions pas quittes non plus envers ce digne et excellent homme, si nous ne consacrons son enseignement à l'école par un souvenir monumental, qui devra s'élever au sein de nos classes, où sa voix a si long-temps et toujours si utilement retenti.

» Élèves de Douliot, c'est à vous qu'appartient l'honneur de concevoir et d'exécuter ce travail, témoignage de reconnaissance et de regrets ! Un concours sera ouvert, et vous êtes tous appelés à y prendre part.

» Voué tout entier au professorat, à la vie spéculative du cabinet, jeune encore, M. Douliot n'avait point atteint les résultats que lui promettaient son nom et son savoir : il laisse sans fortune une veuve et trois enfans ; mais parmi les hommes de cœur et de science, il n'en est point qui ne doive s'honorer de contribuer à l'éducation des fils de Douliot. J'ose vous les recommander, M. le préfet, au nom de MM. les administrateurs, au nom de toute l'école ; vous disposez des bourses dans les collèges royaux, dans les écoles spéciales ; en donnant aux enfans de Douliot une part aux bienfaits que vous savez répartir avec tant de lumière et de justice, vous acquitterez une dette sacrée, une dette nationale, car le pays doit une instruction libérale et large aux fils d'un homme qui s'est dévoué, usé, pour le progrès de la science et pour l'instruction de tous. »

COURS ÉLÉMENTAIRE  
THÉORIQUE ET PRATIQUE  
DE CONSTRUCTION.

---

QUATRIÈME PARTIE.  
STABILITÉ DES ÉDIFICES.

SECTION PREMIÈRE.

**PRINCIPES DE STATIQUE.**

LEÇON I.

Préliminaires.

1. On appelle *corps* tout ce qui peut affecter nos sens d'un certain ensemble d'impressions.

2. Tout ce que les corps nous présentent de constant et d'uniforme, soit dans leur manière d'exister, soit dans leur manière d'agir, se nomme *propriété*.

3. Ce qui contient tous les corps de la nature se nomme *espace*. L'espace est absolu, immuable, infini : notre esprit ne peut lui assigner des limites.

Toute partie déterminée de l'espace absolu se nomme *espace relatif*. Ce n'est que l'espace relatif que l'on considère dans les sciences, attendu que cet espace est le seul qui, ayant des limites, soit susceptible d'être mesuré.

4. L'espace relatif que chaque corps de la nature occupe est ce qu'on appelle son *étendue* ou son *volume*. L'étendue d'un corps a toujours trois dimensions : *longueur*, *largeur* et *épaisseur*. Nous ne saurions concevoir un corps privé de l'une de ces trois dimensions. L'étendue est donc nécessaire à l'existence des corps.

Le volume d'un corps n'est pas constamment le même : il augmente quand la température augmente, et il diminue en même temps que la température.

On dit qu'un corps se *dilate* quand il augmente de volume, et qu'il se *contracte* quand son volume diminue.

1

5. Deux corps ne peuvent, dans le même temps, occuper le même lieu de l'espace. Cette propriété générale des corps, que les physiciens rendent sensible par des expériences, se nomme *impénétrabilité des corps*.

6. On dit qu'un corps est en mouvement quand il passe d'un lieu de l'espace dans un autre; si, au contraire, le corps persévère à rester dans le même lieu de l'espace, on dit que ce corps est *en repos*.

7. Un corps ne peut, dans le même instant, se trouver dans plusieurs lieux de l'espace; d'où il suit qu'un corps en mouvement ne peut suivre qu'un seul chemin à la fois.

8. Un corps qui est en repos ne peut de lui-même se mettre en mouvement; car si le contraire avait lieu, comme il n'y aurait pas plus de raison pour que ce corps se mît en mouvement suivant une direction plutôt que suivant une autre, il faudrait admettre qu'il pourrait prendre plusieurs chemins différens à la fois, ce qui est impossible (n° 7).

Ainsi, lorsque nous voyons un corps en mouvement, nous pouvons affirmer qu'il doit son mouvement à une cause quelconque qui n'est pas en lui, qui lui est absolument étrangère.

Par la même raison, un corps en mouvement ne peut, de lui-même, ni augmenter ni diminuer son mouvement.

On nomme *inertie* cette impuissance des corps de se mettre d'eux-mêmes en mouvement quand ils sont en repos, et de se mettre en repos quand ils sont en mouvement.

9. On donne le nom de *force* à toute cause quelconque de mouvement.

Nous ne connaissons les forces que par les effets qu'elles produisent; ainsi, on estime qu'une force est plus ou moins grande suivant, que le mouvement qu'elle produit sur un même corps est plus ou moins considérable. Les effets des forces sont des quantités qui, comme toutes les autres, ne peuvent être appréciées que d'une manière relative. C'est pour cela que, pour arriver à l'appréciation de la grandeur d'une force, nous comparons l'effet qu'elle produit à celui que produit dans les mêmes circonstances une autre force prise pour unité. C'est de cette manière que nous arrivons à exprimer les forces par des nombres. Ainsi, par exemple, si une force produit un effet 2, 3, 4, etc., fois plus grand que celui de la force prise pour unité, la grandeur ou l'intensité de cette force sera exprimée par l'un des nombres 2, 3, 4, etc. Ce qui signifie que les forces sont proportionnelles aux effets qu'elles produisent.

10. Dans le mouvement d'un corps, il faut considérer l'espace que ce corps parcourt ou doit parcourir. L'espace qu'un corps a parcouru est la somme des lieux par lesquels il a passé pendant son mouvement. On ne considère que la longueur de cet espace dans l'appréciation du mouvement des corps.

11. Comme un corps ne peut se trouver dans deux lieux différens de l'espace

dans le même instant (n° 7), il est clair que le temps est nécessaire au mouvement des corps.

Pour apprécier le temps qu'un corps met à parcourir un espace donné, on prend l'heure, la minute ou la seconde pour unité, selon que le temps employé est plus ou moins considérable.

12. Quand une seule force agit sur un corps, le mouvement qu'elle lui communique est nécessairement en ligne droite, car il n'y a pas plus de raison pour que le chemin unique (n° 7) que peut prendre ce corps se dérange de la ligne droite plutôt d'un côté que d'un autre.

Puisque nous ne connaissons les forces que par les effets qu'elles produisent ; et que le mouvement d'un corps sollicité par une seule force, est en ligne droite, il faut en conclure que la direction des forces est elle-même en ligne droite. Or, nous avons vu que l'intensité d'une force pouvait être exprimée par un nombre ; mais, au moyen d'une échelle de parties égales, tout nombre peut être représenté par une ligne droite ; donc les forces en général peuvent être représentées en grandeur et en direction par des lignes droites proportionnelles à leurs intensités.

13. Le mouvement d'un corps est encore en ligne droite lorsqu'il est sollicité par plusieurs forces susceptibles de se réduire en une seule qui produirait le même effet. Mais le mouvement cesse d'être rectiligne toutes les fois que les forces qui agissent sur le corps ne sont pas susceptibles de se réduire en une seule.

14. On appelle *résultante* la force unique qui produit sur un corps le même mouvement que plusieurs autres forces données, agissant dans des directions quelconques ; et les forces données prennent le nom de *composantes*.

15. Si plusieurs forces agissent sur un corps, et que leurs actions simultanées se détruisent, le corps restera évidemment en repos ; mais on voit que ce genre de repos diffère essentiellement de celui qui résulte de l'absence de toute force, qui est le repos naturel. Le repos forcé, auquel donnent lieu plusieurs forces qui se détruisent, se nomme *équilibre*.

16. *L'effet que produit une force sur un point matériel auquel elle est appliquée, reste le même, soit que cette force agisse en tirant, soit qu'elle agisse en poussant ce point matériel, pourvu que ce soit toujours dans la même direction rectiligne et dans le même sens.*

L'expérience confirme complètement cette vérité. ( Le sens suivant lequel les forces agissent, sera indiqué par des flèches dans les figures. )

17. *La résultante de deux forces P, Q, appliquées en un point matériel m (fig. 1), dirigées suivant la même droite mA, et agissant dans le même sens, est égale à leur somme.*

Ainsi, R étant cette résultante, on aura

$$R=P+Q.$$

Cette proposition est évidente d'elle-même, et s'étend à un nombre quelconque de forces qui agiraient suivant les mêmes conditions.

Ainsi, soient  $P, P', P'', P''',$  etc., tant de forces qu'on voudra, appliquées en un même point matériel, agissant dans le même sens et suivant la même droite, si  $R$  est leur résultante, on aura

$$R = P + P' + P'' + P''' + \dots \quad (1)$$

18. Si deux forces égales agissent en sens contraire suivant la même droite sur un même point matériel, elles se détruiront, et le point matériel sera en équilibre, c'est-à-dire, en d'autres termes, la résultante de ces deux forces sera zéro.

En effet, le point matériel sera, dans ce cas, sollicité à se mouvoir autant d'un côté que de l'autre, et comme il ne pourra se mouvoir dans les deux sens à la fois, il restera en repos, c'est-à-dire en équilibre.

19. Si deux forces quelconques  $P$  et  $Q$  agissent en sens contraire sur un point matériel  $m$  (fig. 2), suivant la même droite  $AB$ , leur résultante  $R$  sera égale à leur différence  $P - Q$  ou  $Q - P$  (suivant que  $P > Q$  ou  $Q > P$ ) et agira dans le sens de la plus grande.

En effet, supposons que  $P$  soit plus grand que  $Q$ , et qu'on ait  $P = Q + R$ ; à la place de la force  $P$  nous pourrions prendre  $Q + R$ , et alors le point matériel  $m$  sera sollicité au mouvement par la force  $Q$  dans un sens, et par la force  $Q + R$  en sens directement contraire : la force  $Q$  qui agit dans un sens détruira donc la force  $Q$ , qui agit en sens contraire ; il restera encore la force  $R$ , qui agira dans le sens de la plus grande force  $P$ . Cette force  $R$  (n° 14) sera donc la résultante des deux forces  $P$  et  $Q$ ; mais nous avons supposé  $P = Q + R$  : nous aurons donc  $R = P - Q$ , ce qu'il fallait démontrer.

On démontrerait de même que si  $Q > P$ , la résultante  $R = Q - P$ .

20. On conçoit facilement que la force  $P$  peut être considérée comme étant la résultante, et par conséquent la somme de plusieurs forces  $p, p', p'', \dots$ , appliquées au même point matériel  $m$  (fig. 2), et agissant dans le même sens suivant la droite  $mA$ , et la force  $Q$  comme étant celle de plusieurs autres forces  $q, q', q'', \dots$  appliquées au même point matériel  $m$ , et agissant toutes en sens contraire des premières dans la direction de la droite  $mB$ ; de sorte que  $P = p + p' + p'' + p''' \dots$ , et  $Q = q + q' + q'' + q''' \dots$ . En substituant donc dans les équations  $R = P - Q$  et  $R = Q - P$ , il viendra

$$\left. \begin{aligned} R &= p + p' + p'' + p''' \dots - (q + q' + q'' + q''' \dots) \\ \text{ou } R &= q + q' + q'' + q''' \dots - (p + p' + p'' + p''' \dots) \end{aligned} \right\} (2)$$

selon que  $P$  sera plus grand ou plus petit que  $Q$ .

De là il faut conclure cette règle générale que, si plusieurs forces sont appli-

quées en un même point matériel, et dirigées suivant la même droite, leur résultante sera égale à la somme de toutes celles qui agissent dans un sens, moins la somme de toutes celles qui agissent en sens contraire, et cette résultante agira dans le sens de la plus grande de ces deux sommes.

21. Si plusieurs forces sont appliquées en un ou plusieurs points matériels liés entre eux d'une manière invariable, à l'un quelconque de ces points matériels on pourra toujours appliquer deux forces égales entre elles et directement opposées, sans que l'effet des premières forces soit changé.

Car les deux forces ajoutées étant égales, et directement contraires, se détruiront, et, par conséquent, ne produiront aucun effet sur le système.

22. Si deux forces égales sont appliquées aux extrémités d'une droite rigide, et agissent en sens contraire dans la direction de cette droite, ces deux forces se détruiront.

En effet, la force qui est appliquée à la première extrémité de la droite ne peut mouvoir cette extrémité sans entraîner la seconde dans le même sens, puisque la droite est rigide; mais la force appliquée à la seconde extrémité, agissant en sens contraire de la première force, s'opposera à ce mouvement, et on arriverait à la même conclusion en prenant les choses en sens inverse; il y aura donc équilibre entre les deux forces données, comme si elles étaient appliquées à un même point matériel.

23. On peut toujours transporter le point d'application d'une force en un point quelconque de sa direction, sans changer l'effet de la force, pourvu que le nouveau point d'application soit lié au premier d'une manière invariable.

Supposons, en effet, une force  $P$  appliquée au point matériel  $m$  (fig. 3), et agissant dans la direction  $mA$ ; je dis qu'on pourra prendre le point  $B$  pour point d'application de cette force; car si à ce point  $B$  on applique deux forces  $P'$ ,  $P''$  égales entre elles, directement contraires et dirigées suivant la droite  $mA$ , ces forces se détruiront, et l'effet de la force  $P$  ne sera pas changé (n° 21). Mais si les forces  $P'$ ,  $P''$  sont égales à la force donnée  $P$ , on pourra combiner les forces  $P$ ,  $P''$  qui sont appliquées aux extrémités de la droite rigide  $mB$ ; or, ces deux forces sont égales et contraires; donc elles se détruiront (n° 22): il ne restera donc d'effectif que la force  $P'$ , appliquée au point  $B$ , et agissant dans le sens de la force primitive  $P$ . Mais  $P' = P$ , par hypothèse, donc l'effet de cette force primitive  $P$  restera le même, soit que son point d'application soit en  $m$  ou en  $B$  de sa direction.

24. Deux forces  $P$ ,  $Q$  quelconques, appliquées en un même point  $m$  (fig. 4), et dont les directions font un angle quelconque  $PmQ$ , ont une résultante qui ne peut être nulle.

En effet, si la résultante des forces  $P$ ,  $Q$  était nulle, le point matériel  $m$  serait en équilibre, et par conséquent, en appliquant à ce point  $m$  une nouvelle force dans une direction quelconque, il serait mis en mouvement dans le sens et sui-

vant la direction de cette nouvelle force. Appliquons donc à ce point  $m$  une force  $P'$  égale et contraire à la force  $P$ ; le point  $m$  sera mu suivant cette force  $P'$ ; mais comme cette force  $P'$  est égale et contraire à la force  $P$ , elle sera détruite par cette dernière : le point  $m$  ne pourrait donc pas se mouvoir par l'action de la force  $P'$  comme cela aurait nécessairement lieu si ce point était primitivement en équilibre; cet équilibre ne peut donc point exister, puisqu'en partant de cette hypothèse on est conduit à une absurdité.

25. *La direction de la résultante de deux forces  $P, Q$  quelconques, appliquées en un même point  $m$  (fig. 4), dont les directions forment un angle quelconque  $PmQ$ , est nécessairement dans le plan de cet angle.*

Car les raisons qu'on donnerait pour prouver que la direction de la résultante doit passer au-dessus de ce plan, serviraient à démontrer le contraire; cependant cette résultante ne peut pas prendre deux directions à la fois (n° 7); donc elle est dans le plan de l'angle formé par les directions des composantes  $P, Q$ .

26. *La direction de la résultante de deux forces  $P, Q$  quelconques, appliquées en un point  $m$  (fig. 5), divise en deux parties l'angle  $PmQ$  formé par les directions  $mP, mQ$  des composantes.*

En effet, la direction de la résultante est celle du chemin que les composantes peuvent faire prendre au point matériel  $m$ ; or, ce point ne peut se mouvoir dans la direction de la force  $P$ , puisqu'il est évident que la force  $Q$  dérange ce point du chemin que lui ferait parcourir cette force  $P$  si elle agissait seule; et on en dirait autant par rapport à la force  $Q$ : ces deux forces tendent donc toutes les deux à attirer chacune vers elle le point matériel; mais ce point ne peut suivre qu'un seul chemin à la fois; il faudra donc qu'il prenne une direction intermédiaire  $mR$ , ce qu'il fallait démontrer.

27. *Dans le cas où les deux forces données  $P, Q$  sont égales, la direction  $mR$  de leur résultante divise l'angle  $PmQ$  en deux parties égales; car les raisons qu'on donnerait pour prouver qu'elle doit s'approcher davantage de la direction de l'une des composantes serviraient à démontrer le contraire.*

28. *Dans le cas où les deux forces données sont inégales, l'angle que forme la direction de la résultante avec celle de la plus grande composante est plus petit que celui qu'elle fait avec la direction de la plus petite.*

En effet, soit  $Q > P$ , de sorte que  $Q = P + q$ ; en ne prenant d'abord dans  $Q$  que sa partie  $P$ , les deux forces appliquées au point  $m$  (fig. 5) seraient toutes les deux égales à  $P$ , et par conséquent la direction  $mR$  de leur résultante  $R'$  (n° 27) diviserait l'angle  $PmQ$  en deux parties égales; or, la force  $R'$  étant la résultante des forces  $P, P$  dirigées suivant les droites  $mP, mQ$  produira sur le point  $m$  le même effet que les deux composantes  $P, P$ . Mais, suivant la droite  $mQ$ , il nous reste encore la force  $q$  qui fait partie de  $Q$ ; le point  $m$  sera donc dans le même cas que s'il était sollicité par les deux forces  $R'$  et  $q$ , au lieu des forces données  $P, Q$ ; la résul-

tante  $R$  des forces  $R'$  et  $q$  divisera donc l'angle  $R'mQ$  en deux parties inégales, de manière que  $RmQ < PmR$ , ce qu'il fallait démontrer.

29. Si l'on suppose que plusieurs forces soient appliquées à un même point  $m$  (fig. 6), qu'elles soient dirigées d'une manière quelconque dans un plan ou dans l'espace suivant les droites  $mA, mB, mC, \dots$ , et qu'elles se fassent équilibre autour du point  $m$ , l'une quelconque de ces forces sera égale et directement contraire à la résultante de toutes les autres.

En effet, supposons que les forces données soient  $P, Q, S, T, \dots$ ; si l'on supprime l'une de ces forces, la force  $P$ , par exemple, l'équilibre sera rompu, et le point matériel  $m$  sera mu de la même manière que s'il était sollicité par une force unique égale à la résultante des forces restantes. Or, si l'on rétablit la force  $P$  supprimée, l'équilibre sera rétabli aussi, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la force  $P$  détruira la résultante de toutes les autres forces; cette force  $P$  est donc égale et directement contraire à la résultante de toutes les autres forces du système.

La réciproque de cette proposition est évidente; c'est-à-dire que toutes les fois que plusieurs forces agiront sur un même point matériel, et que l'une d'elles sera égale et directement contraire à la résultante de toutes les autres, le point matériel sera en équilibre.

30. Les corps se composent de parties dont la petitesse échappe même à notre imagination. On donne à ces parties élémentaires des corps le nom de *molécules*, de *particules* ou d'*atomes*.

31. A la température ordinaire, il y a des corps dont les molécules sont unies entre elles par une force plus ou moins considérable, qu'on appelle *cohésion*; d'autres dont l'union des parties est presque nulle, et d'autres enfin dans lesquels les molécules, au lieu d'être unies entre elles, tendent sans cesse, au contraire, à s'écarter les unes des autres par une certaine force de répulsion.

Les corps qui jouissent d'une certaine cohésion s'appellent *solides*; ceux dont l'union des molécules est presque nulle se nomment *liquides* ou *fluides*, et ceux dont les molécules sont en état de répulsion prennent le nom de *gaz* ou *fluides élastiques*.

Les corps solides sont les métaux, les pierres, les bois, etc.; les liquides, l'eau et les différentes liqueurs; et les fluides élastiques sont l'air, les vapeurs, etc., etc.

32. La science qui a pour objet la recherche des lois de l'équilibre et celles du mouvement des corps en général se nomme *mécanique*. Cette science comprend deux branches principales, la *mécanique* proprement dite et l'*hydraulique*.

La première comprend les lois de l'équilibre et celles du mouvement des corps solides, et la seconde, les lois de l'équilibre et celles du mouvement des liquides. Chacune de ces deux branches de la mécanique se divise en deux parties, dont l'une a pour objet l'étude des lois de l'équilibre, et l'autre celle des lois du mouvement des corps.

On appelle *statique* la partie qui a pour objet l'étude de l'équilibre des solides, et *hydrostatique* celle qui s'occupe de l'équilibre des liquides.

Enfin, on appelle *dynamique* la science du mouvement des solides, et *hydrodynamique* celle du mouvement des liquides.

La théorie de la stabilité des édifices est fondée nécessairement sur certaines parties de chacune des branches de la mécanique, dont nous traiterons à mesure qu'il en sera besoin. C'est d'abord de la statique que nous allons nous occuper, en considérant les corps sans pesanteur, pour rendre le raisonnement plus simple, sauf ensuite à leur restituer leur poids pour rentrer dans les circonstances naturelles.

## LEÇON II.

Principes d'équilibre, composition et décomposition des forces parallèles.

33. Si deux forces parallèles  $P, Q$  agissent dans le même sens aux extrémités d'une droite rigide  $AB$  (fig. 7), faisant un angle quelconque  $ABQ$  avec la direction  $BQ$  de l'une  $Q$  des forces données ;

1° Leur résultante  $R$  sera égale à leur somme  $P+Q$ ;

2° Cette résultante sera parallèle aux composantes et agira dans le même sens ;

3° Elle aura son point d'application  $D$  sur la droite rigide  $AB$ , entre les points  $A, B$  d'application des composantes.

En effet, suivant la direction de la droite rigide  $AB$ , appliquons aux points  $A$  et  $B$  deux forces  $M, N$  égales entre elles, et agissant en sens contraire, l'une de  $A$  en  $M$ , et l'autre de  $B$  en  $N$  ; ces deux forces se détruiront (n° 24), et l'effet des forces  $P, Q$  sur la droite  $AB$  ne sera pas changé. Si maintenant nous considérons les forces  $P, M$  appliquées en  $A$ , comme leurs directions  $AP, AM$  forment un angle quelconque  $PAM$ , elles auront une résultante  $T$  qui ne sera pas nulle (n° 24), et dont la direction  $AT$  divisera l'angle  $PAM$  d'une certaine manière (n° 26), et sera située dans le plan de cet angle  $PAM$  (n° 25). De même, si nous considérons les forces  $Q, N$  qui agissent sur le point  $B$  suivant les directions  $BQ, BN$ , elles auront aussi une résultante  $S$ , dont la direction  $BS$  divisera l'angle  $QBN$  en deux parties quelconques, et sera dans le plan de cet angle. De là il suit que les directions  $TA, SB$  des résultantes  $T, S$ , qui produisent le même effet

que les forces données  $P, Q$ , sont dans le même plan et ne sont pas parallèles; si donc on les prolonge, elles se rencontreront en un point  $C$ , auquel nous pourrions appliquer ces deux forces  $T, S$  (n° 23), pourvu que ce point  $C$ , de leur direction, soit lié d'une manière invariable à la droite  $AB$ .

Cela posé, par le point  $C$  menons la droite  $CR$  parallèle à  $AP$ , et la droite  $M'N'$  parallèle à  $AB$ : les angles  $M'CA, ACD$  seront respectivement égaux aux angles  $MAT, TAP$ ; de même les angles  $N'CB, BCD$  seront respectivement égaux aux angles  $NBS, SBQ$ : si donc on applique au point  $C$  deux forces contraires  $M', N'$  égales à la force  $M$  ou  $N$ , dans la direction de la droite  $M'N'$ , et les forces  $P', Q'$ , respectivement égales à  $P, Q$ , et dans la direction  $CD$ , il est clair, 1° que les forces  $P', M'$  produiront sur le point  $C$  le même effet que les forces  $P, M$  sur le point  $A$ ; mais la résultante  $T$  des forces  $P, M$  produit le même effet sur le point  $C$  que sur le point  $A$ ; ainsi les forces  $P, M$ , transportées parallèlement à elles-mêmes du point  $A$  au point  $C$ , produiront encore le même effet sur la droite  $AB$ . 2° De même, les forces  $N', Q'$ , respectivement égales et parallèles aux forces  $N, Q$ , produiront le même effet sur la droite  $AB$ , en étant appliquées au point  $C$ , que si elles l'étaient au point  $A$ . Or les forces  $M', N'$  étant égales et directement contraires se détruiront; il ne restera donc d'effectif sur le point  $C$  que les forces  $P', Q'$ , qui agissent dans le même sens et suivant la même droite; donc (n° 17) une force unique égale à leur somme  $P' + Q'$ , appliquée au point  $C$  et dirigée suivant la droite  $CD$  dans le sens de  $C$  en  $D$ , produirait sur ce point  $C$ , et par conséquent sur la droite  $AB$ , le même effet que les forces  $P', Q'$  ou leurs égales  $P, Q$ ; ce qui démontre les deux premières parties de la proposition.

Pour démontrer la troisième, nous observerons que la résultante  $R$  des forces  $P, Q$  est la même que celle des forces  $T, S$ , dont les directions concourent au point  $C$ ; la direction de cette résultante  $R$  divisera donc l'angle  $ACB$  d'une certaine manière; cette direction rencontrera donc la droite  $AB$  en un certain point  $D$  entre  $A$  et  $B$ ; la résultante  $R$  pourra donc être appliquée en ce point  $D$  de sa direction: ce qui prouve la troisième partie de la proposition.

34. *Si deux forces égales  $P, Q$  sont appliquées aux extrémités de la droite rigide  $AB$  (fig. 7), et agissent dans le même sens, le point d'application  $D$  de leur résultante  $R$  divisera la droite  $AB$  en deux parties égales.*

En effet, supposons la même construction (fig. 7) que dans la proposition précédente, et que les forces auxiliaires  $M, N$  qui agissent en sens contraire l'une de l'autre dans la direction de la droite  $AB$  soient égales aux composantes égales  $P, Q$ , les directions des résultantes partielles  $T, S$  diviseront en deux parties égales les angles  $MAP, NBQ$  (n° 27), puisque les forces  $P, M$  sont égales entre elles, ainsi que les forces  $N, Q$ . Mais les angles  $TAP, TCD$  sont égaux comme correspondants, et les angles  $CAD, TAM$ , comme opposés par le sommet; d'où l'on voit que le triangle  $ACD$  est isocèle. On démontrerait de la même manière que le

triangle DCB est aussi isocèle. On aura donc  $AD = DC$  et  $DB = DC$ , et partant  $AD = DB$ , ce qu'il fallait démontrer.

35. Il suit de là que, *si un nombre pair de forces parallèles agissent dans le même sens, sont égales deux à deux, et appliquées symétriquement à égales distances du milieu d'une droite rigide, la résultante de toutes ces forces sera égale à leur somme, et son point d'application sera au milieu de la droite rigide.*

Car en combinant deux à deux ces forces égales et appliquées à des distances égales du milieu de la droite rigide, leurs résultantes successives passeront toutes par le même point milieu de la droite rigide, et s'ajouteront ensuite, comme agissant toutes dans le même sens et suivant la même droite.

36. *Réciproquement, on pourra toujours décomposer une force P quelconque, appliquée en un point donné d'une droite rigide indéfiniment prolongée, en autant d'autres forces plus petites qu'on voudra, égales deux à deux, parallèles à la force donnée P, appliquées à des distances égales deux à deux du point d'application de la force donnée P, et dont la somme totale serait égale à cette force P.*

Cette proposition est une suite immédiate de celle qui précède.

37. *Le point d'application D de la résultante R de deux forces parallèles quelconques P, Q (fig. 8) appliquées aux extrémités d'une droite rigide AB et agissant dans le même sens, est plus près du point d'application B de la plus grande force Q que de celui A de la plus petite P.*

En effet, Q étant plus grand que P, on pourra supposer  $Q = P + q$ ; de sorte que les forces appliquées aux extrémités de la droite AB seront respectivement P et  $P + q = Q$ . Ne prenons d'abord dans Q que sa partie P; les forces appliquées aux points A et B seront alors égales, et par conséquent (n° 34) le point d'application de leur résultante R' sera le milieu C de la droite rigide AB. Si maintenant nous combinons cette résultante R' avec la seconde partie q de la force Q, nous verrons que le point d'application D de la résultante R des forces R' et q, ou des forces données P, Q sera situé entre le point C et le point B (n° 33); donc AD sera plus grand que DB, ce qu'il fallait démontrer.

38. *Le point d'application C (fig. 9) de la résultante de deux forces parallèles inégales P, Q, qui agissent dans le même sens aux extrémités A, B, d'une droite rigide AB, divise cette droite AB en deux segments AC, CB, réciproquement proportionnels aux deux composantes P, Q; de sorte que*

$$P : Q :: CB : AC.$$

En effet, supposons d'abord que les forces P, Q soient commensurables, qu'elles soient entre elles  $:: m : n$  (m et n étant deux nombres entiers quelconques). Cela posé, divisons la droite AB en deux parties AD, DB qui soient

directement proportionnelles aux forces données, de sorte que  $AD : DB :: P : Q :: m : n$ . Sur les prolongemens de la droite AB, faisons  $BF = DB$  et  $AE = AD$ , nous aurons  $EF = 2AB$ . Prenons le milieu C de la droite EF nous aurons  $CE = CF = \frac{EF}{2} = AB$ . Ensuite, divisons ED en  $m$  parties égales et DF en  $n$  parties égales aussi ; les parties égales de ED seront égales aux parties égales de DF, car ED est égal à  $2AD$ , et DF à  $2DB$ , la proportion  $AD : DB :: m : n$  ; peut se mettre sous la forme  $2AD : 2DB$  ou  $ED : DF :: m : n$ , ce qui donne  $\frac{ED}{m} = \frac{DF}{n}$ . Maintenant, divisons les forces P et Q, la première en  $m$  parties

égales, et la seconde en  $n$  parties égales aussi ; les parties de P seront de même grandeur que celles de Q ; représentons une de ces parties par  $p$ , nous aurons  $P = mp$  et  $Q = np$ . Appliquons  $\frac{1}{m}p$  aux points E, D, et un  $p$  à chaque point de division compris entre E et D ; appliquons de même  $\frac{1}{n}p$  aux points D et F et un  $p$  à chaque point de division compris entre D et F ; il est clair que, de cette manière, la force P sera symétriquement distribuée sur la droite ED, et la force Q sur la droite DF. On observera qu'au point D seront deux  $\frac{1}{m}p$  ou  $p$  comme sur les autres points de division, mais qu'aux points E et F il n'y aura que  $\frac{1}{m}p$  à chacun. Ces deux  $\frac{1}{m}p$ , et tous les  $p$  appliqués aux autres points de division, sont donc des forces égales et symétriquement appliquées par rapport au point C ; ce point C sera donc (n° 35) le point d'application de la résultante générale de toutes ces forces élémentaires, et par conséquent des forces données P et Q.

Cela posé, de ce que  $EC = AB$ , et  $EA = AD$ , il en résultera  $EC - EA = AB - AD$ , ou  $AC = DB$  ; de même, de ce que  $CF = AB$  et  $BF = BD$ , il s'en suivra  $CF - BF = AB - BD$ , ou  $CB = AD$ . Mais nous avons posé  $P : Q :: DA : BD$  ; si donc nous remplaçons BD par son égal AC, et DA par son égal CB, nous aurons finalement  $P : Q :: CB : AC$  ; d'où l'on voit que la proposition est démontrée pour le cas des forces P, Q commensurables.

Supposons actuellement que les deux composantes soient incommensurables ; je dis que le point C (fig. 10) d'application de la résultante R divisera encore la droite AB en deux parties telles qu'on aura  $P : Q :: BC : AC$ . . . . (a).

En effet, si cela n'était pas vrai, et qu'au lieu d'être le point C qui satisfait à la proportion (a) le point d'application de la résultante fût le point D situé entre les points C et B, quelque petite que fût la distance CD, on pourrait toujours diviser la droite AB en un assez grand nombre de parties égales pour que ces parties fussent encore plus petites que cette distance CD, supposée aussi petite qu'on voudra : il y aurait donc au moins un point de division  $a$  entre les points C et D. Cela posé, il est clair qu'on pourra prendre le point  $a$  pour point d'application de la résultante de deux forces réciproquement proportionnelles

aux segmens commensurables  $Aa$ ,  $aB$ , dont l'une pourra être  $P$ , et l'autre représentée par  $Q'$ , qui sera déterminée par la proposition suivante,

$$aB : Aa :: P : Q' = \frac{P \times Aa}{aB}$$

Mais la proportion (a) nous donne  $Q = \frac{P \times AC}{BC}$ , d'où l'on voit que  $Q' > Q$ , par la raison que le facteur  $Aa$  de la valeur de  $Q'$  est plus grand que le facteur  $AC$  de la valeur de  $Q$ , et que le dénominateur  $aB$  de la première fraction est plus petit que celui  $BC$  de la seconde; ainsi deux causes concourent à rendre  $Q' > Q$ . Mais par supposition le point d'application de la résultante des forces  $P, Q$  est le point  $D$ ; tandis que celui de la résultante des forces  $P, Q'$  est le point  $a$ ; or, le point  $D$  est plus près du point  $B$  que ne l'est le point  $a$ ; d'où il s'ensuivrait qu'en augmentant la force  $Q$  pour avoir la force  $Q'$ , le point d'application de la résultante s'éloignerait de la force augmentée, ce qui est contraire à ce qui a été démontré au n° 37, d'où il faut conclure que le point d'application de la résultante des forces incommensurables  $P, Q$  ne peut pas être située à la droite du point  $C$  qui divise la droite  $AB$  en deux parties réciproquement proportionnelles à ces forces  $P$  et  $Q$ . On démontrerait de la même manière qu'il ne peut pas être vers la gauche de ce point  $C$ ; il faut donc en conclure que c'est ce point  $C$  lui-même. Ainsi la proposition énoncée au commencement de cet article est vraie généralement.

39. Appelons  $p$  et  $q$  les segmens  $AC$  et  $CB$  (fig. 10) suivant lesquels le point  $C$  d'application de la résultante de deux forces parallèles  $P, Q$ , agissant dans le même sens, et appliquées aux extrémités d'une droite rigide, divise cette droite  $AB$ ; nous aurons

$$P : Q :: q : p, \text{ d'où } Pp = Qq \dots (1).$$

*C'est-à-dire que les produits des composantes par les distances respectives de leur point d'application à celui de leur résultante, sont égaux.*

40. Appelons  $r$  la longueur comprise entre les points d'application des composantes, de sorte que  $r = p + q$ ; cela posé, de la proportion  $P : Q :: q : p$ , nous tirerons

$$P + Q : Q :: q + p : p \quad \text{et} \quad P + Q : P :: q + p : q,$$

ou

$$R : Q :: r : p \quad \text{et} \quad R : P :: r : q.$$

D'où l'on tirera

$$p = \frac{Qr}{R} \quad \text{et} \quad q = \frac{Pr}{R} \dots (2),$$

formules qui serviront à trouver le point d'application de la résultante.

41. Si l'on oppose directement une force  $S$  égale à la résultante  $R$  des forces parallèles et de même sens  $P$  et  $Q$  qui agissent aux extrémités de la droite rigide  $AB$  (fig. 11), cette force  $S$  fera équilibre à la résultante  $R$  et par conséquent aux

composantes  $P$ ,  $Q$ . Et puisque  $S=R$ , et que  $R=P+Q$ , on aura aussi  $S=P+Q$ . D'ailleurs le point d'application de la force  $S$  est le même que celui de la résultante.

42. Si trois forces parallèles  $P, Q, S$ , appliquées à une droite rigide  $AB$  (fig. 11), se font équilibre, l'une quelconque d'entre elles, la force  $Q$ , par exemple, sera égale et directement contraire à la résultante des deux autres (n° 29); or, pour que les trois forces  $P, Q, S$  soient en équilibre, il faut que la force  $S$ , qui agit en sens contraire des deux autres  $P, Q$ , soit égale et directement contraire à la résultante de ces dernières (n° 29); ainsi  $S=P+Q$ ; d'où  $Q=S-P$ .....(3) Mais les forces  $P, S$  agissent en sens contraire; d'où il s'ensuit que la résultante de deux forces parallèles  $P, S$ , qui agissent en sens contraire sur une droite rigide, est égale à la différence des composantes, et agit dans le sens de la plus grande composante.

43. De la première des formules (2) on tire  $r = \frac{pR}{Q}$  ou, en comparant ce résultat à la fig. 11,  $AB = \frac{AC \times R}{Q}$ ; et si dans cette dernière on met pour  $R$  sa valeur  $S$ , et à la place de  $Q$  sa valeur  $S-P$ , trouvées ci-dessus, il viendra

$$AB = \frac{AC \times S}{S-P} \dots (4)$$

pour l'expression de la distance du point d'application  $B$  de la résultante  $Q$  au point d'application  $A$  de la plus petite des composantes parallèles  $P$  et  $S$  qui agissent en sens contraire sur la droite  $AC$ .

44. Si dans la formule (4), qui est  $AB = \frac{S \times AC}{S-P}$ , nous supposons égales les composantes  $S$  et  $P$ , nous aurons  $Q=S-P=0$ , et par conséquent  $AB = \frac{S \times AC}{S-P} = \frac{S \times AC}{0} = \infty$ , c'est-à-dire que la résultante de deux forces parallèles et égales, agissant en sens contraire sur une droite rigide, est nulle, et son point d'application est à une distance infinie du point d'application de l'une des composantes; ce qui veut dire, en d'autres termes, que les deux forces proposées n'ont pas de résultante unique possible.

De là il suit qu'une seule force ne saurait mettre celles-là en équilibre. Pour obtenir cet équilibre il faudra deux forces qui soient égales aux forces données, appliquées au même point, l'une agissant en sens contraire de la première force donnée, et l'autre en sens contraire de la seconde. Alors il y aura évidemment équilibre, puisqu'on aura quatre forces égales appliquées deux à deux aux mêmes points, et directement contraires.

Ainsi, par exemple, soient les forces  $P, P$  égales, parallèles et contraires, appliquées aux extrémités de la droite  $AB$  (fig. 12); si on oppose une force  $P'$  éga-

le à celle appliquée au point A, et une autre  $P'$  égale à celle appliquée au point B, il est clair qu'il y aura équilibre.

On pourrait aussi mettre le système en équilibre, en ajoutant une force quelconque à l'une des forces données, qui par là cesserait d'être égale à l'autre, et on chercherait la résultante du système, comme au n° 43.

M. Poinsoot appelle *couple* un système de deux forces parallèles égales, agissant en sens contraire aux extrémités d'une droite rigide. Ce géomètre en a fait une théorie particulière qui ne nous est pas indispensable.

45. *Supposons à présent un nombre quelconque de forces parallèles P, Q, R, S, T, situées ou non situées dans un même plan, agissant dans le même sens, et appliquées à des points A, B, C, D, etc. (fig. 13), situés d'une manière quelconque dans l'espace, mais liés entre eux d'une manière invariable, et proposons-nous de trouver leur résultante.*

1° On joindra les points d'application A, B, des deux premières forces P, Q par la droite AB, sur laquelle on cherchera le point d'application E et la grandeur de la résultante V de ces deux forces, comme il a été dit au n° 40, et on aura

$$V = P + Q, \text{ et } AE = \frac{Q \times AB}{V} = \frac{Q \times AB}{P + Q}.$$

2° On joindra le point E d'application de la résultante V et celui C de la troisième force S par une droite EC; sur laquelle on cherchera le point d'application F et la grandeur de la résultante X des deux forces V et S, qui sera celle des trois premières forces P, Q, S, et on aura

$$X = V + S = P + Q + S, \text{ et } EF = \frac{S \times EC}{X} = \frac{S \times EC}{P + Q + S}.$$

3° On joindra le point d'application F de la résultante partielle X et celui D de la quatrième force T par la droite FD, sur laquelle on cherchera le point d'application G et la grandeur de la résultante R des forces X et T, et on aura

$$R = X + T = P + Q + S + T, \text{ et } FG = \frac{T \times FD}{R} = \frac{T \times FD}{P + Q + S + T}.$$

On se conduira de la même manière jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la dernière force donnée.

46. Il est facile de voir que, si l'on avait un système de forces parallèles appliquées à des points liés entre eux d'une manière invariable, et situés d'une manière quelconque sur un plan ou dans l'espace, dont les unes agiraient dans un sens et les autres en sens contraire, on aurait la résultante finale de toutes ces forces, en prenant celle des forces qui agiraient dans un sens, celle des forces qui agiraient en sens contraire (en s'y prenant comme ci-dessus dans l'un et l'autre cas), et enfin celle de ces deux résultantes partielles, d'après le principe n° 43, qui serait la résultante demandée.

47. Les deux résultantes partielles qui nous ont conduit à la résultante finale dans le n° précédent peuvent présenter trois cas.

1° Elles peuvent être égales et appliquées en un même point, ce qui annoncerait que le système des forces serait de lui-même en équilibre, attendu que ces deux résultantes seraient non-seulement égales, mais encore directement contraires (n° 28).

2° Elles peuvent être égales et non directement opposées; dans ce cas la résultante sera zéro, mais son point d'application sera à l'infini (n° 44), c'est-à-dire qu'une seule force ne pouvait produire le même effet que les forces données.

3° Enfin ces deux résultantes seront inégales, et auront ou n'auront pas le même point d'application. Dans l'un et l'autre cas, la résultante finale sera égale à leur différence. Quant au point d'application de cette résultante, il sera le même que celui des résultantes partielles, quand ces dernières seront appliquées au même point (n° 49), et on l'obtiendra comme il a été dit au n° 43 dans le cas contraire.

48. Dans tout ce qui précède sur les forces parallèles, nous n'avons tenu aucun compte de l'angle que forme la droite rigide avec les directions des forces qui lui sont appliquées; et, en effet, cet angle n'entraîne pour rien dans toutes les questions que nous avons traitées. De cette indépendance des résultats obtenus jusqu'ici, par rapport à l'angle formé par la droite rigide et les directions des composantes, résulte un principe de la plus haute importance, qui consiste en ce que :

*Si l'on a un système quelconque de forces parallèles agissant toutes dans le même sens, ou les unes dans un sens et les autres en sens contraire, pourvu que ces forces conservent les mêmes intensités ou qu'elles prennent de nouvelles intensités proportionnelles aux premières, le point d'application de leur résultante restera le même, quelque direction qu'on fasse prendre successivement aux forces, tant qu'elles resteront parallèles et qu'elles conserveront les mêmes points d'application.*

Cette propriété remarquable du point d'application de la résultante d'un système quelconque de forces parallèles a fait donner à ce point le nom de *centre des forces parallèles*.

### LEÇON III.

Principes d'équilibre, composition et décomposition des forces dont les directions ne sont pas parallèles.

49. La direction de la résultante de deux forces  $P, Q$  appliquées en un même point matériel  $m$  (fig. 14) et dont les directions forment un angle quelconque

$PmQ$ , est la diagonale  $mC$  d'un parallélogramme  $mACB$  formé sur les droites  $mA$ ,  $mB$ , qui, à partir du point  $m$ , représente en grandeur et en direction les composantes  $P$ ,  $Q$ .

En effet, faisons  $BD=BC$ , et achevons la losange  $BCED$ ; appliquons au point  $D$ , et dans la direction de la droite  $DE$ , deux forces  $Q'$ ,  $Q''$ , toutes les deux égales à la force  $Q$  et directement opposées; ces deux forces se détruisant l'une l'autre, ne changeront rien à l'effet des forces données  $P$ ,  $Q$ : ainsi la résultante des quatre forces  $P$ ,  $Q$ ,  $Q'$ ,  $Q''$ , sera absolument la même que celle des composantes  $P$ ,  $Q$ .

Or, si nous considérons les forces  $Q$ ,  $Q'$ , attendu que le point d'application de la force  $Q$  peut être transporté au point  $D$  de sa direction (n° 23), ces deux forces auront le même point d'application  $D$ ; mais elles sont égales: donc (n° 27) la direction de leur résultante  $T$  divisera l'angle  $QDQ''$  en deux parties égales, et, conséquemment prolongée, elle passera par le point  $C$ , auquel nous pourrons la supposer appliquée.

Les deux autres forces  $P$ ,  $Q'$  qui nous restent sont parallèles, et l'une  $P$  peut être appliquée au point  $A$  de sa direction, et l'autre  $Q'$  au point  $E$ ; ces deux droites parallèles sont donc appliquées aux extrémités de la droite  $AE$ ; d'ailleurs elles agissent dans le même sens; donc le point d'application de leur résultante divisera cette droite en deux segments réciproquement proportionnels à ces forces  $P$ ,  $Q'$  (n° 37). Or, d'après nos hypothèses, nous avons  $P : Q' :: Am : mB$ . Mais  $AmCB=CE$ ,  $mB=AC$  et  $Q=Q'$ ; si donc nous substituons dans la proportion ci-dessus, nous aurons  $P : Q' :: CE : AC$ ; d'où il suit que le point  $C$  est celui où la résultante  $S$  des forces  $P$ ,  $Q'$  serait appliquée. Mais la résultante  $T$  des deux premières forces  $Q$ ,  $Q''$  passe aussi par ce point  $C$  et peut y être appliquée; ainsi, le point  $C$  étant lié au point  $m$  d'une manière invariable, ces forces  $T$  et  $S$  appliquées au point  $C$  produiraient le même effet sur le point  $m$  que les forces données  $P$ ,  $Q$ : mais la résultante des forces  $T$ ,  $S$  passerait par le point  $C$ ; celle des forces  $P$ ,  $Q$ , qui est la même, passera donc par ce point  $C$ ; d'ailleurs, la résultante des forces  $P$ ,  $Q$  doit passer par le point d'application de ces forces; donc, enfin, cette résultante passera par la diagonale  $mC$  du parallélogramme  $mACB$ , ce qu'il fallait démontrer.

50. La résultante de deux forces  $P$ ,  $Q$  appliquées à un même point matériel  $m$  (fig. 15) dont les directions forment un angle quelconque  $AmB$ , est représentée, non-seulement pour sa direction, mais encore pour sa grandeur par la diagonale du parallélogramme formé sur les droites  $mA$ ,  $mB$  qui, à partir du point  $m$ , représentent en grandeur et en direction les composantes  $P$ ,  $Q$ .

En effet, quelle que soit la grandeur de la résultante  $R$  des forces  $P$ ,  $Q$ , à elle seule elle produira le même effet que les deux composantes; si donc on lui oppose une force  $S$  qui lui soit égale, cette dernière fera équilibre aux composantes  $P$ ,  $Q$ .

Or, la direction de la résultante des forces P, Q (n° 49) est la diagonale du parallélogramme formé sur les droites  $mA$ ,  $mB$ , représentant en grandeur et en direction les composantes P, Q; la direction  $mD$  de la force S sera donc le prolongement de cette diagonale  $Cm$ . De tout cela il résulte que les trois forces P, Q, S sont en équilibre autour du point  $m$ ; d'où il suit que l'une quelconque de ces trois forces, la force Q, par exemple, est égale et directement contraire à la résultante des deux autres (n° 29). Si donc on prolonge la direction  $Bm$  de la force Q d'une quantité  $mE = mB$ , la droite  $mE$  représentera en grandeur et en direction la résultante des deux autres P, S. Si maintenant on joint les points E et A par une droite AE, le triangle  $AmE$  sera égal au triangle  $mAC$ ; car ces triangles ont le côté commun  $mA$ ; par construction  $mE = mB = AC$ , et les angles  $AmE$ ,  $mAC$  sont égaux comme alternes-internes; donc, la droite AE est parallèle et égale à  $Cm$ ; si donc par le point E on mène une droite ED parallèle à  $Am$ , la figure  $mAED$  sera un parallélogramme dont la diagonale  $mE$  sera la direction et la grandeur de la résultante des forces P, S. Je dis de plus que, le côté  $mA$  de ce parallélogramme étant proportionnel à la force P, le côté  $mD$  sera proportionnel à la force  $S = R$ , car, si cela n'était pas vrai, la droite proportionnelle à la force S serait plus grande ou plus petite que  $mD$ , et, en construisant le parallélogramme dans l'une ou l'autre hypothèse, il s'ensuivrait que la résultante des forces P, S, devant suivre la diagonale de ce parallélogramme, ne serait plus directement opposée à la force Q, comme cela doit être nécessairement. Mais  $mD = EA = mC$ ; ce qu'il fallait démontrer.

Le principe qui résulte de la réunion des deux dernières propositions est de la plus grande importance; on l'appelle *le principe du parallélogramme des forces*, ou simplement *le parallélogramme des forces*.

51. Il suit du parallélogramme des forces que les trois côtés  $mA$ ,  $AC$  et  $mC$  du triangle  $mAC$  sont proportionnels aux intensités des forces P, Q, R, la dernière étant la résultante des deux autres; car les côtés de ce triangle sont respectivement égaux aux droites qui, dans le parallélogramme  $mACB$ , représentent ces mêmes forces. Mais nous avons vu en trigonométrie (*Géo. pl. n° 395*) que  $(Cm)^2 = (mA)^2 + (AC)^2 + 2 mA \times AC \times \cos. CA m$ . Si donc nous mettions dans cette expression, les forces au lieu des lignes qui les représentent, nous aurions

$$R^2 = P^2 + Q^2 + PQ \cos.^2 CA m \dots (5).$$

Cette formule nous fera connaître la résultante R lorsque nous connaîtrons les composantes P, Q et l'angle de leurs directions.

52. Dans le triangle  $mAC$  (*Géo. pl. n° 394*) on a

$$Am : AC : mC :: \sin. ACm : AmC : \sin. CA m \dots (a).$$

Mais l'angle  $ACm = CmB$ , qui est celui formé par les directions de la résultante

R et de la composante Q; de sorte que nous pourrions substituer  $\sin(R, Q)$  au lieu de  $\sin. ACm$ , pour indiquer qu'il s'agit du sinus de l'angle formé par les directions des deux forces R, Q. De même, l'angle  $AmC$  est celui formé par les directions de la résultante R et de la composante P, de sorte qu'au lieu de  $\sin. AmC$  nous mettrons  $\sin. (R, P)$ ; enfin l'angle  $CAm$  étant le supplément de l'angle  $AmB$  (*Géo.* pl. n° 366), nous aurons  $\sin. CAm = \sin. AmB$ ; mais l'angle  $AmB$  est celui formé par les directions des forces P, Q; par conséquent, d'après la convention ci-dessus, nous aurons  $\sin. CAm = \sin. (P, Q)$ ; si nous substituons ces sinus dans la proportion (a), il nous viendra

$$P : Q : R :: \sin. (R, Q) : \sin. (R, P) : \sin. (P, Q) \dots (6)$$

d'où l'on voit que les composantes P, Q et leur résultante R sont respectivement proportionnelles aux sinus des angles formés par les directions des deux autres forces.

53. Il suit encore de là que les relations qui existent entre deux forces qui concourent en un point et leur résultante sont les mêmes, tant pour leurs grandeurs que pour leurs directions, que celles qui existent entre les côtés et les angles d'un triangle dont les côtés sont proportionnels aux forces, et les angles suppléments ou égaux à ceux formés par les directions de ces mêmes forces. Par conséquent, les questions relatives à ces trois forces dépendent entièrement de la résolution trigonométrique de ce triangle.

Donnons-en des applications.

54. *Étant donné deux forces P, Q appliquées en un même point matériel m (fig. 15), et l'angle formé par leurs directions  $mP, mQ$ , trouver la direction de leur résultante.*

On commencera par calculer la grandeur de la résultante par la formule du n° 51, et ensuite dans la triple proportion (6) du n° 52 on prendra

$$P : R :: \sin. (R, Q) : \sin. (P, Q),$$

ce qui donnera

$$\sin. (R, Q) = \sin. CmB = \frac{P \sin. (P, Q)}{R}.$$

55. *Connaissant les directions  $mA, mB, mC$ , de trois forces P, Q, R, (la dernière étant la résultante des autres) et l'une P de ces forces, trouver les deux autres Q, R (fig. 15).*

La triple proportion (6) du n° 52 nous donne

$$P : Q :: \sin. (R, Q) : \sin. (R, P)$$

et 
$$P : R :: \sin. (R, Q) : \sin. (P, Q).$$

La première de ces deux proportions donnera

$$Q = \frac{P \sin. (R, P)}{\sin. (R, Q)}, \text{ et la seconde } R = \frac{P \sin. (P, Q)}{\sin. (R, Q)}$$

56. Une force  $R$  étant donnée, on demande de la décomposer en deux autres  $P, Q$ , dirigées suivant les droites données  $mA, mB$  (fig. 15).

Dans ce problème, on connaît donc la résultante  $R$  et les angles formés par la direction  $mC$  de cette résultante et celles  $mA, mB$  des composantes inconnues. Or, de la triple proportion (6) nous tirerons

$$P : R :: \sin. (R, Q) : \sin. (P, Q)$$

et

$$Q : R :: \sin. (R, P) : \sin. (P, Q)$$

donc

$$P = \frac{R \sin. (R, Q)}{\sin. (P, Q)} \text{ et } Q = \frac{R \sin. (R, P)}{\sin. (P, Q)} \dots (9).$$

57. On donne la résultante  $R$ , l'une  $P$  des composantes, et l'angle  $(R, P)$  des directions de ces deux forces; on demande la grandeur et la direction de l'autre composante  $Q$ .

Puisque (n° 53) les relations des forces et de leurs directions sont les mêmes que celles des côtés et des angles du triangle  $AmC$  (fig. 15); les données de la question ramènent le problème à celui-ci: Un angle et les deux côtés qui le comprennent étant donnés dans un triangle, trouver les deux autres angles et le troisième côté.

Or, nous avons vu en trigonométrie (*Géo.* pl. n° 399) que

$$a + b : a - b :: \text{tang.} \frac{A + B}{2} : \text{tang.} \frac{A - B}{2} \dots (a).$$

Supposons que  $a = mC = R$ , que  $b = mA = P$ ,  $A = CA_m$  et  $B = AC_m = C_mB$ , il nous viendra en substituant dans la proportion (a)

$$R + P : R - P :: \text{tang.} \frac{CA_m + AC_m}{2} : \text{tang.} \frac{CA_m - AC_m}{2} \dots (10).$$

58. On donne les deux composantes  $P, Q$  et la résultante  $R$ ; on demande les directions de ces trois forces, le point d'application  $m$  de ces forces et la direction de la force  $P$  étant donnés.

Ici on se trouve dans le cas où l'on donne les trois côtés d'un triangle et qu'on demande les trois angles. Ainsi, il nous faudra faire usage de la formule donnée

$$(\text{Géo.}, \text{pl. n° 397}), \text{ qui est } \sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}} \dots (a),$$

le rayon des tables étant l'unité. Reprenons les principes.

59. Si trois forces  $P, Q, S$ , se font équilibrer autour d'un point matériel  $m$  (fig. 15) en prenant les longueurs  $mA, mB$  proportionnelles aux intensités des forces  $P, Q$ , et en construisant le parallélogramme  $mACB$ , la diagonale  $mC$  de ce parallélogramme représentera en grandeur et en direction la troisième force  $S$ , qui fait équilibre aux deux premières  $P, Q$  (n° 49 et 59): or, les angles  $AmS, BmS$  sont respectivement suppléments des angles  $AmC, BmC$ ; les sinus des angles

formés par la direction de la force  $S$  avec chacune des deux autres  $P, Q$  sont donc égaux à ceux des angles que forme la diagonale  $mC$  avec les directions des forces  $P, Q$ ; on aura donc (n° 52) pour le cas de trois forces qui se font équilibre autour d'un point matériel  $m$ ,

$$P : Q : S :: \sin. (S, Q) : \sin. (S, P) : \sin. (P, Q),$$

c'est-à-dire, que ces trois forces sont respectivement entre elles comme les sinus des angles formés par les directions des deux autres.

60. Il suit de là que les problèmes que nous avons résolus depuis le n° 54, jusque et y compris le n° 58, sont immédiatement applicables au cas de trois forces qui se font équilibre autour d'un point matériel.

61. Si les directions  $mA, mB$  (fig. 15) des deux forces  $P, Q$  appliquées en un point  $m$ , sont perpendiculaires, le parallélogramme  $AmBC$  sera rectangle, et par conséquent aussi le triangle  $AmC$ ; ce qui donnera

$$(Cm)^2 = (Am)^2 + (AC)^2$$

ou 
$$R^2 = P^2 + Q^2 \dots (10)$$

d'où 
$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} \dots (11)$$

62. Appelons  $a$  et  $b$  les angles  $AmC, ACm$  du triangle rectangle  $AmC$ , on aura (*Géo.*, pl. n° 391),

$$mA = mC \times \cos. a, \quad \text{et} \quad mB = mC \times \cos. b,$$

ou bien 
$$P = R \cos. a, \quad \text{et} \quad Q = R \cos. b \dots (12)$$

d'où 
$$\left. \begin{array}{l} \cos. a = \frac{P}{R}, \quad \text{et} \quad \cos. b = \frac{Q}{R} \\ \cos. a = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}, \quad \text{et} \quad \cos. b = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \end{array} \right\} \dots (13)$$

La formule (11) fera connaître la résultante, et les formules (13) sa direction.

63. Si nous carrons les deux membres des équations (12), il nous viendra

$$P^2 = R^2 \cos.^2 a \quad \text{et} \quad Q^2 = R^2 \cos.^2 b$$

ajoutons ces dernières membre à membre, et il viendra

$$P^2 + Q^2 = R^2 (\cos.^2 a + \cos.^2 b).$$

Mais (formule 10)  $P^2 + Q^2 = R^2$ , nous aurons donc

$$R^2 = R^2 (\cos.^2 a + \cos.^2 b).$$

Ce qui se réduit à  $1 = \cos.^2 a + \cos.^2 b \dots (14)$ .

La somme des carrés des cosinus est donc égale à l'unité, c'est-à-dire au rayon du cercle pris pour unité. Ce principe est une modification de cette formule de trigonométrie (*Géo.* pl. n° 371)  $R^2 = \cos.^2 a + \sin.^2 a$ ; car l'angle  $b$  étant le complément de  $a$ , nous avons  $\cos. b = \sin. a$ , et dans la dernière formule  $R = 1$ .

64. Supposons que trois forces P, Q, S, soient appliquées en un même point matériel m, (fig. 16) et que leurs directions mA, mB, mC ne soient pas dans un même plan, mais disposées d'une manière quelconque dans l'espace; si les portions mA, mB, mC des directions de ces forces sont respectivement proportionnelles à leurs intensités, la diagonale du parallépipède formé sur ces trois droites mA, mB, mC représentera en grandeur et en direction la résultante des trois forces P, Q, S.

En effet la résultante des forces P, Q, dont les directions sont dans le même plan mADB, sera représentée par la diagonale mD du parallélogramme mADB; appelons-la T, cette résultante, et combinons-la avec la troisième composante S; comme les directions mD, mC des deux forces T, S, sont dans le même plan DmCE, leur résultante R sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale mE du parallépipède; mais il est évident que la résultante des deux forces T, S est la même que celle des forces données P, Q, S; donc la résultante de ces dernières est représentée aussi en grandeur et en direction par la diagonale mE du parallépipède.

65. Si les directions des trois composantes étaient rectangulaires, le parallépipède formé sur les trois droites, qui représentent en grandeur et en direction, les trois composantes, serait rectangle, et en vertu du n° 120 de la géométrie à trois dimensions, on aurait

$$(mE)^2 = (mA)^2 + (mB)^2 + (mC)^2,$$

ou bien

$$R^2 = P^2 + Q^2 + S^2$$

d'où

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + S^2} \dots (15)$$

66. Supposons toujours trois forces rectangulaires appliquées en un même point m (fig. 16), et appelons a, b, c les angles AmE, BmE, CmE, que forme la direction mE de la résultante avec celles mA, mB, mC des composantes; comme les triangles AmE, BmE, CmE sont rectangles en A, B et C, nous aurons (n° 62).

$$P = R \cos.a, \quad Q = R \cos.b, \quad S = R \cos.c \dots (16).$$

d'où nous tirerons

$$\cos.a = \frac{P}{R}, \quad \cos.b = \frac{Q}{R}, \quad \cos.c = \frac{S}{R} \dots (17)$$

ces formules feront connaître la direction de la résultante, et peuvent se mettre sous la forme

$$\left. \begin{aligned} \cos.a &= \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + S^2}}, & \cos.b &= \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + S^2}} \\ \cos.c &= \frac{S}{\sqrt{P^2 + Q^2 + S^2}} \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

67. Carrons les équations (16), nous aurons

$$P^2 = R^2 \cos.^2 a, \quad Q^2 = R^2 \cos.^2 b, \quad S^2 = R^2 \cos.^2 c.$$

et ajoutons-les ensuite, il nous viendra

$$P^2 + Q^2 + S^2 = R^2 (\cos.^2 a + \cos.^2 b + \cos.^2 c).$$

Mais  $P^2 + Q^2 + S^2 = R^2$ ; nous aurons donc

$$R^2 = R^2 (\cos.^2 a + \cos.^2 b + \cos.^2 c)$$

ce qui se réduit à

$$1 = \cos.^2 a + \cos.^2 b + \cos.^2 c \dots (19).$$

68. Supposons qu'on ait un nombre quelconque de forces  $P, P', P'', P''', \dots$  appliquées en un même point matériel  $m$  (fig. 17), dirigées comme on voudra dans l'espace, et qu'on en demande la résultante.

Pour résoudre ce problème, sur la direction  $mP$  de la première force  $P$ , on fera la longueur  $mA$  égale à autant d'unités de longueur, que la force  $P$  renferme d'unités de force; par le point  $A$  on mènera la droite  $AC$  parallèle à la direction  $mP'$  de la seconde force  $P'$ , et à partir du point  $A$ , on fera cette droite  $AC$  égale à autant d'unités de longueur que la seconde force  $P'$  contient d'unités de force; la droite  $mC$  représentera en grandeur et en direction la résultante  $Q$  des deux premières forces  $P, P'$  (n° 50). Par le point  $C$  on mènera la droite  $CE$  parallèle à la direction  $mP''$ , de la troisième force  $P''$ ; à partir du point  $C$  on fera cette droite  $CE$  égale à autant d'unités linéaires que la force  $P''$  renferme d'unités de force, et la droite  $mE$  représentera en grandeur et en direction la résultante des forces  $Q, P''$ , et par conséquent des trois premières forces  $P, P', P''$ . Par le point  $E$  on mènera la droite  $EF$  parallèle à la direction  $mP'''$  de la quatrième force  $P'''$ ; on fera cette droite  $EF$  égale à autant d'unités linéaires que la force  $P'''$  renferme d'unités de force, et la droite  $mF$  représentera en grandeur et en direction la résultante des forces  $S$  et  $P'''$ , et par conséquent des quatre premières forces données,  $P, P', P'', P'''$ . En continuant d'opérer de la même manière, on parviendra de proche en proche à la résultante de tant de forces données qu'on voudra, appliquées en un même point, et dirigées, comme on voudra, dans l'espace.

On remarquera qu'en suivant ce procédé, on formera un polygone  $mACEFGm$  situé ou non situé dans un même plan, et comme l'ordre que nous avons suivi en combinant les forces données pourrait évidemment être interverti de plusieurs manières, il en résulte qu'on pourra former différents polygones du même genre, qui auront tous un côté commun  $mG$  qui est celui qui représente et en grandeur et en direction la résultante de toutes les forces données. Si ce côté était nul, c'est-à-dire, si le point  $G$  venait coïncider avec le point  $m$  d'application de toutes

les forces, il est évident que les forces données seraient d'elles-mêmes en équilibre.

69. En suivant une marche inverse à celle que nous venons d'indiquer pour résoudre le problème précédent, on parviendra à décomposer une force donnée en autant d'autres forces qu'on voudra, qui seraient toutes appliquées au même point  $m$  que la force donnée, et qui auraient des directions données quelconques dans l'espace. Ainsi, par exemple, si l'on donnait la force représentée par la droite  $mG$  (fig. 17), le point  $m$  étant son point d'application, par ce point  $m$ , on mènera tant de droites  $mP''', mP'', mP', mP$  qu'on voudra, qui pourraient être prises pour les directions d'autant de forces; cela fait, par le point  $G$  on mènerait la droite  $GF$  parallèle à la direction  $mP''$ ; on ferait cette droite  $GF$  égale à autant d'unités linéaires que l'on voudrait que la force  $P''$ , appliquée suivant la droite  $mP''$ , contînt d'unités de force. Par le point  $F$ , on mènerait la droite  $FE$  parallèle à la direction  $mP'''$ ; on ferait cette droite  $FE$  égale à autant d'unités de longueur qu'on voudrait que la force  $P'''$  contînt d'unités de force; par le point  $E$  on mènerait la droite  $EC$  parallèle à la direction de la force  $P''$ , on ferait cette droite  $EC$  égale à autant d'unités de longueur qu'on voudrait que la force  $P''$  contînt d'unités de force; enfin, par le point  $C$  on mènerait les droites  $CA$ ,  $CD$  respectivement parallèles aux directions  $mP'$ ,  $mP$ , des deux dernières forces  $P'$ ,  $P$ , et les grandeurs de ces forces seraient représentées par les longueurs  $mD$ ,  $mA$ .

On voit que ce problème est susceptible d'une infinité de solutions, puisque toutes les forces, excepté deux, peuvent être prises arbitrairement.

## LEÇON IV.

### Des momens.

70. Supposons que, par un point donné dans l'espace, on mène une perpendiculaire à la direction d'une force; le produit de l'intensité de cette force par la longueur de cette perpendiculaire sera ce qu'on appelle le *moment* de cette force par rapport à ce point. On nomme aussi *moment* d'une force, par rapport à une ligne droite, le produit de cette force par la commune perpendiculaire à cette droite et à la direction de la force. Enfin si un plan est parallèle à la direction d'une force, le *moment* de cette force par rapport à ce plan sera le produit de la force par sa distance au plan.

On appelle *centre*, ou *axe*, ou *plan* des momens, le point, ou la droite, ou le plan auquel on rapporte les momens de plusieurs forces. On suppose toujours le centre, l'axe ou le plan des momens fixe dans l'espace, de manière pourtant qu'il peut prendre un mouvement de rotation.

La distance par laquelle il faut multiplier l'intensité d'une force pour avoir son moment prendra le nom de *bras de levier* de la force.

Des moments des forces parallèles.

71. Supposons que deux forces parallèles  $P, Q$  agissent dans le même sens aux extrémités  $A, B$  d'une droite rigide  $AB$  (fig. 18), perpendiculaire à la direction des forces : si le centre des moments est le point  $C$  d'application de la résultante  $R$ , les moments des composantes  $P, Q$  seront égaux.

En effet, en appelant  $p, q$  les bras de levier  $AC, CB$ , d'après le n° 39 nous aurons

$$Pp = Qq.$$

72. Les moments des composantes  $P, Q$  seront encore égaux, si on les rapporte à un axe  $EF$  (fig. 19) mené par le point d'application  $C$  de la résultante  $R$  dans une direction quelconque.

En effet, si par l'axe des moments on mène un plan perpendiculaire au plan des directions des forces données, et que par les points  $A, B$  où les directions des composantes  $P, Q$  rencontrent ce plan on abaisse les perpendiculaires  $AE, BF$  sur la droite  $EF$ , ces droites  $AE, BF$  seront aussi perpendiculaires aux directions des forces, et par conséquent seront les bras de levier des composantes : les triangles  $CAE, CBF$  seront semblables, et donneront

$$AC : CB :: AE : BF.$$

Mais (n° 37)

$$Q : P :: AC : CB ;$$

donc

$$Q : P :: AE : BF.$$

Et par conséquent

$$P \times AE = Q \times BF,$$

comme il fallait le démontrer.

73. Les moments pour les composantes seront encore égaux si on les rapporte à un plan  $abcd$  (fig. 20), mené par le point d'application  $C$  de la résultante, parallèlement à la direction des composantes.

En effet, si à ce plan  $abcd$  on abaisse, par les points d'application des composantes, les perpendiculaires,  $AE, BF$ , la droite  $EF$  menée par les pieds  $E, F$  des perpendiculaires, passera évidemment par le point  $C$  d'application de la résultante ; par conséquent les forces  $P, Q$  produiront sur la droite  $EF$  le même effet que sur le plan  $abcd$  ; la question est donc ramenée à la précédente.

Dans les trois cas que nous venons de démontrer, le moment de la résultante est zéro, puisque son bras de levier est zéro. Les moments des composantes, qui sont égaux, tendent à faire tourner le centre, l'axe ou le plan des moments, l'un en sens contraire de l'autre, et se font équilibre.

74. Supposons deux forces parallèles agissant dans le même sens aux extrémités d'une droite rigide AB (fig. 21), mais que le centre des moments soit le point D situé sur le prolongement de AB; je dis que le moment de la résultante sera égal à la somme des moments des composantes.

En effet, soit C le point d'application de la résultante R, des forces P, Q; appelons  $r$  le bras de levier CD de cette résultante, et  $p, q$  ceux AD, BD des composantes. Cela posé, puisque  $R = P + Q$  (n° 33), nous aurons

$$Rr = Pr + Qr \dots (a).$$

Mais  $r = DC = AD + AC = p + AC$ , et  $r = CD = BD - CB = q - CB$ : si donc nous multiplions ces deux égalités respectivement par P et Q, il nous viendra

$$Pr = Pp + P \times AC \text{ et } Qr = Qq - Q \times CB.$$

En substituant ces valeurs de Pr, Qr dans l'équation (a), il en résultera

$$Rr = Pp + P \times AC + Qq - Q \times CB \dots (b);$$

Mais  $P \times AC - Q \times CB = 0$ , puisque (n° 39)  $P \times AC = Q \times CB$ ,

ce qui réduit l'équation (b) à  $Rr = Pp + Qq$ ,

et la proposition est démontrée.

75. Si l'on rapportait les moments des forces parallèles P, Q, qui agissent dans le même sens aux extrémités de la droite rigide AB (fig. 22), à un axe DF mené comme on voudra dans le plan DBF perpendiculaire à la direction des forces, cet axe DF rencontrant la droite rigide en un point D situé sur le prolongement de cette dernière, le moment de la résultante égalerait encore la somme des moments des composantes.

En effet, si par les points d'application A, B, C des composantes et de la résultante on abaisse, à l'axe DF, les perpendiculaires AE, BF, CG, les triangles semblables DAE, DCG, DBF donneront

$$BF : BD :: AE : AD = \frac{BD \times AE}{BF},$$

$$\text{et } BF : BD :: CG : DC = \frac{BD \times CG}{BF}.$$

Mais (n° 74),  $DC \times R = P \times AD + Q \times BD$ ; si donc, dans cette égalité, nous substituons les valeurs de AD et de DC données par les proportions précédentes, il nous viendra

$$\frac{BD \times CG}{BF} \times R = P \times \frac{BD \times AE}{BF} + Q \times DB,$$

et en divisant par BD et multipliant par BF,

$$R \times CG = P \times AE + Q \times BF,$$

comme il fallait le démontrer.

76. *Le moment de la résultante de deux forces parallèles agissant dans le même sens aux extrémités d'une droite rigide AB, (fig. 23) serait encore égal à la somme des momens des composantes, si l'on rapportait les momens à un plan abcd, parallèle à la direction des forces, et mené par un point D quelconque pris sur le prolongement de la droite AB, qui joint les points d'application des composantes.*

En effet, si par la droite rigide AB on mène un plan perpendiculaire au plan *abcd* des momens, l'intersection de ces deux plans sera une droite DF qui passera sur le point D où la droite AB perce le plan des momens, et les perpendiculaires AE, BF, CG, abaissées des points d'application des composantes et de la résultante sur le plan des momens, auront leurs pieds sur la droite DF; or, il est évident que les forces données produiront sur le plan des momens le même effet que sur la droite DF, d'où il suit que la proposition est démontrée.

77. *Supposons toujours que deux forces parallèles, agissant dans le même sens, soient appliquées aux extrémités d'une droite rigide AB (fig. 24), mais que le centre des momens soit situé au point D sur la droite rigide AB entre ses extrémités; je dis qu'alors le moment de la résultante sera égal à la différence des momens des composantes.*

En effet, les forces parallèles agissant dans le même sens, nous donneront

$$R = P + Q,$$

par conséquent

$$Rr = Pr + Qr \dots (a).$$

Mais  $r = CD = AC - AD = AC - p$ , et  $r = CD = DB - CB = q - CB$ ; multiplions ces égalités respectivement par P et Q, et il nous viendra

$$Pr = P \times AC - Pp \quad \text{et} \quad Qr = Qq - Q \times CB.$$

Substituons ces valeurs de Pr et de Qr dans l'égalité (a) ci-dessus, et il nous viendra

$$Rr = P \times AC - Pp + Qq - Q \times CB,$$

et comme

$$P \times AC - Q \times BC = 0,$$

il nous restera

$$Rr = Qq - Pp,$$

comme il fallait le démontrer.

78. En suivant la marche tracée aux n<sup>os</sup> 75 et 76, on démontrerait que si l'axe EF (fig. 25), ou le plan *abcd* (fig. 26), coupe la droite rigide AB en un point D quelconque entre ses extrémités, le moment de la résultante sera encore égal à la différence des momens des composantes.

79. Nous avons vu (n<sup>o</sup> 43) que quand deux forces parallèles agissent en sens

contraire aux extrémités d'une droite rigide AB (fig. 27), leur résultante  $R = P - Q$ , agit dans le sens de la plus grande composante, et son point d'application est situé en C sur le prolongement de la droite rigide AB, du côté de la plus grande composante.

Cela posé, supposons que, sur le prolongement de la droite rigide AB, on ait pris le centre D des momens; je dis que, dans ce cas, le moment de la résultante sera égal à la différence des momens des composantes.

En effet, puisque les composantes agissent en sens contraire (n° 42), on a

$$R = P - Q,$$

en multipliant par  $r$ , il viendra

$$Rr = Pr - Qr \dots (a).$$

Mais  $r = DC = AD - AC = p - AC$ ,

et  $r = CD = BD - BC = q - BC$ ;

en multipliant ces égalités respectivement par P et Q, il viendra

$$Pr = Pp - P \times AC, \quad \text{et} \quad Qr = Qq - Q \times BC.$$

En substituant dans l'égalité (a), on aura

$$Rr = Pp - P \times AC - Qq + Q \times BC.$$

Mais  $Q \times BC - P \times AC = 0$ ;

donc  $Rr = Pp - Qq$ ,

ce qu'il fallait démontrer.

80. En raisonnant d'une manière analogue à celle des n° 75 et 76, on démontrerait que la proposition précédente a encore lieu dans le cas où l'on rapporte les momens à un axe DF (fig. 28) ou à un plan  $abcd$  (fig. 29).

81. Supposons la même chose que dans le n° 79, mais que le centre D des momens soit situé entre les extrémités A, B (fig. 30) de la droite rigide AB; je dis que, dans ce cas, le moment de la résultante sera égal à la somme des momens des composantes.

En effet, nous aurons encore  $R = P + Q$ ,

et par conséquent  $Rr = Pr + Qr \dots (a)$ .

Mais  $r = CD = AC + AD = AC + p$ , et  $r = CD = BC - BD = BC - q$ ;

d'où  $Pr = P \times AC + Pp$ , et  $Qr = Q \times BC - Qq$ .

En substituant donc dans l'équation (a), il viendra

$$Rr = P \times AC + Pp - Q \times BC + Qq.$$

Mais  $P \times AC - Q \times BC = 0$ ,

donc  $Rr = Pp + Qq$ ,

ce qu'il fallait démontrer.

82. On démontrerait par le raisonnement des n<sup>os</sup> 75 et 76 que ce théorème a lieu aussi quand on rapporte les moments à un axe GF (fig. 31) ou à un plan *abcd* (fig. 32).

83. En rapprochant les théorèmes précédents sur les moments des forces parallèles, on reconnaîtra que *toutes les fois que les moments des composantes tendent à faire tourner le centre, l'axe ou le plan des moments dans le même sens, le moment de la résultante est égal à la somme de ceux des composantes; et que toutes les fois que ces derniers moments tendront à faire tourner le centre, l'axe ou le plan des moments en sens contraire, le moment de la résultante sera égal à la différence des moments des composantes, et agira dans le sens du plus grand moment composant.*

Dans le premier cas, on aura généralement

$$Rr = Pp + Qq \dots (20),$$

et dans le second,

$$Rr = Pp - Qq \text{ ou } Rr = Qq - Pp \dots (21)$$

(suivant que *Pp* sera plus grand ou plus petit que *Qq*), et de ces équations on tirera

$$r = \frac{Pp + Qq}{R}, \text{ et } r = \frac{Pp - Qq}{R} \text{ ou } r = \frac{Qq - Pp}{R} \dots (22)$$

en observant que  $R = P + Q$  quand les composantes agissent dans le même sens, et  $R = P - Q$  ou  $= Q - P$ , dans le cas contraire.

84. Proposons-nous, maintenant, de résoudre ce problème : *Plusieurs forces parallèles P, P', P'', P''', agissant dans le même sens, sont appliquées à des points matériels situés comme on voudra dans l'espace, et liés entre eux d'une manière invariable; on demande le moment de la résultante de toutes ces forces, par rapport à un axe fixe quelconque HO.*

Par la direction d'une des forces données, menons un plan parallèle à l'axe OH (fig. 33), et par cette dernière droite un plan qui soit perpendiculaire au premier, qui coupera les directions des forces en des points A, B, C, D, qui pourront être pris pour les points d'application de ces forces (n<sup>o</sup> 23); abaissons par ces points A, B, C, D les perpendiculaires AH, BK, CN, DO, à l'axe des moments HO; ces perpendiculaires seront les bras de leviers des forces données; représentons-les respectivement par *p, p', p'', p'''*.

Cela posé, 1<sup>o</sup> on joindra par une droite AB les points d'application A, B des deux premières forces P, P'; sur cette droite AB, on cherchera le point d'application E de la résultante S de ces deux premières forces (n<sup>o</sup> 38); par ce point E, on abaissera la perpendiculaire EI sur HO, et on aura d'une part

$$S = P + P'$$

et de l'autre

$$S \times EI = P \times AH + P' \times BK$$

ou  $S \times EI = Pp + P'p' \dots (a).$

2° On joindra le point E d'application de la force S et celui C de la force P'' par la droite EC, sur laquelle on cherchera le point d'application F de la résultante T des forces S, P'', et on aura d'une part

$$T = S + P'' = P + P' + P'' \dots (b),$$

et de l'autre  $T \times FL = S \times EI + P'' \times CN,$

ou en mettant pour  $S \times EI$  sa valeur (a), et au lieu de  $P'' \times CN$ , sa valeur  $P''p''$ ,

$$T \times FL = Pp + P'p' + P''p'' \dots (c).$$

3° On joindra le point F d'application de la résultante partielle T à celui D de la force P''' par la droite FD, sur laquelle on cherchera le point G d'application de la résultante R des forces T, P''', par lequel on abaissera la perpendiculaire GM à l'axe OH, et on aura d'une part

$$R = T + P''' = P + P' + P'' + P''' \dots (d),$$

et de l'autre  $R \times GM$  ou  $Rr = T \times FL + P''' \times DO,$

ou  $Rr = Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' \dots (23).$

En continuant d'opérer de cette manière, s'il y avait un plus grand nombre de forces données, on parviendrait, de proche en proche, à la résultante de toutes les forces et au moment de cette résultante, ce à quoi peut conduire directement la formule (23).

La formule (23) divisée par la formule (d) ci-dessus, donnera

$$r = \frac{Pp + P'p' + P''p'' + P'''p'''}{P + P' + P'' + P'''} \dots (24)$$

D'où l'on voit que, pour avoir le bras de levier de la résultante, il faut diviser la somme des momens des composantes par la somme de ces composantes.

85. Si l'on avait un système de forces parallèles dont les momens des unes tendraient à produire un mouvement de rotation dans un sens autour de l'axe des momens, et ceux des autres forces à produire un mouvement en sens contraire, on chercherait, comme dans le n° 84, le moment de la résultante de toutes celles qui tendraient à faire tourner l'axe dans un sens, ensuite le moment de la résultante de toutes les autres, et enfin le moment résultant total de ces deux momens résultans partiels, d'après le principe du n° 83. Ainsi, par exemple, si P, P', P'', P''', sont des forces dont les momens tendent à faire tourner l'axe dans un sens, et Q, Q', Q'', Q''' d'autres forces dont les momens tendent à faire tourner l'axe en sens contraire, en appelant p, p', p'', p'''..., q, q', q'', q'''..., et r les bras de levier des forces, on aura, pour la résultante, la somme algébrique suivante :

$$R = P + P' + P'' + P''' \dots - (Q + Q' + Q'' + Q''' \dots)$$

en donnant le signe + aux forces qui agiront dans un sens, et le signe — à celles qui agiront en sens contraire; et le moment de la résultante sera

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' \dots - (Qq + Q'q' + Q''q'' + Q'''q'''\dots)$$

et partant, le bras de levier de cette résultante sera

$$r = \frac{Pp + P'p' + P''p'' + P'''p'''\dots - (Qq + Q'q' + Q''q'' + Q'''q'''\dots)}{P + P' + P'' + P'''\dots - (Q + Q' + Q'' + Q'''\dots)} \dots (25)$$

86. Si l'on demandait le moment résultant de tant de forces parallèles qu'on voudrait, appliquées en des points matériels situés dans l'espace d'une manière quelconque, et liés entre eux d'une manière invariable, les moments étant rapportés à un plan parallèle à la direction des forces, après avoir abaissé, par les points d'application A, B, C, D (fig. 34) des forces données des perpendiculaires AH, BK, CN, DO, sur le plan des moments *abcd*, on se conduirait exactement comme dans le n° 84. Ces deux procédés sont tellement semblables, qu'ayant eu soin d'indiquer les choses par les mêmes lettres, pour obtenir le moment de la résultante, on pourra relire le numéro cité, en se servant de la fig. 34 qui représente la question actuelle au lieu de la fig. 33.

#### Des moments de forces non-parallèles.

87. *Supposons deux forces P, Q dont les directions concourent en un point m (fig. 35); si le centre D des moments est sur un point quelconque de la direction mD de leur résultante R, les moments des composantes seront égaux, et celui de la résultante sera nul; de sorte que le système sera en équilibre autour du point D.*

Le moment de la résultante est évidemment nul, puisque son bras de levier est zéro. De là on pourrait en conclure que les moments des composantes sont égaux, car on voit que ces deux moments tendent à produire un mouvement de rotation en sens contraire l'un de l'autre autour du centre des moments, et comme le moment de la résultante est nul, il faut que ces deux moments composés se fassent équilibre, et soient par conséquent égaux. Mais voici une autre démonstration de cette vérité.

Si, par le point D de la direction de la résultante, on abaisse les perpendiculaires DA, DB sur les directions des forces P, Q, les triangles rectangles AmD, BmD donneront (Géo., pl. n° 389)

le premier  $1 : Dm :: \sin. (R, P) : AD,$

et le second  $1 : Dm :: \sin. (R, Q) : BD;$

donc,  $\sin. (R, P) : \sin. (R, Q) :: AD : DB.$

Mais (n° 52)  $Q : P :: \sin. (R, P) : \sin. (R, Q);$   
 donc,  $Q : P :: AD : DB;$   
 d'où  $Q \times DB = P \times AD,$

ce qu'il fallait démontrer.

88. Si le centre D des momens (fig. 36) au lieu d'être sur la direction de la résultante était sur celle  $mD$  d'une composante Q, on démontrerait, comme au dernier numéro, que le moment  $R \times DB$  de la résultante, est égal à celui  $P \times DA$  de l'autre composante P.

89. *Supposons que deux forces P, Q concourent en un point m (fig. 37), et que le centre D des momens soit situé sur le plan des directions de ces forces, mais au dehors de l'angle qu'elles forment; je dis que le moment de la résultante sera égal à la somme de ceux des composantes.*

En effet, menons la droite  $mD$  par le point  $m$  d'application des forces et le centre D des momens; et décomposons la force P en deux autres, l'une  $P'$  dirigée suivant la droite  $mD$ , et l'autre  $P''$  suivant la direction de la force Q; si la force P est représentée par la longueur  $mG$ , la force  $P'$  le sera par  $mE$ , et l'autre  $P''$  par  $mF$ ; en supposant construit le parallélogramme  $mEGF$ .

Cela posé, par le centre D des momens, abaissons les perpendiculaires DA, DB, DC respectivement sur les directions des forces données P, Q, et de leur résultante R; comme le centre D des momens est sur la direction  $mD$  de l'une  $P'$  des composantes de P, le moment de cette dernière sera égal à celui de son autre composante  $P''$  dirigée suivant  $mF$  (n° 88), de sorte que

$$P \times DA = P'' \times DB \dots (a).$$

Mais la résultante R des forces données P, Q est aussi celle des trois forces  $P'$ ,  $P''$ , Q, dont deux  $P''$ , Q agissent dans le même sens suivant la même droite  $mQ$ , et se composent en une seule égale à  $P'' + Q$ : la résultante R des forces données sera donc aussi celle des forces  $P'$  et  $(P'' + Q)$ ; or, le centre des momens est sur la direction de la force  $P'$ ; par conséquent, les momens de la résultante R et de la composante  $(P'' + Q)$  sont égaux (n° 88); nous aurons donc

$$R \times DC = (P'' + Q) \times DB = P'' \times DB + Q \times DB;$$

ou bien en vertu de l'équation (a)

$$R \times DC \times P = AD + Q \times DB,$$

comme il fallait le démontrer.

90. *Supposons toujours deux forces P, Q concourantes en un point m (fig. 38), mais que le centre D des momens soit situé dans l'angle et dans le plan des directions des forces données P, Q; je dis que le moment de leur résultante sera égal à la différence de ceux des composantes.*

Pour le démontrer, on décomposera la force  $P$  en deux autres, l'une  $P'$  dirigée suivant la droite  $mD$  qui joint le centre  $D$  des moments et le point d'application  $m$  des forces données, et l'autre  $P''$  suivant la même droite  $mB$  que la seconde force donnée  $Q$ , mais agissant en sens contraire. Si la composante  $P$  est représentée par la longueur  $mG$ , et que l'on construise le parallélogramme  $GE mF$ , les longueurs  $mE$ ,  $mF$  représenteront les composantes  $P'$ ,  $P''$ .

Cela posé, par le centre  $D$  des moments, abaissons les perpendiculaires  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$  respectivement sur les directions des composantes  $P$ ,  $Q$  et de la résultante  $R$ ; comme le centre des moments est sur la direction de la composante  $P'$  de  $P$ , le moment de cette dernière sera égal à celui de son autre composante  $P''$ ; ainsi nous aurons

$$P \times AD = P'' \times DB \dots (a).$$

Mais la résultante  $R$  des composantes  $P$ ,  $Q$  est aussi celle des trois forces  $P'$ ,  $P''$ ,  $Q$ , dont deux  $P''$ ,  $Q$  agissent en sens contraire suivant la même droite  $mQ$ ; elles se composeront donc en une seule égale à  $Q - P''$ , de sorte que la force  $R$  sera la résultante des deux forces  $P'$  et  $(Q - P'')$ ; or, le centre des moments est sur la direction de la composante  $P'$ ; le moment de la résultante  $R$  sera donc égal à celui de la composante  $(Q - P'')$ : on aura donc

$$R \times DC = (Q - P'') \times DB = Q \times DB - P'' \times DB,$$

ou bien, en ayant égard à l'équation (a) ci-dessus,

$$R \times DC = Q \times DB - P \times AD,$$

comme il fallait le démontrer.

91. Il est facile de voir dans la figure 37 que les moments des composantes tendent à faire tourner le centre des moments dans le même sens, et que, dans la figure 38, ils tendent à faire tourner le même point en sens contraire. De là, il faut conclure que *le moment de la résultante de deux forces qui concourent en un point est égal à la somme ou à la différence des moments des composantes, suivant que ces derniers moments tendent à faire tourner le centre des moments dans le même sens ou en sens contraire, comme dans le cas des forces parallèles.*

92. *Deux forces, dont les directions ne sont pas dans un même plan, ne peuvent jamais se composer en une seule résultante; de sorte que, pour les mettre en équilibre, il faut au moins l'emploi de deux forces.*

En effet, si ces deux forces avaient une résultante, par un point de la direction de cette résultante, on pourrait toujours mener une droite qui rencontrât la direction de l'une des composantes sans être dans le plan de la direction de l'autre composante; car, d'après l'hypothèse, le plan mené par la direction de la résultante et de la première composante ne passerait pas par la direction de

la dernière composante. Ainsi, si l'on rendait cette droite fixe, elle détruirait l'effet de la résultante, et par conséquent les forces données devraient être en équilibre autour de cet axe, ce qui ne peut avoir lieu, puisque l'une des composantes a un moment nul autour de cet axe (celle dont cet axe rencontre la direction), tandis que l'autre a un moment qui ne saurait être nul, puisque sa direction passe au-delà de l'axe des momens. Ainsi, ces deux momens composans ne sauraient se détruire, et par conséquent les forces données ne peuvent point se composer en une seule.

## LEÇON V.

### Des centres de gravité des polygones.

93. On appelle *masse* d'un corps la quantité absolue de matière qui le compose, sans avoir égard à son volume.

Il suit de là que deux corps de même masse peuvent avoir des volumes inégaux, et deux corps de même volume peuvent avoir des masses différentes.

94. Si l'on divise la masse d'un corps par celle d'un autre corps de même volume et soumis à la même température, le quotient sera la *densité* du premier par rapport à celle du second. Ainsi, un corps est plus ou moins dense, selon que, sous un volume donné, il renferme plus ou moins de matière.

95. Tous les corps abandonnés à eux-mêmes se précipitent à la surface de la terre, en se dirigeant en ligne droite vers le centre de ce globe. Nous ignorons quelle est la nature de la force qui fait ainsi tomber les corps; mais nous ne pouvons nier son existence, puisque ses effets nous sont sensibles et que nous pouvons les apprécier. Pour désigner cette force inconnue, on lui a donné les noms de *gravité*, de *pesanteur*, d'*attraction*. Elle agit avec la même intensité sur toutes les molécules de matière qui sont situées à la même distance du centre de la terre; mais sur les molécules placées à des distances différentes de ce centre, elle agit en raison inverse des carrés de ces distances. Toutefois, attendu que les corps que nous considérons autour de nous à la surface de la terre sont à de très-petites distances les uns des autres, comparativement à la grandeur du rayon terrestre, qui est d'environ 1,435 lieues, ou 3,271,864 toises, nous pouvons regarder les molécules de ces corps comme étant animées de la même pesanteur.

96. Nous regarderons comme mathématiquement parallèles les droites suivant lesquelles les molécules des corps sont attirées vers le centre de la terre,

parce que 1° ces droites forment des angles très-petits, attendu le très-petit d'éloignement respectif des molécules matérielles que nous considérons; 2° nous ne considérerons de ces droites que de très-petites longueurs, comparativement à la distance du centre de la terre où elles tendent à se rencontrer.

97. La résultante des gravités de toutes les molécules d'un corps est la pesanteur de ce corps; et comme les directions des gravités des molécules sont parallèles, il s'ensuit que la pesanteur ou la gravité d'un corps est la somme des gravités de toutes ses molécules. Cette somme des pesanteurs des molécules d'un corps est aussi ce qu'on appelle le poids de ce corps.

98. Comme les gravités de toutes les molécules d'un corps sont égales, le poids d'un corps est proportionnel au nombre de ses molécules; mais il en est de même de sa masse; d'où il suit que ces deux choses seront toujours exprimées par les mêmes nombres; par conséquent, quand il s'agira de la masse d'un corps, nous pourrons la désigner par son poids, et réciproquement l'un par l'autre.

99. Puisque les directions des pesanteurs des molécules sont parallèles, il existe dans l'intérieur d'un corps un point qui est le centre de ces forces parallèles (n° 48), et ce point est ce qu'on appelle le centre de gravité du corps.

Si l'on suspend un corps par un fil, ce fil sera tendu suivant une ligne droite verticale qui passera par le centre de gravité du corps, quelle que soit la position qu'on donne à ce dernier par rapport à la direction du fil. La tension de ce fil sera égale et directement opposée au poids du corps. Tout cela est une suite immédiate des principes des forces parallèles.

On conçoit qu'une force égale au poids du corps, qui serait dirigée dans le même sens, suivant la même droite, produirait sur le fil la même tension que le poids du corps; d'où il suit qu'on peut faire abstraction du volume du corps pour ne considérer que son poids suspendu à son centre de gravité, qui est le point d'application de la force qui produirait le même effet.

400. Le poids d'un corps s'obtient en multipliant son volume par le poids de l'unité de volume de la même matière que ce corps. Ainsi  $p$  étant le poids de cette unité, et  $v$  le volume du corps en question, son poids  $P$  sera donné par

$$P = vp.$$

La quantité représentée par  $p$  est ce qu'on appelle la pesanteur spécifique du corps; on l'obtient en divisant le poids du corps par le poids d'un pareil volume d'eau distillée, et soumise à la température moyenne de l'année, qui est d'environ 18 degrés centigrades.

Nous reviendrons sur les pesanteurs spécifiques des corps.

Ces préliminaires étant posés, passons à la recherche des centres de gravité des lignes, des surfaces et des corps.

101. *Le centre de gravité d'une ligne droite chargée uniformément de poids égaux est au milieu de sa longueur.*

En effet, cette droite est dans le même cas que si elle était soumise à l'action d'une infinité de forces parallèles, égales, uniformément distribuées sur la longueur de la droite, et agissant toutes dans le même sens. Par conséquent (n° 35) le point d'application de la résultante de toutes ces forces, ou, en d'autres termes, le centre de gravité de la droite est au milieu de sa longueur.

102. *Si une droite AB (fig. 39) divise en deux parties symétriques la figure quelconque ABCD, cette droite AB contiendra le centre de gravité de cette figure, tant de sa superficie que de son contour, uniformément chargés l'un et l'autre.*

En effet, si l'on mène une infinité de parallèles  $ab$ ,  $cd$ ... infiniment près les unes des autres, et dans la direction qui leur convient pour être divisées en deux parties égales par la droite AB, on pourra regarder ces droites comme étant les élémens de la figure, pour le cas de la superficie, et par conséquent comme des droites uniformément chargées dans toutes leurs longueurs. Dans le cas du contour, les extrémités de ces droites seront les points élémentaires de ce contour, et seront également pesans deux à deux.

Cela posé, il est facile de voir que les centres de gravité de toutes ces droites sont au milieu de leurs longueurs, tant pour le cas de la superficie que pour celui du contour. Or, la droite AB passe par les milieux de toutes ces droites  $ab$ ,  $cd$ ...; donc elle contient leurs centres de gravité. Cette droite AB pourra donc être regardée comme étant le lieu des points d'application d'une infinité de forces parallèles, agissant dans le même sens, et respectivement égales aux poids des doubles ordonnées de la figure en question, pour le cas de la superficie, et à la somme des poids des élémens du contour situés sur les extrémités de ces doubles ordonnées, dans l'autre cas. De là, il s'ensuit que le point d'application de la résultante de toutes ces forces, qui est évidemment le centre de gravité de la figure, est sur la droite AB.

103. Il suit de là que si une figure plane peut être divisée en deux parties égales par deux différentes droites qui se coupent, le point d'intersection de ces deux droites sera le centre de gravité de la figure, tant pour sa superficie que pour son contour; car, d'après ce qui vient d'être démontré, ce centre doit se trouver à la fois sur ces deux droites, puisque chacune d'elles divise la figure en deux parties symétriques.

104. De là résulte que le centre de gravité d'un polygone régulier, d'un parallélogramme quelconque, d'un cercle, d'une ellipse, et de toute autre figure à centre et uniformément chargée dans toute son étendue, est le centre même de figure, tant pour la superficie que pour le contour.

105. *Cherchons maintenant le centre de gravité du périmètre ou contour d'un polygone quelconque ABCDE (fig. 40), supposé uniformément chargé dans tous ses points.*

Nous chercherons d'abord le milieu de chaque côté du polygone qui sera son centre de gravité. Soient  $a, b, c, d, e$  ces centres ; cela posé, nous joindrons par la droite  $ab$  les centres de gravité  $a, b$  des deux côtés contigus AB, BC. Nous supposerons suspendus, aux points  $a, b$ , des poids respectivement égaux à ceux des côtés AB, BC, qui seront des forces parallèles agissant dans le même sens, aux extrémités  $a, b$  de la droite  $ab$ . Comme les poids des côtés AB, BC sont proportionnels à leurs longueurs, nous diviserons la droite  $ab$ , en deux segmens  $af, fb$ , réciproquement proportionnels aux longueurs AB, BC, et le point  $f$  sera le centre de gravité du système des deux premiers côtés AB, BC (n° 38). Par la droite  $fc$ , nous joindrons le point  $f$  et le point  $c$ , et nous diviserons cette droite  $fc$  en deux segmens  $fg, gc$  réciproquement proportionnels aux longueurs AB + BC et CD, et le point  $g$  sera le centre de gravité du système des trois côtés AB, BC, CD. Par la droite  $dg$ , nous joindrons les points  $g$  et  $d$ , et nous diviserons cette droite  $dg$  en deux parties  $gh, hd$ , réciproquement proportionnelles aux longueurs AB + BC + CD et DE, et le point  $h$  sera le centre de gravité du système des quatre côtés AB, BC, CD, DE. Enfin, nous joindrons les points  $h$  et  $e$  par la droite  $he$ , que nous diviserons en deux parties  $hG, Ge$ , réciproquement proportionnelles aux longueurs AB + BC + CD + DE et EA, et le point G sera le centre de gravité demandé.

106. Par la théorie des moments, on parviendrait, d'une manière plus commode pour le calcul, à la détermination du centre de gravité G du contour d'un polygone quelconque  $abcde$  (fig. 41).

En effet, rapportons les moments des côtés de ce polygone à une première droite quelconque AB; pour cela, par les milieux ou les centres de gravité  $f, g, h, i, k$  de ces côtés, abaissons les perpendiculaires  $fo, gp, hn, im, kl$ , qui seront les bras de levier des côtés  $ea, ab, bc, cd, de$ , et multiplions respectivement ces bras de levier par les côtés du polygone auxquels ils appartiennent, nous aurons, pour la somme des moments de ces derniers,  $ax' + bx'' + cx''' + dx^{iv} + ex^v$ , en appelant  $a, b, c, d, e$  les côtés, et  $x', x'', x''', x^{iv}, x^v$ , leurs bras de levier  $fo, gp$ , etc. La résultante des poids des côtés du polygone sera égale à leur somme  $a + b + c + d + e$ ; appelons  $x$  la distance nG à l'axe AB, du point G d'application de cette résultante ou du centre de gravité demandé, et nous aurons (n° 84)

$$x(a+b+c+d+e) = ax' + bx'' + cx''' + dx^{iv} + ex^v;$$

$$\text{d'où} \quad x = nG = \frac{ax' + bx'' + cx''' + dx^{iv} + ex^v}{a+b+c+d+e} \dots (26)$$

En rapportant ensuite les moments des mêmes côtés à une seconde droite AC, faisant un angle quelconque avec la première AB, et appelant  $y', y'', y''', y^{iv}, y^v$  les distances  $fr, gt, hu, is, kq$  des centres de gravité des côtés  $a, b, c, \dots$  du poly-

gone, et  $y$  le bras de levier  $tG$  de la résultante des poids de ces côtés, nous aurons

$$y(a+b+c+d+e) = ay' + by'' + cy''' + dy^{iv} + ey^v;$$

d'où 
$$y = tG = \frac{ay' + by'' + cy''' + dy^{iv} + ey^v}{a+b+c+d+e} \dots (27)$$

En menant aux droites  $AB, AC$  des parallèles  $tG, nG$ , aux distances  $nG, tG$  calculées d'après les formules (26) et (27), ces droites  $tG, nG$  se couperont en un point  $G$  qui sera le centre de gravité demandé.

107. *Proposons-nous maintenant de trouver le centre de gravité de l'aire d'un triangle rectiligne quelconque  $ABC$  (fig. 42) uniformément chargée de poids égaux.*

Pour y parvenir, on supposera que le triangle donné est décomposé en éléments infiniment étroits, parallèles au côté  $AB$ ; ces éléments pourront être regardés comme des lignes droites matérielles; les centres de gravité individuels de ces droites seront leurs milieux. Mais si par le milieu du côté  $AB$  on mène la droite  $DC$  au sommet opposé  $C$  du triangle, cette droite  $DC$  divisera en deux parties égales toutes les parallèles à  $AB$ ; elle contiendra donc les centres de gravité de ces dernières, et par conséquent aussi celui du triangle. Si l'on avait décomposé le triangle en éléments parallèles au côté  $AC$ , la droite  $EB$ , menée du sommet  $B$  au milieu du côté  $AC$ , diviserait ces nouveaux éléments en deux parties égales; cette droite  $EB$  contiendrait donc aussi le centre de gravité du triangle; d'où il suit que ce centre est le point  $G$  où les droites  $CD, EB$  se coupent.

108. *Il résulte de là que le centre de gravité d'un triangle rectiligne quelconque est situé sur une droite menée par un sommet au milieu du côté opposé, à une distance de ce sommet égale aux deux tiers de la sécante.*

En effet, menons la droite  $DE$  (fig. 42) après avoir mené les deux droites  $CD, BE$ , par les sommets  $C, B$ , et les milieux des côtés  $AB, AC$ : les points  $D, E$  étant les milieux des côtés  $AB, AC$ , la droite  $DE$  sera parallèle à  $BC$ ; d'où il suit que les triangles  $DGE, CGB$  sont semblables et donnent

$$BC : DE :: CG : DG.$$

Mais  $BC$  est double de  $DE$ , comme  $AB$  est double de  $AD$ ; donc aussi  $CG$  est double de  $DG$ , ce qui donne  $DG = \frac{1}{2}CG$ ; mais  $CD = CG + DG$ ; ou en substituant

$$CD = CG + \frac{1}{2}CG = \frac{2CG}{2} + \frac{CG}{2} = \frac{3CG}{2},$$

ce qui donne enfin  $CG = \frac{2}{3}DC$ , comme il fallait le démontrer.

109. *Supposons que le triangle  $FHN$  (fig. 43) soit la projection, sur un plan donné  $abcd$ , d'un triangle rectiligne quelconque  $ABC$ , situé comme on voudra*

dans l'espace ; je dis que si  $G$  est le centre de gravité du triangle donné, la projetante  $GM$  de ce centre de gravité sera égale au tiers de la somme des projetantes des trois sommets : c'est-à-dire que

$$GM = \frac{AF + CN + BH}{3}.$$

En effet le point  $D$  étant le milieu de  $BC$ , on aura d'abord

$$DL = \frac{CN + BH}{2} \dots (a)$$

Ensuite, par le point  $A$ , menons la droite  $AI$  parallèle à  $FL$ , nous aurons

$$DI \text{ ou } DL - LI : GK \text{ ou } GM - KM :: AD : AG :: 3 : 2 ;$$

d'où nous tirerons  $2(DL - LI) = 3(GM - KM)$ ,

ou  $2DL - 2AF = 3GM - 3AF$  ;

en mettant pour  $LI$  et pour  $KM$  leur égale  $AF$ .

d'où 
$$DL = \frac{3GM - AF}{2}.$$

En comparant cette valeur de  $DL$  à celle donnée par l'équation (a) nous aurons 
$$\frac{CN + BH}{2} = \frac{3GM - AF}{2} \text{ ou } CN + BH = 3GM - AF,$$

ce qui donnera enfin 
$$GM = \frac{CN + BH + AF}{3}, \dots (28)$$

comme il fallait le démontrer.

Si le plan du triangle  $ABC$  (fig. 44) était perpendiculaire au plan de projection, sa projection sur ce plan serait une droite  $FH$ , et on aurait encore

$$GM = \frac{AF + CN + BH}{3}.$$

110. Pour avoir le centre de gravité d'un trapèze  $ABCD$  (fig. 45), on le décomposera d'abord en deux triangles  $ABC$ ,  $ACD$  par la diagonale  $AC$  ; par les milieux  $H$ ,  $I$  des bases parallèles  $AB$ ,  $CD$ , on mènera les droites  $CH$ ,  $AI$  aux sommets opposés  $C$ ,  $A$  ; sur ces droites, on marquera les centres de gravité  $F$ ,  $E$  des deux triangles (n° 108) ; on joindra ces deux centres par la droite  $EF$ , sur laquelle sera le centre de gravité du trapèze ; mais il est évident que ce même centre sera aussi sur la droite  $HI$  qui joint les milieux des bases parallèles du trapèze ; car cette droite  $HI$  diviserait en deux parties égales les éléments du trapèze parallèles aux bases : le point  $G$  où les deux droites  $EF$ ,  $HI$  se rencontrent sera donc le centre de gravité demandé.

111. La distance  $GM$  du centre de gravité  $G$  du trapèze, par rapport à la grande base, a pour expression,

$$GM = \frac{MN}{3} \times \frac{2CD + AB}{AB + DC} \dots (29)$$

En effet, soient E, F les centres de gravité des triangles ACD, ACB qui composent le trapèze, nous aurons (n° 109)

$$KE = \frac{2MN}{3} \quad \text{et} \quad FL = \frac{MN}{3} \dots\dots (a)$$

D'ailleurs on peut supposer aux deux points E et F deux forces parallèles agissant dans le même sens, et respectivement égales aux poids des triangles ACD, ACB, qui sont proportionnels à leur superficie, lesquelles sont elles-mêmes proportionnelles aux bases comme ayant même hauteur : ainsi, la force appliquée au point E sera représentée par la droite DC, et celle appliquée au point F par la droite AB. On aura les moments de ces forces en multipliant ces droites DC, AB, par les bras de levier donnés par les formules (a); la somme de ces moments sera

$$\text{donc} \quad DC \times \frac{2MN}{3} + AB \times \frac{MN}{3} = \frac{MN}{3} \times (2DC + AB) \dots\dots (b)$$

La résultante de ces deux forces sera égale à leur somme AB+DC, qui, multipliée par la distance MG du centre de gravité du trapèze, qui est le point d'application de cette résultante, donnera le moment résultant qu'on égalera au second membre de l'équation (b), et on aura

$$(AB + DC) \times MG = \frac{MN}{3} \times (2DC + AB).$$

$$\text{d'où} \quad MG = \frac{MN}{3} \times \frac{2DC + AB}{AB + DC},$$

comme il fallait le démontrer.

112. *Trouver le centre de gravité de l'aire d'un polygone quelconque ABCDE (fig. 46) supposée chargée uniformément.*

Décomposons ce polygone en triangles ABE, EBD et DBC; déterminons les centres de gravité a, b, c de ces triangles (n° 108), et à ces points supposons suspendus des poids proportionnels aux aires de ces mêmes triangles. Cela posé, il est évident que le point g d'application de la résultante de toutes ces forces ou poids sera le centre de gravité du polygone proposé; en combinant donc ces poids deux à deux, comme il a été dit au n° 105, on arrivera de proche en proche à la solution du problème, en prenant, au lieu des côtés du polygone, les aires des triangles qui le composent.

113. On peut résoudre le même problème par la théorie des moments, ainsi qu'il suit :

Prenons pour axes des moments les droites quelconques A'B', A'C' (fig. 47), et par les sommets du polygone ABCDE abaissons, sur les deux axes, les perpendiculaires Am, Bl, Cn, Dp, Eo, et Ad, Bi, Ck, Dh, Ee; les distances des centres de gravité des triangles ABE, EBD, BDC (n° 109) seront respectivement

1° Par rapport à l'axe A'B',

$$\frac{Bl + Am + Eo}{3}, \quad \frac{Bl + Eo + Dp}{3}, \quad \text{et} \quad \frac{Bl + Dp + Cz}{3};$$

2° Par rapport à l'axe A'C',

$$\frac{Bi + Ad + Ee}{3}, \quad \frac{Bi + Ee + Dh}{3}, \quad \text{et} \quad \frac{Bi + Dh + Ck}{3}.$$

Nommons  $\gamma, \gamma'$  et  $\gamma''$ , les premières distances (que l'on calculera arithmétiquement avant tout), et  $x, x'$  et  $x''$  les dernières; représentons par  $S, S', S''$  les aires respectives des triangles ABE, BED et DBC, et les moments de ces triangles seront,

1° Par rapport à l'axe A'B',

$$\gamma S, \quad \gamma' S', \quad \gamma'' S'';$$

2° Par rapport à l'axe A'C',

$$x S, \quad x' S', \quad x'' S''.$$

Soit le point  $g$  le centre de gravité du polygone; abaissons par ce point les perpendiculaires  $gF, gL$  sur les axes des moments (n° 84), nous aurons :

1° Par rapport à l'axe A'B',

$$(S + S' + S'') \times Fg = \gamma S + \gamma' S' + \gamma'' S'',$$

et par conséquent

$$Fg = \frac{\gamma S + \gamma' S' + \gamma'' S''}{S + S' + S''};$$

2° Par rapport à l'axe A'C',

$$(S + S' + S'') \times gL = x S + x' S' + x'' S'',$$

d'où

$$gL = \frac{x S + x' S' + x'' S''}{S + S' + S''}.$$

## LEÇON VI.

Centres de gravité des figures planes terminées par des lignes courbes et des lignes droites.

114. Le centre de gravité  $G$  (fig. 48) d'un arc de cercle quelconque ACB est situé sur le rayon DC qui divise cet arc en deux parties égales, et à une distance DG du centre de l'arc, égale au rayon du cercle multiplié par la corde et divisé par la longueur de l'arc.

En effet, 1° si dans le segment ACB on mène les cordes AC, CB; si par les milieux ou les centres de gravité  $a, b$  de ces droites on mène la droite  $ab$ , comme les deux droites AC, CB sont égales et symétriquement disposées par rapport au rayon CD, le milieu  $c$  de la droite  $ab$  sera le centre de gravité du système de ces deux cordes. Mais les triangles  $DbC$ ,  $CBH$  étant semblables, donnent

$$BC : BH :: Db : Dc = \frac{BH \times Db}{BC} \dots (a)$$

d'où l'on voit que la distance du centre de gravité  $c$  du contour ACB est égale à la demi-corde BH multipliée par le rayon  $Db$  du cercle inscrit, et divisé par la moitié de ce contour.

2° Si dans chacun des segmens CBF, CAE on fait la même construction que dans le segment primitif ACB, les centres de gravité des contours inscrits dans ces nouveaux segmens seront les points  $e$  et  $f$ . Or, ces deux systèmes de cordes sont symétriques par rapport au rayon DC, si donc on mène la droite  $ef$ , le point  $g$  où cette droite coupera ce rayon DC sera le centre de gravité du contour ABCFE. Si nous rapportons la proportion (a) aux deux cordes inscrites dans le segment CFB, nous aurons

$$BF : Bb :: Dk : De \quad \text{ou} \quad 2BF : 2Bb :: Dk : De,$$

ou, à cause que  $2BF = BF + FC$ , et  $2Bb = BC$ ,

nous aurons  $BF + FC : BC :: Dk : De$ .

Mais les deux triangles semblables BCH,  $Deg$  donnent

$$BC : BH :: De : Dg.$$

Si nous multiplions ces deux dernières proportions par ordre, il nous viendra

$$BF + FC : BH :: Dk : Dg = \frac{BH \times Dk}{BF + FC},$$

d'où l'on voit que la distance  $Dg$  du centre D du cercle au centre de gravité  $g$  du contour polygonal AECFB inscrit dans le segment ACB, est encore égale à la demi-corde BH multipliée par le rayon  $Dk$  du cercle inscrit, et divisé par la moitié de ce contour.

Il est facile de voir que si l'on doublait successivement le nombre des côtés du contour polygonal un nombre quelconque de fois, la proposition subsisterait toujours; elle aurait donc encore lieu lorsque le nombre des côtés de ce contour polygonal étant infini, il coïnciderait avec l'arc de cercle; mais alors le rayon

du cercle inscrit serait le rayon de l'arc donné ; si donc G est le centre de gravité de l'arc ACB, on aura

$$DG = \frac{\text{demi-corde BH} \times DC}{\text{arc BC}} = \frac{\text{corde AB} \times DC}{\text{arc ACB}},$$

comme il fallait le démontrer.

115. Nommons C la corde AB, R le rayon DC, et A l'arc ACB, nous aurons

$$(*) \quad DG = \frac{RC}{A} \dots (30).$$

116. Le centre de gravité  $g'$  (fig. 49) d'un secteur circulaire DACB est situé sur le rayon DC qui divise le secteur en deux parties égales, et à une distance  $Dg'$  du centre de l'arc AB, qui est  $Dg' = \frac{2}{3} \cdot \frac{C \cdot R}{A}$ , C étant la corde et A l'arc du secteur.

En effet, on peut supposer le secteur donné ADB divisé en une infinité d'autres secteurs infiniment petits, qui peuvent être regardés comme des triangles isocèles ; par conséquent les centres de gravité (n° 108) des éléments du secteur seront situés sur l'arc de cercle EF décrit du centre D avec un rayon  $DE = \frac{2DA}{3}$ .

Cet arc EF peut donc être considéré comme étant uniformément chargé par les poids des éléments du secteur proposé ; le centre de gravité de cet arc sera donc le même que celui de ce secteur : si donc  $g'$  est ce centre de gravité (n° 114), nous

$$\text{aurons} \quad Dg' = \frac{\text{cord. EF} \times DE}{\text{arc EF}} \dots (a)$$

(\*) Cette formule, qui est facile à construire avec la règle et le compas, peut se mettre sous une autre forme que voici :

Nommons  $m$  le nombre des degrés de l'arc ACB (fig. 48) ; l'angle CDB =  $\frac{1}{2}m$ , et le triangle rectangle DHB donnera

$$1 : \sin. \frac{1}{2}m :: DB \text{ ou } R : BH \text{ ou } \frac{1}{2}C.$$

De là nous tirerons

$$C = 2R \sin. \frac{1}{2}m \dots (a)$$

Nous aurons d'ailleurs  $ACB = A = \frac{2pRm}{360}$  ; si donc nous substituons au lieu de C et de A leurs

valeurs dans l'équation  $DG = \frac{CR}{A}$ , il nous viendra

$$DG = \frac{2R^2 \sin. \frac{1}{2}m \times 360}{2pRm} = \frac{360 R \sin. \frac{1}{2}m}{pm} \dots (b)$$

Cette formule fera connaître promptement par le calcul la distance du centre de gravité de l'arc au centre de cet arc. Si l'on donnait l'arc par la corde, on déterminerait d'abord le nombre des degrés de cet arc par la formule (a), et on le substituerait dans la formule (b), qui donnerait le centre de gravité.

Mais

$$DE = \frac{2AD}{3} = \frac{2R}{3}, \text{ donc}$$

$$\text{cord. EF} = \frac{2 \text{ cord. AB}}{3} = \frac{2C}{3}, \text{ et arc EF} = \frac{2 \text{ arc AB}}{3} = \frac{2A}{3};$$

en substituant dans l'équation (a), il viendra

$$Dg' = \frac{\frac{2}{3}C \times \frac{2}{3}R}{\frac{2}{3}A} = \frac{2}{3} \cdot \frac{CR}{A} (*) \dots (31),$$

comme il fallait le démontrer.

117. *Le moment d'un secteur circulaire ADBC (fig. 49) par rapport au centre D de l'arc du secteur est égal au tiers de la corde multipliée par le carré du rayon.*

En effet, l'aire du secteur (Géo., pl. n° 237) est  $\frac{AR}{2}$ ; et son bras de levier (n° 116) est  $\frac{2CR}{3A}$ ; le moment sera donc

$$\text{mom. sect. circ.} = \frac{2CR}{3A} \times \frac{AR}{2} = \frac{CR^2}{3} \dots (32),$$

comme il fallait le démontrer (\*\*).

118. *Le centre de gravité m d'un segment de cercle ACB (fig. 49) est situé sur le rayon DC qui divise le segment en deux parties égales, et à une distance Dm du centre D du cercle, égale au cube de la corde divisé par 12 fois l'aire du segment; de sorte que  $Dm = \frac{C^3}{12S}$ , S étant l'aire du segment.*

En effet, le segment ACB étant égal au secteur DACB, moins le triangle ABD, son moment, par rapport au centre D de l'arc ACB, sera celui du secteur moins celui du triangle; le moment de ce dernier est

$$\frac{AB \times DE'}{2} \times \frac{2 DE'}{3} = \frac{C \times (DE')^2}{3} \dots (a)$$

Or, le triangle rectangle DE' B donne  $(DE')^2 = R^2 - (\frac{1}{2}AB)^2 = R^2 - \frac{1}{4}C^2$ ; par conséquent

(\*) Si l'on voulait la formule trigonométrique qui donne cette distance Dg', il suffirait de multiplier par  $\frac{2}{3}$  l'équation (b) de la note (\*, page 41), ce qui donnerait

$$Dg' = \frac{240 R \sin. \frac{1}{3} m}{pm} \dots (c)$$

(\*\*) Si dans cette formule nous mettons pour C sa valeur  $2 R \sin \frac{1}{2} m$  (note \*, page 42), il nous viendra

$$\text{mom. sect. circ.} = \frac{2R^3 \sin. \frac{1}{2} m}{3} \dots (d)$$

$$\text{moment du triangle} = \frac{C(R^2 - \frac{1}{4}C^2)}{3} = \frac{CR^2 - \frac{1}{4}C^3}{3};$$

mais (n° 117) le moment du secteur est  $\frac{CR^2}{3}$ ; si de ce dernier nous retranchons celui du triangle, il nous viendra

$$\frac{CR^2}{3} - \frac{CR^2 - \frac{1}{4}C^3}{3} = \frac{C^3}{12};$$

par conséquent, mom. seg. ACB =  $\frac{C^3}{12}$ .

Mais le moment de ce segment égale  $Dm \times \text{aire ACB} = S \times Dm$ ;

donc  $S \times Dm = \frac{C^3}{12}$ ,

et par conséquent  $Dm = \frac{C^3}{12S} \dots (33)$ ,

comme il fallait le démontrer (\*).

119. La distance de la projection du centre de gravité du demi-secteur DCA (fig. 49) sur le rayon DC, par rapport au centre D, est la même que celle du centre de gravité du secteur entier ADB. Quant à son moment, par rapport à un axe mené par le centre D perpendiculaire au rayon DC, il est la moitié de celui de ce dernier. Or, celui-ci égale  $\frac{CR^2}{3}$ ;

donc mom. sect. DCA =  $\frac{CR^2}{6} = \frac{AE' \times R^2}{3}$ ,

AE' étant la moitié de C = AB.

120. De même, la distance de la projection sur le rayon CD du centre de gravité du demi-segment AE'C (fig. 49), par rapport au centre D, est la même que celle du centre de gravité du segment entier ACB. Quant à son moment, par rapport à l'axe mené par le centre D perpendiculaire au rayon DC, il est la moitié de celui de ce dernier; or, celui-ci égale  $\frac{C^3}{12}$  (n° 118); donc

(\*) Pour avoir l'aire S du segment de cercle ABC, on observera que le triangle rectangle AE'D, (fig. 49) donne

$$AE' = R \sin. \frac{1}{2}m \text{ et } DE' = R \cos. \frac{1}{2}m; \text{ on aura donc}$$

$$\text{triang. ABD} = R^2 \sin. \frac{1}{2}m \cos. \frac{1}{2}m = \frac{R^2 \sin. m}{2} \text{ (Géo. pl. n° 383); mais le secteur DACB} = \frac{mpR^2}{360}, \text{ donc seg. S} = \frac{mpR}{360} - \frac{R^2 \sin. m}{2} = \frac{R^2 (mp - 180 \sin. m)}{360} \dots (e).$$

$$\text{mom. seg. ACE}' = \frac{C^3}{24} \dots\dots (a)$$

Si au lieu de la corde entière AB nous ne prenons que la moitié AE' = c, nous aurions 2c = C, et 8c³ = C³. En substituant cette valeur de C³ dans l'équation (a), il nous viendrait

$$\text{mom. seg. AE}'C = \frac{8c^3}{24} = \frac{c^3}{3} \dots\dots (34).$$

121. Supposons qu'on nous demande la distance du centre de gravité du demi-secteur ADC par rapport au rayon DC (fig. 49).

Pour cela, observons que le centre de gravité du secteur ACD est sur la droite g'n menée perpendiculairement au rayon DC, par le centre de gravité g' du secteur double ABD, et en même temps sur le rayon Dg qui divise l'arc AC en deux parties égales; la distance demandée sera donc le côté g'n de l'angle droit du triangle rectangle Dg'n; nous aurons donc

$$1 : \text{tang. CDg} :: Dg' : g'n.$$

ou, en observant que CDg = ½CDA = ½m (m étant le nombre des degrés de l'arc AC),

$$1 : \text{tang. } \frac{1}{2}m :: Dg' : g'n = Dg' \times \text{tang. } \frac{1}{2}m.$$

Mais (n° 116)  $Dg' = \frac{2AB \times R}{3A}$ ; donc  $g'n = \frac{2AB \times R}{3A} \times \text{tang. } \frac{1}{2}m$ .

Observons que AB = 2AE', A = ACB = 2AC, et nous aurons

$$g'n = \frac{2}{3} \cdot \frac{2AE' \times R}{2AC} \times \text{tang. } \frac{1}{2}m = \frac{2AE' \times R}{3AC} \times \text{tang. } \frac{1}{2}m = \frac{2CR}{3A} \times \text{tang. } \frac{1}{2}m \dots (35),$$

(\*) en supposant C = AE', et A = l'arc AC.

122. L'aire de ce secteur est  $\frac{AR}{2}$ ; si nous la multiplions par le bras de levier g'n ci-dessus, nous aurons (par rapport à l'axe CD) (\*\*),

$$\text{mom. sect. ADC} = \frac{CR^2}{3} \times \text{tang. } \frac{1}{2}m \dots\dots (36).$$

(\*) Si dans cette expression nous mettons R sin. m, au lieu de C, et  $\frac{2mpR}{360}$  au lieu de l'arc A, nous viendra

$$g'n = \frac{360 R^2 \sin. m \text{ tang. } \frac{1}{2}m}{3 \cdot 2mpR} = \frac{360 R \sin. m \text{ tang. } \frac{1}{2}m}{3mp} \dots\dots (f)$$

(\*\*) En mettant pour C sa valeur R sin. m, dans l'équation (36), on aura

$$\text{mom. sect. ADC} = \frac{R^3 \sin. m \text{ tang. } \frac{1}{2}m}{3} \dots\dots (g)$$

## Centres de gravité des figures elliptiques.

123. Supposons que sur l'un quelconque  $AB$  (fig. 50) des axes d'un ellipse  $AcBd$  on ait décrit un cercle  $ACBD$ , et que, perpendiculairement à l'axe qui sert de diamètre au cercle, on ait mené la corde  $MN$ , à cette droite répondront le segment circulaire  $MBN$ , et le segment elliptique  $mBn$ , qui auront le même centre de gravité.

En effet, si, parallèlement à la corde  $MN$ , on divise les deux segmens en un même nombre d'éléments infiniment étroits, il est évident que les centres de gravité des éléments de ces deux segmens seront situés sur la flèche commune  $PB$  à ces deux segmens. Cette flèche pourra donc être regardée comme le lieu des points d'application de deux systèmes de chacun une infinité de forces parallèles, celles du premier système étant respectivement égales aux éléments du segment de cercle, et celles du second aux éléments du segment d'ellipse. Or (*Géom.*, pl. n° 559), les éléments du segment de cercle sont aux éléments du segment d'ellipse, comme l'axe de l'ellipse qui sert de diamètre au cercle est à l'autre; ainsi, passer du segment de cercle au segment d'ellipse, c'est, à des forces données, substituer, aux mêmes points d'application, d'autres forces proportionnelles; par conséquent, le point d'application de la résultante des premières sera le même que celui de la résultante des dernières, c'est-à-dire, en d'autres termes, les deux segmens auront le même centre de gravité.

124. La distance du centre  $I$  de l'ellipse au centre de gravité du segment circulaire  $MBN$  (n° 118) étant  $\frac{(MN)^3}{12 \text{ aire } MBN}$ , en nommant  $g$  cette distance, on aura

$$g = \frac{(MN)^3}{12 \text{ aire } MBN}$$

pour la distance du centre de l'ellipse au centre de gravité d'un segment elliptique divisé en deux parties égales par le demi-axe représenté par  $a$  qui sera indifféremment le grand ou le petit demi-axe.

125. Le centre de gravité d'un secteur elliptique  $IeBh$  (fig. 50), divisé en deux parties égales par un axe, est le même que celui du secteur circulaire correspondant  $IEBH$ .

En effet, il vient d'être démontré que deux segmens correspondans  $EBH$ ,  $eBh$ , l'un circulaire et l'autre elliptique, avaient le même centre de gravité; or, il est facile de voir qu'il en sera de même pour les triangles  $IEH$ ,  $Ieh$ , puisqu'ils ont leurs sommets au même point  $I$ , et leurs bases sur la même droite, divisées toutes les deux en deux parties égales par l'axe  $AB$ . D'ailleurs ces deux triangles sont entre eux comme les segmens; les deux secteurs auront donc le même centre de gravité.

126. Nous avons trouvé (n° 116) que la distance du centre de gravité d'un secteur circulaire était  $\frac{2}{3} \cdot \frac{CR}{A}$ ;

C étant la corde EH, et R le rayon du cercle, qui est ici le demi-axe  $a$ , et A l'arc EBH du secteur ; pour le secteur elliptique, on aura donc de même

$$g = \frac{2}{3} \times \frac{EH \times a}{EBH}. (*)$$

(\*) Comme l'angle EIH (fig. 50) n'est pas celui eIh du secteur elliptique, l'expression ci-dessus, ou son équivalente,  $\frac{240 a \sin. \frac{1}{2} m}{mp}$  (note \*, page 43) ne donnerait pas immédiatement la distance du centre I de l'ellipse au centre de gravité du secteur elliptique, on pourrait désirer d'avoir cette distance, indépendamment du cercle.

Pour cela, on nommera  $\alpha$  le nombre de degrés de l'angle eIB, et on observera que,

1° Le triangle rectangle IEK donne  $1 : \text{tang. } \frac{1}{2} m :: IK : KE$ .

2° Le triangle rectangle IeK donne  $1 : \text{tang. } \alpha :: IK : Ke$

d'où  $\text{tang. } \frac{1}{2} m : \text{tang. } \alpha :: KE : Ke$ ; mais  $KE : Ke :: a : b$

donc  $\text{tang. } \frac{1}{2} m : \text{tang. } \alpha :: a : b$ ,  
d'où on tirera  $\text{tang. } \frac{1}{2} m = \frac{a \text{ tang. } \alpha}{b}, \dots\dots (1)$

Mais  $\text{tang. } \frac{1}{2} m = \frac{\sin. \frac{1}{2} m}{\cos. \frac{1}{2} m} = \frac{\sin. \frac{1}{2} m}{\sqrt{1 - \sin.^2 \frac{1}{2} m}}$

donc  $\frac{\sin. \frac{1}{2} m}{\sqrt{1 - \sin.^2 \frac{1}{2} m}} = \frac{a}{b} \cdot \text{tang. } \alpha$

en élevant au carré  $\frac{\sin.^2 \frac{1}{2} m}{1 - \sin.^2 \frac{1}{2} m} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \text{tang.}^2 \alpha$

ou  $\sin.^2 \frac{1}{2} m = \frac{a^2}{b^2} \text{tang.}^2 \alpha (1 - \sin.^2 \frac{1}{2} m)$

d'où  $\sin.^2 \frac{1}{2} m = \frac{a^2 \text{tang.}^2 \alpha}{b^2 + a^2 \text{tang.}^2 \alpha}$

et par conséquent

$$\sin. \frac{1}{2} m = \frac{a \text{ tang. } \alpha}{\sqrt{b^2 + a^2 \text{tang.}^2 \alpha}} \dots (2)$$

L'équation (1) ci-dessus nous fait voir que

$$\frac{1}{2} m = \text{arc. dont la tang.} = \frac{a \text{ tang. } \alpha}{b}$$

ce qu'on exprime ainsi :  $\frac{1}{2} m = \text{arc. (tang.} = \frac{a \text{ tang. } \alpha}{b}) \dots (3)$

en substituant, dans l'expression  $\frac{240 a \sin. \frac{1}{2} m}{mp}$ , à la place de  $\sin. \frac{1}{2} m$ , et  $m$  leurs valeurs (2) et (3), nous aurons

127. Le moment du secteur elliptique  $IeBh$  divisé en deux parties égales par un demi-axe, est, par rapport au centre  $I$ , égal au tiers de la corde multiplié par le carré du demi-axe qui divise le secteur en deux parties égales.

En effet, nous avons

$$\text{sect. circul. } IEBH : \text{sect. ellip. } IeBh :: a : b ;$$

$$\text{ou} \quad \frac{\text{arc. } EBH \times a}{2} : \text{sect. ellip. } IeBh :: a : b ;$$

$$\text{d'où} \quad \text{sect. ellip.} = \frac{b \times \text{arc. } EBH}{2} = \frac{bA}{2} \dots (37).$$

Si nous multiplions cette aire par la distance  $g$  (n° 126) du centre  $I$  au centre de gravité du secteur  $IeBh$ , il en résultera

$$\text{mom. sect. } IeBh = \frac{2}{3} \times \frac{a \times EH}{EBH} \times \frac{b \times EBH}{2} = \frac{ab \times EH}{3} \dots (a).$$

$$\text{Mais} \quad b : a :: eh : EH = \frac{a \times eh}{b} \dots (38)$$

Si donc nous substituons cette valeur de  $EH$  dans l'équation (a),

$$\text{nous aurons} \quad \text{mom. sect. ellip. } IeBh = \frac{a^2 \times eh}{3} \dots (38)$$

comme il fallait le démontrer.

128. Le moment du secteur elliptique  $IeB$  par rapport à l'axe  $cd$  (fig. 50) est la moitié de celui du secteur double  $IeBh$ ; car les deux moitiés de ce dernier sont symétriquement situées par rapport à l'axe  $AB$ , et ont tous leurs points homologues situés à la même distance de l'axe  $cd$ ; or le moment du secteur  $IeBh = \frac{a^2 \times eh}{3}$ ; donc

$$\text{moment sect. } IeB = \frac{a^2 \times eK}{3},$$

$eK$  étant la moitié de  $eh$ .

129. Cherchons maintenant le moment du secteur  $IeB$  (fig. 50) par rapport à l'axe  $IB$ .

$$g = \frac{120 a^3 \text{ tang. } \alpha}{\text{arc} \left( \text{tang} = \frac{a \text{ tang. } \alpha}{b} \right) \times p \sqrt{b^2 + a^2 \text{ tang.}^2 \alpha} \dots (h)$$

en appelant  $g$  la distance du centre  $I$  de l'ellipse au centre de gravité du secteur elliptique  $IeBh$ . On pourrait rendre indépendant du cercle tout ce qui est relatif au centre de gravité de l'ellipse; mais pour abrégé, et comme il est facile d'obtenir les mêmes choses en les comparant au cercle, nous laisserons les formules suivantes rapportées à ce dernier.

Pour y parvenir, comparons ce secteur au secteur circulaire correspondant IEB ; si nous décomposons les deux secteurs en élémens perpendiculaires à l'axe AB, les élémens de ces deux secteurs seront proportionnels aux demi-axes ; ces élémens infiniment étroits pourront être regardés comme des trapèzes, les centres de gravité de ceux composant le secteur circulaire seront situés à des distances de l'axe IB égales à la moitié de la longueur de chaque élément, et pour le secteur elliptique il en sera de même ; les distances des centres de gravité des élémens du secteur circulaire seront aux distances des centres de gravité des élémens correspondans du secteur elliptique, comme le demi-axe qui sert de rayon au cercle est à l'autre demi-axe ; il en sera donc de même pour IĒs centres de gravité des secteurs eux-mêmes : ainsi G étant la distance du centre de gravité du secteur circulaire IEB, et g celle du centre de gravité du secteur elliptique IeB, on aura

$$G : g :: a : b.$$

Mais  $\text{sec. IEB} : \text{sect. IeB} :: a : b ;$

Donc  $G \times \text{sect. IEB} : g \times \text{sect. IeB} :: a^2 : b^2.$

c'est-à-dire  $\text{mom. sect. IEB} : \text{mom. sect. IeB} :: a^2 : b^2.$

Par conséquent  $\text{mom. sect. IeB} = \frac{b^2}{a^2} \times \text{mom. sect. IEB}.$

Mais (n° 122)  $\text{mom. sect. IEB} = \frac{Ca^2}{3} \cdot \text{tang. } \frac{1}{2}m,$

C étant l'ordonnée KE de l'arc BE ; donc

$$\text{mom. sec. IeB} = \frac{b^2 Ca^2}{3a^2} \cdot \text{tang. } \frac{1}{2}m = \frac{Cb^2}{3} \cdot \text{tang. } \frac{1}{2}m \dots (39).$$

130. *Proposons-nous de trouver la distance du centre de gravité du secteur elliptique IBe à l'axe AB (fig. 50).*

Pour cela rappelons-nous que nous avons trouvé au n° 129 que si G était la distance du centre de gravité du secteur circulaire IEB, et g celle du centre de gravité du secteur elliptique IeB, on a

$$a : b :: G : g = \frac{bG}{a},$$

et qu'au n° 124 nous avons trouvé  $G = \frac{2Ca}{3A} \cdot \text{tang. } \frac{1}{2}m,$

ce qui donne  $g = \frac{2bC}{3A} \cdot \text{tang. } \frac{1}{2}m \dots (40)$

## LEÇON VII.

Centres de gravité des figures paraboliques et des surfaces planes quelconques.

131. *Le moment d'un demi-segment de parabole CDB (fig. 151), par rapport à l'axe DC, est égal au quart du paramètre de la parabole multiplié par le carré de la flèche CD.*

Pour le démontrer, décomposons ce demi-segment en éléments parallèles à l'ordonnée DB; les longueurs de ces éléments seront  $y, y', y'', y'''$ , etc. Prenons les largeurs égales et infiniment petites de ces éléments pour unité; les aires de ces éléments seront leurs longueurs  $y, y', y'', y'''$ , etc. Les distances de leurs centres de gravité, par rapport à l'axe CD, seront respectivement  $\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}y', \frac{1}{2}y'', \frac{1}{2}y'''$ , etc. Les momens de ces mêmes éléments seront donc

$\frac{1}{2}y^2, \frac{1}{2}y'^2, \frac{1}{2}y''^2, \frac{1}{2}y'''^2$ , etc. Leur somme, qui est le moment du demi-seg. DCB =  $\frac{1}{2}(y^2 + y'^2 + y''^2 + y'''^2 + \dots)$ .

Mais (Géo., pl. n° 449.)  $y^2 px = ; y'^2 = px'$ , etc. Donc

$$\text{mom. demi-seg. DCB} = \frac{P}{2} (x + x' + x'' + x''' + \dots)$$

Les  $x, x', x''$ , etc., étant les largeurs d'un, de deux, de trois, etc., éléments, seront les nombres naturels depuis 1 jusqu'au nombre d'unité contenue dans la longueur CD, nombre qui sera infini, puisque l'unité est infiniment petite; ainsi, nous aurons

$$\text{mom. du demi-seg. DCB} = \frac{P}{2} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + DC).$$

Or ( $\alpha$ ), la limite de la somme de la suite des nombres, comprise dans cette paranthèse, est  $\frac{(DC)^2}{2}$ ; par conséquent,

$\alpha$ ) Supposons la progression par différence,]

$$a . b . c . \dots . i . k$$

si on en élève tous les termes à la même puissance, on aura

$$a^m . b^m . c^m . \dots . i^m . k^m ;$$

proposons-nous de trouver la somme de cette suite de puissances.

Pour cela, rappelons-nous que nous avons trouvé (alg., n° 152) que la somme de tous les termes d'une progression par différence était

$$S = \frac{(a+k)n}{2} \dots\dots\dots (1)$$

$a$  étant le premier terme,  $k$  le dernier, et  $n$  le nombre des termes. Nous avons vu aussi, au même n° 152 de l'algèbre, que le dernier terme était

$$k = a + d(n-1),$$

$d$  étant la différence des termes.

Mettons cette valeur de  $k$  dans la formule (1), il nous viendra

$$S = \frac{[a+a+d(n-1)]n}{2} = \frac{2an + dn^2 - dn}{2} = \frac{d}{2} \cdot n^2 + \frac{2a-d}{2} \cdot n.$$

Puisque la somme des premières puissances des termes d'une progression par différence est de la forme  $\frac{d}{2} \cdot n^2 + \frac{2a-d}{2} \cdot n$ , concluons, par analogie, avec Thomas Simpson, que la somme des puissance du degré  $m$  sera de la forme

$$Sm = An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + Dn^{m-2} + En^{m-3} \dots\dots + Qn \dots\dots (2).$$

$A, B, C$ , etc., désignant des coefficients indéterminés, et indépendans de  $n$ , et  $Sm$  étant la somme des puissances  $m^{\text{me}}$  des termes de la progression.

Mais la loi qui régit les termes d'une progression par différence est celle-ci :

$$a = a, b = a + d, c = b + d \dots\dots k = i + d;$$

de sorte que la progression peut s'écrire.

Ainsi

$$a \cdot a + d \cdot a + 2d \cdot a + 3d \cdot a + 4d \dots\dots a + d(n-1)$$

en élevant tous les termes à la même puissance, il viendra

$$a^m \cdot (a+d)^m \cdot (a+2d)^m \cdot (a+3d)^m \cdot (a+4d)^m \dots\dots [a+d(n-1)]^m,$$

nous aurons donc

$$An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + Dn^{m-2} + En^{m-3} \dots\dots + Qn = a^m + (a+d)^m + (a+2d)^m \dots\dots + [a+d(n-1)]^m.$$

Supposons que la progression ait un terme de plus, au lieu de  $n$  il faudra mettre  $n+1$  dans cette dernière équation, ce qui donnera

$$A(n+1)^{m+1} + C(n+1)^m + D(n+1)^{m-1} + E(n+1)^{m-2} \dots\dots Q(n+1) = a^m + (a+d)^m + (a+2d)^m + (a+3d)^m \dots\dots + (a+nd)^m.$$

Si de cette dernière équation nous retranchons la précédente, membre à membre, il nous viendra

$$A[(n+1)^{m+1} - n^{m+1}] + B[(n+1)^m - n^m] + C[(n+1)^{m-1} - n^{m-1}] \dots\dots + Q = (a+nd)^m.$$

En développant dans les deux membres de cette dernière équation, et en ordonnant par rapport aux puissances de  $n$ , il en résultera

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{m+1}{1} An^m + \frac{(m+1)^m}{1 \cdot 2} An^{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} An^{m-2} + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} An^{m-3} + \text{etc.} \\
 & \quad \frac{m}{1} Bn^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} Bn^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Bn^{m-3} + \text{etc.} \\
 & \quad \quad + \frac{m-1}{1} Cn^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} Cn^{m-3} + \text{etc.} \\
 & \quad \quad \quad + \frac{m-2}{1} Dn^{m-3} + \text{etc.}
 \end{aligned} \right\} = \\
 d^m n^m + \frac{m}{1} ad^{m-1} n^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 d^{m-2} n^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 d^{m-3} n^{m-3} + \text{etc.}$$

Comme ce dernier résultat doit avoir lieu pour toutes les valeurs de  $n$ , il faut nécessairement que les coefficients des mêmes puissances de cette quantité  $n$  soient égaux de part et d'autre ; nous aurons donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{m+1}{1} A &= d^m \\
 \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} A + \frac{m}{1} B &= \frac{m}{1} ad^{m-1} \\
 \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} B + \frac{m-1}{1} C &= \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} d^{m-2} \\
 \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} A + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} C + \frac{m-2}{1} D &= \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 d^{m-3}
 \end{aligned}$$

On voit, par ces équations de condition, que les coefficients  $A, B, C, D$ , etc., dépendent de la valeur de  $m$  ; cherchons donc les valeurs de ces coefficients pour les cas où  $m$  égale respectivement 1, 2, 3, 4, etc. Les équations de condition précédentes deviendront : pour le cas de  $m = 1$

$$2A = d$$

$$A + B = a$$

d'où l'on tirera  $A = \frac{d}{2}$ , et  $B = a - \frac{d}{2} = \frac{2a-d}{2}$

Substituant dans la formule (2), et nommant  $S_1$  la somme des premières puissances de tous les termes de la progression, il nous viendra

$$S_1 = \frac{d}{2} n_2 + \frac{2a-d}{2} n$$

pour le cas de  $m = 2$ ,

$$\left. \begin{aligned}
 3A &= d^2 \\
 3A + 2B &= 2ad \\
 A + B + C &= a
 \end{aligned} \right\} \text{d'où} \left\{ \begin{aligned}
 A &= \frac{d^2}{3} \\
 B &= \frac{2ad-d^2}{2} \\
 C &= \frac{6a^2-6ad+d^2}{6}
 \end{aligned} \right.$$

appelons  $S_2$  la somme des secondes puissances, et substituons dans la formule (2), il en résultera

$$S_2 = \frac{d^2}{3} n^3 + \frac{2ad-d^2}{2} n^2 + \frac{6a^2-6ad+d^2}{6} n,$$

pour le cas de  $m = 3$ ,

$$4 A = d^3$$

$$6 A + 3B = 3ad^2$$

$$4 A + 3B + 2C = 3a^2d$$

$$A + B + C + D = a^3$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 A = d^3 \\ 6 A + 3B = 3ad^2 \\ 4 A + 3B + 2C = 3a^2d \\ A + B + C + D = a^3 \end{array} \right\} \text{d'où} \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{d^3}{4} \\ B = \frac{2ad^2 + d^3}{2} \\ C = \frac{6a^2d - 6ad^2 + d^3}{4} \\ D = \frac{2a^3 - 6a^2d + 2ad^2 + 2d^3}{4} \end{array} \right.$$

Nommons  $S_3$  la somme des troisièmes puissances, et substituons encore dans la formule (2), nous aurons

$$S_3 = \frac{d^3}{4} n^4 + \frac{2ad^2-d^3}{2} n^3 + \frac{6a^2d-6ad^2+d^3}{4} n^2 + \frac{2a^3-6a^2d+2ad^2+2d^3}{4} n$$

en continuant de même, on trouverait

$$S^4 = \frac{d^4}{5} n^5 + \frac{20 ad^3-3d^4}{20} n^4 + \frac{6 a^2d^2-6 ad^3-11 d}{30} n^3 + \frac{20a^3d-6a^2d^2-34ad^3+7d^4}{20} n^2 + \frac{30 a^4-30 a^3d+3 a^2d^2+27 ad^3-d^4}{30} n.$$

Appliquons ces formules au cas où la progression est la suite naturelle des nombres depuis 1 jusqu'à  $n$ ; dans ce cas  $a = 1$  et  $d = 1$ , et il nous viendra :

$$S_1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$S_2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$S_3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$S_4 = \frac{n^5}{5} + \frac{17 n^4}{20} - \frac{11 n^3}{30} - \frac{13 n^2}{20} + \frac{29 n}{30}$$

Ces expressions peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$S_1 = n^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right)$$

$$S_2 = n^3 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$$

$$S_3 = n^4 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} \right)$$

$$S_4 = n^5 \left( \frac{1}{5} + \frac{17}{20n} - \frac{11}{30n^2} - \frac{13}{20n^3} + \frac{29}{30n^4} \right)$$

$$\text{mom. du demi-seg. DCB} = \frac{p(\text{DC})^3}{4}, \dots (41)$$

comme il fallait le démontrer.

Ce moment peut s'écrire ainsi :

$$\text{mom. du demi-seg. DCB} = \frac{\text{DC} \times (\text{DB})^2}{4}, \dots (42)$$

par la raison que  $p \times \text{DC} = (\text{DB})^2$ , et dispense de connaître le paramètre  $p$ .

132. La distance du centre de gravité du demi-segment parabolique CDB, par rapport au diamètre CD, est égale à  $\frac{3\text{DB}}{8}$ .

En effet (Géo., pl. n°796), l'aire du demi-segment CDB =  $\frac{2\text{DC} \times \text{DB}}{3}$ ; divisons le moment (42) ci-dessus par cette aire; en nommant  $g$  la distance demandée, il

$$\text{nous viendra } g = \frac{\text{DC} \times (\text{DB})^2}{4} \times \frac{3}{2\text{DC} \times \text{DB}} = \frac{3\text{DB}}{8} \dots (43),$$

comme il fallait le démontrer.

133. Cherchons le moment du segment parabolique ACB (fig. 51), par rapport à la double ordonnée AB.

Si l'on suppose que  $n$  représente un nombre infini d'unités, toutes les fractions qui ont  $n$  au dénominateur se réduiront à zéro, et on aura pour les limites des sommes des premières, secondes, troisièmes et quatrièmes puissances de la suite des nombres depuis 1 jusqu'à l'infini,  $n$  étant infini,

$$S_1 = \frac{n}{2}$$

$$S_2 = \frac{n^3}{3}$$

$$S_3 = \frac{n^4}{4}$$

$$S_4 = \frac{n^5}{5}$$

On voit, par analogie, que les limites des sommes des puissances supérieures seront :

$$S_5 = \frac{n^6}{6}$$

$$S_6 = \frac{n^7}{7}$$

$$S_7 = \frac{n^8}{8}$$

etc.

Pour cela, décomposons le demi-segment ACD en éléments parallèles au diamètre DC ; nommons  $x, x', x'', x'''$ , etc., les longueurs successives de ces éléments à partir du point A, et prenons pour unité les largeurs égales et infiniment petites de ces éléments. Les distances des centres de gravité de ces derniers, par rapport à la droite AD, seront respectivement  $\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x', \frac{1}{2}x'', \frac{1}{2}x'''$ , etc., et leurs momens  $\frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}x'^2, \frac{1}{2}x''^2, \frac{1}{2}x'''^2$ , etc.; on aura donc

$$\text{mom. du demi-seg. ADC} = \frac{1}{2}(x^2 + x'^2 + x''^2 + x'''^2, \text{ etc.});$$

et par conséquent

$$\text{mom. seg. ACB} = x^2 + x'^2 + x''^2 + x'''^2 +, \text{ etc.} \dots (a).$$

L'équation de la parabole qui est  $y^2 = px$ , quand l'origine est au sommet C, se change en celle-ci  $y^2 = p(a - x)$ , quand l'origine est en D,  $a$  étant égal à DC. De cette dernière équation, on tire

$$x = \frac{pa - y^2}{p},$$

et par conséquent 
$$x^2 = \frac{(pa - y^2)^2}{p^2}.$$

Substituons dans l'équation (a), et il nous viendra

$$\text{mom. seg. ACB} = \frac{1}{p^2} [(pa - y'^2)^2 + (pa - y''^2)^2 + (pa - y'''^2)^2 \dots]$$

Les  $y, y', y'', \text{ etc.}$ , étant les largeurs d'un, de deux, de trois, etc., éléments, et ces largeurs étant l'unité, nous aurons

$$\text{mom. seg. ACB} = \frac{1}{p^2} [(pa - 1)^2 + (pa - 2^2)^2 + (pa - 3^2)^2 +, \text{ etc.}]$$

Si l'on développe les carrés qui sont dans la grande parenthèse, il viendra

$$\begin{aligned} \text{mom. seg. ACB} = \frac{1}{p^2} (p^2a^2 - 2ap + 1 + p^2a^2 - 8ap + 16 + p^2a^2 - 18ap + 81 \dots \\ + p^2a^2 - 2apb^2 + b^4) \end{aligned}$$

en appelant  $b$  l'ordonnée DA.

En observant que  $p^2a^2$  se trouvera dans le second membre de cette équation autant de fois qu'il y a d'unités dans  $b$ , et rassemblant entre parenthèses les quantités qui ont un facteur commun, on verra que

$$\text{mom. seg. ACB} = \frac{1}{p^2} [p^2a^2b - 2ap(1 + 4 + 9 \dots + b^2) + 1 + 16 + 81 \dots + b^4].$$

Or (note  $\alpha$ ), la limite de  $1 + 4 + 9 \dots + b^2 = \frac{b^3}{3}$ ,

et celle de  $1 + 16 + 81 \dots + b^4 = \frac{b^5}{5}$ ; donc

$$\text{mom. seg. ACB} = \frac{1}{p^2} \left( p^2 a^2 b - \frac{2apb^3}{3} + \frac{b^5}{5} \right).$$

Si, dans cette dernière expression, on fait attention que  $pa = b^2$  et  $p^2 a^2 = b^4$ , en substituant, il en résultera

$$\text{mom. seg. ACB} = \frac{1}{p^2} \left( b^5 - \frac{2b^5}{3} + \frac{b^5}{5} \right) = \frac{b^5}{p^2} \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{b^5}{p^2} \left( \frac{15 - 10 + 3}{15} \right) = \frac{8b^5}{15p^2}.$$

Si dans cette dernière, au lieu de  $b^4$ , nous mettons sa valeur  $p^2 a^2$ , nous aurons enfin

$$\text{mom. seg. ACB} = \frac{8a^2 b}{15} \dots (44).$$

134. Si l'on divise ce moment par l'aire du segment ACB (fig. 51), qui est  $\frac{2}{3} AB \times DC = \frac{2}{3} \times 2ba = \frac{4ab}{3}$ ; en nommant  $g$  la distance du centre de gravité de ce segment, par rapport au point D, on aura

$$g = \frac{8a^2 b}{15} \times \frac{3}{4ab} = \frac{2a}{5} \dots (45).$$

135. Le moment du demi-segment ACD (fig. 51), par rapport à la double ordonnée AB, sera la moitié de celui du segment entier ACB équation (44); de sorte que

$$\text{mom. demi-seg. ADC} = \frac{4a^2 b}{15} \dots (46).$$

136. Supposons qu'on nous demande le moment du segment ACB par rapport au sommet C ou à la tangente FG menée à ce sommet C.

Nous avons trouvé (n° 134) que la distance du centre de gravité de ce segment, par rapport à la double ordonnée AB, était  $\frac{2a}{5}$ ; la distance de ce centre, par rapport au sommet C, sera donc  $\frac{3a}{5}$ ; mais l'aire du segment ACB =  $\frac{4ab}{3}$ ; donc

$$\text{mom. seg. ACB} = \frac{4a^2 b}{5} \dots (47).$$

Le moment du demi-seg. CDB sera par conséquent =  $\frac{2a^2 b}{5} \dots (48).$

137. Proposons-nous de déterminer le moment du secteur EACB par rapport au sommet C de la parabole, les droites AE, BE étant des normales à la courbe.

Ce moment sera égal à celui du segment ACB + celui du triangle ABE.

Pour avoir le moment de ce triangle, observons (Géom., pl. , n° 474) que sa

hauteur est le demi-paramètre, et que, par conséquent, la distance de son centre de gravité à la base AB sera  $\frac{p}{6}$ . Ce centre de gravité sera donc, par rapport au sommet C de la courbe, à une distance égale à  $a + \frac{p}{6}$ . L'aire de ce triangle sera

$$AD \times \frac{p}{2} = \frac{pb}{2}; \text{ son moment sera donc } \frac{pb}{2} \left( a + \frac{p}{6} \right) = \frac{pb}{12} (6a + p);$$

or, celui du segment ACB (n° 136) est  $\frac{4a^2b}{5}$ ;

d'où il s'ensuivra que

$$\text{mom. sect. parab. EACB} = \frac{4a^2b}{5} + \frac{pb}{12} (6a + p) = \frac{b}{60} (48a^2 + 30pa + 5p^2) \dots (49).$$

138. L'aire du secteur égale celle du segment ACB + celle du triangle ABE, c'est-à-dire, aire sect. EACB =  $\frac{4ab}{3} + \frac{pb}{2} = \frac{8ab + 3pb}{6} = \frac{b(8a + 3p)}{6} \dots (50)$ ;

donc, celle du demi-secteur ECB =  $\frac{b(8a + 3p)}{12} \dots (51)$ .

139. Si nous divisons le moment du secteur EACB par son aire, nous aurons la distance du sommet C de la courbe au centre de gravité du secteur. Ainsi soit  $g$ , cette distance, il viendra

$$g = \frac{48a^2 + 30pa + 5p^2}{10(8a + 3p)} \dots (52).$$

Cette distance appartiendra aussi à la projection du centre de gravité du demi-secteur ECB sur l'axe CE.

140. Le moment du demi-secteur ECB (fig. 51), par rapport à l'axe EC, s'obtiendra, en observant que (n° 131)

$$\text{mom. du demi-seg. DCB}' = \frac{ab^2}{4},$$

$$\text{et mom. du triang. EDB} = \frac{p}{2} \times \frac{b}{2} \times \frac{b}{3} = \frac{pb^2}{12}.$$

et que, par conséquent,

$$\text{mom. sect. ECB} = \frac{ab^2}{4} + \frac{pb^2}{12} = \frac{b^2(3a + p)}{12} \dots (53).$$

141. La distance du centre de gravité de ce secteur ECB, par rapport à l'axe CE, s'obtiendra en divisant le moment précédent par l'aire du secteur qui est  $\frac{b(8a + 3p)}{12}$  équation (51).

Si donc  $g$  est cette distance, on aura

$$g = \frac{b^2(3a + p)}{12} \times \frac{12}{b(8a + 3p)} = \frac{b(3a + p)}{8a + 3p} \dots (54).$$

142. Supposons une courbe quelconque ACB (fig. 52) terminée aux extrémités de la droite AB, et proposons-nous d'avoir le centre de gravité G du segment formé par la courbe et la droite.

Pour y parvenir, divisons la droite AB en un certain nombre de parties égales, et par les points de division, élevons les perpendiculaires EF, HI, KC, LM, NO, à la droite AB, et terminons-les à la courbe ACB : en vertu du n° 326 de la géométrie plane, en appelant S l'aire du segment ACB, et  $m$  la distance qui sépare les perpendiculaires, nous aurons

$$S = m (EF + HI + KC + LM + NO) \dots (a)$$

Maintenant, par les points où les perpendiculaires à AB rencontrent la courbe ACB, menons les parallèles  $ab$ ,  $cd$ ,  $ef$ ,  $hi$  et  $lk$  à AB, de manière à former la suite de rectangles EFbH, HIcK, KkML, LlON, tous situés dans le segment, dont la somme sera par conséquent plus petite que ce segment, et une autre suite de rectangles AaFE, EcIH, HeCK, KCfL, LMiN, NOkB, qui dépassent la courbe du segment, dont la somme sera par conséquent plus grande que l'aire de ce segment.

Si actuellement nous prenons la droite AB pour l'axe des moments de ces deux suites de rectangles, en observant que les centres de gravité de tous ces rectangles sont respectivement au milieu de leurs hauteurs, nous aurons pour les rectangles intérieurs

$$\text{moment de EFbH} = \frac{1}{2}EF \times m \times EF = \frac{1}{2}m \times (FE)^2;$$

$$\text{moment de HIcK} = \frac{1}{2}HI \times m \times HI = \frac{1}{2}m \times (HI)^2;$$

$$\text{moment de KkML} = \frac{1}{2}ML \times m \times ML = \frac{1}{2}m \times (ML)^2;$$

$$\text{moment de LlON} = \frac{1}{2}NO \times m \times NO = \frac{1}{2}m \times (NO)^2.$$

Soit  $S'$  la somme des aires de tous ces rectangles, et  $x$  la distance du centre de gravité de l'aire  $S'$  à l'axe AB, il nous viendra

$$S'x = \frac{1}{2}m [(EF)^2 + (HI)^2 + (ML)^2 + (NO)^2] \dots (b).$$

Nous trouverions de même pour la somme des moments des rectangles qui sortent en partie du segment ABC,

$$S''y = \frac{1}{2}m [(EF)^2 + (HI)^2 + 2(KC)^2 + (ML)^2 + (NO)^2] \dots (c)$$

en appelant  $S''$  la somme des aires de ces rectangles, et  $y$  la distance du centre de gravité de l'aire  $S''$  à l'axe AB.

Il est évident que la somme (b) des moments des rectangles intérieurs est plus petite, et celle (c) des moments des rectangles en partie extérieurs est plus grande que le moment du segment ABC. Mais si les perpendiculaires à la corde AB sont assez rapprochées pour que les arcs qu'elles comprennent entre leurs extrémités

supérieures puissent être regardées comme des lignes droites, ces arcs deviendront les diagonales des rectangles  $AaFE$ ,  $FbIc$ ,  $IdCe$ , .... qui sont les différences entre les rectangles intérieurs et les rectangles en partie extérieurs; d'où l'on voit que le segment serait alors la demi-somme des deux suites de rectangles dont les sommes de leurs momens sont les seconds membres des formules (b) et (c). Le moment du segment sera donc la demi-somme des seconds membres de ces deux formules; nous aurons donc

$$S \times gG = \frac{1}{2}m [ (EF)^2 + (IH)^2 + (CK)^2 + (ML^2 + (NO)^2 ] \dots (54)$$

G étant le centre de gravité du segment: l'ordonnée  $gG$  de ce centre sera donc

$$gG = \frac{(EF)^2 + (IH)^2 + (CK)^2 + (ML)^2 + (NO)^2}{2(EF + IH + CK + ML + NO)} \dots (55)$$

en mettant pour S sa valeur (a).

143. Pour avoir l'abscisse  $Ag$  ou  $g'G$  de ce centre de gravité G, on prendra les momens par rapport à l'axe AD perpendiculaire à AB, et on observera que les distances des centres de gravité des rectangles, tant intérieurs qu'extérieurs, par rapport à cet axe AD, suivent la loi que voici:  $\frac{1}{2}m$ ,  $\frac{3}{2}m$ ,  $\frac{5}{2}m$ ,  $\frac{7}{2}m$ , etc., et que la première de ces distances qui appartient aux rectangles intérieurs est  $\frac{3}{2}m$ : cela posé, on aura évidemment:

$$\text{moment de } EFbH = m \times EF \times \frac{3}{2}m = \frac{3}{2}m^2 \times EF,$$

$$\text{moment de } HIdK = m \times HI \times \frac{5}{2}m = \frac{5}{2}m^2 \times HI,$$

$$\text{moment de } KhML = m \times ML \times \frac{7}{2}m = \frac{7}{2}m^2 \times ML,$$

$$\text{moment de } LcON = m \times NO \times \frac{9}{2}m = \frac{9}{2}m^2 \times NO.$$

La somme de ces momens sera donc

$$\frac{1}{2}m^2 [ 3EF + 5HI + 7ML + 9NO ]$$

et on aurait de même pour celle des momens des rectangles en partie extérieurs,

$$\frac{1}{2}m^2 [ EF + 3HI + 5CK + 7ML + 9NO ]$$

D'après ce qui a été dit plus haut, la moyenne entre ces deux sommes sera le moment du segment. Ainsi on aura

$$S \times g'G = \frac{1}{4}m^2 [ 4EF + 8HI + 12GK + 16ML + 20NO ]; \dots (56)$$

d'où 
$$g'G = \frac{m ( EF + 2HI + 3CK + 4ML + 5NO )}{EF + HI + CK + ML + NO} \dots (57)$$

144. Les deux formules (54) et (56) serviront à trouver le centre de gravité d'une figure plane terminée par une courbe quelconque, en coupant cette figure

en deux parties par une droite. Ainsi, par exemple, s'il s'agissait d'avoir le centre de gravité de la figure ACBD (fig. 39), on chercherait le centre de gravité G du segment ACB, au moyen de ces formules, et celui G' de l'autre segment ADB; ensuite on joindrait, ces deux centres de gravité G, G' par une droite GG', qu'on divisera en deux segmens réciproquement proportionnels aux aires des segmens ACB, ADB. En général, au moyen des deux formules (54) et (56), on parviendra par l'addition ou la soustraction des momens, au centre de gravité d'une figure plane terminée par une ou plusieurs lignes courbes, réunies ou non par des lignes droites. Il faut, pour cela, décomposer la figure donnée en segmens du genre de celui de la figure 52, et en triangles rectilignes, s'il y a lieu, de manière qu'une droite, comme AB (fig. 52), aboutisse toujours aux extrémités A, B d'une même courbe ACB.

### LEÇON VIII.

Centres de gravité des polyèdres, des cylindres et des cônes. Théorème de Guldin pour trouver la superficie et le volume des corps de révolution, sachant trouver le centre de gravité de leur génératrice.

145. *Le centre de gravité d'un prisme ou d'un cylindre quelconque est situé sur le milieu de la droite menée par le centre de gravité de sa base parallèlement aux arêtes ou génératrices de la surface latérale du corps.*

En effet, on peut concevoir un prisme ou un cylindre comme étant composé d'une infinité de tranches infiniment minces, parallèles à la base; or ces tranches seront égales; elles auront visiblement leurs centres de gravité sur la droite menée par le centre de gravité de l'une d'elles parallèlement à une arête; cette droite peut donc être regardée comme étant chargée uniformément dans toute sa longueur par les poids égaux des tranches élémentaires du solide; par conséquent le point d'application de la résultante de tous ces poids élémentaires ou le centre de gravité en question sera le milieu de cette droite, qu'on pourrait appeler l'axe d'équilibre du prisme ou du cylindre.

Il faut bien entendre que ce théorème est tout-à-fait indépendant de la forme de la base du prisme ou du cylindre; il est, par conséquent, d'une généralité qui ne souffre aucune exception.

146. *Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est sur la droite menée du sommet au centre de gravité de la base, et à une distance de cette dernière, égale au quart de cette droite.*

En effet, si l'on conçoit la pyramide triangulaire ABCD (fig. 53) divisée en une infinité de tranches infiniment minces, parallèles à la base ABC, ces tranches seront des triangles semblables à cette base, et auront visiblement leurs centres de gravité sur la droite FD menée par le centre de gravité de la base au sommet ; car les centres de gravité, dans les figures semblables, sont des points homologues. Cette droite sera donc chargée continuellement dans toute sa longueur par les tranches élémentaires parallèles à la base ; le centre de gravité de la pyramide sera donc sur cette droite FD. Si l'on décomposait la même pyramide en tranches parallèles à la base BDC, on verrait que le centre de gravité de la pyramide doit aussi être sur la droite AH qui joint le sommet A et le centre de gravité de la base BDC.

Mais les deux droites FD, AH, qui contiennent le centre de gravité de la pyramide, sont dans le plan des droites AE, ED qui divisent l'arête BC en deux parties égales ; ces deux droites FD, AH se couperont donc en un point G qui sera le centre de gravité de la pyramide.

Je dis maintenant que le point G est tel que la distance  $FG = \frac{1}{3}GD$ , et par conséquent  $FG = \frac{1}{4}FD$ .

En effet, les triangles semblables FGH, AGD donnent

$$FG : GD :: FH : AD,$$

et les triangles semblables EFH, EAD donnent

$$EF : EA :: FH : AD ;$$

d'où il suit que

$$FG : GD :: EF : EA ;$$

or, puisque le point F est le centre de gravité du triangle ABC, on a  $EF = \frac{1}{3}EA$  ; donc aussi  $FG = \frac{1}{3}GD$ , ce qui donne  $FG = \frac{1}{4}FD$ .

147. *Il suit de là que le centre de gravité d'une pyramide quelconque est au quart d'une droite menée par le sommet et le centre de gravité de la base de la pyramide, à partir de cette base.*

Car, quel que soit le nombre des côtés de la base, on pourra toujours décomposer cette base en triangles, et la pyramide en autant de pyramides triangulaires qu'il y aura de triangles dans la base, qui auront respectivement ces triangles pour base et la même hauteur que la pyramide en question. Or, les centres de gravité de toutes ces pyramides triangulaires partielles seront évidemment sur un plan parallèle à la base, et à une distance égale au quart de la hauteur de la pyramide donnée ; de plus, quelle que soit la base de cette pyramide, il est clair qu'on pourra décomposer cette dernière en tranches infiniment minces parallèles à la base, lesquelles seront des polygones semblables à cette base ; d'où il s'ensuit que les centres de gravité de toutes ces tranches seront sur la

droite menée, par le centre de gravité de la base de la pyramide et par le sommet; ce centre de gravité sera donc au point où cette droite rencontrera le plan mené parallèlement à la base à une hauteur égale au  $\frac{1}{4}$  de celle de la pyramide donnée.

148. Un cône peut être regardé comme une pyramide dont la base serait un polygone inscrit à celle du cône, et d'une infinité de côtés; d'où il suit que le centre de gravité d'un cône quelconque est au quart de la droite qui joint le centre de gravité de la base et le sommet du cône à partir de la base.

149. Pour avoir le centre de gravité d'un tronc de pyramide ou d'un cône quelconque à bases parallèles, on calculera (*Géom. à trois dim.*, n° 470) la hauteur totale, soit de la pyramide entière, soit du cône entier; on calculera aussi le volume  $V$  de la pyramide ou du cône entier; celui  $v$  de la petite pyramide ou petit cône, et le volume du tronc sera  $V - v$ .

Ensuite, on cherchera le centre de gravité de la grande pyramide ou du grand cône, et celui de la petite pyramide ou du petit cône; puis, en appelant  $h$  la hauteur du tronc, et  $H$  celle de la grande pyramide ou du grand cône, celle de la petite pyramide ou du petit cône sera  $H - h$ ; par conséquent, si nous prenons les momens par rapport au sommet, les distances à ce sommet des centres de gravité de la grande pyramide ou du grand cône, et de la petite pyramide ou du petit cône (n° 148 et 149), seront  $\frac{3H}{4}$  et  $\frac{3(H-h)}{4}$ ; et si nous appelons  $g$  la distance du sommet de la pyramide ou du cône au centre de gravité du tronc, la théorie des momens nous donnera

$$g \times (V - v) = \frac{3HV}{4} - \frac{3v(H-h)}{4} = \frac{3(HV - vH + vh)}{4}.$$

Par conséquent,

$$g = \frac{3[H(V-v) + vh]}{4(V-v)} \dots (58)$$

150. Supposons une pyramide triangulaire quelconque ABCD (*fig. 54*), située comme on voudra dans l'espace; si, par les quatre sommets et le centre de gravité on mène les droites Aa, Bb, Cc, Dd, Gg, parallèles entre elles, mais de manière qu'elles forment un angle quelconque avec un plan quelconque a'b'c'd', on aura

$$Gg = \frac{Aa + Bb + Cc + Dd}{4}.$$

En effet, F étant le centre de gravité de la base BDC, d'après le n° 109, on aura

$$Ff = \frac{Bb + Cc + Dd}{3} \dots (a).$$

Mais le centre de gravité G de la pyramide donne (n° 147)

$$AG : AF :: 3 : 4$$

et les triangles semblables AIG, AMF,

$$AG : AF :: IG : MF;$$

donc  $IG : MF :: 3 : 4$ , d'où  $MF = \frac{4IG}{3}$ .

Si nous ajoutons de part et d'autre  $Ig = Mf = Aa$ , nous aurons

$$MF + Mf = Ff = \frac{4GI}{3} + \frac{3Ig}{3} = \frac{4GI + 3Ig}{3} = \frac{4GI + 4Ig - Ig}{3} = \frac{4Gg - Aa}{3}.$$

Mettons cette valeur de Ff dans l'équation (a), et il nous viendra

$$4Gg - Aa = Bb + Cc + Dd, \text{ d'où nous tirerons}$$

$$Gg = \frac{Aa + Bb + Cc + Dd}{4} \dots\dots (59)$$

151. *Supposons qu'on nous demande le centre de gravité d'un polyèdre quelconque.*

Pour cela, on décomposera le polyèdre en pyramides triangulaires dont les sommets soient sur les faces de ce polyèdre; puis on mènera un plan quelconque sur lequel on abaissera des perpendiculaires par les sommets de toutes ces pyramides triangulaires; on considérera chacune d'elles en particulier, et, au moyen de la formule précédente, on calculera la distance de son centre de gravité par rapport au plan dont nous venons de parler; cela posé, représentons par  $x, x', x'', x''', \dots$ , les distances de tous ces centres de gravité à ce plan, les poids ou les volumes des pyramides triangulaires, par  $P, P', P'', \dots$ , et la distance du centre de gravité du polyèdre par rapport au même plan, par  $g$ ; nous aurons (n° 84)

$$(P + P' + P'' \dots) \times g = Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{etc.};$$

d'où 
$$g = \frac{Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{etc.}}{P + P' + P'' + P''' + \text{etc.}} \dots\dots (60)$$

En menant un plan parallèle à celui des moments à une distance égale à  $g$ , ce plan contiendra le centre de gravité demandé.

En opérant de la même manière par rapport à un autre plan de moment faisant un angle quelconque par rapport au premier, on obtiendra la distance à laquelle il faudrait mener un plan parallèle au second plan de moments, qui contiendrait aussi le centre de gravité; l'intersection de ce plan avec le premier sera une droite qui passera par le centre de gravité demandé.

Assez souvent il suffit de connaître la position d'une droite menée par le centre de gravité des corps; et alors on donne au plan des moments des direc-

tions parallèles à celle qu'on veut donner à cette droite. Mais si l'on veut connaître entièrement la position du centre de gravité, il faut rapporter le polyèdre à un troisième plan de moments, pour avoir un troisième plan qui contienne le centre de gravité demandé, qui sera le point où l'intersection des deux premiers plans viendra rencontrer le troisième.

Théorème de Guldin.

152. *La superficie d'une surface de révolution quelconque est égale à la longueur de la courbe génératrice multipliée par la circonférence du cercle décrit par le centre de gravité de cette génératrice.*

En effet, soit AFB (fig. 55) la génératrice tournant autour d'un axe vertical, dont AB est la projection verticale, pour engendrer un solide de révolution; soit G le centre de gravité de la courbe quelconque AFB; déterminons la projection horizontale  $g$  de ce centre de gravité, et par celle C de l'axe de rotation, comme centre, et avec le rayon Cg, décrivons le cercle  $ghk$ , qui sera la projection horizontale du cercle décrit par le centre de gravité de la courbe génératrice AFB, laquelle projection sera égale au cercle dans l'espace. Prenons un arc  $ad$  de la génératrice infiniment petit; cet arc pourra être regardé comme une ligne droite dont le centre de gravité sera son milieu  $c$ ; soit  $b$  la projection horizontale de ce centre de gravité; supposons que la génératrice ait parcouru le chemin DE infiniment petit, et menons le rayon CE; si nous multiplions l'arc  $ad$  par  $be$ , qui est le chemin parcouru par le centre de gravité  $c$  de cet arc, nous aurons le moment de ce même arc  $ad$  parvenu dans le plan vertical élevé sur CE, par rapport à celui élevé sur CD. Nous aurons de même le moment de chaque élément de la génératrice AFB; or, il est clair que la somme de tous ces moments sera égale à la longueur de cette génératrice multipliée par l'espace  $gh$  qu'a parcouru son centre de gravité; mais le moment de chaque élément est évidemment l'aire de la surface décrite par cet élément; d'où il suit que la somme des mêmes moments ou le produit de la génératrice AFB par l'espace  $gh$ , parcouru par son centre de gravité, sera l'aire de la surface décrite par la génératrice entière; or, la somme de tous les espaces que parcourra le centre de gravité G, pendant que la génératrice fera sa révolution, sera égale à la circonférence du cercle  $ghk$  décrit par ce centre de gravité; il faudra donc multiplier la longueur de cette circonférence par celle de la courbe génératrice, pour avoir l'aire de la surface décrite par la révolution entière de cette génératrice, ce qu'il fallait démontrer.

153. *Le volume d'un corps de révolution est égal à l'aire de la surface génératrice multipliée par la circonférence du cercle décrit par le centre de gravité de cette surface génératrice.*

En effet, soit AFB (fig. 55) la projection verticale de la génératrice du corps,

et AB celle de l'axe de rotation supposé vertical; soient G la projection verticale du centre de gravité de la génératrice AFB, et  $g$  la projection horizontale de ce même point. Par la projection C de l'axe de rotation comme centre, décrivons le cercle  $ghk$  qui sera la projection horizontale du cercle décrit par le centre de gravité de la surface génératrice, et sera égal à ce dernier cercle. Prenons un élément carré  $o$  de cette surface génératrice, qui soit infiniment petit, et abaissons la projection horizontale  $b$  du centre de gravité de cet élément. Supposons ensuite que la surface génératrice ait parcouru le chemin DE infiniment petit: nous pourrions concevoir deux plans méridiens, l'un élevé sur le rayon CD, et l'autre sur le rayon CE, infiniment voisins l'un de l'autre.

Cela posé, nous verrons que, quand la génératrice passe de la position du plan élevé sur CD à celle du plan élevé sur CE, l'élément  $o$  de cette génératrice décrit un petit prisme dont la hauteur est l'espace  $be$  parcouru par le centre de gravité de cet élément. Or, le volume de ce petit prisme est l'aire de sa base, que j'appelle  $m$ , multipliée par  $be$ ; mais le moment de cet élément  $o$  (parvenu dans le plan élevé sur CE), par rapport au plan élevé sur CD, est aussi égal à son aire  $m$ , multipliée par  $be$ ; d'où il suit que le volume de chaque prisme élémentaire du solide est égal au moment de l'élément correspondant de l'aire de la génératrice; par conséquent, la somme de tous les petits prismes élémentaires du corps compris entre les plans verticaux élevés sur les droites CD, CE, sera égale au moment de l'aire de la génératrice parvenue dans le plan élevé sur CE, par rapport au plan élevé sur CD; c'est-à-dire que ce dernier moment sera égal au volume du coin du solide compris entre les deux plans verticaux infiniment voisins dont il vient d'être question. Mais le moment de la génératrice est égal à son aire multipliée par le chemin circulaire  $gh$  infiniment petit parcouru par son centre de gravité; donc, le volume du coin du solide égalera le même produit, qui est  $AFB \times gh$ .

Pour un coin suivant, également compris entre deux autres plans méridiens infiniment voisins, on aurait encore son volume, en multipliant l'aire de la génératrice par l'arc infiniment petit décrit par son centre de gravité, et ainsi de suite pour les coins suivans. La somme de tous ces coins élémentaires est égale au volume du corps, et, comme ces élémens ont un facteur commun qui est l'aire de la génératrice, leur somme sera égale à ce facteur commun multiplié par la somme des autres facteurs, qui sont les élémens de la circonférence du cercle décrit par le centre de gravité de la génératrice; ce qui démontre la proposition énoncée.

154. Les deux derniers théorèmes ont encore lieu, lorsque le corps n'étant pas de révolution, les élémens infiniment petits du chemin parcouru par le centre de gravité de la génératrice sont constamment perpendiculaires au plan

de cette génératrice, à mesure que, par son mouvement, elle engendre le corps ou la surface. Ceci se démontrerait par les mêmes raisonnemens que ceux employés dans ces deux derniers théorèmes. Appliquons ces principes à quelques exemples.

155. *Supposons, pour premier exemple, qu'on nous demande l'aire de la surface d'une sphère.*

Pour cela, rappelons-nous que nous avons trouvé (n° 115) que la distance du centre du cercle au centre de gravité d'un arc était  $\frac{CR}{A}$ ; or, dans le cas d'un demi-cercle  $C = 2R$  et  $A = pR$  (Géom., pl. n° 229); la distance du centre de gravité de la demi-circonférence au centre sera donc  $\frac{2R^2}{pR} = \frac{2R}{p}$ . Cette distance devant être le rayon du cercle décrit par le centre de gravité de la génératrice, la circonférence de ce cercle sera  $\frac{4pR}{p} = 4R$ ; or, la longueur de la génératrice est  $pR$ ; l'aire de la sphère sera donc (n° 152)  $4pR^2$ , comme au n° 206 de la Géométrie à trois dimensions.

156. *Proposons-nous, pour second exemple, de trouver le volume d'une sphère.*

Nous avons trouvé (n° 116) que la distance du centre de gravité d'un secteur de cercle au centre de l'arc était  $\frac{2CR}{3A}$ ; dans le cas du demi-cercle,  $C = 2R$ , et  $A = pR$ ; la distance du centre de gravité du demi-cercle sera donc  $\frac{4R}{3p}$ . Cette distance étant le rayon du cercle que doit parcourir le centre de gravité de la génératrice, la circonférence de ce cercle sera  $\frac{8pR}{3p} = \frac{8R}{3}$ ; mais l'aire du demi-cercle (Géom., pl. n° 230) est  $\frac{pR^2}{2}$ ; le volume de la sphère (n° 153) sera donc  $\frac{8R}{3} \times \frac{pR^2}{2} = \frac{4pR^3}{3}$ , comme au n° 208 de la Géométrie à trois dimensions.

157. *Soit maintenant une ellipsoïde de révolution, dont on demande le volume.*

A l'article n° 125, nous avons trouvé que la distance du centre de l'ellipse au centre de gravité d'un secteur elliptique, divisé en deux parties égales par un axe, était la même que celle du centre de gravité du secteur circulaire correspondant, et appartenant à un cercle décrit sur l'axe qui divise le secteur elliptique en deux également. Supposons donc que l'ellipsoïde soit engendrée par la demi-ellipse  $AcB$  (fig. 50) tournant autour du grand axe; le centre de gravité de cette demi-ellipse sera le même que celui du demi-cercle  $LcK$  décrit sur le petit axe; or, nous venons de trouver (n° 156) que cette distance était  $\frac{4R}{3p}$ , et

ici  $R=b$  ; par conséquent le rayon du cercle que doit décrire le centre de gravité de la demi-ellipse génératrice, pendant la génération du corps, aura pour rayon l'expression  $\frac{4b}{3p}$  ; la circonférence de ce cercle sera donc  $\frac{8b}{3}$  ; mais l'aire d'une ellipse (Géom., pl. n° 799) est  $pab$  ; celle de la génératrice sera  $\frac{pab}{2}$ , et par conséquent (n° 453) le volume de l'ellipsoïde sera

$$\frac{8b}{3} \times \frac{pab}{2} = \frac{4pab^2}{3}.$$

158. Si l'ellipsoïde était engendrée par la révolution de la demi-ellipse  $cBd$  (fig. 50), son volume serait

$$\frac{4pa^2b}{3}.$$

159. Supposons qu'on nous demande le volume d'un parabolôïde de révolution engendré par le demi-segment de parabole  $DCB$ , autour de l'axe  $CD$  (fig. 54).

La distance du centre de gravité de la génération  $DCB$ , par rapport à l'axe de rotation  $DC$ , est égale à  $\frac{3DB}{8} = \frac{3b}{8}$  (n° 132) ; la circonférence du cercle décrit par le centre de gravité sera donc  $\frac{3b}{8} \times 2p = \frac{3pb}{4}$  ; et comme (Géom. pl. n° 796), l'aire de la génératrice  $DCB = \frac{2DC \times DB}{3} = \frac{2ab}{3}$ , le volume du parabolôïde sera égal à  $\frac{3pb}{4} \times \frac{2ab}{3} = \frac{pab^2}{2}$ ,  $p$  n'étant point le paramètre de la parabole, mais le rapport approché du diamètre à la circonférence du cercle.

Nous ne pousserons pas plus loin les applications de ces deux théorèmes de Guldin, aussi féconds que faciles pour trouver surtout le volume de tous les corps compris dans la remarque du n° 154.

## LEÇON IX.

### Centres de gravité des corps sphériques.

160. Supposons qu'il s'agisse de trouver la distance du centre de gravité de la surface d'un fuseau de la calotte sphérique engendrée par l'arc  $EH$  (fig. 56) tournant autour du rayon  $AE$  ; cette distance étant rapportée à l'axe de rotation  $AE$ , et le fuseau étant compris entre les plans méridiens dont les traces horizontales sont les rayons  $ab$ ,  $ac$ .

Pour y parvenir, divisons la flèche  $EF$  en un très-grand nombre de parties

égales, pour que ces parties soient très-petites, et prenons une de ces parties pour unité. Par chacun de ces points de division, menons un plan perpendiculaire à l'axe de rotation AE : les zones comprises entre ces plans seront équivalentes (*Géom. à trois dim.*, n° 211) ; et leur aire commune sera  $2pR$ , la hauteur commune à toutes ces zones étant l'unité. Si donc nous nommons  $m$  l'angle du

fuseau, nous aurons 
$$\frac{m}{360} \times 2pR = \frac{mpR}{180} \dots (a)$$

pour l'aire commune à tous les éléments du fuseau de calotte dont nous cherchons le centre de gravité.

Ces éléments infiniment étroits peuvent être considérés comme des arcs de cercle dont les rayons sont les ordonnées de l'arc EH, abaissées sur la flèche EF infiniment voisines les unes des autres. Appelons successivement  $x, x', x'', x''',$  etc., cette suite de rayons, et cherchons les distances des centres de gravité des arcs successifs qui appartiennent à ces rayons, ou, en d'autres termes, des éléments du fuseau, rapportés à l'axe AE. Or (n° 115), la distance du centre de gravité d'un arc au centre de cet arc est  $\frac{CR}{A}$ . Observons maintenant que la suite des arcs dont nous cherchons les centres de gravité sont d'un même nombre de degrés marqués par  $m$ , et que le triangle rectangle  $ace$  donne :

$$1 : \sin. \frac{1}{2}cab :: ac : ce, \text{ ou } 1 : \sin. \frac{1}{2}m :: R : ce = R \sin. \frac{1}{2}m;$$

ce qui donne  $2ce$  ou  $bc = C = 2R \sin. \frac{1}{2}m$  ; et (*Géom.*, pl. n° 233)

$$A = \frac{2pRm}{360}.$$

Si donc nous substituons ces valeurs de  $C$  et de  $A$  dans l'expression  $\frac{CR}{A}$ , il nous

viendra 
$$\frac{360 \times 2R^2 \sin. \frac{1}{2}m}{2pmR} = \frac{360R \sin. \frac{1}{2}m}{pm},$$

pour l'expression de la distance du centre d'un arc quelconque à son centre de gravité. Si donc, au lieu de  $R$ , dans cette expression, nous mettons successivement les rayons  $x, x', x'',$  etc., des éléments du fuseau, nous aurons

$$\frac{360x \sin. \frac{1}{2}m}{pm}, \frac{360x' \sin. \frac{1}{2}m}{pm}, \frac{360x'' \sin. \frac{1}{2}m}{pm}, \text{ etc.}$$

pour les distances cherchées.

Si nous multiplions ces distances, chacune par l'aire commune trouvée ci-dessus  $= \frac{mpR}{180}$ , il nous viendra

$$2Rx \sin. \frac{1}{2}m, 2Rx' \sin. \frac{1}{2}m, 2Rx'' \sin. \frac{1}{2}m, 2Rx''' \sin. \frac{1}{2}m, \text{ etc.},$$

pour les moments de ces mêmes élémens par rapport à l'axe AE. Nommons  $h$  la flèche EF de la calotte, l'aire de cette calotte (Géom. à trois dim., n° 244) sera  $2pRh$ , et celle du fuseau  $\frac{mpRh}{180}$ ; si donc  $g$  est la distance du centre de gravité de ce fuseau à l'axe AE, nous aurons

$$\frac{mpRh}{180} \times g = 2R \sin. \frac{1}{2}m (x + x' + x'' + x''' + \text{etc.})$$

Il est aisé de voir que la parenthèse étant la somme de toutes les ordonnées de l'arc EH, abaissées sur la flèche EF, sera l'aire du demi-segment circulaire EHF, car ces ordonnées étant infiniment près les unes des autres sont les élémens mêmes de ce segment : nous aurons donc

$$\frac{mpRh}{180} \times g = 2R \sin. \frac{1}{2}m \times \text{seg. EFH} \dots (61),$$

d'où 
$$g = \frac{360 \sin. \frac{1}{2}m}{mph} \times \text{seg. EFH} \dots (62).$$

Telle est l'expression demandée.

161. Si, dans la formule (62), nous faisons  $m$  ou  $cab$  (fig. 56) = 180, nous aurons  $\sin. \frac{1}{2}m = \sin. 90^\circ = 1$ , et il viendra

$$g = \frac{360}{180ph} \times \text{segment EFH} = \frac{2}{ph} \times \text{seg. EFH},$$

et si, dans cette dernière, nous supposons  $h$  ou  $EF = 2R$ ,  $\text{seg. EFH}$  deviendra un demi-cercle, et égalera  $\frac{pR^2}{2}$ , et l'expression ci-dessus se réduira à

$$g = \frac{2pR}{2} \times \frac{pR^2}{2} = \frac{R}{2} \dots (63)$$

c'est-à-dire que la distance du centre de gravité de l'aire d'une demi-sphère au centre de cette surface est égale à la moitié du rayon.

162. Proposons-nous maintenant de trouver la distance, par rapport à l'axe de rotation AE (fig. 56), du centre de gravité d'une pyramide sphérique, dont la base serait la portion du fuseau de calotte décrit par l'arc EH, et compris entre les deux plans méridiens dont les traces horizontales sont les droites ab, ac.

Pour y parvenir, il suffira de concevoir cette pyramide décomposée en pyramides élémentaires infiniment petites; qui auraient leurs sommets au centre de la sphère, aussi bien que la pyramide proposée, et leurs bases infiniment petites sur la surface du fuseau qui sert de base à la pyramide totale; or, les centres de gravité de ces pyramides élémentaires seront évidemment sur la surface d'un fuseau semblable à celui qui sert de base à la pyramide proposée, mais appartenant

à une sphère dont le rayon ne serait que les  $\frac{3}{4}$  de celui de la sphère donnée (n° 147.) La surface de ce fuseau étant le lieu des centres de gravité de tous les élémens de la pyramide donnée, cette surface et la pyramide auront le même centre de gravité. Mais il est évident que les distances des centres de gravité des deux fuseaux sont entre elles comme les rayons des sphères auxquelles ils appartiennent; or, le rayon de la sphère qui est le lieu des centres de gravité de la pyramide est les  $\frac{3}{4}$  de celui de la sphère donnée; donc, la distance du centre de gravité de la pyramide, par rapport à l'axe de rotation, sera égale aux  $\frac{3}{4}$  du second membre de la formule (62) du n° 160; ainsi, en nommant  $g$  cette distance, nous aurons

$$g = \frac{3}{4} \times \frac{360 \sin. \frac{1}{2}m}{mph} \times \text{seg. EFH}$$

$$= \frac{3 \times 360 \sin. \frac{1}{2}m}{4mph} \times \text{seg. EFH} \dots (64).$$

163. Si, dans cette formule, on fait  $m = 180^\circ$ , et  $h = 2R$ , on aura  $\sin. \frac{1}{2}m = 1$ , et  $\text{seg. EFH} = \frac{1}{2}$  cercle  $= \frac{pR^2}{2}$ ; en substituant il viendra donc

$$g = \frac{3 \times 360}{4 \times 180p \times 2R} \times \frac{pR^2}{2} = \frac{3R}{8}, \dots (65)$$

c'est-à-dire que le centre de gravité du volume d'une demi-sphère est à une distance du centre égale aux  $\frac{3}{8}$  du rayon.

164. L'aire du fuseau de calotte qui sert de base à la pyramide sphérique, dont il a été question au n° 149, est  $\frac{mpRh}{180}$  (n° 160.) Si nous multiplions cette aire par  $\frac{R}{3}$ , nous aurons le volume de la pyramide, qui sera  $\frac{mpR^2h}{3 \times 180}$ ; si donc nous multiplions la formule (64) du n° 164 par ce volume, il nous viendra

$$\text{mom. pyr.} = \frac{3 \times 360 \sin. \frac{1}{2}m \times mpR^2h}{4 \times 3 \times 180 mph} \times \text{seg. EFH}$$

$$\text{ou} \quad \text{mom. pyr.} = \frac{R^2 \sin. \frac{1}{2}m}{2} \times \text{seg. EFH} \dots (66)$$

165. *Le centre de gravité d'une zone sphérique quelconque est au milieu de la hauteur de cette zone.*

En effet, si l'on divise la hauteur de la zone, quelle qu'elle soit, en une infinité de parties égales par des plans perpendiculaires à cette hauteur, ces plans diviseront la zone en une infinité de zones élémentaires qui seront égales entre elles, ayant toutes la même hauteur. Les centres de gravité de tous ses élémens égaux seront évidemment sur l'axe ou hauteur de la zone proposée; cette hauteur sera donc uniformément chargée par les élémens de cette zone; donc le centre de gravité de cette dernière sera le milieu de sa hauteur.

166. *Rapportons maintenant le centre de gravité d'une zone quelconque au plan horizontal KR mené par le centre de la sphère.*

Supposons qu'il s'agisse de la zone ICHG (fig. 56), et nommons  $h$ ,  $h'$  les hauteurs AF, AD; la hauteur DF de la zone sera  $h-h'$ , et la distance du centre de gravité de la zone, par rapport au point D, sera  $\frac{h-h'}{2}$  (n° 165); ainsi  $Dg = \frac{h-h'}{2}$ . Mais Ag, qui est la distance cherchée, est

$$Ag = AD + Dg = h' + \frac{h-h'}{2} = \frac{2h' + h - h'}{2} = \frac{h + h'}{2} \dots (67)$$

Si la zone était la calotte sphérique IEC,  $h = R$ , et  $Ag = \frac{R + h'}{2}$ .

167. D'après les raisonnemens déjà employés plusieurs fois, il est clair que la distance du centre de gravité d'un secteur sphérique quelconque, par rapport au centre de la sphère, est égale aux trois quarts de celle du centre de gravité de l'aire de la zone correspondante : or (n° 166), cette dernière distance est  $\frac{h + h'}{2}$ ; si donc  $g$  est celle qui appartient au centre de gravité du secteur, nous aurons

$$g = \frac{3}{4} \times \frac{h + h'}{2} = \frac{3(h + h')}{8} \dots (68)$$

168. Le volume d'un secteur sphérique est égal (*Géom. à trois dim.*, n° 214) à  $\frac{2pR^2}{3} \times DF$  (fig. 56), mais DF étant la hauteur de la zone du secteur  $= h - h'$ ,

donc 
$$\text{vol. sect. sph.} = \frac{2pR^2(h-h')}{3} \dots (69)$$

169. Multiplions ce volume par l'expression de  $g$  du n° 167, il nous viendra

$$\text{mom. sect. ICHG} = \frac{2pR^2(h-h')}{3} \times \frac{3(h+h')}{8},$$

ou 
$$\text{mom. sect. ICHG} = \frac{pR^2(h^2-h'^2)}{4} \dots (70)$$

170. S'il s'agissait d'un secteur à calotte,  $h = R$ , et la formule du n° 167 deviendrait.

$$g = \frac{3(R+h')}{8} \dots (71)$$

et la précédente,

$$\text{mom. sect. ICHG} = \frac{pR^2(R^2-h'^2)}{4} \dots (72)$$

171. La distance du centre de gravité d'une portion quelconque d'un secteur comprise entre deux plans méridiens, ou d'une pyramide sphérique qui aurait pour base un fuseau de calotte ou de zone quelconque, est la même, par rapport au plan horizontal mené par le centre de la sphère, que celle du centre de gravité du secteur sphérique entier dont la pyramide fait partie; car les

éléments du secteur compris entre des plans méridiens infiniment voisins ont évidemment leur centre de gravité sur le même plan, perpendiculaire à l'axe de rotation, qui contient le centre de gravité du secteur entier.

172. Il suit de là que, si l'on multiplie l'expression de  $g$  du n° 170 par le volume de la pyramide en question, on aura le moment de cette dernière par rapport au centre de la sphère. Or, le volume de la pyramide qui a pour base un fuseau de calotte est  $\frac{mpR^3}{3 \times 180} \times DE$ ; mais  $DE = R - h'$ ; ainsi le volume de cette pyramide sera  $\frac{mpR}{3 \times 180} \times (R - h')$ ; multiplions-le par la valeur de  $g$  que nous venons de citer, et nous aurons

$$\begin{aligned} \text{mom. pyr. sph.} &= \frac{3(R+h')}{8} \times \frac{mpR^3}{3 \times 180} \times (R - h') \\ &= \frac{mpR^3(R^2 - h'^2)}{8 \times 180} = \frac{mpR^3(R^2 - h'^2)}{360 \times 4} \dots\dots(73) \end{aligned}$$

173. Proposons-nous de déterminer le moment, par rapport au plan horizontal mené par le sphère, d'un segment à calotte.

Pour cela, nous observerons que le volume du segment IEC est égal à celui du secteur AIEC moins celui du cône ICA, et que, par conséquent

$$\text{mom. seg.} = \text{mom. sect.} - \text{mom. cône} \dots\dots (a).$$

Le moment du secteur est donné au n° 170; quant à celui du cône, on le trouvera comme il suit :

$$\text{d'abord} \quad \text{vol. cône} = \frac{p(DC)^2 \times AD}{3};$$

Mais  $AD = h'$ ,  $(DC)^2 = R^2 - (AD)^2 = R^2 - h'^2$  ce qui donne  $\text{vol. cône} = \frac{ph'(R^2 - h'^2)}{3}$ , qui, multiplié par la distance  $\frac{3h'}{4}$  du centre de gravité de ce cône à son sommet A, donnera

$$\text{mom. cône} = \frac{ph'^2(R^2 - h'^2)}{4};$$

substituant ce moment et celui (70) du n° 172, dans l'équation (a), il viendra

$$\text{mom. seg.} = \frac{pR^3(R^2 - h'^2)}{4} - \frac{ph'^2(R^2 - h'^2)}{4} = \frac{p(R^2 - h'^2)^2}{4} \dots\dots(74)$$

174. Cette expression peut se mettre sous une autre forme, en observant que  $h' = AD = AE - DE = R - h$ ; ce qui donne  $h'^2 = (R - h)^2 = R^2 - 2Rh + h^2$ ; et en substituant, on aura

$$\begin{aligned} \text{mom. seg.} &= \frac{p(R^3 - R^2 + 2Rh - h^3)^2}{4} = \frac{p^2(2Rh - h^3)^2}{4} \\ &= \frac{ph^3(2R-h)^2}{4} \dots\dots(75) \end{aligned}$$

175. Le volume d'un segment à calotte (*Géom. à trois dim.*, n° 215) est égal à  $ph^3 \left(R - \frac{h}{3}\right)$ ; si donc  $g$  est la distance du centre de gravité du segment au centre de la sphère, nous aurons

$$g = \frac{ph^3(2R-h)^2}{4ph^3\left(R - \frac{h}{3}\right)} = \frac{(2R-h)^2}{4\left(R - \frac{h}{3}\right)} = \frac{3(2R-h)^2}{4(3R-h)} \dots\dots(76)$$

176. La distance, par rapport au plan KB mené par le centre de la sphère, du centre de gravité d'un coin de segment quelconque est la même que celle du centre de gravité du segment entier; et le volume de ce dernier étant  $ph^3\left(R - \frac{h}{3}\right)$ ,

celui d'un coin dont le nombre des degrés serait  $m$ , sera  $\frac{mph^3\left(R - \frac{h}{3}\right)}{360}$ .

177. Le moment d'un pareil coin, par rapport au plan KB mené par le centre de la sphère, sera donc

$$\begin{aligned} \text{mom. coin seg.} &= \frac{mph^3\left(R - \frac{h}{3}\right)}{360} \times \frac{(2R-h)^2}{4\left(R - \frac{h}{3}\right)} \\ &= \frac{mph^3(2R-h)^2}{4 \times 360} \dots\dots(77) \end{aligned}$$

178. Le moment du même coin, par rapport à l'axe de rotation, sera égal à celui de la pyramide correspondante, moins celui du secteur du cône qui fait partie de cette pyramide. Or (n° 164)

$$\text{moment py. EC} = \frac{R^3 \sin. \frac{1}{2}m}{2} \times \text{seg. EDC (fig. 54)}.$$

Pour avoir le moment du secteur du cône, il faut observer que la distance  $Dm$ , du centre de gravité du secteur circulaire qui lui sert de base, par rapport à l'axe de rotation AE (note \*, page 43) est égale à  $\frac{240 \times DC \times \sin. \frac{1}{2}m}{pm}$ , DC étant le rayon de l'arc de ce secteur; le centre de gravité du secteur du cône sera le point  $n$  situé sur la droite  $Am$  à une distance  $nr$ , de l'axe AE, égale aux  $\frac{3}{4}$  de  $Dm$ , comme  $An$  est les  $\frac{3}{4}$  de  $Am$ ; nous aurons donc

$$nr = \frac{3}{4} \frac{240 \times DC \times \sin. \frac{1}{2}m}{pm} = \frac{180 DC \times \sin. \frac{1}{2}m}{pm} \dots\dots (a)$$

Le volume du secteur de cône sera l'aire du secteur circulaire qui lui sert de base décrit par le rayon DC, multiplié par le  $\frac{1}{3}$  de AD ou  $\frac{1}{3}(R-h)$ ;  $h$  étant la flèche du segment; mais l'aire de la base est  $\frac{mp(DC)^2}{360}$ ; le volume cherché sera

$$\text{donc} \quad \text{vol. sect. con.} = \frac{mp(DC)^2}{3 \times 360}(R-h)$$

Si nous multiplions ce volume par l'expression (a), il nous viendra

$$\text{mom. sect. côn.} = \frac{(DC)^2(R-h)\sin\frac{1}{2}m}{6} \dots (78)$$

Retranchons ce dernier moment de celui de la pyramide rappelé ci-dessus, et il nous viendra

$$\text{mom. coin seg. EC} = \frac{R^2 \sin\frac{1}{2}m}{2} \times \text{seg. EDC} - \frac{(DC)^2(R-h)\sin\frac{1}{2}m}{6} \dots (79)$$

179. Nous avons trouvé (n° 176) que le volume du coin de

$$\text{seg. EC} = \frac{mph^2\left(R-\frac{h}{3}\right)}{360} \dots (a)$$

Si  $g$  est la distance du centre de gravité de ce coin à l'axe de rotation, en divisant le moment précédent par le volume (a), il viendra

$$g = \frac{360}{mph^2\left(R-\frac{h}{3}\right)} \times \left\{ \frac{R^2 \sin\frac{1}{2}m}{2} \times \text{seg. EDC} - \frac{(DC)^2(R-h)\sin\frac{1}{2}m}{6} \right\} \dots (80)$$

## LEÇON IX.

### Centres de gravité des corps ellipsoïdes.

180. *Le centre de gravité de l'aire latérale d'un cône à base circulaire est le même que celui du triangle par l'axe de ce cône.*

En effet, si par des plans parallèles à la base on divise le cône en tranches infiniment minces, la surface du cône et l'aire du triangle par l'axe seront divisées en bandes infiniment étroites qui seront les élémens de ces deux surfaces. Les poids des élémens du triangle seront proportionnels à leurs longueurs, et les poids des élémens de la surface du cône aux circonférences de cercle qui résulteront des sections faites parallèlement à la base; mais ces circonférences sont comme leurs diamètres, lesquels sont les élémens du triangle. Les élémens du cône sont donc proportionnels à ceux du triangle; de sorte que si nous

supposons la surface du triangle uniformément chargée d'un poids total égal à celui de la surface du cône, les élémens du triangle seront égaux à ceux de la surface de ce dernier ; en outre, les centres de gravité des élémens des deux surfaces sont respectivement aux mêmes points sur l'axe du cône ; mais quelle que soit la charge d'un triangle, pourvu qu'elle soit uniforme, son centre de gravité reste le même ; donc le centre de gravité de l'aire latérale du cône est le même que celui du triangle par l'axe.

169. Il suit évidemment de là que le centre de gravité de l'aire latérale d'un tronc de cône est le même que celui du trapèze par l'axe de ce trône.

170. Supposons une ellipse CAD (fig. 57), qui, par sa révolution autour de l'axe AI, engendre une ellipsoïde, et qu'avec un rayon égal au demi-axe de rotation on ait décrit le cercle EAF ; qui, tournant autour du même axe AI, engendre une sphère.

Cela posé, menons les doubles ordonnées GH, LM, EF, etc. ; ensuite, dans le cercle, les cordes AG, GL, ... AH, HM..., et dans l'ellipse les cordes Ag, gl, ... Ah, hm..., qui, dans l'une et l'autre courbe, joignent les extrémités des doubles ordonnées. Ces cordes, en les faisant tourner autour de l'axe AI, engendreront, celles qui aboutissent au point A, des cônes, et les autres des troncs de cônes qui seront, les uns inscrits dans la sphère, et les autres dans l'ellipsoïde. Nous venons de démontrer que les aires de ces cônes et de ces troncs de cônes avaient les mêmes centres de gravité que les triangles et les trapèzes par l'axe qui y répondent ; je dis maintenant que les centres de gravité des triangles et des trapèzes inscrits dans le cercle sont les mêmes que ceux du triangle et des trapèzes correspondans inscrits dans l'ellipse.

En effet ; d'abord quant aux triangles GAH, gAh, il est bien évident qu'ils ont le même centre de gravité, puisqu'ils ont leurs bases sur la même droite, leurs sommets au même point A, et qu'ils sont tous les deux divisés en deux parties symétriques par l'axe de rotation AI. Quant aux trapèzes GHML, ghml, ils ont même hauteur, les bases proportionnelles, et sont divisés en deux parties symétriques par l'axe de rotation AI ; ainsi leurs centres de gravité seront sur cette droite AI. Nommons G et g les distances de ces centres de gravité par rapport aux grandes bases LM, lm ; par le n° 111, nous aurons

$$G = \frac{NK}{3} \times \frac{2GH + LM}{GH + LM}, \text{ et } g = \frac{NK}{3} \times \frac{2gh + lm}{gh + lm};$$

mais  $GH : gh :: LM : lm = \frac{LM \times gh}{GH}$ .

Mettons cette valeur de  $lm$  dans celle de  $g$ , il viendra

$$g = \frac{NK}{3} \times \frac{2hg + \frac{LM \times gh}{GH}}{gh + \frac{LM \times hg}{GH}} = \frac{NK}{3} \times \frac{2GH + LM}{GH + LM}$$

Donc  $g = G$  ; donc les cônes et les troncs de cônes inscrits dans la sphère ont respectivement les mêmes centres de gravité que ceux inscrits dans l'ellipsoïde.

181. *Le centre de gravité de l'aire d'une calotte ellipsoïde, dont le sommet est l'extrémité de l'axe de rotation, est le même que celui de la calotte sphérique correspondante dans la sphère dont le diamètre est l'axe de rotation.*

En effet, si l'on divise la flèche, commune aux deux calottes, en une infinité de parties égales par des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, entre ces plans on pourra concevoir dans la sphère et dans l'ellipsoïde, d'abord un cône, et ensuite autant de troncs de cônes qu'il y aura de tranches ; or, tous ces cônes et troncs de cônes ont respectivement les mêmes centres de gravité et sont proportionnels ; or, si le nombre de ces élémens est infini, leurs sommes seront respectivement égales à la calotte sphérique et à la calotte ellipsoïde ; et comme ils ont respectivement les mêmes centres de gravité, et qu'ils sont proportionnels, il s'en suivra enfin que les deux calottes auront le même centre de gravité. Mais (n° 165) nous avons vu que le centre de gravité d'une calotte sphérique était au milieu de sa hauteur ; il en sera donc de même pour la calotte ellipsoïde.

182. De ce que le centre de gravité d'une calotte ellipsoïde est au milieu de sa hauteur, il faut en conclure que les élémens de l'aire de cette calotte compris entre des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, sont égaux entre eux comme dans la calotte sphérique ; car, sans cela, la hauteur de la calotte, qui est le lieu des centres de gravité des élémens, n'étant pas uniformément chargée, le milieu de cette hauteur ne pourrait pas être le centre de gravité de cette calotte ellipsoïde.

183. De ce que les élémens d'une zone sphérique quelconque sont proportionnels à ceux de la zone ellipsoïde correspondante, et que le rapport de ces élémens est le même que celui des axes de l'ellipse génératrice, il s'ensuit que *l'aire d'une zone sphérique est à celle de la zone ellipsoïde correspondante comme l'axe qui est le diamètre de la sphère est à l'autre ; c'est-à-dire qu'on a*

$$\text{zone sph.} : \text{zone ellip.} :: a : b.$$

Or, zone sph. =  $2pah$ ,  $h$  étant la hauteur de la zone ; par conséquent,

$$2pah : \text{zone ellip.} :: a : b,$$

d'où

$$\text{zone ellip.} = 2pbh,$$

cette expression sera donc l'aire d'une zone quelconque d'ellipsoïde.

184. De là il s'ensuit donc que l'aire d'un demi-ellipsoïde est égale à  $2pab$ , puisque dans ce cas  $h = a$  ; et celle, conséquemment, de l'ellipsoïde entier à  $4pab$ .

Mais (Géom., pl. n° 799) nous avons vu que l'aire d'une ellipse était  $pab$  ;

d'où l'on voit que l'aire d'un ellipsoïde est quatre fois celle de l'ellipse génératrice. Il faut donc conclure de là qu'une ellipse tournant autour de son grand axe engendrera un ellipsoïde qui aura la même aire que celui qu'on aurait engendré en faisant tourner cette ellipse génératrice autour de son petit axe.

185. Supposons qu'il s'agisse de trouver la distance du centre de gravité de l'aire d'un fuseau de calotte ellipsoïde engendrée par l'arc d'ellipse  $Ah$ , en tournant autour de l'axe  $AI$ ; cette distance étant rapportée à l'axe de rotation  $AI$ , et le fuseau étant compris entre deux plans verticaux, menés par l'axe de rotation, dont les projections horizontales sont les droites  $ab$ ,  $ac$  (fig. 57).

Pour cela, divisons la hauteur  $AK$  de la calotte en une infinité de parties égales par des plans perpendiculaires à l'axe de rotation  $AI$ , et prenons une de ces parties pour unité : les zones entières comprises entre ces plans seront équivalentes, puisqu'elles auront la même hauteur (n° 182), l'aire commune à toutes ces zones sera  $2pb$  (l'aire de l'élément qui aurait pour base le cercle décrit par le demi-petit axe), la hauteur de cet élément étant l'unité infiniment petite. Si nous nommons  $m$  l'angle  $bac$  du fuseau, l'aire commune à tous les éléments de celui-ci sera  $\frac{2mpb}{360}$ . Ces éléments étant infiniment étroits peuvent être considérés comme des arcs de cercle dont les rayons seront les ordonnées de l'arc d'ellipse  $Ah$ , abaissées, infiniment près les unes des autres, sur l'axe de rotation  $AI$ .

La distance du centre de ces arcs ou de l'axe de rotation à leurs centres de gravité seront (note de la page 42) respectivement égales à

$$\frac{360 \gamma \sin. \frac{1}{2}m}{pn}, \frac{360 \gamma' \sin. \frac{1}{2}m}{pm}, \frac{360 \gamma'' \sin. \frac{1}{2}m}{pm}, \text{ etc.}$$

en nommant respectivement  $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$ , etc. les ordonnées de l'arc d'ellipse  $Ah$ .

Les momens de ces mêmes éléments seront donc

$$2b\gamma \sin. \frac{1}{2}m, 2b\gamma' \sin. \frac{1}{2}m, 2b\gamma'' \sin. \frac{1}{2}m, \text{ etc.},$$

Nommons  $g$  la distance, par rapport à l'axe de rotation  $AI$ , du centre de gravité de l'aire du fuseau en question ; nous aurons

$$g \times \text{aire du fus. de cal.} = 2b \sin. \frac{1}{2}m (\gamma + \gamma' + \gamma'' + \gamma''' + \text{etc.})... (a)$$

La parenthèse étant la somme de toutes les ordonnées, ou plutôt des éléments du demi-segment elliptique  $AhK$ , sera égale à l'aire de ce dernier segment : nous aurons donc

$$g \times \text{aire du fus. de cal.} = 2b \sin. \frac{1}{2}m \times \text{seg. } AhK... (80)$$

L'aire de la calotte elliptique entière  $gAh = 2pbh$  (n° 183);  $h$  étant la flèche

AK; celle du fuseau en question sera donc  $\frac{2mpbh}{360}$ ,  $m$  étant l'angle  $bac$  du fuseau.

Si donc nous divisons le moment (80) ci-dessus par l'aire du fuseau, il nous viendra enfin

$$g = \frac{360 \sin. \frac{1}{2}m}{mph} \times \text{seg. AhK.}$$

186. Si dans cette formule nous faisons  $m = 180^\circ$ , et  $h = a$ ,  $\text{seg. AhK}$  deviendra égal à  $\frac{pab}{4}$ ; et il en résultera

$$g = \frac{360 pab}{180 pa \times 4} = \frac{b}{2}.$$

pour la distance du centre de l'ellipsoïde au centre de gravité du quart de l'aire de l'ellipsoïde, ou même de la moitié déterminée par un plan mené par l'axe de rotation.

187. Cherchons maintenant la distance du centre de gravité d'une pyramide ellipsoïde engendrée par le secteur elliptique  $Ah$  tournant autour de l'axe de rotation  $AI$ , d'une quantité égale à l'angle  $bac$  (fig. 57), divisé en deux parties égales par le plan  $CAD$ .

Pour y parvenir, supposons la pyramide proposée divisée en une infinité de pyramides infiniment petites, ayant leurs sommets au centre de l'ellipsoïde, et leurs bases infiniment petites sur la surface du fuseau de calotte qui sert de base à la pyramide donnée: il est clair que toutes ces pyramides élémentaires auront leurs centres de gravité sur un fuseau de calotte ellipsoïde correspondant à celui qui contient leurs bases, et appartenant à la surface d'un ellipsoïde semblable à celui en question; les axes du nouvel ellipsoïde seront donc les  $\frac{3}{4}$  de ceux de l'ellipsoïde proposé, et le centre de gravité de ce nouveau fuseau sera le même que celui de la pyramide donnée. Or, la distance par rapport à l'axe de rotation  $AI$  du centre de gravité de ce fuseau, sera évidemment égale aux  $\frac{3}{4}$  de celle du centre de gravité du fuseau qui sert de base à la pyramide; donc (n° 175),

$$g = \frac{3}{4} \times \frac{360 \sin. \frac{1}{2}m}{mph} \times \text{seg. AhK} \dots (81)$$

188. Le volume de la pyramide sera égal (n° 153) à l'aire du secteur  $Ah$  (fig. 57) multipliée par l'arc du cercle décrit par le centre de gravité de ce secteur elliptique, autour de l'axe de rotation  $AI$ .

Or (n° 130), la distance du centre de gravité de ce secteur elliptique, par rapport à l'axe  $AI$ , est

$$g = \frac{2bC}{3A} \text{ tang. } \frac{1}{2}n.$$

$A$  étant l'arc de cercle  $AH$ ,  $n$  le nombre des degrés de l'angle  $AH$  et  $C =$

KH : la circonférence du cercle qui aurait cette expression pour rayon serait  $\frac{4pb C \operatorname{tang.} \frac{1}{2}n}{3 A}$ , et l'arc décrit par le centre de gravité du secteur AIh, dans la génération de la pyramide, sera par conséquent

$$\frac{4mpb C \operatorname{tang.} \frac{1}{2}n}{360 \times 3 A};$$

le volume de la pyramide sera donc

$$\text{vol. py. Ah} = \text{sect. AIh} \times \frac{4mpb C \operatorname{tang.} \frac{1}{2}n}{360 \times 3 A},$$

ou (n° 127), éq. 37, à cause que  $\text{sect. AIh} = \frac{bA}{2}$ ,

$$\text{vol. py. Ah} = \frac{bA}{2} \times \frac{4mpb C \operatorname{tang.} \frac{1}{2}n}{360 \times 3 A} = \frac{2mpb^2 C \operatorname{tang.} \frac{1}{2}n}{360 \times 3} \dots (82)$$

189. Si nous multiplions l'expression de  $g$  du n° 187 par ce volume, il nous viendra

$$\begin{aligned} \text{mom. py. Ah} &= \frac{3 \times 360 \sin. \frac{1}{2}m}{4mph} \times \frac{2mpb^2 C \operatorname{tang.} \frac{1}{2}n}{360 \times 3} \times \text{seg. AhK} \\ &= \frac{b^2 C \sin. \frac{1}{2}m \operatorname{tang.} \frac{1}{2}n}{2h} \times \text{seg. AhK} \dots (83) \end{aligned}$$

On aura le demi-segment d'ellipse AhK, par cette proportion

$$a : b :: \text{seg. KHA} : \text{seg. KhA} = \frac{b \text{ seg. KHA}}{a}.$$

190. Si l'on voulait le moment, par rapport à l'axe de rotation AI, du coin de segment répondant à la pyramide précédente, il suffirait de retrancher du moment de cette dernière celui du secteur de cône qui fait partie de la pyramide; le reste serait le moment demandé.

Pour avoir le moment du secteur de cône, on s'y prendra comme dans le n° 178.

191. Le volume du coin de segment d'ellipsoïde s'obtiendra en observant que le coin de segment de la sphère est au coin de segment de l'ellipsoïde, comme le carré du demi-axe qui sert de rayon à la sphère est au carré de l'autre demi-axe.

Ayant le volume du coin de segment de l'ellipsoïde, et ci-dessus son moment, il n'est pas nécessaire de dire comment on arriverait à la distance du centre de gravité de ce coin à l'axe de rotation.

192. *Le centre de gravité d'un segment quelconque ellipsoïde est le même que celui du segment de sphère correspondant, dont le rayon serait le demi-axe de rotation.*

En effet, soit le segment ellipsoïde  $gAh$  et le segment sphérique correspondant  $GAH$  (fig. 57). Si l'on divise la hauteur commune  $AK$  en une infinité de parties égales par des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, les tranches infiniment minces comprises entre ces plans seront entre elles comme leurs bases, lesquelles sont des cercles, qui, par conséquent, sont entre eux comme les carrés des rayons. Mais les rayons de ces cercles sont respectivement les ordonnées du cercle et de l'ellipse, lesquelles ordonnées sont comme les demi-axes; d'où il suit que les tranches de la sphère sont à celles de l'ellipsoïde, comme le carré du demi-axe qui est le rayon de la sphère est au carré de l'autre demi-axe de l'ellipse génératrice. Ainsi ces tranches sont proportionnelles. D'ailleurs il est facile de voir qu'elles auront toutes leurs centres de gravité respectivement au même point. Il résulte donc de là que la proposition est démontrée.

193. Il suit de là que le secteur ellipsoïde  $lAm$  a le même centre de gravité que le secteur sphérique correspondant  $lAM$ . Car les deux segments  $lmA$ ,  $LMA$  ont le même centre de gravité, et il est bien évident qu'il en est de même des deux cônes  $lmI$ ,  $LMI$ ; par conséquent, la proposition est démontrée. Ceci doit s'entendre de deux secteurs quelconques.

194. Nous avons trouvé (n° 167) que la distance du centre de gravité d'un secteur quelconque de sphère, par rapport au plan perpendiculaire à l'axe de rotation et mené par le centre de la sphère, était

$$g = \frac{3(h+h')}{8} \dots\dots (a).$$

Cette distance appartiendra donc aussi au centre de gravité d'un secteur quelconque d'ellipsoïde.

195. Le secteur sphérique est au secteur ellipsoïde dans le rapport des carrés des demi-axes. Ainsi nous aurons

$$a^2 : b^2 :: \text{sect. sph.} : \text{sect. ellip.} = \frac{b^2 \text{ sect. sph.}}{a^2}.$$

Mais (n° 167)  $\text{vol. sect. sph.} = \frac{2pa^2(h-h')}{3}$ ; donc

$$\text{vol. sect. ellip.} = \frac{2pb^2(h-h')}{3} \dots\dots (b).$$

196. Le moment du secteur ellipsoïde, par rapport à son centre, s'obtiendra en multipliant les expressions (a) et (b), et on aura

$$\text{mom. sect. ellip.} = \frac{pb^2(h^2-h'^2)}{4}.$$

197. La distance du centre de gravité, par rapport au centre de l'ellipsoïde,

(c'est-à-dire par rapport au plan perpendiculaire à l'axe de rotation, et mené par ce dernier point I), d'une portion quelconque d'un secteur, comprise entre deux plans méridiens, est évidemment la même que celle du secteur tout entier.

198. Le volume d'un secteur d'ellipsoïde entier (n° 195) étant  $\frac{2pb^3(h-h')}{3}$ , celui d'une pyramide ou portion de ce secteur, comprise entre deux plans méridiens faisant entre eux un angle représenté par  $m$ , sera

$$\text{vol. py. ellip.} = \frac{2mpb^3(h-h')}{3 \times 360} \dots (83)$$

199. Le moment de cette pyramide s'obtiendra en multipliant son volume par l'expression (a) (n° 194), et sera

$$\text{mom. py. ellip.} = \frac{mpb^3(h^2-h'^2)}{4 \times 360} \dots (84)$$

200. Si, de ce dernier moment, on retranchait celui du cône  $Im$ , on aurait celui du coin du segment qui correspond à la pyramide.

## LEÇON X.

### Centre de gravité des cylindres tronqués.

201. Nous avons vu (*Géom. à trois dim.* n° 135) que si, dans un prisme triangulaire ABFEC (fig. 60) dont la face ABDC est un carré, on inscrit un coin cylindrique ABCF, la section droite du coin étant un quart de cercle BC, et la base ABF du prisme étant un triangle rectangle, nous avons vu, dis-je, que si l'on menait des plans parallèles à la base ABF du prisme, les élémens correspondans de la surface du triangle cylindrique CBF, et ceux du rectangle BDEF, compris entre ces plans, étaient équivalens, chacun à chacun, et qu'il s'ensuivait que l'aire entière du triangle cylindrique CBF était équivalente à celle du rectangle BDEF.

Cela posé, supposons qu'on nous demande le moment de l'aire de la surface du triangle cylindrique Cab, par rapport à un plan mené par le rayon AC, parallèlement à la face BDEF.

Pour cela, menons une infinité de plans parallèles à la base ABF, infiniment voisins les uns des autres, dans la hauteur Cc; ces plans diviseront l'aire du triangle Cab en élémens rectilignes parallèles à BF, et le segment de cercle caC en élémens rectilignes parallèles à ca (ces derniers élémens seront

les ordonnées de l'arc  $Ca$ ). Prenons pour unité la hauteur verticale infiniment petite comprise entre tous ces plans; chacun des élémens du triangle cylindrique  $Cab$  étant égal à son correspondant dans le rectangle  $BDEF$ , égalera  $BF = b$  et leurs momens, par rapport au plan des momens  $ACLK$ , parallèle à  $BDEF$ , seront égaux à  $b$  multiplié par l'élément ou l'ordonnée correspondante du segment de cercle  $Cac$ ; ainsi, en nommant  $x, x', x'', x'''$ , etc., les élémens successifs de ce segment, à partir du point  $C$ , la somme des momens des élémens du triangle cylindrique sera :

$$\text{mom. triang. cy.} = bx + bx' + bx'' + \dots = b(x + x' + x'' + x''', \text{ etc.})$$

mais la somme  $x + x' + x'' + \dots$ , des élémens du segment de cercle  $Cac$  sera l'aire de ce segment; nous aurons donc

$$\text{mom. trian. cy.} = b \times \text{seg. Cac} \dots \dots (85).$$

202. L'aire du triangle cylindrique (*Géom. à trois dim.* n° 135) est  $b \times Cc = ab$ , en supposant  $Cc = a$ ; si donc nous nommons  $g$  la distance du centre de gravité de ce triangle cylindrique par rapport au plan  $ACLK$ , en divisant le moment (185) ci-dessus, par cette aire, il nous viendra

$$g = \frac{\text{seg. Cac}}{a} \dots \dots (86)$$

203. Supposons maintenant que l'on demande la distance du centre de gravité du volume de la pyramide cylindrique  $AabC$  (*fig. 60*), par rapport au plan  $ACLK$ .

Pour cela, il suffira de considérer que cette pyramide peut être regardée comme la réunion d'une infinité de pyramides qui auraient leurs bases sur la surface du triangle cylindrique  $Cab$ , et leurs sommets au même point  $A$ ; et que toutes ces pyramides élémentaires auront leurs centres de gravité sur un triangle cylindrique semblable à celui qui sert de base à la pyramide totale, et appartenant à une surface cylindrique dont le rayon de la section droite sera les  $\frac{3}{4}$  du rayon  $R$  de la première surface cylindrique; le centre de gravité de l'aire du nouveau triangle cylindrique sera par conséquent le même que celui de la pyramide en question. Mais dans les figures semblables, les centres de gravité sont des points homologues; par conséquent  $g$  et  $g'$  étant les distances des centres de gravité des deux triangles cylindriques, on aura

$$g : g' :: R : \frac{3}{4} R :: 1 : \frac{3}{4},$$

d'où 
$$g' = \frac{3}{4}g = \frac{3 \text{ seg. Cac}}{4a} \dots \dots (87),$$

attendu (n° 202) que  $g = \frac{\text{seg. Cac}}{a}$ .

204. Si nous considérons le triangle BCF, le segment *Cac* deviendra le quart de cercle  $ABC = \frac{pR^2}{4}$ , et *a* deviendra le rayon R ; en substituant dans la formule (87) ci-dessus, il nous viendra

$$g = \frac{3pR^2}{16R} = \frac{3pR}{16} = R \times \frac{3 \times 3,142}{16} = R \times 0,589.....(88)$$

205. En multipliant l'aire du triangle cylindrique *Cab*, qui est *ab* (c'est-à-dire  $BF \times Cc$ ), par  $\frac{R}{3}$ , on aura

$$\text{vol. py. } AabC = \frac{abR}{3}.....(89)$$

206. Multiplions l'équation (87) ci-dessus par ce volume, et il nous viendra

$$\text{mom. py. } AabC = \frac{Rb \times \text{seg. } Cac}{4}.....(90)$$

207. Si dans ce moment nous mettons la valeur du seg.  $Cac = \frac{pR^2}{4}$ , nous aurons

$$\text{mom. py. } ABFC = \frac{pR^3b}{16} = R^3b \times \frac{3,142}{16} = R^3b \times 0,196375.....(91)$$

208. Comme en divisant la hauteur *Cc* en parties égales par des plans parallèles à la base ABF, les élémens de l'aire du triangle cylindrique *Cab* compris entre ces plans sont équivalens, il s'ensuit, comme pour la calotte sphérique, que le centre de gravité de l'aire de ce triangle cylindrique est situé dans un plan mené au milieu de la flèche *Cc* parallèlement à la base ABF. Ainsi, à partir du point C, ce centre de gravité sera à une distance égale à  $\frac{a}{2}$ .

209. Si nous voulions la distance de ce centre de gravité par rapport à la base ABF, en la nommant *g*, nous aurions

$$g = R - \frac{a}{2} = \frac{2R - a}{2}.....(92)$$

210. Si nous multiplions cette distance par  $\frac{3}{4}$ , nous aurons

$$g = \frac{3(2R - a)}{8}.....(93)$$

pour la distance du centre de gravité de la pyramide *A<sub>1</sub>bC* à la base ABF.

241. Multiplions cette distance par le volume (n° 205) à la pyramide  $AabC$ , qui est  $\frac{abR}{3}$ , il nous viendra

$$\text{mom. py. } AabC = \frac{abR(2R-a)}{8} \dots (94)$$

pour le moment de cette pyramide par rapport au plan  $ABF$ .

242. Si nous faisons  $a = R$  dans les deux dernières formules, nous aurons

$$g = \frac{3R}{8}, \text{ et mom. coin } ABFC = \frac{bR^3}{8} \dots (95)$$

pour la distance du centre de gravité et pour le moment du coin cylindrique entier  $ABFC$ , rapportés au plan  $ABF$ .

243. Nous avons trouvé (n° 146) que la distance du centre de gravité d'un secteur de cercle au centre de l'arc était  $g = \frac{2CR}{3A}$ ; dans le cas d'un demi-cercle,  $C = 2R$ , et  $A = pR$ ; en substituant il nous viendra

$$g = \frac{4R^2}{3pR} = \frac{4R}{3p} \dots (96)$$

Cette distance est aussi celle du centre de gravité d'un quart de cercle, par rapport à l'un des rayons  $AB$ ,  $AC$  qui déterminent ce quart de cercle.

Le volume du quart de cylindre  $ABCLFK$  (*Géom. à trois dim.*, n° 134) est  $\frac{pR^2b}{4}$ ; si donc nous multiplions l'expression (96) de  $g$  ci-dessus, par ce volume, nous aurons

$$\text{mom. } \frac{1}{4} \text{ cy.} = \frac{4R}{3p} \times \frac{pR^2b}{4} = \frac{R^3b}{3} \dots (97)$$

244. Si nous retranchons de ce moment celui (n° 242) du coin  $ABFC$  (fig. 60), il nous restera

$$\begin{aligned} \text{mom. du coin } AFCLK &= \frac{R^3b}{3} - \frac{R^3b}{8} = \frac{8R^3b - 3R^3b}{24} \\ &= \frac{5R^3b}{24} \dots (98) \end{aligned}$$

ce moment étant pris par rapport au plan  $ABFK$ .

$$\begin{aligned} 245. \text{ Le volume du coin } AFCLK &= ABCLFK - ABFC = \frac{pR^2b}{4} - \frac{R^2b}{3} = \\ \frac{3pR^2b - 4R^2b}{12} &= \frac{R^2b(3p-4)}{12} = 0,452R^2b \dots (99) \end{aligned}$$

Divisons le moment (n° 214) de ce même coin par son volume, et il nous viendra

$$g = \frac{5R^3b}{24} \times \frac{12}{R^2b(3p-4)} = \frac{5R}{2(3p-4)} = \frac{5R}{10,852} = R \times 0,4607..... (100)$$

pour la distance du centre de gravité du coin AFCLK au plan ABFK.

216. Le volume de la portion du cylindre qui a pour base le secteur ACa est  $\frac{ARb}{2}$ , A étant l'arc Ca. La distance du centre de gravité du secteur CAa par rapport au rayon AB au plan ABFK (n° 119) est  $\frac{2CR}{3A}$ , C étant l'ordonnée ca et A l'arc Ca ; si donc nous multiplions cette distance par le volume du secteur de cylindre, il nous viendra

$$\text{mom. sect. cy.} = \frac{ARb}{2} \times \frac{2CR}{3A} = \frac{R^2Cb}{3}..... (101)$$

217. Si de ce dernier moment nous retranchons celui (n° 214) de la pyramide AabC, nous aurons

$$\begin{aligned} \text{mom. sol. AbCLdK} &= \frac{R^2Cb}{3} - \frac{abR(2R-a)}{8} = \\ &= \frac{8R^2Cb - 6abR^2 + 3a^2bR}{24} = \frac{Rb(8RC - 6aR + 3a^2)}{24}..... (102) \end{aligned}$$

par rapport au plan ABFK.

218. Si du volume du secteur de cylindre que nous avons trouvé (n° 216) égal à  $\frac{ARb}{2}$ , nous retranchons celui de la pyramide AabC, qui est (n° 205), égal à  $\frac{abR}{3}$ , nous aurons

$$\begin{aligned} \text{vol. solide AbCLdK} &= \frac{ARb}{2} - \frac{abR}{3} = \frac{3ARb - 2abR}{6} \\ &= \frac{Rb(3A - 2a)}{6}..... (103) \end{aligned}$$

219. Divisons le moment ci-dessus par ce volume, nous aurons

$$g = \frac{8RC - 6aR + 3a^2}{4(3A - 2a)}..... (104)$$

pour la distance du centre de gravité du solide AbCLd, par rapport au plan ABFK.

220. La distance du centre de gravité du secteur AaC, par rapport au rayon AC (fig. 60), est  $\frac{2CR}{3A} \times \text{tang. } \frac{1}{2}m$  (n° 121), C étant la corde ca, A

l'arc  $Ca$ , et  $m$  le nombre des degrés de l'arc  $Ca$ . Si nous multiplions cette distance par le volume du secteur cylindrique  $ACadLK$ , nous aurons, par rapport au plan  $ACK$ ;

$$\text{mom. sect. cy. } ACadLK = \frac{ARb}{2} \times \frac{2CR}{3A} \text{ tang. } \frac{1}{2}m = \frac{R^2Cb}{3} \times \text{tang. } \frac{1}{2}m \dots (105)$$

Si de ce moment on retranche celui de la pyramide  $AabC$  (n° 306), il nous viendra

$$\begin{aligned} \text{mom. sol. } AbCLdK &= \frac{R^2Cb}{3} \times \text{tang. } \frac{1}{2}m - \frac{Rb}{4} \times \text{seg. } CaC = \\ &= \frac{Rb}{12} (4CR \text{ tang. } \frac{1}{2}m - 3 \text{ seg. } CaC) \dots (106) \end{aligned}$$

par rapport au plan  $AKLC$ .

221. En divisant ce moment par le volume de ce solide, trouvé (n° 218), il en résultera

$$g = \frac{4RC \text{ tang. } \frac{1}{2}m - 3 \text{ seg. } CaC}{2(3A - 2a)} \dots (107)$$

pour la distance du centre de gravité de ce même solide  $AbCLdK$ , par rapport au plan  $AKLC$ .

222. Si dans la formule (106) nous faisons  $C = R$ ,  $m = 90^\circ$ ,  $\text{seg. } CaC = \frac{1}{4} \text{ cercle} = \frac{pR^2}{4}$ , il nous viendra

$$\begin{aligned} \text{mom. coin } AFCLK &= \frac{Rb \left( 4R^2 - \frac{3pR^2}{4} \right)}{12} = \frac{R^3b (16 - 3p)}{48} \\ &= \frac{R^3b (16 - 3 \times 3,142)}{48} = \frac{R^3b (16 - 9,426)}{48} \\ &= \frac{R^3b \times 6,574}{48} = 0,137 \times R^3b \dots (108) \end{aligned}$$

223. Si dans la formule du n° 221 on fait  $C = R$ ,  $a = R$ ,  $A = \frac{1}{4} \text{ circ.} = \frac{pR}{2}$ ,  $m = 90^\circ$ , et  $\text{seg. } CaC = \frac{1}{4} \text{ cercle} = \frac{pR^2}{4}$ , il viendra

$$g = \frac{4R^2 - \frac{3pR^2}{4}}{2 \left( \frac{3pR}{2} - 2R \right)} = \frac{R (16 - 3p)}{4 (3p - 4)} = \frac{R \times 6,574}{21,704} = R \times 0,303 \dots (109)$$

pour la distance du centre de gravité du coin  $AFCLK$ , par rapport au plan  $AKLC$ .

224. Supposons, maintenant, qu'il s'agisse du coin de cylindre elliptique  $ABFC$  (fig. 61); si on le compare au coin du cylindre circulaire  $ADEC$ , qui lui est inscrit, les élémens infiniment minces de ces deux coins de cylindre,

parallèles à la base ABF, seront entre eux comme les carrés des demi-axes AC, AB du coin elliptique.

En effet, 1° les élémens du coin de cylindre circulaire seront des prismes triangulaires de même hauteur, et seront, par conséquent, entre eux comme leurs bases, qui sont des triangles semblables, dont les côtés homologues sont les ordonnées du quart de cercle CD abaissées sur le rayon CA; par conséquent, les primes élémentaires de ce coin circulaire, seront comme les carrés de ces ordonnées.

2°. Les élémens du coin de cylindre elliptique seront aussi des prismes triangulaires, qui auront la même hauteur que les précédens, et seront par conséquent entre eux comme leurs bases, qui seront des triangles semblables dont les côtés homologues seront les ordonnées du quart d'ellipse abaissées sur le demi-petit axe AC; les élémens du coin de cylindre elliptique seront donc entre eux comme les carrés de ces ordonnées. Mais les ordonnées du quart de cercle ACD sont à celles du quart d'ellipse ACB :: B : A (B et A étant les demi-axes AC, AB de l'ellipse); les élémens du coin circulaire sont donc respectivement à ceux du coin elliptique :: B<sup>2</sup> : A<sup>2</sup>, et par conséquent les coins entiers seront dans ce même rapport, comme il fallait le démontrer.

225. Le volume du coin de cylindre circulaire étant  $\frac{B^2 \times DE}{3}$ , on aura

$$B^2 : A^2 :: \frac{B^2 \times DE}{3} : \text{vol. coin ell.} = \frac{A^2 \times DE}{3}.$$

Mais les triangles semblables ADE, ABF donnent

$$A : B :: BF : DE = \frac{B \times BF}{A};$$

par conséquent,

$$\text{vol. coin ellip.} = \frac{A^2 \times B \times BF}{3A} = \frac{A \times B \times BF}{3},$$

ou en faisant BF = b,

$$\text{vol. coin ellip.} = \frac{A \cdot B \cdot b}{3} \dots (110)$$

226. Ce que nous disons des coins entiers est applicable à des portions quelconques Cabd, Cacl de ces deux coins, et par suite aux pyramides cylindriques AbdC, AcIC; car les pyramides polyèdres Abda, Acla, ayant même hauteur, sont entre elles comme leurs bases qui sont dans le rapport des élémens des deux coins, et par conséquent dans le rapport de B<sup>2</sup> : A<sup>2</sup>. Or, le volume de la pyramide cylindrique circulaire AcIC (n° 205) est

$$\frac{DE \times Ca \times CA}{3} = \frac{DE \times a \times B}{3},$$

ou comme (n° 225)  $DE = \frac{B \times BF}{A},$

$$\text{vol. py. circ.} = \frac{B^2 \times a \times BF}{3A} = \frac{B^2 ab}{3A},$$

en faisant  $BF = b.$

Donc  $B^2 : A^2 :: \frac{B^2 ab}{3A} : \text{vol. py. ellip.}$

ou  $1 : A :: \frac{ab}{3} : \text{vol. py. ellip.} = \frac{Aab}{3} \dots (111)$

227. Le volume du secteur de cylindre elliptique  $AbCLhK$  est égal au secteur  $Abc$  multiplié par  $BF = b$ ; mais (n° 127) sect. ellip.  $= \frac{A \text{arc } Cc}{2}$ ; on aura donc

$$\text{vol. sect. cy. ellip.} = \frac{bA \times \text{arc } Cc}{2} \dots (112)$$

228. Le volume du solide  $hdCAKL$  est égal à celui du secteur cylindrique elliptique  $AbCLhK$ , moins celui de la pyramide elliptique  $AbdC$  : donc

$$\begin{aligned} \text{vol. solide } hdCAKL &= \frac{Ab \times \text{arc } Cc}{2} - \frac{Aab}{3} \\ &= \frac{Ab(3 \text{ arc } Cc - 2a)}{6} \dots (113) \end{aligned}$$

229. Puisque les éléments parallèles à la base  $ABF$  du coin cylindrique elliptique  $ABFC$  sont proportionnels à ceux du coin cylindrique circulaire  $ADEC$ , et que les centres de gravité de ces éléments sont respectivement à des distances égales par rapport au plan  $ABF$ ; il est facile de voir que les centres de gravité de ces deux coins sont à la même distance de ce plan  $ABF$  (voyez n° 208). Il en sera évidemment de même pour le centre de gravité, 1° de la pyramide  $AbdC$ , comparée à la pyramide  $AclC$  (voyez n° 209); 2° du coin  $AFCLK$ , comparé au coin  $AECHG$  (voyez n° 214), et 3° du solide  $hdCAKL$  comparé au solide  $elCAGH$  (voyez n° 218).

Comme nous venons de donner ci-dessus les volumes de ces diverses portions de cylindre elliptique, et que dans les numéros cités on trouvera les distances de leurs centres de gravité par rapport au plan  $ABF$ , il sera facile d'en déduire leurs momens par rapport au même plan.

230. Les éléments parallèles au plan  $ABF$  de toutes ces diverses portions de cylindre elliptique étant semblables aux éléments correspondans des portions correspondantes du cylindre circulaire, les distances des centres de gravité des éléments des portions de cylindre elliptique, par rapport au plan  $AKLC$ , seront aux distances des éléments correspondans des portions correspondantes du cylindre

circulaire, par rapport au même plan, comme les lignes homologues de ces élémens semblables, et par conséquent comme les demi-axes de l'ellipse.

231. Il suit de là, 1° que si  $g$  est la distance du centre de gravité de la pyramide  $Ac\ell C$ , et  $G$  celle du centre de gravité de la pyramide  $AbdC$ , on aura

$$g : G :: B : A.$$

Mais (n° 203) 
$$g = \frac{3 \text{ seg. } Cac}{4a}$$

donc 
$$\frac{3 \text{ seg. } Cac}{4a} : G :: B : A,$$

d'où 
$$G = \frac{3 A \text{ seg. } Cac}{4 Ba} \dots (114)$$

232. Il suit encore de là que si  $g$  est la distance du centre de gravité du solide  $AleGHC$ , et  $G$  celle du centre de gravité du solide  $hdCAKL$ , on aura

$$B : A :: g : G.$$

Mais (n° 221) 
$$g = \frac{4 B \times ac \times \text{tang. } \frac{1}{2}m - 3 \text{ seg. } Cac}{2 (3 \text{ arc } Cc - 2ac)};$$

donc 
$$B : A :: \frac{4 B \times ac \times \text{tang. } \frac{1}{2}m - 3 \text{ seg. } Cac}{2 (3 \text{ arc } Cc - 2ac)} : G$$
  

$$= \frac{A (4B \times ac \times \text{tang. } \frac{1}{2}m - 3 \text{ seg. } Cac)}{2B (3 \text{ arc } Cc - 2ac)} \dots (115)$$

233. Si du rayon  $AB = R$  on retranche la distance du centre de gravité du coin  $AFCLK$  (fig. 60) au plan  $ACLK$ , trouvée (n° 223), nous aurons la distance du même centre de gravité par rapport au plan  $BFED$ , et cette distance sera

$$g = R - R \times 0,303 = R (1 - 0,303) = R \times 0,697 \dots (216)$$

234. Cette distance sera la même, par rapport au même plan  $BFED$ , pour le centre de gravité du coin double de  $AFCLK$ , dont la forme est indiquée dans la fig. 62 par  $CIFGHC$ . Ainsi, la distance du centre de gravité du coin  $CIFGHC$  (fig. 62), par rapport au plan tangent mené par la génératrice  $CB$  parallèlement au plan  $IFGH$ , sera de même

$$g = R \times 0,697 \dots (117),$$

$R$  étant le rayon  $KC$ .

235. Nous avons trouvé (n° 218) que le volume du solide  $bCALd = \frac{Rb (3A - 2a)}{6}$  (fig. 60); celui du coin entier  $AFCLK$  s'obtiendra en observant que, dans ce cas,  $A = CB = \frac{1}{4} \text{ cir.} = \frac{pR}{2}$ , et que  $a = CA = R$ ; en substituant on aura donc

$$\begin{aligned} \text{vol. coin AFCLK} &= \frac{Rb}{6} \left( \frac{3pR}{2} - 2R \right) = \frac{R^2b}{12} (3p - 4) \\ &= R^2b \times \frac{3 \times 3,142 - 4}{12} = R^2b \times 0,452 \end{aligned}$$

Par conséquent (fig. 62), on aura

$$\text{vol. coin ICFGH} = R^2 \times KE \times 2 \times 0,452 ;$$

ou bien, à cause que  $2KE = DL$ ,

$$\text{vol. coin ICFGH} = R^2 \times DL \times 0,452 \dots (118)$$

236. Le moment de ce coin, par rapport au point C, s'obtiendra en multipliant ce dernier volume par le bras de levier (117) du n° 234; de sorte qu'on aura

$$\begin{aligned} \text{mom. coin ICFGH} &= R^3 \times DL \times 0,697 \times 0,452 \\ &= R^3 \times DL \times 0,315 \dots (119) \end{aligned}$$

237. La distance du centre de gravité du demi-cylindre IAFGDH (fig. 62), par rapport au plan IHGF, est égale à celle du centre de gravité du demi-cercle GDH par rapport au centre K, qui est  $\frac{4R}{3p}$  (n° 116); par conséquent, par rapport au point C, cette distance sera

$$\begin{aligned} \frac{4R}{3p} + R &= \frac{4R + 3pR}{3p} = \frac{R(4 + 3p)}{3p} = R \times \frac{4 + 3 \times 3,142}{3 \times 3,142} \\ &= 1,42435 \times R \dots (120) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Le volume de ce demi-cylindre sera } \frac{pR^2}{2} \times KE &= \frac{pR^2}{4} \times DL = \\ R^2 \times \frac{3,142}{4} &= R^2 \times DL \times 0,7855 \dots (121) \end{aligned}$$

Par conséquent son moment sera

$$\begin{aligned} \text{mom. } \frac{1}{2} \text{ cyl. IAFGDH} &= R^2 \times DL \times 0,7855 \times 1,42425 \times R \\ &= R^3 \times DL \times 1,1187 \dots (122) \end{aligned}$$

238. La distance du centre de gravité du coin IFLA (fig. 60), par rapport au plan IHGF, prolongé, est  $g = R \times 0,589$  (n° 204); la distance du même centre de gravité, par rapport au plan tangent mené par la droite CB, sera donc

$$g = R + R \times 0,589 = R(1 + 0,589) = R \times 1,589 \dots (123)$$

239. Le volume du coin IFLA est le même que celui du double du coin

ABCF (fig. 60), qui est  $\frac{2R^2 \times BF}{3}$ , ou, pour la fig. 62,  $\frac{2R^2 \times AL}{3} = \frac{R^2 \times DL}{3}$ , le moment de ce coin, par rapport au plan tangent mené suivant CB, sera donc

$$\begin{aligned} \text{mom. coin IFLA} &= \frac{R^2 \times DL}{3} \times R \times 1,589 \\ &= R^3 \times DL \times 0,5296\dots (124) \end{aligned}$$

240. Le volume du coin total LCGDHC (fig. 62), est égal à celui du cylindre AC (*Géom. à trois dim.*, n° 146), il sera donc égal à

$$pR^2 \times KE = \frac{pR^2}{2} \times DL = R^2 \times DL \times 1,571\dots (125)$$

241. Appelons  $g$  la distance du centre de gravité de ce coin total, par rapport au plan tangent, mené par la génératrice CB; le moment de ce coin sera

$$g \times R^2 \times DL \times 1,571\dots (126)$$

Mais ce moment doit évidemment être égal à la somme des moments

1° Du coin ICFGH, qui est  $R^3 \times DL \times 0,315\dots$  (n° 236);

2° Plus celui du demi-cylindre IAFGDH, qui est

$$R^3 \times DL \times 1,118\dots (n° 237);$$

Et 3° plus celui du coin IFLA, qui est  $R^3 \times DL \times 0,5296$  (n° 239): on aura donc

$$g \times R^2 \times DL \times 1,571 = R^3 \times DL (0,315 + 1,118 + 0,5296) :$$

ce qui se réduit à  $g \times 1,571 = R \times 1,9626$ ,

d'où on tire  $g = R \times \frac{1,9626}{1,571} = R \times 1,2492\dots (127)$

pour la distance du centre de gravité du coin total LCGDHC, par rapport au plan tangent mené suivant la génératrice BC.

## LEÇON XI.

Centres de gravité de l'ellipsoïde engendré autour d'un axe horizontal, du parabolôïde et d'un corps généralement quelconque.

242. Supposons un ellipsoïde de révolution, engendré par la demi-ellipse AcB (fig. 58) tournant autour de l'axe AB supposé horizontal, et une sphère engendrée par le demi-cercle LcK, décrit avec le demi-axe Ic pour rayon, tournant aussi autour du même axe AB; supposons, de plus, que l'on coupe, par un plan *re* parallèle à l'axe de rotation, et l'ellipsoïde et la sphère, la section faite dans l'ellipsoïde (*Géom. à trois dim.*, n° 228) sera une ellipse semblable à l'ellipse génératrice, et celle faite dans la sphère un cercle.

Cela posé, je dis que le segment Rce de l'ellipsoïde sera à celui Rcs de la sphère, comme le demi-axe IB de rotation est à celui qui est le rayon de la sphère.

En effet, si l'on divise la flèche Qc, commune aux deux segmens, en une infinité de parties égales par des plans parallèles à celui sur lequel sont les bases de ces segmens, les tranches que ces plans comprendront seront les élémens de ces segmens, et, attendu qu'elles sont infiniment minces, pourront être regardées comme des cylindres de même hauteur, dont les bases seront, elliptiques dans le segment ellipsoïde, et circulaires dans le segment de la sphère : les cylindres appartenant au segment ellipsoïde sont donc à ceux appartenant au segment sphérique, comme les bases des premiers sont aux bases des seconds. Mais les bases circulaires sont inscrites dans les bases elliptiques correspondantes, comme le cercle LcK est inscrit dans l'ellipse génératrice. Mais (*Géom. pl.* n° 798) l'aire du cercle est à celle de l'ellipse, comme le demi-axe, qui sert de rayon au cercle, est à l'autre demi-axe. Ainsi donc, attendu que les sections faites dans le segment ellipsoïde sont des ellipses semblables à l'ellipse génératrice, les élémens du segment sphérique sont à ceux du segment d'ellipsoïde, comme le demi-axe Ic est au demi-axe IB de révolution, et par conséquent les segmens entiers seront dans le même rapport; c'est-à-dire qu'on aura

$$\text{seg. ellip.} : \text{seg. sph.} :: a : b, \dots (128)$$

comme il fallait le démontrer.

243. Supposons que l'ellipse CEDF (fig. 58), et le cercle YEZF soient les projections horizontales de l'ellipsoïde et de la sphère; que l'ellipse TGUH soit celle de la base du segment *rc* de l'ellipsoïde, et le cercle VGXH celle de la

base du segment  $Rcs$  de la sphère. Cela posé, menons l'ordonnée  $PM$  sur l'axe  $EF$ , et les droites  $Pi, Ni$  au centre  $i$  : si, sur ces droites  $iP, iN$  et l'axe  $CD$ , on suppose trois plans verticaux, les deux plans élevés sur les droites  $iD, iP$  comprendront un coin du segment ellipsoïde dont la projection verticale est  $P'ce$ , et les plans élevés sur les droites  $iD, iN$ , un coin du segment sphérique dont la projection verticale est  $N'cs$ . Je dis que ces deux coins de segment sont entre eux, comme le demi-axe de révolution est au demi-axe qui sert de rayon à la sphère. C'est-à-dire que

$$\text{coin sph.} : \text{coin ellip.} :: b : a \dots (129)$$

Cette proposition se démontrerait de la même manière que la précédente.

244. On démontrerait aussi, de la même manière, que les volumes des pyramides qui auraient leurs sommets au centre commun à l'ellipsoïde et à la sphère, et pour base le fuseau  $P'ce$  du segment d'ellipsoïde, et le fuseau  $scN'$  du segment de sphère, sont entre eux, comme les axes de l'ellipse régénératrice ; c'est-à-dire que

$$\text{py. sph.} : \text{py. ellip.} :: b : a \dots (130)$$

245. Je dis maintenant que les distances des centres de gravité de ces mêmes pyramides, par rapport au plan horizontal mené par l'axe de rotation  $AB$  de l'ellipsoïde, sont égales.

En effet, si l'on divise ces pyramides en tranches infiniment minces, par des plans parallèles à celui mené par l'axe de rotation  $AB$  (fig. 58), ces tranches seront proportionnelles, et auront respectivement les centres de gravité à la même distance du plan horizontal ; par conséquent, en projetant les centres de gravité sur le dernier axe  $Ic$ , on aura deux systèmes de forces appliquées aux mêmes points de ce dernier axe, les unes respectivement égales aux élémens de la pyramide ellipsoïde, et les autres respectivement égales aux élémens de la pyramide sphérique ; les forces de ces deux systèmes seront donc proportionnelles ; et, comme elles auront le même point d'application, leurs résultantes auront le même point d'application aussi, qui est évidemment la projection commune sur l'axe  $Ic$  des centres de gravité des pyramides : donc, ces deux centres sont à la même distance de l'axe de rotation  $AB$ .

246. Les momens de ces deux pyramides, rapportés au plan horizontal mené par l'axe de rotation  $AB$ , seront donc dans le même rapport que les volumes de ces pyramides ; on aura donc (n° 244)

$$\text{mom. py. sph.} : \text{mom. py. ellip.} :: b : a \dots (131)$$

247. Les distances des centres de gravité (toujours des mêmes pyramides, mais par rapport à l'axe  $Ic$  perpendiculaire au plan mené par l'axe de rotation  $AB$ ) sont entre elles comme les demi-axes  $b$  et  $a$  de l'ellipse génératrice.

En effet, si l'on divise ces deux pyramides en tranches parallèles au plan mené par l'axe de rotation, ces tranches étant infiniment minces seront, dans la pyramide sphérique, des secteurs circulaires semblables au secteur  $iNX$ , et, dans la pyramide ellipsoïde, des secteurs ellipsoïdes semblables aux secteurs  $iPU$ ; par conséquent, le rapport qu'il y a entre les distances des centres de gravité des secteurs  $iNX$ ,  $iPU$ , par rapport à l'axe  $GH$ , ou à l'axe  $Ic$ , est celui des demi-axes de l'ellipse génératrice; mais les aires de ces mêmes secteurs sont dans le même rapport; les momens des élémens des pyramides seront donc comme les carrés de ces demi-axes, et par conséquent ceux de ces pyramides elles-mêmes: on aura donc

$$\text{mom. py. sph.} : \text{mom. py. ellip.} :: b^2 : a^2 \dots (a).$$

Nommons  $g$  et  $g'$  les distances demandées; nous aurons

$$\text{mom. py. sph.} = g \times \text{vol. py. sph.}; \text{ et } \text{mom. py. ellip.} = g' \times \text{vol. py. ellip.}$$

En substituant dans la proportion (a), il nous viendra

$$g \times \text{vol. py. sph.} : g' \times \text{vol. py. ellip.} :: b^2 : a^2 \dots (132)$$

Mais nous avons vu (n° 244) que

$$\text{vol. py. sph.} : \text{vol. py. ellip.} :: b : a \dots (133)$$

Si nous divisons la proportion précédente par cette dernière, nous aurons

$$g : g' :: b : a \dots (134)$$

#### Centres de gravité des corps paraboloides de révolution.

248. *Le centre de gravité G d'un parabolöide engendré par la parabole ACB (fig. 51), tournant sur son axe CD, est sur cet axe à une distance CG du sommet C égal à  $\frac{2}{3}$  CD.*

En effet, inscrivons le triangle ACB dans la parabole génératrice, et divisons la hauteur DC en une infinité de tranches infiniment minces: ces tranches pourront être regardées dans le parabolöide comme des cylindres droits de même hauteur, et dans le triangle ACB, comme les élémens de ce triangle. Les cylindres élémentaires du parabolöide ayant même hauteur, seront entre eux comme leurs bases, qui sont entre elles comme les carrés de leurs rayons, c'est-à-dire, des ordonnées de la parabole génératrice; mais les carrés de ces derniers (*Géom. pl. n° 454*) sont comme les abscisses comptées à partir du sommet C; les cylindres élémentaires du parabolöide seront donc comme ces abscisses; or les élémens du triangle ACB sont comme ces mêmes abscisses; donc, les élémens du parabolöide sont proportionnels à ceux du triangle, mais ces mêmes élémens

ont respectivement les mêmes centres de gravité situés sur l'axe de rotation CD ; donc enfin le centre de gravité du parabolôide sera le même que celui du triangle ACB, qui est le point G de l'axe CD, à une distance du sommet C égale à  $\frac{2}{3}$  CD, ce qu'il fallait démontrer.

249. Il est évident que la distance du centre de gravité d'un coin quelconque d'un segment ACB de parabolôide, par rapport au plan tangent perpendiculaire à l'axe de rotation CD, est la même que celle du centre de gravité du segment entier.

250. Le volume d'un segment parabolôide (n° 159) est  $\frac{pab^2}{2}$  ; si donc  $m$  est le nombre des degrés d'un coin, le volume de ce dernier sera  $\frac{mpab^2}{2 \times 360}$  ; si nous multiplions ce volume par  $\frac{2}{3}$  DC =  $\frac{2a}{3}$ , (n° 249) il nous viendra

$$\text{mom. coin parab.} = \frac{mpa^2b^2}{3 \times 360} \dots (135)$$

251. Le moment du même coin parabolôide, par rapport à l'axe de rotation CD, est exprimé par la formule suivante :

$$\text{mom. coin. parab.} = \frac{4p'a^2b \sin. \frac{1}{3} m}{15} \dots (136)$$

En effet, divisons la flèche DC en une infinité de parties, par des plans perpendiculaires à l'axe de rotation CD ; ces plans comprendront des cylindres droits, dont les hauteurs infiniment petites, mais inégales entre elles, seront représentées par  $h, h', h'', h'''$ , etc., et dont les bases seront des secteurs de cercle d'un nombre de degrés, représenté par  $m$ , qui auront pour rayon les ordonnées de la parabole génératrice CB, qui répondent respectivement aux abscisses  $h, h + h', h + h' + h''$ , etc. Nommons  $y, y', y'', y'''$ , etc., ces ordonnées ; les volumes de ces cylindres seront

$$\frac{mpy^2h}{360}, \frac{mpy'^2h'}{360}, \frac{mpy''^2h''}{360}, \frac{mpy'''^2h'''}{360}, \text{etc.} \dots (a)$$

L'équation de la parabole (Géom. pl. n° 449) donnera

$$y^2 = p'x, \quad y'^2 = p'x',$$

retranchons ces équations membre à membre, il viendra

$$y'^2 - y^2 = p'(x' - x) \quad \text{ou} \quad (y + y')(y' - y) = p'(x' - x).$$

Mais  $x' - x = h$  ; donc  $(y + y')(y' - y) = hp'$ .

Or, quand  $m$  est infiniment petit,  $y'$  diffère infiniment peu de  $y$  ; de sorte que si leur différence infiniment petite est  $d$ , on aura  $y' - y = d$ , et par conséquent

$$(y + d + y) d = hp', \text{ ou } 2yd + d^2 = hp' \dots (b)$$

mais  $d$  étant infiniment petit,  $d^2$  peut être supposé égal à zéro, car  $d^2$  est infiniment petit par rapport  $d$ , ce qui réduit l'expression (b) à

$$2yd = hp', \text{ d'où } h = \frac{2yd}{p'}, \text{ ou } h = \frac{2y}{p'},$$

en prenant  $d$  pour unité infiniment petite; on aura donc

$$h' = \frac{2y'}{p'}, h'' = \frac{2y''}{p'}, h''' = \frac{2y'''}{p'}, \text{ etc.}$$

si donc nous substituons dans les expressions (a), il nous viendra

$$\frac{2mpy^3}{360 p'}, \frac{2mpy'^3}{360 p'}, \frac{2mpy''^3}{360 p'}, \frac{2mpy'''^3}{360 p'}, \text{ etc.}$$

Les distances des centres de gravité de ces secteurs de cylindres (note \* de la page 43), seront respectivement

$$\frac{240 y \sin. \frac{1}{2}m}{pm}, \frac{240 y' \sin. \frac{1}{2}m}{pm}, \frac{240 y'' \sin. \frac{1}{2}m}{pm}, \text{ etc.}$$

Les moments de ces secteurs de cylindres seront donc

$$\frac{4y^4 \sin. \frac{1}{2}m}{3 p'}, \frac{4y'^4 \sin. \frac{1}{2}m}{3 p'}, \frac{4y''^4 \sin. \frac{1}{2}m}{3 p'}, \text{ etc.}$$

En faisant la somme de ces moments, il viendra donc

$$\text{mom. coin. parab.} = \frac{4 \sin. \frac{1}{2}m}{3 p'} (y^4 + y'^4 + y''^4 + y'''^4 \dots)$$

Mais nous venons de prendre pour unité infiniment petite les différences successives entre les  $y, y', y'', \text{ etc.}$  Si donc  $y = 1$ , on aura  $y' = 2, y'' = 3, y''' = 4, \text{ etc.}$ , et le moment ci-dessus sera

$$\text{mom. coin. parab.} = \frac{4 \sin. \frac{1}{2}m}{3 p'} (1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 \dots b^5)$$

$b$  étant égal à  $DB$ .

Mais (note  $\alpha$ ) la limite des 4<sup>e</sup> puissances des nombres naturels, depuis 1 jusqu'à  $b$ , l'unité étant infiniment petite, est  $\frac{b^5}{5}$ ; par conséquent

$$\text{mom. coin. parab.} = \frac{4b^5 \sin. \frac{1}{2}m}{3 \times 5 p'} = \frac{4p'a^2b \sin. \frac{1}{2}m}{15} \dots (137)$$

en observant que  $b^4 = p'^2 a^2$ , résultat conforme à l'énoncé de la question.

252. Dans le n° 250, nous avons vu que le volume d'un coin paraboloidé était  $\frac{mpab}{2 \times 360}$ ; si nous divisons le moment ci-dessus par ce volume, en nommant  $g$  la

distance du centre de gravité de ce coin à l'axe de rotation, il viendra

$$g = \frac{4\rho'a^2b \sin. \frac{1}{2}m \times 2 \times 360}{15 mpab^2} = \frac{8 \times 360 \rho'a \sin. \frac{1}{2}m}{15 mpb} \dots(138).$$

253. *Supposons, pour finir ce qui est relatif aux centres de gravité, un corps d'une forme quelconque, mais terminé d'un côté par un plan supposé horizontal pour fixer les idées (que nous prendrons pour plan de projection horizontale), et demandons-nous le centre de gravité de ce corps.*

Pour cela soit ABCH (fig. 59) la trace horizontale de la surface du corps ; DEG sa projection verticale dans un plan perpendiculaire à une droite AC menée, dans le plan de projection horizontale, au travers du corps, et IKL une seconde projection verticale dans un plan parallèle à cette droite AC. Perpendiculairement à cette droite AC, menons des plans verticaux dont les traces horizontales soient les droites *ab, cd, ef, BH, gh, ik, lm*, et de telle sorte que ces plans divisent la droite AC en parties égales, assez petites, pour que les arcs *Aa, ac, ce*, etc., compris entre leurs traces horizontales, puissent être considérés comme des lignes droites sans erreur sensible. Supposons ensuite que les courbes DEG, *g'r'h', o'g''k'* et *r't'm'* soient les projections verticales des intersections de la suite des plans verticaux perpendiculaires à la droite AC, avec la surface du corps. Les secondes projections verticales de ces mêmes sections seront les droites *b'b'', d'd'', f'f''*, etc.

Actuellement, supposons que d'après le n° 142 on ait déterminé les aires et les centres de gravité des surfaces AEG, *g'r'h', o'g''k', r't'm'*,... Nommons *S, S', S'', S'''*... les aires de ces surfaces, et *g, g', g'', g'''*,... les distances à l'axe DM des centres de gravité de ces mêmes surfaces, et enfin appelons *m* l'épaisseur des tranches faites dans le solide.

Ces tranches étant très-minces, pourront être regardées comme des cylindres droits d'une hauteur égale à leur épaisseur, et dont les bases seront ces sections elles-mêmes ; ces cylindres excéderont un peu la tranche à laquelle ils correspondront, mais d'autant moins que les tranches seront plus minces.

Les centres de gravité de ces cylindres se projeteront (sur le plan vertical dont la ligne de terre est la droite DG), sur les centres de gravité des aires que nous avons appelées *S, S', S'', S'''*... ; par conséquent, les distances de ces centres de gravité à l'axe DM, ou plutôt au plan vertical dont les traces sont les droites DM, DB, seront respectivement *g, g', g'', g'''*....

Les moments de ces cylindres, à partir de celui dont la base a pour projection horizontale la droite *lm*, seront :

- 1°. Mom. du cyl. *r't'm'* =  $S \times m \times g$ ,
- 2°. Mom. du cyl. *o'g''k'* =  $S' \times m \times g'$ ,

3°. Mom. du cyl.  $g' r'' h' = S'' \times m \times g''$ ,

4°. Mom. du cyl. DEG =  $S'' \times m \times g''$ ,

etc.

La somme de ces momens, qui est

$$m(Sg + S'g' + S''g'' + S'''g''')$$

sera égale au moment du solide, dont le volume est

$$m(S + S' + S'' + S''' \dots).$$

Si donc nous appelons G son bras de levier, nous aurons

$$G \times (S + S' + S'' + S''' \dots) = Sg + S'g' + S''g'' + S'''g''' \dots \dots (139)$$

d'où 
$$G = \frac{Sg + S'g' + S''g'' + S'''g''' \dots}{S + S' + S'' + S''' \dots} \dots (140)$$

Pour avoir les momens par rapport au plan dont les traces sont les droites IA, IN, on observera que les distances des centres de gravité des cylindres successifs, à partir de celui dont la base a pour projection horizontale la droite  $ab$ , sont respectivement  $\frac{1}{2}m$ ,  $\frac{3}{2}m$ ,  $\frac{5}{2}m$ ,  $\frac{7}{2}m$ , etc.

Ainsi, les momens de ces cylindres seront

1° Mom. du cyl.  $r' t' m' = S \times m \times \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m^2 \times S$ ,

2° Mom. du cyl.  $o' g'' k' = S' \times m \times \frac{3}{2}m = \frac{3}{2}m^2 \times S'$ ,

3° Mom. du cyl.  $g' r'' h' = S'' \times m \times \frac{5}{2}m = \frac{5}{2}m^2 \times S''$ , etc.

La somme de ces momens sera donc

$$\frac{m^2}{2} (S + 3S' + 5S'' + 7S''' \dots)$$

On aura donc, en appelant  $G'$  la distance du centre de gravité du corps au plan NIA,

$$G' (S + S' + S'' + S''' \dots) = \frac{m^2}{2} (S + 3S' + 5S'' + 7S''' \dots) \dots (141)$$

et par conséquent

$$G' = \frac{m(S + 3S' + 5S'' + 7S''' \dots)}{S + S' + S'' + S''' \dots} \dots (142).$$

254. S'il y avait une autre partie du corps au-dessous du plan horizontal, on chercherait les distances de son centre de gravité par rapport aux mêmes plans de momens, et ensuite, le moment résultant de ces deux portions du corps. Ainsi, au moyen des formules précédentes, on pourra trouver la position de la verticale, passant par le centre de gravité d'un corps quelconque.

Si l'on voulait la distance de ce centre de gravité par rapport au plan horizontal, on prendrait les momens par rapport à ce plan, au moyen de la for-

mule (139) ci-dessus, en supposant dans cette formule que  $g, g', g'', g'''$ ... seraient les distances des centres de gravité des tranches verticales, par rapport au plan horizontal.

Cette méthode est générale, mais elle est un peu fatigante par la longueur des calculs arithmétiques qu'elle entraîne avec elle dans la pratique, et ne donne le centre de gravité que d'une manière approchée; mais, dans les cas où les corps ne sont pas géométriques, elle est indispensable.

## LEÇON XII.

De l'équilibre des corps solides qui s'appuient sur un plan inébranlable, par un ou plusieurs points, en ayant égard ou non au frottement.

255. *Supposons qu'un corps sans pesanteur ne touche un plan inébranlable et parfaitement poli que par un seul de ses points, et que ce corps ne soit poussé sur le plan que par une seule force, qui pourra être la résultante de plusieurs autres; je dis que le corps ne restera en repos, sur le plan, que si la direction de la force*

- 1° *Passe sur le point d'appui,*
- 2° *Est perpendiculaire au plan résistant.*

En effet, 1° si la direction de cette force ne passait pas par le point d'appui, elle aurait un certain moment, par rapport à ce point, dont l'effet serait évidemment de faire tourner le corps, soit d'un côté, soit d'un autre, autour de ce point.

2° Et, si cette même force, passant par le point d'appui, n'était pas perpendiculaire au plan résistant, soit PC (fig. 63) sa direction, faisant un angle aigu ACB avec le plan CB; si AC représente l'intensité de cette force, on pourra la décomposer en deux, l'une CD perpendiculaire au plan d'appui qui sera détruite par la résistance de ce plan, et l'autre CB parallèle à ce même plan. Or, le plan étant infiniment poli, rien ne s'opposera à l'effet de cette dernière force BC; elle aura donc pour résultat de faire glisser le corps sur le plan d'appui.

256. *Je dis maintenant que, dans les mêmes circonstances, les conditions ci-dessus sont suffisantes pour que le corps soit en repos.*

En effet, considérons que si la direction de la force qui pousse le corps sur le plan passe par le point d'appui, le moment de cette force sera nul dans tous les sens, et par conséquent il n'y aura aucun mouvement de rotation autour de ce point d'appui. Et, si en même temps la direction de cette force est perpendiculaire au plan résistant, il ne pourra y avoir aucun mouvement de translation ; car cette direction étant perpendiculaire au plan, le sera aussi à toutes les droites menées par son pied dans le plan ; par conséquent le corps ne pourra glisser dans aucun sens, ou il glissera dans une infinité de directions différentes en même temps ; mais un corps ne peut suivre qu'un seul chemin à la fois ; il restera donc en repos.

257. Il suit de là que si un corps abandonné à la seule action de la pesanteur reste en équilibre sur un plan qu'il ne touche que par un point, 1° la verticale abaissée du centre de gravité du corps passera par le point d'appui ; 2° elle sera perpendiculaire au plan résistant, c'est-à-dire que ce dernier sera horizontal. Réciproquement, si ces conditions sont remplies, le corps restera en repos sur le plan résistant.

258. *Si un corps sans pesanteur s'appuie par deux de ses points sur un plan résistant parfaitement poli, et s'il n'est poussé sur ce plan que par une force (qui pourra être la résultante de plusieurs autres), le corps ne restera en repos qu'autant que, 1° la direction de la force rencontrera le plan sur la droite qui joint les points d'appui, et entre ces points ; 2° cette direction sera perpendiculaire au plan résistant.*

En effet, 1° si cette force ne rencontrait pas le plan sur la droite qui joint les points d'appui, elle aurait un certain moment, soit autour de cette droite, soit autour d'un des points d'appui, et conséquemment il y aurait un mouvement de rotation ; et 2° si cette force n'était pas perpendiculaire au plan résistant, elle pourrait se décomposer en deux, l'une perpendiculaire à ce plan, et qui serait détruite par ce dernier, et l'autre parallèle au même plan, qui ferait glisser le corps.

259. Il suit de là que, si dans ce cas le corps n'était soumis qu'à l'action de son propre poids, il ne pourrait être en équilibre que lorsque le plan résistant serait horizontal, et la verticale abaissée de son centre de gravité rencontrerait la droite qui joint les points d'appui entre ces mêmes points.

260. Pour avoir la pression exercée sur chaque point d'appui, il suffira de déterminer le point C où la verticale GC abaissée du centre de gravité du corps (fig. 64) viendra rencontrer la droite AB qui joint les points d'appui A et B,

et de décomposer le poids du corps en deux autres réciproquement proportionnels (n° 38) aux segmens AC, CB; de sorte que si P est le poids du corps, et p et q les pressions des points A et B, on aura

$$p : q :: BC : AC,$$

d'où  $p + q$  ou  $P : p :: BC + AC$  ou  $AB : BC,$

et  $p + q$  ou  $P : q :: BC + AC$  ou  $AB : AC,$

et, par conséquent,

$$p = \frac{P \times BC}{AB} \text{ et } q = \frac{P \times AC}{AB} \dots (143).$$

261. Si un corps supposé sans pesanteur touche un plan parfaitement poli par trois de ses points, pour qu'une force puisse le tenir en équilibre sur le plan, il faudra, 1° que la direction de cette force soit perpendiculaire au plan résistant; 2° que cette direction rencontre le plan dans le triangle formé par les trois droites menées par les trois points d'appui.

En effet, 1° d'après ce qui précède, la direction de la force doit être perpendiculaire au plan résistant pour qu'il n'y ait glissement d'aucun côté, et, 2° cette direction doit rencontrer le plan résistant dans le triangle des points d'appui, pour qu'il n'y ait de moment autour ni d'aucun côté, ni d'aucun sommet de ce triangle.

262. Si le corps qui a trois points d'appui n'est soumis qu'à l'action de son poids, pour que ce corps reste en repos sur le plan résistant parfaitement poli, il faudra donc, 1° que le plan soit horizontal; 2° que le pied de la verticale abaissée du centre de gravité du corps tombe dans le triangle des points d'appui.

263. Pour avoir dans ce cas la pression de chaque point d'appui, soit ABC (fig. 65) le triangle formé en joignant ces trois points d'appui par des droites, et D le point où la verticale abaissée du centre de gravité du corps vient rencontrer le plan fixe; on prendra ce centre de gravité pour le sommet d'une pyramide triangulaire, dont la base sera le triangle ABC; ensuite on prendra sur la verticale une longueur proportionnelle au poids du corps, que l'on regardera comme la diagonale d'un parallépipède, dont les trois arêtes contiguës seraient celles de la pyramide (n° 64); et le poids sera décomposé en trois forces dirigées suivant ces arêtes; on ira ensuite décomposer chacune de ces dernières respectivement aux points d'appui A, B, C, en deux autres, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire au plan fixe; et cette dernière sera la pression demandée. Nous reviendrons sur ce sujet.

264. On voit, par ce qui précède, que les conditions d'équilibre pour le cas d'un corps qui aurait un nombre plus grand de points d'appui, et même pour le cas où ce nombre étant infini, le corps poserait sur le plan par une

base plane continue quelconque, seraient les mêmes; c'est-à-dire qu'il faudrait que la résultante de toutes les forces qui agiraient sur le corps rencontrât le plan d'appui dans la base du corps, et fût perpendiculaire à ce plan résistant. Enfin, si le corps posé sur sa base n'était soumis qu'à la seule action de son poids, le plan d'appui devrait être horizontal, et la verticale abaissée de son centre de gravité devrait tomber dans la base.

265. Supposons que l'angle CBA (fig. 66) soit la section droite d'un plan horizontal et d'un plan incliné, le côté AB appartenant au plan horizontal, et le côté AC au plan incliné. Si, par un point quelconque C du côté AC, on abaisse la perpendiculaire CB sur l'autre côté AB de l'angle CAB, cette droite CB sera ce qu'on appelle la *hauteur* du plan incliné, la droite AB en sera la *base* et AC la *longueur*.

266. Supposons un corps DE posé par sa base sur le plan incliné AC (fig. 66), que la base du corps et le plan incliné soient parfaitement polis, et que ce corps soit soumis à l'action de son poids et d'une certaine force Q : je dis que, pour que ce corps soit en équilibre sur le plan incliné, il faut,

1° Que la résultante de la force Q et du poids du corps soit perpendiculaire au plan incliné ;

2° Que cette résultante rencontre le plan incliné en un point situé dans la base du corps.

En effet, 1° si la résultante n'était pas perpendiculaire au plan incliné, le corps glisserait sur ce plan; et, 2° si cette même résultante rencontrait le plan incliné hors de la base du corps, ce dernier serait renversé. Ainsi ces deux conditions sont nécessaires; et elles sont suffisantes, puisqu'alors il n'y a ni glissement ni renversement.

267. Il suit de là que, dans le cas d'équilibre, la direction de la force Q est dans le plan de la section droite du plan incliné.

En effet, pour que le poids du corps et la force Q aient une résultante, il faut que les directions de ces deux forces soient dans un même plan, et se rencontrent en un point. De plus, leur résultante, qui doit être perpendiculaire au plan incliné, doit aussi être dans le même plan. Le plan dans lequel doit être la force Q doit donc passer par une perpendiculaire au plan horizontal et par une perpendiculaire au plan incliné; ce plan de la force Q est donc à la fois perpendiculaire à ces deux plans; il sera donc perpendiculaire à l'intersection de ces plans : de sorte que le plan dans lequel la force Q doit être située est celui de la section droite du plan horizontal et du plan incliné, ainsi qu'il fallait le démontrer.

268. Ce qui précède étant posé, supposons que GQ (fig. 66) soit la direction de la force Q, GP la verticale abaissée du centre de gravité du corps DE,

et G le point où ces deux directions se rencontrent. Prenons Ga égal à la force Q et Gb égal au poids du corps; en achevant le parallélogramme GaRb, la diagonale GR de ce parallélogramme sera perpendiculaire au plan incliné, dans le cas d'équilibre (n° 266).

Voyons maintenant quel est le rapport qui existe entre le poids du corps et la force Q. Pour cela il nous suffira de nous rappeler le principe du n° 52, qui nous apprend que,

$$Gb : Ga \text{ ou } bR :: \sin. GRb : \sin. RGb.$$

ou 
$$P : Q :: \sin. GRb : \sin. RGb..... (a),$$

d'où nous tirerons 
$$Q = P \times \frac{\sin. RGb}{\sin. GRb}.....(144)$$

pour la valeur de la force qui tient le corps en équilibre.

Quant à la pression sur le plan incliné, elle est représentée par GR, et le même principe nous fait voir que

$$Gb \text{ ou } P : GR :: \sin. GRb : \sin. GbR,$$

d'où nous tirerons 
$$GR = P \times \frac{\sin. GbR}{\sin. GRb}..... (145)$$

pour la valeur de cette pression.

269. Si la force Q était parallèle au plan incliné, ainsi qu'on le voit fig.67, le triangle bGR serait semblable à CAB qui est rectangle; ce qui donnerait l'angle RGb = CAB, et GRb = 90°. Appelons CAB = a, nous aurons sin. RGb = sin. a, et sin. GRb = sin. 90° = 1; si donc nous substituons dans la proportion (a), il nous viendra

$$P : Q :: 1 : \sin. a,$$

d'où 
$$Q = P \sin. a..... (146)$$

*c'est-à-dire que la force parallèle au plan incliné, qui tient le corps en équilibre, est égale au poids du corps multiplié par le sinus de l'angle d'inclinaison du plan d'appui.*

270. La similitude des triangles bGR, CAB, donne

$$Gb \text{ ou } P : bR \text{ ou } Q :: AC : BC,$$

d'où 
$$Q = \frac{P \times BC}{AC}.....(147)$$

*c'est-à-dire qu'ici la force Q, qui tient le corps en équilibre, est égale au poids du corps multiplié par la hauteur du plan incliné et divisé par la longueur de ce dernier.*

271. Quant à la pression GR, on l'aura en faisant attention que les angles  $bGa$ ,  $GbR$  étant suppléments l'un de l'autre,  $\sin. bGa = \sin. GbC$ . Or  $GbC$  est le complément de  $bGR = a$ , donc  $\sin. bGa = \cos. a$ . Si donc nous substituons dans l'expression générale (145) de GR, en faisant attention que  $\sin. GRb = 1$  dans le cas actuel, nous aurons

$$GR = P \cos. a \dots\dots (148)$$

pour la pression demandée.

272. La similitude des triangles  $bGR$ ,  $CAB$  donne

$$Gb \text{ ou } P : GR :: AC : AB,$$

d'où 
$$GR = \frac{P \times AB}{AC} \dots\dots (149),$$

d'où l'on voit que la pression sur le plan incliné est égale au poids du corps multiplié par la base du plan incliné, et divisé par la longueur de ce dernier.

273. Si la force Q était horizontale, ainsi qu'on le voit fig. 66, le triangle  $bGR$  serait semblable à  $CAB$ ; ce qui donnerait l'angle  $RGb = CAB$ , et  $GRb = 90^\circ - RGb$ ; d'où  $\sin. RGb = \sin. CAB = \sin. a$ , et  $\sin. GRb = \sin. (90^\circ - a) = \cos. a$ .

Si nous substituons dans la valeur de Q du n° 268, nous aurons

$$Q = \frac{P \sin. a}{\cos. a} = P \text{ tang. } a \dots (150).$$

274. La similitude des triangles  $RGb$ ,  $CAB$  donne

$$Gb \text{ ou } P : bR \text{ ou } Q :: AB : BC,$$

d'où 
$$Q = \frac{P \times BC}{AB} \dots\dots (151),$$

ce qui nous fait voir que la force horizontale qui tient le corps en équilibre sur le plan est égale au poids du corps multiplié par la hauteur du plan incliné et divisé par la base de ce plan.

275. Quant à la pression sur le plan dans le cas de la force Q horizontale (fig. 66), on l'aura en observant que le triangle  $GRb$  était rectangle en  $b$ , donnera

$$\cos. bGR \text{ ou } \cos. a : 1 :: Gb \text{ ou } P : GR = \frac{P}{\cos. a} \dots\dots (152)$$

276. Enfin la similitude des triangles  $bGR$ ,  $BAC$  donne

$$bG \text{ ou } P : GR :: AB : AC,$$

d'où on aura 
$$GR = \frac{P \times AC}{AB} \dots\dots (153)$$

c'est-à-dire que la pression sur le plan incliné, lorsque la force  $Q$  est horizontale, est égale au poids du corps multiplié par la longueur du plan incliné et divisé par la base de ce dernier.

Du frottement, et des modifications que ce phénomène apporte dans les principes précédens.

277. Dans ce qui précède, nous avons supposé les surfaces des corps parfaitement polies ; c'est-à-dire que, lorsqu'un corps abandonné à la seule action de la pesanteur s'appuyait sur un plan, la base du corps n'éprouvait, de la part du plan, aucun obstacle à son glissement ; de sorte qu'aussitôt que le plan cessait d'être horizontal, le corps commençait à glisser. Mais la nature ne nous offre aucun corps dont les surfaces soient d'un poli parfait, et l'art le plus exquis reste encore fort loin en arrière de ce degré de perfection : nos glaces, nos miroirs métalliques les plus brillans ne jouissent encore que d'un poli très-éloigné du dernier terme que suppose la théorie précédente. Si maintenant nous comparons les surfaces des corps façonnés pour nos usages ordinaires et particulièrement pour les ouvrages de construction, à ces glaces, à ces miroirs métalliques, nous reconnaitrons que ces corps façonnés à l'ordinaire sont d'un poli incomparablement plus grossier. Aussi lorsque nous plaçons la base d'un corps sur un plan incliné, voyons-nous que ce corps, abandonné à la seule action de la pesanteur, ne glisse sur ce plan que lorsque ce dernier a une certaine inclinaison suffisante ; tandis, répétons-le, qu'une inclinaison infiniment petite suffirait pour permettre au corps de glisser, si le poli était parfait.

278. L'obstacle que la rudesse des surfaces des corps oppose à leur glissement est ce que l'on appelle *frottement*.

Il est donc nécessaire d'avoir égard au frottement toutes les fois qu'on voudra connaître d'une manière précise la valeur de l'effet d'une puissance appliquée à des machines ou à des constructions.

Le rapport du frottement à la pression sur un plan ne peut être déterminé que par l'expérience. Il y a deux moyens fort simples de trouver ce rapport.

279. Le premier moyen consiste à poser un corps par l'une de ses faces sur un plan horizontal ou peu incliné ; à faire augmenter ensuite peu à peu l'inclinaison de ce plan, jusqu'à ce que le corps soit sur le point de glisser. A cet instant on aura soin d'observer et de noter le nombre des degrés de l'inclinaison du plan. Cela posé, on se rappellera que, si la base du corps et le plan incliné étaient l'un et l'autre parfaitement polis, la force avec laquelle le corps tendrait à glisser serait égale à la composante du poids du corps parallèle à la longueur

du plan incliné. Or, cette force (n° 269), est égale à  $P \sin. a$  ( $P$  étant le poids du corps, et  $a$  l'angle d'inclinaison du plan), et la pression normale à ce plan (n° 271) est égale à  $P \cos. a$  : si donc  $f$  est le rapport du frottement à la pression, on aura...  $f P \cos. a = P \sin. a$ , ce qui donne

$$f = \frac{\sin. a}{\cos. a} = \text{tang. } a \dots (153)$$

d'où l'on voit que le rapport du frottement à la pression est la tangente trigonométrique de l'inclinaison du plan d'appui.

280. Comme ce rapport est indépendant de la pression, il s'ensuit qu'il est constant pour une même espèce de corps glissant sur un même plan. L'expérience confirme cette conséquence, du moins quand les pressions ne sont pas trop petites.

L'expérience prouve aussi que ce rapport est indépendant de l'étendue de la surface frottante ; de sorte que la grandeur du frottement dépend uniquement de la pression, et est égale à cette pression multipliée par le rapport  $f$  ou  $\text{tang. } a$  que donne l'expérience.

281. La seconde méthode, pour déterminer ce rapport  $f$ , consiste à disposer, comme l'a fait Coulomb, un plan bien horizontalement, sur lequel glisse le corps par l'action de poids mis dans un plateau de balance attaché à l'extrémité d'une corde qui passe sur une poulie placée à l'extrémité du plan horizontal, pour venir s'attacher au corps qu'on veut faire glisser. Aussitôt que le corps commence à glisser, le poids mis dans le plateau de balance étant divisé par le poids du corps en glissement, ou, ce qui est la même chose, par la pression sur le plan, donnera le rapport  $f$ .

Il est facile de voir que ce rapport  $f$  varie suivant la nature des corps frottants, et suivant que les faces frottantes sont plus ou moins dressées, plus ou moins unies.

282. Rondelet a trouvé que la pierre du liais (calcaire fin et dur), frottant sur la même pierre, les faces frottantes étant bien dressées et passées au grès, l'inclinaison du plan sur lequel le glissement se manifestait était d'environ  $30^\circ$ , par rapport à l'horizon, ce qui donne . . . . .  $f = 0,58$ .

M. Boistard a fait glisser de la pierre de Château-Landon (calcaire fin et très-dur) sur la même pierre, les faces frottantes étant dressées à la boucharde ; il a trouvé que  $f = 0,78$ , ce qui répond à un angle d'inclinaison égal à environ . . . . .  $37^\circ 57'$ .

D'après une observation faite par Perronet, dans son mémoire sur le cintrement et le décintrement des ponts, l'inclinaison des coupes des voussoirs par

rapport à l'horizon est de 30 à 40°, pour qu'ils commencent à glisser, il en résulterait que, moyennement. . . . .  $f = 0,82$ .

Il faut observer que la pierre employée dans les ponts est en général d'un grain rude, et les joints ne sont jamais dressés au point d'être bien unis.

Voici quelques autres résultats que j'ai trouvés.

1° De la petite roche de Paris (calcaire grossier moyennement dur) sur de la même pierre, les faces frottantes étant dressées à l'ordinaire, c'est-à-dire comme on les dresse dans les travaux, le glissement ne s'est manifesté que lorsque l'inclinaison du plan d'appui était de 35° 45', ce qui donne . . .  $f = 0,71$

2° Du liais sur de la petite roche dressée de même; le glissement a commencé sous l'inclinaison de 34° 45', ce qui donne . . . . .  $f = 0,69$

3° Du liais sur du liais, dressé de même; l'angle d'inclinaison a été de 36° 15', ce qui donne. . . . .  $f = 0,73$

4° Du St.-Leu et Vergelet (calcaire tendre et assez fin, mais d'un grain maigre) sur de la petite roche; l'inclinaison du plan d'appui a été de 30° 30', ce qui donne . . . . .  $f = 0,59$

5° Du Saint-Leu sur du Saint-Leu, les faces dressées au marteau de tailleur de pierre seulement; l'angle d'inclinaison a été de 37° 00' ce qui donne. . . . .  $f = 0,75$ .

6° Coulomb a trouvé du chêne sur du chêne bien dressé. . . . . 0,427

7° Du chêne sur du sapin bien dressé. . . . . 0,666

8° Du sapin sur du sapin *idem*. . . . . 0,560

9° De l'orme sur de l'orme *idem*. . . . . 0,458

10° Du chêne sur du chêne, les fibres des faces en contact étant à angle droit les unes sur les autres, et bien dressées. . . . . 0,265

11° Du bois sur des métaux (fer, cuivre....) bien dressés. . . . . 0,198

12° Du fer sur du fer *idem*. . . . . 0,284

13° Du fer sur du cuivre jaune. . . . . 0,263

14° Du cuivre jaune sur du fer, la surface frottante du cuivre étant très-petite. . . . . 0,168

Nous allons maintenant modifier les questions relatives à l'équilibre des corps sur des plans, en ayant égard au frottement.

283. Si un corps n'est appuyé sur un plan que par un point, il ne pourra rester en équilibre, 1° à moins que la résultante P (fig. 63) de toutes les forces qui agissent sur ce corps ne rencontre le plan résistant au point C d'appui; 2° que l'angle ACB, formé par la direction de cette résultante avec le plan résistant CB,

ne soit le complément de celui dont la tangente trigonométrique est le rapport  $f$  du frottement à la pression.

En effet, 1° si la direction de la force ne passait pas par le point d'appui, il y aurait renversement (n° 255); car le frottement n'a aucune influence contre cet effet.

2° Prenons la distance CA proportionnelle à l'intimité de la force P; par le point A abaissons la perpendiculaire AB au plan d'appui; cette perpendiculaire AB sera proportionnelle à la pression sur le plan résistant, et nous aurons  $AB = P \cos. CAB = P \cos. a$ ; de sorte que la résistance provenant du frottement sera exprimée par  $fP \cos. a$ .

Quant à la force avec laquelle le corps glisserait sur le plan, s'il était parfaitement poli, elle sera  $CB = P \sin. a$ ; dans le cas d'équilibre, sous le rapport du glissement, on aura donc

$$fP \cos. a = P \sin. a, \text{ ou } f = \frac{\sin. a}{\cos. a} = \text{tang. } a.$$

Il suit donc de là, et du n° 279, que l'angle  $CAB = a$  est celui de l'inclinaison qu'il faudrait donner au plan d'appui, pour que le corps pût commencer à glisser de lui-même, puisque la tangente trigonométrique de cet angle égale le rapport  $f$  de la pression au frottement; mais l'angle CAB a pour complément celui ACB, que fait la direction de la force avec le plan d'appui, comme il fallait le démontrer.

284. Le même raisonnement appliqué aux cas où le corps a plusieurs points d'appui, ou même, au cas où le nombre des points d'appui étant infini le corps s'appuie par une de ses faces, forcera à conclure que, pour que le corps reste en repos sur le plan, il faut, 1° que la résultante de toutes les forces qui agissent sur le corps rencontre le plan d'appui dans la base du solide; 2° que la direction de cette résultante fasse, avec le plan résistant, un angle qui soit le complément de celui dont la tangente trigonométrique est le rapport  $f$  de la pression au frottement.

285. Quant aux pressions exercées sur les points d'appui ou sur la base du solide, comme elles sont indépendantes du frottement, on les obtiendra, comme il a été dit précédemment, après avoir décomposé la résultante P des forces qui agissent sur le corps en deux autres forces, l'une BC (fig. 63) parallèle au plan résistant, et l'autre AB perpendiculaire à ce plan, et agissant au point C de rencontre de la résultante P avec le plan BC. Au surplus, nous expliquerons, quand il en sera besoin, la manière d'avoir ces pressions.

---

SECTION DEUXIÈME.

**PRINCIPES DE DYNAMIQUE.**

---

LEÇON I.

Du mouvement uniforme rectiligne.

286. Dans la première section nous avons considéré les corps à l'état d'équilibre; dans celle-ci, nous allons les étudier dans leur état de mouvement. Il y a plusieurs espèces de mouvement : le mouvement uniforme et le mouvement varié.

Le mouvement varié est de deux genres; il varie d'une manière uniforme ou d'une manière quelconque. Chacun de ces genres de mouvements variés est accéléré ou retardé. Nous ne nous occuperons que du mouvement uniforme, du mouvement uniformément accéléré, et du mouvement uniformément retardé. Nous supposerons d'abord que ces mouvements se font en ligne droite et dans le vide; c'est-à-dire que nous ferons abstraction de toutes espèces d'obstacles qui pourraient altérer le mouvement des corps, sauf ensuite à avoir égard aux divers obstacles qui peuvent se rencontrer dans les circonstances naturelles.

287. Lorsque le corps en mouvement n'a reçu qu'une seule impulsion, il persévère un temps indéfini sans augmenter ni diminuer son mouvement, en vertu de son inertie (n° 8), de sorte que dans des intervalles de temps égaux il parcourt toujours des espaces égaux, et son mouvement est alors ce qu'on appelle *uniforme*.

288. La vitesse d'un mobile qui se meut uniformément est évidemment proportionnelle à l'espace qu'il parcourt dans un temps donné, pris pour unité; de sorte que si le mobile parcourt 3 mètres dans une seconde de temps, sa vitesse sera dite de trois mètres par seconde. D'après cela il sera facile de déterminer l'espace que parcourrait le mobile dans un nombre donné de secondes; car le mouvement étant uniforme, il suffira de multiplier le nombre des secondes par la vitesse du mobile. Ainsi dans le cas d'une vitesse de 3 mètres par seconde, l'espace parcouru dans 8 secondes sera  $3 \times 8 = 24$  m.

En général, soit  $V$  la vitesse donnée,  $t$  le temps, et  $e$  l'espace; nous aurons

$$e = Vt..... (154).$$

289. De l'équation (154) nous tirerons

$$V = \frac{e}{t} \dots\dots (155)$$

*d'où l'on voit que la vitesse est égale à l'espace parcouru dans un temps donné, divisé par ce temps.*

290. De la même équation (154) on tire

$$t = \frac{e}{V} \dots\dots (156)$$

*c'est-à-dire que le temps nécessaire à un mobile pour parcourir un espace donné, est égal à cet espace divisé par la vitesse du mobile.*

291. Puisque pour un temps et une vitesse donnés, on a  $e = V t$ ; pour une autre vitesse et un autre temps on aura  $e' = V' t'$ ; d'où

$$e : e' :: V t : V' t' \dots\dots (157)$$

*c'est-à-dire que les espaces parcourus sont comme les produits des vitesses par les temps.*

292. Si les temps étaient égaux, la proportion (157) deviendrait

$$e : e' :: V : V' \dots\dots (158)$$

*c'est-à-dire qu'alors les espaces seraient comme les vitesses.*

293. Et si dans la proportion (157) nous supposons les vitesses égales, elle deviendra

$$e : e' :: t : t' \dots\dots (159)$$

*d'où l'on voit que, dans ce cas, les espaces seraient comme les temps. Ce qui est une répétition du principe du n° 288.*

294. Au moment où l'on considère un mobile, il peut avoir déjà parcouru un espace donné  $E$ ; de sorte que l'espace total qu'il aura parcouru quand il se sera écoulé un temps  $t$  à partir dès l'instant où l'on commence de considérer le corps, il faudra à l'espace  $E$ , déjà parcouru, ajouter l'espace  $Vt$  à parcourir dans ce temps  $t$ : ainsi on aura généralement

$$e = E + Vt \dots\dots (160).$$

Quand  $E = 0$ , cette équation se réduit à celle trouvée au n° 288.

295. Dès qu'un corps est mis en mouvement, et aussi long-temps que son mouvement dure, toutes les parties qui le composent ou qui lui sont adhérentes sont soumises à la même vitesse et à la même direction. Il suit de là que lorsqu'une puissance exerce son action pour mettre un corps en mouvement, elle doit se distribuer en autant de parties égales qu'il y a de molécules dans le corps,

pour que chacune d'elles acquière la même vitesse, et puissent toutes marcher de concert, et constituer ainsi la vitesse du corps lui-même.

Si donc le corps ne se composait que d'une seule molécule, pour donner à cette molécule une vitesse donnée, il faudrait une certaine force que nous nommerons 1; s'il y avait deux molécules, il faudrait évidemment une force égale à 2; s'il y en avait 3 il faudrait une force égale à 3, et ainsi de suite; de manière que, pour  $n$  molécules il faudrait une force  $n$  fois celle prise pour unité. Nous ne connaissons les forces que par les effets qu'elles produisent, et conséquemment nous sommes réduits à supposer qu'elles sont proportionnelles aux vitesses qu'elles communiquent sur un même corps et dans les mêmes circonstances; de sorte que les forces peuvent être représentées par les vitesses, et les vitesses par les forces: si donc  $V$  est la vitesse d'une molécule due à l'unité de force,  $F$  la force qui imprimerait cette vitesse à un nombre  $n$  de molécules, on aura

$$\frac{F}{n} = V, \text{ d'où } F = nV. (161)$$

*c'est-à-dire que la force est égale à la vitesse du mobile multipliée par le nombre des molécules de ce dernier.*

296. Mais le nombre des molécules d'un corps est proportionnel à sa masse ou à son poids (n° 98); si donc  $M$  représente la masse du mobile, on aura

$$F = MV \dots\dots\dots (162),$$

*d'où il suit que la force est égale à la vitesse multipliée par la masse.*

297. De l'équation (162) on tire,

$$V = \frac{F}{M} \dots\dots\dots (163)$$

*ce qui nous apprend que la vitesse est égale à la force divisée par la masse.*

298. De la même équation (162) on tire

$$M = \frac{F}{V} \dots\dots\dots (164)$$

*d'où nous voyons que la masse est égale à la force divisée par la vitesse.*

299. Puisque, en général,  $F = MV$ , si nous avons un autre mobile, nous aurions  $F' = M'V'$ ; d'où il suit que

$$F : F' :: MV : M'V' \dots\dots\dots (165)$$

*c'est-à-dire que les forces sont entre elles comme les produits des masses par les vitesses.*

300. Si les vitesses étaient égales, la proportion (165) deviendrait

$$F : F' :: M : M' \dots\dots (166)$$

et nous ferait voir que *les forces sont proportionnelles aux masses.*

301. Si les masses étaient égales, la proportion (165) se réduirait à

$$F : F' :: V : V' \dots\dots (167)$$

d'où l'on voit que *les forces sont proportionnelles aux vitesses qu'elles produisent*, ce qui est une suite nécessaire du principe du n° 295.

302. Enfin, supposons que les forces soient égales; la proportion (165) nous donnera  $MV = M'V'$ , d'où

$$M : M' :: V' : V \dots\dots (168)$$

c'est-à-dire qu'alors *les vitesses seront en raison inverse des masses.*

303. Si nous comparons cette proportion avec celle (158), après l'avoir mise sous cette forme  $e' : e :: V' : V$ , nous aurons

$$M : M' :: e' : e \dots\dots (169),$$

d'où l'on voit que *les espaces parcourus dans un temps donné sont en raison inverse des masses, quand les forces sont égales.*

304. Si nous comparons cette dernière à la proportion (159) mise sous la forme  $e' : e :: t' : t$ , nous en concluons que

$$M : M' :: t' : t \dots\dots (170)$$

c'est-à-dire que *les temps pour parcourir un espace donné, sont en raison inverse des masses, quand les forces sont égales.*

305. Supposons que deux mobiles aillent dans le même sens et suivant la même droite AC (fig. 68), que l'un parte du point A avec la vitesse V, et l'autre du point B avec la vitesse V', et demandons-nous en quel point C de la droite AB prolongée, ces deux mobiles se rencontreront.

Nommons  $e$  l'espace que devra parcourir le mobile parti du point A; nous aurons  $e = AC$ ; si nous nommons  $e'$  l'espace que devra parcourir le mobile parti du point B, nous aurons  $e' = BC$ : si donc  $a = AB$ , comme  $BC = AC - AB$ , nous aurons  $e' = e - a$ : ainsi les espaces que devront parcourir les deux mobiles seront respectivement  $e$  et  $e - a$ ; d'après l'équation (154), nous aurons donc, les temps étant égaux,

$$e = Vt, \text{ et } e - a = V't.$$

d'où  $t = \frac{e}{V}$ , et  $t = \frac{e-a}{V'}$ ;

et par conséquent  $\frac{e-a}{V'} = \frac{e}{V}$

et en mettant au même dénominateur,

$$eV - aV = eV',$$

d'où  $e(V - V') = aV$

et partant  $e = \frac{aV}{V - V'} \dots (171)$ ,

ce qui nous montre que la distance du point A au point de rencontre C, est égale à celle qui sépare les points de départ multipliée par la vitesse du mobile, qui part du point A, et divisée par la différence des vitesses.

306. Si nous mettons cette valeur de  $e$  dans l'équation  $e' = e - a$ , nous aurons  $e' = \frac{aV}{V - V'} - a = \frac{aV - aV + aV'}{V - V'} = \frac{aV'}{V - V'} \dots (172)$

d'où nous voyons que la distance BC, que doit parcourir le mobile parti du point B, est égale à la distance qui sépare les points de départ multipliée par la vitesse de ce même mobile, et divisée par la différence des vitesses.

307. Si nous mettons la valeur (171) de  $e$  dans l'équation  $t = \frac{e}{V}$ , nous aurons  $t = \frac{a}{V - V'} \dots (172 \text{ bis})$

ce qui nous apprend que le temps que mettront les deux mobiles à se rencontrer, sera égal à la distance qui sépare les points de départ, divisée par la différence des vitesses.

308. Il suit de là qu'un mobile qui aurait une vitesse égale à la différence  $V - V'$  des vitesses des deux mobiles que nous considérons, mettrait autant de temps pour parcourir la distance AB des lieux de départ, qu'en mettraient les deux mobiles en question à se rencontrer.

309. Si nous supposions  $V' = V$ , l'équation (171) donnerait  $e = \frac{aV}{0} = \infty$ ; ce qui nous apprendrait que les deux mobiles ne se rencontreraient jamais, comme cela est évident, puisqu'alors la distance qui les sépare resterait toujours la même; ce que nous avons déjà vu en algèbre (n° 262), dans le problème des courriers, qui est le même que celui-ci.

310. Enfin, si en même temps que  $V = V'$  on avait  $a = 0$ , il viendrait  $e = \frac{0}{0}$ , ce qui veut dire que les deux mobiles ne se sépareraient jamais.

314. Supposons deux mobiles partant l'un du point A (fig. 69) et l'autre du point B, et qu'ils aillent l'un à la rencontre de l'autre, avec des vitesses respectives  $V$  et  $V'$ , et demandons-nous en quel point C, entre les points de départ, les deux mobiles se rencontreront.

Nommons  $e$  l'espace AC, et  $e'$  l'espace CB; si  $a$  représente la distance AB des points de départ, nous aurons  $e' = a - e$ . Il nous viendra donc (n° 288),

$$e = Vt \text{ et } a - e = V't$$

d'où 
$$t = \frac{e}{V} \text{ et } t = \frac{a - e}{V'}$$

et par conséquent 
$$\frac{e}{V} = \frac{a - e}{V'}$$

d'où nous tirerons

$$eV' = aV - eV, \text{ ou } e(V + V') = aV$$

et partant 
$$e = \frac{aV}{V + V'} \dots \dots (173)$$

Ainsi, la distance du point de départ A au point de rencontre C est égale à la distance des points de départ multipliée par la vitesse du mobile A, et divisée par la somme des vitesses.

312. Si nous mettons cette valeur de  $e$  dans l'équation  $e' = a - e$ , il nous viendra 
$$e' = a - \frac{aV}{V + V'} = \frac{aV + aV' - aV}{V + V'} = \frac{aV'}{V + V'} \dots \dots (174).$$

d'où l'on voit que, pour avoir la distance BC, il faut multiplier la distance des points de départ par la vitesse du mobile B, et diviser le produit par la somme des vitesses.

313. Mettons la valeur (173) de  $e$  dans l'équation  $t = \frac{e}{V}$ , il nous viendra

$$t = \frac{a}{V + V'} \dots \dots (175)$$

ce qui nous fait voir qu'un mobile qui aurait une vitesse égale à la somme des vitesses des deux précédents, parcourrait l'espace AB dans le même temps que ces deux mobiles mettraient à se rencontrer.

314. Quand, dans le mouvement des corps, les masses sont égales, les vitesses sont proportionnelles aux forces d'impulsion (n° 301); nous pourrions donc, dans ce cas, représenter les forces et les vitesses qu'elles produisent par les mêmes longueurs rectilignes (n° 12).

Cela posé, supposons un mobile A (fig. 70), soumis à deux impulsions simul-

tanées, l'une P tendant à faire parcourir au mobile A la direction AB avec une vitesse représentée par la longueur AB, et l'autre Q tendant à lui imprimer la direction AC avec la vitesse représentée par la longueur AC ; il est clair, d'après le principe du parallélogramme des forces (n° 50) que le mobile prendra la direction AD de la diagonale du parallélogramme ABDC, formé sur les droites AB, AC, et aura une vitesse représentée par la longueur AD de cette diagonale.

Ainsi, en nommant  $v$  la vitesse AB,  $u$  celle AC et  $V$  celle AD, nous aurons (n° 51 et suivans),

$$\begin{array}{l} 1^{\circ} \quad v : u : V :: \sin. DAC : \sin. DAB : \sin. BAC... \\ \text{ou} \quad v : u : V :: \sin. (V, u) : \sin. (V, v) : \sin. (v, u)... \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1^{\circ} \\ \text{ou} \end{array}} \right\} \dots (176)$$

$$\begin{array}{l} 2^{\circ} \quad V^2 = v^2 + u^2 + 2vu \cos. BAC... \\ \text{ou} \quad V^2 = v^2 + u^2 + 2vu \cos. (v, u)... \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2^{\circ} \\ \text{ou} \end{array}} \right\} \dots (177)$$

Ainsi on pourra résoudre sur les vitesses les mêmes problèmes que ceux que nous avons résolus aux n° 54 et suivans, sur les forces.

315. Si l'angle des deux forces d'impulsion P et Q était droit, on tomberait dans les formules du n° 60 et suivans, et pour approprier ces formules au cas des vitesses, on y remplacerait P par  $v$ , Q par  $u$  et R par  $V$ . Ainsi ce serait une répétition inutile que de résoudre ici sur les vitesses les mêmes problèmes que nous avons résolus aux numéros cités sur les forces P, Q, R qui leur sont proportionnelles.

## LEÇON II.

Du mouvement uniformément et continûment varié; de la chute des corps graves, et de la direction que prennent ces corps lorsqu'ils sont animés simultanément d'une vitesse uniforme, dans un sens quelconque, et de l'action de la pesanteur.

316. *Supposons qu'un mobile reçoive continuellement une même impulsion  $g$  à chaque instant infiniment petit; et demandons-nous l'espace  $e$  qu'aura parcouru le mobile au bout d'un temps donné  $t$ .*

Il est clair qu'au commencement du premier instant le mobile, recevant la première impulsion  $g$ , aura une vitesse uniforme, pendant la durée de cet instant infiniment petit, qui sera égale à  $g$ ; au commencement du second instant, le mobile recevra une nouvelle impulsion  $g$ , qui, s'ajoutant à la pre-

mière, lui donnera une vitesse égale à  $2g$ ; au commencement du troisième instant; le mobile recevra une troisième impulsion qui, s'ajoutant aux deux premières, lui donnera une vitesse égale à  $3g$ , et ainsi de suite, jusqu'au  $t^{\text{m}}$  instant. Les vitesses ou les espaces parcourus d'un mouvement uniforme dans les instans successifs, seront donc respectivement

$$g, 2g, 3g, 4g, 5g \dots tg \dots (a).$$

La somme de tous ces espaces successifs sera évidemment égale à l'espace total que le mobile parcourra depuis le premier jusqu'au  $t^{\text{m}}$  instant. Si donc nous nommons  $e$  cet espace total, nous aurons

$$e = g + 2g + 3g + 4g \dots + tg = g(1 + 2 + 3 + 4 \dots t) \dots (b).$$

Mais la parenthèse du second nombre est la suite des nombres naturels depuis 1 jusqu'à  $t$ , ou, comme l'unité est ici infiniment petite, depuis 1 jusqu'à l'infini. La limite de cette somme (note  $\alpha$  de la page 50), sera donc  $\frac{t^2}{2}$ ; en substituant cette valeur de la parenthèse dans l'équation (b) il nous viendra

$$e = \frac{gt^2}{2} \dots (178).$$

317. La vitesse acquise au bout du temps  $t$  est évidemment le dernier terme de la suite (a); ainsi, si nous nommons  $V$  cette vitesse, nous aurons

$$V = tg \dots (179)$$

318. Si nous avons un autre mobile soumis à la même force accélératrice, nous aurions (équ. 178)  $e' = \frac{gt'^2}{2}$ ; de sorte que si nous comparions cette équation à celle (178), nous aurions

$$e : e' :: \frac{gt^2}{2} : \frac{gt'^2}{2} :: t^2 : t'^2 \dots (180)$$

d'où l'on voit que *les espaces parcourus sont comme les carrés des temps*. Ainsi, si les temps suivent la progression 1, 2, 3, 4, etc., les espaces suivront celles-ci 1, 4, 9, 16, etc.

319. Pour un temps  $t'$ , l'équation (179) nous donnera  $V' = t'g$ ; en comparant ce résultat à celui (179), nous aurons

$$V : V' :: tg : t'g :: t : t' \dots (181)$$

d'où nous voyons que *les vitesses sont comme les temps*. Comme on pourrait le conclure de ce qui a été dit au n° 316.

320. En extrayant la racine carrée de tous les termes de la proportion (180),

il nous viendra  $\sqrt{e} : \sqrt{e'} :: t : t' \dots (182)$

c'est-à-dire que les temps sont comme *les racines carrées des espaces parcourus*.

321. En comparant les proportions (181) et (182), nous en concluons

$$V : V' :: \sqrt{e} : \sqrt{e'} \dots (183),$$

ce qui nous apprend que *les vitesses sont entre elles comme les racines carrées des espaces parcourus*.

322. Si nous multiplions les deux membres de l'équation (179) par  $t$ , nous aurons

$$tV = gt^2;$$

le premier membre de ce résultat est l'espace que parcourait le mobile d'un mouvement uniforme, pendant un temps égal à celui déjà écoulé, si la force accélératrice venait à cesser d'agir à l'expiration du temps  $t$ ; mais pendant le même temps, le mobile a parcouru l'espace  $e = \frac{gt^2}{2}$ , d'où  $2e = gt^2$ ; nous

aurons donc  $tV = 2e \dots (184),$

d'où nous voyons *qu'un mobile qui se meut d'un mouvement uniformément et continûment accéléré a acquis, au bout d'un temps donné  $t$  quelconque, une vitesse  $V$  capable de lui faire parcourir, d'un mouvement uniforme, un espace double de celui qu'il a déjà parcouru dans le même temps*.

323. Nous avons supposé le mobile en repos au premier instant de l'observation; mais on pourrait le supposer déjà animé d'une certaine vitesse uniforme  $V'$ , qu'il aurait acquise d'une manière quelconque avant le premier instant de l'observation, ce qui ferait parcourir au mobile un espace égal à  $Vt$ , dans le même temps que la force accélératrice  $g$ , lui ferait parcourir (n° 316) l'espace  $\frac{gt^2}{2}$ ; si donc, dans ce cas, nous nommons  $e$  l'espace total, nous aurons généralement

$$e = V't + \frac{gt^2}{2} \dots (185).$$

324. S'il s'agissait d'un mouvement retardé uniformément suivant la même loi qu'au n° 316, nous aurions évidemment à retrancher  $\frac{gt^2}{2}$  de  $V't$  pour avoir l'espace parcouru au bout du temps  $t$ . Ainsi l'équation

$$e = V't - \frac{gt^2}{2} \dots (186)$$

sera celle du mouvement uniformément et continûment retardé.

325. Dans ce dernier cas, on pourrait demander dans quel temps la vitesse initiale  $V'$  serait anéantie.

Pour résoudre cette question, il suffirait d'égaliser  $V'$  au second membre de l'équation (179), ce qui donnerait

$$V' = tg, \text{ d'où } t = \frac{V'}{g} \dots (187).$$

Il suit de là que, *le temps demandé est égal à la vitesse initiale  $V'$ , divisée par la force retardatrice.*

326. Si nous mettions cette valeur de  $t$  dans l'équation (186), il nous viendrait

$$e = \frac{V'^2}{g} - \frac{gV'^2}{2g^2} = \frac{2V'^2 - V'^2}{2g} = \frac{V'^2}{2g} \dots (188)$$

Ainsi, *l'espace qu'aurait parcouru le mobile au moment où la vitesse initiale  $V'$  serait anéantie, serait égale au carré de cette vitesse initiale, divisé par deux fois la force retardatrice  $g$ .*

327. Non-seulement la vitesse initiale  $V'$  peut être anéantie par la vitesse retardatrice, mais encore le mobile peut retourner sur ses pas, et revenir au point d'où il était parti. Si l'on nous demandait le temps qui serait nécessaire pour qu'en effet le mobile fût retourné au point de départ, nous n'aurions qu'à supposer  $e = 0$  dans l'équation (186), ce qui donnerait  $V't - \frac{gt^2}{2} = 0$ . Nous tirerions de cette équation

$$t = 0 \text{ et } t = \frac{2V'}{g} \dots (189).$$

La première valeur de  $t$  nous annonce ce que nous savions d'avance, que, dès le commencement du premier instant, le mobile était au point de départ. Quant à la seconde, elle est double de celle du n° 325; ce qui nous apprend que *le temps qu'il faut pour épuiser le mouvement, est égal à celui que mettrait le mobile à retourner du terme de sa courbe, où sa vitesse initiale est anéantie, à son point de départ.*

328. La pesanteur ou gravité étant une force qui agit à chaque instant sur toutes les molécules des corps avec une persévérance qui ne souffre aucune interruption, il est clair que le mouvement d'un corps qui tombe à la surface de la terre est uniformément et continûment accéléré; de plus, il est clair que si un corps était lancé de bas en haut par une certaine force d'impulsion, la pesanteur agissant en sens contraire, le mouvement de ce corps serait uniformément et continûment retardé; de sorte que les principes précédents sont applicables au mouvement de la chute des corps; mais pour appliquer, au cas de la chute des corps graves, les formules que nous avons trouvées ci-dessus sur le mouvement

uniformément varié en général, il faudrait connaître la valeur de  $g$ , c'est-à-dire la vitesse que communique la gravité sur le mobile à chaque unité de temps.

329. Nous avons déjà fait connaître (n° 95) que la gravité d'un corps varie quand on transporte ce corps d'un lieu de la surface terrestre en un autre, ou qu'on le place à une plus grande distance du centre de notre globe ; de manière que cette puissance diminue comme les carrés de ces distances. Mais tant que nous ne déplaçons pas le corps d'une quantité considérable, c'est-à-dire, tant que nous ne sortons pas des circonstances ordinaires, nous pouvons regarder la gravité  $g$  comme une quantité constante. Pour la latitude de Paris, et à la température de la glace fondante, les physiciens ont trouvé que la vitesse qui répond à la gravité qui se développe sur un corps dans une seconde de temps, est  $g = 30^p, 195 = 9^m, 809$  ; ce qui veut dire qu'au bout d'une seconde, la gravité aurait développé dans le mobile une vitesse capable de lui faire parcourir, d'un mouvement uniforme, 30 pieds 195, ou  $9^m, 809$  par seconde, si la pesanteur venait tout à coup à cesser d'agir.

330. En substituant cette valeur de  $g$  dans la formule (178) il nous viendra

$$e = \frac{30^p, 195 \cdot t^2}{2} = 15^p, 0975 \cdot t^2 \dots (190)$$

ou 
$$e = \frac{9^m, 809 \cdot t^2}{2} = 4^m, 9045 \cdot t^2 \dots (191)$$

Ces formules nous feront connaître l'espace que parcourt un corps qui tombe, dans un temps donné  $t$ , l'unité de temps étant la seconde.

331. Si dans ces formules nous faisons  $t = 1$ , elles deviendront

$$e = 4^m, 9045 \text{ ou } e = 15^p, 0975,$$

ce qui nous apprend que *dans la première seconde la chute du corps sera ou de  $4^m, 9045$ , si l'on prend le mètre pour unité de longueur, ou de  $15^p, 0975$ , si l'on prend le pied de Paris ; c'est le mètre que nous adopterons.*

332. Si nous mettons la valeur de  $g$  dans l'équation (179), elle deviendra

$$V = 9^m, 809 \cdot t \dots (192)$$

et nous fera connaître la vitesse acquise par le mobile au bout du temps  $t$ .

333. Enfin, si nous substituons la valeur de  $g$  dans l'équation (186), nous aurons

$$e = V' t - 4^m, 9045 \cdot t^2 \dots (193)$$

pour l'équation qui rendra compte des circonstances du mouvement d'un corps lancé en sens contraire de la pesanteur.

334. Supposons qu'on ait lancé verticalement de bas en haut un solide avec

une force capable de lui donner une vitesse uniforme de 20 mètres par seconde, si la pesanteur n'agissait pas, et demandons-nous à quelle hauteur la gravité permettra à ce corps de s'élever.

Pour résoudre cette question, il nous suffira de substituer  $20^m$  au lieu de  $V'$  et  $9^m,809$  au lieu de  $g$  dans la formule (188), ce qui donnera

$$e = \frac{20 \times 20}{2 \times 9^m,809} = \frac{400}{19,618} = 20^m,389,$$

ainsi ce corps ne s'élèverait qu'à  $20^m,389$ , à cause de la perte de vitesse occasionnée par la pesanteur, et à cette hauteur, le corps sera un instant en repos, et ne se mouvra ensuite qu'en vertu de la pesanteur qui le fera descendre.

Si l'on voulait le temps qu'il faudrait au mobile pour s'élever à cette hauteur, il suffirait de mettre  $20^m$  au lieu de  $V'$  et  $9^m,809$  au lieu de  $g$  dans la formule (187), ce qui donnerait

$$t = \frac{20}{9,809} = \frac{20000}{9809} = 2'',039 \text{ environ.}$$

335. Enfin, demandons-nous le temps nécessaire pour que le mobile soit redescendu au point d'où il était parti; dans ce cas, nous nous rappellerons la remarque du n° 327, et nous verrons que le temps demandé est double du précédent; ainsi  $t = 4'',078$ . On aurait le même résultat par l'équation (189).

336. Supposons, maintenant, un mobile en repos au point A (fig. 71, 72 et 73), et que tout à coup il reçoive une impulsion dans une direction quelconque AG, capable de lui faire parcourir successivement d'un mouvement uniforme, les espaces égaux AD, DE, EF, etc., par seconde, et qu'au même instant il soit livré à l'action de la pesanteur; et demandons-nous quelle sera la direction du mobile.

Il est clair que si la pesanteur n'existait pas, par l'impulsion étrangère à la gravité, le mobile serait au point D au bout d'une seconde; mais comme la pesanteur agit en même temps, ce mobile aura descendu de la quantité  $Aa = 4^m,9045$ ; de sorte que le mobile se trouvant soumis à l'action de deux forces AD, Aa qui se rencontrent au point A, au bout d'une seconde il sera à l'extrémité  $d$  de la diagonale Ad du parallélogramme ADda, dont le côté AD exprime l'impulsion dans le sens AG, et l'autre côté Aa la pesanteur; au bout de deux secondes, sans la pesanteur le mobile serait au point E, et sans l'impulsion suivant AG, la pesanteur le ferait descendre jusqu'au point  $b$ , c'est-à-dire de la quantité  $Ab = 4 \times 4^m,9045$ ; le mobile sera donc à l'extrémité  $e$  de la diagonale du parallélogramme AEeb, et ainsi de suite; d'où l'on voit que le mobile se trouve successivement aux extrémités des diagonales d'une suite de parallélogrammes dont les côtés AD, AE, AF, etc., vont en augmentant sui-

vant les nombres naturels depuis un jusqu'à l'infini, et les côtés  $Aa$ ,  $Ab$ ,  $Ac$ , etc., suivant les carrés de ces mêmes nombres. Mais les côtés  $AD$ ,  $AE$ ,  $AF$ , etc., sont respectivement les ordonnées  $ad$ ,  $be$ ,  $cf$ , etc., de la courbe  $AfB$  qui passe par les extrémités des diagonales de la suite des parallélogrammes  $AadD$ ,  $AbeE$ , etc., c'est-à-dire de la courbe parcourue par le mobile ; les carrés de ces ordonnées seront donc respectivement

$$(ad)^2 = 1, (be)^2 = 4, (cf)^2 = 9, \text{ etc.}$$

et les abscisses respectivement

$$Aa = 1, Ab = 4, Ac = 9 ;$$

donc,  $Aa : (ad)^2 :: Ab : (be)^2 :: Ac : (cf)^2$ , etc.

d'où il suit (*Géon.* pl. n° 453), que la courbe  $AfB$  est une parabole.

337. Représentons par  $V'$  l'impulsion  $AD$ , (fig. 71, 72 et 73) et par  $\frac{1}{2}g$  (n° 322), la chute  $Aa$  due à la gravité dans la première seconde ; en mettant ces valeurs au lieu de  $y$  et de  $x$  dans l'équation  $y^2 = px$  de la parabole, il nous viendra

$$V'^2 = \frac{1}{2}pg, \text{ d'où } p = \frac{2V'^2}{g} \dots (194),$$

d'où l'on voit que le paramètre de cette parabole par rapport à un diamètre quelconque  $AC$ , sera le double du carré de la vitesse d'impulsion divisé par la vitesse donnée par la pesanteur.

338. Si nous comparons cette valeur de  $p$  à l'équation (188), qui est

$$e = \frac{V'^2}{2g},$$

nous verrons que la plus grande hauteur à laquelle pourrait s'élever, contre la pesanteur, un mobile lancé verticalement de bas en haut avec la même vitesse, est le quart du paramètre de la parabole que parcourrait le même mobile lancé avec la même vitesse, dans une direction quelconque.

339. Mettons la valeur (194) de  $p$  dans l'équation  $y^2 = px$ ,

et nous aurons  $y^2 = \frac{2V'^2}{g} \cdot x \dots (195)$

pour l'équation de la parabole que décrira un mobile lancé dans une direction quelconque, abstraction faite de la résistance de l'air.

340. Proposons-nous, maintenant, de trouver la distance à laquelle, par rapport à la verticale  $AC$ , le mobile irait tomber, la hauteur verticale entre le point de départ et le point d'arrivée étant connue.

Pour résoudre ce problème, dans le cas de la figure 72, on calculera d'abord  $BC$ , d'après l'équation  $y^2 = \frac{2V'^2}{g} \cdot x$ , ce qui donnera l'hypothénuse du triangle

rectangle CBM, dont le côté BM est la distance demandée. Pour avoir cette distance, il faudrait connaître l'abscisse AC, car on voit que  $MC = AC - AM = x - h$ , en appelant  $h$  la hauteur AM du point de départ A par rapport au point d'arrivée B. Le triangle rectangle CBM nous donnera

$$(CB)^2 - (CM)^2 = (MB)^2 \text{ ou } (MB)^2 = y^2 - (x - h)^2 \dots (a)$$

Nommons  $\alpha$  l'angle MBC, qui est celui que fait la droite AG avec l'horizon; nous aurons

$$1 : \text{tang. } \alpha :: BM : MC \text{ ou } x - h; \text{ d'où } x - h = MB \text{ tang. } \alpha \dots (b)$$

et par conséquent  $x = h + MB \text{ tang. } \alpha \dots (c)$

En substituant cette valeur (c) de  $x$  dans l'équation de la parabole, il nous viendra

$$y^2 = \frac{2V'^2}{g} (h + MB \text{ tang. } \alpha) \dots (d)$$

et, en mettant dans l'équation (a) la valeur (b) de  $x - h$ , et celle (d) de  $y^2$ , il nous viendra  $(MB)^2 = \frac{2V'^2}{g} (h + MB \text{ tang. } \alpha) - (MB)^2 \text{ tang.}^2 \alpha$

$$\text{d'où } (MB)^2 (1 + \text{tang.}^2 \alpha) - \frac{2V'^2}{g} \cdot MB \cdot \text{tang. } \alpha = \frac{2V'^2 h}{g}$$

$$\text{ou } (MB)^2 - \frac{2V'^2 \text{ tang. } \alpha}{g (1 + \text{tang.}^2 \alpha)} \cdot MB = \frac{2V'^2 h}{g (1 + \text{tang.}^2 \alpha)},$$

et par conséquent, en résolvant cette équation

$$\begin{aligned} MB &= \frac{V'^2 \text{ tang. } \alpha}{g (1 + \text{tang.}^2 \alpha)} \pm \sqrt{\frac{V'^4 \text{ tang.}^2 \alpha}{g^2 (1 + \text{tang.}^2 \alpha)^2} + \frac{2V'^2 h}{g (1 + \text{tang.}^2 \alpha)}} \\ &= V' \times \frac{V' \text{ tang. } \alpha \pm \sqrt{(V'^2 + 2hg) \text{ tang.}^2 \alpha + 2hg}}{g (1 + \text{tang.}^2 \alpha)} \dots (196) \end{aligned}$$

Telle est l'expression de la distance, par rapport à la verticale menée par le point de départ, à laquelle le mobile ira tomber.

On observera que la tang.  $\alpha$  sera positive pour le cas de la fig. 72, négative pour celui de la fig. 73, et nulle pour celui de la fig. 70. Dans ce dernier cas,

$$\text{on aura } MB = BC = V' \sqrt{\frac{2h}{g}} \dots (197)$$

### LEÇON III.

Du mouvement des corps assujétis à glisser sur des lignes données, dans l'hypothèse d'un poli parfait.

341. Supposons qu'un mobile soit en repos au sommet C d'un plan incliné AC (fig. 74), et que tout à coup il soit livré à l'action de la pesanteur; au lieu

de descendre suivant la verticale CB, il glissera sur le plan CA : il s'agit de savoir suivant qu'elle loi son mouvement aura lieu.

Supposons que, dans un temps donné  $t$ , le mobile pût parcourir l'espace Ca sur la verticale CB; d'après le n° 315, nous pourrions décomposer l'espace ou la vitesse Ca en deux autres Cb, Cc, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à la longueur CA du plan incliné, en construisant le parallélogramme abCc; la partie de la pesanteur qui imprimerait au mobile la vitesse Cb étant perpendiculaire au plan AC, sera détruite par la résistance de ce plan, et l'autre partie, parallèle à ce dernier, fera parcourir l'espace Cc au mobile le long du plan, dans le même temps que la pesanteur le ferait descendre de la quantité Ca dans la direction verticale. Or les triangles semblables cCa, ABC donnent

$$AC : CB :: Ca : Cc, \text{ ou } l : h :: \frac{gt^2}{2} : Cc \dots\dots (a)$$

(en appelant  $l$  la longueur AC du plan incliné,  $h$  sa hauteur, et en se rappelant (n° 316), que l'espace Ca =  $e = \frac{gt^2}{2}$ ).

Il est facile de voir que si le mobile descendait verticalement de C en B dans un autre temps  $t'$ , dans le même temps ce mobile descendrait de C en  $f$  sur le plan incliné, le parallélogramme CeBf étant construit sur la diagonale CB; les triangles semblables ABC, CBf, donneront

$$AC : CB :: CB : Cf \text{ ou } l : h :: \frac{gt'^2}{2} : Cf.$$

Si donc nous comparons la proportion (a) à celle-ci, il nous viendra

$$\frac{gt^2}{2} : Cc :: \frac{gt'^2}{2} : Cf \text{ ou } t^2 : t'^2 :: Cc : Cf \dots (198),$$

d'où l'on voit que les espaces parcourus sur le plan incliné sont comme les carrés des temps, tout comme dans le cas de la chute verticale (n° 318).

342. Nommons  $\frac{1}{2}g'$  l'espace parcouru dans une seconde de temps, E l'espace parcouru dans un temps donné  $t'$ ; la proportion (198) nous donnera

$$1 : t'^2 :: \frac{1}{2}g' : E = \frac{gt'^2}{2} \dots\dots (199)$$

Equation toute pareille à celle du n° 316, relative à la chute verticale.

Il suit de là que, la loi que suit la descente d'un corps grave sur un plan incliné, est la même que celle qu'il suit lorsqu'il tombe verticalement.

343. D'après cela il est aisé de voir que si  $V'$  est la vitesse acquise par un mobile glissant sur un plan incliné quelconque, on aura

$$V' = g' t' \dots\dots (200),$$

C'est-à-dire que, la vitesse acquise au bout d'un temps donné, est égale à la force accélératrice sur ce plan incliné, multipliée par le temps donné.

344. Tirons la valeur de  $t'$  de l'équation (200), qui sera  $t' = \frac{V}{g'}$ , pour la mettre dans l'équation (199); il nous viendra

$$E = \frac{V'^2}{2g'} \text{ d'où } V'^2 = 2g'E \dots\dots (a),$$

si maintenant nous faisons attention qu'en supposant  $t = 1$  dans la proportion (a) du n° 341,  $Cc$  devient  $\frac{1}{2}g'$ , nous aurons

$$l : h :: \frac{1}{2}g : \frac{1}{2}g' :: g : g' = \frac{gh}{l} \dots\dots (201),$$

Cela posé, supposons que  $E$  soit la longueur  $l$  du plan incliné, et substituons, dans l'équation (a) ci-dessus, cette valeur de  $E$ , et celle (201) de  $g'$ , nous aurons,

$$V'^2 = 2gh, \text{ d'où } V' = \sqrt{2gh} \dots\dots (202),$$

telle sera la valeur de la vitesse acquise par le mobile, à l'instant où il sera parvenu à l'extrémité inférieure du plan incliné. On voit que l'expression de cette vitesse acquise est indépendante de la longueur du plan incliné, et qu'elle est proportionnelle à la racine carrée de la hauteur  $h$  de ce plan; il faut donc conclure de là que, *la vitesse acquise à l'extrémité inférieure du plan incliné est la même, quelle que soit l'inclinaison de ce plan; de sorte que cette vitesse acquise sera la même, le mobile descendant par le plan CA (fig. 75), que s'il descendait le long de tout autre CD, CE, CF, ou, etc., et par conséquent suivant la verticale CB.*

345. Cherchons le temps nécessaire pour que le mobile parcoure la longueur du plan incliné; pour cela, mettons la valeur (201) de  $g'$  dans l'équation (200), il nous viendra  $V' = \frac{gh}{l}$ ; mettons cette valeur de  $V'$  dans l'équation (202),

et nous aurons  $\frac{gh}{l} = \sqrt{2gh}$ , ou  $\frac{g^2 h^2}{l^2} = 2gh$ ,

ce qui se réduit à

$$ght^2 = 2l^2, \text{ d'où } t^2 = \frac{2l^2}{gh} \dots\dots (a)$$

Supposons un autre plan incliné dont la longueur soit  $l'$ , et la hauteur  $h'$ , nous aurons  $t'^2 = \frac{2l'^2}{gh'}$  il s'en suivra donc

$$t^2 : t'^2 :: \frac{l^2}{h} : \frac{l'^2}{h'} \dots\dots (203).$$

346. Si les temps étaient égaux, on aurait

$$\frac{l^2}{h} = \frac{l'^2}{h'}, \text{ d'où } l^2 : l'^2 :: h : h' \dots\dots (204);$$

d'où l'on voit que, pour que deux plans inclinés fussent parcourus dans le même temps, il faudrait que les carrés de leurs longueurs fussent entre eux comme leurs hauteurs; et réciproquement, lorsque cette condition aura lieu, les temps seront égaux.

347. Il suit de là que, si dans un cercle quelconque ADB (fig. 76), on mène une suite de cordes AC, AD, AE, AF, etc., et que l'on regarde ces cordes comme les longueurs d'une suite de plans inclinés, dont les segmens AG, AH, AI, AK, du diamètre, seraient les hauteurs respectives, un mobile partant du point A mettrait le même temps à parcourir l'un quelconque de ces plans inclinés, et par conséquent le diamètre AB; car (Géom. pl. n° 270)  $(AC)^2 : (AD)^2 : (AE)^2 : (AF)^2 : (AB)^2 :: AG : AH : AI : AK : AB$ ; c'est-à-dire que toutes ces cordes et le diamètre AB satisfont à la condition du n° 346.

348. Supposons une suite de plans inclinés AE, EF, FG, GC, etc. (fig. 77) qui forment la surface d'un demi-prisme creux quelconque, dont la section droite soit le polygone AEFGC...; si un mobile animé par l'action de la pesanteur descend le long du contour de ce polygone, la vitesse qu'il aura acquise au point C, sera la même que s'il était descendu suivant la verticale DC.

En effet, la vitesse qu'il aura acquise au point E, sera la même (n° 344) que celle qu'il aurait acquise en tombant librement de D en H; celle qu'il acquerra de E en F sera la même que celle qu'il aurait acquise de H en I; celle qu'il acquerra de F en G sera la même que celle qu'il aurait acquise de I en K, et ainsi de suite. A chaque station les vitesses sont donc respectivement égales; leurs sommes le seront donc aussi, ce qu'il fallait démontrer.

349. Ce principe a évidemment lieu, quels que soient les longueurs et le nombre des côtés du polygone; il aura donc lieu dans le cas où les côtés de ce polygone seraient infiniment petits, et en nombre infini, c'est-à-dire dans le cas où, au lieu d'un polygone, on aurait la courbe AFCB, nous pouvons donc énoncer ce théorème général, que,

*Quelle que soit la courbe AFC que parcourra un mobile par l'action de la pesanteur, la vitesse qu'il aura acquise en un point quelconque de sa course, sera la même que celle qu'il acquerrait en tombant librement de la même hauteur.*

350. La vitesse qu'aurait acquise le mobile en tombant verticalement de D en C, s'obtiendra en éliminant  $t$  entre les équations (178) et (179), et en tirant la valeur de  $V$  qui sera  $V = \sqrt{2eg} \dots (a)$

Mais nous avons trouvé (n° 326) que la hauteur  $e$  à laquelle peut s'élever un mobile lancé verticalement en sens contraire de la pesanteur, avait pour expression  $e = \frac{V'^2}{2g}$ , d'où nous tirerons  $V' = \sqrt{2eg}$ . Si donc nous comparons cette

équation à celle (a) ci-dessus; nous en concluons que la vitesse acquise au point C est capable de faire remonter le mobile à la hauteur d'où il est descendu, quelle que soit la courbe CB ou CM par laquelle le mobile montera. Il y a plus, c'est que quand le mobile, parti du point C, sera arrivé au point L, sa vitesse aura diminué de manière à être redevenue ce qu'elle était au point F lors de sa descente. Pour les autres points correspondant aux mêmes hauteurs sur la courbe de montée CB, et sur celle de descente CA, il en sera de même, de telle sorte, qu'arrivé au point B situé sur l'horizontale AB, le mobile aura perdu toute sa vitesse; mais à cet instant la force d'impulsion étant épuisée, la pesanteur fera redescendre le mobile, sur la courbe BC, jusqu'au point C, où il aura acquis la même vitesse qu'il avait auparavant à ce point C, et le mobile, en conséquence, remontera jusqu'au point A, en suivant la courbe CB: le mobile continuera indéfiniment de descendre et de monter ainsi de gauche à droite, et de droite à gauche, en glissant sur les deux branches de courbe alternativement, tant qu'aucun obstacle ne viendra pas diminuer la vitesse acquise au point C, à chaque oscillation.

Il ne faut pas conclure de ce qui précède que le mobile descendrait par la courbe dans le même temps que par la verticale; car, dans le premier cas, ce temps serait plus grand que dans le second, ainsi que nous l'avons vu dans la descente sur un plan incliné.

351. Supposons maintenant qu'un mobile soit fixé à l'extrémité A du rayon inextensible BA (fig. 78) d'un cercle, et que dans la direction de la tangente AG et dans le sens de A en G, le mobile reçoive une impulsion; au lieu de suivre la direction de la tangente AG, le mobile parcourra la circonférence ACFA de ce cercle, attendu que le rayon inextensible AB maintiendra le mobile à la même distance du centre B. Il est évident que, pour obliger le mobile à suivre le chemin circulaire, le rayon éprouve une certaine tension qui est occasionnée par la force avec laquelle le mobile tend à se diriger suivant la ligne droite. Ainsi le centre est obligé de résister à cette même force. On, donne le nom de *force centripète*, à celle avec laquelle le mobile est attiré vers le centre, et celui de *force centrifuge* à celle avec laquelle le corps tend à s'échapper suivant la tangente. Déterminons l'une de ces forces égales.

352. Supposons donc que le mobile, au lieu d'avoir suivi la tangente AG (fig. 78), ait parcouru l'arc AC, dans le même temps qu'il aurait parcouru la longueur AG de la tangente; il est clair que la force centripète, et par conséquent la force centrifuge, sera représentée par la longueur GC. Or si l'arc AC est infiniment petit, l'angle ABG sera aussi infiniment petit, c'est-à-dire que la droite GC pourra être regardée comme parallèle à AD, et par conséquent égale à cette dernière; si donc  $f$  est la force centrifuge, nous aurons

$$f = AD \dots (a).$$

Mais si nous menons les cordes AC, CF, nous aurons (*Géom.* pl. n° 151)

$$AF : AC :: AC : AD = \frac{(AC)^2}{AF} \dots\dots (b).$$

Or, l'arc AC étant infiniment petit, peut remplacer sa corde; de plus, AF étant le diamètre du cercle, peut être représenté par 2R; en substituant dans l'équation (b) et ensuite dans l'équation (a), nous aurons

$$f = \frac{(\text{arc})^2}{2R} \dots\dots (205).$$

353. Si la vitesse du mobile est uniforme, les arcs parcourus seront proportionnels à la vitesse; ainsi l'arc pourra être remplacé par la vitesse V; en faisant cette substitution dans l'équation (205), nous aurons

$$f = \frac{V^2}{2R} \dots\dots (206).$$

354. Supposons un autre mobile circulant sur la circonférence d'un autre cercle, avec une autre vitesse uniforme;  $f'$  étant sa force centrifuge, nous aurons  $f' = \frac{V'^2}{2R'}$ ; et en comparant cette valeur de  $f'$  à celle de  $f$ , il nous viendra

$$f : f' :: \frac{V^2}{R} : \frac{V'^2}{R'} \dots\dots (207).$$

Ce qui nous montre que *les forces centrifuges sont comme les carrés des vitesses uniformes, et en raison inverse des rayons des circonférences de cercle parcourues.*

Ainsi, si les rayons étaient égaux, les forces centrifuges seraient comme les carrés des vitesses, et si les vitesses étaient égales, ces forces seraient en raison inverse des rayons.

355. La vitesse d'un mobile assujéti à parcourir la circonférence d'un cercle donné d'un mouvement uniforme, sera évidemment en raison inverse du temps que mettra ce mobile à faire une révolution entière. Ce temps se nomme temps périodique. Ainsi la vitesse sera en raison inverse du temps périodique. Mais il est évident que si la vitesse était la même, le temps périodique serait proportionnel à la circonférence décrite par le mobile, et par conséquent au rayon du cercle. Si donc R et R' sont les rayons des cercles, et t, t' les temps, nous aurons

$$t : t' :: R : R' \dots\dots (208).$$

Mais dans l'hypothèse des vitesses égales, la proportion (207) nous donne

$$f : f' :: \frac{1}{R} : \frac{1}{R'} ;$$

si donc on multiplie ces proportions par ordre, il viendra

$$tf : t'f' :: 1 : 1$$

ce qui veut dire que  $tf = t'f'$ , ou que

$$f' : f :: t : t' \dots\dots (208),$$

c'est-à-dire que *les forces centrifuges, dans le cas des vitesses égales et des rayons différents, sont en raison inverse des temps.*

356. Nous venons de voir que les temps sont en raison inverse des vitesses, de sorte qu'on aura  $t : t' :: V' : V \dots\dots (209)$ ;

Si nous multiplions par ordre les proportions (207) et (208), il nous viendra

$$t^2 : t'^2 :: RV' : R'V,$$

et si nous divisons les deux termes du dernier rapport par  $RR'$ , nous aurons

$$t^2 : t'^2 :: \frac{V}{R'} : \frac{V}{R} \dots\dots (210),$$

d'où il suit que *les carrés des temps périodiques sont en raison inverse des vitesses, divisées respectivement par les rayons.*

357. Supposons maintenant que le mobile se meuve autour du centre B (fig. 78) en étant animé d'un mouvement uniformément et continuellement accéléré; dans ce cas, l'arc décrit dans un temps donné, sera remplacé évidemment par le second membre de l'équation (178); de sorte qu'à l'arc il faudra substituer  $\frac{gt^2}{2}$  dans la formule (205), ce qui donnera

$$f = \frac{g^2 t^4}{4R} \dots\dots (211),$$

d'où l'on voit que, dans cette hypothèse, *la force centrifuge augmenterait dans le rapport de la quatrième puissance du temps*, tandis que, dans le cas d'une vitesse uniforme, cette force reste constante pour la même vitesse et pour le même rayon.

358. Enfin, s'il s'agissait du mouvement retardé, à la place de l'arc de la formule (205), on mettrait le second membre de l'équation (186), et on aurait

$$f = \frac{\left(Vt - \frac{gt^2}{2}\right)^2}{R^2} \dots\dots (212).$$

Cette force centrifuge irait en diminuant en raison inverse du temps.

359. Supposons qu'en un point fixe A (fig. 79) soit suspendu un mobile E par le moyen d'un fil inextensible; si ce fil est dans une situation verticale, le mobile E restera en repos, et le fil, par sa tension, fera équilibre au poids du corps. Mais si l'on dérange le mobile de la verticale pour lui faire prendre la

position B, en le livrant ensuite à l'action de la gravité, la direction rectiligne du fil n'étant plus directement opposée à celle de cette dernière force, le mobile tendra à tomber suivant la verticale; et comme il sera obligé de rester à la même distance du centre A de suspension, à cause de l'inextensibilité du fil, il s'ensuit que le corps descendra non verticalement, mais suivant l'arc de cercle BE. Arrivé au point E, le mobile aura acquis une vitesse (n° 350) capable de le faire remonter de l'autre côté sur l'arc EC jusqu'au point C, situé à la même hauteur que le point de départ B, et dans le même temps, car le fil n'a d'autre effet que d'obliger le mobile à parcourir l'arc de cercle BE, et le corps est dans le même état que s'il glisse librement sur ce même arc par l'action de la pesanteur. Ainsi ce qui a été démontré au n° 350 et suivant, est applicable au cas du mouvement que nous considérons ici. Le corps étant arrivé au point C, aura perdu toute sa vitesse, et l'action de la pesanteur le fera descendre sur le même arc jusqu'en E, où il aura acquis la même vitesse qu'il avait acquise au même point, en descendant du point B; le mobile pourra donc s'élever à ce point B, et redescendre de ce point B au point E pour remonter au point C, et ainsi de suite, tant qu'aucun obstacle ne viendra pas altérer son mouvement. Un corps qui oscille de cette manière, prend le nom de *pendule simple*.

360. La vitesse acquise au point E sera la même que si le mobile descendait verticalement du point D situé au même niveau que le point de départ B (n° 350). Mais (n° 324) les vitesses acquises par un corps tombant librement, sont dans le rapport des racines carrées des hauteurs desquelles ce corps tombe; par conséquent, les vitesses acquises au point E par les pendules qui tomberaient l'un du point B et l'autre du point *m*, seront entre elles comme les racines carrées des hauteurs correspondantes DE, *dE*.

361. Il suit de là que ces vitesses seront proportionnelles aux cordes BE, *mE*; car les carrés de ces cordes (n° 347) sont comme les distances DE, *dE*; c'est-à-dire, que  $(BE)^2 : (mE)^2 :: DE : dE$ ,

d'où  $BE : mE :: \sqrt{DE} : \sqrt{dE}$ ,  
ce qu'il fallait démontrer.

362. Il résulte de là que, si l'on veut que le pendule acquière au point E des vitesses qui croissent comme les nombres 1, 2, 3, 4, etc., il faudra le faire tomber des points *m*, B, *e*, *f*, etc., de la circonférence du cercle, tels que, les cordes Em, EB, *Ee*, *Ef*, etc., suivent la même progression.

363. De ce que les carrés des cordes BE, *mE* sont comme les hauteurs DE, *Ed*, il s'ensuit (n° 346) que si deux mobiles descendaient des points B et *m* en suivant la direction de ces cordes, ces mobiles parcourraient ces cordes dans le même temps, ce qui est conforme à la conséquence du (n° 347).

364. Si donc les arcs BE, mE sont assez petits pour que les cordes qui les soutendent se confondent sensiblement avec eux, le pendule mettra le même temps à descendre du point m que s'il descendait du point B; de sorte que, quoique les amplitudes des oscillations soient différentes, elles se feront dans le même temps. Dans ce cas, on dit que les pendules sont *isochrones*.

365. Par le point B abaissons la verticale Bb, et supposons que la pesanteur g soit représentée par la longueur Bb de cette verticale; en construisant le parallélogramme Bacb, on la décomposera en deux, l'une Bc dans la direction du fil inextensible, et qui sera détruite par la résistance de ce fil, et l'autre Ba dans la direction de la tangente à l'arc de cercle au point B, qui sera la force d'impulsion qui, en se combinant avec la force centripète, fera descendre le mobile, suivant l'arc de cercle BE. Cherchons l'expression de cette force accélératrice, ce à quoi nous parviendrons, en comparant les triangles semblables Bcb, BDA, qui nous donneront

$$AB : BD :: Bb : Ba \quad \text{ou} \quad R : BD :: g : Ba \dots (a).$$

Mais le triangle rectangle BDA donne

$$1 : \sin. BAD :: R : BD$$

donc  $1 : \sin. BAD :: g : Ba = g' = g \sin m \dots (213),$

en nommant m l'angle BAD, et g' la force accélératrice tangentielle.

On voit par cette équation que la force accélératrice g' est nulle au point E, où m = 0, comme cela se conçoit d'avance. Elle diminue dans le même rapport que le sinus de l'arc qui reste à décrire au pendule pour arriver au point E.

366. Si nous avons un autre pendule h (fig. 79) qui, dans ses oscillations décrit un arc d'un même nombre de degrés que le précédent, il serait, d'après l'équation (213), animé par la même force accélératrice g' à chaque instant.

367. De l'équation (213) nous tirerons  $g = \frac{g'}{\sin. m}$ ; d'où nous voyons que le rapport entre la force accélératrice du pendule au sinus de l'arc que ce mobile a à décrire pour arriver au point E (le plus bas de la courbe), est constant.

368. Nous avons vu (n° 345), que

$$t^2 : t'^2 :: \frac{l}{h} : \frac{l'}{h'} \dots (a),$$

t et t' étant les temps nécessaires pour parcourir les longueurs l, l' de deux plans inclinés, dont les hauteurs respectives sont h et h'. Cela posé, compa-

rons deux pendules simples oscillant avec des rayons différens (fig. 79) et décrivant des arcs très-petits. Nous pourrons remplacer  $l$  de la proportion (a) par la corde BE (fig. 79), et  $l'$  par la corde  $hk$ ; mais

$$(BE)^2 = l^2 = 2R \times DE = 2Rh \text{ et } (hk)^2 = l'^2 = 2r \times d'k = 2rh'$$

en substituant dans la proportion (a), nous aurons donc

$$\left. \begin{array}{l} t^2 : t'^2 :: R : r \\ t : t' :: \sqrt{R} : \sqrt{r} \end{array} \right\} \dots (214).$$

D'où l'on voit que les temps des oscillations sont comme les racines carrées des rayons.

369. Si l'on supposait  $t' = 1''$ , et que  $r$  fût réellement la longueur qu'il faudrait donner au pendule pour qu'en effet il battît les secondes (\*), on pourrait résoudre les deux problèmes suivans :

1° La longueur d'un pendule étant donnée, trouver le temps de ses oscillations, ce qui sera donné par la proposition  $t : 1 :: \sqrt{R} : \sqrt{r}$ , d'où

$$t = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}} = \sqrt{\frac{R}{r}} \dots (215).$$

2° Le temps des oscillations étant donné, trouver la longueur du pendule; ce qui sera donné par la proportion  $t^2 : 1 :: R : r$ ;

d'où  $R = rt^2 \dots (216).$

370. Supposons deux mobiles B, F, suspendus au point A (fig. 80), chacun par un fil inextensible AB, AF; si ces mobiles reçoivent des impulsions proportionnelles à leurs masses, et qu'ils aillent indépendans l'un de l'autre, ils parcourront des espaces égaux; or, ils sont tous les deux assujétis à décrire un arc de cercle autour du point A, et ces arcs de cercle ont des rayons différens; pour être égaux en longueur, il faudra donc que celui qui a le plus petit rayon ait le plus grand nombre de degrés: il suit de là que dans le temps que le mobile B viendra en I, le mobile F sera transporté en K; de manière que l'angle IAB < KAB.

Mais si les deux mobiles étaient fixés sur un même fil AB inextensible et inflexible, ils seraient obligés de décrire des arcs d'un même nombre de degrés dans le même temps; d'où l'on voit que le mobile F serait retardé dans sa course

(\*) On a trouvé par expérience que cette longueur était égale à 0<sup>m</sup>, 993, ou trois pieds huit lignes et demie pour la latitude de Paris.

par le mobile B; ce dernier s'emparerait donc d'une partie du mouvement du premier; par conséquent le mobile B gagnerait tout le mouvement perdu par le mobile F, de manière que les deux mobiles oscilleraient de concert, et quand B serait en C, F serait en G sur la même droite CGA. On conçoit, d'après cela, qu'il doit exister un point D, sur le fil, entre les points B et F, tel que si on y appliquait un mobile animé de la même impulsion que les deux autres, mais pouvant se mouvoir indépendamment, les trois mobiles partant au même instant, les deux premiers liés l'un à l'autre arriveraient aux points C et G, au même instant que le mobile D arriverait au point E de la même droite CA. Ce point D se nomme le *centre d'oscillation*, et détermine la longueur AD d'un pendule simple, qui ferait ses oscillations en même-temps que le système des deux mobiles liés entre eux par le fil rigide AB. Le système des deux masses prend le nom de *pendule composé*.

371. Supposons que les arcs d'oscillation soient très-petits, il est facile de concevoir que l'arc DE décrit par le centre D d'oscillation, sera de même longueur que ceux BI, FK qu'auraient décrits les mobiles B, F s'ils eussent été indépendans, car nous pourrions regarder ces trois arcs BI, DE, FK, comme des droites parallèles et de même longueur; si donc par le point E on mène la droite IK parallèle à AB, les arcs ou espaces rectilignes que décriraient librement ces trois mobiles, seront BI, DE et FK. De là on voit que la perte de vitesse du mobile F sera GK, et celle qu'aura gagnée le mobile B sera IC. La quantité de mouvement perdue par le premier sera donc  $GK \times F$ , et celle gagnée par le second  $IC \times B$ . Mais ces deux quantités de mouvement agissent autour du point A, avec les bras de levier AF, AB, les effets qu'elles produisent autour de ce point A sont donc  $GK \times F \times AF$  et  $IC \times B \times AB$ ; or en vertu de l'inertie, le mouvement perdu doit égaler le mouvement gagné; par conséquent

$$GK \times F \times AF = IC \times B \times AB \dots\dots (a).$$

Mais dans le cas des arcs très-petits, les triangles KGE, IEC peuvent être regardés comme étant rectilignes, et dès-lors comme semblables; ce qui nous donnera

$$GE : EC :: KG : IC$$

ou

$$FD : DB :: KG : IC = \frac{BD \times KG}{DF}.$$

Substituons cette valeur de IC dans l'équation précédente, et nous aurons

$$GK \times F \times AF = \frac{BD \times KG}{DF} \times B \times AB$$

ce qui se réduit à

$$DF \times F \times AF = BD \times B \times AB \dots\dots\dots (b),$$

d'où l'on voit que l'une des masses multipliée par le produit des distances de son point d'application au point de suspension et au centre d'oscillation, est égale à l'autre masse multipliée par le produit des distances de son point d'application au point de suspension et au centre d'oscillation.

372. Si les masses étaient égales, l'équation (b) deviendrait

$$DF \times AF = BD \times AB \dots\dots\dots (c)$$

et nous ferait voir que, dans ce cas, les distances des points d'application des masses au point de suspension et au centre d'oscillation, sont réciproquement proportionnelles.

373. Demandons-nous maintenant la distance AD du centre d'oscillation au point de suspension.

Pour cela, faisons  $x = AD$ , nous aurons

$$DF = x - AF \text{ et } BD = AB - x;$$

le premier membre de l'équation (b) sera

$$DF \times F \times AF = (x - AF) \times F \times AF = xF \times AF - (AF)^2 \times F,$$

et le second

$$BD \times B \times AB = (AB - x) \times B \times AB = (AB)^2 \times B - xB \times AB$$

on aura donc

$$xF \times AF - (AF)^2 \times F = (AB)^2 \times B - xB \times AB,$$

ce qui revient à

$$x (F \times AF + B \times AB) = B \times (AB)^2 + F \times (AF)^2,$$

d'où

$$x = \frac{B \times (AB)^2 + F \times (AF)^2}{B \times AB + F \times AF} \dots\dots (217).$$

D'où il suit que la distance du centre de suspension est égale à une fraction dont le numérateur est la somme des produits des masses par les carrés des distances du point de suspension aux points d'application de ces masses, et le dénominateur, la somme des moments des masses par rapport au point de suspension A.

374. Ce principe a lieu quel que soit le nombre des masses suspendues au fil rigide, ainsi qu'on peut facilement s'en assurer, en prenant ces masses deux à deux pour les réduire en nombre deux fois moindre, et passant de celles-ci à un nombre deux fois moindre, et ainsi de suite, de proche en proche, de la même manière qu'on parvient à la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles: on arrivera ainsi à la distance du centre de suspension au centre d'oscillation du système.

Supposons donc qu'on ait les masses  $A, B, C, D, \dots$ , et que leurs distances au point de suspension soient  $a, b, c, d, \dots$ ; en suivant la marche que nous venons d'indiquer,  $x$  étant la distance demandée, on arriverait à l'équation générale

$$x = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2 + \dots}{Aa + Bb + Cc + Dd + \dots} \dots (218).$$

375. Si les masses étaient égales, cette équation deviendrait

$$x = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots}{a + b + c + d + \dots} \dots (a),$$

Si nous supposons, de plus, que les distances  $a, b, c, d, \dots$  suivent la progression  $1, 2, 3, 4, 5, \dots, l$ ;  $l$  étant le nombre d'unités contenues dans la plus grande distance du point de suspension, il nous viendra

$$x = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + \dots + l^2}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + l} \dots (b),$$

ce qui se réduit, d'après la note  $\alpha$  de la page 50, à

$$x = \frac{\frac{l^3}{3} + \frac{l^2}{2} + \frac{l}{6}}{\frac{l^2}{2} + \frac{l}{2}} = \frac{2l^2 + 3l + 1}{3l + 3} \dots (219).$$

Telle sera la distance du point de suspension au centre d'oscillation d'un pendule composé de masses égales uniformément distribuées sur un fil rigide, à partir du point de suspension.

376. Si ce pendule composé était une tige prismatique ou cylindrique de matière homogène, en divisant la longueur de cette tige en une infinité de tranches infiniment minces, on pourrait regarder ces tranches comme des masses égales appliquées à un fil rigide à des distances égales et infiniment petites les unes des autres, à partir du point de suspension : la formule (b) donnera donc la distance du point de suspension au centre d'oscillation, en y supposant l'unité infiniment petite, et par conséquent la longueur  $l$  infiniment grande. Mais dans cette hypothèse (note  $\alpha$  page 50), la limite du numérateur de cette fraction est  $\frac{l^3}{3}$ , et celle du dénominateur est  $\frac{l^2}{2}$ ; nous aurons donc

$$x = \frac{\frac{l^3}{3}}{\frac{l^2}{2}} = \frac{2l}{3} \dots (220).$$

d'où nous voyons que, le centre d'oscillation est aux deux tiers de la longueur de la tige, à partir du point de suspension.

## LEÇON IV.

## Du choc direct des corps.

377. Un corps serait parfaitement *dur* si les molécules de matière qui le composent étaient parfaitement en contact les unes aux autres, c'est-à-dire si entre ces particules il n'existait aucun vide, aucun intervalle privé de matière. Mais alors le corps ne serait plus composé de parties séparables, il ne formerait plus qu'un tout indestructible, indivisible, d'une forme inaltérable et d'un volume invariable, et perdrait un grand nombre des propriétés communes à tous les corps. Aussi la nature ne nous offre-t-elle aucun corps parfaitement dur, car dans ceux que nous regardons comme les plus parfaits sous ce rapport, la somme des vides qui existent entre les molécules, forme un espace peut-être plus grand que celui formé par la somme des volumes de toutes les particules de matière qui les composent. Cependant les corps réputés durs, lorsqu'ils ne reçoivent pas des chocs qui dépassent certaines limites, n'éprouvent que de très-faibles dépressions, de faibles altérations dans leur forme, ce qui fait que dans un grand nombre de circonstances il nous est permis, sans qu'il en puisse résulter des erreurs sensibles, de les regarder comme parfaitement durs. C'est pour cela que nous allons nous occuper de la recherche des lois qui accompagnent le choc direct et le choc oblique de ces sortes de corps, dans l'hypothèse d'une dureté parfaite.

378. Il est évident que le mouvement qu'on imprime à un corps dur par une force quelconque appliquée en un point de l'une de ses faces, se communique instantanément à toutes ses molécules, attendu qu'elles sont toutes parfaitement en contact et inséparables les unes des autres. Cela posé, passons aux lois mathématiques du choc de cette classe de corps.

379. Supposons un corps sphérique A (fig. 68) allant, avec la vitesse V, choquer un autre corps sphérique B en repos, et demandons-nous ce qui arrivera après le choc.

Représentons la masse du corps A par M, celle du corps B par m, et la vitesse après le choc par x. Cela posé, observons que la force qui fait mouvoir le corps A avec la vitesse V (n° 296) est MV; or, après le choc, cette même force sera obligée d'agir à la fois sur les deux mobiles A, B, c'est-à-dire sur une masse égale à  $M + m$ , et devra communiquer à cette dernière masse la vitesse x; en vertu du n° 302, nous aurons donc

$$x(M + m) = VM, \text{ d'où } x = \frac{VM}{M + m} \dots (221).$$

Ainsi, la vitesse après le choc sera égale à celle du corps A avant le choc multipliée par la masse de ce même corps, et divisée par la somme des masses.

380. Supposons que  $m = nM$ ; en substituant dans l'équation (221), il nous viendra

$$x = \frac{VM}{M + nM} = \frac{V}{1 + n} \dots (222)$$

d'où nous voyons qu'après le choc, la vitesse du système des deux corps sera égale à celle qu'avait le corps choquant avant la collision, divisée par le nombre de fois plus 1 que la masse du mobile choqué est plus grande que celle du corps choquant.

381. Si donc la masse du corps choqué était très-grande par rapport à celle du corps choquant,  $n$  serait très-grand aussi, et la valeur (222) de  $x$  serait très-petite; d'où nous devons conclure que la vitesse après le choc pourra être insensible si la masse du corps choqué, supposé en repos, est très-grande par rapport à celle du corps choquant. Mais nous voyons aussi que si nous faisons abstraction de tout obstacle étranger à l'inertie, quelque petite que soit la masse du corps choquant ainsi que sa vitesse, la vitesse après le choc ne sera jamais absolument nulle.

De là il résulte que l'inertie n'est pas un obstacle au mouvement, mais que les corps ne peuvent prendre de vitesse que dans la proportion de la force qu'on leur applique et en raison inverse de leur masse. Il en est donc de l'inertie des corps, comme de l'état d'un vase d'une capacité indéfinie, par rapport à la quantité de liquide qu'on y introduit; ce vase, en effet, est là tout disposé à recevoir aussi peu ou autant de liquide qu'on voudra; seulement s'il a une base très-grande, il faudra beaucoup de liquide pour qu'il s'élève sur le fond à une hauteur sensible; de même aussi pour mouvoir une masse considérable d'une manière appréciable, il faut une force qui soit grande en proportion.

382. Supposons maintenant, que  $M = nm$ , en substituant dans l'équation (221), nous aurons

$$x = \frac{Vnm}{nm + m} = \frac{Vn}{n + 1} = \frac{V}{1 + \frac{1}{n}} \dots (223)$$

ce qui nous fait voir que lorsque la masse  $M$  est très-grande par rapport à  $m$ , la vitesse  $x$  après le choc est sensiblement la même qu'auparavant; car le dénominateur de la valeur de  $x$  sera d'autant plus près d'égaliser l'unité, que  $n$  sera plus grand, puisque la fraction  $\frac{1}{n}$  devient d'autant plus petite.

383. Supposons à présent deux mobiles allant dans le même sens, suivant la même droite, l'un ayant la masse  $M$  et la vitesse  $V$ , et l'autre la masse  $m$  et la vitesse  $v$ , et demandons-nous la vitesse du système après le choc.

Dans ce cas, les quantités de mouvement étant respectivement  $MV$  et  $m\nu$ , à l'instant du choc on aura  $MV + m\nu$  pour la quantité de mouvement du système des deux corps ; mais alors la masse sera  $M + m$ , et la vitesse  $x$  : nous aurons donc, après la collision ,

$$x (M + m) = MV + m\nu, \text{ d'où } x = \frac{MV + m\nu}{M + m} \dots\dots (224).$$

Cela nous apprend qu'après le choc *les deux mobiles iront ensemble avec une vitesse égale à la somme des quantités de mouvement, avant la collision, divisée par la somme des masses.*

384. Proposons-nous maintenant de déterminer la vitesse après le choc, les deux mobiles allant à la rencontre l'un de l'autre suivant la même droite ;  $M$  et  $m$  étant toujours les masses, et  $V, \nu$  les vitesses primitives individuelles.

La plus grande quantité de mouvement étant  $MV$ , et la plus petite  $m\nu$ , après le choc nous n'aurons plus que  $MV - m\nu$ , et la masse sera  $M + m$  ; si donc  $x$  est la vitesse à cet instant, nous aurons

$$x (M + m) = MV - m\nu, \text{ d'où } x = \frac{MV - m\nu}{M + m} \dots\dots (225),$$

de sorte que dans ce cas, *la vitesse, après le choc, est égale à la différence des quantités primitives de mouvement, divisée par la somme des masses.*

On pourrait facilement généraliser ces formules, et les rendre applicables à un nombre quelconque de mobiles ; mais comme cela ne saurait offrir aucune difficulté, nous ne nous en occuperons point.

Les corps mous, c'est-à-dire ceux qui se compriment par le choc sans se restituer, sont soumis aux mêmes lois que les corps durs, quant à leur vitesse et à leur quantité de mouvement après la collision. Ainsi les formules précédentes serviront aussi bien pour cette espèce de corps que pour les corps durs.

#### Des corps élastiques.

385. L'expérience a prouvé, de la manière la plus certaine, que les corps qu'on appelle élastiques, jouissent des propriétés suivantes :

1° Supposons une bille d'ivoire parfaitement homogène (fig. 81), recevant un choc quelconque au point A de sa surface ; l'effet de ce choc sera de raccourcir le diamètre AB, de manière que ses deux extrémités se rapprocheront du centre I de la même quantité ; ainsi le raccourcissement Aa égalera le raccourcissement

bB. Dans le même temps, le diamètre DC, perpendiculaire à AB, s'allongera aussi par les deux bouts des quantités égales Cc, Dd.

2° Aussitôt après le choc, les deux diamètres reprendront leurs longueurs primitives avec une force égale à celle qui avait produit ces changements de longueur. Il faudrait de même opposer deux forces égales à l'intensité du choc, pour empêcher le diamètre DC de se raccourcir.

Il résulte donc de ce fait, une propriété très-remarquable des corps élastiques, puisque un seul choc, et par conséquent une seule force en fait naître quatre pareilles dans le solide.

Ce phénomène n'a lieu rigoureusement que dans les corps parfaitement élastiques. Ainsi les formules qui suivent ne seront exactes que dans cette hypothèse.

386. Nous nommerons *ressort* chacune des quatre forces que le choc développe dans la bille (fig. 81). Ainsi il y aura un ressort à chaque extrémité du diamètre AB, et à chaque extrémité du diamètre DC. Ces deux derniers étant dans une direction perpendiculaire à celle du mouvement, ils n'ont aucun effet sur ce mouvement du corps; nous devons donc en faire abstraction, et ne tenir compte que de ceux qui ont lieu aux extrémités du diamètre AB, coïncidant avec la direction du choc. Cela posé, donnons les formules qui établissent les lois du choc des corps élastiques dans toutes les circonstances qui peuvent le plus généralement intéresser.

387. Supposons que les deux corps aillent suivant la même droite et dans le même sens, l'un avec la vitesse V et la masse M, et l'autre avec la vitesse v et la masse m; si les corps n'avaient aucun ressort, après le choc, la vitesse commune serait (n° 378)  $x = \frac{MV + mv}{M + m}$ . Soit A le corps qui a la plus grande vitesse, et B l'autre. Après le choc la quantité de mouvement du corps A au lieu d'être MV comme avant, ne sera donc plus que  $Mx = M \times \frac{MV + mv}{M + m}$ ; il aura donc perdu une quantité de mouvement égale à

$$MV - M \times \frac{MV + mv}{M + m} = \frac{M^2V + MmV - M^2V - Mmv}{M + m} = \frac{Mm(V - v)}{M + m} \dots (226).$$

Cette quantité de mouvement perdue est précisément la valeur du choc, et par conséquent la force de ressort qui se développe en avant et en arrière de chaque corps. Le ressort en avant du corps A sera détruit par le ressort en arrière du corps B; il restera donc dans le corps A une force de ressort en

arrière égale à la quantité de mouvement perdu, c'est-à-dire à  $\frac{Mm(V-\nu)}{M+m}$ , agissant en sens contraire de son mouvement primitif. Or, si les corps n'étaient pas élastiques, il resterait, après le choc, à ce corps A, dans le sens primitif, une force de mouvement égale à  $M \times \frac{MV + m\nu}{M+m}$ , comme nous venons de le voir ; si donc de cette quantité de mouvement nous retranchons la force de ressort en arrière que nous venons de trouver ci-dessus, la quantité de mouvement qui restera après le choc à ce même corps, sera

$$M \times \frac{MV + m\nu}{M+m} - M \times \frac{m(V-\nu)}{M+m} = M \cdot \frac{MV + m\nu - Vm + m\nu}{M+m} =$$

$$M \cdot \frac{V(M-m) + 2m\nu}{M+m} \dots\dots (a),$$

si donc nous nommons  $V'$  la vitesse après le choc, la quantité de mouvement sera  $V'M$  ; on aura donc

$$V'M = M \cdot \frac{V(M-m) + 2m\nu}{M+m},$$

d'où 
$$V' = \frac{V(M-m) + 2m\nu}{M+m} \dots\dots (227).$$

Dans le corps B il nous reste le ressort en avant égal au ressort en arrière du corps A, c'est-à-dire à  $M \cdot \frac{m(V-\nu)}{M+m}$  ; or, si les corps n'étaient pas élastiques, après le choc la quantité de mouvement du corps B dans le sens primitif, serait  $m \cdot \frac{MV + m\nu}{M+m}$  ; mais le ressort  $\frac{Mm(V-\nu)}{M+m}$ , en avant de ce corps agit dans le même sens, nous aurons donc après le choc

$$m \cdot \frac{MV + m\nu}{M+m} + m \cdot \frac{M(V-\nu)}{M+m} = m \cdot \frac{MV + m\nu + MV - M\nu}{M+m}$$

$$= m \cdot \frac{2MV - \nu(M-m)}{M+m} \dots\dots (b),$$

Si  $\nu'$  est la vitesse après le choc, la quantité de mouvement sera  $m\nu'$ , et par conséquent

$$m\nu' = m \cdot \frac{2MV - \nu(M-m)}{M+m} \dots\dots,$$

d'où 
$$v' = \frac{2MV - v(M - m)}{M + m} \dots\dots (228).$$

388. En raisonnant de la même manière sur la formule (225) que nous venons de le faire sur la formule (224), nous arriverions, pour le cas où les deux mobiles iront à la rencontre l'un de l'autre, 1° pour le mouvement perdu, et par conséquent, pour chaque force de ressort, à  $\frac{Mm(V + v)}{V + m}$  ;

2° Pour la vitesse du corps A, après le choc, à

$$V' = \frac{V(M - m) - 2mv}{M + m} \dots\dots (229),$$

Et 3° pour la vitesse du corps B, après la collision, à

$$v' = \frac{2MV + v(M - m)}{M + m} \dots\dots (230)$$

Discutons ces quatre formules, pour en faire ressortir les circonstances les plus remarquables.

389. Supposons que le mobile B soit en repos lorsque le mobile A vient le choquer ; dans ce cas  $v = 0$  ; et les deux formules (227) et (229) se réduisent à

$$V' = \frac{V(M - m)}{M + m},$$

et les deux autres à 
$$v' = \frac{2MV}{M + m} ;$$

d'où l'on voit que les deux cas que nous venons d'examiner se réduisent en un seul, comme cela doit être, puisqu'alors il n'y a point de différence dans le sens du mouvement des deux corps avant le choc.

Voyons, dans ce cas, ce qui arrivera dans les trois hypothèses générales qu'on peut faire sur les grandeurs relatives des masses M et m.

1° Supposons que  $M = m$ , dans cas

$$V' = \frac{V(M - m)}{M + m} = \frac{V \times 0}{M + m} = 0,$$

c'est-à-dire que le corps choquant sera en repos après le choc ;

et

$$v' = \frac{2MV}{M+m} = \frac{2MV}{2M} = V;$$

ce qui veut dire que le corps choqué s'emparera de toute la vitesse du corps choquant, et ira dans le même sens que celui-ci, qui reste en repos.

2° Supposons que  $M > m$ ; alors le corps choquant ne perdra pas toute sa vitesse par le choc, et le corps choqué en acquerra une plus grande. Pour donner un cas particulier, supposons  $M = 2m$ , nous aurons

$$V' = \frac{Vm}{3m} = \frac{V}{3};$$

ce qui nous fait voir que le corps choquant n'aura plus que le  $\frac{1}{3}$  de la vitesse qu'il avait avant le choc.

La vitesse  $v'$  du corps choqué sera

$$v' = \frac{4mV}{3m} = \frac{4V}{3},$$

c'est-à-dire les quatre tiers de celle qu'avait le corps choquant avant le choc.

Ceci semble être un paradoxe, mais il se vérifie comme il suit.

Il est clair qu'après le choc, la quantité de mouvement doit être la même qu'auparavant. Or la vitesse  $\frac{4V}{3}$  appartient à la masse  $m = \frac{M}{2}$ ; la quantité de mouvement provenant de cette vitesse sera donc

$$\frac{4V}{3} \times \frac{M}{2} = \frac{2VM}{3};$$

et la vitesse  $\frac{V}{3}$  appartient à la masse  $M$ ; la quantité de mouvement prove-

nant de cette vitesse sera donc  $\frac{VM}{3}$ ;

si nous ajoutons ces deux quantités de mouvement, nous aurons

$$\frac{2VM}{3} + \frac{VM}{3} = \frac{3VM}{3} = VM,$$

comme avant le choc.

3°. Supposons maintenant que  $M < m$ ; dans ce cas on aura

$$V' = -\frac{V(m-M)}{M+m} \text{ et } v' = \frac{2MV}{M+m};$$

ce qui nous fait voir qu'après le choc le corps choquant retourne sur ses pas, et le corps choqué se met en mouvement dans le sens que le corps choquant est venu le choquer, avec une certaine vitesse.

Donnons un cas particulier, soit  $m = 2M$ , nous aurons

$$V' = -\frac{MV}{3M} = -\frac{V}{3} \text{ et } v' = \frac{2V}{3};$$

ce qui nous apprend que le corps choquant retournera sur ses pas avec une vitesse égale au  $\frac{1}{3}$  de celle qu'il avait avant le choc, et le corps choqué ira dans le sens du mouvement primitif du choquant, avec une vitesse égale aux  $\frac{2}{3}$  de celle qu'avait ce dernier avant le choc.

La masse  $m = 2M$  avec la vitesse  $\frac{2V}{3}$  donne une force de mouvement égale à  $\frac{4MV}{3}$ ; et la masse  $M$  avec la vitesse rétrograde  $\frac{V}{3}$ , donne une quantité de mouvement négative égale à  $-\frac{MV}{3}$ ; en ajoutant ces deux quantités de mouvement on aura

$$\frac{4MV}{3} - \frac{MV}{3} = \frac{3MV}{3} = MV.$$

390. Si les deux corps avaient un certain mouvement dans le même sens, les formules (227) et (228) nous feraient connaître les vitesses après le choc. Voyons ce qui arrivera dans les trois hypothèses qu'on peut faire sur les grandeurs relatives des masses.

1° Supposons que  $m = M$ ; les formules citées nous donneront

$$V' = \frac{2mv}{2m} = v, \text{ et } v' = \frac{2MV}{2M} = V,$$

ce qui nous montre qu'après le choc, la vitesse du corps choquant devient celle qu'avait le corps choqué, et celle du corps choqué devient celle qu'avait le corps choquant; de sorte que, quand les masses sont égales, la vitesse de l'un passe dans l'autre et réciproquement.

2° Supposons  $M > m$ ; les formules (227) et (228) nous font voir que la vitesse  $V'$  du corps choquant après le choc ne sera pas nulle, et aura lieu dans le même sens qu'auparavant, et celle  $v'$  du corps choqué ne sera pas nulle non plus, et aura lieu dans le même sens que celle du corps choquant. Supposons, par exemple, que  $M = 2m$ ; nous aurons

$$V' = \frac{mV + 2mV}{3m} = \frac{V + 2v}{3}, \text{ et } v' = \frac{4mV - mv}{3m} = \frac{4V - v}{3},$$

si les vitesses étaient telles qu'on eût  $V = 2v$ , il s'ensuivrait que,

$$V' = \frac{V + V}{3} = \frac{2V}{3} \text{ et } v' = \frac{8v - v}{8} = \frac{7v}{3},$$

d'où l'on voit que dans ce cas la vitesse du corps choquant serait après le choc les  $\frac{2}{3}$  de ce qu'elle était avant, et celle du corps choqué les  $\frac{7}{3}$ .

3°. Soit  $M < m$ ; la formule (227) nous fait voir que  $V'$  pourra être négatif. Supposons  $m = 2M$ ; cette formule nous donnera

$$V' = \frac{-VM + 4Mv}{3M} = \frac{4v - V}{3},$$

et  $V'$  sera négatif si  $V > 4v$ , positif si  $V < 4v$ , et enfin nul si  $4v = V$ .

Si donc un corps allait en choquer un autre, d'une masse double, avec une vitesse quatre fois plus grande, le corps choquant resterait en repos.

L'hypothèse de  $m = 2M$ , nous donnera

$$v' = \frac{2MV + vM}{3M} = \frac{2V + v}{3},$$

et dans l'hypothèse où  $V = 4v$ , on aurait

$$v' = \frac{8v + v}{3} = \frac{9v}{3} = 3v = \frac{3V}{4};$$

d'où il s'ensuivrait que le corps choqué aurait une vitesse triple de celle qu'il avait avant le choc, ou les  $\frac{3}{4}$  de celle qu'avait le corps choquant.

On pourrait facilement étudier de la même manière quelques circonstances

particulières des formules (229 et 230). Nous nous bornerons à une seule, celle des masses égales. Dans cette hypothèse, nous aurons

$$V' = - \frac{2mv}{2n} = -v \text{ et } v' = \frac{2MV}{2M} = V.$$

D'où l'on voit que dans ce cas les deux mobiles retourneraient sur leurs pas après avoir échangé leurs vitesses.

Ce qui précède sur la dynamique étant plus que suffisant pour ce qui concerne la stabilité des édifices, nous n'en dirons pas davantage sur ce sujet.

---

SECTION TROISIÈME.

**PRINCIPES D'HYDROSTATIQUE.**

---

LEÇON I.

Lois de l'équilibre des liquides contenus dans des vases ouverts par en haut ; phénomène de la capillarité ; équilibre des corps plongés dans un liquide ; de la pesanteur spécifique des corps en général, et de la stabilité des corps flottans.

391. Nous avons vu (n. 31) que l'on appelait *liquides*, les corps dont les molécules n'ont entre elles qu'une très-faible adhérence, et *fluides élastiques*, ceux dont les molécules tendent sans cesse à s'écarter les unes des autres. Les premiers sont si peu susceptibles d'être comprimés, qu'on peut les regarder comme entièrement incompressibles sans erreur sensible. Les fluides élastiques, au contraire, sont d'une très-grande compressibilité, qui va néanmoins en diminuant, à mesure qu'on les comprime davantage.

392. Les liquides ou fluides incompressibles jouissent de propriétés précieuses, qu'il nous importe beaucoup d'étudier avec soin. Pour y parvenir, nous les supposerons d'une liquidité parfaite; c'est-à-dire que leurs molécules n'ont aucune adhérence, et peuvent glisser les unes contre les autres avec une parfaite liberté. Cette hypothèse est si conforme à l'expérience, qu'en l'admettant nous ne nous écarterons de la vérité que d'une manière insensible. D'ailleurs nous simplifierons beaucoup le raisonnement et le calcul.

393. Un très-grand nombre de faits prouvent que, les molécules d'un liquide, au sein même d'une masse liquide quelconque, sont soumises à l'action de la pesanteur tout aussi bien que si chacune d'elles était dans le vide. Cette vérité est si facile à vérifier et même à prévoir, que je ne crois pas nécessaire d'en exposer les preuves.

394. *Tout liquide enfermé dans un vase ABCD quelconque (fig. 82), ne peut être en repos dans ce vase, qu'autant que ses molécules sont également pressées dans tous les sens.*

En effet, soit la molécule *a*; pour qu'il y ait équilibre dans la masse entière

du liquide, il faut que cette molécule  $a$  soit en repos. Or les molécules des liquides sont dans un état parfait de liberté les unes par rapport aux autres; si donc la molécule  $a$  éprouvait une pression plus grande dans un sens que dans le sens opposé, elle s'échapperait dans le sens de la plus grande pression, et ne saurait par conséquent être en repos; il en serait de même pour toute autre molécule, et la masse entière du liquide serait dans un état d'agitation qui serait contraire à l'hypothèse de laquelle nous sommes partis. La pression est donc la même dans tous les sens pour chaque molécule, ce qui est confirmé par l'observation de la manière la plus incontestable.

Voici une expérience très-connue, qui est en effet parfaitement d'accord avec le résultat de notre raisonnement. On plonge verticalement dans un vase ABCD (fig. 83) plein d'eau, plusieurs tubes  $a, b, c, d$ , dont le bout inférieur est droit dans le premier, coudé latéralement dans le second, recourbé en haut dans le troisième, et oblique d'une manière quelconque dans le dernier. Avant de plonger ces tubes (supposés d'un diamètre un peu grand), on tient le bout supérieur bouché, pour ne l'ouvrir qu'après avoir plongé les tubes dans le vase. Avant que les tubes ne soient débouchés par le haut, l'eau ne monte dans leur intérieur que d'une certaine quantité, parce que l'air qui y est enfermé s'oppose, comme nous le verrons par la suite, à son ascension; mais aussitôt qu'ils sont débouchés, l'eau s'élève dans tous les tubes à la même hauteur que la face supérieure du liquide enfermé dans le vase. Or, dans le tube  $a$  la pression se fait évidemment de bas en haut; dans le tube  $b$  latéralement, dans le tube  $c$  de haut en bas, et dans le tube  $d$  d'une manière oblique; dans quelque direction que se fasse la pression, elle est donc toujours égale, puisque toutes ces pressions produisent le même effet, celui de faire monter le liquide à la même hauteur. Ainsi l'expérience confirme la théorie.

395. Supposons que sur la même verticale EF (fig. 82), qui traverse la masse du liquide de bas en haut, on prenne deux molécules  $a, b$ , à des profondeurs différentes; je dis que les pressions que ces molécules éprouveront seront proportionnelles à leurs profondeurs.

Cela est presque évident; car la molécule  $a$  ne soutient que le poids des molécules comprises dans la hauteur  $aF$ , tandis que la molécule  $b$  soutient le poids de toutes celles qui sont comprises dans la hauteur  $bF$ . Mais les molécules infiniment petites des corps sont égales en dimensions et en poids; d'où il suit que le poids des molécules qui pressent le point  $a$  est à celui de celles qui pressent le point  $b$ , comme la hauteur  $aF$  est à la hauteur  $bF$ . Les pressions sont donc dans le même rapport que les profondeurs.

396. La face supérieure d'un liquide contenu dans un vase entièrement ouvert par en haut, doit être un plan horizontal (fig. 84).

En effet, supposons d'abord le fond du vase horizontal ; si la face supérieure  $DdC$  n'était pas un plan horizontal, il y aurait au moins deux points  $b$  et  $d$  qui ne seraient pas à la même hauteur. Mais alors la colonne de molécules qui presse le point  $c$  serait plus élevée que celle qui presse le point  $a$  ; le point  $c$  (n° 395) éprouverait donc une pression plus grande que le point  $a$  ; mais ces deux molécules pressent chacune avec la même intensité dans tous les sens (n° 394), et cette intensité est égale à la pression verticale que chacune d'elles éprouve ; la pression de la molécule  $c$  sur la molécule  $a$  sera donc plus grande que celle de cette dernière sur la première ; les molécules entre les deux et au-delà, à droite et à gauche, seront donc inégalement pressées, et par conséquent ne sauraient être en équilibre ainsi que toute la masse liquide, ce qui est contre l'hypothèse. Il faut donc, pour que toute la masse liquide soit en repos, que les différens points de la face supérieure soient à distances égales du fond  $AB$  supposé plan et horizontal, c'est-à-dire qu'il faut que la face supérieure du liquide soit aussi plane et horizontale, comme il fallait le démontrer.

397. *Si le fond du vase au lieu d'être horizontal était incliné comme l'indique la droite  $Af$  (fig. 84), la face supérieure du liquide n'en serait pas moins un plan horizontal  $DC$ .*‡

En effet, les molécules  $g$  et  $h$  qui touchent au fond du vase éprouveraient sans doute des pressions différentes, puisque les colonnes de molécules qui les pressent sont de hauteurs différentes ; mais à la même hauteur que la molécule  $g$ , s'en trouve une autre  $i$  sur la verticale  $ab$ , qui éprouve par conséquent la même pression, et, agissant latéralement contre la molécule  $g$  soumise à une pression égale, fera équilibre à cette dernière et réciproquement. Les molécules situées au-dessus des points  $i$  et  $g$  seront dans le même état. Quant à celles situées entre les points  $i$  et  $h$ , elles en trouveront toujours une située sur le fond entre les points  $h$  et  $g$ , qui recevra la même pression, ainsi qu'on le voit en considérant la molécule  $n$  et sa correspondante  $m$  sur le fond ; lesquelles sont pressées par les colonnes égales  $nb$ ,  $mk$ .

398. Par le même raisonnement, on démontrerait que la face supérieure du liquide enfermé dans un vase ouvert par en haut doit rester horizontale, quelle que soit la forme du fond du vase. Toutes ces conséquences sont parfaitement confirmées par l'expérience, et même par les observations les plus vulgaires.

399. Nous avons déjà fait voir (n° 394), que si l'on plongeait un tube, ouvert par les deux bouts, verticalement dans un vase plein d'un liquide quelconque, en tenant d'abord fermé le bout supérieur par la pression du doigt, le liquide ne monte dans le tube qu'à une certaine hauteur, mais qu'en

laissant échapper l'air par la partie supérieure, le liquide s'élevait jusqu'au niveau du liquide environnant. Ceci n'est vrai que lorsque le diamètre intérieur du tube n'est pas ce qu'on appelle *capillaire*, c'est-à-dire que ce diamètre est plus grand que celui d'un cheveu. Dans le cas d'un tube capillaire, le liquide intérieur s'élèvera au-dessus du niveau extérieur, ou restera au-dessous, suivant la nature du liquide. Si ce liquide est de l'eau, il s'élèvera dans le tube capillaire au-dessus du niveau extérieur, et s'il est du mercure, il restera au-dessous. La face supérieure du liquide, dans le tube, au lieu d'être plane, comme dans les grands tubes, sera très-voisine de la surface d'une demi-sphère; cette surface sera concave pour l'eau, et convexe pour le mercure. Il paraîtrait que toutes les fois que le liquide peut mouiller la paroi intérieure du tube, le liquide s'élève au-dessus du niveau extérieur, et toutes les fois, au contraire, que le liquide ne s'attache pas à la paroi, il reste au-dessous de ce niveau extérieur. Nous n'expliquerons point la cause de ce phénomène remarquable, sur laquelle les physiciens semblent ne pas être parfaitement d'accord. Il nous suffit d'être assuré de l'existence de ce phénomène, qui se manifeste surtout dans les tubes capillaires en verre.

Ce fait ne se manifeste pas seulement dans les tubes capillaires, mais entre deux lames de verre plongées verticalement dans un liquide : quand ces lames forment entre elles un angle très-petit, l'eau s'élève vers leur intersection, de manière à produire une surface courbe *abc* (fig. 85), dont le point *c*, à l'intersection des deux plans, s'élève le plus par rapport au niveau général du liquide. Lorsque les deux lames sont parallèles et très-rapprochées, l'eau s'élève également au-dessus du niveau principal, et d'autant plus que ces lames sont plus près l'une de l'autre. En général, contre les parois intérieures d'un vase, l'eau forme une petite surface courbe qui s'élève un peu au-dessus du niveau principal, mais ce n'est que d'une quantité très-petite. Le contraire a lieu pour le mercure.

400. *Quelle que soit la forme d'un vase plein d'un liquide quelconque, si le fond est un plan horizontal, la pression qu'il éprouvera sera proportionnelle à son aire multipliée par la hauteur du liquide.*

La proposition est évidente pour le vase cylindrique ABCD (fig. 86); car chaque point du fond étant à la même distance de la face supérieure AB du liquide, recevra la même pression (n° 395); cette pression commune se répétera autant de fois qu'il y aura de points élémentaires dans le fond, et comme ce nombre de points sera proportionnel à l'aire de ce fond, il s'ensuivra que le produit de cette aire par la hauteur AD du liquide sera proportionnel à la pression totale que reçoit le fond.

Pour le cas de la figure 87, il est plus difficile de concevoir l'existence de ce

principe, attendu que la quantité de liquide contenu dans le vase est ici beaucoup moindre que dans le cas de la figure 86.

Pour se convaincre de la certitude de ce phénomène remarquable, que notre célèbre Pascal a observé le premier, il suffit de se rappeler que chaque molécule d'un liquide en repos, dans un vase, est pressée également dans tous les sens, et transmet cette pression avec une entière liberté aux molécules environnantes, car alors on concevra sans peine que la molécule *c* se trouve pressée par la molécule *d*, avec une force égale à la pression verticale que reçoit cette dernière; que la molécule *c*, étant retenue par la paroi du vase, vient presser la molécule *a* sur le fond qui lui correspond de la même manière que la molécule *d* presse la molécule *b* sur le même fond; on en dirait autant de toutes les molécules au-dessous de *d* par rapport à celles au-dessous de *c*; d'où il faut conclure que la molécule *a* reçoit la même pression que la molécule *b*; or cette dernière reçoit une pression proportionnelle à la hauteur *bi* du liquide; il en sera donc de même pour la molécule *a* et pour toute autre du fond du vase, et par conséquent le fond DC est pressé proportionnellement à l'aire de ce fond multipliée par la hauteur *bc* du liquide, quelque petit que soit le diamètre AB (pourvu qu'il ne soit pas capillaire), par rapport au diamètre du fond DC.

Par un raisonnement analogue, on prouverait que dans le cas du vase ABCD, évasé par en haut (fig. 88), la conséquence est encore la même; c'est-à-dire que la pression sur le fond est proportionnelle à l'aire de ce fond DC multiplié par la hauteur du liquide. Enfin, on démontrerait pareillement que la même chose a lieu pour un vase généralement quelconque ABCD (fig. 89). Cette propriété importante des liquides est au reste parfaitement constatée par les expériences les plus directes et les moins propres à laisser des doutes.

401. Il suit de là que deux vases généralement quelconque qui auraient des fonds, je ne dis pas parfaitement égaux, mais seulement de même superficie, les pressions seraient proportionnelles aux hauteurs des liquides enfermés dans ces vases, pourvu, toutefois, que ces liquides fussent de même densité (n° 94); conséquemment si, de plus, les hauteurs étaient les mêmes, les pressions seraient égales.

402. Il suit encore de là que si les hauteurs étaient les mêmes et les aires des fonds différentes, les pressions seraient dans le même rapport que ces aires.

403. Soient donc *L* la hauteur et *S* l'aire du fond d'un premier vase, *l* et *s* les mêmes choses d'un second; si *P* et *p* représentent les pressions que reçoivent les fonds de ces vases, nous aurons

$$P = LS, \text{ et } p = ls; \text{ donc}$$

$$P : p :: LS : ls..... (231).$$

Si  $P = p$ , il en résultera  $LS = ls$ , et par conséquent

$$L : l :: s : S \dots\dots\dots (232),$$

c'est-à-dire qu'en général pour que les pressions soient les mêmes, les liquides étant toujours homogènes, il faut que les hauteurs soient en raison inverse des aires des fonds des vases.

404. Si les hauteurs  $L$ ,  $l$  étaient égales, la proportion (231) deviendrait

$$P : p :: S : s \dots\dots\dots (233)$$

Ce qui nous apprend que dans ce cas, les pressions sont en raison des bases.

405. De ces principes sur la manière dont le fond d'un vase est pressé, on peut tirer une conséquence extrêmement importante, et dont on fait une application très-avantageuse, pour produire de grandes pressions. Cette conséquence consiste en ce qu'avec une très-petite quantité de liquide on peut produire une pression aussi grande qu'on voudra, en donnant au vase une forme analogue à celle indiquée par la figure 87, le fond de ce vase étant mobile par rapport aux parois latérales. C'est sur ce principe qu'est fondée cette machine connue sous le nom de *presse hydraulique*, dont on fait un si grand usage dans plusieurs espèces de manufactures. On s'en est servi aussi à faire des expériences sur la résistance des corps solides.

406. Supposons un vase ABCD (fig. 90) plein d'un liquide quelconque jusqu'à la hauteur  $ab$ , que sur sa face supérieure on applique un piston  $ab$  qui touche partout le liquide, et, par ses bords, les parois intérieures du vase supposées parfaitement polies, et qu'une charge uniforme  $P$  vienne presser le dessus de ce piston; je dis que cette charge se communiquera jusqu'au fond du vase, dont la pression sera augmentée de toute cette charge  $P$ .

En effet, la charge  $P$  étant uniforme, toutes les colonnes verticales de liquides supporteront une portion égale de cette charge en outre de leur propre poids. Il nous reste donc à démontrer que si, par exemple, la verticale  $ef$  représente une colonne de liquide infiniment déliée, la pression que reçoit la molécule  $e$ , en contact avec la face inférieure du piston, se communique à toutes celles qui se trouvent sur cette verticale  $ef$ , et par conséquent jusque sur le fond.

Or cela est évident, car la molécule  $e$  ayant la liberté d'agir entre les autres molécules liquides, ne pourra rester en repos qu'autant que les molécules au-dessous la soutiendront; mais celle qui soutiendra la première molécule  $e$  ne pourra de même rester en repos que parce qu'une autre, immédiatement au-dessous, la soutiendra à son tour, et ainsi de suite jusqu'à la molécule  $f$  qui

touche au fond du vase, et qui se trouve soutenue par ce fond. Il est évident, en effet, que les pressions latérales ne sauraient contribuer en rien à soutenir la charge  $P$ ; par conséquent tous les points du fond du vase sont pressés de la même manière que la surface supérieure du liquide par le piston, en outre de la pression provenant du poids du liquide même.

407. Il suit de là que si l'on ménageait un trou dans le piston  $ab$  (fig. 91), pour y faire passer un tube ordinaire  $em$ , ouvert par les deux bouts, la pression en  $e$  étant augmentée en proportion de la charge du piston  $ab$ , fera monter le liquide dans le tube  $em$  au-dessus du niveau  $ab$  du liquide contenu dans le vase, d'une quantité  $gm$  telle, que le poids de la colonne de liquide dans le tube qui aurait cette hauteur,  $gm$  serait égal à la pression que la charge du piston communique à l'orifice  $e$  du tube; car si la pression du piston n'existait pas, celle que le poids seul du liquide communiquerait à l'ouverture inférieure  $e$  du tube  $em$ , ferait monter le liquide à la hauteur du niveau  $ab$ ; la pression par le piston doit nécessairement produire un effet qui s'ajoute au premier, et la grandeur de cet effet doit évidemment être exprimée par le poids de la colonne  $gm$  au-dessus du niveau  $ab$  du liquide dans la vase, que fait monter cette pression dans le tube, au-dessus du niveau  $ab$ .

408. Supposons un vase  $ABCD$  (fig. 92), plein d'un liquide quelconque, et qu'un solide quelconque  $abcd$  y soit entièrement plongé, à la profondeur qu'on voudra; si le solide avait la même densité que le liquide, il se trouverait en équilibre avec la pression du liquide environnant.

En effet, le poids du solide étant égal à celui du volume de liquide qu'il déplace, ne peut apporter aucun changement dans la pression des molécules liquides. Ainsi, la molécule  $m$ , située à la face inférieure  $ab$  du solide, agira de bas en haut de la même manière, et avec la même force que si l'espace occupé par le solide l'était par du liquide; il en sera de même pour les molécules, telles que  $r$ , situées au-dessus du solide  $abcd$ . Puisque les molécules situées au-dessus et au-dessous de ce solide sont en équilibre tout aussi bien que si le volume de ce solide était occupé par des molécules liquides, il faut en conclure que le solide lui-même est en repos, car l'équilibre subsiste aussi évidemment dans les pressions des molécules latérales.

409. Il suit de là clairement que, si le solide  $abcd$  (fig. 92) avait une plus grande pesanteur spécifique que le liquide dans lequel il est plongé, les molécules telles que  $m$ , situées au-dessous du solide, recevraient une pression plus grande de haut en bas que celles à la même hauteur, situées à droite et à gauche du solide; ces molécules telles que  $m$ , presseraient donc latéralement avec une plus grande force que celle avec laquelle elles seraient elles-

mêmes pressées en sens contraire ; et n'étant plus retenues, elles s'échapperaient de dessous le corps, en faisant remonter les molécules voisines ; de manière que la masse liquide ne serait en repos que lorsque le solide toucherait le fond du vase.

410. La force qui fait ainsi descendre le solide est évidemment égale à la différence entre le poids du solide et celui du liquide, déplacé par le solide, puisque quand ces deux poids sont égaux le corps ne descend point. Ainsi, *un solide plongé dans un liquide, perd de son poids une quantité égale au poids du volume du liquide qu'il déplace, c'est-à-dire égale au poids d'un volume de liquide égal au sien comme l'a trouvé Archimède.*

411. Supposons donc que l'on pèse un solide dans l'air, qu'on le pèse de nouveau après l'avoir plongé dans un vase plein d'eau ; dans ce dernier cas, on trouvera son poids moindre que dans le premier, d'une quantité précisément égale au poids du liquide déplacé par le solide. Soit donc  $P$  le poids dans l'air,  $P'$  le poids après l'immersion ; le poids de l'eau [déplacée sera  $P - P'$  ; Or nous avons dit (n° 100), que la pesanteur spécifique d'un corps par rapport à celle de l'eau, était le quotient du poids de ce corps à celui d'un volume d'eau égal au sien, si donc  $d$  est la pesanteur spécifique du corps dont le poids est  $P$ , nous aurons

$$d = \frac{P}{P - P'} \dots\dots (234).$$

Tel est le fondement de la méthode qu'on emploie pour déterminer la pesanteur spécifique des corps solides ; mais elle exige des précautions, pour obtenir des résultats exacts, dont le détail nous écarterait trop de notre sujet : on le trouve dans tous les ouvrages élémentaires de physique. D'ailleurs la plupart de ces précautions sont faciles à imaginer, surtout pour les corps de la nature de ceux qu'on emploie dans les constructions. Je me bornerai, en conséquence, à faire connaître les résultats auxquels sont parvenus les savans qui se sont occupés de ce genre de recherches ; on en trouvera la table à la fin de cet ouvrage. Reprenons la théorie des corps plongés dans un liquide.

412. *Lorsqu'un corps plongé dans un liquide a une pesanteur spécifique moindre que celle du liquide qui l'environne, ce corps monte à la surface supérieure avec une force égale à l'excès du poids du volume du liquide déplacé sur celui du solide, et l'équilibre ne s'établit que lorsque le poids du volume de liquide déplacé par le corps, est égal à celui du solide lui-même.*

En effet, ayant démontré (n° 409) que lorsque les deux pesanteurs spécifiques sont égales, le solide reste en repos à quelque profondeur qu'on le place, il est évident que quand le solide est moins pesant, les molécules liquides placées à sa

face inférieure  $ab$  étant moins pressées de haut en bas qu'elles ne le sont latéralement par celles qui ne répondent pas au-dessous du solide, et chaque molécule liquide agissant avec la même intensité dans toutes les directions, les molécules sous le solide doivent être soulevées par celles qui les environnent, et par conséquent elles doivent soulever le solide lui-même, jusqu'à ce que le poids du volume de liquide, déplacé par le solide, soit égal à son propre poids.

413. Supposons donc que  $v$  soit le volume du liquide déplacé  $abnm$  (fig. 93);  $P$  le poids du corps flottant, et  $d$  la pesanteur spécifique du liquide : le poids du volume du liquide déplacé sera  $vd$ ; nous aurons donc

$$vd = P, \text{ d'où nous tirerons } v = \frac{P}{d} \dots (235).$$

ce qui nous apprend que le volume du liquide déplacé sera comme le poids du corps flottant, et en raison inverse de la pesanteur spécifique du liquide.

414. Lorsqu'un vaisseau ou un bateau quelconque flotte sur la mer ou sur une rivière, il est exposé à plusieurs accidens qu'il est utile de prévoir, pour qu'en le construisant on puisse déterminer la forme qui lui convient le mieux pour être à l'abri de ces accidens. Sans avoir l'intention d'entrer à ce sujet dans tous les détails qu'il renferme, nous croyons utile de démontrer les principes généraux qui indiquent le but vers lequel il faut tendre. Pour y parvenir nous nommerons *centre de suspension* le centre de gravité du volume du liquide déplacé par le corps flottant, afin de rendre le discours plus facile.

415. Cela posé, je dis d'abord que *pour qu'un corps flottant sur un liquide en repos puisse rester en équilibre autour du centre de suspension, il faut que la verticale menée par le centre de gravité du corps flottant passe par ce centre de suspension.*

Cela est presque évident, car si la verticale abaissée du centre de gravité  $G$  (fig. 93) du corps flottant ne passait pas par le centre  $g$  de suspension, le poids du corps aurait un certain bras de levier par rapport à ce centre  $g$  de suspension, et par conséquent un certain moment par rapport à ce point  $g$ , dont l'effet serait évidemment de faire tourner le solide autour de ce centre  $g$  de suspension, et par conséquent de communiquer des pressions inégales aux molécules liquides en contact avec sa face inférieure, qui réagiraient avec plus de force de bas en haut contre cette face, vers une arête; l'arête  $b$ , par exemple, plus que vers l'arête  $a$ , et le corps flottant, s'il n'était pas entièrement renversé, prendrait une position penchée  $a'b'c'd'$  qu'il pourra conserver ou perdre en revenant à sa position primitive.

416. En supposant que le corps flottant soit disposé de manière que cette condition soit remplie, un coup de vent ou un choc quelconque peut lui faire

prendre une position telle, que la verticale abaissée de son centre de gravité ne passe plus par le centre de suspension, et alors, si ce centre de gravité est situé en  $G$  (fig. 93) au-dessus du centre de suspension  $g$ , le corps flottant est très en danger d'être renversé, et le serait inévitablement, si le moment de son poids, par rapport au centre de suspension, l'emportait sur la résistance très-faible du liquide à cette action. Si le centre de gravité du corps flottant coïncidait avec le centre de suspension, et si un choc quelconque venait à lui faire prendre une position penchée  $a'b'c'd'$  (fig. 94) il est évident qu'il resterait dans cette position, jusqu'à ce qu'un autre force vint augmenter ou diminuer son inclinaison. Si le choc était violent, le corps flottant pourrait faire une ou plusieurs révolutions autour de son centre de gravité en coïncidence avec le centre de suspension. Mais au contraire, si le centre de gravité (fig. 95) était situé au-dessous du centre de suspension  $g$ , quelque position inclinée qu'on donnât au corps flottant, plus la verticale élevée par le centre de gravité s'éloignerait du centre de suspension, plus la force avec laquelle le corps flottant tendrait à reprendre sa position verticale serait grande, et cela d'autant plus que son centre de gravité serait placé plus bas par rapport au centre de suspension; de sorte qu'un tel corps flottant pourrait résister à tout choc latéral, dont l'intensité ne dépasserait pas le produit de son poids multiplié par la distance de son centre de gravité au centre de suspension.

417. Il suit de là que, un vaisseau ou un bateau dont le centre de gravité serait au-dessus du centre de suspension, ne saurait être mis en usage, qu'il en serait à peu près de même pour celui dont le centre de gravité coïnciderait avec le centre de suspension; que les seuls qui conviennent sont ceux dans lesquels le centre de gravité est placé au-dessous du centre de suspension, et que les plus convenables, sous le rapport de la stabilité, parmi ces derniers, sont ceux dans lesquels la distance entre les deux centres est la plus grande. D'autres considérations, qui ne sont point de mon sujet, viendraient sans doute donner une limite à cette distance, au-delà de laquelle il surviendrait des inconvénients plus ou moins graves. C'est l'affaire du constructeur de vaisseau.

418. Supposons un liquide sans pesanteur enfermé dans un vase ABCD (fig. 96), et soumis à la pression d'une force  $P$  agissant de haut en bas sur un piston  $ab$ , appuyé immédiatement sur la surface supérieure du liquide; supposons que la paroi verticale DA soit percée d'un trou  $gh$ , d'un diamètre quelconque, bouché par un piston  $gh$ , retenu extérieurement par une force  $Q$ ; jè dis que la pression qui s'exercera sur le piston  $gh$ , sera exprimée par  $Q = \frac{sP}{S}$ ,  $s$  étant l'aire du piston  $gh$ , et  $S$  celle du piston  $ab$ .

En effet, sans troubler l'équilibre qui existe entre les pressions des molécules, on peut concevoir un tube recourbé  $gfcdeh$ , parfaitement calibré, dont la base

serait le piston  $gh$ , et dont les parois seraient formées par les molécules liquides environnantes, rendues immobiles; or, puisque les molécules d'un liquide pressent également dans tous les sens (n° 394), il est clair que la pression éprouvée par le piston  $gh$ , est égale à celle que la force  $P$  exerce sur l'orifice  $cd$  du tube recourbé, lequel orifice a la même superficie que le piston  $gh$ ; mais la pression que reçoit, de la part de la force  $P$ , l'orifice  $cd$  est dans le rapport des aires des pistons  $S$  et  $s$ ; on aura donc

$$S : s :: P : Q = \frac{Ps}{S} \dots (236)$$

ce qu'il fallait démontrer.

419. Il suit de là que, si  $s$  égalait l'aire de la paroi  $AD$  toute entière, la pression  $Q$  donnée par l'équation (236), serait la pression totale que recevrait cette paroi  $AD$ .

Supposons le vase parallépipédique; les aires  $s$ ,  $S$  seront proportionnelles à la hauteur  $Aa = h$  du liquide, et à la largeur  $AB$  du fond du vase que nous nommerons  $a$ ; en substituant dans la formule (236), il nous

viendra 
$$Q = \frac{Ph}{a} \dots (237)$$

pour la pression exercée contre la paroi  $AD$ , par la force verticale  $P$ .

420. En vertu de ce que les molécules liquides pressent dans toutes les directions avec une intensité parfaitement égale, le tube recourbé  $gfcdch$  (fig. 96) qui établit la communication entre la pression exercée par la force  $P$  sur l'orifice  $cd$  et le piston  $gh$ , au lieu d'avoir ses deux branches à angle droit, pourrait les avoir obliques comme dans les fig. 97 et 98; de manière que la branche  $fghe$  pourrait être perpendiculaire à une paroi oblique quelconque  $AD$ , et l'autre  $fcde$  verticale, sans empêcher la libre communication des pressions, et l'égalité des orifices  $cd$ ,  $gh$ ; d'où l'on voit que l'équation (236) est générale, pour toutes les parois planes, inclinées ou verticales. On se rappellera que  $s$  peut être la superficie entière de la paroi.

421. La formule (236) s'étend au cas d'un vase à parois courbes quelconques; car les élémens infiniment petits de ces parois étant pris pour l'unité recevront une pression exprimée par  $\frac{P}{S}$ ; et par conséquent la pression totale sera égale à ce facteur commun  $\frac{P}{S}$  multiplié par la somme de tous ces élémens ou par l'aire totale de la paroi courbe, quelle qu'elle soit.

Le piston  $ab$  (fig. 96, 97 et 98), n'est que fictif, lorsque la pression verticale  $P$  peut se distribuer uniformément sur la face supérieure du liquide sans cet intermédiaire.

## LEÇON II.

De la pression des liquides contre les parois latérales des vases ou des bassins quelconques.

422. Supposons un vase ABCD (fig. 99), en forme de parallépipède rectangle, entièrement plein d'un liquide quelconque, soumis à la seule action de la pesanteur, les trois dimensions du vase étant quelconques : Je dis que la pression ou poussée du liquide contre la paroi verticale AD, sera proportionnelle au volume du prisme triangulaire de la même longueur que la paroi, dont la base sera le triangle rectangle isocèle DAE, dont les côtés de l'angle droit égaleront la hauteur AD du liquide.

En effet, d'abord, quel que soit le triangle ADE, si l'on divise la hauteur DA en une infinité de parties égales, et que par les points de division  $a, c, e, \dots$  on mène les droites  $ab, cd, ef, \dots$  parallèles à AB, ces droites seront entre elles comme les hauteurs  $Da, Dc, De, \dots$ ; or, (n° 395), les pressions aux points  $a, c, e$ , sont comme les mêmes hauteurs  $Da, Dc, De, \dots$ . Ces pressions seront donc aussi comme les droites  $ab, cd, ef, \dots$ , c'est-à-dire comme les éléments du triangle DAE. Si donc  $p, p', p'', p''', \dots$ , sont les pressions aux points  $a, c, e, \dots$  de la paroi DA, nous aurons

$$p : ab :: p' : cd :: p'' : ef :: p''' : AE.$$

d'où  $p + p' + p'' + p''' : ab + cd + ef + AE :: p''' : AE \dots (a).$

Mais la somme  $p + p' + p'' + p'''$  est celle des pressions qui ont lieu sur les points successifs de la hauteur DA, supposés infiniment voisins les uns des autres; cette somme sera donc la pression totale exercée sur la paroi DA; de plus, les droites  $ab, cd, ef, AE$ , sont les éléments du triangle DAE; la somme  $ab + cd + ef + AE$  sera donc l'aire de ce triangle; si donc nous représentons par P la pression totale, et par S l'aire du triangle DAE, nous aurons

$$P = p + p' + p'' + p''' \dots \text{ et } S = ab + cd + ef \dots$$

en substituant dans la proportion (a) il nous viendra

$$P : S :: p''' : AE \dots (b).$$

Mais la pression  $p'''$  qui a lieu au point A est proportionnelle à la hauteur AD du liquide, c'est-à-dire que cette pression peut être représentée par  $AE = AD$  que

nous nommerons  $h$ ; nous pourrons donc substituer  $h$  au lieu de  $p'''$  et de  $AE$  dans la proportion (b), et il nous viendra

$$P : S :: h : h, \text{ d'où } P = S.$$

Ainsi, comme nous l'avons énoncé, si le triangle rectangle  $DAE$  est isocèle, le volume du prisme, de même longueur que la paroi, qui aurait ce triangle pour base, exprimera la poussée du liquide contre la paroi  $AD$ ; car ce qui a lieu pour une tranche infiniment mince, verticale et perpendiculaire à la paroi, a évidemment lieu dans toute la longueur et du prisme et de la paroi.

423. Les pressions qui s'exercent dans les hauteurs  $Da$ ,  $Dc$ , sont comme les carrés de ces hauteurs.

En effet, la pression sur  $Da$  est représentée par le triangle  $Dab$ , et celle sur  $Dc$  par le triangle  $Dcd$ ; or ces triangles sont semblables, ils sont donc entre eux (*Géom.* pl. n° 146), comme les carrés des hauteurs  $Da$ ,  $Dc$ ; les pressions dont il s'agit sont donc dans ce même rapport; ainsi,  $p$  et  $p'$  étant ces pressions, nous aurons

$$p : p' :: (Da)^2 : (Dc)^2 \dots (238).$$

424. La pression exercée contre une partie  $ac$  quelconque de la paroi  $AD$ , est proportionnelle à cette hauteur  $ac$ , multipliée par la distance  $Dg$  du milieu  $g$ , de cette hauteur  $ac$ , au point  $D$  de la surface supérieure du liquide.

En effet, la pression sur  $ac$  est évidemment égale à la différence entre la pression sur  $Dc$  et celle sur  $Da$ ; mais ces pressions sont respectivement égales aux triangles  $Dcd$ ,  $Dab$ ; la pression sur  $ac$  sera donc exprimée par la différence de ces triangles, c'est-à-dire par le trapèze  $abdc$ . Or ce trapèze égale la hauteur  $ac$  multipliée par la droite  $gh$ , menée à égale distance entre  $cd$  et  $ab$ ; de sorte que la pression en question sera exprimée par  $ac \times gh$ . Mais le triangle  $DAE$  étant isocèle, le triangle  $Dgh$  le sera aussi; d'où il suit que  $gh = Dg$ ; donc enfin la pression sur  $ac$  sera  $ac \times Dg$ , comme il fallait le démontrer.

425. Ce que nous venons de dire étant démontré pour une tranche verticale infiniment mince perpendiculaire à la paroi, aura lieu dans toute la longueur de la paroi; de sorte que l'expression de la poussée qui a lieu dans la hauteur  $ac$ , sera le produit de l'aire de la partie de la paroi dans toute la longueur qui reçoit la pression, multipliée par la hauteur  $gD$ , qui est, comme on voit, la distance du centre de gravité de cette portion de paroi à la surface supérieure du liquide.

426. Cette proposition ayant lieu, quelle que soit la hauteur  $ac$ , aura encore lieu quand  $ac$  sera la hauteur entière  $AD$  de la paroi; d'où il suit que la

*pression contre cette paroi est égale à son aire multipliée par la distance de son centre de gravité à la surface supérieure du liquide.*

427. Si en outre de la pesanteur le liquide est soumis à l'action d'une pression verticale  $P$ , pour avoir la pression contre la paroi, au résultat que nous venons de donner, il faudra ajouter le second membre de l'équation (236). Ainsi, nommons  $g$  la distance du centre de gravité de la paroi à la surface supérieure du liquide, et  $s$  son aire; la première partie de la pression sera

$$gs \text{ et la seconde (équation 236) } \frac{Ps}{S}$$

la pression totale sera donc

$$gs + \frac{Ps}{S} = S \left( g + \frac{P}{S} \right) \dots (239).$$

428. Remarque. Dans tous les cas où, en outre de la pression du liquide, il y a une pression verticale sur la surface supérieure de ce liquide, à la pression qui lui est propre, on ajoutera le second membre de l'équation (236), pour avoir la pression totale contre une paroi. Nous en avertissons une fois pour toutes.

429. Il suit du n° 426 une propriété très-remarquable des liquides soumis à la seule action de la pesanteur; c'est que, la pression que reçoit la paroi AD est indépendante de la largeur AB du bassin; de sorte que quelque grande ou quelque petite que soit cette largeur AB (fig. 99, 100 et 101), pourvu qu'elle ne soit pas nulle, la pression restera la même contre cette paroi AD. Ainsi cette pression ne dépend uniquement que de la hauteur du liquide et de la longueur de la paroi: elle augmente comme le carré de la hauteur (n° 423), et comme la longueur de cette paroi.

430. Si l'on avait un vase cubique, le fond recevrait une pression que nous prendrions pour l'unité; si ensuite l'aire de ce fond est l'unité de surface, les parois latérales auront la même aire égale à 1, qui, multipliée par la moitié de la hauteur (n° 426), nous donnera une pression égale à  $\frac{1}{2}$ . Ainsi les quatre parois éprouveront ensemble une pression égale à  $4 \times \frac{1}{2} = 2$ ; tandis que le fond en reçoit une égale à 1: en totalité le liquide produit donc une pression trois fois plus grande que son poids, pendant qu'un solide ne produirait sur le fond du vase qu'une seule pression égale à sa masse.

431. *Supposons maintenant un vase dont les parois opposées soient évasées par en haut, de sorte que ce vase soit un prisme creux, dont la base est le trapèze ABCD (fig. 102), et demandons-nous la pression qui s'exerce contre la paroi inclinée DA, le liquide n'étant soumis qu'à l'action de la pesanteur.*

En effet, nous avons vu (n° 394) que chaque molécule d'un liquide pressait dans toutes les directions avec une même intensité proportionnelle à la hauteur

en contre bas de la surface supérieure du liquide à laquelle la molécule est placée ; si donc nous considérons le point  $b$  de la paroi  $AD$ , ce point sera pressé perpendiculairement à la paroi, avec une force proportionnelle à la verticale  $ba$  élevée par ce point  $b$ . Il en sera de même pour tous les autres points. Ainsi la pression du point  $D$  du fond sera proportionnelle à la hauteur totale  $DF$  du liquide. Elevons par le point  $D$  la droite  $DE$  perpendiculaire à  $AD$ , faisons cette droite  $DE$  égale à la hauteur  $DF$  du liquide ; et menons la droite  $EA$  : je dis que si par le point  $b$  nous menons  $bc$  perpendiculaire à  $AD$ , la longueur  $bc = ba$ , comme  $DE = DF$ , ce qui serait facile à démontrer. Par conséquent les élémens du triangle  $ADE$  perpendiculaires à la droite  $AD$ , seront proportionnels aux pressions qui s'exercent aux points correspondans de la paroi  $AD$  ; l'aire de ce triangle  $ADE$  sera donc la pression totale que reçoit cette paroi  $AD$ . Or ce triangle est égal à

$$AD \times \frac{DE}{2} = AD \times \frac{DF}{2} ;$$

*Il suit de là que la pression totale qui s'exerce sur une paroi plane et inclinée d'une manière quelconque, est égale à l'aire de cette paroi multipliée par la distance de son centre de gravité à la surface supérieure du liquide ; car ce qui a lieu dans une tranche verticale, infiniment mince, et perpendiculaire à la paroi, a lieu dans toute sa longueur.*

Je viens de dire que la paroi  $AD$  pouvait être inclinée d'une manière quelconque ; et en effet, si le vase avait la forme indiquée par la fig. 103, on pourrait y appliquer le même raisonnement, que celui que nous venons de faire sur la fig. 102, et on démontrerait que la pression que reçoit cette paroi  $AD$  (fig. 103), est encore exprimée par le triangle  $ADE$ , dont la hauteur  $AE = AF$ .

432. *Jusqu'ici nous avons supposé le fond du vase de niveau ; mais tout ce qui précède relativement à la pression contre les parois a lieu, quelle que soit l'inclinaison de ce fond par rapport à l'horizon, pourvu que son intersection avec la paroi pressée soit une ligne droite parallèle à la face supérieure du liquide.*

En effet, supposons un vase dont le profil soit  $AECD$  (fig. 104), plein d'un liquide quelconque ; l'équilibre de ce liquide ne sera pas troublé, si par la pensée, un plan résistant  $AB$ , faisant un angle quelconque  $BAE$  avec l'horizon, venait à diviser la masse liquide en deux parties  $ABE$ ,  $ABCD$  ; par conséquent la paroi  $AD$  recevra la même pression qu'auparavant ; mais la résistance du plan  $AB$  permettrait évidemment de supprimer la partie  $ABE$  du liquide et même du vase, de manière qu'il en résultât le vase  $ABCD$  : *quelle que soit donc l'inclinaison du fond par rapport à l'horizon, la pression sur la paroi  $AD$  reste la même, comme il fallait le démontrer.*

Il n'est pas besoin de dire qu'en calculant la pression sur la paroi  $AD$ , il faut

dra se servir de la hauteur AF, et pour la paroi BC il faudra prendre la hauteur à partir du point B.

433. Supposons maintenant un vase ABCDEFGH (fig. 105) dont la forme soit celle d'une pyramide quadrangulaire tronquée, dont la petite base serait le fond du vase, et proposons-nous de déterminer la pression qui s'exerce contre une paroi BCDE.

Cette pression, d'après tout ce qui précède, est évidemment égale au poids du volume d'un polyèdre liquide BCDEIK, dont deux faces BCDE, BCKI sont des trapèzes, deux autres faces BIE, CDK sont des triangles, et enfin une cinquième face EDKI est un rectangle perpendiculaire à la paroi BCDE, dont la hauteur EI est égale à la profondeur *ab* du liquide; cela a été démontré (n° 422) pour le cas où, la paroi étant rectangulaire, le solide dont il s'agit était un prisme triangulaire tel que EBLDKI. En divisant la pyramide triangulaire LDKC par des plans perpendiculaires à l'arête LC, en tranches infiniment minces, par un raisonnement analogue à celui du n° 422, on démontrerait que la pression sur le triangle DLC est exprimée par le poids d'un volume de liquide égal à celui de la pyramide DLCK. Il suffira donc d'avoir l'expression du volume du solide BCDEIK, pour avoir celle de la poussée du liquide contre la paroi BCDE.

Or, si par l'arête DK et le sommet B nous menons un plan DKB, nous aurons partagé ce polyèdre en deux pyramides; l'une qui aura pour base le rectangle EIKD, et son sommet au point B, et l'autre triangulaire, dont la base sera le triangle DKC, et son sommet au même point B que la première: la somme de ces deux pyramides sera donc le volume cherché.

Celle dont la base est le rectangle EIKD, aura pour hauteur celle *bd* de la paroi BCDE, puisque les deux plans EIKD, EDCB sont perpendiculaires, et l'autre pyramide aura pour base le triangle BDC, et pour hauteur celle de l'eau contenue dans le vase. Nommons *a* la grande base BC, *b* celle ED de la paroi, et *H* la hauteur *bd* de cette même paroi, et enfin *h* la hauteur du liquide.

Le volume de la pyramide BEIKD sera égal à  $\frac{bhH}{3}$ , et celui de l'autre pyramide BDKC sera —  $\frac{aH}{2} \times \frac{h}{3} = \frac{aHh}{6}$ ; le volume du solide entier ou l'expression de la poussée qu'éprouve la paroi sera donc

$$P = \frac{bhH}{3} + \frac{aHh}{6} = \frac{hH(2b+a)}{6} \dots (240).$$

434. Cela posé, soit G le centre de gravité du trapèze BCDE; si par ce point nous menons un plan perpendiculaire à l'arête BC (fig. 105), ce plan rencontrera la face supérieure ABCH du liquide suivant la droite *de*; par le centre de gravité G du trapèze, et par le point *b*, élevons les droites Gg, ba perpendicu-

laires à la droite  $de$ ; nous aurons les triangles semblables  $dGg$ ,  $dba$ , qui nous

donneront  $db : dG :: ab : Gg = \frac{dG \times ab}{db} = \frac{dG \times h}{H}$ ,

mais (n° 111)

$$dG = \frac{db}{3} \times \frac{2DE + BC}{CB + DE} = \frac{H}{3} \times \frac{2b + a}{a + b};$$

par conséquent

$$Gg = \frac{Hh}{3H} \times \frac{2b + a}{a + b} = \frac{h}{3} \times \frac{2b + a}{a + b} \dots\dots (a).$$

D'ailleurs

$$BCDE = \frac{H}{2} (a + b);$$

multiplions cette équation par (a), il nous viendra

$$Gg \times BCDE = \frac{hH (2b + a)}{6}.$$

Si nous comparons cette équation à l'équation (240) nous en concluons

$$P = Gg \times BCDE \dots\dots (241)$$

C'est-à-dire que la pression sur la paroi BCDE est égale au poids d'un prisme liquide de même base que cette paroi, et d'une hauteur Gg égale à la distance du centre de gravité G de cette paroi à la face supérieure ABCH du liquide.

435. S'il s'agissait d'un vase en forme de pyramide tronquée quadrangulaire (fig. 106) dont le fond ABCH serait la grande base de ce tronc, il est évident, d'après ce qui a été démontré au n° 433 que la pression sur une paroi BCDE sera le poids d'un polyèdre BCDEIK, qui ne différera de celui qui exprime la pression de la paroi BCDE de la fig. 105, qu'en ce que la face rectangulaire BCKI (dont la hauteur BI est la profondeur de l'eau) est formée sur le grand côté BC (fig. 106) de la paroi, tandis que dans la fig. 105 la face rectangulaire correspondante est formée sur le petit côté ED de la paroi. En décomposant ce solide de la même manière que dans la fig. 105, on trouvera que son volume, ou la pression P de la paroi, est

$$P = \frac{hH (2a + b)}{6};$$

et par le même raisonnement qu'au n° 434, on arrivera enfin à conclure que la pression demandée est égale au poids d'un prisme liquide qui aurait la paroi pour base, et pour hauteur la distance du centre de gravité de cette paroi à la face supérieure du liquide.

436. D'après ce qui vient d'être démontré sur la pression qu'un liquide en repos dans un vase exerce contre chaque paroi, nous pouvons conclure, par

analogie, que, *quelles que soient et la forme et l'inclinaison d'une paroi plane par rapport à la face supérieure du liquide, la pression sera égale à l'aire de cette paroi multipliée par la distance de son centre de gravité à la face supérieure du liquide, non seulement pour la paroi toute entière, mais encore pour une portion quelconque de cette paroi.*

437. Supposons maintenant un vase cylindrique droit (fig. 107), la pression qui aura lieu sur chaque élément, de la paroi, parallèle aux génératrices de la surface, sera évidemment égale à l'aire de cet élément multipliée par la distance de son centre de gravité à la face supérieure du liquide, car cet élément étant infiniment étroit, peut être regardé comme une paroi plane. Or, tous les éléments de la paroi sont égaux entre eux, et sont semblablement disposés par rapport au liquide; ils recevront donc tous la même pression, et leurs centres de gravité sont tous à la même distance de la face supérieure du liquide; d'où l'on voit facilement que *la pression totale de la paroi cylindrique sera égale à l'aire de cette surface cylindrique multipliée par la distance de son centre de gravité à la face supérieure du liquide.*

Ainsi soit  $r$  le rayon EC de la base du cylindre; sa circonférence sera  $2pr$ , et son aire  $2prh$ ,  $h$  étant la hauteur AB du liquide. La distance du centre de gravité de cette paroi à la face supérieure AD du liquide est  $\frac{h}{2}$ ; la pression sera

donc 
$$P = 2prh \times \frac{h}{2} = prh^2 \dots (242).$$

438. Pour une portion verticale de la paroi qui répondrait à une arc d'un nombre quelconque de degrés, nous aurions évidemment

$$P = \frac{nprh^2}{360} \dots \dots (243).$$

$n$  étant ce nombre de degrés.

439. S'il s'agissait d'un vase en forme de cône tronqué (fig. 108), dont le fond serait la petite base, on pourrait regarder la paroi comme composée d'une infinité de trapèzes infiniment petits; la pression sur chacun de ces éléments serait (n° 434) son aire multipliée par la distance de son centre de gravité à la face supérieure du liquide, or, tous ces éléments se trouvent placés de la même manière par rapport au liquide, et sont parfaitement égaux; leurs centres de gravité sont à la même distance par rapport à la face supérieure du liquide; la pression totale sera donc égale à cette distance commune par la superficie du cône tronqué.

Le centre de gravité de la surface d'un tronc de cône est le même (n° 169) que celui du trapèze ABCD mené par l'axe EF; soient donc  $R$  et  $r$  les rayons des

bases,  $h$  la hauteur  $EF$  du liquide, et  $G$  le centre de gravité du trapèze  $ABCD$ ; d'après le n° 111 nous aurons

$$EG = \frac{h}{3} \times \frac{2r + R}{R + r} \dots\dots\dots (a).$$

L'aire d'un tronc de cône (*Géom. à trois dim.* n° 166) est égale à la demi-somme des circonférences des deux bases multipliée par la longueur de la génératrice; c'est-à-dire que si  $g$  est cette génératrice, l'aire de la paroi du vase sera

$$\text{aire paroi} = \frac{pg(R+r)}{2} \dots\dots\dots (b).$$

En multipliant les équations (a) et (b), nous aurons donc

$$\text{pression} = \frac{phg(R+r)}{2 \cdot 3} \times \frac{2r + R}{R + r} = \frac{phg(2r \times R)}{6} \dots\dots\dots (244).$$

440. Si le vase conique tronqué avait la grande base pour fond (fig. 109),  $G$  étant le centre de gravité du trapèze par l'axe  $ABCD$ ; la distance  $EG$  de ce centre par rapport à la petite base, serait

$$EG = \frac{h}{3} \times \frac{2R + r}{R + r};$$

quant à l'aire de la paroi, elle serait encore  $\frac{pg(R+r)}{2}$ ; par conséquent, dans

$$\text{ce cas, la pression} = \frac{phg(R+r)}{2 \cdot 3} \times \frac{2R + r}{R + r} = \frac{phg(2R+r)}{6} \dots\dots\dots (245).$$

En général, quelle que soit la surface intérieure du vase, la pression qu'elle reçoit est égale à son aire multipliée par la distance de son centre de gravité à la face supérieure du liquide.

Ayant déterminé la pression qu'un liquide exerce sur une paroi pour les vases ou bassins d'une forme quelconque, il nous reste à déterminer le point d'application d'une force égale à cette pression qui produirait le même effet, étant appliquée perpendiculairement à cette paroi.

441. Supposons qu'il s'agisse d'abord d'une paroi plane et rectangulaire,  $AD$  (fig. 102 et 103), inclinée d'une manière quelconque par rapport à l'horizon.

Puisque (n° 431) la pression sur cette paroi est proportionnelle au volume du prisme dont la base est le triangle  $ADE$ ; il est clair que si l'on projète le centre de gravité  $G$  sur le côté  $AD$ , la projection  $g$  de ce centre sera le point d'application demandé. Ce point d'application  $g$  de la pression résultante est donc tel que, pour la fig. 102, on aura :

$$Ag = \frac{2AD}{3}, \text{ et } Dg = \frac{AD}{3}.$$

442. Le moment de cette pression par rapport à l'arrête A (fig. 102), sera

$$\frac{AD \times DF}{2} \times \frac{DF}{2} \times \frac{2AD}{3} = \frac{(AD)^2 \times (DF)^2}{6} \dots\dots (a);$$

si le liquide était pressé par une force verticale P, comme dans la fig. 97, (n° 420) la pression sur la paroi AD (fig. 102) serait égale à  $\frac{AD \times P}{AB}$ ; et comme cette pression est uniforme, son moment par rapport à l'arrête A serait

$$\frac{AD \times P}{AB} \times \frac{AD}{2} = \frac{P(AD)^2}{2AB}$$

Le moment de la pression totale sera donc le moment (a) plus ce dernier, c'est-à-dire que

$$\text{mom. pres. tot.} = \frac{(AD)^2 \times (DF)^2}{6} + \frac{P(AD)^2}{2AB} = \frac{(AD)^2 [AB(DF)^2 + 3P]}{6AB} \dots (246)$$

Mais la somme des deux pressions est

$$\frac{AD(DF)^2}{4} + \frac{AD \times P}{AB} = \frac{AD \cdot [AB(DF)^2 + 4P]}{4AB};$$

si donc g est la distance du centre d'action de ces deux pressions, on aura

$$g \cdot \frac{AD \cdot [AB(DF)^2 + 4P]}{4AB} = \frac{(AD)^2 [AB(DF)^2 + 3P]}{6AB},$$

et par conséquent

$$g = \frac{2AD^2 [AB(DF)^2 + 3P]}{3[AB(DF)^2 + 4P]} \dots (246);$$

telle serait la distance du point d'application d'une force perpendiculaire à la paroi, qui ferait équilibre à la somme des deux pressions.

En raisonnant de la même manière pour les autres cas, on arriverait à la détermination du point d'application de la résultante de la somme des pressions provenant du poids du liquide et de la force verticale P qui presse la surface supérieure de ce dernier; mais comme il est très-rare que la pression contre la paroi provenant de cette force P ne soit pas contre-balancée par une autre égale et contraire, dorénavant nous n'en tiendrons point compte afin d'abrégier et de ne pas nous éloigner de notre but principal.

443. Si par le point g (fig. 102) on menait une horizontale dans le plan de la paroi, en fixant les extrémités de cette droite (rendue rigide) de manière à ce qu'elle eût seulement le pouvoir de tourner sur elle-même, la paroi qui ne serait maintenue contre la pression du liquide que par cet axe, se trouverait évidemment en équilibre autour de cet axe mené par le point g, tant que le liquide conserverait son niveau. Mais si le niveau venait à baisser, la pression diminuerait dans un plus grand rapport dans la partie au-dessus que dans la

partie au-dessous de cet axe, et l'équilibre serait rompu; la paroi céderait à la pression vers le fond, et s'ouvrirait par en bas. Si au contraire le niveau s'élevait, la pression au-dessus de l'axe l'emporterait sur celle au-dessous, et la paroi s'ouvrirait en tournant en sens contraire de la première fois. Une vanne ainsi construite pourrait donc servir, au moins comme indicateur, à maintenir un bassin constamment au même niveau.

444. Dans le cas où la forme de la paroi est un trapèze BCDE (fig. 105), pour avoir le point d'application de la résultante de la pression du liquide, il faudra chercher la projection du centre de gravité du solide BCDEIK, sur le plan BCDE. Pour cela, on se rappèlera (n° 433), que ce solide se compose de deux pyramides; l'une quadrangulaire et l'autre triangulaire. La première a sa base sur le plan DEIK que nous prendrons pour celui des momens; la distance de son centre de gravité par rapport à ce plan sera donc le  $\frac{1}{4}$  de sa hauteur (n° 147), c'est-à-dire égale à  $\frac{H}{4}$ , H étant égale à  $bd$ . Mais (n° 433) le volume de la pyramide BDEIK est  $\frac{bhH}{3}$ ; nous aurons donc

$$\text{mom. pyram. BDEIK} = \frac{H}{4} \times \frac{bhH}{3} = \frac{bhH^2}{12} \dots\dots (a).$$

La pyramide triangulaire BDKC a deux de ses sommets (D, K) dans le plan des momens DEIK; et ses deux autres (B, C) sur l'arête BC, qui est, par rapport au plan DEIK, à une distance égale à  $H=bd$ ; la distance de son centre de gravité par rapport à ce plan sera donc (n° 150)  $\frac{2H}{4} = \frac{H}{2}$ ; mais le volume de la pyramide BDKC (n° 433) est  $\frac{ahH}{6}$ , nous aurons donc

$$\text{mom. pyram. BDKC} = \frac{H}{2} \times \frac{ahH}{6} = \frac{ahH^2}{12} \dots\dots (b).$$

Si nous nommons  $g$  la distance du centre de gravité du solide BCDEIK, par rapport au plan DEIK, en multipliant par cette lettre le second nombre de l'équation (240), nous aurons  $\frac{ghH(2b+a)}{6}$  pour le moment de ce solide; or ce moment doit évidemment égaler la somme des momens (a) et (b), nous aurons

donc 
$$\frac{ghH(2b+a)}{6} = \frac{bhH^2}{12} + \frac{ahH^2}{12} = \frac{hH^2(a+b)}{12}$$

ce qui se réduit à 
$$g(2b+a) = \frac{H(a+b)}{2},$$

d'où 
$$g = \frac{H(a+b)}{2(2b+a)} \dots (247).$$

Telle sera l'expression de la distance du point d'application de la résultante de la pression, par rapport à l'arête DE qui est située au fond du vase.

La distance de ce point à l'arête supérieure BC sera par conséquent

$$g' = H - \frac{H(a+b)}{2(2b+a)} = \frac{4bH + 2aH - aH - Hb}{2(2b+a)} = \frac{H(3b+a)}{2(2b+a)} \dots (248).$$

445. En changeant  $b$  en  $a$  et  $a$  en  $b$  dans ces deux formules, on aurait

$$g = \frac{H(a+b)}{2(2a+b)} \text{ et } g' = \frac{H(3a+b)}{2(2a+b)} \dots (249),$$

pour les distances du point d'application de la résultante de la pression, à l'arête supérieure DE (fig. 106) et à l'arête inférieure BC, pour le cas du vase du n° 435,  $a$  représentant toujours la grande arête BC et  $b$  la petite DE.

### LEÇON III.

De l'équilibre entre des liquides de densités différentes; de l'équilibre des fluides élastiques, et des effets mécaniques de l'air atmosphérique.

446. Supposons deux vases ou tubes HABC, DEFG (fig. 110), de forme et de dimensions quelconques, réunis par un tube de communication HGDC; si dans ce dernier on suppose un diaphragme ou piston mobile  $ab$ ; que ce piston soit fixe pour un moment, et qu'on remplisse l'espace  $abC$  BAH d'un liquide, de l'eau par exemple, jusqu'à une certaine hauteur AB, et l'espace  $ab$ DEFG d'un autre liquide, du mercure si l'on veut, jusqu'à la hauteur  $mn$ ; si ensuite le piston  $ab$  est mis en liberté, *les deux colonnes de liquide ne seront en équilibre que lorsque les hauteurs  $dc$ ,  $eo$  de ces colonnes, à partir du niveau du centre de gravité du piston  $ab$ , seront réciproquement proportionnelles aux pesanteurs spécifiques de ces deux liquides.*

En effet, soit  $S$  l'aire du piston  $ab$ , la pression qu'il éprouvera de la part de la colonne d'eau (n° 426), sera égale à sa superficie  $S$  multipliée par la hauteur  $dc$ , (comprise entre le niveau du centre de gravité  $g$  du piston  $ab$  et le niveau supérieur AB de l'eau), et par la densité de ce liquide, quel que soit le diamètre AB du tuyau HABC: si donc  $h$  est la hauteur  $dc$ , et  $d$  la densité de l'eau, la force avec laquelle ce dernier liquide poussera le piston de gauche à droite sera  $Shd \dots (a)$ .

De même, soit  $h'$  la hauteur  $eo$  du niveau du centre de gravité  $g$  du piston

au niveau supérieur  $mn$  du mercure, et  $d'$  la densité de ce dernier ; la force avec laquelle ce liquide poussera le piston de droite à gauche, sera  $Sh'd'$  ; dans le cas d'équilibre cette force doit égaler la première (a) qui lui est directement contraire ; nous aurons donc

$$Shd = Sh'd' \text{ ou } hd = h'd',$$

ce qui revient à  $h : h' :: d' :: d...$  (250),

comme il fallait le démontrer.

447. Si les deux liquides étaient de même densité, on aurait  $d' = d$ , et par conséquent d'après la proportion (250)  $h' = h$ .

Il suit de là que dans un tube recourbé d'une manière quelconque, ce tube ayant d'ailleurs une forme quelconque, la communication entre les deux branches étant non-interrompue, un même liquide introduit par une branche remontera dans l'autre, de manière qu'aussitôt l'équilibre établi, le liquide sera au même niveau dans les deux branches.

#### Équilibre des fluides élastiques enfermés dans des vases.

448. Les fluides élastiques diffèrent des liquides en ce qu'ils sont très-compressibles, pendant que les liquides le sont si peu qu'on peut les regarder comme entièrement incompressibles sans erreur sensible. Les fluides compressibles sont éminemment élastiques; c'est-à-dire que de quelque quantité qu'on les comprime, aussitôt qu'ils sont livrés à eux-mêmes, ils reprennent le volume qu'ils avaient avant la compression. Du reste ils sont pesans, et leurs molécules sont dans un état parfait de liberté les unes à l'égard des autres. L'air atmosphérique et la vapeur d'eau sont les deux fluides élastiques dont les effets mécaniques sont les plus importans, aussi ce sont ceux que nous aurons le plus particulièrement en vue, mais les principes suivans appartiennent en général à tous les fluides élastiques.

449. Supposons que le vase ABCD (fig. 111) soit plein d'un fluide élastique, qui ne puisse point s'échapper par l'ouverture supérieure; je dis que, dans le cas d'équilibre, quelle que soit la pression qu'il éprouve de haut en bas, chacune de ses molécules se trouvera également pressée dans toutes les directions.

Ceci se démontrerait comme dans le cas d'un liquide (n° 394), à cause de la liberté entière qu'ont les molécules d'agir dans tous les sens.

450. Supposons un vase ABCD (fig. 111) plein d'un fluide élastique, dont le ressort serait en équilibre avec la pression de l'air atmosphérique; dans ce cas, si nous considérons une colonne EF de molécules, nous concluons qu'il y

aura un plus grand rapprochement entre les molécules voisines du point E, qu'entre celles voisines du point F; car celles près du point E sont comprimées par le poids de toutes les autres, et à mesure que la molécule que l'on considère s'approche du point F, elle se trouve de moins en moins comprimée: à partir du point F les compressions des molécules vont donc en croissant en progression par différences égales, dont le premier terme est le poids d'une molécule, la raison ce même poids, et le dernier terme la pression de la dernière molécule située au point E. Les rapprochemens des molécules suivent par conséquent la même loi (n° 385), et par suite les ressorts de ces molécules, et la densité de la colonne EF.

Si donc nous voulions le poids d'une colonne EF, il faudrait diviser la hauteur de cette colonne en une infinité de parties égales, et les densités des tranches horizontales de molécules, iraient en augmentant, suivant la progression des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 ..... jusqu'à  $h$ , en prenant pour unité la densité des molécules comprises dans la première tranche à partir du point F, et en nommant  $h$  la hauteur EF de la colonne.

Or, cette somme a pour limite (note pag. 50)  $\frac{h^2}{2}$ : ainsi le poids d'une colonne de molécules de fluide élastique sera proportionnel au carré de la hauteur de cette colonne. Pour avoir le poids de cette colonne, il faudra multiplier  $\frac{h^2}{2}$  par la densité  $d$  du fluide de la première tranche à partir du point F et

nous aurons            poids d'une colonne =  $\frac{h^2 d}{2} \dots (251)$ .

Mais le nombre des colonnes qui viennent presser le fond du vase est proportionnel à la superficie de ce fond; si donc nous nommons  $S$  cette superficie,

nous aurons            pression du fond =  $\frac{Sh^2 d}{2} \dots (252)$ .

451. Si la surface supérieure du fluide est pressée par une force  $P$  (fig. 90), il est clair que la pression du fond sera augmentée de toute cette force  $P$ , si cette dernière agit sur la surface d'un piston de même superficie que le fond; et si l'aire du piston n'était pas égale à celle du fond, cette augmentation serait le quatrième terme de la proportion

$$S' : S :: P : \frac{PS}{S'} \dots (a),$$

$S'$  étant l'aire du piston; dans ce cas on aura donc

$$\text{pression du fond} = \frac{Sh^2 d}{2} + \frac{PS}{S'} = S \left( \frac{h^2 d}{2} + \frac{P}{S'} \right) \dots (253).$$

452. *Proposons-nous maintenant de déterminer la pression exercée contre une paroi plane et verticale par un fluide élastique enfermé dans un vase, la tension de ce fluide étant en équilibre avec l'air atmosphérique.*

Observons, pour cela, que chaque molécule presse dans toutes les directions avec une force égale à la compression verticale qu'elle reçoit, c'est-à-dire au poids de la colonne à laquelle cette molécule sert de base; or (n° 450) ce poids est en raison des carrés des hauteurs; si donc nous considérons les molécules situées les unes à la suite des autres, sur une même verticale, et à des profondeurs respectivement représentées par 1, 2, 3, 4, 5, ..... $h$ , leurs poussées successives perpendiculaires à la paroi, d'après la formule (251), seront respectivement

$$\frac{d}{2}, \frac{4d}{2}, \frac{9d}{2}, \frac{16d}{2}, \frac{25d}{2}, \dots \dots \frac{h^2 d}{2};$$

la somme de toutes ces pressions sera donc la poussée totale exercée contre la paroi par une tranche verticale de fluide infiniment mince; nous aurons donc pour cette somme

$$\text{pression d'une tranche vert.} = \frac{d}{2} (1 + 4 + 9 + 25 \dots \dots h^2)$$

mais (note de la page 50) la limite de la parenthèse est  $\frac{h^3}{3}$ ; la pression de la

tranche sera donc égale à  $P = \frac{dh^3}{6} \dots \dots (a)$ ,

si donc  $a$  est la longueur de la paroi, nous aurons

$$\text{pression totale} = \frac{dah^3}{6} \dots \dots (253).$$

453. Supposons que  $DF = EF$  (fig. 111), et qu'on ait décrit une branche DE de parabole dont le sommet serait le point D, et l'axe la droite DC; d'après le n° 796 de la *Géométrie plane*, l'aire de la figure ADE sera le  $\frac{1}{3}$  du rectangle DFEA, lequel rectangle est ici un carré dont le côté est  $h = EF$ ;

nous aurons donc  $\text{aire ADE} = \frac{h^2}{3}$ .

Si nous multiplions cette aire par la longueur  $a$  de la paroi, nous aurions le volume d'un cylindre dont la base serait la figure parabolique ADE, et la hauteur la longueur  $a$  de la paroi; ce volume serait donc

$$\text{vol. cy. ADE} = \frac{ah^2}{3},$$

et si nous multiplions ce volume par la densité  $d$  du fluide élastique nous aurons le poids de ce cylindre, qui serait

$$\text{poids cy. ADE} = \frac{adh^2}{3}.$$

Si enfin nous multiplions ce poids par  $\frac{h}{2}$ , il nous viendrait

$$\text{poids cy. ADE} \times \frac{h}{2} = \frac{adh^3}{6}.$$

Or, le second membre de cette équation est le même que celui de la formule (253); il faut donc conclure de là que

$$\text{pression totale sur la paroi AD} = \text{poids cy. parabolique} \times \frac{h}{2}, \dots (254),$$

454. S'il s'agissait d'une paroi inclinée BC (fig. 112 et 113), nous arriverions à la détermination de la pression que reçoit cette paroi, en décrivant la branche de parabole  $EbG$ , comme s'il était question de la paroi verticale BG, et en se rappelant ensuite que les molécules d'un fluide élastique pressent avec la même intensité dans toutes les directions; d'où on verra que la molécule  $b$ , dont la pression sur la paroi verticale BG est l'abscisse  $bf$  de la parabole  $EbG$ , presse avec la même intensité le point  $c$  de la paroi inclinée BC, perpendiculairement à cette paroi. Si donc on fait la droite  $cd$ , perpendiculaire à la paroi BC, égale à  $bf$ , cette droite  $cd$  exprimera la poussée sur le point  $c$ ; de même en faisant  $ik = gh$ , la longueur  $ik$  exprimera la poussée sur le point  $i$ . En continuant de la même manière, on déterminerait les ordonnées d'une courbe  $Ckde$  qui serait une branche de parabole dont la plus grande ordonnée serait la hauteur BC de la paroi inclinée, et la plus grande abscisse  $Be$  égale à la hauteur BG du fluide; le sommet de cette courbe serait le point C, et la droite BC sera tangente à cette courbe en ce sommet.

D'après cela il est facile de comprendre que la pression totale qu'éprouve la paroi inclinée est le poids d'un cylindre de même densité que le fluide (dont la base serait le triangle mixte  $CBe$ , et la hauteur la longueur de la paroi), multiplié par la moitié de la hauteur BG ou CG du liquide (n° 453). Or, soit H la

hauteur BC de la paroi; l'aire du triangle mixte  $CBe$  sera  $\frac{Hh}{3}$ , le volume du cylindre  $\frac{aHh}{3}$ , son poids  $\frac{adHh}{3}$ , et conséquemment la pression totale;

$$\text{pression totale sur la paroi BC} = \frac{adHh^2}{6} \dots \dots (254).$$

D'après les principes qui précèdent, et par analogie à ce que nous avons démontré sur les pressions des liquides, nous pourrions facilement compléter ce qui est relatif à celle des fluides élastiques ; mais comme ce sujet, très-important pour beaucoup de machines, ne l'est que très-peu pour les architectes, et que nous avons besoin d'abrégier le plus possible, parce que notre propre sujet renferme beaucoup de détails qu'il ne nous est pas permis de laisser sous silence, nous terminerons ce qui concerne les fluides élastiques par quelques considérations sur les effets mécaniques de l'air atmosphérique.

#### Effets mécaniques de l'air atmosphérique.

455. Les physiciens ont constaté par des expériences qui ne laissent aucun doute, que l'air atmosphérique qui nous environne de toutes parts est un fluide très-élastique, et qui est soumis comme tous les autres corps aux lois de la pesanteur et de l'inertie.

456. Il suit de là que *l'air presse dans toutes les directions et avec la même intensité les surfaces des corps avec lesquels il est en contact.*

Ces pressions étant égales et directement opposées se détruisent, et n'ont d'autre effet sur les corps que celui de comprimer leurs molécules et tendre à les rapprocher de leur centre.

457. Supposons un vase ABCD (fig. 90) plein d'eau ; l'air pesera sur la surface supérieure *ab*, de manière que si les parois latérales n'étaient pas pressées en même temps du dehors au dedans avec la même intensité, la pression contre ces parois serait augmentée de tout le poids de la colonne d'air qui aurait pour base la surface supérieure du liquide, et pour hauteur la distance de la surface du globe terrestre à la limite de notre atmosphère ; mais comme cette pression est partout la même, les choses restent dans le même état que si l'air était sans pesanteur.

458. Si dans un vase ABCD (fig. 91) on plonge verticalement un tube *fe* ouvert par les deux bouts, la pression de l'air dans le tube sera la même qu'à l'extérieur ; aussi l'eau dans ce tube montera au même niveau que l'eau extérieure ; mais si le tube est fermé par en haut, et qu'avant de le plonger dans le liquide on l'ait purgé d'air, comme alors l'air extérieur ne pourra produire de pression dans le tube, il s'en suivrait que la pression de ce fluide sur la surface du liquide ne sera pas la même pour toutes les molécules, et celles comprises dans le tube n'étant soumises qu'à l'action de la pesanteur, seront soulevées par les molécules environnantes qui s'échapperont dans le tube par l'orifice

inférieur, et le liquide s'élevera dans ce tube au-dessus du niveau *ab* du vase, à une hauteur qui sera en raison inverse de la pesanteur spécifique du liquide, le tube étant d'une hauteur *gf* indéfinie au-dessus du niveau *ab*, et, répétons-le, parfaitement purgé d'air. En effet, si le liquide dans le vase est de l'eau, le niveau dans le tube s'élevera à environ 32 pieds ou 10<sup>m</sup>,40, et s'il est du mercure, il ne s'élevera qu'à environ 28 pouces ou 0,76. Nous devons donc avoir

$$32 \text{ pieds ou } 384 \text{ pouces} : 28 \text{ pouces} :: d : 1,$$

en prenant pour unité la pesanteur spécifique de l'eau, de là nous tirerons

$$d = \frac{384}{28} = 13,7 \text{ environ};$$

d'où l'on voit que la pesanteur spécifique du mercure serait environ 13,7 fois celle de l'eau : c'est en effet à peu près ce qu'on a trouvé par des expériences directes ( n° 411 ).

Cet effet mécanique de l'air atmosphérique de faire monter les liquides dans des tubes vides d'air, fermés par en haut, et plongés verticalement dans un bassin par le bout ouvert, est le fondement de toutes les espèces de pompes aspirantes. En effet, ces sortes de machines n'ont pour objet que de former et d'entretenir le vide à l'extrémité supérieure d'un tube dont la hauteur verticale est un peu moindre que celle à laquelle la pression de l'air peut faire monter le liquide dans ce tube; l'eau, étant arrivée à cette hauteur, déverse dans un bassin qu'on dispose à cet effet, un peu au-dessus de l'endroit où l'on produit le vide, dans lequel le piston fait monter le liquide. Nous traiterons des pompes plus tard. Pour le moment il ne doit être question que des principes de mécanique.

---

## SECTION QUATRIÈME.

### PRINCIPES D'HYDRODYNAMIQUE.

#### LEÇON I.

De la manière dont les molécules des liquides incompressibles se comportent dans les vases qui les contiennent, pendant qu'ils sortent par des orifices percés dans le fond ou dans les parois des vases.

459. Nous avons vu (n° 32) que l'hydrodynamique avait pour objet les lois du mouvement des liquides. Quoique les principes de cette branche de la mécanique générale n'aient presque aucun rapport à la stabilité des édifices proprement dits, nous allons néanmoins nous en occuper, parce qu'ils sont, dans beaucoup d'autres circonstances, très utiles aux architectes(\*).

460. Demandons-nous, d'abord, de quelle manière les molécules du liquide se comportent dans le vase, lorsqu'il s'écoule par un *très-petit orifice* percé dans le fond.

Supposons, pour fixer les idées, un vase cubique dont la section verticale soit le carré ABCD (fig. 114), et dont les parois et le fond soient parfaitement polis intérieurement. Remplissons-le d'un liquide quelconque, de l'eau, par exemple; concevons-en la masse parfaitement en équilibre, et divisée, dans sa hauteur, en tranches horizontales d'une épaisseur égale à celle d'une molécule, y compris l'écartement qui existe entre deux.

Avant d'aller plus loin, démontrons que l'existence de ces tranches horizontales n'a rien qui soit contraire à la nature des liquides, et que par conséquent elle peut et doit même être admise.

En effet, l'égalité des pressions nous force même à supposer que, si par une molécule quelconque on mène un plan horizontal, ce plan contiendra autant de molécules que sa superficie le permettra, car toutes ces molécules, se trouvant à la même profondeur, seront soumises à la même pression, et comme cette pression, égale pour toutes, les sollicite également à se mouvoir dans toutes les directions, par la réaction des parois du vase qui résistent elles se

---

(\*) La théorie qui va suivre est entièrement neuve, et diffère essentiellement de celle suivie jusqu'à présent. Elle a été soumise à l'Académie des sciences, le 13 mai 1833.

tiendront mutuellement en repos. Il arriverait la même chose dans le plan horizontal mené par une autre molécule quelconque. Si, au contraire, on supposait qu'il fût possible de trouver une molécule telle que le plan horizontal qui passerait par cette molécule n'en contiât pas d'autres, il est clair que cette molécule recevant une pression qui la sollicite à se mouvoir dans toutes les directions, et comme aucune pression horizontale ne pourrait la tenir en repos dans ce plan, elle s'échapperait d'un côté ou d'un autre, et serait en mouvement jusqu'à ce qu'elle trouvât le moyen de se placer entre d'autres molécules qui la presseraient également de toutes parts, et seraient par conséquent situées à la même profondeur, car sans cela l'équilibre ne saurait subsister dans la masse liquide, comme nous le supposons. Il n'est pas même nécessaire que le liquide soit parfaitement homogène pour cela, car dès que l'équilibre sera établi, chaque molécule se sera placée à la profondeur que lui assignera sa pesanteur spécifique, ce que les liquides colorés de différentes couleurs et qui sont de pesanteurs spécifiques inégales rendent sensible, puisque les tranches de ces liquides différens sont très-distinctes, quand il n'y a pas mélange, et que les sections qui les séparent nous paraissent très-planes. Cette hypothèse des tranches horizontales conçues comme il a été dit plus haut, n'a donc rien qui soit en opposition avec la nature des liquides, mais, au contraire, se trouve parfaitement d'accord avec les principes mécaniques admis dans la théorie de l'équilibre des liquides incompressibles, principes généralement reconnus, et que l'expérience confirme aussi parfaitement que possible.

461. Cela posé, ouvrons un très-petit orifice *ab* dans le fond du vase : aussitôt, les molécules de la tranche du fond, qui sont situées immédiatement sur la surface de cette orifice, s'échapperont hors du vase ; et les molécules latérales de la même tranche, n'étant plus retenues de ce côté, s'y porteront, en vertu de leur grande mobilité, en obéissant à la pression des parties supérieures, qui les sollicite à se mouvoir, dans toutes les directions, avec la même force. Ces molécules latérales de la tranche du fond s'échapperont donc par l'orifice à la suite des premières, *avant que les molécules de la seconde tranche qui sont au-dessus de l'ouverture, ne puissent couler à la suite de celles qui ont sorti dans le premier instant.*

En effet, la pression que reçoivent les molécules de la première tranche, est plus grande que celle qu'éprouvent celles de la seconde ; les premières se porteront donc vers l'orifice avec plus de vitesse dans la direction horizontale, que les autres dans la direction verticale de haut en bas, et ne laisseront échapper, par conséquent, aucune molécule de la seconde tranche, si l'ouverture est assez petite pour que son rayon puisse être franchi par l'excès de vitesse des molécules de la première tranche sur celle des molécules de la seconde ; car, pour

que quelques unes des molécules de cette dernière tranche, qui sont situées au-dessus de l'orifice, pussent tomber, il faudrait qu'il se formât un vide au-dessous; or, ce vide ne saurait exister un seul instant, puisque la grande mobilité des molécules liquides s'y oppose évidemment, en obligeant les plus voisines et qui ont la plus grande vitesse, c'est-à-dire celles du fond, de suivre incontinent celles qui, en s'échappant, ont détruit l'égalité des pressions, et de venir, de cette manière, et d'un mouvement continu, fermer, pour ainsi dire, le passage aux molécules de la seconde tranche, à mesure que celles qui tombent tendent à le leur ouvrir; et comme la même chose se répétera à chaque instant, nous sommes conduits à conclure qu'il est impossible, dans le cas d'un très-petit orifice percé au fond du vase, qu'une seule molécule de la seconde tranche, puisse sortir avant que toutes celles de la première ne soient coulées.

462. Il suit de là que, dès le premier instant, les molécules de la première tranche, en se portant vers l'orifice, abandonneront nécessairement les parois du vase, en proportion du nombre des molécules qui se sont échappées dans ce premier instant, et par conséquent un vide tendra à se former dans le contour de cette première tranche, contre les parois, qui sera d'autant plus étroit que ce contour sera plus considérable.

Ce vide subsistera, tant qu'il ne sera pas aussi large que le diamètre d'une molécule; mais aussitôt que sa largeur sera suffisante, toutes les molécules de la seconde tranche qui se trouveront au-dessus, couleront le long des parois, pour l'empêcher de se former davantage.

463. Les molécules de la seconde tranche qui ont ainsi quitté leur place, pour descendre, de l'épaisseur d'une tranche, le long des parois, auront produit un vide, autour de cette seconde tranche, que les molécules latérales de cette même tranche pourront seules empêcher, étant animées de la plus grande vitesse, et l'espace qu'elles ont à franchir étant très-étroit: elles viendront donc barrer continuellement le passage aux molécules de la troisième tranche situées au-dessus de ce vide, couler le long des parois pour suivre par derrière les molécules de la première tranche, et aller, à leur suite, sortir par l'orifice.

464. Mais les molécules de la seconde tranche ne peuvent se porter vers le contour du vase pour descendre de l'épaisseur d'une tranche le long des parois, sans abandonner en même temps le point de cette tranche qui répond verticalement au centre de l'orifice; il tendra donc à se former un vide en cet endroit, que les molécules de la troisième tranche qui sont au-dessus peuvent seules empêcher, en suivant aussitôt celles de la seconde qui quittent ce point.

465. Les molécules de la troisième tranche qui sont ainsi descendues de la

hauteur d'une molécule pour empêcher le vide qui tendait à se former au centre de la seconde tranche, en auront produit un semblable au centre de la troisième, que les molécules latérales de cette même tranche viendront remplir incontinent, en se portant des parois au centre du vase, et en produisant un vide autour de ces parois, que les molécules de la 4<sup>e</sup> viendront empêcher, et ainsi de suite d'une tranche à l'autre, jusqu'à la plus supérieure, où le vide ira réellement se former à chaque instant, si le vase n'est pas entretenu constamment plein.

466. En résumant ce qui vient d'être dit, nous verrons que,

1° Le vide qui tend à se former à chaque instant à la sortie de l'orifice est reporté, d'un mouvement continu, d'une tranche à l'autre jusqu'à la face supérieure du liquide, en remontant le long des parois, et verticalement au-dessus de l'orifice, alternativement;

2° D'où il résulte que les molécules descendent de l'épaisseur d'une tranche, alternativement au-dessus de l'orifice et le long des parois, de manière que toutes les tranches se replient en nappes, horizontalement les unes sous les autres, pour se suivre sans confusion, et aller, les unes après les autres, sur le fond du vase, et s'échapper par l'orifice; de telle sorte qu'aucune molécule de la seconde tranche ne coule que toutes celles de la première ne soient sorties du vase; qu'aucune molécule de la troisième ne s'échappe que toutes celles de la seconde ne soient dehors, et ainsi de suite jusqu'à la plus supérieure, si le vase se vide, qui descendra la dernière, sans cesser de paraître horizontale, le vide qui s'y forme, et qui s'agrandit et se ferme alternativement d'un mouvement continu, n'a de profondeur que l'épaisseur d'une tranche, qui n'est pas sensible à nos sens.

467. Telle est la marche naturelle des molécules liquides, dans le cas d'un très-petit orifice, et dans l'hypothèse que l'intérieur du vase est parfaitement poli. Quoique dans la pratique le poli du vase soit loin de cette perfection, cette hypothèse se réalise, presque, lorsque le vase se mouille; car la couche de liquide qui reste adhérente aux parois et au fond, rend le poli parfait pour le reste de la masse liquide. Ainsi on doit entendre par tranche du fond, celle qui est immédiatement au-dessus de cette couche liquide adhérente.

468. Cherchons maintenant quelle est la loi mathématique suivant laquelle l'écoulement a lieu par un très-petit orifice au fond du vase; et supposons d'abord le cas où le vase se vide.

Dans ce cas, il semble, au premier aperçu, qu'attendu que les tranches descendent les unes sur les autres le long des parois et vers le centre du vase, alternativement de l'épaisseur d'une tranche, les vitesses des molécules doivent aller en s'accroissant par l'action persévérante de la pesanteur; mais, par la réaction du fond, les impulsions que donne la pesanteur, pendant ces chutes successives,

sont détruites par la résistance des tranches inférieures; et, comme toutes les tranches restent soumises aux mêmes pressions pendant tout le temps qu'elles restent dans le vase, et qu'elles ne doivent leurs vitesses qu'à ces pressions, il s'ensuit que toutes les tranches liquides viennent couler sur le fond, et, par conséquent, sortir du vase avec une vitesse uniformément retardée, puisque les pressions des tranches successives, à partir de celle du fond, suivent une progression décroissante par différences égales. Cette conséquence est parfaitement conforme à l'expérience.

469. Quand le vase est entretenu constamment au même niveau, à mesure que les tranches descendent en nappes, les unes sur les autres, pour arriver sur le fond du vase, elles reçoivent des pressions qui croissent par degrés égaux, de sorte qu'arrivées à la sortie du vase, elles ont toutes acquies la vitesse qu'avait la première tranche à l'instant de l'ouverture de l'orifice, puisqu'elles sont toutes alors successivement soumises à la pression totale; d'où l'on voit que, dans ce cas, l'écoulement a lieu d'un mouvement uniforme, comme le prouve encore l'expérience.

470 Pour calculer la vitesse acquise par une molécule à son arrivée sur le fond du vase, dans l'hypothèse du niveau constant, il faut faire attention que pendant tout le temps que les molécules d'une même tranche ne se meuvent qu'horizontalement, elles sont animées d'un mouvement uniforme, puisqu'elles sont, pendant tout ce temps, soumises à la même pression; d'où l'on voit qu'une molécule, en descendant successivement de l'épaisseur d'une tranche, reçoit bien une accélération de vitesse, mais au lieu de renouveler son action à chaque instant, la force accélératrice ne donne des impulsions qu'à des intervalles proportionnels au temps qu'il faut à cette molécule, dans chaque tranche, pour parcourir l'espace horizontal qui lui est destiné; d'où l'on voit que la vitesse de cette molécule n'est point accélérée d'une manière continue et uniforme.

471. Toutefois, on peut calculer la vitesse acquise par une molécule à son arrivée au fond du vase, en supposant qu'elle tombe librement, suivant une verticale, depuis la face supérieure du liquide jusqu'au fond du vase.

En effet, la grande mobilité des molécules liquides permet d'admettre qu'en parcourant horizontalement, entre deux tranches, l'espace qui lui est destiné pour aller descendre, de l'épaisseur d'une tranche, alternativement le long des parois et vers le centre du vase, une molécule n'éprouve aucune altération dans sa vitesse; par conséquent, on peut faire abstraction du temps qu'elle met à parcourir cet espace horizontal, et supposer qu'elle tombe directement et sans interruption, suivant une même verticale depuis le niveau supérieur jusqu'au fond du vase; car le niveau étant constant, les pressions que recevra cette molécule, en descendant verticalement en ligne droite, seront absolument les mêmes que si elle

avait suivi sa marche naturelle. Mais les pressions successives que recevra cette molécule en descendant de cette manière, ne seront dues qu'au poids de celles qui viendront se placer successivement au-dessus d'elle. Or, le poids d'une molécule de matière quelconque n'est autre chose que la force accélératrice de la pesanteur ; d'où il faut conclure que la vitesse demandée est la même que celle qu'acquerrait, en tombant librement du niveau supérieur jusqu'au fond du vase, un grave quelconque : ce qui est conforme au principe de Toricelli et à l'expérience.

472. Il suit de là que si  $V$  est la vitesse demandée,  $t$  le temps que mettrait un corps quelconque à descendre verticalement de la hauteur du liquide, et  $h$  cette hauteur, on aura (n<sup>os</sup> 316 et 317),

$$V = gt, \text{ et } h = \frac{t^2 g}{2} \dots\dots (a).$$

473. Eliminons  $t$  entre ces deux équations, et il en résultera

$$V^2 = 2gh, \text{ d'où } V = \sqrt{2gh} \dots\dots (255).$$

Equation qui est celle d'une parabole, lorsqu'on fait varier  $V$  et  $h$ , dont le paramètre est  $2g$ .

474. Si donc on dispose cette parabole  $cde$  (fig. 114) de manière que son axe  $ce$  soit vertical, et son sommet  $c$ , sur la face supérieure du liquide, les abscisses  $h$  indiqueront les profondeurs des tranches successives jusqu'à celle du fond, et les ordonnées  $V$  les vitesses de ces tranches.

475. Voyons, maintenant, de quelle manière les molécules liquides se comportent dans l'intérieur du vase, lorsque l'orifice percé dans le fond est d'une grandeur quelconque.

Supposons que son diamètre  $ab$  (fig. 115) soit tel, que les molécules latérales de la première tranche sur le fond ne puissent plus barrer entièrement le passage à celles de la seconde tranche situées au-dessus ; dans ce cas, il coulera encore évidemment quelques molécules de cette première tranche, tout autour des bords de l'orifice, qui rétréciront cette ouverture de l'épaisseur d'une tranche ; mais un nombre plus ou moins considérable des molécules de la seconde tranche suivront celles de la première qui ont tombé dès l'ouverture de l'orifice, et cette seconde tranche s'échappera en nappe sur la première, de manière à diminuer, à son tour, l'ouverture de l'orifice, d'une épaisseur de tranche tout autour. Si cette ouverture est encore trop grande pour que les molécules latérales de la seconde tranche barrent entièrement le passage à celles de la troisième, celle-ci viendra couler de la même manière que les précédentes, et ainsi de suite pour les

autres, jusqu'à une tranche pour laquelle l'orifice sera devenu assez petit, pour qu'elle puisse fermer le passage direct à l'orifice, aux molécules de la tranche immédiatement au-dessus. Les teintes de couleurs différentes qui indiquent grossièrement les épaisseurs des tranches, sont propres à indiquer ce qui se passe dans une section verticale ABCD (fig. 115).

476. Quelle que soit la quantité de molécules de la première tranche qui aient suivi celles qui étaient immédiatement au-dessus de l'orifice; comme cette quantité ne saurait être nulle, il est clair qu'il a fallu que le contour de cette tranche ait abandonné les parois du vase; un vide quelconque s'est donc formé dans le pourtour, et les molécules de la seconde tranche, situées au-dessus, ont dû venir s'opposer à la formation de ce vide, en descendant le long des parois; car les molécules de cette seconde tranche étant toutes prêtes, par leur grande mobilité, à s'échapper dans toutes les directions où elles n'éprouvent pas de résistance, quoique celles de cette même tranche qui sont du côté de l'orifice coulent dans cette direction, les plus voisines du vide qui tend à ce former autour des parois, s'y porteront évidemment sans retard, en obéissant à la pression des parties supérieures; d'où l'on voit que dans cette seconde tranche, il y aura deux mouvemens horizontaux: l'un vers les parois, pour empêcher le vide dont nous venons de parler, et l'autre vers l'orifice pour sortir du vase; il se formera donc un vide  $c, d$ , dans cette tranche participant de la forme du vase, et de celle de l'orifice, dont la position sera telle, que les deux zones que ce vide déterminera, soient équivalentes entre elles, où du moins proportionnelles aux quantités d'écoulement qui auront lieu de part et d'autre; d'où l'on voit que ce vide  $c, d$ , sera assez voisin des parois.

477. Ce dernier vide sera rempli par les molécules de la troisième tranche qui sont situées au-dessus; un vide pareil se manifestera dans le lieu que ces dernières molécules auront quitté; et ce nouveau vide sera rempli par les molécules latérales de cette troisième tranche. Mais pour cela, il faudra que les molécules de cette même tranche abandonnent les parois, où elles produiront un autre vide  $e, h$ ; elles en produiront un autre  $f, g$ , entre le vide  $c, d$ , et le point répondant verticalement à l'orifice, et ainsi de suite jusqu'à la dernière des tranches qui peuvent déverser directement par l'orifice.

478. En résumant ce qui vient d'être dit sur le jeu des molécules dans l'intérieur du vase, dans le cas d'un grand orifice, nous verrons que,

1° La première tranche n'a qu'une seule nappe qui se dirige directement vers l'orifice;

2° La seconde tranche se divise en deux nappes, dont une coule directement dans l'orifice, et l'autre le long des parois, pour aller suivre, par derrière, la première tranche dans l'orifice;

3° La troisième tranche se divise en trois nappes, dont une va dans l'orifice, et les deux autres coulent l'une vers l'autre pour empêcher la formation du vide *c, d*. Ces deux dernières nappes se replient sous elles-mêmes, de manière que la partie de chacune qui est parvenue à la place qu'occupait la seconde tranche, prend une direction opposée à l'autre, et les deux finissent par jouer le rôle des deux nappes de la seconde tranche;

4° La quatrième tranche se divisera en quatre nappes, la cinquième en cinq nappes, et ainsi de suite, de manière que la dernière de celles qui coulent directement dans l'orifice, et toutes celles au-dessus, se diviseront en autant de nappes qu'il y aura de tranches qui s'échappent directement par l'ouverture; et ces nappes se comporteront de telle manière, que, celle qui sera au-dessus de l'orifice viendra couler dans la hauteur de la dernière tranche qui déverse directement dans l'orifice dès le commencement de l'écoulement; la seconde, dans la hauteur de la tranche immédiatement au-dessous de la précédente; la troisième nappe, dans la hauteur de la tranche immédiatement au-dessous et ainsi de suite, de sorte que la nappe la plus voisine des parois de toutes les tranches supérieures, viendra couler sur le fond du vase.

479. Il suit de là que le nombre des nappes de chaque tranche supérieure est proportionnel à la grandeur de l'orifice, et à mesure que le nombre de ces nappes augmente, les espaces horizontaux qu'elles ont à parcourir diminuent; d'où l'on voit que, si cet orifice était égal au fond du vase, il y aurait dans les tranches supérieures autant de nappes que de molécules, et ces nappes n'auraient alors aucun espace horizontal à parcourir. D'ailleurs, la première tranche se trouvant tout entière sur la surface de l'orifice, tomberait entièrement dans le premier instant, et elle serait évidemment suivie par toutes les autres; et le liquide tomberait à la manière des solides.

480. On voit aussi que, conformément à l'observation, la face supérieure du liquide descend horizontalement, lorsque le vase se vide, et que, dès que cette face est arrivée au niveau de la dernière tranche qui déverse directement dans l'orifice, il s'y forme une dépression qui va en augmentant à mesure que le niveau baisse, et cette dépression pénètre bientôt dans l'orifice même, de manière que le liquide n'occupe plus toute la superficie de ce dernier, et ne coule plus qu'autour de sa circonférence.

481. D'après la manière dont nous venons de voir que le liquide se comporte intérieurement dans le cas d'un grand orifice, on voit clairement que les vitesses des tranches successives sont les mêmes que dans le cas d'une très-petite ouverture. Cette conséquence est conforme à celle à laquelle est parvenu M. Hachette (*Traité élémentaire des Machines*, 4<sup>e</sup> édition, 1828, pag. 74.), par ses expériences sur l'écoulement des liquides. Ainsi la formule (255) fera connaître la vitesse d'une tranche quelconque.

482. Expliquons maintenant le cas d'un orifice vertical.

Soient le vase ABCD (fig. 116) plein d'un liquide quelconque, de l'eau, par exemple, et  $ab$  la dimension verticale de l'orifice. Si l'équilibre existe dans toute cette masse liquide, au moment de l'ouverture de l'orifice, les tranches comprises dans la hauteur de cet orifice recevront un mouvement horizontal qui les portera hors du vase, avec une vitesse, pour chacune, qui sera proportionnelle à la pression qu'elle éprouve dans le vase. La vitesse de la première, sur le fond, sera donc la plus grande, et les vitesses des tranches immédiatement et successivement au-dessus, jusqu'à la partie supérieure de l'orifice, iront en décroissant comme les racines carrées des profondeurs. La première tranche ne saurait avoir d'autre mouvement que celui qui la porte vers l'orifice; cette tranche quittera donc les parois, en laissant un vide en arrière; et comme les molécules de la seconde tranche ont moins de vitesse vers l'orifice que les premières, celles situées au-dessus du vide formé autour des parois, seront forcées de descendre le long de ces parois pour empêcher ce vide, avant de pouvoir se diriger vers l'orifice. Ces molécules, en quittant la place qu'elles occupaient, auront produit un vide dans la seconde tranche, au-dessus du premier, qui sera empêché par les molécules latérales de la même tranche; ainsi cette seconde tranche se divisera en deux nappes: l'une qui se portera vers l'orifice, et l'autre vers les parois. Il se formera donc un vide en  $a$  dans cette seconde tranche, que les molécules de la troisième, qui sont au-dessus, seront forcées de remplir. Cette troisième tranche se divisera donc en trois nappes; une coulera vers l'orifice, la seconde se portera en sens contraire dans le vide  $a$  (ce qui produira un vide  $b$  entre ces deux nappes), et la troisième abandonnera les parois pour se porter dans le même vide  $a$ . La quatrième tranche se divisera en quatre nappes, la cinquième en cinq, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière de celles qui sortent directement par l'orifice, qui se divisera en autant de nappes, qu'il y aura de tranches dans la hauteur de cet orifice.

483. Il suit de là que, pendant que la première tranche s'écoule, la seconde nappe de la deuxième tranche la suit par derrière pour aller à l'orifice; dans le même temps, la troisième nappe de la troisième tranche, après être descendue dans le vide  $a$ , se dirige, en se repliant sous elle-même, vers les parois du vase, le long desquelles elle descend à la suite de la deuxième nappe de la seconde tranche, pour se porter vers l'ouverture; la seconde nappe de cette troisième tranche, après avoir coulé dans le vide  $a$ , se replie sous elle-même, pour suivre la première de la seconde tranche, dans l'orifice, pendant que la première nappe de la troisième coule directement par l'ouverture du vase. On voit donc que les trois nappes de la troisième tranche, se disposent de manière que celle qui se trouve près de l'orifice sort dans la hauteur même de cette troisième tranche; la seconde nappe ne se présente à l'orifice que dans la hauteur de la seconde,

et la troisième qu'à la hauteur de la première tranche. Il en sera de même des nappes de toutes les autres tranches, ce qui est facile à comprendre, puisque le nombre des nappes pour chaque tranche, est toujours égale au nombre de tranches qui coulent directement par l'orifice, au-dessous de celle que l'on considère.

484. Si, l'orifice s'élevant jusqu'au niveau supérieur du liquide, l'écoulement avait lieu comme par un deversoir, les choses se passeraient de la même manière, de sorte que la dernière nappe de la tranche la plus élevée, coulerait par la partie inférieure de l'orifice.

485. Il est inutile de dire que la vitesse acquise par les molécules à leur arrivée à la hauteur à laquelle elles sortent par l'orifice, sera donnée par l'équation (225), tout comme dans le cas d'un orifice percé dans le fond du vase.

## LEÇON II.

Détermination de l'écoulement par seconde, tant pour le cas de l'orifice percé au fond du vase que pour celui où il est percé dans une paroi verticale.

486. Supposons d'abord que l'orifice soit percé dans le fond du vase (fig. 117), nous observerons que les points successifs sur lesquels les tranches qui s'échappent directement par l'orifice viennent se briser pour couler en nappes les unes sur les autres, de manière à rétrécir l'orifice de plus en plus, sont nécessairement placés sur des courbes *ai*, *bi* (fig. 115), que nous allons déterminer.

Pour y parvenir, soit *ad* (fig. 117), l'une de ces courbes, il est évident que, si les points *m*, *m'*, *m''*, etc., sont ceux où cette courbe *ad* rencontre les faces supérieures des tranches, les distances *ap*, *mn*, *m'n'*, *m''n''*, etc., seront proportionnelles aux vitesses des tranches placées aux mêmes profondeurs que les points *a*, *m*, *m'*, *m''*, etc. Cela posé, prenons pour unité l'épaisseur d'une tranche; les hauteurs des points *a*, *m*, *m'*, *m''*, etc., au-dessous du niveau supérieur, seront respectivement

$$h, h-1, h-2, h-3, h-4, \dots, h-y;$$

en nommant *y* une ordonnée quelconque *p''m''*, de la courbe *ad*.

En substituant ces quantités à la place de *h* dans l'équation (255), nous aurons successivement

$$V = \sqrt{2gh}, \quad V' = \sqrt{2g(h-1)}, \quad V'' = \sqrt{2g(h-2)}, \dots (a)$$

Mais les distances  $ap, mn, m'n', m''n'',$  etc., sont proportionnelles à ces vitesses ; d'où l'on voit que ,

$$ap : mn \text{ ou } pp' :: \sqrt{2gh} : \sqrt{2g(h-1)} :: \sqrt{h} : \sqrt{h-1},$$

d'où 
$$pp' = \frac{ap \sqrt{h-1}}{\sqrt{h}};$$

on trouverait de même que

$$p'p'' = \frac{ap \sqrt{h-2}}{\sqrt{h}}, \quad p''p''' = \frac{ap \sqrt{h-3}}{\sqrt{h}}, \text{ etc.}$$

Une abscisse quelconque  $x$  répondant à l'ordonnée  $y$ , sera évidemment égale à  $ap + pp' + p'p'' + \text{etc.}$ , nous aurons donc

$$x = ap + \frac{ap \sqrt{h-1}}{\sqrt{h}} + \frac{ap \sqrt{h-2}}{\sqrt{h}} + \frac{ap \sqrt{h-3}}{\sqrt{h}} \dots + \frac{ap \sqrt{h-y}}{\sqrt{h}},$$

ou 
$$x = \frac{ap}{\sqrt{h}} \left( \sqrt{h} + \sqrt{h-1} + \sqrt{h-2} + \sqrt{h-3} \dots \sqrt{h-y} \right)$$

Extrayons les racines qui sont dans la parenthèse, et il nous viendra

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{h-1} &= \sqrt{h} - \frac{1}{2\sqrt{h}} + \text{etc.} \\ \sqrt{h-2} &= \sqrt{h} - \frac{2}{2\sqrt{h}} + \text{etc.} \\ \sqrt{h-3} &= \sqrt{h} - \frac{3}{2\sqrt{h}} + \text{etc.} \\ &\dots \dots \dots \\ \sqrt{h-y} &= \sqrt{h} - \frac{y}{2\sqrt{h}} + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (b)$$

en ne tenant compte que des seconds termes de ces développemens, dans lesquels se trouve, à la première puissance, l'unité infiniment petite.

En faisant la somme des seconds membres des équations (b), et observant que le nombre de ces équations sera égal au nombre d'unités qu'il y a dans  $y$ , nous aurons

$$x = \frac{ap}{\sqrt{h}} \left( y \sqrt{h} - \frac{1}{2\sqrt{h}} (1 + 2 + 3 + 4 \dots + y) \right)$$

ou 
$$x = \frac{ap}{2h} \left\{ 2yh - (1 + 2 + 3 + 4 \dots + y) \right\}.$$

Or, la somme des nombres naturels depuis 1 jusqu'à  $y$ , l'unité étant infiniment petite, a pour limite  $\frac{y^2}{2}$  (note de la page 50); il en résultera donc

$$x = \frac{ap}{2h} \left( 2yh - \frac{y^2}{2} \right) \dots (c).$$

La quantité  $ap$  est évidemment égale à l'épaisseur d'une tranche; car il ne peut, de la tranche du fond, couler qu'une seule molécule à la fois, dans chaque section verticale; cette quantité  $ap$  est donc égale à l'unité: l'équation (c) se réduira donc à la suivante.

$$x = \frac{1}{2h} \left( 2yh - \frac{y^2}{2} \right),$$

d'où 
$$4hx = 4hy - y^2 \dots (256).$$

Telle est l'équation de la courbe  $ad$ , qui, comme on voit, est une parabole, l'origine étant au point  $a$ , et les coordonnées rectangulaires.

487. Résolvons-la par rapport à  $y$ , il nous viendra

$$y = 2h \pm 2\sqrt{h(h-x)};$$

d'où nous voyons que la plus grande valeur positive que nous puissions donner à  $x$  est  $x = h$ , ce qui donne  $y = 2h$ . Ces coordonnées sont celles du sommet  $f$  de notre parabole.

488. Faisons  $x = h - x'$ , et  $y = 2h - y'$ , et substituons dans l'équation (256), il nous viendra, toutes réductions faites, et en supprimant ensuite les accents,

$$y^2 = 4hx \dots (g).$$

Cette équation est donc celle d'une parabole ordinaire, dont l'axe  $GH$  est horizontal et à une distance, au-dessus du fond du vase, égale à deux fois la hauteur  $h$  du liquide; le sommet  $f$  est à une distance de la verticale  $ae$  élevée par le point  $a$  du bord de l'orifice, égale à la hauteur  $h$ ; enfin son paramètre est égal à 4 fois cette même hauteur  $h$ .

Quant à la courbe  $bdh$ , située du côté opposé, elle est évidemment égale à la première.

489. Il est clair que le point  $d$ , où les deux courbes précédentes se rencontrent, appartient à la première des tranches qui ne coulent pas directement dans l'orifice.

490. Demandons-nous donc à quelle hauteur, à partir du point  $c$  du fond du vase, se trouvera le point  $d$  (fig. 117).

Pour cela, il suffira d'observer que l'abscisse de ce point est le demi-diamètre  $ac$  de l'orifice; représentons-le par  $a$ , et mettons cette valeur de  $x$  dans l'équation du n° 487, nous aurons

$$y = cd = 2h - 2\sqrt{h(h-a)} \dots (257).$$

Si l'on prenait le radical avec le signe  $+$ , on aurait le point  $d'$  (fig. 117) qui n'appartient pas à la question.

491. Cette équation (257) peut se mettre sous la forme

$$cd = 2h \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{a}{h}} \right) \dots (258),$$

d'où l'on voit que le point  $d$  s'élève à mesure que la hauteur  $h$  augmente, car le facteur  $h$  du second membre augmente dans un plus grand rapport que celui compris entre parenthèses ne diminue.

Réciproquement, le point  $d$  s'abaisse quand  $h$  diminue.

492. On pourrait demander quelle devrait être la hauteur  $h$  du liquide, pour que le point  $d$  se trouvât sur la face supérieure de ce liquide.

Pour résoudre cette question, il suffira de supprimer les facteurs égaux  $cd$  et  $h$  dans les deux membres de l'équation (258), ce qui donnera

$$2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{a}{h}} \right) = 1,$$

d'où 
$$\sqrt{4 - \frac{4a}{h}} = 1, \text{ ou } 4 - \frac{4a}{h} = 1,$$

et par conséquent 
$$h = \frac{4a}{3} \dots (259).$$

493. Il suit de là que, lorsqu'un vase se vide et que l'équilibre existait avant l'ouverture du vase, dès que la hauteur n'est plus que les  $\frac{4}{3}$  du demi-diamètre de l'orifice, il commence à se manifester une dépression sur la face supérieure; et, dans le cas du niveau constant, la hauteur étant au-dessous de cette limite, la dépression est permanente.

494. Déterminons la direction que prendraient les molécules liquides en tombant des différens points des courbes  $ad$ ,  $bd$  (fig. 117) (qu'on pourrait appeler *déversoirs*), dans l'espace situé au-dessous de ces deux courbes, si rien ne gênait leur mouvement naturel.

Pour cela, considérons une tranche quelconque parmi celles comprises dans la

hauteur  $cd$  des déversoirs, la première sur le fond, par exemple; il est clair que, dès que les molécules situées au-dessus de l'orifice auront tombé, chacune de celles situées sur le bord de cet orifice sera chassée, dans cette ouverture, avec une vitesse horizontale égale à  $V$ , et une vitesse verticale égale à la première  $V$ ; de sorte que, si la pesanteur ne venait agir au même instant, la molécule  $a$  prendrait une direction  $ao$  qui serait la diagonale d'un carré dont les côtés  $ac$ ,  $ak$  seraient la vitesse  $V$ . Cette molécule  $a$  sera donc soumise, à la fois, à une vitesse uniforme  $V\sqrt{2}$ , dans la direction  $ao$ , qui est à  $45^\circ$  par rapport à la verticale  $ae$ , et à l'action de la pesanteur; elle décrira donc une parabole dont la verticale  $ae$  sera un diamètre sur lequel les ordonnées seront à  $45^\circ$ . L'équation de cette parabole sera donc (n° 339)

$$y^2 = \frac{2V'^2}{g} \cdot x,$$

$V'$  étant la vitesse uniforme suivant la direction  $ao$ ; mais  $V' = V\sqrt{2}$ , l'équation de cette parabole sera donc

$$y^2 = \frac{4V^2}{g} \cdot x \dots \dots (260).$$

495. Mais (équ. 255)  $V = \sqrt{2gh}$ ; en substituant, il nous viendra donc,

$$y^2 = 8hx \dots \dots (m).$$

496. Rapportons cette dernière équation aux axes rectangulaires  $ae$ ,  $ab$  (fig. 117), et pour cela, nommons  $x'$  et  $y'$  les nouvelles coordonnées  $aq$ ,  $qM$ ; nous aurons

$$aP = x = x' - Pq = x' - y',$$

attendu que le triangle rectangle  $PMq$  est isocèle; et

$$PM = y = y'\sqrt{2}.$$

En substituant dans l'équation (m) et faisant les opérations nécessaires, on aura

$$y^2 + 4hy = 4hx \dots \dots (261).$$

497. Résolvons cette équation par rapport à  $y$ , il viendra

$$y = -2h \pm \sqrt{4h^2 + 4hx} = -2h \pm 2\sqrt{h(h+x)},$$

d'où nous voyons que la plus grande valeur négative que nous puissions donner à  $x$  est  $x = -h$ , ce qui donnera  $y = -2h$ .

Ces coordonnées  $-h$  et  $-2h$  seront celles du sommet  $E$  de notre parabole.

498. Il suit de là que le sommet de cette courbe est situé sur la face supé-

rière du liquide, à une distance de droite à gauche de la verticale  $ae$  élevée par le point  $a$  du bord de l'orifice, égale à 2 fois la hauteur du liquide.

499. Transportons l'origine des coordonnées au sommet  $E$ ; pour cela, il suffira de faire  $x = x' - h$ , et  $y = y' - 2h$ , et de substituer dans l'équation (261) : on aura

$$y^2 = 4hx \dots \dots \dots (262)$$

toutes réductions faites. Cette équation, comme on voit, est toute pareille à celle (g) du n° 488 de la parabole  $fda$ .

500. Le paramètre de cette parabole est donc égal à 4 fois la hauteur  $h$  du liquide, et comme le sommet  $E$  est sur la face supérieure, il s'ensuit que le foyer est sur le fond du vase.

501. En faisant  $h$  successivement égale aux profondeurs des tranches successives, l'équation (262) sera celle des paraboles  $rs$ ,  $r's'$ ,  $r''s''$ ,  $r''''s''''$ ,  $t'u$ ,  $vx \dots$ , décrites par toutes les tranches comprises dans la hauteur  $cd$  du point de rencontre des déversoirs, l'espace sous ces déversoirs étant supposé libre.

502. Le liquide situé dans l'espace  $adb$  (fig. 117) doit tomber évidemment à la manière des solides, et l'écoulement du reste de la masse liquide ne peut avoir lieu qu'à travers les déversoirs, et ne peut être régulier, que quand la partie sous les déversoirs est entièrement sortie du vase.

503. Il suit de là que l'on peut regarder comme étant entièrement vide, l'espace  $adb$ , sous les déversoirs, à l'instant que l'écoulement commence à travers ces dernières.

504. Il est évident, en outre, que l'écoulement ne dépend uniquement que de la vitesse que communique la pression des parties supérieures aux molécules situées à la surface des déversoirs, et que l'action de la pesanteur à la sortie de ces dernières n'a aucune influence sur cette vitesse : son effet se borne à faire prendre, aux molécules liquides parvenues dans l'espace  $adb$ , une certaine direction à l'extérieur du vase.

505. De tout ce qui vient d'être dit, et du n° 494, il faut conclure que, dans le premier instant de l'écoulement, les molécules situées à la surface des déversoirs, seront lancées dans les directions des droites  $ao$ , et  $bo$ ,  $ms$  et  $rs$ ,  $m's'$  et  $r's'$ , etc., qui sont à  $45^\circ$  par rapport à l'horizon. Sans qu'il soit nécessaire de le démontrer en détail, il est facile de voir que la quantité de liquide qui pourra couler dans le premier instant, sera au plus égale, dans chaque section verticale menée par le centre de l'orifice, à l'aire de la figure  $adbo$ ; d'où l'on voit que la quantité totale de l'écoulement sera proportionnelle à la somme des volumes de

deux cônes ou pyramides qui auront l'orifice pour base, et pour hauteur, l'un  $cd$ , et l'autre  $oc = ac = a$ .

506. Cherchons donc les volumes de ces cônes ou pyramides; celui du dernier  $abo$ , qui est ordinaire, sera  $\frac{Sa}{3} \dots\dots (a)$ ,

$S$  étant l'aire de l'orifice, et  $a$  la moitié  $ac$  du diamètre de ce dernier.

Quant au volume de l'autre, il serait plus difficile de l'avoir rigoureusement; mais comme les courbes  $ad$ ,  $bd$  ne s'éloignent pas beaucoup de la ligne droite, pour éviter le calcul, nous pourrions considérer l'espace  $abd$  comme ayant la forme d'un cône ou d'une pyramide ordinaire, et comme sa hauteur  $dc$  ne diffère pas beaucoup de  $ac = a$ , son volume sera à peu de chose près

$$\frac{Sa}{3} \dots\dots (b).$$

Le volume des deux cônes sera donc la somme des expressions  $(a)$  et  $(b)$ ; de sorte que si nous appelons  $C$  ce volume, nous aurons

$$C = \frac{Sa}{3} + \frac{Sa}{3} = \frac{2aS}{3} \dots\dots (c),$$

Ce qui précède suppose que la densité du liquide introduit dans l'espace  $adbo$ , est la même que celle de la masse liquide située au-dessus des déversoirs, ce qui n'est pas; car pour que cela fût, il faudrait que les distances  $am$ ,  $mm'$ ,  $m'n''$ , etc., fussent égales à l'épaisseur des tranches; or ces distances sont aux épaisseurs des tranches comme  $ad$  est à  $cd$ ; le liquide introduit dans l'espace  $adbo$  est donc moins dense que celui situé au-dessus des déversoirs.

Comme les seules tranches qui peuvent s'introduire sous ces déversoirs sont celles comprises dans la hauteur  $cd$  de ces dernières, si par le point  $a$  nous élevons la verticale  $ae$  (fig. 118), et que, par ce même point  $a$ , comme centre, nous rabattons, sur la droite  $ad$ , les épaisseurs des tranches comprises dans la hauteur  $ae = cd$ , en menant par le dernier point  $f$  une droite  $fg$  à  $45^\circ$  par rapport à l'horizon, le trapèze  $afgo$  sera exactement la quantité de liquide qui aura passé dans le même temps sous la déversoire  $bd$ . Ainsi, la véritable quantité de liquide qui s'échappe à chaque instant à travers les déversoirs, sera le double cône ou pyramide  $adbo$ , moins le double cône ou pyramide  $fdhg$ .

Or, ces doubles cônes ou pyramides sont semblables; ils sont donc entre eux comme les cubes de leurs lignes homologues. Si donc  $C$  et  $C'$  sont ces doubles cônes, nous aurons

$$C : C' :: (ad)^3 : (df)^3 \dots\dots (d).$$

Mais  $df = ad - af = ad - ae = ad - cd$  ou  $df = c - d$ , en nommant  $c$  la droite  $ad$ , et en se rappelant que  $cd = d$ ; si donc nous substituons dans la proportion (d), il nous viendra

$$C : C' :: c^3 : (c - d)^3,$$

d'où nous tirerons  $C' = \frac{C(c-d)^3}{c^3} \dots\dots\dots (e)$ .

La véritable quantité de liquide qui est passée sous les déversoirs est donc

$$C - C' = C - \frac{C(c-d)^3}{c^3} = \frac{C[c^3 - (c-d)^3]}{c^3};$$

nommons-la  $M$ , et mettons pour  $C$  sa valeur (c) ci-dessus, et il nous viendra

$$M = \frac{2 a S [c^3 - (c - d)^3]}{3 c^3} \dots\dots\dots (f).$$

L'écoulement devant se continuer, après le premier instant, par tranches parallèles au plan de l'orifice, dans le même temps que la molécule placée au point  $d$ , descendra au point  $c$ , il sortira un prisme équivalent à la valeur (f) de  $M$ , qui aura pour hauteur  $cd = d$  (fig. 117); nommons  $N$  l'aire de la base de ce prisme, nous aurons

$$Nd = \frac{2 a S [c^3 - (c - d)^3]}{3 c^3}$$

d'où  $N = \frac{2 a S [c^3 - (c - d)^3]}{3 c^3 d} \dots\dots (263)$ .

Tel sera le coefficient d'écoulement ou de dépense. On voit que ce coefficient dépend de la grandeur de l'orifice et de la hauteur du niveau supérieur par rapport au fond du vase, ce qui est conforme à l'expérience.

507. Il s'agit maintenant de trouver la vitesse par laquelle il faut multiplier le coefficient  $N$  pour avoir la dépense par seconde.

Pour cela, observons que comme les vitesses des tranches successives vont en progression par différences égales, la vitesse moyenne des tranches comprises dans la hauteur  $cd$  du sommet des déversoirs, est la demi-somme des vitesses dues aux hauteurs  $h$  et  $h - d$ , qui sont (équi. 255) respectivement  $\sqrt{2gh}$ ,  $\sqrt{2g(h-d)}$ , ou  $\sqrt{2g} \sqrt{h}$ ,  $\sqrt{2g} \sqrt{h-d}$ ; la vitesse cherchée sera donc

$$V = \frac{\sqrt{2g} (\sqrt{h} - \sqrt{h-d})}{2}$$

508. Multiplions cette dernière par l'équation (263), et nommons D la dépense par seconde, il nous viendra

$$D = \frac{a S [C^3 - Cc - d^3]}{3dc^3} \sqrt[2]{2g} (\sqrt{h} + \sqrt{h-d}) \dots (264).$$

Pour l'équation générale qui fera connaître la dépense réelle qui doit avoir lieu par seconde de temps, l'orifice étant une figure plane quelconque, abstraction faite du frottement et de la cohésion. A cette équation on joindra celle qui donne la valeur de  $d$  (258), qui est

$$d = 2h - 2\sqrt{h(h-a)} \dots (265).$$

et on observera que  $c^2 = \sqrt{a^2 + d^2} \dots (266),$

puisque  $c$  est l'hypoténuse  $ad$  du triangle rectangle  $adc$  (fig. 117).

509. Voyons maintenant si les résultats que donne l'équation (264), sont d'accord avec ceux des expériences faites le plus en grand, et prenons pour exemple, une de celles de MM. Poncelet et Lesbros, la première du tableau n° 1, par exemple.

La hauteur  $h = 1,7447$ ; et l'orifice étant un carré de 20 centimètres de côtés, nous aurons  $S = 0,04$ , et  $a = 0,1$ ; quant à  $g = 9^m 809$  (n°329).

Cela posé, calculons la valeur numérique de  $d$ . Pour cela, substituons les nombres ci-dessus dans l'équation (265), ce qui nous donnera

$$d = 2 \times 1,7447 - 2\sqrt{1,7447 \times (1,7447 - 0,1)} = 0,1016;$$

et dans l'équation (266) cette valeur de  $d$  et celle de  $a$ , et il nous viendra

$$c = \sqrt{0,01 + (0,1016)^2} = 0,1425;$$

substituons enfin les valeurs de  $d$  et de  $c$ , et les autres nombres ci-dessus dans l'équation (264), et nous aurons

$$D = \frac{0,04 \times 0,1 [(0,1425)^3 - (0,1425 - 0,1016)^3]}{3 \times 0,1016 \times (0,1425)^3}$$

$$\times \sqrt[2]{19,618} (\sqrt{1,7447} + \sqrt{1,7447 - 0,1016}) = 0,145,517$$

ou 145 litres 517 mil.

L'expérience de MM. Poncelet et Lesbros a donné 138 l., 434 mil., d'après le premier jaugeage et 141, l. 064, d'après le second, que ces messieurs donnent comme le plus exact. Notre formule donnerait donc 4 l. 453 de plus par seconde. On n'en sera point étonné si l'on fait la part du frottement du liquide sur les bords de l'orifice, de sa cohésion, des inexactitudes inévitables des expériences, de l'évaporation pendant la chute du liquide, et de la forme de l'orifice, qui est ici, à cause des angles qu'elle présente, moins favorable à la dépense qu'un orifice circulaire. En général, à superficie égale plus la forme de l'orifice s'approchera du cercle, plus elle sera favorable à la dépense. Au surplus, si notre formule donne des résultats plus grands que les expériences de MM. Poncelet et Lesbros, elle en donne de plus petits que celles de plusieurs autres auteurs.

510. Mais supposons les observations de ces deux expérimentateurs parfaitement rigoureuses, et divisons le résultat donné par le calcul précédent par la différence 4 l. 45 ; nous aurons pour quotient 32 environ ; c'est-à-dire que les divers obstacles que rencontre le liquide dans son mouvement diminuent la dépense d'un peu moins d'un 32<sup>me</sup> ; si donc nous nommons 1 la dépense théorique, la dépense réelle sera  $1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$ . Ainsi, pour que la formule (264) donne la véritable dépense, il faut en multiplier le second membre par  $\frac{31}{32}$  ; ainsi nous aurons

$$D = \frac{31}{32} \times \frac{a S [c^3 - (c - d)^3]}{3dc^3} \sqrt{2g} (\sqrt{h} + \sqrt{h - d}) \dots (267).$$

511. Comme le frottement et les autres causes de diminution sont variables, il ne faut pas s'attendre à ce que cette formule donne des résultats parfaitement rigoureux dans tous les cas, mais les erreurs seront toujours assez petites pour qu'on puisse les négliger dans la pratique sans aucun inconvénient.

## LEÇON III.

Détermination de la quantité de liquide qui s'écoule par un orifice percé dans une paroi verticale du vase.

542. Au n° 482 nous avons expliqué comment les tranches de la masse liquide se comportaient, les unes à l'égard des autres, dans le vase, sans rien préciser sur la manière dont elles sortent par l'orifice : c'est ce dernier point que nous allons démontrer maintenant.

Considérons d'abord une tranche horizontale ABCD (fig. 119), prise en un point quelconque, dans la hauteur de l'orifice ; soit  $ab$  la largeur de ce dernier au niveau de cette tranche.

Et observons que l'écoulement ne peut avoir lieu d'une manière régulière, que toutes les molécules comprises dans le triangle  $acb$  ne se soient avancées ensemble, dans l'orifice, au moins de l'épaisseur de deux molécules.

En effet, s'il n'y avait de sorties que celles de la première file qui se trouve sur le bord de l'ouverture, les molécules 2,2 ne pouvant point s'approcher l'une de l'autre ; celles comprises entre les deux s'y opposant, elles ne pourraient pas non plus se diriger vers l'orifice, attendu que les molécules 1,1 viendraient à la traverse les en empêcher ; et ces dernières ne pourraient pas davantage s'échapper latéralement, les molécules 2,2 tendant à leur barrer le passage. Cela est évident, puisque toutes ces molécules ont la même vitesse. Il faudra donc que la seconde file de molécules s'en aille à la suite de la première, avant qu'aucune autre ne puisse se mettre en mouvement. Cette seconde file de molécules étant parvenue à la place qu'occupait la première, avant l'ouverture de l'orifice, laissera un vide égal à une molécule à chacune de ses extrémités, qui ne pourra être remplie ni par la molécule 1, ni par la molécule 2, qui bordent immédiatement ce vide, car, ne pouvant y entrer toutes les deux à la fois, et étant à la même distance et animées de la même vitesse, elles se barreront mutuellement le passage. La troisième file, en suivant la seconde, laissera un vide égal à une molécule à chacune de ses extrémités, que ne pourront remplir ni les molécules 2,2, ni les molécules 3,3, et ainsi de suite, de sorte que les files de molécules comprises dans le triangle  $acb$  s'étant avancées seulement de l'épaisseur d'une molécule, celles comprises de l'autre côté des droites  $ac$ ,  $bc$ , n'auront éprouvé aucun mouvement. Mais aussitôt que les files

comprises dans le triangle  $acb$  se seront avancées davantage, les molécules 1, 2, 3, 4, 5..., s'avanceront à leur suite, en passant à travers les droites  $ac$ ,  $bc$ ; et comme les molécules suivantes ne pourront arriver à l'orifice qu'en passant de même à travers les droites  $ac$ ,  $bc$ , il s'ensuit que ces dernières sont de véritables déversoirs, qui font prendre aux molécules intérieures des directions à  $45^\circ$  par rapport à la face de l'orifice.

513. Je dis maintenant qu'il existe des déversoirs dans la section verticale menée par le centre de l'orifice.

En effet, soient ABCD (fig. 116) cette section verticale menée perpendiculairement au plan de l'orifice, et  $ab$  la double ordonnée qui passe par le centre de cet orifice. Cela posé, considérons la molécule située au point  $b$ , c'est-à-dire contre le bord supérieur de l'orifice; comme cette molécule est sollicitée au mouvement par deux forces égales, l'une horizontale et l'autre verticale de haut en bas, elle ne pourra sortir du vase qu'en s'échappant suivant la droite  $bd$  dirigée à  $45^\circ$ . Il n'est pas nécessaire de dire qu'il en sera de même pour les molécules situées au-dessous de celle placée au point  $b$ , et jusqu'à une certaine distance en contre-bas de ce point  $b$ . Les directions de toutes ces molécules se briseront donc en des points  $b$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $c$ , qui appartiendront à une certaine courbe  $befc$ , que nous déterminerons ci-après.

Considérons à présent la molécule placée au point  $a$  du bord inférieur de l'orifice; il est clair que, puisque les molécules liquides agissent dans toutes les directions avec une force égale à la pression qu'elles éprouvent, cette molécule  $a$  se trouve sollicitée à la fois par deux forces égales, l'une horizontale et l'autre verticale de bas en haut; cette molécule s'échappera donc suivant la droite  $ad$  dirigée à  $45^\circ$ . Il en sera de même pour les molécules au-dessus du point  $a$ ; les directions de ces molécules se briseront donc aussi en des points  $a$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $c$ , qui seront situés sur une certaine courbe  $ac$  que nous allons calculer aussi.

Les deux courbes  $ac$ ,  $dc$ , se rencontreront évidemment en un point  $c$ , et seront de véritables déversoirs.

514. Il suit des deux dernières propositions que, dans le cas de l'orifice percé dans une paroi verticale, tout aussi bien que dans celui de l'orifice au fond du vase, les déversoirs sont des surfaces coniques ou pyramidales, suivant la forme de l'orifice.

515. Déterminons la nature de chacune des courbes  $ac$ ,  $bc$  (fig. 120),  $ab$  étant la plus grande dimension verticale de l'orifice.

Si nous prenons le point  $a$  pour l'origine des coordonnées de la première  $ac$ , la droite  $aP$  étant l'axe des abscisses, il est visible que cette courbe est la même

que celle  $bd$  de la figure 117, c'est-à-dire une parabole dont l'équation (n°486) est

$$y^2 - 4hy = -4hx \dots (268).$$

Quant à la seconde  $bc$ , c'est de même une parabole. Prenons l'origine des coordonnées au point  $b$ , et l'horizontale  $bQ$  pour l'axe des abscisses; si, par les points  $n, n', n'', \dots$  où les plans des tranches horizontales viennent rencontrer cette courbe, on élève les ordonnées  $nq, n'q', n''q'', \dots$ , les distances  $bq, qq', q'q'', \dots$ , iront en croissant comme les vitesses des tranches successives, et par conséquent comme les racines carrées des profondeurs. Si donc nous nommons  $h'$  la hauteur  $Fb$ , depuis le niveau supérieur jusqu'au point  $b$ , les vitesses des tranches successives, à partir du point  $b$  et au-dessous de ce point, seront respectivement

$$\sqrt{h'}, \sqrt{h' + 1}, \sqrt{h' + 2}, \sqrt{h' + 3}, \dots \sqrt{h' + y'}.$$

$y'$  étant une ordonnée quelconque  $q''n''$ .

Cela suffit pour faire voir que pour avoir l'équation demandée il faudra faire les mêmes calculs qu'au n° 486, ou plutôt mettre dans tous ces calculs  $h'$  au lieu de  $h$ ,  $y'$  au lieu de  $y$ , et le signe  $+$  dans tous les termes : on arrivera à l'équation

$$y'^2 + 4h'y' = 4h'x' \dots (a)$$

au lieu de l'équation (256).

516. Rapportons cette dernière équation à l'origine  $a$ , et pour cela, faisons attention que les abscisses ne changeront pas, mais qu'une ordonnée quelconque  $y' = a - y''$ , en appelant  $a$  la hauteur  $ab$  de l'orifice, et  $y''$  l'ordonnée relative à l'origine  $a$ . En substituant dans l'équation (b) ci-dessus, il nous viendra

$$(a - y'')^2 + 4h'(a - y'') = 4h'x',$$

ou en développant et supprimant les accents de  $y$  et de  $x$ ,

$$a^2 - 2ay + y^2 + 4h'a - 4h'y = 4h'x,$$

d'où  $y^2 - (2a + 4h')y = 4h'x' - a^2 - 4h'a$ .

Si dans cette dernière équation nous mettons pour  $h'$  sa valeur  $h - a$ , il nous viendra

$$y^2 - 2(2h - a)y = 4(h - a)x - a(4h - 3a) \dots (269).$$

517. Cherchons maintenant les coordonnées du point  $c$  où les déversoirs se rencontrent.

Pour cela, prenons la valeur de  $x$  donnée par l'équation (268) du numéro précédent, qui est  $x = \frac{4hy - y^2}{4h}$ , pour la mettre dans l'équation (269); il nous viendra

$$y^2 - 2(2h - a)y = \frac{(4hy - y^2)(h - a)}{h} - a(4h - 3a)$$

d'où nous tirerons

$$y = Pc = \frac{h(4h - 3a)}{2h - a} - \sqrt{\frac{h^2(4h - 3a)^2}{(2h - a)^2} - \frac{ah(4h - 3a)}{2h - a}} =$$

$$\frac{h(4h - 3a)}{2h - a} - \sqrt{\frac{h(4h - 3a)}{2h - a} \cdot \left(\frac{h(4h - 3a)}{2h - a} - a\right)} \dots (270).$$

Nous ne donnons que le signe  $-$  au radical, parce que le signe  $+$  appartient à l'ordonnée du point de rencontre des deux paraboles qui se trouve au-dessus du vase, et qui, par conséquent, ne fait pas partie de la question.

518. Pour avoir l'abscisse  $aP$  du même point  $c$  de rencontre des déversoirs  $ac$ ,  $bc$ , il faudra éliminer  $y$  entre les équations (268) et (269); ou substituer la valeur (270) de  $y$  dans l'équation (268). Représentons cette valeur de  $y = Pc$  par  $b$ , et après avoir substitué dans l'équation (268),

nous aurons  $x = aP = oc = d = \frac{4hb - b^2}{4h} \dots \dots (272).$

Ainsi, après avoir calculé  $b$  par l'équation (270), on en mettra la valeur numérique dans cette dernière, et on aura la distance  $d = oc$ , par rapport au plan de l'orifice, du point où les déversoirs se rencontrent.

519. Si nous supposons la hauteur  $ab$  (fig. 120) de l'orifice égale à celle  $h$  du liquide, c'est-à-dire, si nous supposons que le liquide s'écoulât par un déversoir, l'équation (270) deviendrait

$$y = b = \frac{h^2}{h} - \sqrt{h^2 - h^2} = h \dots \dots (272),$$

ce qui nous fait voir que dans ce cas le point  $c$  de rencontre des déversoirs serait en  $r$ , sur la face supérieure du liquide. D'où l'on voit que la parabole  $kbc$  se réduirait à la ligne droite  $Fr$ : dans cette même hypothèse où  $a = h$ , l'équation (269) de cette parabole doit donc se réduire à celle d'une ligne droite horizontale  $Fr$ , située à une distance  $aF = h$  au-dessus de l'axe  $aP$  des abscisses; or, cette équation devient en effet par cette hypothèse

$$y^2 - 2(2h - h)y = -h^2$$

d'où  $y = h \pm \sqrt{h^2 - h^2} = h,$

ce qui est bien l'équation de la droite  $Fr$ , puisque pour toutes les valeurs de  $x$  on aura  $y = h$ .

520. Si dans l'équation (271) nous mettons la valeur (272) de  $b$ , il nous viendra

$$x = d = Fr = \frac{4h^2 - h^2}{4h} = \frac{3h}{4}.$$

On aurait eu la même valeur de  $x$  en faisant  $y = h$  dans l'équation (268), comme cela doit être.

521. La dépense par seconde est évidemment proportionnelle à la quantité de liquide qui peut transpirer dans un temps donné, à travers la surface conique ou pyramidale qui constitue les déversoirs; d'où il suit qu'on peut supposer vide l'espace conique ou pyramidal formé par ces déversoirs, lorsque le liquide situé de l'autre côté de ces dernières se met en mouvement. De là il suit, comme au n° 505, que la dépense est proportionnelle au volume des deux cônes ou pyramides  $acb$ ,  $adb$  réunis.

522. Le premier cône ou pyramide  $acb$  est mixte, à cause des arcs de parabole  $ac$ ,  $bc$ ; mais comme les courbures de ces arcs de parabole sont peu sensibles, nous pourrons, sans beaucoup d'erreur, regarder ce cône ou cette pyramide comme un solide ordinaire. Le volume de ce cône ou de cette pyramide  $acb$  sera donc l'aire  $S$  de l'orifice, multipliée par le tiers de  $oc = d$ ;

ainsi

$$\text{vol. côn. } acb = \frac{Sd}{3} \dots (a).$$

Quant à l'autre cône ou pyramide  $adb$ , comme les droites  $ad$ ,  $bd$  sont à  $45^\circ$  sur  $ab$ , sa hauteur sera la moitié du diamètre  $ab = a$  de l'orifice; son volume sera donc

$$\text{vol. côn. } adb = \frac{S}{3} \times \frac{a}{2} = \frac{Sa}{6} \dots (b).$$

Ajoutons ces deux volumes, et représentons leur somme par  $C$ , nous aurons

$$C = \frac{Sd}{3} + \frac{Sa}{6} = \frac{Sa}{6} (2d + a) \dots (c).$$

Par les mêmes raisons qu'au n° 47, du volume de ce double cône, il faut en retrancher un autre semblable, dont l'expression sera la même que celle de  $C'$  de ce n° 506, en observant que dans le cas actuel  $d = co$  (fig. 120), et  $c = ac$ ; nous aurons donc encore

$$G' = \frac{C (c - d)^3}{3} \dots (d).$$

La véritable quantité de liquide qui passera à travers les déversoirs sera

$$\text{donc } C - C' = C - \frac{C(c-d)^3}{c^3} = \frac{C[c^3 - (c-d)^3]}{c^3};$$

nommons-la  $M$ , et mettons pour  $C$  sa valeur  $(c)$  ci-dessus, et nous aurons

$$M = \frac{S(2d+a)[c^3 - (c-d)^3]}{6c^3} \dots\dots (e).$$

L'écoulement devant avoir lieu par tranches parallèles au plan de l'orifice, après le premier instant, dans le même temps que la molécule placée au point  $c$  parviendra au point  $o$ , il sortira un prisme équivalent à la valeur  $(e)$  de  $M$ , qui aura pour hauteur  $oc = d$ ; nommons  $N$  l'aire de la base de ce prisme;

nous aurons 
$$Nd = \frac{S(2d+a)[c^3 - (c-d)^3]}{6c^3},$$

d'où 
$$N = \frac{S(2d+a)[c^3 - (c-d)^3]}{6dc^3} \dots\dots (273),$$

tel sera le coefficient de la dépense, par un orifice vertical. On voit que; comme dans le cas d'un orifice horizontal, ce coefficient dépend de la grandeur de l'orifice et de la hauteur de la face supérieure du liquide par rapport au fond du vase.

523. Quoique la superficie  $N$  soit moindre que celle  $S$  de l'orifice, il ne faut pas en conclure que le liquide ne sort pas à plein orifice; mais il faut entendre que la densité du liquide est moindre dans le plan de l'orifice que de l'autre côté des déversoirs, c'est-à-dire que dans ce plan les molécules sont plus écartées les unes des autres que dans l'intérieur du vase. Elles sont uniformément distribuées dans ce même plan, mais elles s'en échappent avec des vitesses différentes. La vitesse moyenne entre toutes ces vitesses différentes est évidemment due, non pas à la profondeur du centre de gravité de l'orifice, mais à celle du centre de gravité de la pression que cet orifice éprouve (n° 441); nommons  $G$  la distance de ce point au bord inférieur  $a$  de l'orifice; la profondeur de ce centre de gravité par rapport à la face supérieure du liquide sera  $h - G$ ; par conséquent la vitesse que nous cherchons sera

$$V = \sqrt{2g(h - G)} \dots\dots (274).$$

524. Multiplions les équations (273) et (274) l'une par l'autre, et représentons par  $D$  le produit des premiers membres, nous aurons

$$D = \frac{S(2d+a)[c^3 - (c-d)^3]}{6c^3 d} \times \sqrt{2g(h - G)} \dots\dots (275).$$

pour l'équation qui fera connaître la dépense par seconde, l'orifice étant vertical.

Quand on voudra calculer cette dépense, on cherchera la valeur de  $d$  au moyen des équations (270) et (271), et celle de  $c$  au moyen de celle-ci :

$$c = \sqrt{b^2 + d^2} \dots (276) ;$$

525. Si la hauteur  $ab$  de l'orifice (fig. 120) était égale à celle du niveau supérieur, en se rappelant qu'alors

$$b = h \dots (\text{n}^\circ 519) \quad \text{et} \quad d = \frac{3h}{4} \dots (\text{n}^\circ 520),$$

d'où 
$$c = \sqrt{h^2 + \frac{9h^2}{16}} = \frac{5h}{4}, \text{ et que } a = h,$$

en substituant dans l'équation (275), et faisant toutes les réductions, il nous viendrait

$$D = \frac{13S}{25} \sqrt{2g} \sqrt{(h - G)},$$

et en faisant les calculs numériques indiqués, et se rappelant que  $g = 9,809$

$$D = 2,303 \times S \sqrt{h - G} \dots (277).$$

Telle sera la dépense par un orifice vertical ouvert par en haut, c'est-à-dire par un déversoir.

526. Quand le déversoir sera rectangulaire, comme cela est le plus ordinaire,  $G = \frac{h}{3}$ , et la formule précédente deviendra

$$D = 2,303 \times S \sqrt{\frac{2h}{3}} \dots (278).$$

équation très-simple, et qui donnera la dépense par seconde par un déversoir rectangulaire.

Cette équation donne d'une manière très-approchée les mêmes résultats que les expériences de MM. Poncelet et Lesbros, car je trouve par la formule 35, l. 886, et l'expérience a donné, dans le même cas, 34, l. 81 d'après un premier jaugeage, et 35, l. 924 d'après un second; d'où l'on voit que notre formule donne un résultat intermédiaire à ces deux mesures. Ici il y a plus d'accord entre les résultats du calcul et ceux des expériences, parce qu'il y a moins de causes rétroactrices que dans le cas d'un orifice.

527. Quant à l'équation (275), elle donne environ un 20<sup>me</sup> de plus que les expériences de MM. Poncelet et Lesbros. Ainsi pour la mettre à peu près

d'accord avec ces expériences, il faudrait la multiplier par  $\frac{2}{3}$ , ce qui don-

$$\text{nerait } D = \frac{19 S (2d+a) [c^3 - (c-d)^3]}{120 dc^3} \times \sqrt{2g (h - G)},$$

ou en faisant les calculs numériques indiqués

$$D = \frac{0,7 \times S (2d + a) [c^3 - (c - d)^3]}{dc^3} \times \sqrt{h - G} \dots (279).$$

Quand la hauteur du liquide sera un peu considérable, on pourra supposer  $G = \frac{1}{3} a$ , sans erreur sensible. Mais l'orifice étant un carré, on aura

$$\text{rigoureusement } G = \frac{a}{3} \times \frac{3h - 2a}{2h - a}, \dots (280),$$

et dans le cas d'un cercle

$$G = \frac{a (2h - a \times 1,2489)}{2 (2h - a)} \dots (281),$$

$a$  étant le diamètre de l'orifice.

#### LEÇON IV.

Considérations sur ce qui précède et quelques problèmes qui s'y rapportent.

528. Les formules des deux dernières leçons supposent que le liquide dans le vase est maintenu à un niveau constant, et en calculant nos formules, nous avons supposé que l'introduction du liquide nécessaire pour conserver ce niveau constant ne dérangeait rien dans la manière dont le liquide se présente à l'orifice. Il s'agit de faire voir, maintenant, que cette supposition est conforme à ce qui se passe réellement dans le vase.

En effet, le mouvement dans le liquide qui doit fournir à la dépense ne peut provenir que de celui qui se manifeste à l'orifice de sortie, dès l'ouverture de ce dernier; tout ce qui a été dit aux n<sup>o</sup> 459 et suivans, et au n<sup>o</sup> 482 et suivans, sur le jeu des nappes des tranches horizontales aura donc lieu, jusqu'au niveau du fond du canal qui fournit à la dépense; et il ne serait pas difficile de se rendre compte de quelle manière les tranches qui arrivent dans le vase se comportent pour remplir les vides qui tendent à se former dans la tranche située immédiatement au-dessous du fond de ce canal, surtout si la profondeur de ce dernier est égale au diamètre de l'orifice de sortie. Mais sans entrer dans ce

détail, qui serait fastidieux (\*), on conçoit qu'il ne saurait y avoir désordre, l'équilibre existant avant l'ouverture du vase, tant pour le cas de l'orifice percé au fond, que dans celui d'un orifice vertical, et que les tranches qui arrivent par le canal doivent s'introduire régulièrement, suivant l'ordre de leurs vitesses respectives, dans les vides qui leur sont présentés par l'écoulement. Il est donc clair qu'il ne saurait résulter de changement dans ce qui a été dit sur ce qui se passe à l'orifice de sortie, par l'introduction dans le vase du liquide qui fournit à la dépense.

Cependant cela suppose que l'embouchure du canal d'entretien est au moins telle, qu'avec une vitesse moyenne due à la profondeur du canal, il puisse s'introduire dans le vase une quantité de liquide égale à la dépense; car dans le cas où cette embouchure serait plus petite, et qu'il faudrait une vitesse moyenne proportionnellement plus grande, comme cette vitesse ne serait pas acquise à l'instant même, il y aurait nécessairement un abaissement quelconque dans le niveau intérieur, qui serait proportionné de manière à faire diminuer la dépense d'une part, et à augmenter d'une autre part la vitesse du liquide qui fournit à cette dépense, de manière qu'à une certaine époque l'écoulement deviendrait régulier.

Il ne serait pas très-difficile de calculer toutes ces circonstances, mais comme nous voulons nous borner à ce qui peut être le plus ordinairement utile, et qu'il est presque toujours possible de disposer le canal de manière à pouvoir fournir plus de liquide qu'il ne s'en dépense, et qu'alors on rentre entièrement dans le cas des formules données dans les deux leçons précédentes, nous n'entreprendrons pas la solution de ce problème, quoique très-intéressant : il nous suffit d'en avoir exposé les conditions.

529. On conçoit que ce que nous venons de dire suppose que le fond du canal qui fournit le liquide est placé à une certaine hauteur au-dessus du sommet des déversoirs dans le cas d'un orifice percé au fond; ou au-dessus du point le plus élevé de l'orifice de sortie percé dans une paroi verticale. Voyons ce qui arrive lorsque le fond du canal et celui du vase sont au même niveau.

Cette question présente deux cas principaux pour l'orifice horizontal, et trois pour l'orifice vertical.

Pour l'orifice horizontal,

1<sup>o</sup> Celui où le vase est fermé de toutes autres parts que celle par laquelle le liquide qui fournit à la dépense peut entrer dans le vase;

---

(\*) Quoique dans certains cas il puisse être nécessaire d'étudier le jeu précis des nappes des différentes tranches horizontales de la masse liquide, en général il suffit, pour le calcul, de savoir que les molécules liquides sont animées de deux mouvemens principaux : le mouvement horizontal et le mouvement vertical, et que ces deux mouvemens ont la même vitesse quand on part de l'état d'équilibre de la masse liquide.

2° Lorsque l'orifice est dans le fond d'un canal dans lequel est un courant d'eau.

Et pour l'orifice vertical,

1° Le cas où le plan de l'orifice est perpendiculaire à la direction que prend le liquide qui fournit à la dépense ;

2° Celui où ce plan est parallèle à cette direction ;

3° Enfin celui où l'orifice étant parallèle à la direction du liquide, il s'agit d'un canal dans lequel est un courant d'eau.

Nous allons essayer de résoudre ces cinq questions importantes.

530. Supposons d'abord que la figure ABCDEH (fig. 121), soit une section verticale du canal ABFH et du vase CDEF, au fond duquel l'orifice *ab* est percé, cette section étant parallèle à la longueur du canal. Supposons de plus que la cloison FG qui sépare le canal du vase, ne laisse passer le liquide dans ce dernier que par l'ouverture CG, mais avec assez d'abondance pour fournir à toute la dépense de l'orifice *ab* ; que le niveau LM dans le vase soit le même que celui IK dans le canal, et enfin, que la masse liquide soit en équilibre de part et d'autre, au moment de l'ouverture de l'orifice *ab*.

Cela posé, je dis que le liquide ne pourra se mettre en mouvement dans le canal, qu'en proportion de l'écoulement qui aura lieu par l'orifice *ab* ; d'où il suit que, les vitesses des tranches comprises dans le vase FCDE seront absolument les mêmes que si le niveau était entretenu constant dans ce vase par le moyen indiqué (n° 528) ; seulement, le jeu des nappes, dont on pourrait se rendre compte, s'il était nécessaire, sera différent, mais il n'en produira pas moins les deux vitesses simultanées, verticale et horizontale, dans toutes les directions, comme dans les cas précédens ; ainsi, la dépense par l'orifice *ab*, dépendra de la formule (267), la hauteur *h* étant celle CL du niveau LM au-dessus du fond CD.

Les choses, quant au calcul, resteraient encore les mêmes, si la cloison GF n'existait pas ; c'est-à-dire si le vase n'était que le canal lui-même, fermé transversalement par la paroi DE.

531. Soit ABCD (fig. 122), une section verticale faite longitudinalement à un canal contenant un courant d'eau, au fond duquel est percé un orifice *ab*, et demandons-nous la formule qui donnerait la dépense par cet orifice *ab*.

Observons d'abord que dans une section verticale menée par le centre de l'orifice perpendiculairement au courant, nous aurons les mêmes courbes déversoirs que dans la fig. 117 (voyez le n° 486) ; car transversalement au canal, les molécules liquides ont la même tendance à se mouvoir horizontalement que dans un vase fermé latéralement de toutes parts, attendu qu'une force perpendiculaire à une autre ne saurait être altérée par celle-ci. Ainsi, il ne

nous reste plus à nous occuper que de ce qui se passe dans la section longitudinale ABCD.

532. Pour ne rien hasarder sur ce point, déterminons, par le calcul, les courbes déversoirs  $ad$ ,  $bd$ , en tenant compte de la vitesse du courant. Pour cela, supposons que le courant soit régulier, et que le fond du canal soit un plan horizontal ou assez peu incliné, longitudinalement, pour qu'on puisse regarder les bords de l'orifice  $ab$  comme étant dans un plan horizontal, sans erreur sensible, ces bords étant dans le fond même. Le courant étant régulier, nous pourrions supposer la masse liquide dans le canal, divisée en tranches parallèles au fond, et d'une épaisseur égale à une molécule (n° 460).

Si  $h$  est la hauteur du liquide dans toute la longueur du canal, ou au moins aux environs de l'orifice, si  $v$  est la vitesse de la tranche du fond (supposé parfaitement poli) due au courant, la vitesse de la tranche immédiatement au-dessus s'obtiendra par la proportion (n° 486)

$$\sqrt{h} : \sqrt{h-1} :: v : v' = \frac{v\sqrt{h-1}}{\sqrt{h}};$$

de sorte que les vitesses des tranches successives dans le sens de la longueur du canal, seront respectivement

$$v, \frac{v\sqrt{h-1}}{\sqrt{h}}, \frac{v\sqrt{h-2}}{\sqrt{h}}, \frac{v\sqrt{h-3}}{\sqrt{h}}, \frac{v\sqrt{h-4}}{\sqrt{h}}, \text{ etc..... (a).}$$

Cela posé, considérons que si la vitesse  $v$  n'existait pas, les vitesses horizontales avec lesquelles les molécules se porteraient vers l'orifice  $ab$ , seraient (n° 486) respectivement

$$\sqrt{2g}\sqrt{h}, \sqrt{2g}\sqrt{h-1}, \sqrt{2g}\sqrt{h-2}, \sqrt{2g}\sqrt{h-3}, \\ \sqrt{2g}\sqrt{h-4} \dots (b).$$

Pour les molécules qui se présentent à la déversoire  $ad$ , les vitesses respectives des tranches seront donc

$$\frac{(v + \sqrt{2g})\sqrt{h}}{\sqrt{h}}, \frac{(v + \sqrt{2g})\sqrt{h-1}}{\sqrt{h}}, \frac{(v + \sqrt{2g})\sqrt{h-2}}{\sqrt{h}}, \\ \frac{(v + \sqrt{2g})\sqrt{h-3}}{\sqrt{h}}, \text{ etc..... (c),}$$

et pour celles qui se présentent à la déversoire  $bd$ ,

$$\frac{(\sqrt{2g-v})\sqrt{h}}{\sqrt{h}}, \frac{(\sqrt{2g-v})\sqrt{h-1}}{\sqrt{h}}, \frac{(\sqrt{2g-v})\sqrt{h-2}}{\sqrt{h}},$$

$$\frac{(\sqrt{2g-v})\sqrt{h-3}}{\sqrt{h}}, \text{ etc.... (d).}$$

533. Maintenant, cherchons l'équation de la courbe  $ad$ , et pour cela rappelons-nous (n° 486) que les distances  $ap$ ,  $pp'$ ,  $p'p''$ , etc., sont proportionnelles aux vitesses respectives données par la série (c); de sorte que

$$ap : pp' :: \frac{(v + \sqrt{2g})\sqrt{h}}{\sqrt{h}} : \frac{(v + \sqrt{2g})\sqrt{h-1}}{\sqrt{h}} :: \sqrt{h} : \sqrt{h-1}$$

ce qui nous montre que les distances  $ap$ ,  $pp'$ ,  $p'p''$ , etc., sont dans le même rapport que dans le cas où il n'y a pas de courant primitif; nous aurons donc la même équation que celle marquée (e) du n° 486; c'est-à-dire que

$$\text{cette équation sera } 4hx = 4hy - y^2 \dots (e).$$

534. De même que les rapports des distances  $ap$ ,  $pp'$ ,  $p'p''$ , etc., sont indépendans du facteur  $\frac{(\sqrt{2g+v})}{\sqrt{h}}$ , ceux des distances  $bq$ ,  $qq'$ ,  $q'q''$ , etc., seront indépendans du facteur  $\frac{(\sqrt{2g-v})}{\sqrt{h}}$ ; de sorte que l'équation de la courbe  $bd$  sera la même (l'origine des coordonnées étant un point  $b$ , et les abscisses positives étant prises de  $b$  vers  $a$ ) que celle (e) de la courbe  $ad$ , dont l'origine est en  $a$  et les abscisses positives de  $a$  vers  $b$ .

535. Il suit de là que, malgré le courant, les déversoirs présentent les mêmes circonstances que dans le cas d'un liquide en équilibre avant l'ouverture de l'orifice dans un vase ordinaire.

Cette conséquence a quelque chose qui étonne, car il semble au premier abord que le courant devrait transporter en avant le sommet  $d$  des déversoirs d'une quantité proportionnelle à la vitesse de ce courant, mais le fait n'en est pas moins certain.

L'équation (257) donnera donc la hauteur  $d = cd$  du sommet des déversoirs.

653. Maintenant observons que la molécule  $a$  sera animée de deux vitesses

l'une horizontale, égale à  $v + \sqrt{2gh}$ , et l'autre verticale égale à  $\sqrt{2gh}$ ; si donc nous faisons  $ai$  proportionnelle à  $v + \sqrt{2gh}$  et  $ie$  à  $\sqrt{2gh}$ , l'hypothénuse  $ae$  du triangle rectangle  $aie$ , sera la direction que prendra la molécule  $a$ , abstraction faite de l'action de la pesanteur pendant le temps que cette molécule parcourait la distance  $ae$  (n° 505). La molécule  $b$  sera aussi animée de deux vitesses, l'une horizontale, égale à  $\sqrt{2gh} - v$ , et l'autre verticale, égale à  $\sqrt{2gh}$ ; si donc  $ib$  est proportionnelle à  $\sqrt{2gh} - v$ , et  $ie$  à  $\sqrt{2gh}$ , l'hypothénuse  $be$  du triangle rectangle  $bei$  sera la direction de la molécule  $b$ .

537. Il est facile de voir que  $ci$  est proportionnel à  $v$ , et que, par conséquent, les droites  $ae$ ,  $be$  se rencontrent au point  $e$ , de manière que  $ie = ac = a$ ; car la vitesse verticale est la même de part et d'autre, et dans le cas des vitesses horizontales égales, on aurait  $cg = ac = a$ ; on a donc  $cg = ie = a$ .

538. Il suit de tout ce qui précède, que l'écoulement qui aura lieu par l'orifice  $ab$  dans un temps donné, sera proportionnel à la somme des volumes des deux cônes ou pyramides qui auront pour base l'orifice  $ab$ , et pour hauteur, l'une  $cd$  et l'autre  $ie$ .

539. Il résulte donc de tout cela, que le coefficient de la dépense est le même dans le cas d'un courant, que dans celui d'un liquide enfermé dans un vase : il n'y a de changé que la direction que prend le liquide à la sortie de l'orifice horizontal.

Enfin, il est clair que la vitesse par laquelle il faut multiplier ce coefficient est encore la même que dans l'article n° 508, et que, par conséquent, l'équation (267) donnera généralement la dépense par seconde, soit que le liquide soit enfermé dans un vase, ou que l'orifice soit percé dans le fond d'un canal dans lequel il y aurait un courant quelconque.

Ne connaissant point d'expériences qui aient été faites dans cette dernière circonstance, je ne puis vérifier cette conclusion importante.

540. Considérons maintenant le cas d'un orifice vertical, toujours dans l'hypothèse où le fond du canal qui fournit à la dépense est au même niveau ou plus bas que le bord inférieur de l'orifice.

Si l'orifice est percé dans une paroi perpendiculaire à la longueur du canal d'entretien, comme le liquide ne peut se mettre en mouvement dans ce canal qu'en raison de l'écoulement par l'orifice, il est évident que cette manière d'entretenir le niveau constant ne peut apporter aucun changement dans la

dépense, et il en serait de même, l'orifice étant percé dans une paroi parallèle à la longueur du canal, si ce dernier était fermé en un bout par une paroi. Ainsi, dans ces deux cas, les formules (277) et (279) sont directement applicables.

541. Supposons en second lieu que l'orifice soit percé dans une paroi latérale d'un canal contenant un courant d'eau.

Dans ce cas, on démontrerait, par un raisonnement analogue à celui du cas où l'orifice est percé dans le fond du vase, que l'écoulement est encore le même que si le liquide était contenu dans un vase fermé latéralement de toutes parts; ainsi les formules (277) et (279) sont générales et doivent avoir leur application, quelle que soit la vitesse du courant; seulement la direction du liquide à la sortie de l'orifice sera différente. Rappelons-nous bien que dans tout ce qui précède on suppose que le niveau reste constant.

542. *Proposons-nous, à présent, de déterminer le temps que mettrait un bassin à se vider, par un orifice percé dans le fond.*

Comme dans ce cas la vitesse et le coefficient de l'écoulement varient à mesure que le niveau de la face supérieure du liquide s'abaisse, si nous voulions traiter cette question en toute rigueur, nous tomberions dans des calculs trop compliqués pour la pratique. C'est pour les simplifier que nous allons nous y prendre de la manière suivante.

Nous calculerons d'abord le temps nécessaire pour faire baisser le niveau jusqu'au sommet  $d$  (fig. 117) des déversoirs, et ensuite celui qu'il faudra, à partir de cet instant, pour que le vase achève de se vider. Voici comment nous nous y prendrons :

La hauteur  $cd = d$ , sera, dans le premier instant.

$$d = 2h - 2\sqrt{h(h-a)},$$

et dans le dernier (n° 492) nous aurons  $d = \frac{4a}{3}$ .

Quoique  $d$  ne passe pas de la première valeur à la seconde, en suivant la loi d'une progression décroissante par différences égales, néanmoins, sans erreur sensible, nous pouvons supposer à cette quantité  $d$  cette loi de décroissement; de sorte que, d'après cette hypothèse, la valeur moyenne de  $d$  sera la demi-somme des deux valeurs extrêmes; ainsi

$$d = \frac{2a}{3} + h - \sqrt{h(h-a)} \dots (282)$$

$h$  étant toujours la hauteur du niveau supérieur primitif au-dessus du fond du vase.

Telle sera la valeur très-approchée de  $d$ , qu'il faudra mettre (après l'avoir calculée numériquement) dans l'équation (266), pour avoir une valeur moyenne de  $c$ . Ces valeurs moyennes de  $d$  et de  $c$  étant calculées, on les mettra dans l'équation (263), et on aura une valeur moyenne de  $N$  très-approchée, que nous regarderons comme le véritable coefficient de la dépense, pendant tout le temps que le liquide mettra à descendre jusqu'au niveau du sommet des déversoirs.

543. Si au lieu de descendre au niveau du sommet des déversoirs, la face supérieure du liquide ne devait s'abaisser que de la quantité  $z$ , la valeur de  $d$  au dernier instant de l'écoulement serait

$$d = 2(h - z) - 2\sqrt{(h - z)(h - z - a)},$$

et, par conséquent, la moyenne serait

$$d = h - \sqrt{h(h - a)} + (h - z) - \sqrt{(h - z)(h - z - a)}.$$

C'est d'après cette valeur de  $d$  que l'on calculerait  $c$  et ensuite  $N$ .

544. Cherchons maintenant l'expression de la vitesse moyenne avec laquelle l'écoulement aura lieu.

Pour cela, observons que dans le premier instant, la vitesse (n° 507) sera  $\frac{\sqrt{2g}[\sqrt{h} + \sqrt{h-d}]}{2}$ ; et lorsque le niveau sera abaissé de la quantité  $z$ , cette vitesse ne sera plus que  $\frac{\sqrt{2g}[\sqrt{h-z} + \sqrt{h-z-d}]}{2}$ ; la moyenne entre les deux sera donc

$$V = \frac{\sqrt{2g}[\sqrt{h} + \sqrt{h-d} + \sqrt{h-z} + \sqrt{h-z-d}]}{4} \dots (283).$$

545. Multiplions cette vitesse par le coefficient moyen  $N$  (n° 542), et par le temps  $t$  qu'il faudra pour que le niveau s'abaisse de la quantité  $z$ ; de plus, supposons que le volume de liquide qui se sera écoulé pendant le temps  $t$ , soit représenté par  $M$ : il en résultera

$$M = \frac{tN\sqrt{2g}[\sqrt{h} + \sqrt{h-d} + \sqrt{h-z} + \sqrt{h-z-d}]}{4} \dots (284),$$

d'où

$$t = \frac{4M}{N\sqrt{2g}[\sqrt{h} + \sqrt{h-d} + \sqrt{h-z} + \sqrt{h-z-d}]} \dots (285).$$

Telle est l'expression approchée du temps nécessaire pour faire baisser le niveau de la quantité  $z$ , cette quantité  $z$  ne pouvant dépasser  $h - \frac{4a}{3}$ .

Pour se servir de cette formule, on calculera le volume  $M$  d'après la forme du vase et la profondeur  $z$ ; et le coefficient  $N$  de la dépense, d'après la formule (263), modifiée de la manière qu'il a été dit au n° 542.

546. Il nous resterait à donner l'expression du temps qu'il faudrait au vase pour achever de se vider, depuis le moment où sa face supérieure coïncide avec le sommet des déversoirs, jusqu'à l'entière évacuation du liquide; mais cette question est beaucoup trop compliquée pour être résolue ici d'une manière rigoureuse, et même avec une certaine approximation.

Cependant, comme le temps de cet écoulement ne peut pas être d'une longue durée, à moins que le vase ne soit très-grand, on arrivera à connaître ce temps à quelque chose près, en prenant pour coefficient  $0,165 \times S$ , qui, multiplié par la vitesse  $\sqrt{\frac{2ag}{3}}$  et par le temps  $t$ , donnera à peu près la quantité de liquide écoulée dans le temps  $t$ . Si donc  $M$  est le volume de liquide échappé du vase, on aura

$$M = 0,165 \times S t \sqrt{\frac{2ag}{3}},$$

d'où 
$$t = \frac{M}{0,165 \times S \sqrt{\frac{2ag}{3}}}, \dots (286),$$

pour le temps demandé.

547. Pour avoir le temps qu'il faudrait à un vase pour se vider par un orifice vertical, on modifierait le coefficient (273) en prenant pour  $b$  une valeur moyenne entre les valeurs (270) et (272), et pour  $d$  une moyenne entre les valeurs (271) et  $\frac{3h}{4}$  (n° 520), et en calculant ensuite  $c$  par l'équation (276) et d'après les valeurs moyennes de  $b$  et de  $d$ : on arriverait de cette manière à un coefficient  $N$ , qu'on pourrait regarder comme constant. On multiplierait ce coefficient par une vitesse moyenne entre celle due à la hauteur  $h - G$ , et celle qui appartiendrait à la hauteur  $G$ , c'est-à-dire par une

vitesse égale à 
$$\frac{\sqrt{2g} [\sqrt{h-G} + \sqrt{G}]}{2},$$

ce qui donnerait 
$$\frac{N \sqrt{2g} [\sqrt{h-G} + \sqrt{G}]}{2}$$

pour l'écoulement pendant un instant ; si donc  $M$  est le volume de liquide renfermé dans le vase, au-dessus du point le plus élevé de l'orifice, nous aurons

$$M = \frac{2N \sqrt{2g} [\sqrt{h-G} + \sqrt{G}]}{2},$$

d'où 
$$t = \frac{2M}{N \sqrt{2g} [\sqrt{h-G} + \sqrt{G}]} \dots (287),$$

telle sera l'expression assez approchée du temps demandé.

548. La face supérieure du liquide étant arrivée au niveau du bord supérieur de l'orifice, l'écoulement se continuera comme par un déversoir.

Trouver le temps que mettrait le vase à finir de se vider, est encore une question que nous ne traiterons point ici, quoique moins compliquée que celle du n° 546. Nous la traiterons rigoureusement, ainsi que toutes celles qui précèdent, dans des notes à la fin de cet ouvrage.

549. Nous avons vu que les molécules liquides, à leur passage dans le plan de l'orifice, se trouvent plus écartées les unes des autres que dans l'intérieur du vase, tant dans le plan de l'orifice horizontal (n° 506), que dans celui de l'orifice vertical (n° 522), et que si ces molécules étaient ramenées à leur écartement naturel, au lieu d'occuper l'aire  $S$  de l'orifice, elles n'occuperaient plus qu'une aire égale à  $N$ . Or la pression latérale qui a lieu sur les molécules, tout autour de l'orifice, et qui, combinée avec la pression verticale, tend à leur faire décrire des paraboles telles que  $aM$ ,  $bM$  (fig. 117) et  $ae$ ,  $be$  (fig. 120), doit nécessairement produire ce rapprochement par degré, et ce rapprochement doit être complet, à une distance de l'orifice à peu près égale à celle du point  $M$  (fig. 117) ou  $e$  (fig. 120) où ces paraboles se rencontreraient si elles pouvaient librement avoir lieu.

On a observé, en effet, que le faisceau liquide qui sort par l'orifice, étant coupé par des plans parallèles à celui de ce dernier, présente des sections dont l'aire va en diminuant, à partir de l'orifice, jusqu'à une distance environ égale à la moitié du diamètre de cet orifice. Cette observation a été faite par des mesures précises et directes, ce qui ne laisse aucun doute sur ce fait. Quelques auteurs ont observé qu'au-delà de cette distance égale à environ la moitié du diamètre de l'orifice, les aires des sections devenaient croissantes, et quelques autres semblent nier ce dernier fait ; de sorte qu'ils n'admettent point de *minimum* dans l'aire de ces sections. Nous ne chercherons point à décider cette question, et sans rien préjuger sur ce point, pour faciliter le discours, nous dirons que la plus petite de ces sections parallèles au plan de l'orifice, a été nommée *section contractée*, et *contraction de la veine fluide*, la différence entre l'aire de l'orifice et celle de la section contractée.

550. Un fait, connu des Romains, a été constaté par Poleni, professeur à Pavie, et ensuite par Venturi, de Modène; il consiste en ce que, lorsque l'orifice n'est plus en mince paroi, c'est-à-dire, lorsqu'on ajoute un tuyau d'une certaine longueur et de même diamètre que l'orifice, l'écoulement est beaucoup plus abondant que dans le premier cas. Quand l'ajutage est cylindrique, d'après les observations de l'abbé Bossut, la dépense est à celle d'un orifice en mince paroi :: 81 : 62, tout étant égal d'ailleurs; et d'après celles de Venturi, lorsque cet ajutage se compose d'un cylindre d'une certaine longueur, terminé par deux cônes tronqués ajustés ensemble base à base, on peut augmenter la dépense jusqu'à la rendre environ  $2\frac{1}{2}$  fois plus grande que par un orifice en mince paroi, et quelques savans prétendent même que ce physicien n'a point par là atteint le maximum d'effet dont les ajutages sont susceptibles, et il paraît que M. Clément est parvenu à augmenter encore notablement la dépense, en changeant la forme de l'appareil de Venturi.

Il me semble que ce fait aurait besoin d'être vérifié de nouveau; car déjà le résultat de Venturi est environ  $1\frac{1}{2}$  fois plus grand que ce qu'il serait s'il n'existait aucune contraction, ce qui ne peut être admis qu'en supposant que l'ajutage, en même temps qu'il détruit entièrement la contraction de la veine fluide, a, de plus, la propriété d'accélérer la vitesse de l'écoulement, ce qui ne paraît pas possible; car on concevrait plutôt, au contraire, que le frottement contre les parois de cet ajutage devrait diminuer cette vitesse. Je ne puis décider cette question d'une manière absolue, n'ayant point fait d'expérience à cet effet; mais je suis très-porté à croire que le maximum d'effet d'un ajutage doit se borner à la suppression totale de la contraction de la veine, de sorte que dans ce cas, le coefficient N (nos 506 et 522) doit au plus égaler l'aire S de l'orifice, et on doit regarder la vitesse comme étant la même que dans le cas d'un orifice en mince paroi; et même, pour pouvoir en agir ainsi, il faut que le liquide coule à plein tuyau ou à gueule-bée.

D'après les observations de l'abbé Bossut, pour que l'écoulement ait lieu à plein tuyau, il faut que l'ajutage ait une longueur au moins double de son diamètre. D'après d'autres auteurs, cette longueur peut être moindre.

551. La cause qui détruit la contraction de la veine fluide n'est pas connue d'une manière tout-à-fait satisfaisante; cependant M. Hachette semble l'avoir trouvée en l'attribuant à l'adhésion du liquide aux parois de l'ajutage; car il résulte des expériences que ce savant a faites à ce sujet, que quand le liquide est de nature à ne pas mouiller les parois de l'ajutage, la contraction a lieu comme dans le cas d'un orifice en mince paroi, et quand l'adhésion du liquide a lieu avec les parois de l'ajutage, la contraction disparaît presque entièrement; et si dans ce dernier cas on dispose les choses de manière à ce que la surface supérieure du liquide soit toujours exposée à la pression atmosphérique,

mais que l'écoulement ait lieu dans un espace vide d'air, le liquide se détache des parois de l'ajutage, et aussitôt la contraction a lieu comme dans le premier cas. Si ensuite on donne une légère percussion latérale à l'ajutage, le liquide adhère de nouveau aux parois, et la contraction cesse. Il paraît donc prouvé que l'adhésion du liquide aux parois de l'ajutage est, sinon la seule, du moins la principale cause du phénomène qui nous occupe.

552. Le même auteur a observé que quand un orifice est percé dans une paroi à surface courbe, la dépense n'est pas la même que lorsqu'il est percé dans une paroi plane; *la dépense est la plus petite, toutes choses d'ailleurs égales, lorsque la paroi en contact avec le liquide est convexe; elle augmente quand la paroi devient plane, et elle augmente encore, si la paroi se change en une surface concave.*

Ce fait s'explique par notre théorie; mais cela nous menerait trop loin, et nous avons besoin d'abréger.

Il y a encore une circonstance à laquelle il faut bien faire attention, c'est que lorsque l'orifice n'est ni horizontal ni vertical, la dépense varie dans l'un et l'autre cas. Par la même raison que ci-dessus nous nous dispenserons de faire les calculs auxquels donneraient lieu des orifices situés dans des plans inclinés, ces circonstances étant d'ailleurs très-faciles à éviter.

#### LEÇON IV.

De la mesure de la vitesse de l'eau dans un canal ou une rivière, et dans des tuyaux d'une grande longueur; et de la pression des liquides en mouvement contre des surfaces qui doivent leur résister.

553. Les questions qui vont suivre sont de nature à ne nous pas permettre de nous servir de la même théorie que celle qui précède et que j'ai eu l'idée d'établir pour l'écoulement des liquides par des orifices percés dans le fond ou dans les parois d'un vase, à cause du grand nombre de circonstances qui peuvent modifier ou détruire le principe fondamental de cette théorie. Je crois cependant que, lorsqu'elle aura été méditée et travaillée par des hommes habiles, elle pourra servir à expliquer bien des faits qui ne l'ont point encore été. Mais n'ayant ni le temps ni les moyens nécessaires pour approfondir cette matière délicate, je vais me borner à exposer les résultats des travaux des savans qui ont réuni leurs efforts pour arriver aux données que la pratique réclamait.

554. *Cherchons d'abord à expliquer de quelle manière on peut parvenir à*

mesurer la vitesse moyenne d'un courant d'eau, soit dans un canal, soit dans une rivière.

Supposons un plan vertical perpendiculaire à la direction du courant, les molécules liquides situées dans ce plan n'auront pas la même vitesse, pas même celles qui se trouveront sur une même droite horizontale. On a reconnu, en effet, que les vitesses des molécules situées sur une même droite horizontale sont plus petites vers les bords de la rivière que dans le milieu de sa largeur où est le maximum. On conçoit qu'il en doit être de même, à plus forte raison, pour les molécules qui sont situées sur une même verticale; car, si le fond du canal ou de la rivière ne diminuait pas la vitesse des tranches qui en sont les plus voisines, ces tranches seraient les plus vites, et la vitesse irait en décroissant régulièrement jusqu'à la face supérieure du liquide. Mais il paraît que le frottement et la cohésion du liquide, pour le fond ou pour lui-même, occasionnent un retard considérable dans les tranches inférieures, et comme ces causes de retard ne sont point encore connues de grandeur, il s'ensuit que l'expérience seule peut nous conduire d'une manière plus ou moins approchée à la mesure de la vitesse moyenne d'un grand courant d'eau, laquelle vitesse doit varier avec les crues ou les décrues de la rivière. D'où il suit que lorsqu'on mesure la vitesse moyenne d'une rivière, il faut indiquer la hauteur des eaux au moment de l'observation, de sorte qu'il serait nécessaire d'avoir cette vitesse moyenne pour les hauteurs les plus remarquables auxquelles la rivière peut s'élever dans les différentes époques de l'année, pour rendre cette mesure véritablement utile.

De tous les moyens qu'on peut employer pour mesurer cette vitesse moyenne, le meilleur serait, sans contredit, de recevoir dans un bassin la quantité d'eau qui pourrait couler dans un temps donné, et de diviser cette quantité par l'aire de la section droite du courant; mais ce moyen est rarement praticable. C'est pour cela qu'on a imaginé plusieurs méthodes plus ou moins directes que la première dont les deux plus remarquables sont les suivantes.

La première consiste à descendre verticalement un tube à deux branches de la forme *acfdb* (fig. 123), à la profondeur des tranches dont on veut mesurer la vitesse moyenne. La branche horizontale est tournée en sens contraire du courant, pour que l'eau s'introduise dans la branche verticale. Il est clair que la vitesse moyenne de toutes les molécules qui peuvent s'introduire dans le tube, sera égale à celle due à la hauteur à laquelle le liquide s'élèvera dans la branche verticale. Ainsi *h* étant cette hauteur, depuis le centre de pression sur l'orifice de la branche horizontale jusqu'au point où le liquide est parvenu dans la branche verticale, la vitesse moyenne cherchée sera  $\sqrt{2gh}$ . On fera la même opération en différens points de la section droite du courant, tant sur la largeur que sur la hauteur; on fera la somme de toutes les vitesses qu'on aura

trouvées, et on divisera cette somme par le nombre d'opérations : le quotient sera la vitesse moyenne plus ou moins exactement. Belidor trouve ce moyen très-commode, après en avoir fait usage lui-même.

Pour assujétir ce tube, imaginé par Pitot, on pourrait employer une tige de fer assez longue pour pouvoir s'enfoncer de quelques centimètres dans la terre du fond, ce qui permettrait de le maintenir par en haut dans la situation verticale, et à la profondeur qu'on voudrait, dans la section droite du courant.

Le second moyen a pour objet de donner d'un coup la vitesse moyenne des filets dans le sens vertical dans presque toute la profondeur de la rivière. Pour cela, on emploie une règle ou triangle de bois, qu'on leste à l'extrémité inférieure, pour la faire flotter dans une position à peu près verticale, un peu au-dessus du fond de la rivière. La vitesse de la règle, supposée toujours verticale, est, à chaque instant, égale à la vitesse moyenne des molécules qui la font avancer. En mesurant donc l'espace parcouru par cette règle dans un temps donné, on obtient cette vitesse moyenne. Ainsi, en plaçant cette règle dans différens points de la largeur de la rivière, mesurant les espaces qu'elle peut parcourir dans le même temps dans ces diverses positions, faisant la somme de tous ces espaces, et la divisant par le nombre d'opérations, le quotient sera un espace qui sera proportionnel à la vitesse moyenne du courant total. L'auteur de ce flotteur, M. Théodore Bonati, a mesuré de cette manière la vitesse moyenne du Pô, en 1811 et 1815. « Dans ce fleuve, les tiges se sont maintenues verticales, et n'ont pas tourné sur elles-mêmes, malgré l'addition d'une petite aile rectangulaire de six centimètres de hauteur sur douze de largeur, placée latéralement dans le bas, et formant pour ainsi dire girouette; quelle que fût la position initiale de cette aile relativement au courant, cette position n'a pas changé pendant le transport des tiges. M. Bonati a observé que dans les endroits où le fleuve est le plus profond, et surtout près des rives, on voit quelquefois les tiges s'incliner un peu en avant (M. Hachette, ouvrage cité précédemment). »

555. Ces deux moyens de mesurer la vitesse moyenne d'un courant, sont les meilleurs de tous ceux qu'on a imaginés jusqu'ici; mais on ne peut disconvenir que leur emploi ne soit long, difficile, dispendieux, en même temps que les résultats qu'ils donnent ne sont jamais d'une grande exactitude. C'est pour cela que nous donnerons les formules suivantes, pour les déterminer par le calcul avec tout autant d'exactitude, pour le moins, et beaucoup moins de frais. Ces formules doivent d'autant plus inspirer de confiance, qu'elles sont dues au talent bien reconnu du savant M. de Prony, et qu'elles sont déduites des résultats de l'expérience.

Supposons qu'il s'agisse d'un canal cylindrique dont l'aire de la section droite

soit  $S$ ;  $C$  le contour de cette section;  $P$  la pente par mètre de longueur, et  $V$  la vitesse moyenne de la section par seconde de temps, exprimée en mètres, on aura

$$V = -0,07 + \sqrt{0,005 + 3233 \times \frac{SP}{C}} \dots (288),$$

ou en ne prenant que le terme  $3233 \times \frac{SP}{C}$  qui est sous le radical,

$$V = 57 \sqrt{\frac{SP}{C}} \dots (289).$$

556. S'il s'agissait d'une grande rivière, on aurait

$$V = -0,033 + \sqrt{2737,013 \times \frac{SP}{C} + 0,0034} \dots (290),$$

ou en ne prenant que le terme affecté de  $\frac{SP}{C}$  sous le radical,

$$V = 52 \sqrt{\frac{SP}{C}} \dots (291).$$

On voit que cette formule diffère peu celle marquée (289).

557. Si  $U$  représente la vitesse du courant à la surface supérieure de l'eau,  $V$  étant la vitesse moyenne, on aura

$$V = \frac{2}{5} U \dots (292).$$

Pour avoir la vitesse moyenne de la section droite du courant, il faudra donc mesurer la vitesse moyenne à la surface supérieure de l'eau, et en prendre ensuite les  $\frac{2}{5}$ .

558. Supposons qu'il s'agisse d'une conduite d'eau cylindrique d'une grande longueur, et nommons

$h$  la charge d'eau sur l'orifice inférieur de la conduite;

$d$  le diamètre de cette dernière;

$l$  sa longueur en mètres, et

$V$  la vitesse moyenne cherchée, on aura

$$V = 26,79 \times \sqrt{\frac{dh}{l}} \dots (293).$$

Cette formule s'accorde avec 51 expériences faites à diverses époques par Couplet, Bossut et Dubuat, et diffère peu, en plus, de quelques autres expériences rapportées par M. Hachette.

559. Il est évident que, connaissant la vitesse moyenne d'un courant quelconque, on aura la quantité d'eau coulée dans une seconde de temps, en multipliant cette vitesse par l'aire de la section droite de ce courant.

560. La formule (293) n'est pas applicable seulement à une conduite rectiligne, mais à toute conduite fermée dont la direction présenterait des sinuosités, tant en projection horizontale qu'en projection verticale. Il paraît, cependant, que l'on doit éviter avec soin les pentes et les contre-pentes, c'est-à-dire, qu'il faut toujours que la conduite présente dans tous les points de sa longueur sa convexité au plan horizontal mené par son point le plus bas, de sorte qu'autant que possible il faut égaliser la pente, et même éviter les trop grands détours en projection horizontale; car le mouvement du liquide sera toujours plus libre, et le travail s'exécutera avec plus de facilité et d'économie. Les conduites qui vont prendre l'eau à un point élevé, qui la dirigent dans un fond pour la faire remonter à un autre point moins élevé que le point de départ, se nomment *conduites à syphon*. La formule (293) de M. de Prony est donc applicable à ces sortes de conduites fermées,  $h$  étant la différence de niveau entre le point de départ et le point d'arrivée. Il paraît que les pentes et les contre-pentes dans les conduites à syphon, sont préjudiciables, parce que l'air qui s'introduit dans la conduite avec l'eau produit des phénomènes inconnus qui dérangent le mouvement du liquide, et le calcul se trouve en défaut.

561. Quoique le frottement sur les bords et sur le fond des rivières dérange la loi naturelle des vitesses des filets liquides, on peut cependant conclure de cette loi, que les vitesses moyennes de deux rivières qui auront la même pente, ne seront égales qu'autant que les sections droites de ces rivières seront à peu près équivalentes, et que les profondeurs moyennes seront à peu près égales, car la pente n'est pas la seule cause de la vitesse moyenne, puisque la pression résultante de la hauteur du liquide au-dessus de chaque molécule y contribue beaucoup. La formule (291) de M. de Prony, tient compte en effet de cette profondeur, puisqu'il y entre le contour et l'aire de la section droite du courant, et que ces deux quantités dépendent de la profondeur de la rivière à l'endroit de cette section droite; d'ailleurs, l'observation faite sur plusieurs rivières confirme cette conséquence naturelle des propriétés des liquides.

562. L'unité dont on se sert pour la distribution de l'eau dans les villes, est ce qu'on appelle le *pouce des fontainiers*; qui revient à une dépense de  $19^m, 2$  cubes en 24 heures, d'après M. de Prony.

Connaissant la hauteur  $h$  du centre de pression de l'orifice du tuyau qui doit produire cette dépense en vingt-quatre heures, l'écoulement devant avoir lieu à plein tuyau, il sera toujours facile de calculer la vitesse de cet écoulement, et de déterminer ensuite le diamètre de cet orifice par la formule (293) pour que ce tuyau donne le pouce des fontainiers, ou  $19^m, 2$  cubes en 24 heures.

De la pression des liquides en mouvement contre des surfaces qui doivent leur résister.

563. *La pression contre un plan parallèle au courant est la même que si le liquide était en repos.*

En effet, la vitesse du courant étant perpendiculaire à la pression transversale, ne saurait changer cette dernière, et nous avons vu (n° 540) qu'effectivement dans ce cas, l'écoulement par un orifice vertical était le même que dans le cas d'un liquide enfermé dans un vase.

564. *Cherchons la pression exercée par un courant d'eau contre un plan vertical perpendiculaire à sa direction.*

Pour y parvenir, soit AB (fig. 123), un plan vertical opposé à un courant CAED ; si nous supposons ce plan percé d'un orifice *ab*, et qu'à cet orifice nous ayons adapté un tube recourbé *acefdb* de même diamètre, ouvert par les deux bouts, il est clair que la pression qui aura lieu à l'endroit de l'orifice sera égale à l'aire de cet orifice multipliée par la hauteur *om*, au-dessus du centre de pression de ce dernier, à laquelle le liquide s'élèvera dans la branche verticale *ce* du tube et par la densité du liquide.

Or, si l'on imagine l'aire du plan AB divisée en un certain nombre de carrés égaux pris pour unité de surface, et qu'on ait appliqué un tube recourbé semblable au précédent, à chacun de ces carrés, ayant la même ouverture, et qu'on ait mesuré la hauteur dans chaque tube, à laquelle le liquide s'élèvera, en représentant par *h, h', h'', h'''*, etc., la suite de toutes les hauteurs mesurées, l'aire de l'orifice du tube étant l'unité, et la densité étant représentée par *d*, la pression totale sera

$$d (h + h' + h'' + h''' + \text{etc.}) \dots (a).$$

Soit *n* le nombre d'unité superficielle du plan fixe AB, ou le nombre des tubes appliqués, et *H* le nombre par lequel il faudrait multiplier *n*, ou l'aire du plan AB, et la densité du liquide pour avoir la pression totale; nous aurons

$$nHd = d (h + h' + h'' + h''', \text{ etc.})$$

ou 
$$nH = h + h' + h'' + h''' + \text{etc.}$$

d'où 
$$H = \frac{h + h' + h'' + h''' + \text{etc.}}{n} \dots (294).$$

Ainsi on voit que le nombre *H* est égal à la somme des hauteurs mesurées divisée par leur nombre, c'est-à-dire que *H* est la hauteur moyenne entre toutes les hauteurs mesurées dans les tubes.

Cette hauteur moyenne *H* ne peut s'obtenir que par l'expérience, au

moyen du tube recourbé ci-dessus, qui n'est autre que celui de Pitot, et elle sera d'autant plus exacte, qu'on aura fait un plus grand nombre d'opérations, et que les points des stations seront distribués plus uniformément dans l'espace que doit occuper le plan fixe. La figure 124 indique la section droite ABCDE d'une rivière, et les cercles  $a, b, c, d, e, f, g, h$  et  $i$  représentent la disposition qu'il conviendrait de donner successivement à l'orifice du tube de Pitot, pour avoir une exactitude suffisante.

Si ensuite on nomme  $S$  l'aire de ce plan fixe, quelle que soit sa forme, et  $P$  la pression qu'il éprouve, nous aurons enfin

$$P = SdH..... (295).$$

565. La vitesse due à la hauteur moyenne  $H$  est  $\sqrt{2gH}$ , si donc  $V$  est cette vitesse, nous aurons

$$V^2 = 2gH, \text{ d'où } H = \frac{V^2}{2g}..... (296).$$

Si nous substituons cette valeur de  $H$  dans l'équation (295), il nous viendra

$$P = \frac{SdV^2}{2g}..... (297).$$

d'où l'on voit que la pression est proportionnelle au carré de la vitesse due à la hauteur moyenne donnée par l'élévation du liquide dans les tubes.

566. Il faut bien faire attention de ne pas confondre la vitesse  $V$  avec la vitesse moyenne; car  $V^2$  est la somme des carrés des vitesses partielles divisée par le nombre de ces vitesses partielles, et non le carré de leur somme, ce qui est bien différent.

En effet, nommons  $v, v', v'', v''',$  etc., les vitesses dues aux hauteurs  $h, h', h'', h''',$  etc.; nous aurons

$$h = \frac{v^2}{2g}, h' = \frac{v'^2}{2g}, h'' = \frac{v''^2}{2g}, h''' = \frac{v'''^2}{2g}, \text{ etc.,}$$

et en substituant ces valeurs et celle de  $H$  dans l'équation (294), il nous viendra, toutes réductions faites

$$V^2 = \frac{v^2 + v'^2 + v''^2 + v'''^2 + \text{etc.}}{n}..... (298),$$

tandis que la vitesse moyenne serait

$$V' = \frac{v + v' + v'' + v''' + \text{etc.}}{n},$$

et par conséquent son carré

$$V'^2 = \frac{(v + v' + v'' + v''' + \text{etc.})^2}{n^2}..... (299).$$

567. *Si la trace horizontale du plan fixe est toujours perpendiculaire à la direction du courant, quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison de ce plan, la pression horizontale qu'il recevra sera le produit de la hauteur moyenne  $H$ , multipliée par l'aire de la projection du plan fixe sur un plan vertical qui aurait la même trace horizontale que ce plan fixe, et par la densité du liquide.*

Cela est facile à comprendre, car s'il s'agissait du plan incliné  $EF$  (fig. 123), il est clair que l'effet de ce plan se bornerait à résister à la pression horizontale que recevrait le plan vertical  $EA$  (qui est sa projection verticale), s'il n'existait pas; la pression horizontale de ce plan incliné sera donc la hauteur moyenne  $H$ , mesurée comme au n° 564, multipliée par l'aire du plan vertical  $EA$ , et par la densité du liquide, comme il fallait le démontrer.

568. *Quant à la pression perpendiculaire à ce plan fixe, quelle que soit d'ailleurs sa situation, elle sera égale à l'aire même de ce plan, multipliée par la densité du liquide, et par la hauteur moyenne  $H$  mesurée comme au n° 564, dans l'étendue de la projection verticale de ce plan fixe, sur la section droite du courant.*

Ceci se démontrerait facilement d'après ce qui précède, et par analogie à ce qui a été dit sur la pression des liquides maintenus en équilibre dans des vases.

569. Si l'on suppose une surface courbe quelconque fixe, et frappée par un courant, on pourra l'imaginer divisée en petits carrés élémentaires qu'on regardera comme plans; or, d'après la dernière proposition, chacun de ces éléments aura une pression normale proportionnelle à son aire et à l'élévation du liquide dans le tube de Pitot qui correspondrait à sa projection dans la section droite du courant.

570. Il suit de là que la pression normale que recevra la surface courbe entière, sera l'aire de cette surface multipliée par la densité du liquide et par la hauteur moyenne  $H$ , mesurée toujours dans l'étendue de la projection de la surface sur la section droite du courant.

571. Quant à la pression horizontale et parallèle au courant, elle sera la même que celle de la projection de cette surface sur le plan de la section droite de ce courant.

Nous terminerons cette section par la table suivante des expériences faites par Smeaton, ingénieur anglais, sur la pression des différens degrés du vent contre une surface plane perpendiculaire à sa direction.

## TABLE

*Contenant les vitesses et les forces du vent, suivant les différents noms dont il est appelé.*

VITESSE DU VENT PAR SECONDE		FORCE PERPENDICULAIRE sur un pied anglais carré, en livre avoir du poids.	FORCE PERPENDICULAIRE sur un mètre carré, en kilogrammes.	DÉSIGNATION VULGAIRE DE LA FORCE DU VENT.
en pieds anglais.	en mètres.			
<sup>pieds.</sup> 1,47	<sup>mètres.</sup> 0,448	<sup>livres.</sup> 0,005	<sup>kilog.</sup> 0,0244	A peine sensible.
2,93	0,893	0,020	0,0976	} Brise légère.
4,40	1,341	0,044	0,2147	
5,87	1,789	0,079	0,3855	} Vent frais.
7,33	2,234	0,123	0,6002	
14,67	4,471	0,492	2,4009	} Vent bon frais.
22,00	6,706	1,107	5,4022	
29,34	8,963	1,968	9,6038	} Forte brise.
36,67	11,177	3,075	15,0060	
44,01	13,414	4,429	21,6135	} Vent impétueux.
51,34	15,648	6,027	29,4118	
58,68	17,886	7,873	38,4902	} Rafale.
66,01	20,120	9,963	48,6194	
73,35	22,357	12,300	60,0240	Tempête.
88,02	26,828	17,715	86,4492	Grande tempête.
117,36	35,771	31,490	153,6712	Ouragan.
146,70	44,714	49,200	240,0960	Ouragan qui déracine les arbres, renverse les maisons, etc.

---

## SECTION CINQUIÈME.

THÉORIE GÉNÉRALE

### DE LA RÉSISTANCE DES CORPS SOLIDES.

---

#### LEÇON I.

Préliminaires.

572. Les matériaux qu'on emploie dans la construction des édifices et celle des machines, sont exposés à des efforts qui tendent à les allonger, les accourcir, les infléchir, les tordre ou les couper en deux parties qui glissent l'une sur l'autre dans la direction de la force qui produit la rupture. Dans chacune de ces circonstances, l'énergie avec laquelle les solides s'opposent à l'action de la force qui agit sur eux, est ce qu'on appelle leur *résistance*.

573. Nous distinguerons donc plusieurs genres de résistances, savoir :

- 1° La résistance à l'allongement ou à l'extension ;
- 2° La résistance à l'accourcissement ou à la compression ;
- 3° La résistance à la flexion ;
- 4° La résistance à la torsion ;
- 5° Et la résistance au glissement des parties l'une sur l'autre.

574. Dans chaque genre de résistance il faut distinguer deux cas : celui où l'effort est sur le point de rompre le corps, et celui où il ne produit qu'un changement très-faible dans la forme primitive du solide. Dans ce dernier cas nous donnerons à la résistance du corps le nom de *résistance stable*, pour faire entendre que la force qui produirait ce faible changement dans la forme du corps ne pourrait le rompre quelque prolongée que soit son action. Dans le second cas nous l'appellerons *résistance à la rupture* pour indiquer que cette rupture est sur le point d'avoir lieu.

575. Le cas le plus important est celui de la résistance stable ; car dans la construction, tant des édifices que des machines, il est évident qu'on ne doit charger les matériaux, que jusqu'au point de ne produire qu'un très-petit changement

dans la forme primitive de ces corps. Quant au cas de la rupture, quoiqu'il ne soit pas aussi intéressant, il mérite néanmoins d'être étudié, parce qu'il fournit un terme de comparaison qui met à même de juger du degré de sécurité qu'on a, lorsqu'on ne prend que la résistance stable, et permet de pousser, avec confiance, l'économie à son juste maximum.

576. Les différentes espèces de résistances des corps solides dépendent toutes évidemment de la cohésion qui unit leurs molécules, et de l'action combinée du calorique interposé entre elles; de sorte que, si ces deux causes étaient parfaitement connues, on en pourrait déduire la théorie entière de toutes les espèces de résistance; mais on peut y arriver, par d'autres considérations, d'une manière très-convenable.

577. Pour être complète, cette théorie doit embrasser deux parties distinctes et également nécessaires : *le calcul et l'expérience*. La première a pour objet la recherche de formules qui expriment les relations qui existent entre la résistance d'un solide, ses dimensions, sa forme, sa position, et le genre d'effort qui agit sur lui. De ces relations découlent des principes qui servent à lier les faits donnés par l'expérience, et qui suppléent à cette dernière dans un grand nombre de circonstances. L'expérience à son tour, procure les faits sans lesquels le calcul ne serait qu'une vaine spéculation de l'esprit, ne pouvant être fondé que sur des hypothèses arbitraires, quelquefois contraires à la vérité, et ne conduisant, en conséquence, à aucun résultat utile : c'est donc sous ce double point de vue qu'il faut nécessairement étudier la résistance des corps solides, afin d'en pouvoir tirer tout l'avantage possible.

578. Parmi les corps solides que la nature nous présente, il faut distinguer les corps *mous* et les corps *élastiques*.

Les premiers jouissent de cette propriété que, si on les comprime au moyen d'une certaine force, ils s'applatissent ou s'accourcissent plus ou moins, et conservent la forme nouvelle qu'ils ont prise, après que la force a cessé d'agir.

Les corps élastiques, au contraire, après avoir été aplatis ou accourcis, dès que la force a cessé d'agir, ils reprennent leur forme primitive, avec plus ou moins de promptitude, après quelques oscillations dans lesquelles des allongemens et des accourcissements successifs et décroissans se manifestent, jusqu'au moment où les corps sont retournés à leur forme primitive.

Tel est l'état des corps parfaitement mous, et celui des corps parfaitement élastiques; mais les corps que nous présente la nature ne sont ni parfaitement mous, ni parfaitement élastiques : ceux que nous regardons comme les plus parfaitement mous, tels que la cire, l'argile humide, le plomb, etc., ne sont pas entièrement privés de toute élasticité; seulement cette élasticité est si faible, que nous sommes autorisés à la négliger dans les applications. De même, les

corps que nous regardons comme les plus parfaitement élastiques, tels que l'acier trempé, l'ivoire, etc., tiennent toujours plus ou moins des corps mous; de sorte que, lorsqu'une force, qui a comprimé ou allongé un de ces corps, vient à cesser d'agir, le corps ne retourne pas parfaitement à sa forme primitive, et il s'en faut d'autant plus, que l'altération de cette forme primitive a été plus considérable, et d'autant plus aussi que cette force a répété son action un plus grand nombre de fois, ou qu'elle a persévéré plus long-temps. Cependant, quand ces corps, et même d'autres corps regardés comme beaucoup moins élastiques, sont comprimés ou allongés d'une quantité *plus ou moins très-petites*, ils jouent alors si parfaitement le rôle de corps élastiques, qu'il est impossible d'y trouver la moindre différence.

579. Il suit de là que, quoique la pierre, le bois, le fer forgé, le fer fondu, etc., ne soient point des corps parfaitement élastiques, tant que nous n'aurons en vue que leur résistance stable, nous pourrons les regarder comme d'une élasticité parfaite, sans craindre de commettre la moindre erreur appréciable dans les résultats. Ainsi, en nous renfermant dans cette limite, les phénomènes suivans que nous présentent les corps élastiques, seront attribués aussi aux matériaux employés dans les constructions, sans que nous soyons obligés d'en avertir à chaque instant.

De la résistance stable à l'allongement et à l'accourcissement.

580. Supposons un prisme élastique quelconque, soumis à l'action d'une force dirigée parallèlement à sa longueur, de manière à tendre ou à comprimer ce corps.

*Je dis que pour accourcir le solide d'une quantité donnée, il faudra la même force que pour l'allonger de la même quantité.*

Ceci est prouvé par l'expérience.

581. Supposons qu'après avoir soumis un prisme élastique à l'action d'une force parallèle à sa longueur, qui l'a comprimé ou étendu, on soumette le même corps à une autre force dans les mêmes circonstances; *l'expérience nous apprendra que les allongemens ou les accourcissemens que s'ubira le solide dans ces deux cas seront proportionnels aux forces.*

582. Il suit de là que la force avec laquelle un corps élastique tend à reprendre sa forme primitive, ou à se restituer, et précisément égale à la force qui l'a tendu ou comprimé; car si la force élastique n'était pas égale à la force qui l'a développée, il n'y aurait pas actuellement équilibre entre ces deux forces,

et l'allongement ou l'accourcissement ne serait plus proportionnel à la force appliquée.

583. *De là il résulte qu'un corps élastique résistera d'autant plus qu'il sera plus étendu ou comprimé, puisque le même corps élastique peut faire équilibre à des forces différentes, en s'allongeant proportionnellement à ces mêmes forces.*

584. Si à deux prismes élastiques homogènes de même base mais de longueur différentes, on applique la même force parallèlement à leurs longueurs, les deux prismes s'allongeront ou s'accourciront proportionnellement à leurs longueurs, de sorte que, si l'un des solides est dix fois plus long que l'autre, il s'allongera ou s'accourcira dix fois plus que celui-ci; d'où l'on voit que *sur les corps élastiques, une même force peut produire des effets différents, cette force, néanmoins, agissant toujours de la même manière.*

On peut expliquer cette espèce de paradoxe, de la manière suivante :

Supposons un prisme élastique suspendu par un bout, et chargé d'un poids à l'autre : l'effet de ce poids sera d'écartier la tranche transversale de molécules situées à l'endroit où le poids est appliqué de la tranche transversale de molécules infiniment voisine, d'une quantité égale à l'écartement que pourrait produire le poids sur ces deux tranches de molécules, si elles existaient seules. Ensuite, l'élasticité réagissant avec une force égale à la traction produite par le poids, tendra à rapprocher ces deux premières tranches de molécules, et comme le poids, en persévérant, s'oppose à ce rapprochement, la seconde tranche, étant attirée par la première attirera la troisième de la même quantité; celle-ci attirera la quatrième, celle-ci la cinquième, et ainsi de suite pour toutes les autres tranches, parce que la réaction est toujours égale à l'action; d'où l'on voit que le premier écartement se répétant entre toutes les tranches, l'allongement total sera proportionnel au nombre des tranches, et par conséquent à la longueur du solide, comme le donne l'expérience. On démontrerait la même chose pour le cas de l'accourcissement.

585. On appelle  *fibre*  une suite de molécule consécutives placées sur une même ligne droite parallèle à la longueur du solide.

586. Cela posé, supposons qu'une force parallèle à la longueur d'une fibre allonge ou accourcisse cette fibre de la  $n^{\text{me}}$  partie de sa longueur; il est clair que pour allonger ou accourcir deux fibres homogènes, de la même quantité, il faudra une force double; pour trois fibres une forces triples; pour quatre, quadruple, et ainsi de suite; d'où il résulte que la résistance à l'allongement ou à l'accourcissement d'un prisme élastique quelconque, est proportionnel au nombre des fibres qui composent ce prisme, et par conséquent à l'aire de sa base.

Si donc  $S$  est l'aire de la base ou de la section droite d'un prisme,  $P$  la force qui l'allongerait ou l'accourcirait de la  $n^{\text{me}}$  partie de sa longueur; si d'un autre côté  $S'$  est l'aire de la base d'un autre prisme de même matière que le précédent,  $e$  la force qui l'allongerait ou l'accourcirait de la  $n^{\text{me}}$  partie de sa longueur, on aura

$$P : e :: S : S'.$$

d'où 
$$P = \frac{eS}{S'} \dots \dots (a).$$

Supposons maintenant que la base  $S'$  soit l'unité de surface, un mètre carré, par exemple; la formule (a) deviendra

$$P = eS \dots \dots (300)$$

Cette formule fera connaître la force  $P$  nécessaire pour allonger ou accourcir de la  $n^{\text{me}}$  partie de sa longueur le prisme dont  $S$  serait l'aire de la base, pourvu que l'on connaisse, par expérience, la force  $e$  nécessaire pour allonger ou accourcir un prisme de même nature de la  $n^{\text{me}}$  partie de sa longueur, sa base étant l'unité de surface.

Il faut entendre que la forme de la section droite  $S$  du prisme dont on demande la résistance stable est quelconque.

587. La formule (300) précédente servira aussi pour calculer la résistance à la rupture, tant pour le cas de l'extension que pour celui de la compression pour un prisme quelconque, pourvu que, dans ce dernier cas, la longueur du solide soit assez petite pour qu'il puisse s'écraser plutôt que de prendre une certaine flexion sous l'action de la force comprimante; seulement la force  $e$ , au lieu d'être celle qui allongerait ou accourcirait de la  $n^{\text{me}}$  partie de sa longueur, le prisme dont la base est l'unité de surface, il faudra prendre la force nécessaire pour rompre ce solide. Par la suite nous donnerons la valeur de  $e$  pour tous les cas. Pour le moment il n'est question que de la théorie.

588. *Supposons un prisme dont l'aire de la base soit  $S$ ,  $l$  sa longueur, et que ce prisme ne doive éprouver qu'un allongement ou un accourcissement absolu représenté par  $a$ , et proposons-nous de trouver la force nécessaire pour produire cet effet.*

Pour cela, observons que si le prisme devait s'allonger ou s'accourcir de la

n<sup>me</sup> partie de sa longueur, c'est-à-dire de la quantité  $\frac{l}{n}$ , par la formule (300) nous aurions,

$$P = eS \dots\dots\dots (a),$$

en nommant P la force qui produirait cet effet.

Mais comme l'allongement ou l'accourcissement doit être de la quantité absolue  $a$ , et que (n° 581) les allongemens et les accourcissements d'un même prisme élastique sont proportionnels aux forces qu'on y applique, en nommant P' la force qui produirait l'allongement ou l'accourcissement  $a$ , nous

aurons 
$$\frac{l}{n} : a :: P : P' = \frac{aPn}{l}.$$

Si dans cette expression on met la valeur (a) de P ci-dessus, il nous viendra

enfin 
$$P' = \frac{aenS}{l} \dots\dots\dots (b)$$

pour la force cherchée,  $e$  étant la force qui, sur l'unité de base, allongerait le solide de la n<sup>me</sup> partie de sa longueur.

589. Supposons un autre prisme de même nature que le précédent, dont P'' serait la résistance à la tension ou à la compression, S' l'aire de sa base, et l' sa longueur, et que l'allongement ou l'accourcissement doive être aussi de la quantité  $a$ , nous aurons (n° 588),

$$P'' = \frac{aenS'}{l'} \dots\dots\dots (c).$$

Si nous comparons ce résultat à celui (b) du n° 588, nous verrons que

$$P' : P'' :: \frac{S}{l} : \frac{S'}{l'} :: l'S : lS' \dots\dots (301).$$

509. Si les forces P', P'' étaient égales, nous aurions

$$l'S = lS'$$

et par conséquent  $S : S' :: l : l' \dots\dots (302),$

c'est-à-dire, pour que deux prismes de même nature ne s'allongent ou ne s'accourcissent que de la même quantité par l'action de la même force, il faut que les aires de leurs bases soient proportionnelles à leurs longueurs.

## LEÇON II.

De la résistance stable pour une section droite quelconque d'un prisme ou cylindre, supposé sans pesanteur, encastré par un bout et soumis à une force perpendiculaire à sa longueur, appliquée à l'extrémité libre.

591. *Supposons un prisme ou un cylindre ABCD (fig. 125) encastré horizontalement par le bout AD, dans un plan inébranlable GH et chargé à l'extrémité libre BC d'un certain poids P.*

Par l'effet de ce poids, le corps s'abaissera par le bout BC, pour prendre la courbe et la position AB'C'D. Pour le moment, nous ferons abstraction de la courbure, pour ne considérer que ce qui se passe dans une de ses sections droites, celle EF, par exemple, qui se trouve en un point E quelconque de la longueur du solide.

En examinant ce qui se passe dans cette section EF, on verra que l'effet du poids P sera d'allonger les fibres situées vers la face supérieure ou convexe AB', et d'accourcir celles situées vers la face inférieure ou concave DC'; d'où l'on voit qu'il doit exister, et il existe en effet, une file de fibres composant une lame infiniment mince, dont l'intersection avec la section droite peut être regardée comme une ligne droite, située entre les points F, E dans l'épaisseur du solide, pour lesquelles il n'y a ni extension ni compression; de sorte que cette lame de fibres n'oppose aucune espèce de résistance à l'action de la force P: c'est pour cela que nous donnerons à cette lame, le nom de *lame neutre*.

La ligne droite d'intersection de cette lame neutre avec le plan de la section droite du solide est évidemment un axe autour duquel les fibres allongées et celles accourcies résistent à l'action du poids P; cet axe, nous le nommerons *axe d'équilibre* ou *axe neutre*.

592. Il est évident que par l'action du poids P, les fibres s'allongent ou s'accourcissent proportionnellement à leurs distances à l'axe d'équilibre; or, l'effort nécessaire pour allonger ou accourcir une fibre élastique (n° 582) est proportionnel à l'allongement ou à l'accroissement qu'elle doit subir; de plus (n° 583) une fibre réagit avec une force égale à celle qui l'a allongée ou accourcie, par conséquent, *la résistance de chaque fibre sera proportionnelle à son éloignement de l'axe d'équilibre*.

593. La résistance totale du solide est évidemment égale à la somme des momens des résistances des fibres allongées, par rapport à l'axe neutre de ré-

sistance, plus celle des momens, par rapport au même axe, des résistances des fibres accourcies. Or, les résistances des fibres, tant en compression qu'en extension, sont des forces parallèles, même après que le corps s'est courbé d'une manière sensible; par conséquent *la somme de leurs momens sera égale à la somme des résistances des fibres en extension multipliée par la distance du centre des forces parallèles par rapport à l'axe neutre* (n° 84). Il en sera de même pour la somme des momens des fibres en compression.

594. Supposons, à présent, qu'un prisme ou cylindre quelconque soit encastré dans un plan inébranlable MN (fig. 126) comme il a été dit (n° 591).

Soit  $cd$  l'axe neutre de la section  $EF$ ; si  $Ea$  est l'allongement de la fibre la plus éloignée de cet axe, en menant un plan  $cad$  par le point  $a$  et l'axe neutre  $cd$ , il est clair que le volume du solide en forme de coin  $acdE$ , sera égal à la somme des allongemens de toutes les fibres en extension, et, par conséquent (n° 592), la somme des résistances de toutes ces fibres; la somme des momens de toutes ces résistances par rapport à l'axe d'équilibre sera donc égale au moment de ce solide par rapport au même axe, c'est-à-dire *au volume de ce coin multiplié par la distance de son centre de gravité au plan horizontal mené par l'axe neutre*

En raisonnant de la même manière sur les fibres en compression, et sur le coin  $cbdF$ , on verra que la somme des résistances des fibres en compression est égale au volume de ce coin, et que la somme des momens des résistances de toutes ces fibres comprimées est égale au volume du même solide multiplié par la distance de son centre de gravité, au plan horizontal mené par l'axe neutre.

595. Cela posé, représentons par  $v$  le volume du solide qui représente les allongemens, et par  $g$  la distance du centre de gravité, du même solide, par rapport au plan horizontal mené par l'axe neutre; le moment de ce solide sera

$$vg \dots \dots \dots (a).$$

Appelons de même  $v'$  le volume du solide qui représente la somme des accourcissements des fibres en compression, et  $g'$  la distance du centre de gravité de ce solide par rapport au plan horizontal mené par l'axe d'équilibre, le moment de ce dernier solide sera

$$v'g' \dots \dots \dots (b).$$

Maintenant observons que le poids  $P$  suspendu à l'extrémité libre  $BC$  du prisme encastré est obligé, d'une part, de faire équilibre à la résistance de toutes les fibres en compression, et de l'autre part à la résistance de toutes les fibres en extension, et nous verrons que si  $E$  représente le moment total de toutes ces résistances autour de l'axe neutre, il en résultera que

$$E = vg + v'g' \dots \dots \dots (c).$$

596. Lorsqu'il y a équilibre entre la résistance du solide et l'action du poids P suspendu à son extrémité libre, il faut nécessairement qu'autour de l'axe neutre *cd*, le moment résultant des fibres en extension soit égal à celui des fibres en compression ; car sans cela cet axe ne pourrait rester fixe, et par conséquent l'équilibre entre la résistance du solide et l'action de la force P ne pourrait avoir lieu, ce qui serait contre notre hypothèse.

Ceci est d'ailleurs prouvé par l'expérience. En effet, dans le bois, par exemple, lorsque le poids P fléchit le solide au-delà de la limite de son élasticité parfaite, en augmentant ce poids, on voit l'axe neutre changer de place, parce qu'une fois l'élasticité altérée, le rapport des résistances entre les fibres en extension et celles en compression change, et les momens de ces résistances cessant d'être égaux, l'axe neutre change de place, jusqu'à ce que cette égalité soit rétablie et qu'il y ait équilibre de nouveau, entre la résistance totale du solide et l'action de la force P.

597. Il suit de là que généralement nous pourrions égaler les expressions (a) et (b) ci-dessus, et nous aurons

$$vg = v'g' \dots\dots (303),$$

ce qui réduira l'équation (c) à

$$E = 2vg \dots\dots (304);$$

*d'où l'on voit que, pour avoir l'élasticité qui se développe dans une section droite quelconque du solide, il suffira de s'occuper du moment du coin dont le volume égale la somme des résistances des fibres en extension (\*).*

(\*) Les auteurs qui ont traité le même sujet l'ont fait en employant le calcul infinitesimal, qui les a conduits à une formule générale qui est ici remplacée par celle (304) que nous venons de trouver. Voici comment on peut trouver la formule différentielle.

Prenons pour l'axe des abscises l'axe d'équilibre *cd* lui-même ; et pour l'origine des coordonnées rectangulaires, l'extrémité *c* de cet axe ; cela posé, nommons

*x* l'abscisse et *y* l'ordonnée d'un point quelconque du contour de la section droite *cEdF* ;

*u*, la distance *pm* d'une fibre *m* à l'axe d'équilibre ;

*t*, la force nécessaire pour allonger, de la n<sup>me</sup> partie de sa longueur, une fibre placée à une distance de l'axe neutre égale à l'unité.

Cela posé, considérons la fibre dont la distance à l'axe d'équilibre est *pm = u* ; l'aire de sa base sera *dxdu* ; son allongement devant être proportionnel à sa distance à l'axe d'équilibre, sera *tu* ; sa résistance absolue *utdxdu* et son moment *u<sup>2</sup>tdxdu*. Le moment de la résistance d'une lame de fibres verticale continue dont l'épaisseur serait *dx*, et la hauteur *pm = u* sera

$$tdx \int u^2 du = \left( \frac{tu}{3} + B \right) dx ;$$

598. L'équation (303) ci-dessus fera connaître la hauteur à laquelle l'axe neutre doit être placé dans la section droite du prisme, quand on connaîtra le rapport entre les résistances des fibres en compression et des fibres en extension, ainsi que la figure de la section droite.

599. Dans le cas de la résistance stable, les résistances des fibres en compression sont égales à celles des fibres en extension (n° 580). Si, de plus, toutes les sections droites sont susceptibles d'être divisées en deux parties symétriques par une droite perpendiculaire à la direction de la force P, il est évident que cette droite sera l'axe neutre; car tout étant égal de part et d'autre, il est clair que par rapport à cette droite, le moment de la résultante des fibres en compression sera égal à celui de la résultante des fibres en extension; et l'équation (303) du n° 597 sera satisfaite.

Ainsi tant que nous aurons affaire à des prismes ou cylindres dont la base pourra se partager en deux parties symétriques par une droite horizontale, nous pourrons prendre cette droite pour l'axe neutre, en la supposant située dans un plan perpendiculaire à la force P appliquée à l'extrémité libre du solide.

Cela posé, appliquons la formule générale (304) ci-dessus, à quelques exemples particuliers qui se présentent le plus souvent dans la pratique.

600. *On demande la force d'élasticité qui se développe dans une section droite quelconque d'un prisme à base rectangulaire encastré par un bout, et soumis à l'action d'une force perpendiculaire à sa longueur, et appliquée à son extrémité libre.*

Soit 1° ABCD (fig. 127), une section droite du prisme, prise en un point quel-

et s'il s'agissait d'une lame dont la hauteur serait  $y$ , on aurait pour le moment de sa résistance

$$\left( \frac{ty^3}{3} + B \right) dx, .$$

et le moment de la résistance de toutes les fibres en extension serait

$$\frac{t}{3} \int (y^3 + B) dx + C$$

E étant donc la résistance totale du solide encastré, on aura, d'après le n° 597,

$$E = \frac{2t}{3} \int (y^3 + B) dx + C \dots (a).$$

En prenant l'intégrale de cette fonction depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = cd$ , on aura l'élasticité E d'un solide quelconque. Avant de prendre cette intégrale, il faudra mettre au lieu de  $y$  sa valeur donnée en  $x$  par l'équation de la section droite.

conque de sa longueur; 2° la droite  $ab$  (parallèle à  $AB$ ), l'axe neutre, et 3° le prisme triangulaire  $AacdBb$  le solide dont le volume est la somme des extensions des fibres. Cela posé nommons  $a$  la largeur  $AB$  du rectangle  $ABCD$ ,  $b$  la hauteur  $AD$  de ce rectangle;  $t$  l'effort nécessaire pour allonger de la  $n^{\text{me}}$  partie de sa longueur une fibre placée à une distance de l'axe neutre égal à l'unité.

L'axe neutre  $ab$  sera à égale distance de la face supérieure  $AB$  et de la face inférieure  $DC$  du solide (n° 599); par conséquent  $Aa = \frac{b}{2}$ .

La hauteur  $Ac$  de la base  $aAc$  du prisme triangulaire  $aAcdb$  des extensions, sera donné par la proportion (n° 592) :

$$1 : t :: aA \quad \text{ou} \quad \frac{b}{2} : Ac = \frac{tb}{2}.$$

L'aire de cette base  $aAc = aA \times \frac{Ac}{2}$ , et par conséquent

$$aAc = \frac{b}{2} \times \frac{tb}{4} = \frac{tb^2}{8}.$$

Le volume du prisme  $AacdBb$  des extensions sera

$$v = aAc \times AB = \frac{tb^2}{8} \times a = \frac{tab^2}{8}.$$

La distance  $fe$ , par rapport à l'axe neutre  $ab$ , du pied  $e$  de la perpendiculaire abaissée du centre de gravité  $G$  du prisme  $AacdBb$  sur le plan de la section droite sera

$$g = \frac{2}{3} aA = \frac{2}{3} \times \frac{b}{2} = \frac{b}{3}.$$

Le moment résultant des extensions sera donc,

$$vg = \frac{tab^2}{8} \times \frac{b}{3} = \frac{tab^3}{24}.$$

Si donc nous substituons dans la formule (304), il nous viendra enfin

$$E = 2 \times \frac{tab^3}{24} = \frac{tab^3}{12} \dots \dots (305)$$

pour l'expression de la force d'élasticité demandée (\*).

(\*) Pour résoudre ce problème au moyen de la formule (a) de la note page 227, on

604. Si la base du prisme était un carré,  $b = a$ , et la formule (305) deviendrait

$$E = \frac{ta^4}{12} \dots (306).$$

602. Supposons un prisme à base carrée, encastré de manière que l'une des diagonales de la base soit parallèle à la direction de la force appliquée à l'extrémité libre, et qu'on nous demande l'expression de la force d'élasticité de ce prisme, pour une section droite prise en un point quelconque de sa longueur.

Soit le carré ABCD (fig. 128), la base du prisme donné ; comme la diagonale AC partage la section droite en deux parties symétriques ACD, ACB, cette diagonale sera l'axe neutre (n° 599), l'autre diagonale BD étant parallèle à la direction de la force qui est appliquée à l'extrémité libre du prisme. Le solide des extensions sera donc la pyramide triangulaire ACDE. Nommons

$a$  la demi-diagonale ID ou AI ;

$t$  la force de tension de la fibre placée à une distance de l'axe neutre égale à l'unité.

Cela posé, nous aurons

$$ACD = AI \times ID = a^2,$$

La tension DE s'obtiendra par la proportion

$$1 : t :: ID \text{ ou } a : DE = at.$$

Le volume de la pyramide des extensions sera

$$v = ACD \times \frac{DE}{3} = a^2 \times \frac{at}{3} = \frac{a^3 t}{3}.$$

La distance  $g$  de l'axe neutre AC au pied de la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de la pyramide sur le plan de la section droite, sera (n° 150)

$$g = \frac{2ID}{4} = \frac{ID}{2} = \frac{a}{2};$$

observera que  $y$  est une constante égale à  $\frac{b}{2}$ , et que la constante  $B = 0$ ; par conséquent,

$$E = \frac{tb^3}{12} \int dx + C = \frac{tb^3 x}{12} + C.$$

En prenant la valeur de cette intégrale depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = a$ , on aura

$$E = \frac{tab^3}{12},$$

comme dans le corps de l'ouvrage.

et par conséquent, le moment de cette pyramide deviendra

$$vg = \frac{a^3 t}{3} \times \frac{a}{2} = \frac{a^4 t}{6}.$$

Si nous substituons cette expression dans la formule (304), il nous viendra

$$E = 2 \times \frac{a^4 t}{6} = \frac{a^4 t}{3} \dots \dots \dots (a)$$

pour l'expression de l'élasticité demandée (\*).

603. Appelons  $b$  le côté AB du carré ABCD (fig. 128); nous aurons  $b^2 = 2a^2$ , et par conséquent  $b^4 = 4a^4$ ; d'où  $a^4 = \frac{b^4}{4}$ . Si nous substituons cette valeur de  $a^4$  dans la formule (a) ci-dessus, il nous viendra

$$E = \frac{b^4 t}{12}.$$

Si nous comparons ce résultat à celui du n° 601, nous verrons que la résistance à la flexion du prisme à base carrée reste la même, que le prisme soit encasté de manière que l'axe neutre soit une diagonale de la base, ou que cet axe soit parallèle à un côté.

604. *Proposons-nous de trouver l'expression de la force d'élasticité pour une section droite quelconque d'un tuyau à base carrée, encasté par un bout, et chargé d'un poids à l'extrémité libre.*

Soit ABCD (fig. 129) la base extérieure, et EFGH la base intérieure du tuyau; soit, de plus,  $ab$  l'axe d'équilibre, qui divise en deux parties symétriques chacune de ces bases. Nommons  $a$  les côtés de la grande base;  $a'$  ceux de la petite;  $t$  la tension de la fibre placée à une distance de l'axe neutre égale à l'unité.

La formule (306) nous donnera pour l'élasticité du prisme plein qui aurait

(\*) Pour résoudre le problème au moyen de la formule (a) de la note page 227, on observera que la relation entre  $x$  et  $y$  sera donnée par la comparaison des triangles semblables AID, Apm, qui étant isocèles, donnent  $Ap = pm$ , comme  $AI = ID$ ; de sorte que  $y = x$ , et la constante  $B = 0$ ; par conséquent,

$$E = \frac{2t}{3} \int x^3 dx + C = \frac{2tx^4}{3 \cdot 4} = \frac{tx^4}{6} + C.$$

En prenant cette intégrale depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 2a$ , on aura

$$E = \frac{t a^4}{3},$$

comme dans le corps de l'ouvrage.

la grande base  $\frac{a^4 t}{12}$ , et pour celle du prisme plein qui aurait la petite base  $\frac{a'^4 t}{12}$ ; or, l'élasticité du tuyau est évidemment la différence de celles des deux tuyaux pleins; si donc  $E$  est l'élasticité demandée, nous aurons

$$E = \frac{a^4 t}{12} - \frac{a'^4 t}{12} = \frac{t}{12} (a^4 - a'^4) \dots (307).$$

505. Si  $A$  était le côté de la base carrée d'un prisme plein de même longueur que le tuyau, et qui aurait la même force d'élasticité que ce dernier, on aurait  $\frac{A^4 t}{12} = \frac{t}{12} (a^4 - a'^4)$  ou à cause du facteur commun  $\frac{t}{12}$ .

$$A^4 = a^4 - a'^4 \dots (a)$$

d'où 
$$A^2 = \sqrt{a^4 - a'^4} \dots (b),$$

mais les volumes des deux solides, qui ont même longueur, seraient dans le rapport des aires des bases, c'est-à-dire

$$\therefore A^2 : a^2 - a'^2,$$

ou en mettant pour  $A^2$  sa valeur (b),

$$\therefore \sqrt{a^4 - a'^4} : a^2 - a'^2 \dots (c).$$

Je dis maintenant que le premier terme de ces rapports (c) est plus grand que le second; c'est-à-dire que le volume du prisme plein est plus grand que celui du tuyau.

En effet, le radical  $\sqrt{a^4 - a'^4} = \sqrt{(a^2 + a'^2)(a^2 - a'^2)}$ , et en conséquence le rapport (c) peut se mettre sous cette forme :

$$\therefore \sqrt{(a^2 + a'^2)(a^2 - a'^2)} : a^2 - a'^2 \dots (d)$$

d'où l'on voit évidemment la vérité de la proposition, puisque pour que le radical égalât  $a^2 - a'^2$  il faudrait que les deux facteurs qui sont affectés de ce radical fussent tous les deux  $a^2 - a'^2$ , tandis qu'il y en a un qui est  $a^2 + a'^2$ , plus grand que  $a^2 - a'^2$ .

Il suit de là qu'en donnant à un solide la forme d'un tuyau, il y aura économie de matière sans diminution dans la force d'élasticité.

606. Supposons que  $A$  soit le côté de la base d'un prisme carré plein; l'aire de cette base sera  $A^2$ . Si cette base est équivalente à celle d'un tuyau

de même longueur que le prisme plein, les volumes des ces deux solides seront égaux, et leurs élasticités seront

$$\therefore A^4 : a^4 - a'^4 \dots (a),$$

mais les bases étant égales, nous aurons  $A^2 = a^2 - a'^2$ , d'où  $A^4 = (a^2 - a'^2)^2$ ; mettons cette valeur de  $A^4$  dans le rapport (a), il nous viendra

$$\therefore (a^2 - a'^2)^2 : a^4 - a'^4 \therefore (a^2 - a'^2)^2 : (a^2 + a'^2) (a^2 - a'^2),$$

ce qui se réduit à  $\therefore a^2 - a'^2 : a^2 + a'^2$

d'où nous voyons que la résistance du prisme plein est moindre que celle du tuyau.

607. Il suit donc de là qu'avec la même quantité de matière on obtiendra une plus grande force d'élasticité en employant la forme d'un tuyau, au lieu de celle d'un prisme carré plein.

608. *Supposons deux prismes rectangulaires de même largeur, encastés par un bout l'un au-dessus de l'autre, dans le même plan inébranlable, de manière que ces deux prismes laissent entre eux un intervalle qui soit le même dans toute leur longueur (ces deux prismes d'ailleurs étant réunis ensemble de manière à être forcés de prendre la même courbure par l'action d'une même force, perpendiculaire à leur longueur, appliquée à l'extrémité libre), et proposons-nous de trouver l'expression de l'élasticité du système de ces deux prismes.*

Soit ABGH (fig. 130), une section droite quelconque du système des deux prismes, ABCD étant celle du prisme placé au-dessous, EFGH celle du prisme placé au-dessus, et DCFE, celle du vide entre les deux. Supposons d'abord que l'on ait un prisme plein qui comprenne la base entière ABGH, l'axe neutre  $ab$  sera au milieu de la hauteur BG de cette base; si nous supposons ensuite que les hauteurs BC, GF des sections droites des deux prismes donnés soient égales, l'axe neutre  $ab$  divisera aussi la hauteur CF de la section droite du prisme qui occupe la place du vide, en deux parties égales, et sera par conséquent l'axe neutre de ce dernier prisme. D'après cela il est facile de voir que la force d'élasticité du système des deux prismes est égale à celle du prisme total dont la base est le rectangle ABGH, moins celle du prisme qui occupe la place du vide dont la base est le rectangle DCFE. Cela posé, nommons

$b$  la hauteur totale BG;

$b'$  celle CF du vide, et

$a$  la largeur commune aux deux prismes.

L'élasticité du grand prisme sera (n° 600)  $\frac{ab^3t}{12}$ , et celle du petit  $\frac{ab'^3t}{12}$ .

Si donc E représente l'élasticité du système proposé, nous aurons

$$E = \frac{ab^3t}{12} - \frac{ab'^3t}{12} = \frac{at}{12} (b^3 - b'^3) \dots (308).$$

609. Si la face inférieure du prisme située au-dessus se trouvait sur l'axe d'équilibre  $ab$  du prisme total, dont la base est le rectangle  $ABGH$  (fig. 130), de manière que la section droite du prisme supérieur fût le rectangle  $abGH$ , dans ce cas, le prisme dont la suppression formerait le vide entre les deux, serait pris tout entier dans les fibres en compression du prisme total; par conséquent, après cette suppression, l'égalité des moments de résistance des fibres en extension et de celles en compression autour de l'axe neutre  $ab$  serait détruite, ce qui exigerait que l'axe neutre remontât d'une certaine quantité, pour que cette égalité fût rétablie, d'où l'on voit que l'élasticité du système serait diminuée.

En effet, dans ce cas, le prisme à retrancher du prisme total qui a son axe neutre en  $ab$ , ayant toutes ses fibres en compression, son moment sera

$$\frac{ab'^3t}{3} \text{ au lieu d'être } \frac{ab'^3t}{12}.$$

Car si nous considérons à part la base  $ABCD$  (fig. 131) de ce prisme à retrancher, le solide (n° 594) qui représentera la somme des accourcissements des fibres en compression, sera le prisme triangulaire  $ADEFCB$ .

Or, on aura la hauteur  $AE$ , de la base  $AED$  de ce prisme (n° 600), par la proportion

$$1 : t :: DA \text{ ou } b' : AE = tb'.$$

L'aire du triangle  $AED$  sera

$$\frac{b'}{2} \times tb' = \frac{tb'^2}{2},$$

et le volume  $v'$  du prisme des compressions

$$v' = \frac{tb'^2}{2} \times a = \frac{tab'^2}{2}.$$

D'ailleurs la distance  $g'$  de la projection du centre de gravité de ce prisme triangulaire sur le plan de la section droite à l'axe  $DC$  est  $g' = \frac{2b'}{3}$ ; le moment du prisme à retrancher du prisme total sera donc

$$\frac{tab'^2}{2} \times \frac{2b'}{3} = \frac{tab^3}{3},$$

comme nous l'avons avancé ci-dessus. Si donc  $E$  est l'élasticité du système des deux prismes donnés, nous aurons

$$E = \frac{tab^3}{12} - \frac{tab'^3}{3} = \frac{ta}{12} (b^3 - 4b'^3) \dots (309).$$

610. Si l'on compare ce résultat à celui du n° 608, on verra que dans notre dernière hypothèse le système des deux prismes a perdu de sa force d'élasticité, quoique le volume de ce système soit resté le même. Si le vide s'était trouvé tout entier au dessus de l'axe neutre  $ab$  (fig. 130), on serait arrivé au même résultat. Il faut donc conclure de là qu'il est plus avantageux de s'en tenir à l'hypothèse du n° 608, dans laquelle les deux prismes du système sont égaux.

611. Il s'agit de savoir maintenant s'il y a avantage à laisser ainsi un intervalle entre les deux prismes. Pour nous en assurer, supposons-les encastés immédiatement l'un sur l'autre; alors la hauteur  $b$  du système diminuera de l'intervalle  $b'$  qui séparait les deux prismes dans le cas du n° 608, de sorte que, dans la formule (305), au lieu de  $b$  il faudra mettre  $b - b'$ , ce qui nous donnera

$$E = \frac{ta (b - b')^3}{12};$$

pour l'élasticité du nouveau système.

Celle du système du n° 608 est

$$E' = \frac{ta}{12} (b^3 - b'^3),$$

nous aurons donc  $E : E' :: (b - b')^3 : b^3 - b'^3$ ,

ce qui revient à

$$E : E' :: (b - b')^2 (b - b') : (b^2 + bb' + b'^2) (b - b').$$

et se réduit à

$$E : E' :: b^2 - 2bb' + b'^2 : b^2 + bb' + b'^2.$$

D'où l'on voit que  $E < E'$ , puisque le premier terme du second rapport est plus petit que le second de  $3bb'$ : il y a donc avantage d'écartier les deux prismes, et cet avantage est exprimé par

$$3bb' \times \frac{ta}{12} = \frac{tabb'}{4}.$$

612. En suivant le même raisonnement, on arriverait à l'élasticité du système d'un nombre quelconque pair de prismes encastés par un bout, les uns sur les autres, et laissant entre eux des intervalles. L'analogie fait voir que

pour procurer à ce système la plus grande élasticité possible, il faut que les pleins et les vides soient égaux deux à deux, et soient symétriquement placés par rapport à l'axe neutre du prisme total qui comprend les vides et les pleins.

613. La formule (308) fera connaître aussi l'élasticité d'une pièce de bois ou de fer dans laquelle on aurait pratiqué une entaille dans le milieu de sa hauteur et qui traverserait toute la largeur du solide,  $b'$  étant la hauteur DE (fig. 130) de l'entaille.

Dans le cas où cette entaille ne serait qu'une mortaise dont la profondeur égalerait DI (fig. 130), de l'élasticité du prisme total, au lieu de retrancher celle du prisme dont la base est DCFE, on ne retrancherait que celle du prisme qui aurait pour base le rectangle DIKE, qui serait exprimée par  $\frac{ta'b'^3}{12}$ ,  $a'$  étant la profondeur DI de la mortaise, et  $b'$  la largeur DE. Si donc l'élasticité de la pièce, à l'endroit de la mortaise, est représentée par E, nous aurons

$$E = \frac{tab^3}{12} - \frac{ta'b'^3}{12} = \frac{t}{12} (ab^3 - a'b'^3) \dots \dots (310).$$

On voit par cette formule, que plus la profondeur  $a'$  de la mortaise sera grande, plus l'élasticité de la pièce sera diminuée.

614. Si le tenon qui doit entrer dans la mortaise est bien juste, c'est-à-dire, vient bien remplir le vide, alors la moitié de l'épaisseur de ce tenon venant remplacer toutes les fibres en compression supprimées par la mortaise, il en résultera que l'élasticité de la pièce sera plus grande que si la mortaise était vide; mais comme on ne peut jamais compter que le tenon viendra complètement remplir la mortaise, et quand cela arriverait, comme le tenon présenterait ses fibres en travers s'il s'agissait de bois, et que dans cette direction les fibres se compriment davantage, il s'ensuit qu'on ne doit pas tenir compte de cette augmentation.

615. *Supposons, maintenant, qu'on nous demande l'élasticité d'un cylindre à base circulaire, encastré par un bout, et soumis, à l'extrémité libre, à l'action d'une force perpendiculaire à sa longueur.*

Soit ABCD (fig. 132) une section droite quelconque du cylindre; l'axe neutre sera le diamètre horizontal AC, et le solide dont le volume égale la somme des fibres en extension, sera le coin cylindrique AECBA.

Le volume de ce coin (*géom. à trois dim. n° 141*) est

$$v = \frac{2r^2}{3} \times BE \dots \dots (a);$$

on aura BE par la proportion

$$1 : t :: IB \text{ ou } r : BE = rt,$$

ce qui donnera  $v = \frac{2tr^3}{3}$ .

La distance à l'axe neutre AC du pied de la perpendiculaire abaissée du centre de gravité du coin cylindrique sur le plan de la section droite ABCD, (n° 204)

est  $g = \frac{3pr}{16}$ .

Le moment du coin par rapport à l'axe neutre sera donc

$$vg = \frac{2tr^3}{3} \times \frac{3pr}{16} = \frac{tpr^4}{8},$$

si nous substituons dans la formule (304), il nous viendra enfin

$$E = 2 \times \frac{tpr^4}{8} = \frac{tpr^4}{4} \dots \dots (311)$$

pour l'expression de l'élasticité du cylindre circulaire (\*).

616. S'il s'agissait d'un tuyau cylindrique, dont  $r, r'$ , seraient les rayons des cercles extérieur et intérieur, on aurait,

Pour le grand cylindre plein  $\frac{tpr^4}{4}$ ,

Et pour le petit qui tient la place du vide  $\frac{tpr'^4}{4}$  ;

(\*) Pour résoudre ce problème par le calcul infinitesimal, on observera que l'équation du cercle est  $y = \pm \sqrt{2rx - x^2}$ , l'origine des coordonnées étant au sommet A du diamètre AC, qui coïncide avec l'axe d'équilibre ; d'où  $y^2 = (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}$

en substituant dans la formule (a) de la note page 227, et en observant que la constante B = 0, il viendra

$$E = \frac{2t}{3} \int (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} dx + C$$

en intégrant d'après les règles applicables aux fonctions binomes, et prenant cette intégrale depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 2r$ , il viendra

$$E = \frac{tpr^4}{4},$$

comme dans le corps de l'outragé.

par conséquent, pour le tuyau,  $E$  étant son élasticité, on aura

$$E = \frac{tpr^4}{4} - \frac{tpr'^4}{4} = \frac{tp}{4} (r^4 - r'^4) \dots (312).$$

617. L'emploi des tuyaux cylindriques offre les mêmes avantages sur celui des cylindres pleins, que celui des tuyaux à base carrée sur les prismes pleins (voyez n<sup>os</sup> 604 et suivans); c'est-à-dire qu'avec la même quantité de matière, on a plus de force élastique en donnant à cette matière la forme d'un tuyau qu'en lui donnant celle d'un cylindre plein, et pour avoir la même force d'élasticité, il faudra bien moins de matière dans le cas du tuyau que dans celui du cylindre plein.

618. Si l'on suppose un prisme à base carrée ABCD (fig. 133), circonscrit à un cylindre à base circulaire, la force d'élasticité du prisme sera (n<sup>o</sup> 601)

$$E = \frac{t(AB)^4}{12} \dots \dots \dots (a),$$

et celle du cylindre (n<sup>o</sup> 615)

$$E' = \frac{tpr^4}{4} \dots \dots \dots (b).$$

Mais  $AB = 2r$ ; d'où  $(AB)^4 = (2r)^4 = 16r^4$ ; en substituant dans l'expression (a) il viendra

$$E = \frac{16tr^4}{12} = \frac{4tr^4}{3};$$

on aura donc

$$E : E' :: \frac{4}{3} : \frac{p}{4} :: 16 : 3p :: 16 : \frac{3 \times 22}{7}$$

ou bien  $E : E' :: 112 : 66 :: 56 : 33.$

Les volumes des deux solides sont comme les aires de leurs bases, qui sont

$$S = 4r^2 \text{ et } S' = pr^2$$

de sorte que

$$S : S' :: 4 : p :: 4 : \frac{22}{7} :: 28 : 22 :: 14 : 11.$$

D'où l'on voit que le rapport des résistances, qui est  $16 : 3p$ , est plus grand que celui des volumes qui est  $4 : p$ : Ainsi on perdrait plus de résistance que de matière, si l'on arrondissait un prisme carré pour en faire un cylindre.

619. Supposons un prisme à base carrée, et un cylindre circulaire de même

longueur et de bases équivalentes,  $A$  étant le côté de la base du prisme, et  $r$  le rayon de celle du cylindre; puisque les bases sont équivalentes, on aura

$$A^2 = pr^2 \text{ d'où } A^4 = pr^4 \dots (a).$$

Les élasticités de ces corps seront  $E = \frac{tA^4}{12}$ , et  $E' = \frac{tpr^4}{4}$ ; par conséquent

$$E : E' :: \frac{A^4}{12} : \frac{pr^4}{4},$$

ou en substituant la valeur (a) de  $A^4$ ,

$$E : E' :: \frac{p^2 r^4}{12} : \frac{pr^4}{4} :: \frac{p}{3} : 1 :: p : 3 :: \frac{22}{7} : 3 :: 22 : 21.$$

Ainsi l'élasticité du prisme à base carrée sera plus grande que celle d'un cylindre de même volume et de même longueur. Il vaut donc mieux employer la matière à un prisme qu'à un cylindre. Cependant on voit qu'ici la différence n'est que d'un vingt-deuxième de l'élasticité du prisme, et que par conséquent, pour peu que les convenances exigent un cylindre au lieu d'un prisme, on peut se le permettre sans s'écarter beaucoup de l'économie.

620. Si l'on considère le prisme à base carrée  $abcd$ , inscrit dans le cylindre (fig. 133), on aura

$$(ab)^2 = 2r^2, \text{ et partant } (ab)^4 = 4r^4,$$

en substituant pour  $(ab)^4$  sa valeur  $4r^4$  à la place de  $a^4$  dans la formule

$$(306), \text{ on aura } E = \frac{4tr^4}{12} = \frac{tr^4}{3}$$

pour l'élasticité du prisme inscrit.

Mais celle du cylindre (n° 615) est  $E' = \frac{tpr^4}{4}$ ;

nous aurons donc

$$E : E' :: \frac{1}{3} : \frac{p}{4} :: 4 : 3p :: 4 : \frac{3 \times 22}{7} :: 28 : 66 :: 14 : 33.$$

Les volumes du prisme inscrit et du cylindre donnent

$$V : V' :: (ab)^2 \text{ ou } 2r^2 : pr^2 :: 2 : p :: 2 : \frac{22}{7} :: 14 : 22 :: 7 : 11,$$

d'où l'on voit qu'en transformant un cylindre en un prisme à base carrée, on perd plus de résistance que de matière, puisque le rapport des résistances est :: 14 : 33, et celui des volumes :: 14 : 22. Ceci, et ce qui a été démontré au n° 618, nous font voir que lorsqu'on taille un solide pour le changer de forme, on perd plus de résistance de matière.

## LEÇON III.

De la résistance à la rupture des solides prismatiques encastres par un bout, et soumis à l'autre à un effort transversal.

Pour résoudre cette question le plus convenablement possible, nous diviserons les corps en deux espèces : la première comprendra tous les corps qui se rompent avant d'avoir pris une courbure sensible, tels que la pierre, le fer fondu, etc.; et la seconde, ceux au contraire qui prennent une grande courbure avant la rupture, tels que le bois, le fer forgé, etc.

Occupons-nous d'abord des premiers,

621. Dans ces espèces de corps, l'axe d'équilibre doit conserver à peu près la même position que dans le cas de la résistance stable; de sorte qu'on peut encore, sans erreur sensible, le supposer sur l'horizontale qui divise en deux parties symétriques la base d'encastrement, et par conséquent regarder les extensions et les compressions des fibres comme proportionnelles à leurs distances à l'axe de rupture. Seulement, comme la rupture commence par les fibres les plus éloignées de l'axe d'équilibre, tant parce que celles qui sont les plus étendues cassent les premières, que parce que celles qui sont les plus comprimées s'écrasent le plus tôt. C'est pour cela qu'au lieu de calculer l'effort nécessaire pour étendre ou comprimer ces fibres d'une certaine quantité d'après celui qui étendrait ou accourcirait d'une quantité donnée une fibre placée à une distance de l'axe d'équilibre égale à l'unité, nous rapporterons cet effort à celui qu'il faudrait pour rompre la fibre la plus étendue.

622. Il résulte de là que notre formule générale (304) sera applicable au cas de la rupture, en se conformant aux observations précédentes (\*).

(\*) Pour obtenir la formule générale du moment de résistance à la rupture par le calcul infinitésimal, nous nommerons :

$x$  et  $y$  les coordonnées d'un point quelconque du contour de la base d'encastrement, les axes des coordonnées étant supposés comme dans la note de la page 227 ;

$u$  la distance d'une fibre quelconque à l'axe d'équilibre, et

$r$  la force capable de rompre la fibre la plus étendue ou la plus comprimée.

Cela posé, considérons la fibre dont la distance à l'axe d'équilibre est  $u$ ; l'aire de sa base sera  $du dx$ ; si  $a$  est la distance à l'axe d'équilibre de la fibre dont la résistance est  $r$ , la résistance

623. Proposons-nous de l'appliquer au cas d'un prisme à base rectangulaire; et soit ABCD (fig. 127) la base de ce prisme, le solide des extensions sera, comme au n° 600, le prisme *ABbdca*. Nommons

*a* la largeur AB du rectangle ABCD;

*b* l'épaisseur AD du prisme, et

*r* la force de traction nécessaire pour rompre la fibre Ac. L'extension Ac de cette fibre étant proportionnelle à la force *r*, pourra être représentée par cette force *r*.

Cela posé, nous aurons

$$aA = \frac{b}{2}, \quad Ac = r,$$

et par conséquent 
$$Aac = \frac{rb}{4}, \quad \text{et } v = \frac{rab}{4}.$$

de celle placée à la distance *u* sera  $\frac{ur}{v}$ ; sa résistance absolue sera donc  $dxdu \frac{ur}{v}$  et son moment

$$\frac{r}{v} u^2 dx du.$$

Le moment de la résistance d'une lame de fibre verticale et continue, dont l'épaisseur serait *dx*,

et la hauteur *u*, sera 
$$\frac{r}{v} dx \int u^2 du = \frac{r}{3v} (u^3 + A) dx.$$

S'il s'agissait d'une lame dont la hauteur serait *y*, on aurait

$$\frac{r}{3v} (y^3 + A) dx$$

Le moment de la résistance de toutes les fibres en extension sera

$$\frac{r}{3v} \int (y^3 + A) dx + B$$

et par conséquent celui de la résistance totale du prisme

$$R = \frac{2r^2}{3v} \int (y^3 + A) dx + B,$$

en prenant l'intégrale depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = AC$  (fig. 126).

Nous laisserons au lecteur le soin d'intégrer cette formule générale dans les différents cas particuliers qu'on trouvera dans le corps de cet ouvrage, pour éviter les répétitions.

Nous aurons  $g = \frac{b}{3}$  comme au n° 600, et  $gv = \frac{rab^2}{12}$ .

En substituant dans la formule (304), il nous viendra

$$R = 2 \times \frac{rab^2}{12} = \frac{rab^2}{6} \dots \dots (313)$$

pour le moment de résistance à la rupture, en nommant R cette résistance.

624. Si, au lieu d'un rectangle, la base était un carré, on aurait  $b = a$ , et

$$R = \frac{ra^3}{6} \dots \dots (314).$$

625. Si l'on avait un autre prisme de même longueur, on aurait, par la formule (313)

$$R' = \frac{ra'b'^2}{6},$$

d'où

$$R : R' :: ab^2 : a'b'^2.$$

Il suit de là que les résistances à la rupture de deux prismes de même longueur, sont comme les produits de leurs largeurs par les carrés de leurs épaisseurs.

626. Si les largeurs étaient les mêmes, on aurait

$$R : R' :: b^2 : b'^2,$$

c'est-à-dire qu'alors les résistances seraient comme les carrés des épaisseurs.

627. Enfin si c'étaient les épaisseurs qui fussent égales, on aurait

$$R : R' :: a : a',$$

ce qui nous apprend que dans ce cas les résistances seraient comme les largeurs.

628. S'il s'agissait d'un prisme à base carrée, encastré de manière qu'une de ses diagonales se trouvât verticale, et par conséquent l'autre sur l'axe d'équilibre, en appelant  $a$  la demi-diagonale ID (fig. 128) et  $r$  la résistance de cohésion de la fibre la plus étendue; nous aurions

$$\text{surf. ADC} = a^2; \text{ extension DE} = r;$$

le volume de la pyramide triangulaire qui exprime la somme des extensions des fibres serait donc

$$v = \frac{ra^2}{3}.$$

La distance que nous avons toujours représentée par  $g$  et qui est relative au

centre de gravité de ce solide des extensions sera  $g = \frac{a}{2}$ , et par conséquent

$$vg = \frac{ra^3}{6},$$

et en substituant dans la formule (304) il viendra

$$R = 2 \times \frac{ra^5}{6} = \frac{ra^5}{3} \dots (315),$$

pour le moment de la résistance à la rupture du prisme en question.

629. Appelons  $b$  le côté AD du carré ABCD (fig. 128), nous aurons

$$b^2 = 2a^2, \text{ et par conséquent } b^3 = 2a^3 \sqrt{2},$$

d'où 
$$a^3 = \frac{b^3}{2\sqrt{2}}.$$

Substituons cette valeur de  $a^3$  dans la formule (315), et il viendra

$$R' = \frac{rb^5}{6\sqrt{2}}.$$

Si nous comparons cette expression à celle (314), en y mettant  $b$  au lieu de  $a$ ,

nous aurons 
$$R : R' :: \frac{ra^5}{6} : \frac{rb^5}{6\sqrt{2}} :: 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} :: \sqrt{2} : 1;$$

d'où l'on voit que le moment de la résistance à la rupture d'un prisme à base carrée, encastré de manière que l'axe d'équilibre soit parallèle aux deux côtés de la base, est à celui de la résistance à la rupture du même prisme encastré de manière que l'axe d'équilibre est sur la diagonale de cette base comme  $\sqrt{2} : 1$ . Ainsi dans le premier cas la résistance est plus grande que dans le second. Nous avons vu (n° 603) que cette résistance restait la même dans le cas de la résistance stable.

630. En raisonnant sur la formule (314), comme nous l'avons fait au n° 604 sur la formule (306), nous trouverons pour l'expression du moment de la résistance à la rupture d'un tuyau à base carrée,

$$R = \frac{r}{6} (a^3 - a'^3) \dots (316).$$

631. Si A était le côté de la base d'un prisme carré plein qui aurait la même résistance que le tuyau carré, on aurait

$$A^3 = a^3 - a'^3,$$

d'où

$$A = \sqrt[3]{a^3 - a'^3},$$

et

$$A^2 = \sqrt[3]{(a^3 - a'^3)^2}.$$

Les volumes de ces corps seraient dans le rapport de

$$A^2 : a^2 - a'^2$$

ou

$$\therefore \sqrt[3]{(a^3 - a'^3)^2} : a^2 - a'^2.$$

Si l'on faisait sur les deux termes de ce rapport les développemens et les réductions convenables, on verrait que le premier terme est plus grand que le second, ce qui prouve que le volume du prisme plein est plus grand que celui du tuyau.

632. Si le prisme plein et le tuyau avaient même volume, on aurait.

$$A^2 = a^2 - a'^2, \text{ ou } A = \sqrt{a^2 - a'^2},$$

et les résistances seraient comme

$$A^3 : a^3 - a'^3,$$

ou

$$\therefore (a^2 - a'^2)^{\frac{3}{2}} : a^3 - a'^3.$$

En développant et réduisant, on prouverait que le premier terme de ce rapport est plus petit que le second, ce qui fait voir que le prisme plein a moins de résistance que le tuyau.

633. En raisonnant sur la formule (313), comme nous l'avons fait au n° 608 sur la formule (305), on trouvera

$$R = \frac{ra}{12} (b^3 - b'^3) \dots (317).$$

pour le moment de la résistance de deux prismes rectangulaires, placés à distance l'un au-dessus de l'autre, et encastés comme il a été dit au n° 608, et on tirerait les mêmes conséquences que dans les n°s 609 et 610.

634. Si l'on nous demandait le moment de résistance à la rupture d'un cylindre plein encasté par un bout (fig. 132), l'extension  $BE = r$ , et le volume du coin cylindrique AECBA, serait (*Géom. à trois dim.*, n° 141)

$$v = \frac{2a^2}{3} \times r = \frac{2a^2r}{3}.$$

$a$  étant le rayon de la base du cylindre.

La distance  $g$  relative au centre de gravité sera (n° 204)

$$g = \frac{3pa}{16};$$

d'où 
$$vg = \frac{rpa^3}{8},$$

et par conséquent 
$$R = 2 \times \frac{rpa^3}{8} = \frac{rpa^3}{4} \dots (318),$$

635. S'il s'agissait d'un tuyau cylindrique dont  $a$  et  $a'$  seraient les rayons des bases, en raisonnant comme au n° 616, et au moyen de la formule (318),

on trouverait 
$$R = \frac{rp}{4} (a^3 - a'^3) \dots (319),$$

pour le moment de la résistance à la rupture de ce tuyau.

L'emploi des tuyaux cylindriques offre les mêmes avantages sur les cylindres pleins que celui des tuyaux carrés sur les prismes carrés pleins.

636. Si l'on supposait un prisme à base carrée ABCD (fig. 133), circonscrit ou inscrit à un cylindre circulaire, on tirerait les mêmes conséquences que celles des n°s 618 et suivants.

De la résistance à la rupture des corps encastrés par un bout, et soumis à l'autre bout à un effort transversal, pour les corps qui ne se rompent qu'en prenant une forte courbure, tels que les bois, etc.

637. Lorsqu'avant de se rompre, un corps encastré horizontalement par un bout et chargé d'un poids à l'autre, prend une assez grande courbure, ou ce qui revient au même, les fibres à la face convexe du solide s'étendent beaucoup, et celles à la face concave se compriment beaucoup aussi, il n'est plus possible d'appliquer, à la recherche de son moment de résistance à la rupture, les mêmes hypothèses que dans la leçon précédente, où nous avons supposé des corps qui prenaient une flexion très petite avant de se rompre.

En effet, quand on observe la manière dont se rompt le bois, par exemple, on reconnaît que, pour cette espèce de corps, l'axe d'équilibre se trouve, à l'instant où la rupture va avoir lieu, à une place différente de celle qu'il occupe lorsque le corps commence à fléchir. De plus, les fibres les plus étendues ayant perdu de leur élasticité, par l'excès d'allongement ou d'accourcissement qu'elles ont subi, ne réagissent plus avec une force égale à leurs

extensions, il en est de même pour celles qui sont le plus comprimées. Ainsi à cet instant il n'y a plus qu'un assez petit nombre de fibres en extension et en compression, situées très près de l'axe d'équilibre, qui conservent leur élasticité, et, par conséquent qui résistent dans les rapports établis dans les leçons précédentes. Enfin, au moment de la rupture, il arrive une espèce de désordre dans la résistance des fibres qu'il n'est plus possible d'analyser à priori, de sorte qu'il n'y a plus que l'expérience qui puisse nous faire connaître les principes sur lesquels il faut établir le calcul.

638. Mais quelle que soit la loi qui régit l'extension et la compression des fibres, il est clair que le moment de la résistance totale du solide est égal à la somme des momens de résistance des fibres en extension et de celles en compression (tous ces momens étant pris par rapport à l'axe neutre de résistance). Si donc  $gv$  est le moment des fibres en extension, et  $g'v'$  celui des fibres en compression,  $R$  représentant le moment de la résistance totale du solide, nous aurons

$$R = gv + g'v'.$$

Quelle que soit la position de l'axe d'équilibre, ici comme dans le cas d'une faible flexion, les momens  $gv$ ,  $g'v'$  des fibres en extension et de celles en compression doivent être égaux; ainsi  $gv = g'v'$ . D'où il suit que

$$R = 2gv \dots \dots (a),$$

formule semblable à celle (304) du n° 597.

639. Quoique nous ne connaissions pas, à priori, la loi qui existe dans les résistances des fibres en extension et de celles en compression, il paraît, d'après les expériences de M. Barlow, sur le bois, qu'on peut supposer les fibres en extension comme résistant, non pas proportionnellement à leurs allongemens ou à leurs distances à l'axe d'équilibre, mais toutes avec une force égale et uniforme, ainsi que l'a supposé Galilée.

640. D'après cette hypothèse, ou plutôt ce résultat d'expérience, nous pouvons donc regarder les fibres en extension comme étant des forces parallèles et égales, qui tendent à faire tourner le plan de la section de rupture autour de l'axe neutre; de sorte que le moment de la résultante de toutes ces forces parallèles par rapport à cet axe neutre, sera égal à leur somme multipliée par la distance du centre de ces forces parallèles à l'axe d'équilibre.

Or, si l'on représente par  $r$  la résistance de cohésion d'un faisceau de fibres dont la section transversale serait l'unité de surface, en multipliant cette cohésion  $r$  par la superficie infiniment petite de la section transversale d'une

fibre , on en aurait la résistance ; ainsi en multipliant la résistance d'une fibre par le nombre qu'il y en a à l'extension , on aurait la somme de toutes ces forces parallèles ; mais le nombre des fibres en extension est évidemment proportionnel à la superficie de la partie de la base de rupture du prisme à laquelle ces fibres en extension répondent ; si donc  $S$  représente cette superficie ,  $Sr$  sera la somme de toutes les forces parallèles en question , ou celle des résistances des fibres. Quant au centre de ces forces parallèles , il est évidemment le même que le centre de gravité de la portion de la base de rupture à laquelle répondent les fibres en extension ; la distance de ce centre de gravité à l'axe neutre de rupture étant  $g$  , le moment des fibres en extension sera  $Srg$  ; or dans la formule (a) du n° 638 , nous avons représenté ce moment par  $gv$  ; en substituant dans cette formule , nous aurons généralement

$$R = 2 Sgr \dots (320)$$

pour la résistance à la rupture des solides prismatiques soumis à un effort transversal perpendiculaire à leur longueur.

Appliquons cette formule générale aux cas particuliers qui se présentent le plus souvent dans la pratique.

641. *Supposons qu'on demande la résistance d'un prisme encastré par un bout , dont la base serait un rectangle.*

Soit ABCD (fig. 134) la base de ce prisme , et la droite  $ab$  , parallèle à AB , l'axe neutre de rupture. Cela posé , appelons

$a$  la largeur AB de cette base ;

$b$  la hauteur AD du corps ;

$n$  le rapport de la distance  $aD$  de l'axe neutre à la face supérieure du prisme.

D'après ces hypothèses , nous aurons

$$aD = nb ; \quad abCD = anb \quad \text{et} \quad g = \frac{nb}{2} ;$$

ce qui donnera , en substituant dans la formule (320) ,

$$R = 2 \cdot \frac{an^2b^2r}{2} = n^2ab^2r \dots (321)$$

pour la résistance demandée.

Ainsi , quand l'expérience aura fait connaître  $r$  et  $n$  pour une espèce de corps donnée , le calcul fera connaître la résistance d'un prisme à base rectangulaire quelconque de la même espèce.

642. Si la base du prisme était un carré,  $b = a$ , et la formule (321) donnerait

$$R = n^2 a^3 r \dots \dots (322).$$

643. Si l'on avait un autre prisme à base rectangulaire de même matière que celui de la formule (321), en nommant  $a'$  et  $b'$  les dimensions de la base de ce prisme, on aurait

$$R' = n^2 a' b'^2 r;$$

en comparant cette formule à celle (321), il nous viendrait

$$R : R' :: ab^2 : a' b'^2 \dots (a)$$

d'où il suit que les résistances de deux prismes rectangulaires de même matière, sont entre elles comme les produits de leur largeur par le carré de leur épaisseur.

644. Si les largeurs de ces prismes étaient égales, la proportion (a) deviendrait

$$R : R' :: b^2 : b'^2;$$

d'où l'on voit que les résistances des deux prismes sont comme les carrés des épaisseurs.

645. Si les épaisseurs étaient égales, la proportion (a) deviendrait

$$R : R' :: a : a';$$

c'est-à-dire que dans ce cas les résistances des deux prismes seraient comme les largeurs.

Il est facile de voir, d'après le n° 642, que si les deux prismes étaient à bases carrées, leurs résistances seraient entre elles comme les cubes des côtés de ces bases.

646. *Supposons un prisme à base carrée, encastré de manière que l'une des diagonales de la base soit située verticalement, l'axe neutre de rupture étant perpendiculaire à la même diagonale, et qu'on en demande la résistance.*

Soit ABCD (fig 135) la base du prisme;  $ab$ , perpendiculaire à la diagonale BD, l'axe neutre; cela posé,

Appelons  $a$  la demi-diagonale IB, et

$n$  le rapport de  $cB$  à IB, ce qui donnera  $cB = na$ ,

d'ailleurs nous aurons  $BI : Bc :: AC : ab$

ou  $a : na :: 2a : ab = 2na,$

$$a \Sigma b = S = ab \times \frac{Bc}{2} = 2na \times \frac{na}{2} = n^2 a^2,$$

et enfin  $g = \frac{Bc}{3} = \frac{na}{3};$

en substituant dans la formule générale (320), il nous viendra

$$R = 2r \times n^2 a^2 \times \frac{na}{3} = \frac{2n^3 a^3 r}{3} \dots (323).$$

647. En raisonnant sur la formule (322) comme nous l'avons fait au n° 604 sur la formule (306), on trouvera

$$R = n^2 r (a^3 - a'^3) \dots (324)$$

pour le moment de la résistance à la rupture d'un tuyau à base carrée. On tirerait de la comparaison de la résistance d'un tuyau à celle d'un prisme carré plein, les mêmes conséquences qu'au n° 631.

648. Supposons un prisme dont la base de rupture est le rectangle ABGH (fig. 130), et que  $ab$  soit l'axe neutre, d'après le n° 641, sa résistance sera

$$n^2 ab^2 r \dots (a).$$

Si nous supposons de plus un autre prisme DCEF, dont l'axe de rupture soit le même que celui du grand prisme ABGH; en appelant  $a$  et  $b'$  les dimensions de la base DCEF, on aura pour la résistance de ce prisme  $n^2 ab'^2 r$ . Si donc on retranche ce dernier prisme du prisme total ABHG, il restera deux prismes séparés ABCD, HEFG (sur lesquels, néanmoins, le poids P suspendu à l'extrémité libre agira également), il en résultera, pour la résistance de ces deux prismes

$$R = n^2 ab^2 r - n^2 ab'^2 r = n^2 ar (b^2 - b'^2) \dots (325).$$

649. On demande la résistance d'un cylindre à base circulaire, dont  $ab$  (fig. 136) est l'axe neutre.

Appelons  $a$  le rayon du cercle;

et  $n$  le rapport de  $cD$  à ce rayon  $a$ ; on aura  $cD = na$ .

L'équation du cercle rapporté au sommet D du diamètre, est

$$y^2 = 2ax - x^2;$$

pour la corde  $ab$  nous avons

$$x = na, \quad y^2 = (ca)^2 = 2na^2 - n^2 a^2 = a^2 (2n - n^2),$$

d'où

$$ac = a \sqrt{2n - n^2},$$

et par conséquent  $ab = 2a\sqrt{2n - n^2}$ ,

d'où  $(ab)^3 = 4a^3(2n - n^2) \times 2a\sqrt{2n - n^2} = 8a^3(2n - n^2)^{\frac{3}{2}}$ .

Maintenant (n° 118), soit S l'aire du segment aDb, nous aurons

$$g = \frac{(ab)^3}{12S};$$

multipliant de part et d'autre par S il nous viendra

$$gS = \frac{(ab)^3}{12} = \frac{8a^3(2n - n^2)^{\frac{3}{2}}}{12} = \frac{2a^3(2n - n^2)^{\frac{3}{2}}}{3};$$

et en substituant dans la formule générale (320), il viendra

$$R = 2r \times \frac{2a^3(2n - n^2)^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{4a^3r(2n - n^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \dots (326)$$

650. On demande la résistance d'un tuyau circulaire encastré par un bout.

Supposons que  $a$  soit le rayon de la base de la face extérieure, et  $a'$  celui de la base de la face intérieure; le volume de la paroi étant la différence entre les volumes des cylindres, dont les rayons des bases sont respectivement  $a$  et  $a'$ , la résistance du tuyau sera la différence de celle des deux cylindres; ainsi  $n$  et  $n'$  représentant les rapports des distances  $cC$  et  $c'D$  (fig. 137), nous aurons, par la formule du numéro précédent, pour le premier cylindre

$$\frac{4a^3r(2n - n^2)^{\frac{3}{2}}}{3}, \text{ et pour le second } \frac{4a'^3r(2n' - n'^2)^{\frac{3}{2}}}{3};$$

mais ces deux cylindres étant de même matière, et étant dans les mêmes circonstances, les axes neutres  $ab$  et  $a'b'$  doivent diviser les deux rayons  $IC$ ,  $ID$  dans le même rapport, ce qui donne  $n' = n$ ; et la résistance du

second cylindre sera  $\frac{4a'^3r(2n - n^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$ .

Si donc nous appelons  $R$  la résistance du tuyau, d'après ce qui précède

$$\text{nous aurons } R = \frac{4a^3r(2n - n^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4a'^3r(2n - n^2)^{\frac{3}{2}}}{3},$$

ce qui se réduit à

$$R = \frac{4r(a^3 - a'^3)(2n - n^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \dots \dots \dots (327).$$

En comparant la résistance d'un tuyau à celle d'un cylindre plein, on tirera les mêmes conséquences que précédemment.

## LEÇON IV.

De la courbe que prend un prisme encastré horizontalement par un bout et soumis à une charge uniforme et à un poids suspendu à son extrémité libre.

651. Dans les leçons précédentes nous avons donné les formules qui expriment l'élasticité ou la résistance qui se développe dans une section droite quelconque du prisme, en nous bornant aux formes qui se présentent le plus ordinairement dans la pratique ; nous allons, maintenant, considérer la courbe qu'affecte le solide, en résistant à l'action du poids appliqué à l'extrémité libre du solide encastré horizontalement par l'autre bout, et chargé d'une certaine manière dans sa longueur. Nous supposons que ce solide ne reçoive qu'une très petite flexion, de manière qu'il conserve toute son élasticité.

652. Il est évident, d'après ce qui a été dit au n° 591 et suivans, que la courbe que prendra un prisme encastré horizontalement par un bout, et chargé d'une certaine manière dans sa longueur, sera celle que prendra la lame neutre elle-même, puisque cette dernière courbe résulte de l'allongement des fibres situées d'un côté, et de l'accourcissement de celles situées du côté opposé, de manière que plus les allongemens d'une part et les accourcissimens de l'autre seront considérables, plus cette courbe aura de courbure.

De la courbe que prend un prisme, encastré horizontalement par un bout, et chargé d'un poids à son extrémité libre, ce prisme étant supposé sans pesanteur.

653. Soit  $AB$  (fig. 138), la lame neutre du prisme, et  $P$  le poids suspendu à son extrémité libre  $B$ ; l'action de ce poids sera de faire prendre, à cette lame, une certaine courbe  $AMC$ , qu'il faut déterminer.

Pour cela, prenons le point  $A$  pour l'origine des coordonnées, et la droite  $AB$  pour l'axe des abscisses ; pour un point  $M$  quelconque de la courbe en question, nous aurons

$$AP = x \text{ et } PM = y.$$

Cela posé, il est évident que lorsqu'il y a équilibre entre l'action du poids

P et l'élasticité du prisme, la courbe AMC est déterminée, et que cet équilibre ne serait pas troublé, si l'on rendait le point M fixe. Mais dans ce cas, il est clair que ce qui tient la partie MC de la lame neutre dans sa situation actuelle, est le moment du poids P par rapport au point M, et que ce qui fait équilibre à ce moment, est la force d'élasticité qui se développe dans la section droite du solide au même point M.

Nommons  $l$  la longueur AB du solide; nous aurons.

$$PB = l - x$$

pour le bras de levier du poids P par rapport au point M; le moment de ce poids sera donc  $P (l - x)$ ..... (a).

Nous avons vu (n° 591) que la force d'élasticité qui se développe dans une section droite quelconque du prisme est proportionnelle à l'allongement d'une fibre placée dans la section droite, à une distance de l'axe neutre, égale à l'unité; mais plus cette fibre s'allongera, plus la courbe prendra de courbure à l'endroit de la section droite que l'on considère; d'où l'on voit que cette courbure sera proportionnelle à la force d'élasticité qui se développera dans cette section droite. Mais la courbure d'une courbe, pour un point donné, est en raison inverse du rayon du cercle osculateur au même point. Ainsi;  $r$  étant le rayon de courbure de la courbe AMC au point M, et E la force d'élasticité de la section droite d'un autre prisme de même base et de même matière que celui-ci, et qui, à l'endroit de cette section droite, sa courbe aurait l'unité pour rayon de courbure, l'élasticité qui se développe dans la section droite au point M, sera

$$\frac{E}{r} \dots \dots \dots (b).$$

En vertu de ce qui a été dit ci-dessus, il faudra donc égaler les expressions (a) et (b), et nous aurons

$$P (l - x) = \frac{E}{r} \dots \dots \dots (328)$$

pour l'équation d'équilibre.

Pour avoir l'expression de l'ordonnée  $PM = y$ , considérons les deux éléments consécutifs M, c de la courbe, et prolongeons-les indéfiniment. Comme la courbure de la courbe AMC est supposée très petite, nous pour-

nous regarder le triangle  $caM$  comme rectangle en  $a$ ; en nommant donc  $m$  l'angle  $acM$ , nous aurons

$$1 :: \text{tang. } m :: ca :: aM.$$

Mais l'angle  $m$  étant infiniment petit, à cause que les points  $M$  et  $c$  sont infiniment voisins, nous pourrions remplacer  $\text{tang. } m$  par l'arc  $m$ , et la proportion précédente deviendra

$$1 :: m :: ca :: aM \dots\dots (c).$$

Par les points  $M$  et  $c$ , menons les normales  $Me$ ,  $ce$ ; elles seront respectivement perpendiculaires aux tangentes  $Mh$ ,  $ca$ , et par conséquent les angles  $acM$ ,  $ceM$  seront égaux. Par le sommet  $e$  de l'angle  $ceM$ , décrivons l'arc  $fg$  avec un rayon égal à l'unité; nous aurons  $fg = m$ ; et comme  $Me$  est le rayon de courbure pour le point  $M$ , et que l'arc  $Mc$  de la courbe, étant infiniment petit, peut être regardé comme un arc de cercle, nous aurons

$$1 :: r :: m :: Mc.$$

Prenons le très petit arc  $Mc$  pour l'unité d'arc; la proportion précédente

deviendra  $1 :: r :: m :: 1$ ; d'où  $m = \frac{1}{r} \dots\dots (d)$ .

De plus, nous avons  $ca = AM - Ac - Ac = x - x'$ .

Si donc nous substituons cette valeur de  $ca$  et celle  $(d)$  de  $m$  dans la proportion  $(c)$ , il nous viendra

$$1 :: \frac{1}{r} :: x - x' :: aM = \frac{1}{r} (x - x') \dots\dots (e).$$

Pour le point  $c$ , de la courbe, la formule (328) donnerait

$$\frac{E}{r} = P (l - x'); \text{ d'où } \frac{1}{r} = \frac{P'}{E} (l - x');$$

Si donc nous substituons cette valeur de  $\frac{1}{r}$  dans l'équation  $(e)$  nous aurons

$$Ma = \frac{P}{E} (l - x') (x - x')$$

pour l'expression de l'élément  $Ma$  de  $PM = y$ .

L'élément suivant  $ab$  de cette ordonnée sera évidemment de la même forme, en remplaçant  $x'$  par  $x''$ ; ainsi nous aurons

$$ab = \frac{P}{E} (l - x'') (x - x'')$$

et il en serait de même pour les autres élémens de cette ordonnée. La somme de tous ces élémens sera égale à  $y$ ; ainsi nous aurons

$$y = \frac{P}{E} \left\{ (l-x') (x-x') + (l-x'') (x-x'') + (l-x''') (x-x''') \dots \right\} \dots (g).$$

On voit que  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ , etc., représentent les distances des points  $c$ ,  $d$ , etc., de la courbe, à l'axe AD des ordonnées, lesquelles distances vont en diminuant de grandeur, tandis que  $l$  et  $x$  restent constans, la première étant la longueur du prisme, et la seconde l'abscisse du point M de la courbe, dont  $y$ , que nous cherchons, est l'ordonnée.

Si donc nous supposons divisée en un très grand nombre de parties égales l'abscisse AP du point M, et que nous prenions l'une de ces parties très petites pour unité; les  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ , etc., représentant les distances des points de division à l'origine, à partir du point le plus voisin du point M, et allant vers l'origine A, seront des nombres décroissant continuellement d'une unité.

Si donc nous prenons ces abscisses dans l'ordre inverse à celui suivant lequel elles sont écrites, elles représenteront la suite naturelle des nombres depuis 1 jusqu'à  $n$ ,  $n$  étant le nombre des unités comprises dans l'abscisse AP; en substituant dans l'équation (g), nous aurons donc

$$y = \frac{P}{E} \left\{ (l-1) (x-1) + (l-2) (x-2) + (l-3) (x-3) \dots \dots \dots \right. \\ \left. + (l-n) (x-n) \right\} \dots \dots (h).$$

En effectuant les multiplications indiquées dans la grande parenthèse, nous aurons

$$\begin{aligned} (l-1) (x-1) &= lx - l - x + 1 \\ (l-2) (x-2) &= lx - 2l - 2x + 4 \\ (l-3) (x-3) &= lx - 3l - 3x + 9 \\ &\dots \dots \dots \\ (l-n) (x-n) &= lx - nl - nx + n^2. \end{aligned}$$

Le nombre de ces équations partielles sera égal à  $n$ , et si nous nommons M la somme des premiers membres, nous aurons

$$\begin{aligned} M &= nlx - l(1 + 2 + 3 \dots n) - x(1 + 2 + 3 \dots + n) \\ &\quad + (1 + 4 + 9 \dots + n^2) \dots (k) \end{aligned}$$

D'après la note de la page 50, les deux premières parenthèses du second membre de cette équation (k) auront pour limites  $\frac{n^2}{2}$ , et la dernière  $\frac{n^5}{5}$ , nous

aurons donc 
$$M = nlx - \frac{n^2l}{2} - \frac{n^2x}{2} + \frac{n^5}{3}.$$

Mettons cette valeur de M à la place de la grande parenthèse dans l'équation (h), et il nous viendra

$$\gamma = \frac{P}{E} \left\{ nlx - \frac{n^2l}{2} - \frac{n^2x}{2} + \frac{n^5}{3} \right\},$$

et enfin, si nous faisons  $n = AP = x$ , nous aurons

$$\gamma = \frac{P}{E} \left\{ \frac{lx^2}{2} - \frac{x^5}{6} \right\} \dots\dots (329)$$

pour l'équation de la courbe que prend la lame neutre AB par l'action du poids P. (\*)

654. Si dans cette équation (329) nous faisons  $x = l$ , en nommant  $f$  ce que devient  $\gamma$  dans cette hypothèse, nous aurons

$$f = \frac{Pl^5}{3E} \dots\dots (330),$$

(\*) Reprenons l'équation (328) qui est

$$P(l-x) = \frac{E}{r} \dots\dots (1)$$

L'expression générale du rayon de courbure étant

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y},$$

on aura 
$$P(l-x) = \frac{E dx d^2y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{E \frac{d^3y}{dx^3}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \dots\dots (2).$$

Comme nous supposons que la lame neutre prend une très petite courbure, nous pouvons admettre que  $\frac{dy^2}{dx^2} = 0$ , et alors l'équation (2) devient

$$P(l-x) = E \frac{d^3y}{dx^3}.$$

pour l'expression de l'abaissement BC de l'extrémité B du prisme, ou en d'autres termes, de la flèche de courbure de la lame neutre.

Cette formule (330) nous apprend que la flèche de courbure  $f$  est proportionnelle au poids  $P$  et au cube de la longueur du solide, et en raison inverse de la force d'élasticité  $E$ .

De la courbe que prend un prisme encastré horizontalement par un bout et chargé uniformément dans toute sa longueur.

655. Supposons que  $C$  soit la charge totale uniformément répartie sur toute la longueur du prisme, de manière que les éléments verticaux de cette charge puissent agir librement sur le solide. Cela posé, prenons la droite AB fig. 138 (forme primitive de la lame neutre) pour l'axe des abscisses, et le point A pour l'origine des coordonnées, nommons

$l$  la longueur AB du prisme,

$x$  l'abscisse AP et  $y$  l'ordonnée d'un point quelconque M de la courbe

AMC; nous aurons  $BP = l - x$ .

La charge répartie sur la portion BP de la longueur du solide, sera le quatrième terme de la proportion

$$l : l - x :: C : \frac{C(l-x)}{l} \dots\dots (a).$$

En intégrant une première fois, nous aurons

$$P \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) = E \frac{dy}{dx} \dots\dots (3).$$

Nous ne mettons point de constante, parce que quand  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$ . Intégrons cette équation (3), et il nous viendra

$$P \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) = Ey,$$

ou 
$$y = \frac{P}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots\dots (a)$$

pour l'équation demandée, comme dans le corps de l'ouvrage.

Le centre de gravité de cette charge sera le milieu de la longueur BP ; la distance de ce centre par rapport au point M sera donc  $\frac{l-x}{2}$ . Multiplions cette distance par la charge (a), et le produit

$$\frac{C (l-x)^2}{2l} \dots\dots (b),$$

sera le moment de cette charge (a) par rapport au point M.

Supposons que la courbe AMC qu'affecte le prisme soit arrivée à son maximum de courbure, il y aura équilibre dans tous les points de la longueur de cette courbe ; si donc on engage toute la partie AM d'une manière invincible, sans rien changer à la courbe, l'équilibre ne sera pas troublé, et on concevra alors que le moment (b) doit faire équilibre à la force d'élasticité qui se développe dans la section droite menée par le point M ; or (n° 653) cette force élastique est  $\frac{E}{r}$  ; nous aurons donc

$$\frac{E}{r} = \frac{C (l-x)^2}{2l} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{r} = \frac{C (l-x)^2}{2lE} \dots\dots (c).$$

En raisonnant comme nous l'avons fait au n° 653, nous trouverions que l'élément Ma de l'ordonnée MP = y est égale à

$$Ma = \frac{x-x'}{r},$$

et en mettant x' au lieu de x dans l'expression (c), et substituant ensuite cette valeur de  $\frac{1}{r}$  dans celle de Ma, il nous viendra

$$Ma = \frac{C (l-x')^2 (x-x')}{2lE}.$$

On trouverait de même que

$$ab = \frac{C (l-x'')^2 (x-x'')}{2lE},$$

et ainsi de suite pour les autres élémens de y ; en ajoutant tous ces élémens il nous viendra donc

$$y = \frac{C}{2lE} \left\{ (l-x')^2 (x-x') + (l-x'')^2 (x-x'') + (l-x''')^2 (x-x''') \text{ etc....} \right\}$$

et en faisant les mêmes observations sur les abscisses x', x'', x''', etc., qu'au



qui est l'équation de la courbe que prendrait un prisme encasté par un bout et chargé uniformément dans toute sa longueur (\*).

656. Il est clair que la charge uniforme C peut se composer du poids propre du prisme, ou de ce poids plus une surcharge uniforme. Ainsi, si Q est le poids du solide, et M la surcharge uniforme, nous aurons

$$C = Q + M.$$

Nous laisserons C dans l'équation (331), mais il faudra se rappeler sans cesse la remarque que nous faisons ici, pour composer cette quantité C d'une manière convenable à la circonstance dans laquelle on se trouvera dans la pratique.

657. Si dans l'équation (331) nous faisons  $x = l$ , en nommant  $f$  ce que devient  $y$  dans ce cas, nous aurons

$$f = \frac{Cl^3}{8E} \dots (332),$$

pour l'abaissement total BC de l'extrémité libre de la pièce, ou, en d'autres termes, pour la flèche de courbure du solide.

658. On voit par cette formule (332) que la flèche de courbure est pro-

(\*) Mettons pour  $r$  sa valeur générale dans l'équation (c) du n. 655, il nous viendra

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{C}{2IE} (l-x)^2 = \frac{C}{2IE} (l^2 - 2lx + x^2)$$

ou en supposant

$$\frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{C}{2IE} (l^2 - 2lx + x^2).$$

Si nous intégrons deux fois de suite sans mettre de constantes, par la raison que  $\frac{dy}{dx}$  et  $y$  deviennent nuls quand  $x = 0$ , nous aurons

$$y = \frac{2IE}{C} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right)$$

pour l'équation demandée, comme dans le corps de l'ouvrage.

portionnelle à la charge uniforme et au cube de la longueur du solide, et en raison inverse de la force élastique  $E$ , comme au n° 654.

659. La formule (332) peut se mettre sous la forme

$$f = \frac{3}{8} \frac{Cl^3}{3E}.$$

Mais dans le cas où l'on fait abstraction du poids du prisme, et qu'on suppose ce solide chargé d'un poids à son extrémité libre, nous avons trouvé

(n° 654) que 
$$f = \frac{Pl^3}{3E}.$$

La comparaison de ces deux résultats nous fait voir que *les  $\frac{3}{8}$  de la charge uniforme suspendue à l'extrémité libre du corps, produiront la même flèche de courbure que la charge totale uniformément distribuée dans toute la longueur du solide.*

De la courbe que prend un prisme encastré horizontalement par un bout, chargé uniformément dans toute sa longueur et d'un poids à son extrémité libre.

660. Nommons toujours  $C$  la charge uniforme, qui comprend aussi le poids du solide, et  $P$  le poids suspendu à l'extrémité libre.

Supposons que l'équilibre existe dans tous les points de la longueur du solide, et considérons le point  $M$  : d'après ce qui a été dit au n° 653, le moment du point  $P$  par rapport au point  $M$  sera

$$P(l - x) \dots\dots (a),$$

et d'après le n° 655, celui de la charge uniforme comprise entre le point  $M$  et le point  $B$ , par rapport au même point  $M$ , sera

$$\frac{C(l - x)^2}{2l} \dots\dots\dots (b).$$

La somme de ces deux moments doit évidemment faire équilibre à la force d'élasticité qui se développe dans la section droite au même point  $M$ , c'est-à-dire à  $\frac{E}{r}$ , de sorte que

$$\frac{E}{r} = P(l - x) + \frac{C(l - x)^2}{2l}, \text{ d'où } \frac{1}{r} = \frac{P(l - x)}{E} + \frac{C(l - x)^2}{2El} \dots\dots (c).$$

Les élémens de  $y$  seront encore, comme au n° 653, de la forme

$$d = \frac{1}{r} (x - x') \dots (d).$$

Par conséquent, en mettant  $x'$  au lieu de  $x$  dans l'équation (c), et substituant l'expression de  $\frac{1}{r}$  qui en résultera dans l'équation (d), il viendra

$$d = \frac{P(l-x)(x-x')}{E} + \frac{C(l-x)^2(x-x')}{2El};$$

d'où l'on voit que dans ce cas le premier élément de  $y$  est la somme des premiers élémens des  $y$  des n°s 653, 655; il est évident qu'il en sera de même pour les autres élémens consécutifs, de part et d'autre; par conséquent l'ordonnée  $y$  quelconque de la courbe actuelle sera la somme des seconds membres des équations (329), (331); de sorte que nous aurons

$$y = \frac{P}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) \dots (333).$$

661. Nous aurons l'abaissement total  $BC = f$ , en faisant  $x = l$  dans cette équation, et nous aurons

$$f = \frac{Pl^3}{3E} + \frac{Cl^3}{8E} = \frac{l^3}{24E} (8P + 3C) \dots (334).$$

662. *Proposons-nous, maintenant, de trouver l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle formé par l'axe AC des abscisses, et par la tangente MT (fig. 139), à la courbe élastique AMB, menée par le point M pris sur cette courbe.*

Prenons deux points  $M, M'$  sur la courbe  $AMB$ , et par ces deux points menons la sécante  $MS$ ; par le point  $M'$  menons la droite  $M'N$  parallèle à l'axe  $AC$  des abscisses, et menons les ordonnées  $MP, M'P'$ . Représentons par  $x$  et  $y$  les coordonnées du point  $M$ , et par  $x', y'$  celles du point  $M'$ ; nommons  $m$  l'angle  $NM'M$ : le triangle rectangle  $NM'M$  donnera

$$1 : \text{tang. } m :: M'N : NM \text{ ou } 1 : \text{tang. } m :: x - x' : y - y',$$

$$\text{d'où } y - y' = (x - x') \text{ tang. } m \dots (a).$$

L'équation (333) donnera

$$y = \frac{P}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right)$$

pour le point M, et pour le point M'

$$y' = \frac{P}{E} \left( \frac{lx'^2}{2} - \frac{x'^3}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x'^2}{2} - \frac{lx'^3}{3} + \frac{x'^4}{12} \right)$$

en retranchant ces équations membre à membre, il viendra

$$y - y' = \frac{P}{E} \left\{ \frac{l}{2} (x^2 - x'^2) - \frac{1}{6} (x^3 - x'^3) \right\} \\ + \frac{C}{2lE} \left\{ \frac{l^2}{2} (x^2 - x'^2) - \frac{l}{3} (x^3 - x'^3) + \frac{1}{12} (x^4 - x'^4) \right\}$$

Mettons pour  $y - y'$  sa valeur (a); et divisons par  $x - x'$ ; nous aurons

$$\text{tang. } m = \frac{P}{E} \left\{ \frac{l}{2} (x + x') - \frac{1}{6} (x^2 + xx' + x'^2) \right\} \\ + \frac{C}{2lE} \left\{ \frac{l^2}{2} (x + x') - \frac{l}{3} (x^2 + xx' + x'^2) + \frac{1}{12} (x^3 + x^2x' + xx'^2 + x'^3) \right\}$$

Si maintenant nous supposons que le point M' s'approche de plus en plus du point M, la sécante SM s'approchera aussi de la tangente MT, et aussitôt que le point M' coïncidera avec le point M, la sécante SM deviendra la tangente MT. Mais alors  $x' = x$ , et l'équation précédente se réduira à

$$\text{tang. } m = \frac{P}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) \dots\dots (335),$$

et sera l'expression générale de la tangente en question.

663. Si dans cette équation nous supposons  $P = 0$ , il nous viendra

$$\text{tang. } m = \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) \dots\dots (336),$$

pour la tangente trigonométrique de l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des abscisses, dans le cas d'une charge uniforme.

## LEÇON V.

Problème sur les prismes encastres horizontalement par un bout, et chargés uniformément dans toute leur longueur, et d'un poids suspendu à leur extrémité libre.

664. Il faut ici se rappeler que la force élastique  $E$  a pour expression l'une de celles données depuis le n° 591 jusqu'au n° 619, et que la grandeur qui lui conviendrait pour faire prendre à la lame neutre une courbure dont le rayon serait l'unité, dépendra, en conséquence, de la tension que nous avons représentée par  $t$  dans les mêmes articles.

Cela posé, livrons-nous à quelques problèmes utiles.

665. Cherchons d'abord la flèche de courbure d'un prisme à base rectangulaire.

Pour cela, mettons pour  $E$  sa valeur (305) qui est  $E = \frac{tab^3}{12}$  dans la formule (334), et nous aurons

$$f = \frac{12l^3}{24tab^3} (8P + 3C) = \frac{l^3}{2tab^3} (8P + 3C) \dots (337).$$

pour la flèche de courbure du solide, dans le cas où il est chargé, d'un poids  $P$  à son extrémité libre, de son propre poids, et d'une surcharge uniforme dans toute sa longueur.

666. On demande quelle devrait être la largeur  $a$  d'un prisme à base rectangulaire, d'une épaisseur et d'une longueur données, pour que ce solide ne prit qu'une flèche de courbure donnée, par l'action 1° du poids propre du corps, 2° d'une charge uniforme, et 3° d'un poids suspendu à l'extrémité libre du solide.

Pour cela, décomposons la charge uniforme  $C$  de la formule (337) en deux parties; l'une égale au poids propre du prisme, et l'autre égal à la surcharge uniforme, que nous représenterons par  $M$ . Le poids propre du solide sera égal à son volume multiplié par sa densité; ainsi ce poids =  $abld$ ,  $d$  étant la densité; nous aurons donc

$$C = abld + M;$$

en substituant dans la formule (337) il nous viendra

$$f = \frac{l^3}{2tab^3} \left\{ 8P + 3(abld + M) \right\} \dots (338),$$

d'où nous lirons

$$a = \frac{l^3 (8P + 3M)}{2tb^3f - 5bt^4d} \dots (339),$$

qui sera l'expression de la largeur demandée.

667. D'après les mêmes conditions qu'au numéro précédent,  $a$  étant donné, trouver l'épaisseur  $b$ .

Pour cela, ordonnons l'équation (338) par rapport aux puissances ascendantes de  $b$ , et il nous viendra

$$b^3 - \frac{3t^4d}{2tf} b = \frac{l^3 (8P + 3M)}{2taf} \dots (340),$$

d'où l'on voit que pour avoir  $b$  il faudrait résoudre une équation du troisième degré.

668. Après avoir calculé les coefficients constans qui entrent dans cette équation du troisième degré, on pourra avoir la valeur de  $b$  par deux ou trois tâtonnemens, en substituant une première valeur de cette quantité que les circonstances accessoires de la question permettront d'évaluer à peu près, et qu'on modifiera jusqu'à ce que le premier membre devienne à peu près égal au second. Je dis ceci pour les personnes qui n'auraient pas une habitude suffisante de la théorie générale des équations.

669. La question serait plus simple, si le prisme était à base carrée, car alors  $b = a$ , et l'équation (338) se réduirait à

$$f = \frac{l^3}{2ta^4} \left\{ 8P + 3 (a^2ld + M) \right\}$$

et on en tirerait

$$a^4 - \frac{3t^4d}{2tf} a^2 = \frac{l^3 (8P + 3M)}{2tf},$$

équation du quatrième degré qui peut se résoudre à la manière de celles du second (alg. n° 205), et qui donnera

$$a = \sqrt{\frac{3t^4d}{4tf} + \sqrt{\left(\frac{3t^4d}{4tf}\right)^2 + \frac{l^3(8P+3M)}{2tf}}} \dots (310).$$

Telle sera la valeur du côté d'un prisme à base carrée, pour que ce prisme remplisse les conditions du n° 666.

670. Pour avoir la flèche de courbure que prendrait un tuyau carré encastré par un bout, chargé de son propre poids, d'une charge uniforme et d'un

poids suspendu en un point quelconque de sa longueur, il suffira de mettre pour E sa valeur (307) dans l'équation (334), et on aura

$$f = \frac{P^{\beta}}{2t(a^4 - a'^4)} (8P + 3C) \dots\dots (342).$$

671. Le poids du tuyau sera  $(a^2 - a'^2)ld$ ; nous aurons donc (n° 656)

$$C = (a^2 - a'^2)ld + M;$$

substituons cette valeur de C dans l'équation précédente, et il nous viendra

$$f = \frac{P^{\beta}}{2t(a^4 - a'^4)} (8P + 3ld(a^2 - a'^2) + 3M) \dots\dots (343).$$

672. On donne le poids P, la charge uniforme M, le diamètre intérieur  $a'$  et la flèche de courbure, et on demande le diamètre extérieur  $a$  du tuyau.

Pour cela, il faudra ordonner l'équation précédente par rapport aux puissances de  $a$ , ce qui donnera

$$a^4 - \frac{5l^4d}{2tf} a^2 = \frac{a^2(2tfa'^2 - 3l^4d) + 8P^{\beta} + 3M^{\beta}}{2tf},$$

équation qui, étant résolue, donnera

$$a = \sqrt{\frac{3l^4d}{4tf} + \sqrt{\left(\frac{3l^4d}{4tf}\right)^2 + \frac{a'^2(2tfa'^2 - 3l^4d) + 8P^{\beta} + 3M^{\beta}}{2tf}}} \dots(344)$$

pour la quantité cherchée.

Si on demandait le diamètre intérieur  $a'$ , on trouverait

$$a' = \sqrt{\frac{3l^4d}{4tf} + \sqrt{\left(\frac{3l^4d}{4tf}\right)^2 + \frac{a^2(2tfa^2 - 3l^4d) - \beta(8P + 3M)}{2tf}}} \dots (345).$$

673. On demande la flèche de courbure que prendraient deux prismes encastrés et disposés comme il a été dit au n° 608, ce système étant chargé de son propre poids; d'une charge uniforme et d'un poids suspendu à son extrémité libre.

Pour cela, il suffira de mettre la valeur (308) de E dans l'équation (334), et on aura

$$f = \frac{P^{\beta}}{2at(b^{\beta} - b'^{\beta})} (8P + 3C) \dots\dots\dots (a).$$

Mais le poids des deux prismes est  $adl(b - b')$ , ce qui donnera

$$C = adl(b - b') + M;$$

en substituant cette valeur de C dans l'équation (a), il nous viendra

$$f = \frac{\beta}{2at (b^3 - b'^3)} [ 8P + 3adl (b - b') + 3M ] \dots\dots (346).$$

674. De cette formule nous tirerons

$$a = \frac{\beta (8P + 3M)}{2tf (b^3 - b'^3) - 3dl^2 (b - b')} \dots\dots (347).$$

*Telle sera la largeur des deux prismes, pour que leur système ne prenne qu'une flèche donnée, étant soumis à son propre poids, à une charge uniforme et à un poids suspendu à son extrémité libre.*

675. *Supposons toujours un système de deux prismes comme le précédent, les bases de ces deux prismes étant égales, et demandons-nous de combien il faudra les écarter l'un de l'autre, pour qu'étant chargés de leur propre poids, d'une charge uniforme et d'un poids suspendu à l'extrémité libre du système, la flèche de courbure soit une quantité donnée.*

Rappelons-nous que  $b$  est la hauteur totale du système; et  $b'$  la hauteur du vide entre deux; de sorte que si  $h$  est la hauteur d'une des deux bases, nous aurons

$$b = 2h + b',$$

et par conséquent

$$b^3 = 8h^3 + 12h^2b' + 6hb'^2 + b'^3,$$

d'où nous concluons que

$$b^3 - b'^3 = 8h^3 + 12h^2b' + 6hb'^2, \text{ et } b - b' = 2h \dots (a).$$

L'équation (346) donnera

$$2atf (b^3 - b'^3) = 8Pl^3 + 3adl^2 (b - b') + 3Ml^3;$$

substituons les expressions (a) dans cette dernière équation, et il nous viendra

$$2atf (8h^3 + 12h^2b' + 6hb'^2) = 8Pl^3 + 6adl^2h + 3Ml^3;$$

d'où nous tirerons

$$b' = -h + \sqrt{h^2 + \frac{8Pl^3 + 6adl^2h + 3Ml^3 - 16atfh^3}{12atfh}} \dots\dots (348).$$

676. *Supposons encore le même système de deux prismes que ci-dessus, que la hauteur du vide entre deux et la largeur des deux prismes soient données, et demandons-nous la hauteur totale  $b$  du système, pour que ce dernier ne prenne qu'une flèche de courbure donnée, étant soumis à son propre poids, à une charge uniforme et à un poids suspendu à son extrémité libre.*

Pour cela, il suffira d'ordonner l'équation (346) par rapport aux puissances de  $b$ , ce qui donnera

$$b^3 - \frac{3dl^4}{2lf} b = \frac{8P^3 + 3M^3 - 3adl^4b' + 2atfb^3}{2atf} \dots\dots (349).$$

Après avoir calculé les coefficients constans de cette équation du troisième degré, on la résoudra d'après la méthode connue, ou par tâtonnemens comme il a été dit au n° 668.

677. *Proposons-nous, maintenant, de trouver la flèche de courbure que prendrait un cylindre circulaire encastré par un bout, chargé de son propre poids, d'une charge uniforme et d'un poids suspendu à son extrémité libre.*

Pour y parvenir, mettons la valeur (311) de  $E$  dans la formule (334), et il

nous viendra 
$$f = \frac{l^3}{6tpr^4} (8P + 3C) \dots\dots (350),$$

pour la flèche demandée,  $C$  étant la somme du poids propre du solide et d'une surcharge uniforme.

678. Le poids du cylindre est  $pr^2ld$ ; nous aurons donc

$$C = pr^2ld + M;$$

en substituant dans l'équation (350) ci-dessus, il nous viendra

$$f = \frac{l}{6tpr^4} (8Pl^3 + 3pr^2ld + 3Ml^3),$$

d'où nous tirerons 
$$r^4 - \frac{l^4d}{2lf} r^2 = \frac{8Pl^3 + 3Ml^3}{6tpf},$$

équation du quatrième degré, qui, étant résolue à la manière de celle du second, donnera

$$r = \sqrt{\frac{l^4d}{4lf}} + \sqrt{\left(\frac{l^4d}{4lf}\right)^2 + \frac{8Pl^3 + 3Ml^3}{6tpf}} \dots\dots (351),$$

*pour le rayon que devrait avoir la base du cylindre, pour que, sous son propre poids, une charge uniforme et un poids suspendu à son extrémité libre, ce solide ne prit qu'une flèche donnée.*

679. *Cherchons la flèche de courbure que prendrait un tuyau cylindrique, chargé comme les solides précédens.*

Pour cela, mettons la valeur (312) de E dans la formule (334), ce qui nous donnera

$$f = \frac{1}{6tp(r^4 - r'^4)} (8Pl^3 + 3Cl^3) \dots (352),$$

pour la flèche demandée, C étant la somme du poids propre du tuyau et de sa surcharge uniforme.

680. Le poids du tuyau est  $pld(r^2 - r'^2)$ ; ce qui nous donnera

$$C = pld(r^2 - r'^2) + M;$$

si nous substituons dans l'équation (352) ci-dessus, il nous viendra

$$f = \frac{1}{6tp(r^4 - r'^4)} (8Pl^3 + 3pl^4d(r^2 - r'^2) + 3Ml^3).$$

De cette équation nous tirerons

$$6tpfr^4 - 6tpfr'^4 = 8Pl^3 + 3Ml^3 + 3pl^4dr^2 - 3pl^4dr'^2 \dots (353).$$

681. *Tout étant connu d'ailleurs, demandons-nous le rayon extérieur du tuyau.*

Pour résoudre cette question, il suffira de résoudre l'équation (353) ci-dessus, par rapport à  $r$ , et on aura

$$r = \sqrt{\frac{l^4d}{4tf} + \sqrt{\left(\frac{l^4d}{4tf}\right)^2 + \frac{8Pl^3 + 3Ml^3 + 6tpfr'^4 - 3pl^4dr'^2}{6tpf}}} \dots (354).$$

pour le rayon demandé.

682. *Tout étant connu d'ailleurs, demandons-nous le rayon intérieur du tuyau.*

Pour y parvenir, il suffira de résoudre l'équation (354) ci-dessus par rapport à  $r'$ , ce qui donnera

$$r' = \sqrt{\frac{l^4d}{4tf} + \sqrt{\left(\frac{l^4d}{4tf}\right)^2 + \frac{6tpfr^4 - 3pl^4dr^2 - (8Pl^3 + 3Ml^3)}{6tpf}}} \dots (355).$$

pour le rayon demandé.

683. Dans toutes les formules de cette leçon, on fera  $P = 0$ , quand il n'y aura pas de poids suspendu;  $M = 0$ , quand il n'y aura pas de charge uniforme, et on fera ces deux suppositions à la fois, lorsqu'il n'y aura que le propre poids du solide. Cette remarque nous dispensera de traiter ces cas particuliers séparément.

## LEÇON VI.

De la courbe que prend un prisme encastré par un bout, et chargé dans sa longueur de poids dont les grandeurs sont en progression arithmétique croissante, dont le terme infiniment petit serait à l'extrémité isolée du solide.

684. Supposons que  $Q$  soit la somme de tous les poids répartis sur la longueur entière du prisme. Cela posé, les élémens de la charge  $Q$  étant en progression par différence, il est clair que ces élémens peuvent être représentés par ceux du triangle  $ABC$  (fig. 140), parallèles au côté  $AC$ , car si l'on divise la base  $AB$  en parties égales, et que par les points de division on élève des perpendiculaires à  $AB$ , à partir du point  $B$ , ces perpendiculaires iront en augmentant par degrés égaux. Quand le prisme aura fléchi sous la charge  $Q$ , le triangle  $ABC$  prendra la forme curviligne  $ADC$  sans changer de superficie, et sans que ses élémens verticaux aient changé de grandeur et de distance par rapport au plan d'encastrement  $AC$ ; par conséquent rien ne sera changé pour la charge du solide, et nous pourrions toujours la considérer comme étant le triangle rectiligne  $ABC$ , malgré la courbure du prisme, et d'autant plus que nous supposons toujours cette courbure très-petite.

Supposons actuellement que par un point  $M$  quelconque de la courbe  $AMD$ , on ait élevé la verticale  $MN$ ; sans troubler l'équilibre, on peut regarder la lame neutre comme parfaitement rigide, excepté au point  $M$ ; la charge qui fera courber le prisme au point  $M$ , sera la portion du poids représentée par le triangle  $BNP$ , semblable au triangle  $ABC$ , qui est proportionnel au poids  $Q$ . Mais les superficies des triangles semblables sont comme les carrés des côtés homologues; or, les côtés homologues de ces triangles sont  $AB = l$  et  $BP = AB - AP = l - x$ , on aura donc

$$l^2 : (l - x)^2 :: Q : BPN = \frac{Q(l - x)^2}{l^2}.$$

Observons présentement que la verticale abaissée du centre de gravité du triangle  $BNP$  passe à une distance du point  $M$ , égale à  $\frac{l - x}{3}$ ; le moment du poids qui fait courber la lame neutre autour du point  $M$  sera donc

$$\frac{Q(l - x)^3}{9}.$$

et comme ce moment doit faire équilibre à la force d'élasticité en ce point M, laquelle est encore ici  $\frac{E}{r}$ , on aura l'équation

$$\frac{E}{r} = \frac{Q (l-x)^3}{3l^2} \text{ d'où } \frac{x}{r} = \frac{Q (l-x)^3}{3El^2} \dots (a).$$

Les éléments de l'ordonnée y auront encore pour expression générale (n° 653)

$$d = \frac{x}{r} (x - x'),$$

qui, combinée avec la formule (a) ci-dessus, après avoir mis  $x'$  au lieu de  $x$  dans cette dernière, donne  $d = \frac{Q (l-x')^3}{3El^2} (x - x')$ ; les autres éléments de l'ordonnée y seront de la même forme, et leur somme sera par conséquent

$$y = \frac{Q}{3l^2 E} \left\{ (l-x')^3 (x-x') + (l-x'')^3 (x-x'') + (l-x''')^3 (x-x''') + \dots \right\}$$

ou en prenant les termes de la parenthèse dans l'ordre inverse, et en faisant sur les abscisses  $x', x'', x'''$ ... la même observation qu'au n° 653, il viendra

$$y = \frac{Q}{3l^2 E} \left\{ (l-1)^3 (x-1) + (l-3)^3 (x-2) + (l-5)^3 (x-3) + \dots + (l-n)^3 (x-n) \right\}$$

en développant les termes de la parenthèse, on aura

$$\begin{aligned} (l-1)^3 (x-1) &= l^3 x - 3l^2 x + 3lx - x - l^3 + 3l^2 - 3l + 1 \\ (l-2)^3 (x-2) &= l^3 x - 6l^2 x + 12lx - 8x - 2l^3 + 12l^2 - 24l + 16 \\ (l-3)^3 (x-3) &= l^3 x - 9l^2 x + 27lx - 27x - 3l^3 + 27l^2 - 81l + 81 \\ &\dots \dots \dots \\ (l-n)^3 (x-n) &= l^3 x - 3nl^2 x + 3n^2 lx - n^3 x - nl^3 + 3n^2 l^2 - 3n^3 l + n^4. \end{aligned}$$

Soit M la somme des premiers membres de ces équations, comme il y en a autant que d'unités dans  $n$ , il en résultera

$$\begin{aligned} M = \left\{ nl^2 x - 3l^2 x (1+2+3+\dots+n) + 3lx (1+4+9+\dots+n^2) - \right. \\ \left. x (1+8+27+\dots+n^3) - l^3 (1+2+3+\dots+n) + 3l^2 (1+4+9+\dots+n^2) - \right. \\ \left. 3l (1+8+27+\dots+n^3) + (1+16+81+\dots+n^4) \right\} \end{aligned}$$

En prenant les limites (note page 50) des parenthèses du second membre de cette équation, et les substituant dans la valeur de M, il viendra

$$M = nl^3x - \frac{3l^2xn^2}{2} + ln^3x - \frac{xn^4}{4} - \frac{l^2n^2}{2} + l^2n^3 - \frac{3ln^4}{4} + \frac{n^5}{5}.$$

La valeur de M étant celle de la parenthèse de l'expression de  $\gamma$ , en substituant cette valeur de M dans celle de  $\gamma$ , on aura

$$\gamma = \frac{Q}{4l^2E} \left\{ nl^3x - \frac{3l^2xn^2}{2} + ln^3x - \frac{xn^4}{4} - \frac{l^2n^2}{2} + l^2n^3 - \frac{3ln^4}{4} + \frac{n^5}{5} \right\}$$

ainsi en faisant  $n = x$ , il viendra

$$\gamma = \frac{Q}{3l^2E} \left\{ l^3x^2 - \frac{3l^2x^3}{2} + lx^4 - \frac{x^5}{4} - \frac{l^2x^2}{2} + l^2x^3 - \frac{3lx^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right\}$$

et enfin 
$$\gamma = \frac{Q}{3l^2E} \left\{ \frac{l^5x^2}{2} - \frac{l^2x^3}{2} + \frac{lx^4}{4} - \frac{x^5}{20} \right\} \dots (356)$$

pour l'équation de la courbe en question.

685. Si dans cette équation on fait  $x = l$ , on aura pour la flèche de la courbe

$$f = \frac{Q}{3l^2E} \left\{ \frac{l^5}{2} - \frac{l^5}{2} + \frac{l^5}{4} - \frac{l^5}{20} \right\} \\ = \frac{Q}{3l^2E} \left( \frac{4l^5}{20} \right) = \frac{Ql^5}{15E} \dots (357).$$

De la courbe que prend un prisme encasté par un bout et chargé dans toute sa longueur de poids dont les grandeurs sont en progression arithmétique décroissante, en partant de l'extrémité isolée et se terminant à la base d'encastrement, où le dernier terme de la progression est zéro.

686. Supposons que Q soit la somme de tous les poids répartis sur la longueur du solide comme il vient d'être dit ; les élémens de la charge Q pourront évidemment être représentés par ceux du triangle ABC (fig. 141), parallèles à AD ou BC, dont le sommet est au point A d'encastrement.

Cela posé, par un point M quelconque de la lame neutre AB, élevons la verticale MN ; si nous supposons toujours la lame rigide partout, excepté au point M, après qu'elle aura pris la courbure qui lui convient sous la charge Q ; ce qui fera courber la lame en ce point M, sera la portion du poids Q représentée par le trapèze NMCB. Mais ce trapèze est la différence entre les triangles semblables ABC, AMN, qui sont entre eux comme les carrés des côtés homologues AB et AM ou  $l$  et  $x$  ; on aura donc

$$l^2 : x^2 :: Q : AMN = \frac{Qx^2}{l^2}.$$

Le trapèze MBCN sera donc

$$MBCN = Q - \frac{Qx^2}{l^2} = \frac{Q(l^2 - x^2)}{l^2} \dots\dots (a).$$

La verticale abaissée du centre de gravité du trapèze MBCN passe à une distance du point M (n° 111)

$$= \frac{BM}{3} \times \frac{2BC + MN}{BC + MN} \dots\dots (b).$$

Le poids Q étant représenté par l'aire du triangle ABC, nous aurons

$$Q = \frac{l}{2} \times BC,$$

ce qui donnera  $BC = \frac{2Q}{l}.$

Les triangles semblables ABC, AMN donneront

$$AB : AM :: BC : MN$$

ou  $l : x :: \frac{2Q}{l} : MN = \frac{2Qx}{l^2}.$

Substituant les valeurs de BC et de MN, que nous venons de trouver, dans la formule (b), et observant que  $BM = l - x$ , il nous viendra

$$\begin{aligned} \frac{l-x}{3} \times \frac{\frac{4Q}{l} + \frac{2Qx}{l^2}}{\frac{2Q}{l} + \frac{2Qx}{l^2}} &= \frac{l-x}{3} \times \frac{4lQ + 2Qx}{2lQ + 2Qx} = \frac{l-x}{3} \times \frac{2l+x}{l+x} \\ &= \frac{(l-x)(2l+x)}{3(l+x)}. \end{aligned}$$

Si nous multiplions cette dernière expression par la formule (a), nous aurons

$$\frac{Q(l^2 - x^2)(l-x)(2l+x)}{3l^2(l+x)} = \frac{Q(l-x)^2(2l+x)}{3l^2},$$

pour le moment qui doit faire équilibre au moment d'élasticité  $\frac{E}{r}$  de la section droite du prisme au point M. Nous aurions donc

$$\frac{E}{r} = \frac{Q(l-x)^2(2l+x)}{3l^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r} = \frac{Q(l-x)^2(2l+x)}{3El^2} \dots\dots (c).$$

Les éléments d'une ordonnée  $y$  quelconque de la courbe que prend le solide, auront encore pour expression générale

$$d = \frac{1}{r}(x - x'), \quad \text{ou} \quad d = \frac{Q}{3El^2}(l - x')^2(2l + x')(x - x')$$

et en raisonnant comme pour les cas précédens

$$y = \frac{Q}{3l^2E} \left\{ (l-x')^2 (2l+x') (x-x') + (l-x'')^2 (2l+x'') (x-x'') + (l-x''')^2 (2l+x''') (x-x''') \dots \right\}$$

ou encore (n° 653)

$$y = \left\{ (l-1)^2 (2l+1) (x-1) + (l-2)^2 (2l+2) (x-2) + (l-3)^2 (2l+3) (x-3) \dots (l-n)^2 (2l+n) (x-n) \right\}$$

et en développant les termes de la parenthèse comme à l'ordinaire ,

$$(l-1)^2 (2l+1) (x-1) = 2l^3x - 3l^2x + x - 2l^3 + 3l^2 - 1$$

$$(l-2)^2 (2l+2) (x-2) = 2l^3x - 6l^2x + 8x - 4l^3 + 12l^2 - 16$$

$$(l-3)^2 (2l+3) (x-3) = 2l^3x - 9l^2x + 27x - 6l^3 + 27l^2 - 81$$

.....

$$(l-n)^2 (2l+n) (x-n) = 2l^3x - 3nl^2x + n^3x - 2nl^3 + 3n^2l^2 - n^4.$$

Si M est la somme des premiers membres de ces équations, comme il y en a autant que d'unités dans n, on aura

$$M = 2nl^3x - 3l^2x(1+2+3\dots+n) + x(1+8+27\dots+n^3) - 2l^3(1+2+3\dots+n) + 3l^2(1+4+9\dots+n^2) - (1+16+81\dots+n^4).$$

En prenant les limites des parenthèses de cette dernière expression (note page 50), il en résultera

$$M = 2nl^3x - \frac{3l^2xn^2}{2} + \frac{n^4x}{4} - l^3n^2 + l^2n^3 - \frac{n^5}{5}.$$

En substituant cette valeur de M dans la dernière expression de y, il viendra

$$y = \frac{Q}{3l^2E} \left\{ 2nl^3x - \frac{3l^2n^2x}{2} + \frac{n^4x}{4} - l^3n^2 + l^2n^3 - \frac{n^5}{5} \right\},$$

et en faisant n = x, et réduisant,

$$y = \frac{Q}{3l^2E} \left( l^3x^2 - \frac{l^2x^3}{2} + \frac{x^5}{20} \right) \dots (358)$$

pour l'équation de la courbe demandée.

687. Si dans cette équation nous faisons x = l, il nous viendra pour la flèche de courbure

$$f = \frac{Q}{3l^2E} \left( l^5 - \frac{l^6}{2} + \frac{l^5}{20} \right) = \frac{11Ql^5}{60E} \dots (359).$$

De la courbe que prend un prisme encastré horizontalement par un bout, et chargé dans toute sa longueur, de poids en progression décroissante par différences égales, en partant de l'extrémité isolée et allant vers le bout encastré, le dernier terme de la progression étant quelconque.

688. Les élémens des poids pourront être représentés par ceux d'un trapèze ABCD (fig. 142); de sorte que ce trapèze représentera la somme de tous les poids élémentaires.

Cela posé, par le point C, menons la droite CE parallèle à AB; le trapèze ABCD sera partagé en deux parties, dont une sera le rectangle ABCE, et l'autre le triangle ECD. Nommons C la somme des poids uniformes représentés par le rectangle ABDE, et Q celle des poids représentés par le triangle ECD.

Actuellement, supposons que le prisme ne soit chargé que de la somme C des poids uniformes représentés par le rectangle ABCE, d'après le n° 655, le moment de la partie de cette charge qui agit sur le point M sera

$$\frac{C (l-x)^2}{4l^2},$$

d'un autre côté, si le prisme n'était chargé que de la somme Q des poids représentés par le triangle ECD, d'après le n° 684, le moment de la partie de cette charge qui agit sur ce point M serait

$$\frac{Q (l-x)^3}{3l^2}.$$

La somme de ces deux momens est évidemment celui qui produit la flexion du solide au même point M, et doit, par conséquent, faire équilibre au moment de résistance  $\frac{E}{r}$ : on aura donc

$$\frac{E}{r} = \frac{C (l-x)^2}{2l} + \frac{Q (l-x)^3}{3l^2},$$

ou 
$$\frac{1}{r} = \frac{C}{2lE} (l-x)^2 + \frac{Q}{3l^2E} (l-x)^3 \dots (a).$$

Les élémens de  $y$  seront encore de la forme

$$d = \frac{1}{r} (x-x') \dots (b),$$

et par conséquent, en mettant  $x'$  pour  $x$  dans la formule (a), et substituant la valeur de  $\frac{1}{r}$  dans (b), il viendra

$$d = \frac{C}{2lE} (l-x')^2 (L-x') + \frac{Q}{3l^2E} (l-x')^3 (x-x'),$$

d'où l'on voit que l'élément de  $y$ , dans ce cas, est la somme des élémens de cette ordonnée des cas des n<sup>os</sup> 655 et 684; et par conséquent notre  $y$  actuel sera la somme des seconds membres des formules (331) et (356): on aura donc

$$y = \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^5}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + \frac{Q}{3l^2E} \left( \frac{l^3x^2}{2} - \frac{l^2x^5}{2} + \frac{lx^4}{4} - \frac{x^5}{20} \right) \dots (360).$$

689. Il suit de la forme de l'équation (360), que la flèche de courbure est dans ce cas la somme des flèches données par les formules (332), (357) qui sont  $f = \frac{Cl^3}{8E}$  et  $f = \frac{Ql^3}{15E}$ ; ainsi on aura

$$f = \frac{Cl^3}{8E} + \frac{Ql^3}{15E} = \frac{l^3}{E} \left( \frac{C}{8} + \frac{Q}{15} \right) \dots (361).$$

On arriverait au même résultat en faisant  $x = l$  dans la formule (360).

De la courbe que prend un prisme encastré horizontalement par un bout, et chargé dans toute sa longueur de poids en progression croissante, en partant de l'extrémité isolée, et allant vers l'encastrement, le premier terme de la progression étant quelconque,

690. Il est clair qu'en raisonnant comme dans le cas précédent, on verra que la charge du solide peut ici être représentée par le trapèze ABCD (fig. 143), et que l'équation de la courbe aura pour second membre la somme des seconds membres des équations (331) et (358); de sorte qu'on aura

$$y = \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^5}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + \frac{Q}{3l^2E} \left( l^3x^2 - \frac{l^2x^5}{2} + \frac{x^5}{20} \right) \dots (362).$$

691. L'expression de la flèche de courbure sera de même la somme des flèches (332) et (359); ainsi il s'ensuivra que

$$f = \frac{Cl^3}{8E} + \frac{11Ql^3}{60E} = \frac{l^3}{E} \left( \frac{C}{8} + \frac{11Q}{60} \right) \dots (363).$$

692. L'expression générale de la tangente trigonométrique de l'angle de la tangente à la courbe par rapport à l'horizon (fig. 142), s'obtiendra en opérant sur l'équation (360), comme il a été dit au n<sup>o</sup> 662, et on aura

$$\text{tang. } m = \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^5}{3} \right) + \frac{Q}{3l^2E} \left( l^3x - \frac{3l^2x^2}{2} + lx^3 - \frac{x^4}{4} \right) \dots (364).$$

693. Enfin, en opérant de même sur l'équation (362), il viendra, pour l'expression de la même tang.  $m$ , pour le cas de la fig. 143

$$\text{tang. } m = \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^5}{3} \right) + \frac{Q}{3l^2E} \left( 2l^2x - \frac{3l^2x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \dots (365).$$

## LEÇON VII.

De la forme qu'il faut donner à un solide encastré horizontalement par un bout et chargé uniformément dans toute sa longueur, et d'un poids suspendu à son extrémité libre, pour que la courbe qu'affectera la lame neutre soit un arc de cercle, ou, ce qui revient au même, le rayon de courbure soit constant, le solide étant sans pesanteur.

694. L'équation (c) du n° 660, qui est

$$P(l-x) + \frac{C(l-x)^2}{2l} = \frac{E}{r} \dots\dots (a)$$

nous apprend que  $E$  doit varier en même temps que  $x$ , de manière que  $E$  diminue quand  $x$  augmente, et réciproquement, attendu qu'ici  $r$  est constant. Ainsi la force d'élasticité qui se développe dans les différents points de la longueur du solide, doit aller en diminuant depuis la base d'encastrement jusqu'à l'extrémité libre où elle doit être nulle, puisque pour ce point,  $x$  étant égal à  $l$ , le premier membre de l'équation (a) ci-dessus se réduit à zéro.

695. Supposons que la base d'encastrement du solide soit un rectangle ;

dans ce cas n° (600) 
$$E = \frac{tab^3}{12} \dots\dots (b),$$

$a$  étant la largeur et  $b$  la hauteur de cette base. Mais pour que  $E$  ait cette valeur (b), il faut que  $x = 0$ ; en substituant ces valeurs de  $x$  et de  $E$  dans l'équation (a) ci-dessus, il nous viendra

$$Pl + \frac{Cl}{2} = \frac{tab^3}{12r},$$

d'où 
$$r = \frac{tab^3}{6l(2P + C)} \dots\dots (366)$$

sera le rayon de l'arc de cercle suivant lequel la lame neutre se courbera par l'action de la charge, la base d'encastrement étant un rectangle.

696. L'équation (b) ci-dessus nous fait voir que pour que  $E$  varie, il faut faire varier  $a$  ou  $b$ , ou tous les deux à la fois, attendu que  $t$  est une constante, puisque c'est la résistance à la tension pour l'unité de base (n° 600). Supposons en premier lieu que  $a$  seul soit variable, et pour indiquer la variabilité de cette quantité, représentons-la par  $z$ , nous aurons

$$E = \frac{tb^3}{12} z;$$

substituons cette valeur de  $E$  dans l'équation (a), et il nous viendra

$$2lP(l-x) + C(l-x)^2 = \frac{lb^3}{6r} z \dots \dots (c),$$

en faisant disparaître le dénominateur  $2l$ .

Cette équation deviendra

$$2lP(l-x) + C(l-x)^2 = \frac{l^2(2P+C)}{a} z \dots \dots (367).$$

en y mettant pour  $r$  sa valeur (366).

Cette équation est celle d'une parabole.

697. Supposons que la droite  $AB$  (fig. 144) soit la projection horizontale d'une face latérale du solide, cette face latérale restant plane et verticale; et prenons cette droite pour l'axe des  $x$ ; si la droite  $AC$  est la trace horizontale du plan dans lequel le solide est encastré, le point  $A$  sera l'origine des coordonnées, et  $AC$  sera l'axe des  $z$ . Ainsi pour  $AP = x$ , l'équation (367) donnera  $PM = z$ , qui sera la largeur du solide à la distance  $AP$  de la base d'encastrement.

698. Supposons que le point  $B$  (fig. 144) soit l'extrémité du solide, de sorte que  $AB = l$ , et transportons, en ce point  $B$ , l'origine des coordonnées, l'abscisse du point  $M$  de la courbe  $AMB$  sera  $BP = x'$ , et l'ordonnée  $PM = z$  ne changera pas: nous aurons donc

$$x = AP = AB - BP = l - x';$$

et si nous substituons dans l'équation (367), il nous viendra

$$2lPx' + Cx'^2 = \frac{l^2(2P+C)}{a} z \dots \dots (368).$$

699. Si dans cette dernière équation nous faisons  $z = 0$ , nous aurons

$$2lPx' + Cx'^2 = 0,$$

ce qui nous donnera

$$x' = 0, \text{ et } x' = -\frac{2lP}{C} = -Bd \dots (369).$$

La première de ces valeurs de  $x'$  nous apprend que notre parabole passe par l'extrémité  $B$  du solide, et la seconde que cette courbe rencontre l'axe  $AB$  des  $x'$  en un point  $d$  au-delà du point  $B$ ; ainsi la parabole passera par les trois points  $a$ ,  $B$  et  $d$ ,  $Aa$  étant la largeur  $a$  de la base d'encastrement.

700. Dans l'équation (368) nous ferons

$$x' = Bc = \frac{Bd}{2} = -\frac{lP}{C},$$

et nous aurons 
$$-\frac{2P^2l^2}{C} + \frac{l^2P^2}{C} = \frac{l^2(2P+C)}{a}z,$$

d'où 
$$z = bc = -\frac{aP^2}{C(2P+C)} \dots\dots (370).$$

Cette valeur de  $z$  est l'ordonnée  $cb$  du point  $b$ , et comme cette ordonnée est négative, il s'ensuit que ce point  $b$  est situé au-dessous de l'axe  $AB$  des  $x'$ , comme je l'ai indiqué dans la fig. 144. De là nous voyons que la courbe tourne sa convexité vers l'axe  $AB$  des  $x'$ , puisqu'elle doit passer par les quatre points  $a$ ,  $B$ ,  $b$  et  $d$ .

Il est facile de voir que le point  $b$  est le sommet, et la droite  $bg$ , perpendiculaire au milieu de  $Bd$ , l'axe de notre parabole  $aBbd$ .

701. Prenons le sommet  $b$  pour l'origine des coordonnées, la droite  $bg$  pour l'axe des  $z'$  et la tangente  $ef$  menée par le sommet  $b$  pour celui des  $x''$ ; nous aurons

$$x'' = BP = cP - cB = x' - \frac{lP}{C},$$

et 
$$z = PM = P'M - PP' = z' - \frac{aP^2}{C(2P+C)};$$

si nous substituons dans l'équation (368), après toutes réductions faites, il

nous viendra 
$$x''^2 = \frac{l^2(2P+C)}{aC} \cdot z' \dots\dots (371)$$

pour l'équation ordinaire de notre parabole, dont le paramètre est, par

conséquent, 
$$p = \frac{l^2(2P+C)}{aC} \dots\dots (372).$$

702. *Cherchons maintenant la flèche de courbure que ce corps prendrait sous l'action d'une charge uniforme, et d'un poids suspendu à son extrémité libre.*

Pour cela, il faut faire attention que la lame neutre conserve sa longueur primitive en se courbant, puisqu'elle n'éprouve ni tension ni compression pendant qu'elle se courbe.

Soit donc  $AE$  (fig. 145) la longueur primitive  $l$  de cette lame neutre ;

la longueur AB de l'arc de cercle qu'affectera cette lame, sera donc égale à  $l$ , mais

$$AB = \frac{n}{360} \times 2pr,$$

$n$  étant le nombre des degrés de l'arc AB,  $p$  le rapport approché du diamètre à la circonférence du cercle, et  $r$  le rayon de ce cercle; nous aurons donc

$$\frac{n}{360} \times 2pr = l, \text{ d'où } n = \frac{360 l}{2pr} = \frac{180 l}{pr} \dots\dots (a).$$

Nous avons la flèche

$$AD = AC - CD = r - CD \dots\dots (b).$$

Mais  $1 : \cos. n :: r : DC = r \cos. n.$

si nous substituons cette valeur de CD dans l'expression (b), et si nous représentons par  $f$  la flèche AD, nous aurons

$$f = r - r \cos. n.$$

Mettons dans cette dernière pour  $n$  sa valeur (a), il nous viendra enfin

$$f = r - r \cos. \frac{180 l}{pr} = r \left( 1 - \cos. \frac{180 l}{pr} \right) \dots\dots (373)$$

Substituons pour  $r$  sa valeur (366), et il nous viendra

$$f = \frac{tab^3}{6l(2P + C)} \left( 1 - \cos. \frac{108 ol^2(2P + C)}{tapb^3} \right) \dots\dots (374)$$

pour l'expression de la flèche demandée.

703. De ce que la force d'élasticité  $E$  ne dépendant que de  $a$  quand  $b$  est constant, il s'ensuit qu'au lieu de donner au solide la forme indiquée en projection horizontale par la fig. 144, on pourrait lui donner celle représentée par la fig. 146; où l'on voit que les deux faces latérales  $aB$ ,  $bB$  du solide seraient des surfaces cylindriques paraboliques concaves; les doubles ordonnées  $ab$ ,  $cd$ ,  $ef$ , seraient les valeurs successives de  $z$  données par l'équation (368), et il ne serait pas nécessaire que la droite AB divisât ces doubles ordonnées en deux parties égales: il suffirait que l'on eût  $Ab : Aa :: cm : md :: en : nf$ , etc. Dans le cas où cette droite AB diviserait les doubles ordonnées  $ab$ ,  $cd$ ,  $ef$ , etc., en deux également, la forme du solide n'aurait d'autre avantage que d'être symétrique.

704. *Proposons-nous, maintenant, de trouver la forme du solide dans les mêmes circonstances, la base d'encastrement étant toujours un rectangle, dont la largeur serait  $a$ , et la hauteur  $b$ , dans l'hypothèse où  $a$  serait constant, et  $b$  variable.*

Dans ce cas, l'équation (b) du n° 694 deviendra  $E = \frac{ta}{12} z^3$ , en représentant  $b$  par  $z$ . Mettons cette valeur de  $E$  dans l'équation (a) du n° 694, et il nous viendra

$$P(l - x) + \frac{C(l - x)^2}{2l} = \frac{ta}{12r} z^3 \dots\dots (a).$$

Faisons ici une observation essentielle, celle que l'axe d'équilibre doit toujours se trouver au milieu de chaque section droite, c'est-à-dire que la lame neutre doit toujours partager le solide en deux parties symétriques situées l'une au-dessus de l'autre; d'où il suit que, si la lame neutre est droite, la courbe qui terminera la face supérieure, sera parfaitement égale à celle qui terminera la face inférieure, et ces deux courbes seront symétriquement disposées par rapport à la lame neutre, que nous prendrons pour l'axe des  $x$ .

Soit donc  $AB$  (fig. 147) l'axe des  $x$  ou la lame neutre;  $CMB$  la courbe supérieure, et  $EmB$  la courbe inférieure; si par un point  $P$  quelconque de l'axe  $AB$  nous menons la droite  $Mm$  perpendiculaire à cette dernière, la longueur  $Mm$  sera une des valeurs de  $z$  données par l'équation (a) ci-dessus, et on aura  $PM = Pm$ ; de sorte que si nous ne considérons que la courbe  $CMB$ , ses ordonnées  $PM$  ne seront, pour les mêmes abscisses  $x$ , que les moitiés des  $z$  correspondantes données par l'équation (a). Si donc nous représentons par  $z'$  les ordonnées  $PM$ , nous aurons  $z = 2z'$ ; substituons cette valeur de  $z$  dans l'équation (a), et il nous viendra

$$P(l - x) + \frac{C(l - x)^2}{2l} = \frac{ta}{12r} \times 8z'^3 = \frac{2ta}{3r} z'^3,$$

ou en faisant disparaître les dénominateurs et l'accent de  $z'$

$$6lrP(l - x) + 3Cr(l - x)^2 = 4talz^3 \dots\dots (375),$$

pour l'équation de la courbe  $CMB$  en portant les  $z$  au-dessus de l'axe  $AB$ , et pour celle  $EmB$ , en les portant au-dessous de cet axe  $AB$ .

705. Transportons l'origine des coordonnées à l'extrémité  $B$  de l'axe  $AB$  du solide; et pour cela observons que pour le point  $M$  la nouvelle abscisse sera  $BP$ ; nous aurons

$$AP = x = AB - BP = l - x',$$

$x'$  étant l'abscisse  $BP$ . En substituant dans l'équation (375) il nous viendra

$$6lrPx' + 3Cr{x'}^2 = 4talz^3 \dots\dots (376).$$

706. Faisons  $z = 0$ , il nous viendra

$$2lPx' + C{x'}^2 = 0,$$

ce qui nous donnera

$$x' = 0, \text{ et } x' = -\frac{2lP}{C} \dots\dots (377),$$

et nous apprendra que les deux courbes CMB, EmB viennent passer par l'extrémité B de l'axe AB du solide, et rencontrent cet axe en un autre point *b*, sur son prolongement, à une distance

$$Bb = -\frac{2lP}{C} \dots\dots (378).$$

Cette circonstance s'est présentée de la même manière (n° 699) pour le cas où l'épaisseur du solide reste constante, et la largeur est variable.

707. Par le milieu *d* de *Bb*, élevons la droite GF perpendiculaire à l'axe AB, et déterminons le point *a* ou *c* où la courbe CMB*b* ou Em*Bb* vient rencontrer cette droite GF.

Pour cela, il faudra faire  $x' = -\frac{lP}{C}$  (puisque  $Bd = \frac{1}{2} Bb$ , et que  $Bb = -\frac{2lP}{C}$ ), dans l'équation (376); il en résultera que

$$-\frac{6lP^2r}{C} + \frac{3CP^2r^2}{C^2} = 4talz^3,$$

ce qui se réduit à  $-\frac{3lP^2r}{C} = 4atz^3$

d'où nous tirerons

$$z = da = dc = -\sqrt[3]{\frac{3rP^2}{4taC}} \dots\dots (379).$$

ainsi la courbe CMB passe par les points C, B, *a* et *bA*, ce qui prouve que cette courbe a sa concavité en dehors; et la courbe EmB passe par les points E, B, *c* et *b*, et tourne aussi sa concavité en dehors, et en sens opposé de la première.

708. Pour la courbe CB*ab*, prenons le point *d* milieu de *Bb* pour l'origine des coordonnées; en nommant la nouvelle abscisse  $x''$ , nous aurons

$$x' = BP = dP - Bd = x'' - \frac{lP}{C},$$

en mettant pour *Bp* la moitié de la valeur (378) de *Bb*, prise dans le sens absolu. En substituant cette valeur de  $x'$  dans l'équation (376), il nous viendra

$$6lPrx'' - \frac{6l^2P^2r}{C} + 3Cr \left( x''^2 - \frac{2lPr}{C} x'' + \frac{l^2P^2r}{C^2} \right) = 4talz^3,$$

ce qui se réduit à  $3Crx''^2 - \frac{3l^2P^2}{C} = 4talz^3$ ,

ou à  $x''^2 - \frac{l^2P^2}{C^2} = \frac{4tal}{3Cr} z^3 \dots (380)$ .

cette équation se réduirait à

$$x''^2 = \frac{4tal}{3Cr} z^3 \dots (381),$$

si  $P = 0$ , c'est-à-dire si le solide n'était chargé que d'une charge uniforme.

709. Cette dernière équation est celle de la courbe qu'on appelle *seconde parabole cubique*; ainsi, dans le cas où il n'y a pas de poids suspendu à l'extrémité libre du solide, les courbes CMB, EmB qui en déterminent la forme, sont des secondes paraboles cubiques, dont l'origine serait à l'extrémité B de l'axe AB du solide. Mais dans le cas où le poids P existe, ces courbes ont l'équation (380), et ne sont plus de l'espèce des paraboles admises jusqu'ici, à cause de la constante isolée  $\frac{l^2P^2}{C^2}$  que cette équation renferme nécessairement. Cependant, on peut en faire une espèce particulière de paraboles, par la raison que ces courbes, comme les autres qui portent ce nom, sont limitées dans un sens, et indéfinies dans le sens opposé.

En effet, si nous résolvons l'équation (380) par rapport à  $x''$ , nous aurons

$$x'' = \pm \sqrt{\frac{4tal}{3Cr} z^3 + \frac{l^2P^2}{C^2}},$$

d'où nous voyons que tant que  $z$  sera positif,  $x''$  sera réel, puisque tous les termes sous le radical sont alors positifs; ce qui veut dire que la courbe s'étend à l'infini au-dessus de l'axe AB; mais si nous prenons  $z$  négatif, comme  $z^3$  sera négatif,  $x''$  ne sera réel qu'autant que  $\frac{l^2P^2}{C^2} > \frac{4tal}{3Cr} z^3$ , ou que ces deux quantités seront au plus égales, ce qui donnerait pour la plus grande valeur

possible de  $z$  négatif,  $z = -\sqrt[3]{\frac{3lP^2}{4taC}}$ ,

valeur égale à celle (379) trouvée au n° 707 pour le point  $a$ .

Ainsi les courbes CBab, EBcb portent le caractère le plus remarquable des paraboles en général; c'est pour cette raison que nous les nommerons *secondes paraboles cubiques affectées d'une constante isolée*.

On remarquera que l'origine des coordonnées de cette espèce de paraboles est bien sûr l'axe GF; mais non pas au sommet  $a$  de la courbe. Si l'on pre-

naît l'origine en ce sommet  $a$ , l'équation qui en résulterait serait beaucoup plus compliquée, elle renfermerait, en effet, trois termes de plus dans le second membre, qui seraient respectivement affectés de  $z^3$ ,  $z^2$  et  $z$ , avec un terme constant, et le premier membre ne changerait pas. Le point  $d$  est donc un point remarquable de cette espèce de paraboles, puisqu'étant pris pour l'origine des coordonnées, il donne lieu à l'équation la plus simple.

710. La grandeur du rayon  $r$  de l'arc de cercle que la lame neutre AB affectera par l'action de la charge que le solide supporte, aura pour expression celle (366) du n° 694,  $a$  étant toujours la largeur de la base d'encastrement, et  $b$  sa hauteur EC totale.

711. Pour que tout ce qui vient d'être démontré ait lieu, il suffit que, dans chaque section verticale, l'axe neutre d'élasticité soit situé au milieu de la hauteur de la section; de là il résulte que, au lieu de donner au solide le profil CBE (fig. 148), on pourrait lui donner le profil CDE (beaucoup plus convenable dans un grand nombre de cas), pourvu que  $ik = ab$ ,  $lm = dc$ ,  $no = ef$ ,  $pq = gh$ , etc., la droite CD étant horizontale ou inclinée. La lame neutre devant passer par les milieux A,  $r$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $u$ , D des doubles ordonnées CE,  $ik$ ,  $lm$ , etc., prendra naturellement la courbe ArstuD.

Quant à la flèche de courbure, elle sera donnée par l'équation (374).

712. Dans le cas où l'on voudrait faire varier à la fois  $a$  et  $b$ , l'une de ces quantités pourrait varier suivant une loi donnée à volonté; et l'autre seule serait soumise aux conditions exprimées par l'équation (b) du n° 695.

Supposons que la projection horizontale du solide soit le triangle rectiligne DBC (fig. 149), la base d'encastrement étant CD, et la droite AB, perpendiculaire à DC, la longueur du solide. Dans ce cas,  $a$  étant la largeur DC de la base d'encastrement, à la distance  $Ac = x$ , on aura la largeur  $ab$  par la proportion

$$AB : Bc :: DC : ab \quad \text{ou} \quad l : l - x :: a : ab = \frac{a(l-x)}{l} \dots (a).$$

Ainsi, dans l'expression  $E = \frac{tab^3}{12}$ , à la place de  $a$  nous mettrons  $\frac{a(l-x)}{l}$ , et à la place de  $b$ ,  $z$ : nous aurons  $E = \frac{ta(l-x)}{12} \cdot z^3$ , en mettant ensuite cette valeur de  $E$  dans l'équation (a) n° 694, il nous viendra

$$P(l-x) + \frac{C(l-x)^2}{2l} = \frac{ta(l-x)}{12r} \cdot z^3;$$

d'où 
$$P + \frac{C(l-x)}{2l} = \frac{ta}{12r} z^3 \dots (382).$$

713. Si dans cette équation nous faisons  $x = 0$ , en faisant attention qu'alors  $z = b$ , nous aurons

$$P + \frac{C}{2} = \frac{tab^3}{12r},$$

d'où 
$$r = \frac{tab^3}{6(2P + C)} \dots \dots \dots 383)$$

sera l'expression du rayon de courbure qui, comme on voit, est dans ce cas indépendant de la longueur du solide.

714. Maintenant supposons (fig. 150) que AB soit la projection verticale de la face supérieure du solide, et que AC = b; prenons la droite AB pour l'axe des x, et le point A de la base d'encastrement, pour l'origine des coordonnées; nous aurons

$$AP = x, PM = z, \text{ et } AB = l,$$

et l'équation (382) sera celle de la courbe CMB.

715. Transportons l'origine des coordonnées à l'extrémité B du solide; nous aurons  $x = AP = AB - BP = l - x'$ ; en substituant dans l'équation (382) il nous viendra

$$P + \frac{Cx'}{2l} = \frac{ta}{12r} z^3 \dots \dots \dots (384)$$

pour l'équation de la courbe, l'origine étant au point B.

716. Faisons  $z = 0$ ; nous aurons

$$P + \frac{Cx'}{2l} = 0, \text{ d'où } x' = -\frac{2lP}{C} = Ba \dots (385),$$

il suit de ce que  $x'$  n'a qu'une seule valeur, que la courbe ne rencontre l'axe AB qu'en un seul point a, situé au-delà du point B, sur le prolongement de AB.

717. Prenons ce point a pour l'origine des coordonnées; en nommant  $x''$  l'abscisse aP, nous aurons

$$x' = BP = aP - aB = x'' - \frac{2lP}{C},$$

en mettant pour aB sa valeur (385) prise absolument. En substituant dans l'équation (384), il nous viendra

$$\frac{Cx}{2l} = \frac{at}{12r} z^3; \text{ d'où } z^3 = \frac{6rC}{at} x \dots \dots \dots (386),$$

en supprimant les accents de x.

C'est l'équation la plus simple d'une première parabole cubique. On voit que cette équation est indépendante du poids P suspendu à l'extrémité libre du solide.

Quant à la flèche de courbure, on l'obtiendra en mettant la valeur (383) de  $r$  dans l'équation (373), ce qui donnera

$$f = \frac{tab^3}{6(2P + C)} \left( 1 - \cos. \frac{1080 l (2P + C)}{tpab^3} \right) \dots\dots (387)$$

718. Supposons que la base d'encastrement du solide soit un cercle; dans ce cas (n° 311), nous aurons

$$E = \frac{tpR^4}{4} \dots\dots (a),$$

$p$  étant le rapport approché du diamètre à la circonférence, et  $R$  le rayon de la base d'encastrement. Mais pour que  $E$  ait cette valeur, il faut que  $x = \sigma$  dans l'équation (a) du n° 694; en substituant ces valeurs de  $x$  et de  $E$  dans cette équation (a) ci-dessus, il nous viendra

$$Pl + \frac{Cl}{2} = \frac{tpR^4}{4r},$$

d'où 
$$r = \frac{tpR^4}{2l(2P + C)} \dots\dots, (388),$$

sera l'expression du rayon de l'arc de cercle suivant lequel la lame neutre du solide se courbera.

719. Pour indiquer que  $R$  est variable, représentons-le par  $z$ , ce qui nous donnera  $\frac{E}{r} = \frac{tpz^4}{4r}$ , ou en mettant pour  $r$  sa valeur (388),  $\frac{E}{r} = \frac{tpz^4}{4} \times \frac{2l(2P + C)}{tpR^4} = \frac{l(2P + C)z^4}{2R^4}$ ; mettons cette valeur de  $\frac{E}{r}$  dans l'équation (a) du n° 694, et nous aurons

$$P(l - x) + \frac{C(l - x)^2}{2l} = \frac{l(2P + C)z^4}{2R^4},$$

ou 
$$2lR^4P(l - x) + R^4C(l - x)^2 = l^2(2P + C)z^4 \dots\dots (389),$$

en faisant disparaître les dénominateurs.

720. Supposons que la droite AB (fig. 151) soit la projection verticale de l'axe neutre; A le centre et DC le diamètre de la base d'encastrement, et le point B l'extrémité isolée du solide; prenons le point A pour l'origine des coordonnées, la droite AB pour l'axe des abscisses, et AC pour celui des ordonnées, si  $x = AP$ , l'équation (389) donnera  $z = PM$ , la courbe CMB étant celle qui, par sa révolution autour de l'axe AB engendrera le solide.

721. Transportons l'origine des coordonnées à l'extrémité B du solide ; les  $z$  ne changeront pas, et  $x = AP = AB - BP = l - x'$  ; en substituant dans l'équation (389), elle se réduira à

$$2lR^4Px'' + R^4Cx'^2 = l^2(2P + C)z^4 \dots (390),$$

722. Si dans cette dernière équation nous faisons  $z = 0$ , nous aurons

$$2lR^4Px' + R^4Cx'^2 = 0,$$

d'où  $x' = 0$ , et  $x' = -\frac{2lP}{C} = -Ba \dots (391).$

La première de ces valeurs de  $x'$  nous apprend que la courbe CMB passe par l'extrémité B du solide, et la seconde que cette courbe rencontre l'axe AB de  $x'$  en un point  $a$  au-delà du point B.

723. Transportons l'origine des coordonnées au milieu  $c$  de la distance  $Ba$  ; les  $z$  ne changeront pas, mais les abscisses seront  $cP$  au lieu de  $BP$  ; nous aurons donc

$$x' = BP = cP - cB = x'' - \frac{lP}{C},$$

en mettant pour  $cB$  la moitié de la valeur (391) de  $Ba$ . Substituons cette valeur de  $x'$  dans l'équation (390), et il nous viendra

$$R^4Cx''^2 - \frac{l^2 R^4 P^2}{C} = l^2(2P + C)z^4,$$

toute réduction faite.

724. Résolvons cette équation par rapport à  $z$ , nous aurons

$$z = \pm R^2 \sqrt{\frac{C^2 x''^2 - lP^2}{l^2(2P + C)}} \dots (392).$$

Cette équation nous montre que depuis  $x'' = 0$ , jusqu'à ce que  $C^2 x''^2 > l^2 P^2$ , les valeurs de  $z$  seront imaginaires ; c'est-à-dire qu'il n'existe pas de courbe entre les points B et  $a$  ; mais au-delà de ces points, il y aura deux branches DBC,  $dab$  séparées par la distance  $Ba$ , qui s'étendront à l'infini. Cette courbe est donc une hyperbole, et comme son équation est du quatrième degré, cette hyperbole est du quatrième degré. La révolution de la branche CBD autour de l'axe AB, engendrera le solide dont il est ici question.

725. Si dans l'équation (373) on met pour  $r$  sa valeur (388), on aura

$$f = \frac{tpR^4}{2l(2P + C)} \left( 1 - \cos. \frac{360l^2(2P + C)}{tp^2R^4} \right) \dots (393).$$

En continuant de raisonner de la même manière sur les différentes valeurs que prend  $E$ , quand la base du solide change de forme, on arriverait à la détermination de l'abaissement de l'extrémité  $B$  de ces différens corps, ainsi qu'à celle de leurs formes dans le sens de la longueur. Ce genre de recherche conduirait à des résultats plus ou moins curieux, mais je craindrais de sortir des bornes qui conviennent à cet ouvrage en les poussant plus loin. Au reste, je crois en avoir assez dit sur cette matière, pour qu'un lecteur habitué au calcul, puisse, de lui-même, résoudre les questions qui pourront l'intéresser.

### LEÇON VIII.

Équation de la courbe que prend un prisme posé librement sur deux appuis de niveau, et soumis à action d'une charge uniforme dans l'intervalle des appuis, et d'un poids suspendu en un point quelconque de sa longueur.

726. *Supposons d'abord que le solide soit sans pesanteur, et ne soit chargé que d'un poids suspendu au milieu de la distance entre les appuis.*

Soient  $ACB$  (fig. 152), la courbe qu'a pris l'axe neutre du prisme, et  $A, B$  les points d'appui. Nommons

$2P$  le poids suspendu au milieu  $D$  de l'intervalle des appuis, et  
 $l$  la moitié  $AD$  ou  $DB$  de cet intervalle ;

Il est clair que la lame neutre ne changerait point d'état, si au lieu du poids  $2P$ , on plaçait un obstacle invincible au-dessus du point  $C$ , et au lieu des appuis  $A$  et  $B$ , on substituait deux forces égales chacune à  $P$ , et agissant de bas en haut. De plus, l'équilibre ne serait point troublé, si l'on supposait encadrée l'une des moitiés du prisme, la moitié  $AC$ , par exemple, l'autre étant livrée à l'action de la force  $P$ , appliquée au point  $B$ , et agissant de bas en haut. Cette moitié du prisme serait donc dans le même cas que dans le n° 653; d'où il suit qu'en prenant l'origine des coordonnées au point  $C$ , et pour l'axe des abscisses la tangente horizontale  $ab$ , menée par le point milieu  $C$  de la courbe  $ACB$ , l'équation de la moitié  $CB$  de cette courbe sera

$$y = \frac{P}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots (394),$$

comme au n° 653,  $P$  n'étant ici que la moitié du poids suspendu au milieu de la pièce, et  $l$  la moitié de l'intervalle des appuis.

Il est évident que l'autre moitié aura la même équation.

727. La flèche de courbure  $DC = f$ , sera donc aussi, comme au n° 654

$$f = \frac{Pl^3}{3E} \dots \dots (395),$$

$P$  étant toujours la moitié du poids suspendu, et  $l$  la moitié de l'intervalle entre les appuis.

728. *Proposons-nous de trouver la courbe d'un prisme posé librement sur deux appuis de niveau, et soumis à l'action d'une charge uniforme dans tout l'intervalle des appuis.*

Il est évident que dans ce cas, chaque point d'appui supportera la moitié de la charge du solide, que nous nommerons  $2C$ . Ainsi les forces  $P, Q$  (fig. 152), qui agissent de bas en haut pour remplacer les appuis, seront ici égales à  $C$ . Cela posé, supposons que la moitié  $AC$  du solide, vienne à être encasté, l'équilibre ne sera pas troublé, et la force  $P = C$ , appliquée au point  $B$ , sera obligée, non-seulement de vaincre la force d'élasticité qui aurait lieu si le solide était sans pesanteur, et seulement soumis à l'action de cette force, mais encore celle que développerait la charge uniforme distribuée dans la longueur  $CB$ , si l'encastement ayant lieu au point  $C$ , le point d'appui  $B$  n'existait pas. Or, si la moitié libre  $CB$  du corps était sans pesanteur, la force  $P = C$  produirait une flèche de courbure (n° 728) qui serait égale à  $\frac{Cl^3}{3E}$ ; mais la charge uniforme  $C$  de cette moitié du prisme, produirait en sens contraire une flèche de courbure (n° 657), égale à  $\frac{Cl^3}{8E}$ ; nous aurons donc

$$f = \frac{Cl^3}{3E} - \frac{Cl^3}{8E} = \frac{5Cl^3}{24E} \dots \dots (396).$$

729. De ce que la flèche de courbure est ici la différence entre celles données aux n°s 653, 657, il s'ensuit nécessairement qu'il en est de même d'une ordonnée quelconque; par conséquent, une ordonnée  $y$  quelconque de cette courbe sera la différence des seconds membres des équations (329) et (321); c'est-à-dire que nous aurons

$$y = \frac{C}{E} \left( \frac{lx^3}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^3}{2} - \frac{lx^5}{3} + \frac{x^4}{12} \right),$$

ce qui se réduit à  $y = \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^3}{2} - \frac{x^4}{12} \right) \dots \dots (397).$

730. Cette manière de trouver l'équation de la courbe du solide uniformément chargé dans l'intervalle des appuis est très-simple, mais elle peut pa-

raître un peu subtile; en voici une autre toute différente, qui conduit avec plus de détails au même résultat.

731. Supposons que l'origine des coordonnées soit le milieu C (fig. 152) de la courbe ACB, lequel point C est celui de contact de la tangente horizontale  $ab$  que nous prendrons pour l'axe des abscisses.

Cela posé, appelons  $x$  l'abscisse CP du point M de la courbe;  $l$  la moitié  $aC$  ou  $bC$  de la distance entre les appuis, et  $2C$  la somme des poids uniformément distribués sur la longueur de la pièce. Les distances du point P aux points d'appui seront  $aP = l + x$ , et  $Pb = l - x$ . Les charges des deux parties AM, MB du solide, seront proportionnelles aux longueurs  $l + x$ ,  $l - x$ ; de sorte qu'on aura

$$2l : 2C :: l + x : \frac{C(l+x)}{l}$$

pour la charge de la partie AM; et

$$2l : 2C :: l - x : \frac{C(l-x)}{l}$$

pour celle de la partie MB.

Ces charges tendent à faire baisser le point M, la première autour du point A, et la seconde autour du point B. Mais ces charges agissent à leurs centres de gravité, qui sont respectivement au milieu des distances  $aP$  et  $Pb$ ; les moitiés de ces charges appliquées au point M, produiraient sur ce point M le même effet qu'auparavant, ainsi le poids qui fait baisser le point M autour des points d'appui, est donc

$$\frac{C(l+x)}{2l} + \frac{C(l-x)}{2l} = C.$$

Supposons maintenant qu'un obstacle soit placé au point M, de manière qu'il s'oppose à un mouvement de translation verticale, mais n'empêche pas un mouvement de rotation autour de ce point M; cet obstacle ne changera pas l'état d'équilibre, de sorte que, si l'on venait à supprimer les points d'appui, le prisme resterait en équilibre autour du point M, si les pressions sur ces points d'appui étaient remplacés par deux forces verticales P, Q, respectivement équivalentes à ces pressions, appliquées aux mêmes points A et B, et agissant de bas en haut.

Il faut donc que les points d'appui A et B réagissent contre la charge du prisme; de manière que les moments de ces réactions par rapport au point M soient égaux. De plus, la somme de ces réactions doit être égale à la charge C qui fait baisser le point M du prisme. Or, les bras de levier de ce

réactions sont  $aP$  ou  $l + x$ , et  $Pb$  ou  $l - x$ ; mais pour que les moments de ces réactions soient égaux, il faut qu'elles soient en raison inverse de leurs bras de levier  $l + x$ ,  $l - x$ ; si donc on appelle  $P$  et  $Q$  ces réactions, on aura

$$P : Q :: l - x : l + x.$$

$P$  étant la réaction du point d'appui  $A$ , et  $Q$  celle du point d'appui  $B$ , cette proportion nous donne

$$P + Q : Q :: 2l : l + x;$$

mais  $P + Q = C$ ,

donc  $C : Q :: 2l : l + x$ ,

d'où  $Q = \frac{C(l+x)}{2l}$ .

Le moment de  $Q$  sera donc

$$\frac{C(l+x)(l-x)}{2l} = \frac{C(l^2 - x^2)}{2l}.$$

On trouverait la même expression pour le moment de  $P$ . Or, c'est évidemment l'un de ces moments qui doit faire équilibre à celui  $\frac{E}{r}$  de l'élasticité qui se développe dans la section droite du prisme au point  $M$ . Ainsi on aura

$$\frac{E}{r} = \frac{C(l^2 - x^2)}{2l} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{r} = \frac{C}{2lE} (l^2 - x^2) \dots \dots (a).$$

Quant aux élémens de l'ordonnée  $y$ , ils auront encore pour expression

$$d = \frac{1}{r} (x - x'),$$

de sorte qu'en mettant  $x'$  au lieu de  $x$  dans la formule (a), il viendra

$$d = \frac{C}{2lE} (l^2 - x'^2) (x - x'),$$

d'où l'on voit que la somme de tous ces élémens sera

$$y = \frac{C}{2lE} \left\{ (l^2 - x'^2) (x - x') + (l^2 - x''^2) (x - x'') + \dots \dots \dots \right\}$$

et en faisant la même remarque que précédemment sur les abscisses  $x'$ ,  $x''$ , etc., il viendra

$$y = \frac{C}{2lE} \left\{ (l^2 - 1) (x - 1) + (l^2 - 4) (x - 2) + (l^2 - 9) (x - 3) \dots \dots \dots (l^2 - n^2) (x - n) \right\}.$$

Développons les termes de la grande parenthèse, nous aurons

$$\begin{aligned} (l^2 - 1)(x - 1) &= l^2x - l^2 - x + 1 \\ (l^2 - 4)(x - 2) &= l^2x - 2l^2 - 4x + 8 \\ (l^2 - 9)(x - 3) &= l^2x - 3l^2 - 9x + 27 \\ \dots & \\ (l^2 - n^2)(x - n) &= l^2x - nl^2 - n^2x + n^3. \end{aligned}$$

Faisons la somme de ces équations membre à membre, comme il y en a autant que d'unités dans  $n$ , il viendra

$$\begin{aligned} M &= nl^2x - l^2(1 + 2\dots + n) - x(1 + 4 + \dots + n^2) \\ &\quad + (1 + 8\dots + n^3); \end{aligned}$$

prenons les limites, il en résultera

$$M = nl^2x - \frac{l^2n^2}{2} - \frac{xn^3}{3} + \frac{n^4}{4},$$

et en faisant  $x = n$ ,

$$M = l^2x^2 - \frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{4} = \frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12}.$$

Si nous substituons cette valeur de  $M$  à la place de la grande parenthèse de la dernière valeur de  $y$ , il nous viendra enfin

$$y = \frac{C}{2lE} \left\{ \frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \right\}$$

pour l'équation de la moitié CB de la courbe, comme au n° 729 (\*).

Cette équation donnerait la valeur (398) de la flèche de courbure, en y faisant  $x = l$ .

732. Si le prisme était à la fois soumis à l'action d'une charge et d'un poids suspendu au milieu de l'intervalle des appuis, il est évident que l'expression de

(\* Si dans l'équation (a) du n° 731 nous mettons pour  $\frac{1}{r}$  sa valeur  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , qui a lieu dans l'hypothèse où  $\frac{dy^2}{dx^2} = 0$ , il nous viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{C}{2lE} (l^2 - x^2),$$

l'ordonnée d'un point quelconque de la courbe qu'il affecterait, serait la somme des seconds membres des équations (329) et (397), de sorte qu'on

$$\text{aurait } y = \frac{P}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \right) \dots\dots\dots (398).$$

P étant la moitié du poids suspendu au milieu entre les appuis, et C celle de la charge uniforme.

Cette charge uniforme peut n'être que le poids propre du solide, ou ce même poids, plus une surcharge uniforme.

733. *Supposons maintenant un prisme sans pesanteur, chargé d'un poids suspendu en un point quelconque dans l'intervalle des appuis, supposés toujours de niveau.*

Soient ACB (fig. 153) la courbe de la lame neutre; D le point d'application du poids 2P; c la distance GD du milieu G de l'intervalle des appuis au point D d'application du poids 2P, l la moitié de AB, et x, y les coordonnées DP, PM d'un point quelconque M, de la partie DB de la courbe en question, l'origine des coordonnées étant le point D, et l'axe des abscisses l'horizontale EF menée par le point D.

Cela posé, nous aurons DE = l - c, et FD = l + c, pour les distances des points d'appui au point d'application D du poids 2P. Les pressions sur les points d'appui A, B, pourront être remplacés par deux forces verticales, agissant de bas en haut, qui seront en raison inverse des bras de levier DE = l - c, FD = l + c; de sorte qu'en nommant H et K ces forces, nous aurons

$$H : K :: l + c : l - c \text{ d'où } H + K : H :: 2l : l + c,$$

mais leur somme H + K = 2P; ce qui donnera

$$2P : H :: 2l : l + c,$$

en intégrant deux fois de suite, il viendra

$$1^{\circ}. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{C}{2lE} \left( l^2x - \frac{x^3}{3} \right),$$

$$\text{et } 2^{\circ}. \quad y = \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \right),$$

comme dans le corps de l'ouvrage.

d'où 
$$H = \frac{P(l+c)}{l} \dots\dots (a)$$

sera la force qui remplacera le point d'appui B. On trouverait que celle qui remplace le point d'appui A est

$$K = \frac{P(l-c)}{l} \dots\dots (b).$$

Supposons que le prisme vienne à être encastré dans toute la partie ADM, ce qui ne troublera pas l'état d'équilibre; le moment de la force H par rapport au point M, sera PE × H, et ce moment devra faire équilibre à celui  $\frac{E}{r}$  de l'élasticité de la section droite au point M; nous aurons donc

$$PE \times H = \frac{E}{r} \dots\dots (c).$$

Mais PE = DE - DP = l - c - x; en substituant cette valeur de PE, et celle (a) de H dans l'équation (c), il nous viendra

$$\frac{P(l+c)}{l} (l - c - x) = \frac{E}{r} \dots\dots (d).$$

Pour avoir l'ordonnée PM = y, nous observerons que la tangente DT, menée au point D d'application du poids xP n'étant pas horizontale, en la prolongeant, elle coupera l'ordonnée PM en un point m; et les éléments de la courbe comprise entre le point D et le point M étant prolongés, ne rencontreront cette ordonnée PM qu'au-dessus du point m; de sorte que la somme des éléments de la forme  $d = \frac{x-x'}{r}$  ne sera plus égale à PM, mais seulement à mM; à cette somme il faudra donc ajouter Pm pour avoir l'ordonnée PM. Or, le triangle rectangle DPm donne

$$1 : DP :: \text{tang. } mDP : Pm, \text{ ou } 1 : x :: \text{tang. } u : Pm = x \text{ tang. } u \dots (e).$$

Cela posé, pour avoir l'ordonnée PM, nous mettrons la valeur de  $\frac{1}{r}$  tirée de l'équation (d) (après y avoir mis x' à la place de x) dans l'expression  $\frac{x-x'}{r}$  d'un élément de mM, ce qui nous donnera

$$d = \frac{P(l+c)}{El} (l - c - x') (x - x')$$

Comme tous les éléments du segment Mm de l'ordonnée y seront de cette

forme, mais que  $x'$  sera successivement remplacé par  $x''$ ,  $x'''$ , etc.; leur somme, ou  $mM$  sera

$$Mm = \frac{P(l+c)}{El} \left\{ (l-c-x')(x-x') + (l-c-x'')(x-x'') \right. \\ \left. + (l-c-x''')(x-x''') \dots \right\}$$

et si nous ajoutons cette dernière, membre à membre à l'équation (e), il nous viendra

$$y = x \text{ tang. } n + \left\{ (l-c-x')(x-x') + (l-c-x'')(x-x'') \right. \\ \left. + (l-c-x''')(x-x''') \dots \right\}$$

En considérant les  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ , etc., comme d'habitude, il viendra

$$y = x \text{ tang. } n + \frac{P(l+c)}{El} \left\{ (l-c-1)(x-1) + (l-c-2)(x-2) \right. \\ \left. + (l-c-3)(x-3) \dots + (l-c-n)(x-n) \right\} \dots (f).$$

En développant chaque terme de la parenthèse, nous aurons

$$(l-c-1)(x-1) = lx - cx - x - l + c + 1$$

$$(l-c-2)(x-2) = lx - cx - 2x - 2l + 2c + 4$$

$$(l-c-3)(x-3) = lx - cx - 3x - 3l + 3c + 9$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(l-c-n)(x-n) = lx - cx - nx - nl + nc + n^2,$$

et en faisant la somme de ces équations membre à membre, comme il y en a autant que d'unités dans  $n$ , en nommant  $M$  la somme des premiers membres, il nous viendra

$$M = nlx - ncx - x(1+2+3+4\dots+n) - l(1+2+3\dots+n) + \\ c(1+2+3\dots+n) + 1+4+9\dots+n^2.$$

La limite de cette somme (note page 50) sera

$$M = nlx - ncx - \frac{n^2x}{2} - \frac{n^2l}{2} + \frac{n^2c}{2} + \frac{n^3}{3},$$

faisons  $n = x$ , nous aurons

$$M = lx^2 - cx^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{lx^2}{2} + \frac{cx^2}{2} + \frac{x^3}{3},$$

ce qui se réduit à 
$$M = \frac{-c}{2} x^2 - \frac{x^3}{6};$$

si donc nous mettons cette valeur de  $M$  à la place de la grande parenthèse dans la valeur (f) de  $y$ , nous aurons

$$y = x \operatorname{tang.} n + \frac{P(l+c)}{El} \left\{ \frac{l-c}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} \right\} \dots\dots (g).$$

pour la partie DB de la courbe (\*).

Soit  $M'$  un point quelconque de la branche DA de la courbe ACB; nommons  $x$  l'abscisse- $DP'$ ; nous aurons

$$FP' = DF - DP' = l + c - x \dots (h);$$

or, si nous supposons le solide encastré depuis le point B jusqu'au point  $M'$ , le moment de la force  $K$ , par rapport au point  $M'$  sera  $K \times FP'$ ; ou en mettant pour  $K$  et pour  $FP'$  leurs valeurs (b) et (h),  $\frac{P(l-c)}{l} (l+c-x)$ ;

et comme ce moment doit faire équilibre à celui  $\frac{E}{r}$  de l'élasticité qui se développe dans la section droite en  $M'$ , il nous viendra

$$\frac{P(l-c)}{l} (l+c-x) = \frac{E}{r} \dots\dots (i).$$

La somme des élémens de la forme  $\frac{x-x'}{r}$ , sera  $m'M'$ , de sorte que pour avoir l'ordonnée  $P'M' = y$  de  $m'M'$ , il faudra retrancher  $P'm'$ . Or,

(\*) Divisons les deux termes de l'équation (d) par  $E$ , et mettons-y la valeur générale de  $r$ , dans l'hypothèse où  $\frac{dy^2}{dx^2} = 0$ , il nous viendra

$$\frac{P(l+c)(l-c-x)}{El} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Intégrant une première fois, nous aurons

$$\frac{P}{El} (l+c) \left( lx - cx - \frac{x^2}{2} \right) + \operatorname{tang.} n = \frac{dy}{dx},$$

et en intégrant encore une fois

$$\frac{P}{El} (l+c) \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + x \operatorname{tang.} n = y,$$

ou 
$$y = x \operatorname{tang.} n + \frac{P}{El} (l+c) \left\{ \frac{(l-c)}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} \right\}$$

comme dans le corps de l'ouvrage.

si de l'équation (i) on tire la valeur  $\frac{1}{r}$ , après y avoir mis  $x'$  au lieu de  $x$ , pour la mettre dans la valeur de  $d$ , nous aurons

$$d = \frac{P(l-c)}{lE} (l+c-x')(x-x'),$$

et par conséquent

$$m'M' = \frac{P(l-c)}{lE} \left\{ (l+c-x')(x-x') + (l+c-x'')(x-x'') \right. \\ \left. + (l+c-x''')(x-x''') \dots \dots \right\}$$

ou en faisant dans la grande parenthèse les mêmes observations et les mêmes calculs qu'à l'ordinaire

$$m'M' = \frac{P(l-c)}{lE} \left\{ \frac{l+c}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} \right\}$$

Quant à  $m'P'$ , on trouvera, par le triangle rectangle  $DP'm'$ ,

$$m'P' = x \text{ tang } n;$$

et par conséquent

$$y = -x \text{ tang. } n + \frac{P(l-c)}{lE} \left\{ \frac{l+c}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} \right\} \dots \dots (k),$$

sera l'équation de la courbe  $DM'A$ .

734. Si dans l'équation (g) nous faisons  $x = l - c$ , c'est-à-dire  $x = BE$ , il nous viendra

$$y = BE = f = (l-c) \text{ tang. } n + \frac{P(l+c)}{lE} \left\{ \frac{(l-c)^2}{2} - \frac{(l-c)^3}{6} \right\}$$

$$\text{ou } f = (l-c) \text{ tang. } n + \frac{P(l+c)}{3lE} (l-c)^3 \dots \dots (l),$$

et si dans l'équation (k) nous faisons  $x = l + c$ , c'est-à-dire,  $x = AF$ , il en résultera

$$y = FA = BE = f = -(l+c) \text{ tang. } n + \frac{P(l-c)}{lE} \left\{ \frac{(l+c)^2}{2} - \frac{(l+c)^3}{6} \right\}$$

$$\text{ou } f = -(l+c) \text{ tang. } n + \frac{P(l-c)}{3lE} (l+c)^3 \dots \dots (m),$$

si nous ajoutons les deux équations (l), (m) après les avoir multipliées, la première par  $l+c$ , et la seconde par  $l-c$ , il nous viendra

$$2lf = \frac{P(l+c)^2}{3lE} (l-c)^3 + \frac{P(l-c)^2}{3lE} (l+c)^3;$$

d'où 
$$f = \frac{P}{6El^2} \left\{ (l+c)^2 (l-c)^3 + (l-c)^2 (l+c)^3 \right\}$$

ou 
$$f = \frac{P (l^2 - c^2)^2}{3El} \dots (399).$$

735. Pour avoir la valeur de tang.  $n$ , on retranchera l'équation (l) de l'équation (m), ce qui donnera

$$0 = -2l \text{ tang. } n + \frac{P}{3IE} \left\{ (l-c)(l+c)^3 - (l+c)(l-c)^3 \right\}$$

d'où 
$$\text{tang. } n = \frac{2Pc(l^2 - c^2)}{3IE} \dots (400).$$

Enfin, substituons cette valeur de tang.  $n$  dans chacune des équations (g) et (k), et il viendra

$$y = \frac{2Pcx(l^2 - c^2)}{3IE} + \frac{P(l+c)}{IE} \left\{ \frac{l-c}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right\}$$

et 
$$y = -\frac{2Pcx(l^2 - c^2)}{3IE} + \frac{P(l-c)}{IE} \left\{ \frac{l+c}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right\}$$

ou 
$$y = \frac{P(l+c)}{IE} \left\{ \frac{2c(l-c)}{3} x + \frac{l-c}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right\} \dots (401),$$

et 
$$y = \frac{P(l-c)}{IE} \left\{ -\frac{2c(l+c)}{3} x + \frac{l+c}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right\} \dots (402),$$

pour les équations respectives des branches de courbes DB, DA.

736. Cherchons maintenant l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle formé, avec l'axe EF des abscisses, par la tangente M'T (fig. 153) à la courbe DA, menée par un point quelconque M'.

Pour cela, soit la sécante M'S, qui coupe la courbe DA aux deux points M', m, dont les coordonnées sont respectivement  $x, y$  et  $x', y'$ .

Si par le point  $m$  on mène la droite  $mn$  parallèle à GF, le triangle  $nmM'$  donnera

$$1 : \text{tang. } m :: mn : nM', \text{ ou } 1 : \text{tang. } m :: x - x' : y - y',$$

d'où 
$$(x - x') \text{ tang. } m = y - y' \dots (a).$$

Les coordonnées des points M',  $m$  devront satisfaire à l'équation (402) de la courbe DA, de sorte que nous aurons

$$y = \frac{P(l-c)}{IE} \left\{ -\frac{2c(l+c)}{3} x + \frac{l+c}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right\}$$

$$\text{et } y' = \frac{P(l-c)}{lE} \left\{ -\frac{2c(l+c)}{3} x' + \frac{l+c}{2} x'^2 - \frac{1}{6} x'^3 \right\}.$$

Retranchons ces deux équations membre à membre, et il nous viendra

$$y - y' = \frac{P(l-c)}{lE} \left\{ -\frac{2c(l+c)}{3} (x - x') + \frac{l+c}{2} (x^2 - x'^2) - \frac{1}{6} (x^3 - x'^3) \right\}$$

ou en mettant pour  $y - y'$  sa valeur (a)

$$(x - x') \text{ tang. } m = \frac{P(l-c)}{lE} \left\{ -\frac{2c(l+c)}{3} (x - x') + \frac{l+c}{2} (x^2 - x'^2) - \frac{1}{6} (x^3 - x'^3) \right\}.$$

Cette dernière étant divisible par  $x - x'$ , il en résultera

$$\text{tang. } m = \frac{P(l-c)}{lE} \left\{ -\frac{2c(l+c)}{3} + \frac{l+c}{2} (x + x') - \frac{1}{6} (x^2 + xx' + x'^2) \right\} \dots (b).$$

Si maintenant nous supposons que la sécante  $M'S$  tourne autour du point  $M'$ , pour venir coïncider avec la tangente  $M'T$ , le point  $m$  s'approchera de plus en plus du point  $M'$ , de manière que ce point  $m$  coïncidera avec le point  $M'$  aussitôt que la sécante  $M'S$  coïncidera avec la tangente  $M'T$ ; mais dans ce cas on aura  $x = x'$ , et l'équation (b) se réduira à

$$\text{tang. } m = \frac{P(l-c)}{lE} \left\{ -\frac{2c(l+c)}{3} + (l+c)x - \frac{1}{2} x^2 \right\} \dots (403),$$

et sera l'expression demandée.

737. Cherchons la valeur de  $x$ , pour le cas où  $\text{tang. } m = 0$ , ou, ce qui revient au même, la valeur de l'abscisse  $x$  du point de la courbe  $DA$ , pour que la tangente à cette courbe soit horizontale.

Pour cela, il suffira d'égaliser à 0 la parenthèse du second membre de l'équation (403), ce qui donnera

$$x^2 - 2(l+c)x + \frac{4c(l+c)}{3} = 0,$$

$$\text{d'où } x = l + c - \sqrt{\frac{(l+c)(3l-c)}{3}} \dots (404).$$

• Nous ne donnons que le signe  $-$  au radical, parce que le signe  $+$  donnerait une valeur pour  $x$  qui dépasserait  $DF$ .

738. Cette valeur de  $x$  répondra au point le plus bas de la courbe ACDB (fig. 153); de sorte qu'en la mettant à la place de  $x$  dans l'équation (402) nous aurons

$$y = \frac{P(l-c)}{lE} \left\{ -\frac{2c(l+c)}{3} \left( l+c - \sqrt{\frac{(l+c)(3l-c)}{3}} \right) + \frac{l+c}{2} \left( l+c - \sqrt{\frac{(l+c)(3l-c)}{3}} \right)^2 - \frac{\left( l+c - \sqrt{\frac{(l+c)(3l-c)}{3}} \right)^3}{6} \right\}$$

Développant les termes de la grande parenthèse, et réduisant, il nous viendra

$$y = -\frac{P(l-c)}{lE} \left\{ -\frac{(l-c)(l+c)^2}{3} + \frac{(l+c)(3l-c)}{9} \sqrt{\frac{(l+c)(3l-c)}{3}} \right\} \quad (405).$$

Telle sera l'expression de l'ordonnée du point le plus bas de la courbe ADBC (fig. 153).

739. En ajoutant cette ordonnée, prise avec le signe +, à la valeur (399) de  $f = BE$ , nous aurons la plus grande flèche de courbure, qui sera

$$f = \frac{P(l^2 - c^2)}{9El} (3l - c) \sqrt{\frac{(l+c)(3l-c)}{3}} \dots\dots (406),$$

et qui se réduit à celle du n° 727, en faisant  $c = 0$ , c'est-à-dire, en supposant le poids  $2P$  suspendu au milieu de l'intervalle des appuis, comme cela doit être.

740. Si nous mettons  $x + c$  au lieu de  $x$  dans l'équation (401), elle se changera en celle-ci :

$$y = \frac{P(l+c)}{lE} \left\{ +\frac{2c(l-c)}{3} (x+c) + \frac{l-c}{2} (x+c)^2 + \frac{(x+c)^3}{6} \right\} \dots (407).$$

et si nous substituons  $x - c$  à la place de  $x$  dans l'équation (402), elle viendra

$$y = \frac{P(l-c)}{lE} \left\{ -\frac{2c(l-c)(x-c)}{3} + \frac{(l-c)(x-c)^2}{2} - \frac{(x-c)^3}{6} \right\} \dots (408),$$

Ces équations seront celles des courbes DB, DA (fig. 153), l'origine des coordonnées étant le milieu G de l'intervalle des appuis.

741. Nous avons trouvé (n° 734) que  $f = BE = Pp = \frac{P(l^2 - c^2)^2}{3El}$ ; or  $PM =$

$Pp - pM$  ou  $y = \frac{P(l^2 - c^2)^2}{3El} - y'$ ; si donc nous substituons cette valeur de  $y$  dans les équations (407), (408), elles deviendront

$$\frac{P(l^2 - c^2)^2}{3El} - y' = \frac{P(l+c)}{El} \left\{ \frac{2c(l-c)(x+c)}{3} + \frac{(l-c)(x+c)^2}{2} - \frac{(x+c)^3}{6} \right\}$$

$$\text{et } \frac{P(l^2 - c^2)^2}{3El} - y' = \frac{P(l-c)}{El} \left\{ -\frac{2c(l+c)(x-c)}{3} + \frac{l+c}{2}(x-c)^2 - \frac{(x-c)^3}{6} \right\}$$

c'est-à-dire,

$$y' = \frac{P(l+c)}{El} \left\{ \frac{(l+c)(l-c)^2}{3} - \frac{2c(l-c)(x+c)}{3} - \frac{(l-c)(x+c)^2}{2} + \frac{(x+c)^3}{6} \right\} \dots (409),$$

$$\text{et } y' = \frac{P(l-c)}{El} \left\{ \frac{(l-c)(l+c)^2}{3} + \frac{2c(l+c)(x-c)}{3} - \frac{(l+c)(x-c)^2}{2} + \frac{(x-c)^3}{6} \right\} \dots (410).$$

L'équation (409) sera celle de la branche DB, et l'équation (410) celle de l'autre branche DA, l'origine des coordonnées étant au point H, sur le milieu de la droite AB, qui passe par les points d'appui A et B.

742. Ces deux équations nous montrent que dans ce cas, comme dans tous ceux qui précèdent, les ordonnées sont proportionnelles au poids P, puisque ce poids est facteur dans leurs seconds membres.

743. Reprenons l'équation (397) du cas de la charge uniforme qui est

$$y = \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \right) \dots (a),$$

et rappelons-nous que la flèche de courbure (n° 728) est (396)

$$f = \frac{5Cl^5}{24E} \dots (b).$$

L'équation (a) suppose l'origine des coordonnées au point de contact C de la tangente horizontale DE (fig. 152); transportons cette origine au point D, milieu de l'horizontale AB, qui joint les points d'appui.

Pour cela, on observera que  $PM = Pp - pM$ , ou  $y = \frac{5Cl^3}{24E} - y'$ ; en substituant dans l'équation (a), il nous viendra

$$\frac{5Cl^3}{24E} - y' = \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \right),$$

d'où nous tirerons

$$y' = \frac{C}{2lE} \left\{ \frac{5l^4}{12} - \frac{l^2x^2}{2} + \frac{x^4}{12} \right\} \dots\dots\dots (c).$$

744. Si nous ajoutons l'équation (c) à chacune des équations (409), (410), en nommant  $y$  les sommes des premiers membres, nous aurons

$$y = \frac{P(l-c)}{El} \left\{ \frac{(l+c)(l-c)^2}{3} - \frac{3c(l-c)(x+c)}{3} - \frac{(l-c)(x+c)^2}{2} + \frac{(x+c)^3}{6} \right\} \\ + \frac{C}{2lE} \left\{ \frac{5l^4}{12} - \frac{l^2x^2}{2} + \frac{x^4}{12} \right\} \dots\dots\dots (411),$$

et  $y = \frac{P(+c)}{El} \left\{ \frac{(l-c)(l+c)^2}{3} + \frac{2c(l+c)(x-c)}{3} - \frac{(l+c)(x-c)^2}{2} + \frac{(x-c)^3}{6} \right\} \\ + \frac{C}{2lE} \left\{ \frac{5l^4}{12} - \frac{l^2x^2}{2} + \frac{x^4}{12} \right\} \dots\dots\dots (412).$

La première de ces deux équations sera celle de la branche DB (fig. 153), et la seconde celle de la branche DA de la courbe ADB que prendrait la lame neutre d'un prisme chargé uniformément dans tout l'intervalle des appuis, et d'un poids  $2P$  suspendu en un point quelconque D entre ces appuis.

745. Pour avoir la plus grande flèche de courbures de ce prisme, il faudrait déterminer la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente à la courbe (en un point quelconque de la branche DA) avec l'horizontale AB, qu'on trouverait être (n° 736)

$$\text{tang. } n = \frac{P(l-c)}{El} \left\{ \frac{2c(l+c)}{3} - (l+c)(x-c) + \frac{(x-c)^2}{2} \right\} \\ + \frac{C}{2lE} \left\{ -l^2x + \frac{x^3}{3} \right\} \dots\dots\dots (413).$$

On égalerait ensuite le second membre de cette équation à zéro, ce qui donnerait une équation du troisième degré, qui, étant résolue, ferait connaître la valeur de  $x$  qui répond à la plus grande ordonnée de la courbe, c'est-à-dire, à la plus grande flèche de courbure : en mettant donc cette valeur de  $x$  dans l'équation (412), elle donnerait la valeur de  $y$  qui est cette plus grande flèche. Pour éviter la longueur des calculs, nous nous contenterons

de déterminer la flèche de courbure qui a lieu au milieu de l'intervalle des appuis, et d'autant plus volontiers, qu'elle ne peut différer que très-peu de la plus grande, la courbure du prisme étant toujours supposée très-petite.

746. Pour avoir cette flèche de courbure, il suffira de faire  $x = 0$  dans l'équation (412), ce qui donnera

$$f = \frac{P(l-c)}{El} \left\{ \frac{(l-c)(l+c)^2}{3} - \frac{2c^2(l+c)}{3} - \frac{c^2(l+c)}{2} - \frac{c^5}{6} \right\} + \frac{5C^5}{24E}$$

$$= \frac{P(l-c)}{6El} (2l^3 - cl(9c - 2l) - 10c^3) + \frac{5C^5}{24E} \dots \dots (414)$$

Telle sera la flèche de courbure au milieu de l'intervalle des appuis dans le cas d'une charge uniforme et d'un poids suspendu en un point quelconque entre les appuis.

## LEÇON IX.

De la courbe que prend un prisme posé horizontalement et librement sur deux appuis, et chargé de diverses manières entre les appuis.

747. *Supposons d'abord qu'il s'agisse de la courbe que prend un prisme chargé de poids dont la somme est représentée par le triangle AEB (fig. 154), dont la base est la longueur AB, comprise entre les points d'appuis, et dont la perpendiculaire ED abaissée par le sommet E sur la base AB, divise cette base en deux parties égales.*

Il faut d'abord observer que la charge du prisme, représentée par le triangle ABE, dès que le prisme a pris la flexion qui lui convient, est représentée par la figure curviligne ACBF. Mais les éléments verticaux des deux figures restent les mêmes ainsi que leurs aires et les distances de ces éléments par rapport au milieu D de la distance entre les appuis. D'où il suit que nous pourrions calculer les charges des diverses parties de la pièce, d'après le triangle ABE.

Cela posé, nommons :

$2Q$  la charge totale ABE ;

$l$  la moitié DB ou DA de la distance entre les appuis ;

et  $x$  et  $y$  les coordonnées CP, PM d'un point quelconque M.

D'après cela, chacun des triangles ADE, DBE sera représenté par  $Q$  ; la

charge de la partie ACM de la lame neutre sera représentée par la figure AoNE, et celle de l'autre partie MB sera le triangle oNB.

Le triangle BoN étant semblable à BDE, on aura

$$(DB)^2 : (oB)^2 :: BDE : oBN,$$

ou  $l^2 : (l-x)^2 :: Q : oBN = \frac{Q(l-x)^2}{l^2} \dots\dots (a).$

On aura le trapèze

$$DoNE = Q - \frac{Q(l-x)^2}{l^2} = \frac{Q(2lx-x^2)}{l^2} \dots\dots (b).$$

Les charges (a), (b) et + Q font baisser le point M, en le faisant tourner, la première autour du point B, et la seconde autour du point A. Mais ces charges, pour faire baisser le point M, agissent à leur centre de gravité.

Le centre de gravité de la première (a) est à une distance, du point B,  $= \frac{2(l-x)}{3}$ , son moment par rapport au point B sera donc

$$\frac{2Q(l-x)^3}{3l^2} \dots\dots (c).$$

Appelons R un certain poids suspendu au point M; le moment de ce poids par rapport au point B sera  $R(l-x)$ ;

égalons ce moment à celui (c) de la charge comprise entre les points M et B, nous aurons

$$R(l-x) = \frac{2Q(l-x)^3}{3l^2};$$

divisons de part et d'autre par  $l-x$ , il viendra

$$R = \frac{2Q(l-x)^2}{3l^2} \dots\dots (d)$$

pour la valeur d'un poids suspendu au point M, qui produirait sur ce point M le même abaissement que la charge (a) répartie sur la longueur MB du prisme.

Le moment par rapport au point A de la charge de la partie AM du prisme, sera la somme des moments de la charge représentée par le triangle ADE, et de celle représentée par le trapèze DoNE. Or le moment de la charge représentée par le triangle ADE, sera

$$Q \times \frac{2l}{3} = \frac{2Ql}{3} \dots\dots (e).$$

Quant à celui du trapèze DoNE, on observera d'abord que la superficie du

triangle  $DBE = \frac{l}{2} \times DE = Q$ , d'où  $DE = \frac{2Q}{l}$ ; et que les triangles semblables  $DBE$ ,  $oBN$  donnent

$$DB : Bo :: DE : oN,$$

$$\text{ou } l : l - x :: \frac{2Q}{l} : oN = \frac{2Q(l-x)}{l^2}, \dots (f).$$

Ensuite la distance du centre de gravité du trapèze  $DoNE$  par rapport à la droite  $DE$ , est (n° 111)

$$\frac{Do}{3} \times \frac{2oN + DE}{oN + DE},$$

et en substituant pour  $Do$  sa valeur  $x$ , pour  $DE$  sa valeur  $\frac{2Q}{l}$ ; et pour  $oN$  sa valeur  $\frac{2Q(l-x)}{l^2}$ , il viendra

$$\frac{x}{3} \times \frac{\frac{4Q(l-x)}{l^2} + \frac{2Q}{l}}{\frac{2Q(l-x)}{l^2} + \frac{2Q}{l}} = \frac{3lx - 2x^2}{6l - 3x}, \dots (g).$$

La distance du même centre de gravité par rapport au point  $A$  sera donc égale à l'expression (g), plus la distance  $AD = l$ ; ainsi en appelant  $g$  cette distance, on aura

$$g = l + \frac{3lx - 2x^2}{6l - 3x} = \frac{2(3l^2 - x^2)}{3(2l - x)}, \dots (h).$$

Le moment de la charge représentée par le trapèze  $DoNE$ , pris par rapport au point  $A$ , sera donc égal au produit de (b)  $\left(\frac{2lx - x^2}{l^2}\right)$ , par la distance  $g$  du centre de gravité du trapèze au point  $A$ ; de sorte que ce moment sera

$$\frac{Q(2lx - x^2)}{l^2} \times \frac{2(3l^2 - x^2)}{3(2l - x)} = \frac{2Qx(3l^2 - x^2)}{3l^2}, \dots (i).$$

La somme des moments (e) et (i) sera celui de la charge totale comprise entre les points  $A$  et  $M$ , par rapport au point  $A$ , et sera égale à

$$\frac{2Ql}{3} + \frac{2Qx(3l^2 - x^2)}{3l^2} = \frac{2Q(l^3 + 3l^2x - x^3)}{3l^2}, \dots (k).$$

Nommons  $R'$  un poids suspendu au point  $M$ ; le moment de ce poids, par rapport au point  $A$ , sera  $R'(l+x)$ ; si donc nous égalons ce moment à celui (k), nous aurons

$$R'(l+x) = \frac{2Q(l^3 + 3l^2x - x^3)}{3l^2},$$

d'où 
$$R' = \frac{2Q (l^3 + 3l^2x - x^3)}{3l^2 (l+x)}.$$

Nous avons trouvé (éq. (d)) 
$$R = \frac{2Q (l-x)^2}{3l^2};$$

si donc nous ajoutons ces deux expressions, nous aurons

$$R + R' = \frac{2Q (l-x)^2}{3l^2} + \frac{2Q (l^3 + 3l^2x - x^3)}{3l^2 (l+x)} = \frac{2Q (2l^3 + 2lx - x^3)}{3l (l+x)} \dots (l)$$

pour celle d'un poids qui, suspendu au point M, produirait, sur ce point M, le même effet que la charge totale du prisme.

Actuellement, supposons qu'au lieu des points d'appui la charge du point M soit soutenue par deux forces verticales dirigées de bas en haut, l'une appliquée au point A, et l'autre au point B. Dans l'état d'équilibre, la somme de ces deux forces sera égale à la charge (l) du point M, et les momens de ces deux forces par rapport au point M seront égaux.

Appelons P la force appliquée au point A, et P' celle appliquée au point B; les bras de levier de ces forces, par rapport au point M, étant respectivement l + x et l - x, on aura

$$P (l+x) = P' (l-x),$$

d'où 
$$P : P' :: l-x : l+x,$$

ce qui donne 
$$P + P' : P' :: 2l : l+x.$$

Mais 
$$P + P' = R + R' = \frac{2Q (2l^3 + 2lx - x^3)}{3l (l+x)};$$

donc 
$$\frac{2Q (2l^3 + 2lx - x^3)}{3l (l+x)} : P' :: 2l : l+x$$

d'où 
$$P' = \frac{Q (2l^3 + 2lx - x^3)}{3l^2} \dots\dots\dots (m).$$

Le moment de ce point P' par rapport au point M sera donc

$$P' (l-x) = \frac{Q}{3l^2} (2l^3 + 2lx - x^3) (l-x),$$

ce moment doit faire équilibre à celui  $\frac{E}{r}$  de l'élasticité qui se développe dans la section droite du prisme au point M; on aura donc

$$\frac{E}{r} = \frac{Q}{3l^2} (2l^3 + 2lx - x^3) (l-x) = \frac{Q}{3l^2} (2l^3 - 3lx^2 + x^3) \dots\dots (n).$$

Les élémens de l'ordonnée y seront encore ici de la forme

$$d = \frac{x-x'}{r},$$



et en substituant dans l'expression de  $y$ , il en résultera

$$y = \frac{Q}{3l^2E} \left( l^3x^2 - \frac{lx^4}{4} + \frac{x^5}{20} \right) \dots (415):$$

telle sera l'équation demandée (\*)

748. Pour avoir la flèche de courbure au milieu de la pièce, il suffira de faire  $x = l$  dans cette dernière équation, ce qui donnera

$$f = \frac{Q}{3l^2E} \left( l^5 - \frac{l^5}{4} + \frac{l^5}{20} \right) = \frac{4Ql^5}{15E} \dots (416).$$

749. Pour avoir l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle formé, avec l'horizon, par la tangente à la courbe menée en un point M quelconque de cette courbe, on s'y prendra de la même manière qu'au n° 736 et

on aura 
$$\text{tang. } m = \frac{Q}{3l^2E} \left( 2l^3x - lx^3 + \frac{x^4}{4} \right) \dots (417).$$

750. Quant à l'expression de la même tangente, lorsque le point de contact est aux points d'appui, on l'obtiendra en faisant  $x = l$  dans l'équation précédente (417), ce qui donnera, toute réduction faite,

$$\text{tang. } m = \frac{5Ql^5}{12E} \dots (418)$$

751. *Supposons qu'il s'agisse de la courbe que prend un prisme posé horizontalement et librement sur deux appuis, et chargé de poids dont la somme est représentée par les triangles rectangles égaux ADF, DBE (fig. 155), dont les sommets D sont au milieu de la distance entre les appuis A et B.*

Nommons  $Q$  chaque triangle ADF, DBE,

$l$  la moitié AD ou DB de la distance entre les appuis,

(\*) Si dans l'équation (o) nous mettons  $\frac{d^2y}{dx^2}$  au lieu de  $\frac{y}{r}$ , il nous viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q}{3l^2E} (2l^3 - 3lx^2 + x^3)$$

d'où 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{3l^2E} \left( 2l^3x - lx^3 + \frac{x^4}{4} \right)$$

et 
$$y = \frac{Q}{3l^2E} \left( l^3x^2 - \frac{lx^4}{4} + \frac{x^5}{20} \right)$$

équation pareille à celle du corps de l'ouvrage.

$x$  et  $y$  les coordonnées CP, PM d'un point quelconque de la courbe ACB, l'origine des coordonnées étant en C, milieu de l'horizontal GH, tangente à la courbe.

Cela posé, la charge de la partie AM du prisme sera représentée par la somme des triangles ADF, DNO, et celle de la partie MB par le trapèze NBEO.

Observons que ce trapèze NOEB est la différence entre les triangles semblables DBE, DNO; la proportion

$$(DB)^2 : (DN)^2 :: Q : DNO \quad \text{ou} \quad l^2 : x^2 :: Q : DNO,$$

donnera 
$$DNO = \frac{Qx^2}{l^2},$$

et on aura par conséquent

$$NBEO = Q - \frac{Qx^2}{l^2} = \frac{Q(l^2 - x^2)}{l^2} \dots\dots (a),$$

pour la charge de la partie MB du prisme.

La charge de la partie AM sera

$$ADF + DNO = Q + \frac{Qx^2}{l^2} = \frac{Q(l^2 + x^2)}{l^2} \dots\dots (b).$$

La première charge fait baisser le point M autour du point B, et la seconde autour du point A.

Le centre de gravité de la charge NBEO sera à une distance du point B égale à

$$\frac{NB}{3} \times \frac{2NO + BE}{NO + BE} \dots\dots (c).$$

Or, la superficie du triangle

$$DBE = \frac{DB}{2} \times BE = \frac{l}{2} \times BE = Q; \quad \text{d'où} \quad BE = \frac{2Q}{l},$$

et 
$$DB : DN :: BE : NO,$$

ou 
$$l : x :: \frac{2Q}{l} : NO = \frac{2Qx}{l^2};$$

et 
$$NB = l - x.$$

En substituant dans l'expression (c), il viendra

$$\frac{l-x}{3} \times \frac{4Qx + 2Ql}{2Qx + 2Ql} = \frac{(l-x)(2x+l)}{3(x+l)};$$

multiplions cette distance ou bras de levier par la charge (a) de la partie MB, il nous viendra pour le moment de cette charge, par rapport au point B,

$$\text{mom. NBEO} = \frac{Q(l^2 - x^2)}{l^2} \times \frac{(l-x)(2x+l)}{3(x+l)} = \frac{Q(l-x)^2(2x+l)}{3l^2} \dots (d).$$

Si l'on appelle  $R$  un poids suspendu au point  $M$ , son moment par rapport au point  $B$  sera

$$R (l - x);$$

et si l'on égale ce moment à celui ( $d$ ) de la charge NBEO, on aura

$$R (l - x) = \frac{Q (l - x)^2 (x + l)}{3l^2},$$

ce qui donnera  $R = \frac{Q (l - x) (2x + l)}{3l^2} \dots\dots (e)$

pour la grandeur d'un poids qui, suspendu au point  $M$ , produirait sur ce point  $M$  le même effet que la charge NBEO.

Le moment par rapport au point  $A$  de la charge représentée par le triangle ADF est

$$\frac{AD}{3} \times Q = \frac{lQ}{3},$$

celui de la charge représentée par le triangle DNO par rapport au même point  $A$  sera

$$\frac{Qx^2}{l^2} \times \left( AD + \frac{2DN}{3} \right) = \frac{Qx^2}{l^2} \left( l + \frac{2x}{3} \right).$$

La somme de ces deux derniers moments sera donc

$$\text{mom. ANODF} = \frac{lQ}{3} + \frac{Qx^2}{l^2} \left( l + \frac{2x}{3} \right) = \frac{Q}{3l^2} (l^3 + 3lx^2 + 2x^3) \dots (f).$$

Si nous appelons  $R'$  un poids suspendu au point  $M$ , son moment par rapport au point  $A$  sera  $R' (l + x)$ ; et si nous égalons ce moment à celui ( $f$ ) ci-dessus, il nous viendra

$$R' (l + x) = \frac{Q}{3l^2} (l^3 + 3lx^2 + 2x^3)$$

d'où  $R' = \frac{Q}{3l^2(l+x)} (l^3 + 3lx^2 + 2x^3) \dots\dots (g)$

pour le poids  $R'$  qui, suspendu au point  $M$ , produirait sur le point  $A$  le même effet que la charge représentée par la somme des triangles ADF, DNO.

Nous pourrions donc regarder ce point  $M$  comme chargé de la somme des poids  $R + R'$ , qui sera, d'après les équations ( $e$ ) et ( $g$ ).

$$\begin{aligned} R + R' &= \frac{Q(l-x)(2x+l)}{3l^2} + \frac{Q}{3l^2(l+x)} (l^3 + 3lx^2 + 2x^3) \\ &= \frac{2Q(l^2 + lx + x^2)}{3l(l+x)} \dots (h). \end{aligned}$$

Si maintenant au lieu des points d'appui nous substituons deux forces

verticales, l'une appliquée au point A et l'autre au point B, et agissant de bas en haut ; dans l'état d'équilibre, la somme de ces deux forces sera égale à la charge  $\frac{2Q (l^2 + lx + x^2)}{3l (l + x)}$  du point M, et les momens de ces mêmes forces verticales seront égaux ; si donc P est la force appliquée au point A, et P' celle appliquée au point B, on aura

$$P (l + x) = P' (l - x),$$

d'où  $P : P' :: (l - x) : (l + x),$

ce qui donne  $P + P' : P' :: 2l : (l + x),$

Mais  $P + P' = \frac{2Q (l^2 + lx + x^2)}{3l (l + x)},$

donc  $\frac{2Q (l^2 + lx + x^2)}{3l (l + x)} : P' :: 2l : (l + x),$

d'où  $P' = \frac{Q (l^2 + lx + x^2)}{3l^2} \dots\dots\dots (l).$

Le moment de cette force P' par rapport au point M, sera

$$P' (l - x) = \frac{Q (l^2 + lx + x^2) (l - x)}{3l^2} = \frac{Q (l^3 - x^3)}{3l^2},$$

mais ce moment doit faire équilibre à celui  $\frac{E}{r}$  de l'élasticité qui se développe dans la section droite du solide au point M ; on aura donc

$$\frac{E}{r} = \frac{Q (l^3 - x^3)}{3l^2} \dots\dots\dots (k).$$

Quant aux élémens de l'ordonnée  $y$ , ils seront toujours de la forme

$$d = \frac{x - x'}{r},$$

et en tirant la valeur de  $\frac{1}{r}$ , de l'équation (k), après y avoir changé  $x$  en  $x'$ , pour la substituer dans l'équation ci-dessus, il viendra

$$d = \frac{Q}{3l^2 E} (l^3 - x'^3) (x - x').$$

Les autres élémens de  $y$  seront de la même forme, et ne différeront qu'en ce qu'au lieu de  $x'$  il faudra mettre successivement  $x''$ ,  $x'''$ , etc. Par conséquent, leur somme ou la valeur de  $y$  sera de la forme

$$y = \frac{Q}{3l^2 E} \left\{ (l^3 - x'^3) (x - x') + (l^3 - x''^3) (x - x'') \dots\dots \right\}$$

et en faisant sur les  $x', x'', x'''$ , etc., les mêmes observations que d'habitude,

$$y = \frac{Q}{3l^2E} \{ (l^3-1)(x-1) + (l^3-8)(x-2) + \dots + (l^3-n^3)(x-n) \}$$

En développant les parenthèses comme précédemment, et en prenant les limites de celles qui résulteront de ces développemens, après la substitution faite dans l'expression de  $y$  ci-dessus, il viendra

$$y = \frac{Q}{3l^2E} \left( \frac{l^5x^2}{2} - \frac{x^5}{20} \right) \dots \dots \dots (419)$$

pour l'équation demandée (\*).

752. On aura la flèche de courbure, en faisant  $x = l$ , dans cette équation, ce qui donnera

$$f = \frac{3Ql^5}{20E} \dots \dots \dots (420).$$

753. Quant à l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle de la tangente à la courbe par rapport à l'horizon, pour un point quelconque de la courbe, elle s'obtiendra de même que précédemment, et sera

$$\text{tang.} = \frac{Q}{3l^2E} \left( l^3x - \frac{x^4}{4} \right) \dots \dots \dots (421).$$

454. Enfin, la tangente aux extrémités de la pièce, sera

$$\text{tang. } m = \frac{Ql^3}{4E} \dots \dots \dots (422).$$

755. Supposons qu'on demande la courbe que prend un prisme chargé de poids dont la somme est représentée par la figure ABDEF (fig. 156), symétrique par rapport à la verticale EI élevée sur le milieu I de la distance AB entre les appuis.

(\*) L'équation (k) deviendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q}{3l^2E} (l^5 - x^5)$$

en y mettant pour  $\frac{1}{r}$  sa valeur  $\frac{d^2y}{dx^2}$

d'où 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{3l^2E} \left( l^5x - \frac{x^4}{4} \right)$$

et 
$$y = \frac{Q}{3l^2E} \left( \frac{l^5x^2}{2} - \frac{x^5}{20} \right).$$

Dans ce cas, on peut supposer la charge composée de deux autres, dont une uniforme représentée par le rectangle ABDF, et l'autre par le triangle FDE. Par conséquent, le moment par rapport au point M, de la force verticale appliquée au point B qui agit de bas en haut, et qui doit faire équilibre au moment  $\frac{E}{r}$  de l'élasticité de la section droite du solide au point M, sera évidemment égal à la somme des moments analogues pour le cas où le prisme est chargé uniformément, et pour celui où le solide ne serait chargé que de la somme des poids représentés par le triangle FDE; mais nous avons trouvé au n° 731 que le premier de ces moments était  $\frac{C(l^3 - x^3)}{2l}$ , et le second a été trouvé au n° 747 (éq. (n)) égal à

$$\frac{Q}{3l^2} (2l^3 - 3lx^2 + x^3),$$

nous aurons donc

$$\frac{E}{r} = \frac{C(l^3 - x^3)}{2l} + \frac{Q}{3l^2} (2l^3 - 3lx^2 + x^3) \dots (a).$$

Quant à l'expression des élémens de l'ordonnée  $y$ , elle sera encore

$$d = \frac{x - x'}{r},$$

et par conséquent

$$d = \frac{C(l^3 - x'^3)(x - x')}{2lE} + \frac{Q}{3l^2E} (2l^3 - 3lx^2 + x^3)(x - x') \dots (b).$$

Or, cette valeur de  $d$  est la somme des expressions trouvées aux n°s 731 et 747; donc, les ordonnées de la courbe dans le cas actuel est la somme de celles des courbes des mêmes numéros. Ainsi l'équation demandée sera

$$y = \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^3x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) + \frac{Q}{3l^2E} \left( lx^2 - \frac{lx^4}{4} + \frac{x^5}{20} \right) \dots \dots \dots (423).$$

755. La flèche de courbe s'obtiendra en faisant  $x = l$  dans cette dernière équation, ou sera la somme de celles des n° 728 et 748, c'est-à-dire que

$$f = \frac{5Cl^5}{24E} + \frac{4Ql^5}{15E} \dots \dots \dots (424).$$

756. L'expression de la tangente trigonométrique de l'angle formé, avec l'horizon, par la tangente à la courbe, pour un point de contact quelconque, s'obtiendra comme à l'ordinaire d'après l'équation (423), et sera

$$\text{tang. } m = \frac{C}{2lE} \left( l^2x - \frac{x^3}{3} \right) + \frac{Q}{3l^2E} \left( 2l^3x - lx^3 + \frac{x^4}{4} \right) \dots \dots (425).$$

757. Pour la même tangente lorsque le point de contact est aux points d'appui, on aura

$$\text{tang. } m = \frac{Cl^3}{3E} + \frac{5Ql^3}{12E} \dots\dots\dots (426).$$

758. Demandons-nous la courbe que prend un prisme chargé, dans toute la distance entre les appuis, de poids dont la somme est représentée par la figure ABDEF (fig. 157), symétrique par rapport à la verticale-IE menée par le milieu I de la distance entre les appuis.

Dans ce cas, la charge de la pièce peut être décomposée en deux parties; l'une uniforme, représentée par le rectangle ABHG, et l'autre par les deux triangles GEF, EHD. D'après cette observation, et ce qui a été dit au n° 754, l'expression de  $y$  sera la somme de celles des ordonnées pour les cas des n° 729 et 751; ainsi nous aurons

$$y = \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \right) + \frac{Q}{3l^2E} \left( \frac{l^3x^3}{2} - \frac{x^5}{20} \right) \dots\dots\dots (427).$$

pour l'équation demandée, dans laquelle C sera la demi-somme des poids uniformes représentée par le rectangle ABHG, et Q l'une des charges représentées par les triangles égaux GEF, EHD.

759. La flèche de courbure s'obtiendra en faisant  $x = l$  dans l'équation (427), et on aura

$$f = \frac{5Cl^5}{24E} + \frac{3Ql^5}{20E} \dots\dots\dots (428).$$

760. L'expression de la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente à la courbe avec l'horizon, le point de contact étant quelconque, s'obtiendra comme à l'ordinaire, d'après l'équation (427), et on aura

$$\text{tang. } m = \frac{C}{2lE} \left( lx - \frac{x^3}{3} \right) + \frac{Q}{3l^2E} \left( l^3x - \frac{x^4}{4} \right) \dots\dots\dots (429).$$

761. Et lorsque le point de contact est aux points d'appui,

$$\text{tang. } m = \frac{Cl^3}{3E} + \frac{Ql^3}{4E} \dots\dots\dots (430).$$

## LEÇON X.

Suite de la recherche de la courbe que prend un prisme posé horizontalement et librement sur deux appuis, et chargé de diverses manières dans l'intervalle des appuis.

762. Cherchons la courbe que prend un prisme chargé par des poids dont la somme est représentée par le triangle ABC (fig. 158), dont la base AB est l'intervalle des appuis.

Prenons pour l'axe des abscisses une horizontale DE qui coupe la courbe en un point F, milieu de la distance DE des appuis; prenons ce point F pour l'origine des coordonnées, et nommons  $m$  l'angle EFG que fait avec l'horizontale DE la tangente HG menée par le point F de la courbe. Enfin, nommons Q la charge totale du prisme, ou ce qui est la même chose, l'aire du triangle ABC.

Cela posé, cherchons la charge de la partie AN du prisme, et celle de la partie NB. La première sera représentée par le triangle ANO, et la seconde par le trapèze NBCO.

Pour avoir le triangle ANO, on observera qu'il est semblable au triangle totale ABC, ce qui donnera

$$(AB)^2 : (AN)^2 :: Q : ANO,$$

$$\text{ou} \quad 4l^2 : (l+x)^2 :: Q : ANO = \frac{Q(l+x)^2}{4l^2}$$

Le moment de cette charge par rapport au point A sera

$$\frac{Q(l+x)^2}{4l^2} + \frac{2(l+x)}{3} = \frac{Q(l+x)^3}{6l^2} \dots\dots\dots (a).$$

Soit R un poids suspendu au point M; son moment par rapport au point A sera  $R(l+x)$ ; égalons ce moment à celui (a) ci-dessus, il nous viendra

$$R(l+x) = \frac{Q(l+x)^3}{6l^2},$$

$$\text{et par conséquent} \quad R = \frac{Q(l+x)^2}{6l^2} \dots\dots\dots (b).$$

C'est le poids qui, suspendu au point M produirait le même effet autour du point A que la charge représentée par le triangle ANO; ce poids produira donc sur le point M le même abaissement que cette charge ANO.

Pour avoir le trapèze NBCO, on observera que ce trapèze est la différence entre les triangles ABC et ANO ; mais le premier est représenté par Q, le second a été trouvé égal à  $\frac{Q(l+x)^2}{4l^2}$  ; donc

$$\text{NBCO} = Q - \frac{Q(l+x)^2}{4l^2} = \frac{Q(3l+x)(l-x)}{4l^2} \dots\dots\dots (c).$$

La distance du centre de gravité de ce trapèze par rapport au point B, est

$$\frac{\text{NB}}{3} \times \frac{2\text{NO} + \text{BC}}{\text{NO} + \text{BC}} \dots\dots\dots (d).$$

Mais le triangle ABC =  $\frac{\text{AB}}{2} \times \text{BC} = l \times \text{BC} = Q$  ; donc  $\text{BC} = \frac{Q}{l} \dots\dots (e)$ .

Les triangles semblables ABC, ANO donnent

$$\text{AB} : \text{AN} :: \text{BC} : \text{NO},$$

$$\text{ou} \quad 2l : l+x :: \frac{Q}{l} : \text{NO} = \frac{Q(l+x)}{2l^2} \dots\dots\dots (f).$$

Si donc nous substituons dans l'expression (d) les expressions (e) et (f), et pour NB sa valeur  $l-x$ , nous aurons

$$\frac{l-x}{3} \times \frac{\frac{2Q(l+x)}{2l^2} + \frac{Q}{l}}{\frac{Q(l+x)}{2l^2} + \frac{Q}{l}} = \frac{2(2l+x)(l-x)}{3(3l+x)}$$

Multiplions cette dernière expression par la charge (c) ci-dessus, et nous aurons

$$\frac{Q(3l+x)(l-x)}{4l^2} \times \frac{2(2l+x)(l-x)}{3(3l+x)} = \frac{Q(2l+x)(l-x)^2}{6l^2} \dots\dots\dots (g).$$

pour le moment de la charge de la partie MB, par rapport au point B.

Supposons le poids R' suspendu au point M ; le moment de ce poids par rapport au point B sera R' (l-x) ; égalons-le à celui (g) ci-dessus, il nous

$$\text{viendra} \quad R'(l-x) = \frac{Q(2l+x)(l-x)^2}{6l^2},$$

$$\text{d'où} \quad R' = \frac{Q(2l+x)(l-x)}{6l^2} \dots\dots\dots (h).$$

Ce poids R' suspendu au point M, produirait sur le point B le même effet que la charge représentée par le trapèze NBCO, ce poids R' produira donc sur le point M le même abaissement que la charge NBCO.

Ajoutons les expressions (b) et (h), et nous aurons!

$$R + R' = \frac{Q(l+x)^2}{6l^2} + \frac{Q(2l+x)(l-x)}{6l^2}$$

d'où en développant et réduisant,

$$R + R' = \frac{Q(3l^2 + lx)}{6l^2} = \frac{Q(3l+x)}{6l} \dots\dots (i),$$

pour le poids total qui produit l'abaissement du point M.

Si actuellement à la place des points d'appui nous substituons deux forces verticales, agissant de bas en haut, l'une P appliquée au point A, et l'autre P' appliquée au point B, dans l'état d'équilibre, la somme de ces deux forces doit égaler la charge (i) du point M, et leurs momens doivent être égaux.

Ainsi nous aurons  $P(l+x) = P'(l-x),$

d'où  $P : P' :: l-x : l+x,$

ce qui donne  $P + P' : P' :: 2l : l+x.$

Mais  $P + P' = R + R' = \frac{Q(3l+x)}{6l},$

donc  $\frac{Q(3l+x)}{6l} : P' :: 2l : l+x,$

d'où  $P' = \frac{Q(3l+x)(l+x)}{12l^2}$

Le moment de cette force qui est

$$P'(l-x) = \frac{Q(3l+x)(l+x)(l-x)}{12l^2} = \frac{Q(3l+x)(l^2-x^2)}{12l^2}$$

doit faire équilibre au moment  $\frac{E}{r}$  de l'élasticité de la section droite du prisme au point M, il résultera donc que

$$\frac{E}{r} = \frac{Q(3l+x)(l^2-x^2)}{12l^2} \dots\dots (l).$$

La somme des élémens de la forme  $\frac{x-x'}{r}$  sera égale, non à  $y = PM$  ou  $= P'M'$ , mais à  $QM$  ou  $Q'M'$ , ainsi pour avoir  $PM$ , de la somme de ces élémens, il faudra retrancher  $QP$ , et pour avoir  $P'M'$ , il faudra ajouter  $Q'P'$ .

Mais le triangle rectangle FPQ donne

$$1 : \text{tang. EFG} :: FP : PQ,$$

ou  $1 : \text{tang. } m :: x : PQ = x \text{ tang. } m \dots\dots (m)$ ;

ainsi, pour la partie FB de la courbe, de la somme des élémens de la forme  $\frac{x - x'}{r}$ , il faudra retrancher  $x \text{ tang. } m$ .

De l'équation (l) tirons la valeur de  $\frac{1}{r_1}$ , après y avoir mis  $x'$  au lieu de  $x$ , et substituons-la dans l'expression  $d = \frac{x - x'}{r}$ , ce qui donnera

$$d = \frac{Q (3l + x') (l^2 - x'^2) (x - x')}{12l^2E};$$

et par conséquent

$$y = -x \text{ tang. } m + \frac{Q}{12l^2E} \left\{ (3l + x') (l^2 - x'^2) (x - x') + (3l + x'') (l^2 - x''^2) (x - x'') \dots \right\}$$

pour la branche FB de la courbe.

En faisant sur les abscisses  $x'$ ,  $x''$ , etc., les mêmes observations que d'habitude, nous aurons

$$y = -x \text{ tang. } m + \frac{Q}{12l^2E} \left\{ (3l + 1) (l^2 - 1) (x - 1) + (3l + 2) (l^2 - 4) (x - 2) \dots (3l + n) (l^2 - n^2) (x - n) \right\}$$

En développant dans la grande parenthèse et prenant les limites, comme à l'ordinaire, il viendra

$$y = -x \text{ tang. } m + \frac{Q}{12l^2E} \left( 3nl^3x + \frac{l^2xn^2}{2} - lxn^3 - \frac{xn^4}{4} - \frac{3l^2n^2}{2} - \frac{l^2n^5}{3} + \frac{3ln^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right),$$

et en faisant  $n = x$ ,

$$y = -x \text{ tang. } m + \frac{Q}{12l^2E} \left( 3l^3x^2 + \frac{l^2x^3}{2} - lx^4 - \frac{x^5}{4} - \frac{3l^2x^2}{2} - \frac{l^2x^5}{3} + \frac{3lx^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right),$$

enfin en réduisant, on aura

$$y = -x \text{ tang. } m + \frac{Q}{12l^2E} \left( \frac{3l^3x^2}{2} + \frac{l^2x^3}{6} - \frac{lx^4}{4} - \frac{x^5}{20} \right) \dots\dots (n)$$

pour l'équation de la branche FB (\*). Cette équation servira aussi pour l'autre branche FA, en y mettant  $-x$  au lieu de  $+x$ .

Dans cette équation (n), faisons alternativement  $x = l$ , et  $x = -l$ ;  $y$  deviendra l'abaissement IF du milieu F de la courbe AFB; appelons cet abaissement  $f'$ , et nous aurons, toutes réductions faites,

$$f' = -l \operatorname{tang.} + \frac{41Ql^5}{360E},$$

et 
$$f' = l \operatorname{tang.} m + \frac{34l^5}{360E}.$$

Si l'on retranche la première, de ces deux dernières équations, de la seconde il viendra

$$0 = 2l \operatorname{tang.} m - \frac{7Ql^5}{360E},$$

d'où 
$$\operatorname{tang.} m = \frac{7Ql^4}{720E} \dots (431).$$

Substituons cette valeur dans l'équation (n), et nous aurons finalement

$$y = -\frac{7Ql^2x}{720E} + \frac{Q}{12l^2E} \left( \frac{3l^5x^2}{2} + \frac{l^2x^3}{6} - \frac{lx^4}{4} - \frac{x^5}{20} \right),$$

ou 
$$y = \frac{Q}{12l^2E} \left\{ -\frac{7l^4x}{60} + \frac{3l^5x^2}{2} + \frac{l^2x^3}{6} - \frac{lx^4}{4} - \frac{x^5}{20} \right\} \dots (432)$$

763. Pour avoir l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle formé, avec l'axe des abscisses, par la tangente menée par un point quelconque de la courbe, on s'y prendra comme à l'ordinaire, en opérant sur l'équation (432), et on aura

$$\operatorname{tang.} n = \frac{Q}{12l^2E} \left( -\frac{7l^4}{60} + 3l^3x + \frac{l^2x^2}{2} - lx^3 - \frac{x^4}{4} \right) \dots (433).$$

(\* dans l'équation (l) nous mettons pour  $\frac{1}{r}$  sa valeur  $\frac{d^2y}{dx^2}$  nous aurons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q(3l+x)(l^2-x^2)}{12l^2E} = \frac{Q}{12l^2E} (3l^3 + l^2x - 3lx^2 - x^3),$$

d'où 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{12l^2E} \left( 3l^3x + \frac{l^2x^2}{2} - lx^3 - \frac{x^4}{4} \right) - \operatorname{tang.} m,$$

et 
$$y = \frac{Q}{12l^2E} \left( \frac{3l^5x^2}{2} + \frac{l^2x^3}{6} - \frac{lx^4}{4} - \frac{x^5}{20} \right) - x \operatorname{tang.} m,$$

équation égale à l'équation (n).

764. La tangente menée au point le plus abaissé serait horizontale, et dans ce cas  $n = 0$ , et par conséquent  $\text{tang. } n = 0$ ; d'où il suit que

$$-\frac{7l^4}{60} + 3l^3x + \frac{l^2x^2}{2} - lx^3 - \frac{x^4}{4} = 0,$$

équation qui se réduit à

$$x^4 + 4lx^3 - 2l^2x^2 - 12l^3x + \frac{7l^4}{15} = 0;$$

faisons dans cette équation  $x = z - l$ , en substituant, développant et réduisant, il viendra

$$z^4 - 8lz^2 + \frac{112l^4}{15} = 0,$$

d'où on tirera

$$\begin{aligned} z &= \pm \sqrt{4l^2 \pm \sqrt{16l^4 - \frac{112l^4}{15}}}, \\ &= \pm l \sqrt{4 \pm 2,92}, \end{aligned}$$

et en séparant les racines

$$z = \pm l \sqrt{4 + 2,92} = \pm l \sqrt{6,92},$$

et 
$$z' = \pm l \sqrt{4 - 2,92} = \pm l \sqrt{1,37},$$

ou 
$$z = \pm 2,63 \times l,$$

et 
$$z' = \pm 1,17 \times l.$$

Mais nous avons fait  $x = z - l$ , nous aurons donc

$$x = \pm 2,63 \times l - l,$$

et 
$$x = \pm 1,17 \times l - l,$$

ou 
$$x = 1,63 \times l \text{ et } x = -3,63 \times l,$$

et 
$$x = 0,17 \times l \text{ et } x = -2,17 \times l.$$

De ces quatre valeurs de  $x$ , la troisième seule convient ici : les trois autres dépassant les points d'appui. Ces quatre valeurs de  $x$  annoncent que si l'on considérait la courbe indéfiniment prolongée, elle aurait en tout quatre points pour lesquels la tangente serait horizontale, mais pour l'objet que nous nous proposons ici, il nous suffit de considérer le point dont l'abscisse  $x = 0,17 \times l$ , c'est-à-dire, le point, entre les appuis, qui a subi le plus grand abaissement. Comme la flexion est supposée très-faible, pour rendre les calculs plus simples, nous pourrions supposer  $x = 0,2 l$ , sans erreur sensible.

765. Substituons cette valeur de  $x$  dans l'équation (432), il nous viendra

$$y = \frac{Q}{12l^2E} \left\{ -\frac{1,4l^5}{60} + \frac{0,12l^5}{2} + \frac{0,008l^5}{6} - \frac{0,0016l^5}{4} - \frac{0,00032l^5}{20} \right\},$$

et après avoir fait les réductions,

$$y = -\frac{Ql^5}{12E} (0,016016) = -\frac{Ql^5}{E} (0,001334) \dots (434).$$

Comme cette valeur de  $y$  est négative, il s'ensuit que le point le plus abaissé est au-dessous de l'axe horizontal DE des abscisses.

766. Pour avoir l'abaissement IF ou EB du milieu F, nous ferons  $x = l$  dans l'équation (432), ce qui donnera

$$y = \frac{Q}{12l^2E} \left( -\frac{7l^5}{60} + \frac{3l^5}{2} + \frac{l^5}{6} - \frac{l^5}{4} - \frac{l^5}{20} \right) = \frac{75Ql^5}{720E} = \frac{Ql^5}{E} (0,10416) = IF.$$

767. Quant à la plus grande flèche, elle sera égale à la valeur de IF, plus celle (434) de  $y$  prise d'une manière absolue : on aura donc

$$f = \frac{Ql^5}{E} (0,10416 + 0,001334) = \frac{Ql^5}{E} (0,105494) \dots (435)$$

768. Demandons-nous la courbe que prend un prisme chargé de poids dont la somme est représentée par le trapèze ABCD (fig. 159).

Ici la charge peut être décomposée en deux parties ; l'une uniforme, représentée par le rectangle ABMD, et l'autre représentée par le triangle DEC. En nommant ces charges respectivement C et Q, et d'après les considérations dont nous avons accompagné les cas analogues à celui-ci, nous aurons :

1° L'équation de la courbe actuelle, en ajoutant les seconds membres de celles des n° 729 et 762, ce qui nous donnera

$$y = \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + \frac{Q}{12l^2E} \left( -\frac{7l^4x}{60} + \frac{3l^2x^2}{6} + \frac{l^2x^5}{6} - \frac{lx^4}{4} - \frac{x^5}{20} \right) \dots (436);$$

2° L'expression de la flèche de courbure en ajoutant celles des n° 728 et 767, ce nous conduira à

$$f = \frac{56l^5}{24E} + \frac{Ql^5}{E} (0,105494) \dots (437);$$

Et 3° L'expression de la tangente pour un point quelconque de contact, en opérant comme à l'ordinaire sur l'équation (436), et on aura

$$\text{tang. } m = \frac{C}{2lE} \left( lx - \frac{x^2}{3} \right) + \frac{Q}{12l^2E} \left( -\frac{7l^4}{60} + 3l^2x + \frac{l^2x^2}{2} - lx^3 - \frac{x^4}{4} \right) \dots (438).$$

LEÇON XI.

Suite de la recherche de la courbe que prend un prisme posé librement sur deux appuis de niveau, et chargé d'une certaine manière dans l'intervalle des appuis.

769. *Proposons-nous de déterminer la courbe que prend un prisme chargé uniformément dans une partie quelconque de la longueur entre les appuis.*

Soit *abhd* (fig. 160), le rectangle dont la superficie représente la charge du prisme ; nommons

- l* la demi-distance KB des appuis,
- c* la distance Ke, du milieu K de l'intervalle des appuis, au milieu *e*, de la charge *abhd* du prisme,
- d* la demi-longueur *ae* ou *eb* de la même charge, et
- C* cette charge totale.

Supposons que la lame neutre du prisme ait pris la courbe AIB ; par le point H où la verticale GH, abaissée du centre de gravité G du rectangle *abhd*, rencontre cette courbe AIB, menons l'horizontale DE et la tangente LF ; prenons cette horizontale DE pour l'axe des abscisses, et le point H pour l'origine des coordonnées.

Cela posé, il est évident 1° que la tangente LF menée au point H n'est pas horizontale ; 2° que la courbe AIB se divisera en quatre branches différentes, savoir : Hm, Hn, mB et nA ; de sorte que cette courbe exigera quatre équations qu'il faut déterminer.

Cherchons d'abord celle de la branche Hm.

Pour cela, déterminons les pressions des points d'appui A et B. Ces pressions seront en raison inverse des distances Ae, eB du centre de gravité de la charge C ; or, on a

$$Ae = AK + Ke = l + c, \text{ et } eB = KB - Ke = l - c.$$

Si donc P et P' sont les pressions respectives des points A et B, nous aurons

$$P : P' :: l - c : l + c,$$

d'où  $P + P' : P :: 2l : l - c$  et  $P + P' : P' :: 2l : l + c$ ,

ce qui donnera

$$P = \frac{C(l-c)}{2l} \text{ et } P' = \frac{C(l+c)}{2l} \dots\dots\dots (a).$$

Si au lieu de la charge uniforme  $C$  on avait seulement un poids suspendu au point  $H$ , en encastrant le solide depuis le point  $A$  jusqu'au point  $H$ , la partie  $HB$  de la courbe aurait l'équation  $(g)$  du n° 733; de sorte que, en observant que le poids  $P$  de cette équation  $(g)$  est ici  $\frac{C}{2}$ , nous aurions pour l'équation de la courbe  $HB$ ,

$$y = x \text{ tang. } m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ (l+c) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} \dots (b).$$

La charge répartie de  $H$  en  $m$ , qui égale  $\frac{C}{2}$  vient nécessairement modifier cette courbe, et comme cette charge agit en sens contraire de la réaction du point d'appui  $B$ , et que l'équation (331) est celle d'un prisme encastré par un bout et chargé uniformément dans toute sa longueur, de l'équation  $(b)$  il faudra retrancher

$$\frac{C'}{2l'E} \left( \frac{l'^2 x^2}{2} - \frac{l' x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right),$$

c'est-à-dire, 
$$\frac{C}{4dE} \left( \frac{d^2 x^2}{2} - \frac{d x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right),$$

attendu que dans le cas actuel  $C' = \frac{C}{2}$  et  $l' = d$ ; l'équation de la branche  $Hm$  sera donc

$$y = x \text{ tang. } m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ (l+c) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \frac{C}{4dE} \left\{ \frac{d^2 x^2}{2} - \frac{d x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right\} \dots (c).$$

De cette équation on passera à celle de la branche  $Hn$ , en y changeant les signes de  $c$  et de  $\text{tang. } m$ ; de sorte qu'on aura pour cette branche  $Hn$ ,

$$y = -x \text{ tang. } m + \frac{C(l-c)}{2lE} \left\{ (l+c) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \frac{C}{4dE} \left\{ \frac{d^2 x^2}{2} - \frac{d x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right\} \dots (d).$$

Si dans l'équation  $(c)$  nous faisons  $x = d$ ,  $y$  deviendra  $Qm$ , et on aura

$$\begin{aligned} Qm &= d \text{ tang. } m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ \frac{(l-c)d^2}{2} - \frac{d^3}{6} \right\} - \frac{C}{4dE} \left\{ \frac{d^4}{2} - \frac{d^4}{3} + \frac{d^4}{12} \right\} \\ &= d \text{ tang. } m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ \frac{(l-c)d^2}{2} - \frac{d^3}{6} \right\} - \frac{Cd^3}{16E} \dots (e). \end{aligned}$$

Nommons  $n$  l'angle formé avec l'horizontale  $DE$ , par une tangente quel-

conque à la branche de courbe  $Hm$  ; on trouvera, en opérant, sur l'équation (c), comme à l'ordinaire, que

$$\text{tang. } n = \text{tang. } m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ (l-c)x - \frac{x^3}{2} \right\} - \frac{C}{4dE} \left\{ d^2x - dx^2 + \frac{x^3}{3} \right\} \dots\dots\dots (f).$$

Pour savoir ce que devient cette tangente lorsque le point de contact est en  $m$ , il suffit de faire  $x = d$  dans l'équation (f) ce qui donne

$$\text{tang. } n = \text{tang. } m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ (l-c)d - \frac{d^3}{2} \right\} - \frac{Cd^2}{12E} \dots\dots\dots (g).$$

Occupons-nous, maintenant, de la courbe  $mB$ .

Observons d'abord que si la charge uniforme se réduisait en un poids égal suspendu au point  $H$ , la branche  $mB$  passerait par le point  $H$ , et son équation serait celle (g) du n° 733, c'est-à-dire

$$y = x \text{ tang. } m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ (l-c) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} \dots\dots\dots (h).$$

Mais la charge uniforme répartie sur la longueur  $Hm$ , modifie nécessairement la courbe, et son équation (h).

Le moment de la réaction de l'appui  $B$  sur une section droite quelconque, comprise entre le point  $m$  et l'appui  $B$ , sera cette réaction qui est  $\frac{C(l+c)}{2l}$ , multipliée par le bras du levier  $p'E = l - c - x$  ; c'est-à-dire que ce moment sera

$$\frac{C(l+c)}{2l} (l - c - x) \dots\dots\dots (i).$$

Quel que soit l'effort qui modifie le moment (i), il est clair que cet effort inconnu doit renfermer le facteur  $d$ , puisqu'il doit disparaître dans le cas où  $d = 0$ , c'est-à-dire, dans le cas où la charge uniforme se réduit en un poids égal suspendu au point  $H$  ; d'où l'on voit que l'action de cet effort sur le point  $m'$ , peut être représenté par  $Md$ ,  $M$  étant une quantité inconnue. Si maintenant nous observons que ce moment  $Md$  agit en sens contraire du moment (i), nous aurons

$$\frac{E}{r} = \frac{C(l+c)}{2l} (l - c - x) - Md.$$

Mettons  $x'$  au lieu de  $x$  dans cette équation, et tirons-en la valeur

de  $\frac{1}{r}$  pour la mettre dans l'expression  $d = \frac{x - x'}{r}$  d'un élément quelconque de  $n'm'$ , et nous aurons

$$d = \frac{C(l+c)}{2lE} (l - c - x') (x - x') - \frac{Md}{E} (x - x').$$

Les autres éléments de  $n'm'$  seront de la même forme, et leur somme sera

$$n'm' = \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ (l - c - x')(x - x') + (l - c - x'')(x - x'') \dots \right\} \\ - \frac{Md}{E} \left( (x - x') + (x - x'') + \dots \right)$$

La première partie de cette somme, jointe à  $x \text{ tang. } m$  (n° 733), donnera l'équation (h), et la seconde partie sera ce qu'il faudra retrancher de cette équation (h) pour avoir celle de la courbe  $mB$ . Cette seconde partie de  $m'n'$ , s'obtiendra en faisant sur  $x', x'', x'''$ , etc., l'observation ordinaire, ce qui donnera

$$\frac{Md}{E} (x - 1 + x - 2 + x - 3 \dots + x - n) = \frac{Md}{E} \left( nx - \frac{n^2}{2} \right) = \frac{Mdx^2}{2E},$$

en faisant  $n = x$ . Introduisons donc cette expression avec le signe  $-$  dans l'équation (h), et nous aurons

$$y = x \text{ tang. } m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ (l - c) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \frac{Mdx^2}{2E} \dots \dots (k).$$

pour l'équation de la courbe  $mB$ .

Mais comme la branche  $mB$ , prolongée, ne peut passer par l'origine  $H$  quand  $x = 0$ , l'équation (k) ne peut donner  $y = 0$ ; il faut donc que cette équation (k) renferme une constante  $N$  indépendante de  $x$ ; cette équation sera donc de la forme

$$y = x \text{ tang. } m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ (l - c) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \frac{d}{E} \left( \frac{Mx^2}{2} + N \right) \dots \dots (l),$$

dans laquelle il faut déterminer  $M$  et  $N$ .

Pour cela, cherchons par le procédé ordinaire, l'expression de la tangente de l'angle  $n$  formé par une tangente à la courbe  $mB$  et l'horizontale  $DE$ ; nous aurons

$$\text{tang. } n = x \text{ tang. } m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ (l - c) x - \frac{x^2}{2} \right\} - \frac{Mdx}{E} \dots \dots (m).$$

Mais cette tangente ne pouvant être nulle quand  $x = 0$ , il faut que la fraction  $\frac{Mdx}{E}$  ne renferme pas  $x$ ; par conséquent  $M$  doit renfermer le di-

viseur  $x$ , de sorte que nous pourrions remplacer  $M$  par  $\frac{M'}{x}$ , dans les équation (l) et (m), ce qui nous donnera

$$y = x \operatorname{tang.} m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ (l-c) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \frac{d}{E} \left( \frac{M'x}{2} + N \right) \dots (n)$$

$$\text{et } \operatorname{tang.} n = \operatorname{tang.} m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ (l-x) x - \frac{x^2}{2} \right\} - \frac{M'd}{2E} \dots (o).$$

Faisons  $x = d$  dans ces deux équations (n), (o), elles donneront

$$y = Qm = d \operatorname{tang.} m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ (l-c) \frac{d^2}{2} - \frac{d^3}{6} \right\} - \frac{d}{E} \left( \frac{M'd}{2} + N \right) \dots (p),$$

$$\text{et } \operatorname{tang.} n = \operatorname{tang.} m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ (l-c) d - \frac{d^2}{2} \right\} - \frac{M'd}{2E} \dots (q).$$

Mais ces deux résultats doivent évidemment égaier respectivement ceux marqués (e) et (g); d'où l'on voit que

$$\frac{M'd}{2E} = \frac{Cd^2}{12E} \quad \text{et} \quad \frac{d}{E} \left( \frac{M'd}{2} + N \right) = \frac{Cd^3}{16E},$$

$$\text{d'où} \quad M' = \frac{Cd}{6} \quad \text{et} \quad N = \frac{d^2}{2} \dots (r).$$

En substituant ces valeurs de  $M'$  et de  $N$  dans l'équation (n), il viendra enfin

$$y = x \operatorname{tang.} m + \frac{C(l+c)}{2lE} \left\{ (l-c) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \frac{C}{48E} (4d^2x - d^3) \\ = x \operatorname{tang.} m + \frac{C}{48lE} \left\{ 12(l^2 - c^2)x^2 - 4(l+c)x^3 - 4ld^2x + ld^3 \right\} \dots (s)$$

pour l'équation demandée.

On aura celle de la branche  $nA$ , en changeant les signes de  $\operatorname{tang.} m$  et de  $c$ , ce qui donnera

$$y = -x \operatorname{tang.} M + \frac{C}{48lE} \left\{ 12(l^2 - c^2)x^2 - 4(l-c)x^3 - 4ld^2x + ld^3 \right\} \dots (t).$$

Faisons  $x = l - c$  dans l'équation (s) et  $x = l + c$  dans la dernière (t), et il nous viendra

$$y = EB = (l-c) \operatorname{tang.} m + \frac{C}{48lE} \left\{ 8(l^2 - c^2)(l-c)^2 - 4d^2l \right. \\ \left. (l-c) + ld^3 \right\} \\ \text{et } y = DA = EB = -(l+c) \operatorname{tang.} m + \frac{C}{48lE} \left\{ 8(l^2 - c^2) \right. \\ \left. (l+c)^2 - 4ld^2(l+c) + ld^3 \right\} \dots (u).$$

En éliminant EB entre ces deux équations, il nous viendra :

$$\text{tang. } m = \frac{Cc}{12lE} (4l^2 - 4c^2 - d^2) \dots (439),$$

et en éliminant tang.  $m$  entre les mêmes équations ( $u$ ), nous aurons

$$EB = \frac{C}{48lE} \{ 4(l^2 - c^2)(2l^2 - 2c^2 - d^2) + ld^3 \} \dots (440).$$

Si maintenant nous substituons la valeur (439) de tang.  $m$ , dans les équations ( $c$ ), ( $d$ ), ( $s$ ) et ( $t$ ), il nous viendra, enfin,

$$1^\circ y = \frac{C}{48ldE} \{ 4cd(4l^2 - 4c^2 - d^2)x + 6d(2l^2 - 2c^2 - ld)x^2 - 4dcx^3 - lx^4 \} \dots (441)$$

pour l'équation de la branche Hm ;

$$2^\circ y = \frac{C}{48ldE} \{ -4cd(4l^2 - 4c^2 - d^2)x + 6d(2l^2 - 2c^2 - dl)x^2 + 4dcx^3 - lx^4 \} \dots (442)$$

pour celle de la branche Hn ;

$$3^\circ y = \frac{C}{48lE} \{ 4(4l^2c - 4c^3 - d^2c - ld^2)x + 12(l^2 - c^2)x^2 - 4(l+c)x^3 + ld^3 \} \dots (443),$$

pour celle de la branche mB, et

$$4^\circ y = \frac{C}{48lE} \{ -4(4l^2c - 4c^3 - d^2c + ld^2)x + 12(l^2 - c^2)x^2 - 4(l-c)x^3 + ld^3 \} \dots (444),$$

pour celle de la branche nA.

Si nous substituons cette même valeur (439) de tang.  $m$  dans l'équation ( $f$ ), nous aurons

$$\text{tang. } n = \frac{C}{12ldE} \{ cd(4l^2 - 4c^2 - d^2) + 3d(2l^2 - 2c^2 - dl)x - 3dcx^2 - lx^3 \} \dots (445),$$

pour l'expression de la tang.  $n$  de l'angle formé par l'horizontale DE et une tangente à la branche Hm.

On aurait l'expression de tang.  $n$  relative à la branche Hn, en changeant dans celle-ci le signe de  $c$ , ce qui donnerait

$$\text{tang. } n = \frac{C}{12ldE} \{ -cd(4l^2 - 4c^2 - d^2) + 3d(2l^2 - 2c^2 - dl)x + 3dcx^2 - lx^3 \} \dots (446).$$

On trouvera l'expression de la tang.  $n$  pour un point de la branche  $mB$ , en opérant comme à l'ordinaire sur l'équation (443), et on aura

$$\text{tang. } n = \frac{C}{12lE} \left\{ (4l^2c - 4c^3 - d^2c - ld^2) + 6(l^2 - c^2)x - 3(l + c)x^3 \right\} \dots (447).$$

Et pour l'expression analogue relative à la branche  $nA$ , il suffira de changer dans celle-ci le signe de  $c$ , ce qui donnera

$$\text{tang. } n = \frac{C}{12lE} \left\{ - (4l^2c - 4c^3 - d^2c - d^2l) + 6(l^2 - c^2)x - 3(l - c)x^3 \right\} \dots (448).$$

770. Si l'on voulait le point le plus bas de la courbe  $AHB$ , on égalerait à zéro le second membre de l'équation (446), dans le cas où la charge uniforme se prolonge vers  $A$  au-delà du milieu  $K$  de l'intervalle des appuis, ou le second membre de l'équation (448) dans le cas où cette charge sera comprise entre les points  $K$  et  $B$ , et on aura, dans chacun de ces deux cas, la valeur de  $x$  à laquelle répond l'ordonnée du point de contact de la tangente horizontale à la branche  $Hn$  ou à la branche  $nA$ . Mais comme la courbure de la pièce est toujours supposée très-petite, on aura sensiblement le même résultat, en supposant  $x = c$ , soit dans l'équation (442), si la charge uniforme dépasse le point  $K$ , soit dans l'équation (444) dans le cas contraire.

Dans le premier cas on aura

$$y = -IC = -\frac{C}{48ldE} \left\{ 4dc^2(l^2 - c^2) - c^2(4d^3 - 6d^2l + 4dc^2 - lc^2) \right\} \dots (a),$$

et dans le second

$$y = -IC = -\frac{C}{48lE} \left\{ + 4c^2(l^2 - c^2) + 4c(d^2c - ld^2 + c^2 - c^3) - ld^3 \right\} \dots (b).$$

Si maintenant nous ajoutons  $IC$  à  $CK = EB$ , c'est-à-dire les équations (440) et (a), cette dernière étant prise en signe contraire, nous aurons

$$KI = f = \frac{C}{48dE} \left\{ 8dl^4 - 12dl^2c^2 - 4l^2d^3 - 4c^4d + lc^4 + ld^4 \right\} \dots (448),$$

dans le cas où la charge uniforme dépasse le point  $K$ .

Et si nous ajoutons les équations (440) et (b), cette dernière étant prise en signe contraire, il nous viendra

$$f = KI = \frac{C}{48IE} \left\{ 8l^4 - 12l^2c^2 - 4d^2lc + 4lc^3 - 4l^2d^2 + 8c^2d^2 \right\} \dots (449),$$

pour celui où la charge uniforme est comprise entre le point K et le point B.

774. Les équations précédentes supposent le solide sans pesanteur; si l'on veut tenir compte de son poids, aux flèches de courbure (448), (449), on ajoutera celle du n° 728, qui est  $f = \frac{5C'P}{24E}$ ,  $C'$  étant le poids, ou ce même poids plus une surcharge uniforme, ce qui donnera

$$f = KI = \frac{5C'P}{24E} + \frac{C}{48IdE} \left\{ 8dl^4 - 12dc^2l^2 - 4d^3l^2 - 4dc^4 + dl^4 \right\} \dots (450)$$

$$\text{et } f = KI = \frac{5C'P}{24E} + \frac{C}{48IE} \left\{ 8l^4 - 12l^2c^2 - 4d^2lc + 4lc^3 - 4l^2d^2 + 8c^2d^2 \right\} \dots (451).$$

La première de ces deux flèches de courbure appartiendra au cas où la charge uniforme  $C$  dépassera le milieu  $K$  de l'intervalle des appuis et la seconde au cas où cette charge  $C$  sera comprise entre les points  $K$  et  $B$ .

772. Si le solide était chargé en deux endroits différens de l'intervalle des appuis, on calculerait la flèche de courbure que donnerait chacune des deux charges au milieu de la distance des appuis, et on ajouterait ensuite ces deux flèches : leur somme serait la flèche totale du solide. Cela est général, de sorte que, quel que soit le nombre des charges, la flèche totale sera la somme des flèches particulières à chacune d'elles.

773. En continuant la marche que nous venons de suivre dans la question qui fait l'objet de cette leçon, et en allant chercher les équations convenables dans les leçons précédentes, on parviendra aux équations et aux flèches de courbure pour des charges qui seraient représentées par des trapèzes tels que  $abcd$  (fig. 160), tant pour le cas où la base  $bc$  serait plus grande, que pour celui où elle serait plus petite que la seconde base  $ad$ . Mais comme les calculs se compliquent, et qu'on peut, dans la pratique, se dispenser des

équations qui en résulteraient, nous nous contenterons de ce qui précède sur les prismes posés librement sur deux appuis de niveau, et chargés de différentes manières dans l'intervalle des appuis.

## LEÇON XII.

De la courbe que prend un prisme de niveau, encastré par une extrémité et soutenu à l'autre par un appui, et soumis à l'action d'une charge uniforme et d'un poids suspendu en un point quelconque de l'intervalle des appuis.

774. Soit AFB (fig. 161) la courbe de la lame neutre du prisme, A le point d'encastrement et B le point d'appui; nommons

$l$  la longueur AB du solide;

$c$  la distance AC du point d'application C du poids P, et

C la charge uniforme.

Prenons la droite AB pour l'axe des abscisses, et le point A pour l'origine des coordonnées; pour un point M de la branche AF, comprise entre le point d'encastrement A et le point d'application F du poids P, nous aurons

$$AP = x \quad \text{et} \quad PM = y.$$

Cela posé, si nous faisons abstraction du point d'appui B, le moment du poids P, par rapport au point M, sera  $P(c - x)$ ; et celui de la charge uniforme (n° 655) sera  $\frac{C(l-x)^2}{2l}$ . Le moment résultant de ces deux-là sera

$$P(c - x) + \frac{C(l-x)^2}{2l} \dots\dots (a),$$

Mais ce dernier moment sera diminué de celui de la réaction de la pression qui a lieu sur le point d'appui B; nommons  $P'$  cette pression; son bras de levier étant  $BP = l - x$ , son moment sera  $P'(l - x)$ ; en retranchant ce dernier moment de celui (a), le reste devra faire équilibre au moment  $\frac{E}{r}$  de l'élasticité qui se développe dans la section droite au point M: nous aurons

$$\text{donc} \quad P(c - x) + \frac{C(l-x)^2}{2l} - P'(l - x) = \frac{E}{r} \dots\dots (b).$$

Les élémens de l'ordonnée  $PM = y$  seront encore ici de la forme  $d = \frac{x - x'}{r} \dots (c)$ ; en mettant  $x'$  au lieu de  $x$  dans l'équation (b), et en éliminant ensuite  $r$  entre cette équation (b) et l'équation (c), nous aurons

$$d = \frac{P}{E} (c - x) (x - x') + \frac{C (l - x')^2 (x - x')}{2lE} - \frac{P' (l - x') (x - x')}{E} \dots (d).$$

En opérant et raisonnant comme dans les questions précédentes, nous tirerons (\*)

$$y = \frac{P}{E} \left( \frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) - \frac{P'}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots (e),$$

pour l'équation de la courbe AF comprise entre le point d'encastrement A et le point d'application F du poids P, la pression de l'appui B étant encore indéterminée.

Occupons-nous, maintenant, de la branche FB, et pour cela, considérons le point M'. Observons ensuite que, si  $P = 0$ , la courbe AFB ne se composerait que d'une seule branche AFB, et que, par conséquent, l'équation de cette courbe, pour tous les points de la longueur AB, serait ce que devient celle (e) en y faisant  $P = 0$ . Mais l'existence de ce poids P modifie la courbe de manière que pour la branche FB ce poids P a un certain effet, sur la section droite qui répond au point M', qui est une certaine fonction de P, de la distance  $AC = c$  et de l'abscisse  $AP' = x$ . Cette fonction doit être nulle quand P ou c est nul; par conséquent ces deux quantités doivent être facteurs dans la fonction cherchée.

Il faut remarquer, ensuite, que la branche BF prolongée vers le plan d'encastrement DE, ne saurait passer par le point A, à moins que c ne fût nul; par conséquent, il faut que la fonction cherchée ait un terme indépendant de x; cette fonction sera donc de la forme  $Pc (Mx^n + N)$ , M, N et n étant

(\*) En mettant pour  $r$  sa valeur  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  dans l'équation (b), on trouvera que

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{E} (c - x) + \frac{C}{2lE} (l - x)^2 - \frac{P'}{E} (l - x);$$

et en intégrant deux fois de suite, on aura

$$1^\circ \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P}{E} \left( cx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{C}{2lE} \left( lx^2 - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{P'}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right),$$

$$\text{et } 2^\circ \quad y = \frac{P}{E} \left( \frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) - \frac{P'}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

des quantités inconnues. Pour avoir l'équation de la branche FB, il faudra donc substituer  $Pc (Mx^n + N)$  à la place de  $P \left( \frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$  dans l'équation (e), ce qui donnera

$$\gamma = \frac{Pc}{E} (Mx^n + N) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) - \frac{P'}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots\dots (f).$$

Si nous opérons sur cette dernière équation d'après le procédé ordinaire, en nommant  $m$  l'angle formé, avec l'horizontale AB, par une tangente au point M' de la branche FB, nous aurons

$$\text{tang. } m = \frac{Pc}{E} Mx^{n-1} + \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{P'}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots\dots (g).$$

De même que la branche BF prolongée ne peut passer par le point A, de même aussi la tangente dont le point de contact a pour abscisse  $x = 0$  ne peut être horizontale; l'équation (g) ne peut donc pas donner  $\text{tang. } m = 0$ ; car si la branche BF prolongée passait par le point A, et qu'en même temps la tangente en ce point A fût horizontale, comme cela a lieu pour la branche AF, il s'ensuivrait que ces deux branches seraient le prolongement l'une de l'autre, et la courbe AFB n'aurait qu'une seule équation qui serait celle marquée (e). Or il est évident que l'encastrement d'une part, et le simple appui de l'autre, agissent différemment de chaque côté du point d'application F du poids P; par conséquent l'exposant de  $x$  du premier terme du second membre de l'équation (g) doit être zéro, pour que dans l'hypothèse de  $x = 0$ , le second membre de cette équation se réduise à une constante. Ainsi  $n - 1 = 0$ , d'où  $n = 1$ . En substituant donc cette valeur de  $n$  dans les équations (f) et (g), nous aurons

$$\gamma = \frac{Pc}{E} (Mx + N) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) - \frac{P'}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots\dots (h),$$

$$\text{et tang. } m = \frac{PcM}{E} + \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{P'}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots\dots (i).$$

D'après l'équation (e), si  $m$  représente l'angle formé par une tangente à la branche AF, et l'horizontale AB, on trouvera, par la méthode ordinaire, que

$$\text{tang. } m = \frac{P}{E} \left( cx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{2lE}{C} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{P'}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots\dots (k).$$

Observons, maintenant, que les deux branches AF, FB ont le point F commun, et que, par conséquent, les deux équations (e) et (h) doivent donner la même valeur pour  $\gamma$ , en y faisant  $x = c$ , et les deux équations (i) et (k)

la même valeur pour tang.  $m$ , dans la même hypothèse. Ces deux conditions nous donneront

$$Mo + N = \frac{c^2}{3}, \text{ et } M = \frac{c}{2},$$

d'où 
$$M = \frac{c}{2}, \text{ et } N = -\frac{c^2}{6} \dots\dots (l).$$

Substituons ces valeurs de  $M$  et de  $N$  dans les équations (h) et (i), et nous aurons enfin

$$y = \frac{Pc}{E} \left( \frac{cx}{2} - \frac{c^2}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) - \frac{P'}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots\dots (m),$$

et tang.  $m = \frac{Pc^2}{2E} + \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{P'}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots\dots (n),$

pour les équations relatives à la branche FB, la pression  $P'$  du point d'appui B restant encore indéterminée.

Pour déterminer cette pression  $P'$ , il nous suffira d'observer que pour le point B, ou pour  $x=l$ , l'équation (m) doit donner  $y=0$ ; ce qui nous donnera

$$0 = \frac{Pc}{E} \left( \frac{cl}{2} - \frac{c^2}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^4}{2} - \frac{l^4}{3} + \frac{l^4}{12} \right) - \frac{P'}{E} \left( \frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{6} \right)$$

ou 
$$0 = \frac{Pc^2(3l-c)}{6} + \frac{Cl^3}{8} - \frac{P'l^2}{3},$$

d'où 
$$P' = \frac{Pc^2(3l-c)}{2l^2} + \frac{3Cl^3}{8l^2} = \frac{4Pc^2(3l-c) + 3Cl^3}{8l^2} \dots\dots (452).$$

Substituons cette valeur de  $P'$  dans les équations (e) et (m), (k) et (n), et nous aurons

$$1^o y = \frac{P}{E} \left( \frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + \frac{[4Pc^2(3l-c) + 3Cl^3]}{8l^2E} \times \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots\dots (453);$$

pour l'équation définitive de la branche AF ;

$$2^o y = \frac{Pc}{E} \left( \frac{cx}{2} - \frac{c^2}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) - \frac{[4Pc^2(3l-c) + 3Cl^3]}{8l^2E} \times \left( \frac{lx}{2} - \frac{x^2}{6} \right) \dots\dots (454);$$

pour celle de la branche FB,

$$3^o \text{ tang. } m = \frac{P}{E} \left( cx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{[4Pc^2(3l-c) + 3Cl^3]}{8l^2E} \times \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots\dots (455);$$

pour l'expression définitive de la tangente trigonométrique de l'angle formé par une tangente à la branche AF, et l'axe AB des  $x$ ,

$$\text{et } 4^{\circ} \text{ tang. } m = \frac{Pc^2}{2E} + \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{[4Pc^2(3l-c) + 3Cl^3]}{8l^3E} \\ \times \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots\dots (456),$$

pour celle relative à la branche FB.

775. Cherchons la valeur que doit prendre  $x$  dans chacune des équations (455), (456), pour que tang.  $m$  soit nulle, ou, en d'autres termes, pour que les tangentes aux deux branches AF, FB de la courbe AFB (fig. 161) soient horizontales.

La première (455) de ces équations donnera

$$0 = P \left( cx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{C}{2l} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{[4Pc^2(3l-c) + 3Cl^3]}{8l^3} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

d'où l'on voit que  $x = 0$ , et

$$0 = 8l^3P \left( c - \frac{x}{2} \right) + 4l^2C \left( l^2 - lx + \frac{x^2}{3} \right) - [4Pc^2(3l-c) + 3Cl^3] \left( l - \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{ou} \quad x = \frac{15l^3C + 12P(2l^3 - 3c^2l + c^3)}{16l^3C}$$

$$\pm \sqrt{\frac{[15l^3C + 12P(2l^3 - 3c^2l + c^3)]^2}{16 \times 16l^6C^2} - \frac{12lcP(2l^3 - 3lc + c^2) + 3l^3C}{4l^3C}} \dots (457).$$

La première valeur de  $x$  nous apprend que la tangente au point A est horizontale; quant aux valeurs de  $x$  données par l'équation (457), si elles sont réelles, nous feront voir que la tangente sera horizontale en deux autres points de contact. Ainsi il y aurait trois tangentes à cette courbe AF, qui seraient horizontales.

En égalant à zéro le second membre de l'équation (456), on arriverait à une équation du troisième degré en  $x$ , qui, étant résolue, ferait connaître l'abscisse du point de contact de la tangente horizontale à la branche FB. Cette équation étant du troisième degré, donnera une seule valeur ou trois valeurs réelles pour  $x$ .

776. Pour avoir la plus grande ordonnée de la branche AF, il faudrait, dans l'équation (453), mettre pour  $x$  sa valeur donnée par l'équation (457), et si cette valeur de  $x$  est moindre que  $c = AC$  : cette plus grande ordonnée serait la flèche de courbure de cette branche. De même, pour avoir la plus grande ordonnée de la branche FB, il faudra, dans l'équation (454), mettre pour  $x$  sa valeur tirée de l'équation du troisième degré, qui résultera du second

membre de l'équation (456) égalé à zéro, pourvu que cette valeur de  $x$  soit plus grande que  $c = AC$  et plus petite que  $l = AB$ , cette plus grande ordonnée sera la flèche de courbure de cette branche FB ; la plus grande de ces deux flèches de courbure sera celle du prisme en question.

777. Si nous supposons que la charge uniforme C du solide soit nulle, les équations (453), (454), (455) et (456) se réduiront respectivement à

$$1^{\circ} \quad y = \frac{P}{E} \left( \frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{Pc^2(3l-c)}{2l^2E} \left( lx^2 - \frac{x^3}{6} \right) \dots\dots (458)$$

pour l'équation de la branche AF ;

$$2^{\circ} \quad y = \frac{Pc}{E} \left( \frac{cx}{2} - \frac{c^2}{6} \right) - \frac{Pc^2(3l-c)}{2l^2E} \left( lx^2 - \frac{x^3}{6} \right) \dots\dots (459)$$

pour celle de la branche FB ,

$$3^{\circ} \quad \text{tang. } m = \frac{P}{E} \left( cx - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{Pc^2(3l-c)}{2l^2E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots\dots (460)$$

pour l'expression de la tangente relative à la branche AF ,

$$\text{et } 4^{\circ} \quad \text{tang. } m = \frac{Pc}{E} - \frac{Pc^2(3l-c)}{2l^2E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots\dots (461)$$

pour celle relative à la branche FB.

778. Si dans cette hypothèse nous cherchons les abscisses des points de contact des tangentes horizontales, en égalant à zéro les seconds membres des deux dernières équations, nous aurons

$$2l^3 \left( cx - \frac{x^2}{2} \right) - c^2(3l-c) \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) = 0, \text{ et } l^3 - (3l-c) \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) = 0,$$

d'où nous tirerons

$$1^{\circ} \quad x = 0, \text{ et } x = \frac{2lc(l^2 - 3lc + c^2)}{2l^2 - 3lc^2 + c^3} \dots\dots (a),$$

$$2^{\circ} \quad x = l - l \sqrt{\frac{l-c}{3l-c}} \dots\dots (b).$$

779. Substituons la valeur (b) de  $x$  dans l'équation (459), nous aurons

$$y = f = \frac{Pc}{E} \left( \frac{lc}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{l-c}{3l-c}} \right\} - \frac{c^2}{6} \right) - \frac{Pc^2(3l-c)}{2l^2E} \times$$

$$\left( \frac{l^2}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{l-c}{3l-c}} \right\}^2 - \frac{l^2}{6} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{l-c}{3l-c}} \right\}^3 \right)$$

$$\text{ou } f = \frac{Pc^2}{6E} (l-c) \sqrt{\frac{l-c}{3l-c}} \dots\dots (462),$$

pour la flèche de courbure, dans le cas où le solide n'est chargé que d'un poids  $P$ , suspendu en un point quelconque entre la base d'encastrement et le point d'appui.

780. Si ce poids  $P$  était suspendu au milieu de l'intervalle entre la base d'encastrement et le point d'appui, on aurait  $c = \frac{l}{2}$ ; substituons cette valeur de  $c$  dans les équations (458), (459), (460) et (461), et nous aurons

$$1^{\circ} \quad y = \frac{P}{96E} (9lx^2 - 11x^3) \dots (463)$$

pour l'équation de la branche AF;

$$2^{\circ} \quad y = \frac{P}{96E} (-2l^3 + 12l^2x - 15lx^2 + 5x^3) \dots (464),$$

pour celle de la branche FB;

$$3^{\circ} \quad \text{tang. } m = \frac{P}{32E} (6lx - 11x^2) \dots (465)$$

pour l'expression de la tangente relative à la branche AF,

$$\text{et } 4^{\circ} \quad \text{tang. } m = \frac{P}{32E} (4l^2 - 10lx + 5x^2) \dots (466)$$

pour celle relative à la branche FB.

781. En mettant pour  $c$  sa valeur  $\frac{l}{2}$  dans l'expression (452) de la pression  $P'$  du point d'appui B, dans l'hypothèse où  $C = 0$ , il viendra

$$P' = \frac{5P}{16} \dots (467).$$

782. Si nous mettons la même valeur  $\frac{l}{2}$  de  $c$  dans les valeurs (a) et (b) de  $x$  (n° 778), il nous viendra

$$x = -\frac{2l}{11}, \text{ et } x = l \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = l \times 0,553 \dots (468).$$

La première de ces valeurs de  $x$  nous fait voir que le point de contact de la seconde tangente horizontale n'est pas compris entre la base d'encastrement et le point d'appui, et que, par conséquent, nous devons n'en faire aucune mention. Quant à la seconde, qui se rapporte à la branche FB, elle nous fait voir que le plus grand abaissement de la pièce a lieu un peu au-delà du milieu de l'intervalle AB.

783. Enfin, si nous mettons pour  $c$  sa valeur  $\frac{l}{2}$  dans la valeur (462) de la flèche de courbure, nous aurons

$$f = \frac{P^{\beta}}{48E\sqrt{5}} = \frac{P^{\beta}}{E \times 107,328} \dots (469).$$

784. Si le prisme posait librement sur deux appuis, la flèche de courbure (n° 727) serait  $f' = \frac{P'l^3}{3E}$ ; mais dans ce cas  $P' = \frac{P}{2}$ , et  $l' = \frac{l}{2}$ ; en substituant dans cette dernière expression, il viendra  $f' = \frac{P^{\beta}}{48E}$ . En comparant cette flèche de courbure à celle (469) ci-dessus, nous verrons que

$$f : f' :: \frac{1}{\sqrt{5}} : 1 :: 1 : \sqrt{5},$$

c'est-à-dire que la flèche de courbure, pour le cas où le solide est encasté par un bout est plus petite que celle pour le cas où le prisme est posé librement sur deux appuis, dans le rapport de  $1 : \sqrt{5}$

785. Si dans l'une ou l'autre des équations (463), (464), nous faisons  $x = \frac{l}{2}$ , nous trouverons que

$$y = \frac{7P^{\beta}}{768E} \dots (470).$$

Tel sera l'abaissement de la pièce au milieu de l'intervalle AB. Dans le cas où le solide n'est point encasté, nous avons trouvé que cet abaissement était (n° 784)  $f' = \frac{P^{\beta}}{48E}$ ; ces abaissemens seront donc  $:: \frac{7}{16} : 1 :: 7 : 16$ .

786. Supposons, maintenant, que le poids  $P = 0$ , de manière que le solide ne soit soumis qu'à l'action d'une charge uniforme  $C$ , la pression  $P'$  du point d'appui B deviendra  $P' = \frac{3C}{8} \dots (471)$ ,

et les équations (453), (454), (455) et (456), se réduiront à

$$1^{\circ} \quad y = \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^3}{2} - \frac{lx^5}{3} + \frac{x^4}{12} \right) - \frac{3C}{8E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^5}{6} \right) \dots (472),$$

pour la branche AF et pour la branche FB; c'est-à-dire qu'alors, la courbe AB ne se compose que d'une seule branche;

$$2^{\circ} \quad \text{tang. } m = \frac{C}{2lE} \left( lx - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{3C}{8E} \left( lx - \frac{x^3}{2} \right) \dots (473)$$

pour l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle formé avec l'axe des  $x$ , par la tangente menée à un point quelconque de la courbe AFB.

787. Cherchons la valeur de  $x$  pour que la tangente à la courbe AFB soit horizontale; pour cela, il suffira de faire égal à zéro le premier membre de l'équation (472), ce qui nous donnera

$$\frac{1}{l} \left( l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{3}{4} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) = 0,$$

d'où nous tirerons  $x = 0$ , et  $x = l \left( \frac{15}{16} \pm \frac{4,796}{16} \right)$ .

La première valeur de  $x$  nous fait voir que la tangente à la courbe est horizontale pour le point de contact A, et la seconde, qu'il y aurait encore deux autres points de contact pour lesquels la tangente serait aussi horizontale; mais l'une de ces dernières valeurs de  $x$  dépassant la longueur  $l$  ou AB, n'appartient pas à la question: la seule admissible est  $x = l \left( \frac{15}{16} - \frac{4,796}{16} \right)$ , qui se réduit à

$$x = l \times 0,6377.$$

788. Si nous mettons cette dernière valeur de  $x$  dans l'équation (472), nous trouverons, toute réduction et tout calcul faits,

$$f = \frac{C^2}{E} \times 0,0053..... (474).$$

789. Nous avons trouvé (n° 728) que la flèche de courbure d'un solide non encastré, et chargé uniformément était  $f' = \frac{5Cl^3}{24E}$ ; mais alors  $C'$  n'est que la moitié de la charge, et  $l'$  celle de la longueur AB du solide; ainsi  $C' = \frac{C}{2}$ , et  $l' = \frac{l}{2}$ ; en substituant dans la valeur de  $f'$ , il nous viendra

$$f' = \frac{5C^2}{384E} = \frac{C^2}{E} \times 0,013,$$

d'où l'on voit que la flèche de courbure, pour le cas où le solide est encastré par un bout, est plus petite que celle du cas où le solide pose librement sur deux appuis, dans le rapport de 53 : 130 ou à peu près :: 2 : 5.

### LEÇON XIII.

De la courbe que prend un prisme de niveau, encastré par les deux bouts, et soumis à l'action d'une charge uniforme, et d'un poids suspendu en un point quelconque de l'intervalle des appuis.

790. Supposons que la lame neutre du solide soit AB, (fig. 162), A et B les points d'encastremens, et C le point d'application du poids P. Pre-

nous le point A pour l'origine des coordonnées, et la droite AB pour l'axe des abscisses.

S'il n'y avait que l'encastrement A, les équations des deux branches de courbes AD, DB seraient celles (453), (454) du n° 774 ; mais l'encastrement du point B vient nécessairement modifier ces deux branches, et par conséquent leurs équations. L'effet de cet encastrement est de donner à la branche DB une forme telle qu'au point B la tangente à cette courbe est horizontale. Mais si l'on suppose que le prisme se prolonge vers E d'une quantité BE quelconque ; que ce prisme soit inflexible depuis le point E jusqu'au point B, il est clair que l'effet de l'encastrement au point B pourrait être remplacé par une certaine force appliquée au point E. Cela posé, nommons

- $l$  la distance AB entre les deux plans d'encastrement ;
- $c$  celle AC du point A au point d'application C ou D du poids suspendu ;
- $P$  ce poids ;
- $P'$  la pression sur le point B ;
- $P''$  la force qui, appliquée au point E, produirait le même effet que l'encastrement en B ;
- $c'$  la distance du point d'application de cette dernière force au point A ;
- $C$  la charge uniformément distribuée dans l'intervalle AB, et
- $x$  l'abscisse AP ou AP' et  $y$  l'ordonnée PM ou P'M' de la courbe ADB.

Le moment du poids  $P$  par rapport à la section droite au point M, sera  $P(c - x)$  ; celui de la charge uniforme  $\frac{C(l^2 - x^2)}{2l}$ , et celui du poids  $P''$ ,  $P''(c' - x)$  : la somme de ces trois momens sera

$$P(c - x) + \frac{C(l - x)^2}{2l} + P''(c' - x) \dots (a).$$

Le moment de la pression du point B, qui agit en sens contraire, sera  $P'(l - x)$ , et devra être retranché de (a), ce qui donnera

$$P(c - x) + \frac{C(l - x)^2}{2l} + P''(c' - x) - P'(l - x) ;$$

ce dernier moment résultant doit faire équilibre à celui  $\frac{E}{r}$  de l'élasticité qui se développe dans la section droite au point M ; ainsi nous aurons

$$P(c - x) + \frac{C(l - x)^2}{2l} + P''(c' - x) - P'(l - x) = \frac{E}{r} ;$$

d'où

$$\frac{x}{r} = \frac{P}{E}(c - x') + \frac{C}{2lE}(l - x)^2 + \frac{P''}{E}(c' - x') - \frac{P'}{E}(l - x') \dots (b).$$

D'ailleurs on conçoit que les éléments de l'ordonnée  $y = PM$  seront encore de la forme  $d = \frac{x-x'}{r} \dots (c)$ , et par conséquent on aura

$$d = \frac{P}{E} (c-x') (x-x)^2 + \frac{C}{2lE} (l-x)^2 (x-x') + \frac{P''}{E} (c'-x') (x-x') - \frac{P'}{E} (l-x') (x-x'),$$

en éliminant  $r$  entre les équations (b) et (c).

D'après cette forme de l'élément  $d$  de  $y$ , on en conclura facilement, par la méthode ordinaire, que

$$y = \frac{P}{E} \left( \frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + \frac{P''}{E} \left( \frac{c'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{P'}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots (475).$$

De là on tirera

$$\text{tang. } m = \frac{P}{E} \left( cx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + \frac{P''}{E} \left( c'x - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{P'}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots (476).$$

Ces deux équations appartiennent à la branche AD; cherchons celles qui appartiennent à la seconde branche DB.

Par le raisonnement du n° 774, nous concluons que

$$y = \frac{Pc}{E} \left( \frac{cx}{2} - \frac{c^2}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{12} \right) + \frac{P''}{E} \left( \frac{c'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{P'}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots (477),$$

$$\text{et que } \text{tang. } m = \frac{Pc^2}{2E} + \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + \frac{P''}{E} \left( c'x - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{P'}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots (478).$$

car ces deux dernières équations doivent donner respectivement les mêmes valeurs pour  $y$  et  $\text{tang. } m$ , que celles (475) et (476), en y faisant  $x = c$ , puisque le point D appartient aux deux branches AD, DB.

L'équation (477) doit donner  $y = 0$ , et l'équation (478)  $\text{tang. } m = 0$ ; quand  $x = l$ , puisque la branche DB doit passer par le point B, et qu'en ce point B la tangente BE à la courbe doit être horizontale. En substituant donc  $l$  au lieu de  $x$  dans ces équations (477) et (478), nous aurons

$$0 = \frac{Pc^2(3l-c)}{6} + \frac{Cl^3}{8} + \frac{P''l^2(3c'-l)}{6} \times \frac{P'l^3}{3} \dots (d).$$

$$\text{et } 2^{\circ} \quad 0 = \frac{Pc^3}{2} + \frac{Cl^3}{6} + \frac{P''l(2c' - l)}{2} - \frac{P'l^3}{2} \dots (e).$$

En éliminant  $P''$  et  $P'$  entre ces deux dernières équations, nous trouverons

$$P'' = \frac{12Pc^3(l-c) + Cl^3}{12l^3(c'-l)}, \text{ et } P' = \frac{12Pc^3(3lc' - 2l^2 - 2cc' + lc) + Cl^3(6c' - 5l)}{12l^3(c'-l)} \dots (479).$$

En substituant ces valeurs de  $P''$  et  $P'$  dans les équations (475), (476), (477) et (478), on aura celles qui feront connaître la courbe que prendra le prisme encasté par les deux bouts.

791. On voit que les valeurs de  $P''$  et  $P'$  dépendent de  $c'$ , qui est la distance  $AE$  du point  $A$  au point  $E$ , où la force  $P''$  est appliquée pour produire le même effet que l'encastement. Quant à cette longueur  $c'$ , elle dépend de la profondeur du scellement ou de l'assemblage, ou, ce qui revient au même,  $c'$  est la longueur du solide depuis le point  $A$  jusqu'au bout  $E$  qui est au fond du scellement, ou depuis le point  $B$  jusqu'au bout qui est au fond du scellement du côté du point  $A$ .

792. Cette observation nous conduit à voir que, pour pouvoir regarder un prisme comme encasté par les deux bouts, et pouvoir y appliquer les équations précédentes, il faut que la profondeur du scellement soit assez considérable, car si elle était petite, il en résulterait que pour remplir la condition que la tangente soit horizontale au point  $B$ , il faudrait une force  $P''$ , dont la grandeur serait d'autant plus considérable; c'est-à-dire, qu'il faudrait que la matière qui opérerait l'encastement eût une résistance d'autant plus grande. Cela se voit par l'expression de la valeur de  $P''$  qui remplace cette résistance. De là il faut conclure qu'il sera très rare qu'on puisse regarder un prisme comme encasté par les deux bouts, même quand il sera scellé ou assemblé par ses extrémités, car ces scellemens ne sont presque jamais, ni assez profonds, ni assez hermétiques, pour que la tangente à la courbe au point  $B$  soit horizontale. Il n'y aurait guère que le cas où le solide serait soudé dans deux autres à ses extrémités, ou que ces solides seraient fondus ensemble d'un seul jet. Néanmoins nous allons continuer nos calculs.

793. Si nous voulons avoir l'abscisse du point qui répond à la plus grande ordonnée, c'est-à-dire, à la flèche de courbure, il suffira d'égaliser à zéro le second membre de l'équation (478), ce qui nous donnera

$$0 = \frac{Pc^3}{2} + \frac{C}{2l} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + P'' \left( c'x - \frac{x^2}{2} \right) - P' \left( lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$\text{ou } x^3 + \frac{3l(P' - P'' - C)}{C} x^2 + \frac{3l(Cl + 2P''c' - 2lP')}{C} x + \frac{3lPc^3}{C} = 0.$$

Pour résoudre cette équation du troisième degré, on se rappellera qu'elle doit être satisfaite en y faisant  $x = l$ , puisque la tangente à la courbe doit être horizontale au point B; on pourra donc diviser le premier membre de cette équation par  $x - l$ , ce qui donnera le quotient

$$x^2 + \frac{l(3P' - 3P'' - 2C)}{C} x + \frac{l(Cl + 3P''(2c' - l) - 3P'l)}{C} = 0 \dots (a),$$

et pour reste  $Cl^2 + 3P''l(2c' - l) - 3P'l^2 + 3Pc^2$ , c'est-à-dire, le second membre de l'équation (e) mis au même dénominateur. En résolvant donc cette équation (a), on aura

$$x = - \frac{l(3P' - 3P'' - 2C)}{2C} \pm \sqrt{\frac{l^2(3P' - 3P'' - 2C)^2}{4C^2} + \frac{l(Cl + 3P''(2c' - l) - 3P'l)}{C}} \dots (b).$$

Pour calculer  $x$ , on mettra pour  $P'$  et  $P''$  leur valeur (479) dans cette formule (b).

794. Pour avoir la plus grande ordonnée de la branche DB, on substituera la valeur (b) de  $x$  (qui sera moindre que  $l$ ) dans l'équation (477).

795. Si le poids  $P$  était appliqué au milieu de l'intervalle AB, les deux branches DA, DB de la courbe ADB seraient symétriques, on aurait  $l = 2c$ , et pour l'abscisse correspondante à la plus grande ordonnée,  $x = \frac{1}{2} l = c$ . Substituons ces valeurs de  $l$  et de  $x$  dans l'équation (477), ce qui nous donnera

$$y = f = \frac{P}{E} \left( \frac{c^3}{2} - \frac{c^3}{6} \right) + \frac{C}{4cE} \left\{ \frac{4c^4}{2} - \frac{2c^4}{3} + \frac{c^4}{12} \right\} + \frac{P''}{E} \left( \frac{c'^2}{2} - 6 \right) - \frac{P'}{E} \left( \frac{2c^3}{2} - \frac{c^3}{6} \right),$$

ou 
$$f = \frac{Pc^3}{3E} + \frac{17C^3}{48E} + \frac{P''c^2}{6E} (3c' - c) - \frac{5P'c^3}{6E} \dots (480).$$

796. Dans l'hypothèse précédente où  $l = 2c$ , les valeurs (479) de  $P''$  et  $P'$ , se réduisent à

$$P'' = \frac{c(3P + 3C)}{12(c' - 2c)} \quad \text{et} \quad P' = \frac{3P(2c' - 3c) + 2C(3c' - 5c)}{12(c' - 2c)} \dots (481).$$

797. Si dans l'équation (475) nous mettons pour  $P''$  et  $P'$  leurs dernières valeurs, et pour  $l$  sa valeur  $2c$ , il nous viendra

$$y = \frac{P}{24cE} (3cx^2 - 2x^3) + \frac{C}{48cE} (4c^2x^2 - 4cx^3 + x^4) \dots (482),$$

pour l'équation de la branche AD. On trouverait la même équation pour la

branche DB, en supposant l'origine au point B. On voit que cette équation est indépendante de la quantité indéterminée  $c'$ .

798. La flèche de courbure, dans ce cas, s'obtiendra en faisant  $x = c$  dans l'équation (482), et on aura

$$f = \frac{Pc^5}{24E} + \frac{Cc^5}{48E} \dots (483).$$

799. Si le solide était posé librement sur deux appuis, la flèche de courbure (nos 696 et 728) serait  $f' = \frac{Pc^5}{3E} + \frac{5Cc^5}{24E}$ , P et C n'étant que les moitiés du poids suspendu et de la charge uniforme, et  $c$  étant la demi-distance entre les appuis. Si nous voulions représenter par P et C les charges entières, comme alors les numérateurs de la valeur de  $f'$  seraient deux fois plus grands, il faudrait doubler les dénominateurs, pour ne pas changer cette valeur de  $f'$ , et nous aurions  $f' = \frac{Pc^5}{6E} + \frac{5Cc^5}{48E}$ . Si nous comparons cette valeur de  $f'$  à celle (483) de  $f$ , nous aurons

$$f : f' :: \frac{P}{4} + \frac{C}{8} : P + \frac{5C}{8} :: 2P + C : 8P + 5C,$$

d'où l'on voit que la flèche de courbure, dans le cas où le solide est encasté par les deux bouts, est plus petite que dans celui où le prisme est posé librement sur deux appuis, dans le rapport de  $2P + C : 8P + 5C$ .

800. Si la charge uniforme n'existait pas, dans le cas des deux encastremens, la flèche de courbure est quatre fois plus petite que dans celui où le solide pose librement sur les appuis; et cinq fois dans le cas où c'est le poids suspendu qui est nul.

#### LEÇON XIV.

De la courbe d'un prisme posé librement sur plusieurs appuis de niveau, et soumis à l'action d'un poids dans chaque intervalle des appuis, et d'une charge uniforme.

801. Soit ABC (fig. 163) la lame neutre d'un prisme posé de niveau sur trois appuis A, B et C, et soumis à l'action d'une charge uniforme, et de poids suspendus aux points quelconques D et E dans l'intervalle de deux appuis consécutifs; prenons l'origine des coordonnées au point B, et nommons

$l$  la distance AB ;  $l'$  celle BC ;  $c$  celle BD , et  $c'$  celle BE ; soient P et P' les poids suspendus aux points D et E, et C, C' les charges uniformes distribuées , la première de A en B et la seconde de B en C ; enfin , représentons par  $p$  ,  $q$  et  $r$  les pressions qu'éprouvent les trois points d'appui A , B et C. Cela posé , observons que la courbe affectée par la lame neutre ABC se composera de quatre branches, BD et DA pour le côté BA, et BE, EC pour le côté BC, dont il faut avoir les équations.

Occupons-nous d'abord de la branche BE.

Pour cela , observons que la tangente au point B ne pourra être horizontale que lorsque tout sera symétrique de chaque côté de ce point B ; ainsi en général cette tangente sera inclinée par rapport à l'axe AC ; soit donc  $m$  , l'angle formé par cette tangente et l'axe AC ; pour avoir l'ordonnée PM , à la somme Mm des élémens de la forme  $d = \frac{x - x'}{r}$  , il faudra ajouter  $Pm = x \text{ tang. } m$ .

Du reste , il est évident que nous pouvons regarder le solide comme étant encastré depuis le point A jusqu'au point B, et considérer la question sous le même point de vue qu'au n° 774 ; de sorte que nous aurons , pour l'équation de la branche BE ,

$$y = x \text{ tang. } m + \frac{P'}{E} \left( \frac{c'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{C'}{2l'E} \left( \frac{l'^2x^2}{2} - \frac{l'x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) - \frac{r}{E} \left( \frac{l'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots\dots (484),$$

et l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente en un point quelconque de la branche BE et l'axe BC, sera , par conséquent,

$$\text{tang. } n = \text{tang. } m + \frac{P'}{E} \left( c'x - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{C'}{2l'E} \left( l'^2x - l'x^2 + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{r}{E} \left( l'x - \frac{x^2}{2} \right) \dots\dots\dots (485).$$

Par le raisonnement du n° 774 , nous trouverions que l'équation de la branche EC est

$$y = x \text{ tang. } m + \frac{P'c'}{E} \left( \frac{c'x}{2} - \frac{c'^2}{6} \right) + \frac{C'}{2l'E} \left( \frac{l'^2x^2}{2} - \frac{l'x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) - \frac{r}{E} \left( \frac{l'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots\dots\dots (486);$$

et l'expression de tang.  $m$ . relative à cette branche EC sera

$$\text{tang. } m = \text{tang. } m + \frac{P'c'^2}{2E} + \frac{C'}{2l'E} \left( l'^2x - l'x^2 + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{r}{E} \left( l'x - \frac{x^2}{2} \right) \dots\dots\dots (487).$$

puisque ces deux équations doivent donner respectivement les mêmes valeurs

que celles (484) et (485), en y faisant  $x = c'$ , et que la branche CE prolongée ne doit pas passer par le point B.

Les équations des branches DB, DA s'obtiendront des précédentes, en changeant le signe de tang.  $m$ ,  $r$  en  $p$ ,  $P'$  en  $P$ ,  $C'$  en  $C$ ,  $l'$  en  $l$  et  $c'$  en  $c$ ; de sorte qu'on aura

$$y = -x \text{ tang. } m + \frac{E}{P} \left( \frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) - \frac{p}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots (488).$$

$$\text{et tang. } n = -\text{tang. } m + \frac{P}{E} \left( cx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{C}{2lE} \left( l^2x^3 - lx + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{p}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots (489).$$

pour la branche BD; et

$$y = -x \text{ tang. } m + \frac{Pc}{E} \left( \frac{cx}{2} - \frac{c^2}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) - \frac{p}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots (490).$$

$$\text{et tang. } n = -\text{tang. } m + \frac{Pc^2}{2E} + \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{p}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots (491).$$

pour la branche DA.

L'équation (486) doit donner  $y = 0$  quand  $x = l'$ , et l'équation (490) aussi, quand  $x = l$ ; en substituant respectivement ces valeurs de  $x$  dans ces équations, nous aurons

$$0 = l' \text{ tang. } m + \frac{Pl'^2}{6E} (3l' - c') + \frac{Cl'^3}{8E} - \frac{rl'^3}{3E} \dots (a)$$

$$\text{et } 0 = -l \text{ tang. } m + \frac{Pc^2}{6E} (3l - c) + \frac{C^3}{8E} - \frac{pl^3}{3E} \dots (b),$$

La somme des expressions  $p$ ,  $q$  et  $r$  des trois points d'appui doit égaler celle des poids  $P$ ,  $P'$  et des charges uniformes  $C$  et  $C'$ ; nous aurons donc

$$p + q + r = P + P' + C + C' \dots (c).$$

De plus, le moment résultant de toutes les forces  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $P$ ,  $P'$ ,  $C$  et  $C'$  par rapport à un point quelconque, par rapport au point A, par exemple, doit être nul, puisque l'équilibre existe entre toutes ces forces; il nous viendra donc

$$pl - Pc - \frac{Cl}{2} + P'c' + \frac{C'l'}{2} - rl' = 0, \text{ ou } pl - rl' = Pc - P'c' + \frac{Cl}{2} - \frac{C'l'}{2} \dots (d).$$

En éliminant entre les quatre équations (a), (b) (c) et (d), nous aurons

$$p = \frac{4Pcl(3lc - c^2 + 2ll) + 4P'c'l(3l'c' - c'^2 - 2l'^2) + Cl'^3(3l + 4l') - C'l'^3}{8P'l(l + l')} \dots (492),$$

$$q = \left\{ \frac{4P'l(l+l)[2l^2l - c^2(3l-c) - 2lc(l-l)] + 4P'l(l+l)}{[2l^2l - c^2(3l-c) + 2l^2c(l-l)] + C'l^2[l(4l+5l) + l^2] + C'l^2[l(4l+5l) + l^2]} \right\} \frac{1}{8l^2(l+l)} \dots (493),$$

$$r = \frac{4Pcl(3lc - c^2 - 2l^2) + 4P'c'l(3l^2c - c^2 + 2ll) - Cl^2 + C'l^2(3l+4l)}{8l^2(l+l)} \dots (494),$$

$$\text{tang. } m = \frac{4Pcl(3llc - l^2c^2 - 2l^2l) - 4P'c'l^2(3l^2c - c^2 - 2l^2) - Cl^2 + C'l^2}{24l^2(l+l)E} \dots (495).$$

802. Pour avoir les équations définitives des quatre branches de la courbe ADBEC, il suffira de mettre ces valeurs de  $p$ ,  $q$ ,  $r$  et tang.  $m$  dans les huit équations qui portent les n<sup>os</sup> depuis (484) jusqu'à (491); mais comme les calculs seraient trop compliqués, on ne fera ces substitutions qu'après avoir calculé numériquement les valeurs de ces quantités  $p$ ,  $q$ ,  $r$  et tang.  $m$ , d'après les quatre dernières formules. Ces substitutions étant faites, on cherchera l'abscisse du point de contact de la tangente horizontale pour les deux branches qui (l'une à droite et l'autre à gauche du point B) donneront la plus grande ordonnée répondant à ce point de contact; en un mot, on se conduira, pour chaque portion de courbe BA, BC, comme il a été dit au n<sup>o</sup> 793, pour avoir la flèche de courbure.

803. Supposons, en premier lieu, que les points D et E, auxquels les poids P, P' sont suspendus, soient au milieu des intervalles AB, BC; nous aurons  $c = \frac{l}{2}$  et  $c' = \frac{l'}{2}$ ; cette hypothèse réduira les valeurs ci-dessus de  $p$ ,  $q$ ,  $r$  et tang.  $m$ , à

$$p = \frac{P^2l(5l+8l) - 3P'l^2l + 2C'l^2(3l+4l) - 2C'l^2}{16l^2(l+l)} \dots (496),$$

$$q = \frac{Pl(l+l)(8l+3l) + P'l(l+l)(8l+3l) + 2Cl[l(4l+5l) + l^2] + 2C'l[l(4l+5l) + l^2]}{16l^2(l+l)} \dots (497),$$

$$r = \frac{-3P'l^2 + P'l^2(5l+8l) - 2C'l^2 + 2C'l^2(3l+4l)}{16l^2(l+l)} \dots (498).$$

$$\text{tang. } m = \frac{-3P'l^2 + 3P'l^2 - 2C'l^2 + 2C'l^2}{24l^2(l+l)E} \dots (499).$$

804. Supposons, en second lieu, qu'en outre de l'hypothèse précédente, on ait  $l' = l$ , c'est-à-dire que le point B soit le milieu de l'intervalle AC; cette dernière hypothèse réduira les dernières valeurs de  $p$ ,  $q$ ,  $r$  et tang.  $m$ , à

$$p = \frac{13P - 3P' + 14C - 2C'}{32} \dots (500),$$

$$q = \frac{22P + 22P' + 20C + 20C'}{32} \dots (501).$$

$$r = \frac{-3P + 13P' - 2C + 14C'}{32} \dots (503),$$

$$\text{tang. } m = \frac{-3Pl^2 + 3P'l^2 - 2Cl^2 + 2C'l^2}{24E} \dots (504):$$

805. Enfin, supposons que les poids suspendus  $P, P'$  soient égaux, ainsi que les charges uniformes  $C$  et  $C'$ , les dernières valeurs de  $p, q, r$  et  $\text{tang. } m$ , deviendront

$$r = p = \frac{5P + 6C}{16}, \quad q = \frac{11P + 10C}{8}, \quad \text{et } \text{tang. } m = 0 \dots (505).$$

On voit en effet, que tout étant symétrique par rapport au point  $B$ , les pressions  $p$  et  $r$  des points  $A$  et  $C$  doivent être égales, et que la tangente au point  $B$  doit être horizontale. Dans ce dernier cas, les équations des deux branches de chaque portion de courbe  $BC, BA$  se réduiront à celles marquées des numéros depuis (488) jusqu'à (491), après y avoir mis pour  $p$  et  $c$  leurs valeurs (505) et  $\frac{l}{2}$ . Les deux premières serviront pour les branches  $BE, BD$ , et les deux autres pour les branches  $EC, DA$ .

806. *Proposons-nous de trouver les équations relatives aux quatre branches  $AD, DB, BE$  et  $EC$  (fig. 164), pour le cas où le solide est encastré par les deux bouts  $A$  et  $C$ , et soutenu par un point d'appui  $B$  entre les encastremens  $A$  et  $C$ .*

Prenons l'origine des coordonnées au point  $B$ , et la droite  $AC$  pour l'axe des abscisses; nommons :

$l$  l'intervalle  $AB$ ;  $l'$  celui  $BC$ ;  $c$  la distance  $BD$  du point  $B$  au point de suspension  $D$  du poids  $P$ ;  $c'$  la distance  $BE$  du même point  $B$  au point d'application  $E$  du poids  $P'$ ;  $C$  et  $C'$  les charges uniformes distribuées sur les longueurs  $AB, BC$ ;  $p, q, r$  les pressions des points  $A, B$  et  $C$ ;  $s, t$  les forces qui, appliquées aux points  $G$  et  $F$ , remplaceraient les encastremens aux points  $A$  et  $C$ , et  $c'', c'''$  les distances des points  $G$  et  $F$  par rapport au point  $B$ .

Cela posé, pour avoir l'équation de la branche  $BE$ , il suffira d'observer que le solide peut être considéré comme encastré depuis le point  $A$  jusqu'au point  $B$ , et qu'à ce point  $B$  la tangente à la courbe ne sera point horizontale dans le cas général; car il deviendra évident, par cette observation, que pour avoir l'équation cherchée, il suffira d'ajouter  $x \text{ tang. } m$  au second membre de l'équation (475) du n° 790, ce qui nous donnera

$$y = x \text{ tang. } m + \frac{P'}{E} \left( \frac{c'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{C'}{2l'E} \left( \frac{l'^2x^2}{2} - \frac{l'x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) \\ + \frac{t}{E} \left( \frac{c'''x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{r}{E} \left( \frac{l'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots (506),$$

en remplaçant P par P', C par C', P'' par t, P' par r, c par c', l par l', et c' par c''; d'où l'on tirera

$$\begin{aligned} \text{tang. } n = \text{tang. } m + \frac{P'}{E} \left( c'x - \frac{x^3}{2} \right) + \frac{C'}{2l'E} \left( l'^2x - l'x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \\ + \frac{t}{E} \left( c''x - \frac{x^3}{2} \right) - \frac{r}{E} \left( l'x - \frac{x^3}{2} \right), \dots (507). \end{aligned}$$

Telles seront les équations qui se rapportent à la branche BE, dans lesquelles r et t sont la pression exercée sur le point C, et la force qui, appliquée au point F, situé à une distance BF du point B égale à c'', produit le même effet que l'encastrement au point C.

Pour avoir les équations qui se rapportent à la branche EC, il suffira d'ajouter x tang. m dans les seconds membres des équations (477), (478), en remplaçant comme ci-dessus P par P', P'' par t, P' par r, C par C', c par c', l par l', c' par c'' et m par n, et nous aurons

$$\begin{aligned} y = x \text{ tang. } m + \frac{P'c'}{E} \left( \frac{c'x}{2} - \frac{c'^3}{6} \right) + \frac{C'}{2l'E} \left( \frac{l'^2x^3}{2} - \frac{l'x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + \frac{t}{E} \left( \frac{c''x^3}{2} - \frac{x^5}{6} \right) \\ - \frac{r}{E} \left( \frac{l'x^3}{2} - \frac{x^5}{6} \right), \dots (508). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tang. } n = \text{tang. } m + \frac{Pc'^2}{2E} + \frac{C'}{2l'E} \left( l'^2x - l'x^2 + \frac{x^3}{3} \right) + \frac{t}{E} \left( c''x - \frac{x^3}{2} \right) \\ - \frac{r}{E} \left( l'x - \frac{x^3}{2} \right), \dots (509). \end{aligned}$$

Il n'est plus besoin de dire comment on trouvera que les équations qui se rapportent à la branche BD sont

$$\begin{aligned} y = -x \text{ tang. } m + \frac{P}{E} \left( \frac{cx^3}{2} - \frac{x^5}{6} \right) + \frac{C_0}{2lE} \left( \frac{l^2x^3}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + \frac{s}{E} \left( \frac{c'x^3}{2} - \frac{x^5}{6} \right) \\ - \frac{p}{E} \left( \frac{lx^3}{2} - \frac{x^5}{6} \right), \dots (510). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tang. } n = -\text{tang. } m + \frac{P}{E} \left( cx - \frac{x^3}{2} \right) + \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + \frac{s}{E} \left( c'x - \frac{x^3}{2} \right) \\ - \frac{p}{E} \left( lx - \frac{x^3}{2} \right), \dots (511). \end{aligned}$$

et que celles qui se rapportent à la branche DA sont

$$\begin{aligned} y = -x \text{ tang. } m + \frac{Pc}{E} \left( \frac{cx}{2} - \frac{c^3}{6} \right) + \frac{C_0}{2lE} \left( \frac{l^2x^3}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + \frac{s}{E} \left( \frac{c'x^3}{2} - \frac{x^5}{6} \right) \\ - \frac{p}{E} \left( \frac{lx^3}{2} - \frac{x^5}{6} \right), \dots (512). \end{aligned}$$

$$\text{tang. } n = -\text{tang. } m + \frac{Pc^2}{2E} + \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + \frac{s}{E} \left( s''x - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{p}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots \dots (513).$$

807. Il nous reste à déterminer les valeurs des constantes  $p, q, r, s, t$  et  $\text{tang. } m$ . Pour cela, nous observerons que les équations (508), (509), (512) et (513), doivent avoir leurs premiers membres nuls, les deux premières quand  $x = BC = l'$ , et les deux secondes quand  $x = BA = l$ ; en faisant ces substitutions, nous aurons

$$0 = l' \text{ tang. } m + \frac{P'c'^2(3l' - c')}{6E} + \frac{C'l'^2}{8E} + \frac{tl'^2(3c'' - l')}{6E} - \frac{rl'^2}{3E} \dots \dots (a),$$

$$0 = \text{tang. } m + \frac{Pc^2}{2E} + \frac{C'l^2}{6E} + \frac{tl^2(3c'' - l)}{2E} - \frac{rl^2}{2} \dots \dots (b),$$

$$0 = -l \text{ tang. } m + \frac{Pc^2(3l - c)}{6E} + \frac{Cl^2}{8E} + \frac{sl^2(3c'' - l)}{6E} - \frac{pl^2}{3E} \dots \dots (c),$$

$$\text{et } 0 = -\text{tang. } m + \frac{Pc^2}{2E} + \frac{Cl^2}{6E} + \frac{sl(3c'' - l)}{2E} - \frac{pl^2}{2} \dots \dots (d),$$

808. Outre ces quatre équations, nous nous en procurerons deux autres, en observant 1° que la somme des pressions  $p, q$  et  $r$  des points A, B et C, doit égaier celle des poids  $P, P'$ , des charges uniformes  $C, C'$ , et des deux forces  $s$  et  $t$  qui remplacent les encastremens aux points A et C: nous aurons donc  $p + q + r = P + P' + C + C' + s + t \dots (e)$ ,

et 2° comme il y a équilibre entre toutes ces forces, le moment de leur résultante doit être nul, ce qui nous donnera

$$pl - Pc - \frac{Cl}{2} - sc'' + P'c' + \frac{C'l'}{2} - rl' + tc'' = 0 \dots (f).$$

809. En éliminant entre ces six équations, on déterminera les six inconnues  $p, q, r, s, t$  et  $\text{tang. } m$ . Nous ne ferons point ces éliminations, pour abrégier, parce qu'elles n'offrent d'autre difficulté que celle de la longueur des calculs, et que la question considérée sous ce point de vue général est rarement utile. Pour la simplifier, nous supposerons 1° que les poids  $P, P'$  sont égaux; 2° que les charges uniformes sont égales; 3° que le point d'appui B est au milieu de l'intervalle AB, et 4° que les deux poids égaux  $P$  sont suspendus aux milieux des intervalles AB, CB.

Ces hypothèses feront évidemment que,

1°. La tangente au point B sera horizontale, et par conséquent le solide sera comme encastré en ce point B;

2°. Les quatre branches AD, BD, BE et CE, seront parfaitement égales;

3°. Les pressions en A et C seront égales entre elles, de sorte que  $p = r$  ;

4°. En prenant les distances BF, BG égales entre elles, c'est-à-dire, en supposant  $c'' = c'''$ , les forces  $s$  et  $t$ , qui tiennent lieu des encastremens en A et C, seront égales ;

5°. Enfin, les points de suspensions D et E des poids égaux P étant aux milieux des intervalles égaux AB, BC (que nous nommerons  $l$ ), nous aurons  $c = c' = \frac{l}{2}$ .

Les quatre branches AD, DB, BE et EC, étant égales, auront la même équation, en prenant l'origine au point A pour la première, au point B pour la seconde et la troisième, et au point C pour la quatrième. Cette équation, commune à ces quatre branches, s'obtiendra en faisant  $\text{tang. } n = 0$  et  $c' = \frac{l}{2}$  dans l'équation (506), ce qui nous donnera

$$y = \frac{P}{E} \left( \frac{lx^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{C}{2lE} \left( \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + \frac{s}{E} \left( \frac{c''x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{p}{E} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots\dots (514),$$

De là on tirera

$$\text{tang. } n = \frac{P}{E} \left( \frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + \frac{s}{E} \left( c''x - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{p}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots\dots (515),$$

$n$  étant l'angle formé par la tangente à l'une des quatre branches, et l'axe AC des abscisses.

Les mêmes hypothèses que ci-dessus réduiront l'équation (509) à

$$\text{tang. } n = \frac{P^2}{8E} + \frac{C}{2lE} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + \frac{s}{E} \left( c''x - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{p}{E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \dots (516).$$

810. Si nous faisons  $x = \frac{l}{2}$ , dans l'équation (515), le point de contact de la tangente à la branche BE sera au point E, et cette tangente sera horizontale; nous aurons donc

$$0 = 6Pl + 7Cl + 6s(4c'' - l) - 18pl \dots\dots (a),$$

et si nous faisons  $x = l$  dans l'équation (516), le point de contact de la tangente à la branche EC sera au point C, et cette tangente sera aussi horizontale; nous aurons donc

$$0 = 3Pl + 4Cl + 12s(2c'' - l) - 12pl \dots\dots (b),$$

Les hypothèses du n° 809 réduisent les deux équations (e) et (f) du n° 808, à celle-ci seulement  $2p + q = 2P + 2C + 2s \dots (c)$ .

Au moyen de ces trois équations on trouvera que

$$s = \frac{l(3P + 2C)}{24(c'' - l)}, \quad p = \frac{3P(4c'' - 3l) + 2C(6c'' - 5l)}{24(c'' - l)} \quad \text{et} \quad q = P + C \dots (517).$$

811. Substituons ces valeurs de  $s$  et de  $p$  dans les équations (514), (515), et il nous viendra

$$y = \frac{1}{48El} \left\{ l^2 (3P + 2C) x^2 - 4l (P + C) x^3 + 2Cx^4 \right\} \dots (518).$$

$$\text{tang. } n = \frac{1}{24El} \left\{ l^2 (3P + 2C) x + 6l (P + C) x^2 + 4Cx^3 \right\} \dots (519)$$

pour les équations de chacune des quatre branches AD, BD, BE et CE, les origines étant respectivement aux points A, B et C.

812. Si dans l'équation (518) nous faisons  $x = \frac{l}{2}$ , nous aurons la flèche de courbure qui sera  $f = \frac{l^3(2P + C)}{384E} \dots (520)$ .

813. Supposons qu'un prisme AB (fig. 165) soit encastré par les deux bouts A, B, et soutenu par deux appuis C, D, également espacés entre les plans d'encastrement; que des poids égaux P soient suspendus au milieu de chacune des trois parties égales AC, CD, DB du prisme, et que ce dernier soit en outre soumis à une charge uniforme représentée par 3C, de manière que C soit la charge qui agit sur chacune des portions AC, CD et DB.

D'après ces suppositions, il est évident que les équations (518), (519) et (520) appartiendront à chacune des six branches AE, EC, CF, FD, DG et GB, en prenant l'origine des coordonnées respectivement aux points A, C, D et B, et qu'il en serait de même s'il y avait un nombre  $n$  de points d'appui intermédiaires; car chaque partie du solide étant dans le même état que si elle était encastrée par les deux bouts, il est clair qu'on peut les considérer chacune séparément, et comme elles sont toutes soumises aux mêmes conditions, quel qu'en soit le nombre, les branches de courbe qui en résulteront seront égales, et auront les mêmes équations.

Il est clair aussi, que, d'après les mêmes conditions, quel que soit le nombre des points d'appui intermédiaires, la charge que supportera chacun d'eux sera égale à la somme  $P + C$  des charges qui agissent sur une seule portion AC ou CD, etc., du solide, comprise entre deux points d'appui.

Il est visible encore que, les deux forces  $s$  et  $p$  qui ont lieu aux points d'en-

castrement A et B, auront les expressions (517) du n° 811, quel que soit le nombre des points d'appui,  $l$  étant la distance AC ou CD, etc., entre deux points d'appui, et P, C le poids et la charge uniforme qui répondent à un des intervalles AC, CD, etc.

## LEÇON XV.

De la forme qu'il faut donner à un solide posé librement sur deux appuis de niveau, et soumis à l'action d'une charge uniforme et d'un poids suspendu en un point quelconque entre les appuis, pour que la lame neutre se courbe suivant un arc de cercle, le solide étant supposé sans pesanteur.

814. *Supposons d'abord que le poids suspendu au solide soit à égales distances des appuis.*

Prenons le point C (fig. 166) milieu de AB, pour l'origine des coordonnées, et nommons :

$l$  la moitié AC ou CB de AB ;

$2P$  le poids suspendu au milieu C de l'intervalle AB ;

$2C$  la charge uniforme totale distribuée dans la longueur AB, et

$x$  l'abscisse d'un point quelconque de la lame neutre.

Cela posé, prenons l'équation (a) du n° 731, et augmentons-en le second membre de  $P(l - x)$ , qui est le moment de la réaction du point d'appui B, par rapport à une section droite quelconque du solide, en ne supposant ce solide chargé que du poids  $2P$ , et nous aurons

$$\frac{E}{r} = P(l - x) + \frac{C(l^2 - x^2)}{2l} \dots\dots (a).$$

Telle est l'équation d'équilibre qui doit subsister dans toutes les sections verticales transversales du solide. Comme le second membre de cette équation varie en même temps que  $x$ , il faut que  $E$  varie dans le même rapport que ce second membre, puisque  $r$  doit ici être constant, étant le rayon de l'arc de cercle affecté par la lame neutre.

815. Supposons que les sections transversales du solide soient des rectangles ; dans ce cas (n° 600),  $E = \frac{tab^3}{12}$ .

Pour que  $E$  varie, il faut que  $a$  ou  $b$  varie, ou tous les deux à la fois ; faisons d'abord varier  $a$ , et pour indiquer la variabilité de cette largeur  $a$ , représentons-la par  $z$ , nous aurons  $E = \frac{tb^3}{12}z$ .

Substituons cette valeur de E dans l'équation (a), et il viendra

$$\frac{tb^3}{12r}z = P(l-x) + \frac{C(l^2-x^2)}{2l} \dots\dots (b).$$

816. Cherchons ce que devient z quand  $x=0$ , et nommons a cette valeur CH particulière de z; nous aurons

$$\frac{tb^3a}{12r} = Pl + \frac{Cl}{2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{tab^3}{12r} = \frac{l(2P+C)}{2},$$

$$\text{d'où} \quad r = \frac{tab^3}{6l(2P+C)} \dots\dots (521).$$

Telle sera la valeur de r; elle est tout-à-fait semblable à celle (366) du rayon de courbure de la lame neutre, pour le cas où il s'agit d'un solide encastré par un bout (n° 694).

En substituant cette valeur de r dans l'équation (b) ci-dessus, il en résultera

$$l^2(2P+C)z = 2alP(l-x) + aC(l^2-x^2) \dots\dots (522).$$

817. Supposons que la fig. 166 soit la projection horizontale du solide, la droite AB étant celle d'une des faces latérales; prenons cette droite AB pour l'axe des x, et le point C, milieu de AB, pour l'origine des coordonnées. Quand on fera  $x=CP$ , l'équation (522) donnera  $z=PM$ .

Cherchons la valeur de x qui donnerait  $z=0$ ; pour cela, il suffira d'égaliser à zéro le second membre de l'équation (522), ce qui nous donnera

$$2alP(l-x) + aC(l^2-x^2) = 0,$$

$$\text{d'où} \quad x = l = CB, \quad \text{et} \quad x = -\frac{l(2P+C)}{C} = -CI \dots\dots (523).$$

La première de ces deux valeurs de x nous apprend que la projection horizontale HB d'une face latérale du solide passe par le point d'appui B; c'est-à-dire que la largeur du solide en ce point B est nulle. La seconde valeur (523) de x, qui est négative, nous fait voir que la courbe BH, prolongée du côté opposé au point B par rapport au point C, rencontrerait l'axe AB prolongé en un autre point I.

818. La distance BI, entre les points B et I, où la courbe BHI rencontre l'axe AB, sera

$$BI = BC + CI = l + \frac{l(2P+C)}{C} = \frac{2l(P+C)}{C},$$

et la moitié BK de cette distance sera par conséquent  $BK = \frac{l(P+C)}{C}$ .

$$\text{Mais} \quad CK = BK - BC = \frac{l(P+C)}{C} - l = \frac{lP+lC-lC}{C} = \frac{lP}{C} \dots\dots (a).$$

Faisons  $x = -\frac{lP}{C}$  dans l'équation (522); il nous viendra

$$l^2(2P + C)z = 2alP \left( l + \frac{lP}{C} \right) + aC \left( l^2 - \frac{l^2P^2}{C^2} \right),$$

d'où 
$$z = \frac{a(P + C)^2}{C(2P + C)} = KL \dots \dots (524).$$

819. Transportons l'origine des coordonnées au point L, l'axe des abscisses étant la droite  $ab$ , menée par le point L parallèlement à AB.

Pour cela, observons que  $x = CP = KP - KC = Lp - KC$ ; mettons pour  $Lp$  sa valeur  $x'$ , et pour  $KC$  sa valeur  $(a)$  (n° 818); ce qui nous donnera

$$x = x' - \frac{lP}{C} \dots \dots (a).$$

Observons de plus que  $z = PM = Pp - Mp = KL - Mp$ , et mettons pour  $KL$  sa valeur (524) et pour  $Mp, z'$ ; nous aurons

$$z = \frac{a(P + C)^2}{C(2P + C)} - z' \dots \dots (b).$$

Substituons ces valeurs de  $x$  et de  $z$  dans l'équation (522), et nous aurons, toutes réductions faites,

$$x'^2 = \frac{l^2(2P + C)}{aC} z' \dots \dots (525),$$

pour l'équation la plus simple de la courbe ILB, qui, comme on voit, est une parabole ordinaire, dont le paramètre est  $\frac{l^2(2P + C)}{aC}$ . Cette parabole est exactement la même que celle trouvée au n° 701; seulement elle est autrement située par rapport à l'axe AB, et dans le cas actuel P et C ne sont que les moitiés des charges du solide, et  $l$  celle de sa longueur.

820. On trouverait une autre courbe AHL'I' qui passerait par le second point d'appui A, de sorte que la forme des faces horizontales du solide sera la figure AHB, terminée par la droite AB et les arcs de parabole AH, BH.

821. Comme la loi de l'élasticité du solide dépend uniquement ici de sa largeur  $z$  aux différents points de sa longueur, il est facile de voir qu'on pourrait lui donner la forme indiquée par la figure AcBd, avec cette seule condition que  $hg = fe$ , pour tous les points de la longueur AB, de sorte que la droite AB divise ou non la figure AcBd en deux parties symétriques.

822. Puisque la lame neutre se courbe suivant un arc de cercle, et que les deux parties CB, CA du solide sont symétriques, il est clair que l'expression de la flèche de courbure sera celle (374) trouvée au n° 702; en se rappelant

que P et C sont les moitiés des charges du solide, et  $l$  la moitié de sa longueur, dans le cas actuel.

823. Supposons maintenant, que dans l'expression  $E = \frac{tab^3}{12}$ , au lieu de faire varier  $a$ , nous fassions varier  $b$ ; en représentant  $b$  par  $z$ , et substituant la valeur  $\frac{ta}{12r}z^3$  de E dans l'équation (a) du n° 814, nous aurons

$$\frac{ta}{12r}z^3 = P(l-x) + \frac{C(l^2-x^2)}{2l} \dots\dots (a),$$

pour l'équation d'équilibre qui doit subsister dans toutes les sections transversales du solide.

824. Si dans cette équation (a) nous faisons  $x = 0$ , en appelant  $b$  ce que devient  $z$  dans ce cas, nous aurons

$$\frac{tab^3}{12r} = Pl + \frac{Cl}{2},$$

d'où 
$$r = \frac{tab^3}{6l(2P+C)} \dots\dots (526),$$

valeur du rayon de l'arc de cercle suivant lequel la lame neutre se courbe, qui est encore la même que dans les questions précédentes analogues à celle-ci.

825. Substituons cette valeur de  $r$  dans l'équation (a) ci-dessus, et nous aurons

$$l^2(2P+C)z^3 = 2b^3lP(l-x) + b^3C(l^2-x^2) \dots\dots (527).$$

Supposons que la figure 167 soit la projection verticale du solide, la droite AB étant celle de la face inférieure; prenons la droite AB pour l'axe des abscisses, et le milieu C de cette droite pour l'origine des coordonnées. Quand on fera  $x = CP$ , l'équation (526) donnera  $z = PM$ , pour l'épaisseur à donner au solide dans la section transversale PM.

826. Les valeurs de  $x$  qui donnent  $z = 0$ , s'obtiendront en égalant à zéro le second membre de l'équation (527), ce qui donnera

$$2lP(l-x) + C(l^2-x^2) = [2lP + C(l+x)](l-x) = 0,$$

d'où  $x = l$ , et  $x = -\frac{l(2P+C)}{C} = -CE \dots\dots (528),$

valeurs de  $x$  tout-à-fait semblables à celles (523) du n° 817.

La première de ces valeurs de  $x$  nous apprend que la courbe DB passe par le point d'appui B, c'est-à-dire qu'en ce point B la hauteur du solide est nulle. La seconde des mêmes valeurs de  $x$ , qui est négative, nous fait voir que la courbe BD prolongée du côté opposé, par rapport au point C, rencontre l'axe AB prolongé en un point E.

827. La distance BE du point B au second point E où la courbe BDE rencontre l'axe AB des abscisses, sera  $BE = \frac{2l(P+C)}{C}$ , comme au n° 818, et par conséquent sa moitié  $BG = \frac{l(P+C)}{C}$ , et  $CG = \frac{lP}{C}$ ..... (a).

Faisons  $x = -\frac{lP}{C}$  dans l'équation (527), nous aurons

$$l^2 (2P + C) z^3 = 2b^3 lP \left( l + \frac{lP}{C} \right) + b^3 C \left( l^2 - \frac{l^2 P^2}{C^2} \right),$$

d'où 
$$z = b \sqrt[3]{\frac{(P+C)^2}{C(2P+C)}} = GI..... (b).$$

828. Transportons l'origine des coordonnées au milieu G de BE, et pour cela observons que l'axe des abscisses restant le même, les z ne changeront pas. Quant à  $x = CP$ , elle deviendra  $x = x' - CG = x' - \frac{lP}{C}$ . Substituons cette valeur de x dans l'équation (527), ce qui nous donnera

$$l^2 (2P + C) z^3 = \frac{b^3 l^2 (P+C)^2}{C} - C b^3 x'^2,$$

$$x'^2 - \frac{l^2 (P+C)^2}{C^2} = \frac{l^2 (2P+C)}{b^3 C} z^3..... (529),$$

équation qui est celle d'une seconde parabole cubique affectée d'une constante (n° 709).

829. A partir du point d'appui A, on aura une seconde courbe ADF qui sera parfaitement égale à BDE, et les deux seront symétriquement disposées par rapport à l'axe vertical  $CD = b$ ; de sorte que la face latérale du solide aura la forme ABD.

830. Puisque la lame neutre du solide se courbe suivant un arc de cercle, et que l'expression (526) du rayon de cet arc de cercle est la même que celle (366) la flèche de courbure dans le cas actuel sera la même que celle (374) du n° 702.

831. Si dans l'expression  $E = \frac{tab^3}{12}$ , nous faisons varier à la fois a et b, il faudra convenir de quelle manière l'une de ces deux quantités devra varier; car pour remplir les conditions exprimées par l'équation (a) du n° 814, il suffit d'une variable. Supposons que a varie comme dans le n° 712; de sorte qu'au lieu de a nous ayons  $\frac{a(l-x)}{l}$ ; si pour exprimer la variabilité

de  $b$  nous le représentons par  $z$ , nous aurons  $E = \frac{ta(l-x)}{12l} z^3$ ; en substituant cette valeur de  $E$  dans l'équation (a) du n° 814, il nous viendra

$$\frac{ta(l-x)}{12r} z^3 = P(l-x) + \frac{C(l^2-x^2)}{2l},$$

ou 
$$\frac{tax^5}{12r} = P + \frac{C(l+x)}{2l} \dots\dots (a).$$

832. Nommons  $b$  ce que devient  $z$  lorsque  $x = 0$ , c'est-à-dire, supposons que  $b$  représente l'épaisseur du solide au point C milieu de AB (fig. 168);

l'équation (a) donnera 
$$\frac{tab^5}{12r} = P + \frac{C}{2},$$

d'où nous tirerons 
$$r = \frac{tab^5}{6(2P+C)} \dots\dots (530).$$

Cette valeur de  $r$ , comme on voit, est la même que celle (383) du n° 713.

833. Substituons cette valeur de  $r$  dans l'équation (a) ci-dessus, il nous viendra

$$\frac{l(2P+C)}{b^3} z^3 = 2lP + C(l+x) \dots\dots (531).$$

834. En faisant  $z = 0$ , nous aurons

$$2lP + C(l+x) = 0, \text{ d'où } x = -\frac{l(2P+C)}{C} \dots\dots (532).$$

De ce que  $x$  n'a ici qu'une seule valeur qui est négative, il s'ensuit que la courbe qui sert de directrice à la moitié de la face supérieure du solide, ne rencontre l'axe des abscisses qu'en un seul point  $c$ , du côté opposé au point B, par rapport au point C.

835. Si dans l'équation (531) nous faisons  $x = l$ , il nous viendra

$$z = Bb = b \sqrt[3]{\frac{2(P+C)}{2P+C}} \dots\dots (533).$$

Cette valeur de  $z$  ou de  $Bb$  est plus grande que  $b = CD$ .

Si dans l'équation (531) nous faisons  $x = -l$ , il nous viendra

$$z = Aa = b \sqrt[3]{\frac{2P}{2P+C}} \dots\dots (534).$$

Cette valeur de  $z$  ou de  $Aa$  est plus petite que  $b = CD$ .

Il résulte de ce qui précède, que la courbe  $caDb$  qui termine la moitié  $Db$  de la face supérieure du solide passe par les quatre points  $c, a, D, b$ , et sa concavité est par-dessus. On aura une courbe  $dDfe$  toute semblable à la première, et les deux seront disposées symétriquement par rapport à l'axe ver-

tical CD ; de sorte que la projection verticale d'une face latérale du solide sera de la forme  $ABbDd$  ; et le solide aura la forme singulière  $ACCDdDb$  fig. 169.

836. Le rayon de l'arc de cercle suivant lequel la lame neutre se courbe étant de même forme que celui du n° 713, il est clair que la flèche de courbure actuelle aura l'expression (387) du n° 717, en observant qu'ici P et C représentent seulement les moitiés du poids suspendu au milieu de l'intervalle AB (fig. 168), et de la charge uniforme.

837. Nous ne pousserons pas plus loin ce genre de recherches, que le lecteur pourra continuer autant qu'il le désirera, sans beaucoup de peine, en suivant la marche que nous avons indiquée dans les dernières questions, et dans celles de la septième leçon. Nous nous réservons de traiter, toutefois, les questions de ce genre que les sujets dont nous nous occuperons par la suite pourront exiger.

Il nous resterait, pour finir ce qui concerne la flexion des corps posés sur deux appuis, etc., de résoudre les questions analogues à celles que nous avons résolues dans la cinquième leçon ; mais ces questions ne sauraient offrir des difficultés au point où nous en sommes, puisqu'il suffirait d'appliquer les mêmes raisonnemens et les mêmes calculs sur les différentes flèches de courbure données dans les leçons depuis la sixième jusqu'à celle-ci inclusivement.

## LEÇON XV.

De la résistance à la rupture des solides exposés à des efforts agissant perpendiculairement à leur longueur.

838. *Supposons qu'il s'agisse du prisme AB (fig. 138), encastré de niveau par le bout AB dans un plan résistant, et soumis à l'action d'un poids P suspendu à son extrémité libre B, et d'une charge uniforme C répartie dans toute sa longueur  $AB = l$ .*

Il est clair que la rupture d'un solide doit en général avoir lieu à l'endroit où l'action de la charge qu'il supporte produit la plus grande courbure, ou, en d'autres termes, au point de la longueur du solide pour lequel le moment de la charge est le plus grand, pourvu que le solide soit homogène dans toute sa longueur.

Or, dans le cas actuel, il est évident que la plus grande action de la

charge se fera sentir à la base d'encastrement ; la rupture aura donc lieu dans cette base.

Mais le moment du poids  $P$  par rapport à la base  $AD$ , sera  $Pl$ , et celui de la charge uniforme  $C$ , sera  $\frac{Cl}{2}$ . La somme  $Pl + \frac{Cl}{2}$  de ces deux moments devra donc faire équilibre à la résistance  $R$  de la base d'encastrement, de sorte qu'on aura

$$R = Pl + \frac{Cl}{2} = \frac{l(2P + C)}{2} \dots\dots (535),$$

pour l'équation d'équilibre entre la résistance du prisme et l'action de la charge ;  $R$  ayant pour valeur l'une de celles trouvées dans la leçon III, selon la forme de la section droite du prisme,

839. Cela suppose, pourtant, que la longueur de la pièce n'a pas changé à l'instant de la rupture, et cette longueur change nécessairement.

En effet, pour que la rupture ait lieu, il faut que la pièce prenne une certaine flèche de courbure qui est plus ou moins grande, selon que le corps est plus ou moins flexible ; ce qui rapproche l'extrémité libre du solide du plan d'encastrement, ou, en d'autres termes, ce qui diminue le bras de levier de la charge qui produit la rupture. Mais cette diminution est trop peu considérable pour avoir une grande influence sur le moment de la charge, et cette influence est encore compensée par la diminution de l'élasticité de la section de rupture, laquelle se trouve très altérée bien avant que la fracture n'ait lieu. Ainsi nous négligerons cette faible cause d'erreur, et nous nous en tiendrons à supposer que le bras de levier ne change pas, malgré la flexion du solide.

840. *Supposons qu'il s'agisse toujours d'un prisme encasté de niveau par un bout, est soumis à l'action d'un poids  $P$  (fig. 140) suspendu à son extrémité libre  $B$ , et d'une charge représentée par le triangle  $ABC$ .*

Dans ce cas, la rupture aura encore évidemment lieu à la base d'encastrement  $A$ , de sorte que le moment du poids  $P$  sera encore  $Pl$ , et celui de la charge représentée par le triangle  $ABC$ , que nous nommerons  $Q$ , sera  $\frac{Ql}{3}$  ;

l'équation d'équilibre entre la résistance du solide et la somme de ces deux moments sera donc

$$R = Pl + \frac{Ql}{3} = \frac{l(3P + Q)}{3} \dots\dots (536).$$

841. *S'il s'agissait de la rupture d'un prisme encasté horizontalement par un bout  $A$  (fig. 141), et soumis à l'action d'un poids  $P$  suspendu à son extrémité libre  $B$ , et d'une charge représentée par le triangle  $ABC$ , on trouverait*

par le même raisonnement, que l'équation d'équilibre est, dans ce cas,

$$R = \frac{l(3P + 2Q)}{3} \dots\dots (537).$$

842. Si dans les deux derniers cas on ajoutait une charge uniforme, il est facile de voir que les équations d'équilibre seraient alors respectivement

$$R = \frac{l(6P + 2Q + 2C)}{6} \dots\dots (538),$$

et 
$$R = \frac{l(6P + 4Q + C)}{6} \dots\dots (539).$$

843. Supposons qu'il s'agisse d'un prisme AB (fig. 152), posé librement sur deux appuis de niveau A, B, chargé d'un poids 2P au milieu D de l'intervalle des appuis, et d'une charge uniforme 2C.

Dans ce cas il est évident qu'on peut supposer le solide encasté depuis le point A jusqu'au point milieu D, et la moitié isolée DB comme étant soumise à l'action d'une force P agissant au point B de bas en haut, et d'une charge uniforme C agissant aussi de bas en haut à son centre de gravité; d'où il suit que dans ce cas l'équation d'équilibre sera celle (535) du n° 838.

844. Si le poids 2P au lieu d'être suspendu au milieu de l'intervalle des appuis, se trouvait appliqué en un point quelconque K (fig. 153), il faudrait chercher le point de rupture. Or, s'il n'y avait que le poids 2P suspendu au point quelconque K, la plus grande courbure aurait lieu en ce point K et par conséquent la rupture; et s'il n'y avait que la charge uniforme, cette rupture aurait lieu au milieu H de l'intervalle des appuis: le point de rupture sera donc entre les points H et K. Nommons  $x$  la distance de ce point de rupture au point B, et  $2l$  la longueur AB du solide; la distance du point de rupture au point A sera  $2l - x$ . Quant à la distance du point K (où le poids 2P est suspendu) au point B, nous l'appellerons  $KB = c$ , ce qui donnera  $AK = 2l - c$ .

Cela posé, décomposons le poids 2P en deux forces  $p$  et  $q$ , appliquées aux points d'appuis A et B; par les principes des forces parallèles nous aurons

$$p + q = 2P, \text{ et } p(2l - c) = qc;$$

en éliminant entre ces deux équations nous aurons

$$p = \frac{Pc}{l}, \text{ et } q = \frac{P(2l - c)}{l} \dots\dots (a).$$

Ces forces  $p$  et  $q$ , agissant de bas en haut, feront équilibre au poids 2P.

La portion de la charge uniforme  $2C$  répartie depuis le point B jusqu'au point de rupture, sera donnée par la proportion

$$l : C :: x : \frac{Cx}{l} \dots\dots\dots (b),$$

et celle répartie depuis le point A jusqu'au point de rupture, par celle-ci

$$l : C :: 2l - x : \frac{C(2l - x)}{l} \dots\dots\dots (c).$$

Maintenant, dans le cas d'équilibre, il faut que les moments qui agissent dans un sens soient égaux à ceux qui agissent en sens contraire autour du point de rupture; les forces dont les moments agissent dans le même sens sont  $p$  et (c), d'une part, et  $q$  et (b) de l'autre. Les moments des deux premières seront  $\frac{Pc}{l} \times (2l - x)$  et  $\frac{C(2l - x)}{l} \times \frac{2l - x}{2}$ , et ceux des deux autres  $\frac{P(2l - c)}{l} \times x$  et  $\frac{Cx}{l} \times \frac{x}{2}$ ; nous aurons donc

$$\frac{Pc(2l - x)}{l} + \frac{C(2l - x)^2}{2l} = \frac{P(2l - c)x}{l} + \frac{Cx^2}{2l} \dots\dots\dots (d),$$

d'où 
$$x = \frac{Pc + Cl}{P + C} \dots\dots\dots (540),$$

Telle sera la distance du point B au point de rupture.

L'un des membres de l'équation (d) est le moment résultant des efforts exercés sur le solide qui doit faire équilibre à la résistance qui se développe dans la section de rupture. Ainsi nous aurons, dans le cas d'équilibre

$$R = \frac{2P(2l - c)x + Cx^2}{2l};$$

ou en substituant la valeur (539) de  $x$ ,

$$R = \frac{2P(2l - c)(Pc + Cl)(P + C) + C(Pc + Cl)^2}{2l(P + C)^2} \dots\dots\dots (541).$$

Cette équation se réduit à celle (535), quand  $c = l$ , c'est-à-dire, quand le poids  $2P$  est suspendu au milieu de l'intervalle des appuis, comme cela doit être.

845. *Supposons que le solide, toujours posé librement sur deux appuis de niveau, soit soumis à l'action d'un poids  $2P$  suspendu en un point quelconque dans l'intervalle des appuis; d'une charge uniforme  $2C$  représentée par le rectangle ABDF (fig. 156), et d'une autre charge  $2Q$  représentée par le triangle FDE.*

Nommons encore  $x$  la distance du point B au point de rupture;  $c$  la distance du même point B au point de suspension du poids  $2P$  et  $2l$  l'intervalle AB des deux appuis.

Cela posé, nous décomposerons le poids  $2P$  en deux forces  $p$  et  $q$ , agissant de bas en haut aux points d'appui A et B, dont les moments, par rapport au point de rupture, seront, comme au n° 844, respectivement égaux à

$$\frac{Pc(2l-x)}{l} \text{ et } \frac{Px(2l-c)}{l} \dots\dots\dots (a),$$

Nous décomposerons aussi la charge uniforme  $2C$  en deux autres agissant de bas en haut à leur centre de gravité, dont les moments, par rapport au point de rupture, seront, comme au n° 844, respectivement égaux à

$$\frac{C(2l-x)^2}{2l} \text{ et } \frac{Cx^2}{2l} \dots\dots\dots (b).$$

Quand à la charge  $2Q$ , nous la décomposerons de même en deux parties, l'une étant la partie de cette charge répartie depuis le point d'appui A jusqu'au point de rupture, et l'autre depuis ce dernier point jusqu'au point d'appui B; ensuite nous chercherons les centres de gravité de ces deux portions de charge, pour en avoir les moments par rapport au point de rupture.

Mais nous avons trouvé au n° 747 (fig. 154), que les moments des charges AONE, OBN, par rapport à un point O quelconque, étaient respectivement

$$\frac{2Q(l^3 + 3l^2x - x^3)}{3l^2} \text{ et } \frac{2Q(l-x)^3}{3l^2} \dots\dots\dots (c).$$

$x$  représentant la distance DO du milieu D de l'intervalle AB des appuis au point O. Si donc O est le point de rupture que nous cherchons, comme  $DO = DB - OB$ , ou  $x = l - OB$ , et que nous appelons ici  $x$  la distance OB, il s'ensuit que pour avoir les moments en question, il suffira de remplacer  $x$  par  $l - x$  dans les expressions (c), et de développer et réduire, pour avoir respectivement

$$\frac{2Q(3l^3 - 3lx^2 + x^3)}{3l^2} \text{ et } \frac{2Qx^3}{3l^2} \dots\dots\dots (d),$$

pour les moments demandés.

Observons maintenant que la somme des moments qui agissent dans un sens doit égaliser celle des moments qui agissent en sens contraire autour du point de rupture, dans le cas d'équilibre, nous aurons

$$\frac{Pc(2l-x)}{l} + \frac{C(2l-x)^2}{2l} + \frac{2Q(3l^3 - 3lx^2 + x^3)}{3l^2} = \frac{Px(2l-c)}{l} + \frac{Cx^2}{2l} + \frac{2Qx^3}{3l^2} \dots\dots\dots (e),$$

d'où nous tirerons

$$x = -\frac{l(P+C)}{2Q} + \sqrt{\frac{l^3(P+C)^2}{4Q^2} + \frac{l(Pc+Cl+Ql)}{Q}} \dots\dots\dots (542).$$

Telle sera la distance du point B au point de rupture, en ne donnant que le

signe + au radical, le signe — donnant à  $x$  une valeur négative qui est étrangère à la question.

Le moment  $R$  de la résidence à la rupture doit faire équilibre à l'un des membres de l'équation (e) ; nous aurons donc

$$R = \frac{Px(2l-c)}{l} + \frac{Cx^2}{2l} + \frac{2Qx^3}{3l^2} \dots\dots\dots (543),$$

pour l'équation demandée, dans laquelle il faudra mettre la valeur (542) de  $x$ , après l'avoir calculée numériquement, d'après les valeurs particulières de  $P$ ,  $Q$ ,  $C$ ,  $c$  et  $l$ , qui appartiendront à la question dont on s'occupera. La formule (543) serait trop compliquée en y introduisant la valeur générale (542) de  $x$ .

846. *Supposons que le solide, toujours posé librement sur deux appuis de niveau, soit soumis à l'action d'un poids  $2P$  suspendu en un point quelconque dans l'intervalle  $AB$  (fig. 157) des appuis, d'une charge uniforme  $2C$  représentée par le rectangle  $ABHG$ , et d'une autre charge  $2Q$  représentée par les deux triangles  $GEF$ ,  $EHD$ , réunis par leur sommet  $E$  au milieu de  $AB$ .*

Nommons toujours  $x$  la distance du point  $B$  au point de rupture ;  $c$  la distance du même point  $B$  au point de suspension du poids  $2P$ , et  $2l$  l'intervalle  $AB$  des appuis.

Cela posé, comme dans l'article précédent, nous décomposerons le poids  $2P$  en deux forces dont les moments, par rapport au point de rupture, seront respectivement

$$\frac{Pc(2l-x)}{l} \quad \text{et} \quad \frac{Px(2l-c)}{l} \dots\dots\dots (a).$$

et la charge uniforme  $2C$  en deux autres dont les moments, par rapport au même point, seront respectivement

$$\frac{C(2l-x)^2}{2l} \quad \text{et} \quad \frac{Cx^2}{2l} \dots\dots\dots (b).$$

Quant à la charge  $2Q$ , nous la recompenserons de même en deux parties, l'une étant la portion de cette charge répartie depuis le point  $A$  jusqu'au point de rupture, et l'autre la portion répartie depuis ce dernier point jusqu'au point  $B$ , et nous en chercherons les moments par rapport au point de rupture.

Mais nous avons trouvé au n° 751, que les moments des charges  $ADF + DNO$  et  $NBEO$ , par rapport à un point  $N$  quelconque, étaient respectivement

$$\frac{Q}{3l^2} (l^3 + 3lx^2 + 2x^3) \quad \text{et} \quad \frac{Q(l-x)^2(2x+l)}{3l^2} \dots\dots\dots (c),$$

$x$  représentant la distance  $DN$  du milieu  $D$  de l'intervalle des appuis au point  $N$ .

Si donc N est le point de rupture que nous cherchons, comme  $DN = DB - BN$ , ou  $x = l - BN$ , et que nous appelons ici  $x$  la distance BN, il s'ensuit que pour avoir les moments demandés, il suffira de remplacer  $x$  par  $l - x$  dans les expressions (c), et de développer et réduire, pour avoir respectivement

$$\frac{Q(6l^3 - 12l^2x + 9lx^2 - 2x^3)}{3l^3}, \text{ et } \frac{Qx^2(3l - 2x)}{3l^3} \dots\dots\dots (d).$$

La somme des moments qui agissent dans un sens devant équaler celle des moments qui agissent en sens contraire autour du point de rupture, dans le cas d'équilibre, nous aurons

$$\frac{Pc(2l - x)}{l} + \frac{C(2l - x)^2}{2l} + \frac{Q(6l^3 - 12l^2x + 9lx^2 - 2x^3)}{3l^3} = \frac{Px(2l - c)}{l} + \frac{Cx^2}{2l} + \frac{Qx^2(3l - 2x)}{3l^3} \dots\dots\dots (e),$$

d'où nous tirerons

$$x = \frac{l(P + C + 2Q)}{2Q} - \sqrt{\frac{l^3(P + C + 2Q)^2}{4Q^2} - \frac{l(Pc + Cl + Ql)}{Q}} \dots (544).$$

Telle sera la distance du point d'appui B au point de rupture, en ne donnant que le signe - au radical, le signe + donnant une valeur positive qui, dépassant le point A, n'appartient point à la question.

En égalant le moment R de la résistance à la rupture au second membre de l'équation (e), on aura

$$R = \frac{Px(2l - c)}{l} + \frac{Cx^2}{2l} + \frac{Qx^2(3l - 2x)}{3l^3} \dots\dots\dots (545),$$

pour l'équation d'équilibre entre la résistance à la rupture et l'action des efforts auxquels le solide est soumis, dans laquelle on substituera la valeur numérique de  $x$ , tirée de l'équation (544).

847. *Proposons-nous de trouver l'équation d'équilibre entre la résistance d'un prisme posé librement sur deux appuis de niveau, et soumis à l'action d'un poids 2P suspendu en un point quelconque entre les appuis, d'une charge uniforme 2C représentée par le rectangle ABED (fig. 159), et d'une charge représentée par le triangle DEC.*

Nommons  $x$  la distance du point B au point de rupture;  $c$  la distance du même point B au point de suspension du poids 2P, et  $2l$  l'intervalle des appuis.

Cela posé, observons que les moments du poids 2P et ceux de la charge uniforme 2C par rapport au point de rupture seront les mêmes que ceux des nos précédens, ainsi ceux de 2P seront  $\frac{Pc(2l - x)}{l}$  et  $\frac{Px(2l - c)}{l}$ , et ceux de 2C  $\frac{C(2l - x)^2}{2l}$  et  $\frac{Cx^2}{2l}$ .

Quant à ceux de la charge représentée par le triangle DEC, on les trouvera en observant que nous avons trouvé au n<sup>o</sup> 762 que les moments des charges ANO, BCON (fig. 158), par rapport à un point N quelconque, étaient respectivement

$$\frac{Q(l+x)^3}{6l^3} \quad \text{et} \quad \frac{Q(2l+x)(l-x)^2}{6l^3}.$$

Si donc N est le point de rupture, il suffira de changer  $x$  en  $l-x$  dans ces deux dernières expressions, pour avoir les moments demandés, qui seront respectivement

$$\frac{Q(2l-x)^3}{6l^3} \quad \text{et} \quad \frac{Q(3l-x)x^2}{6l^3}.$$

Dans le cas d'équilibre que nous cherchons, la somme des moments qui agissent dans un sens doit égaler celle des moments qui agissent en sens contraire autour du point de rupture, nous aurons donc

$$\begin{aligned} \frac{Pc(2l-x)}{l} + \frac{C(2l-x)^2}{2l} + \frac{Q(2l-x)^3}{6l^3} &= \frac{Px(2l-x)}{l} + \frac{Cx^3}{3l} \\ &+ \frac{Q(3l-x)x^2}{6l^3} \dots\dots\dots (a), \end{aligned}$$

d'où nous tirerons

$$x = \frac{2l(P+C+Q)}{Q} - \sqrt{\frac{4l^3(P+C+Q)}{Q^3} - \frac{4l(3Pc+3Cl+2Ql)}{3Q}} \dots\dots (546).$$

Telle sera la distance du point de rupture au point d'appui B, en ne donnant que le signe — au radical.

En égalant le moment R de la résistance à la rupture au premier membre de l'équation (a), nous aurons

$$R = \frac{Pc(2l-x)}{l} + \frac{C(2l-x)^2}{2l} + \frac{Q(2l-x)^3}{6l^3} \dots\dots (541),$$

pour l'équation d'équilibre entre la résistance à la rupture et l'action des efforts auxquels le solide est soumis, dans laquelle on substituera la valeur numérique de  $x$ , tirée de l'équation (546).

848. *Proposons-nous de déterminer l'équation d'équilibre entre la résistance d'un prisme posé librement sur deux appuis de niveau, et soumis à l'action d'un poids  $2P$  suspendu en un point quelconque entre les appuis, d'une charge uniforme  $2C$  dans tout l'intervalle AB (fig. 160) des appuis, et d'une autre charge uniforme  $C'$  représentée par le rectangle abhd, qui n'a lieu que dans une partie ab de la longueur AB du solide.*

Nommons toujours  $x$  la distance du point B au point de rupture;  $c$  la distance du même point B au point d'application du poids  $2P$ ,  $2l$  l'intervalle

AB des appuis;  $c'$  la distance BC du centre de gravité du rectangle  $abhd$  à ce même point B, et  $d$  la demi-longueur  $ae$ ,  $eb$  de la charge  $abhd$ .

Cela posé, comme dans les articles précédents, les moments du poids  $2P$  et de la charge uniforme  $2C$  par rapport au point de rupture, seront respectivement

$$\frac{Pc(2l-x)}{l}, \frac{Px(2l-c)}{l}, \text{ et } \frac{C(2l-x)^2}{2l}, \frac{Cx^2}{2l} \dots\dots (a).$$

Quant aux moments de la charge uniforme  $C'$  représentée par le rectangle  $abhd$ , on les trouvera en observant que si O est le point de rupture, les portions  $aO$ ,  $Ob$ , on aura  $aO = Be + ca - Bo = c' + d - x$ , et  $Ob = OB - Bb$ , mais  $Bb = Be - cb$ ; ce qui donnera  $Cb = OB - Be + eb = x - c' + d$ . Les portions de la charge uniforme  $C'$  réparties sur les longueurs  $aO$  ou  $c' + d - x$ , et  $Ob$  ou  $x - c' + d$ , seront données par les proportions :

$$2d : C' :: c' + d - x : \frac{C'(c' + d - x)}{2d} \dots\dots (b),$$

$$2d : C' :: x - c' + d : \frac{C'(x - c' + d)}{2d} \dots\dots (c).$$

Le bras de levier de la force (b) sera  $\frac{c' + d - x}{2}$ , et par conséquent son moment sera  $\frac{C'(c' + d - x)^2}{4d} \dots\dots (d)$ .

Le bras de levier de la force (c) sera  $\frac{x - c' + d}{2}$ , et par conséquent son moment sera  $\frac{C'(x - c' + d)^2}{4d} \dots\dots (e)$ .

La somme des moments qui agissent dans un sens devant égaler celle des moments qui agissent en sens contraire autour du point de rupture, nous aurons

$$\frac{Pc(2l-x)}{l} + \frac{C(2l-x)^2}{2l} - \frac{C'(c' + d - x)^2}{4d} = \frac{Px(2l-c)}{l} + \frac{Cx^2}{2l} + \frac{C'(x - c' + d)^2}{4d} \dots\dots (f),$$

d'où 
$$x = \frac{2(2Pc + 2C'l + C'c')}{4C + 4P + C'} \dots\dots (547),$$

pour la distance du point B au point de rupture.

En égalant le moment R de la résistance à la rupture au second membre de l'équation (e), nous aurons

$$R = \frac{Px(2l-c)}{l} + \frac{Cx^2}{2l} - \frac{C'(x - c' + d)^2}{4d} \dots\dots (548),$$

pour l'équation d'équilibre entre la résistance à la rupture et l'action des efforts

auxquels le solide est soumis, dans laquelle on substituera la valeur numérique de  $x$ , tirée de l'équation (547).

849. Demandons-nous l'équation d'équilibre entre la résistance d'un prisme de niveau, encastré par une extrémité et soutenu à l'autre par un appui, et l'action de la charge du solide, se composant d'une charge uniforme et d'un poids suspendu en un point quelconque dans l'intervalle des appuis.

Soit AB (fig. 161) le solide en question, A le point d'encastrement, C le point d'application du poids suspendu, et B le point d'appui. Cela posé, il est clair que le prisme se rompra en deux endroits : au point d'encastrement, et en un autre point compris dans l'intervalle AB, pour lequel la courbure est la plus grande ; mais comme la rupture ne peut avoir lieu en un de ces deux points sans avoir lieu en même temps en l'autre, il nous suffira de considérer la rupture au point A d'encastrement.

Or, pour ce point (en prenant la notation du n° 774), la base de rupture doit faire équilibre au moment de la résultante du poids P, de la charge uniforme C, et de la pression P' du point d'appui B ; nous aurons donc

$$R = Pc + \frac{Cl}{2} - P'l,$$

ou 
$$R = \frac{4Pc(2l^2 - 3lc + c^2) + Cl^2}{8l^2} \dots\dots (549),$$

en mettant pour P' sa valeur (452), toute réduction faite.

550. Si le poids P était suspendu au milieu de AB, on aurait  $l = 2c$ , et la formule précédente deviendrait

$$R = \frac{c(3P + 2C)}{8} \dots\dots (550).$$

851. Enfin, supposons qu'il s'agisse de la résistance à la rupture d'un prisme placé dans les circonstances de celui du n° 790 (fig. 162).

Dans ce cas, la rupture doit avoir lieu en trois points à la fois : aux deux points d'encastrement A et B, et en un autre intermédiaire ; et il nous suffira encore ici de considérer celle qui aura lieu au point A.

La somme des momens, par rapport à ce point A, devant faire équilibre à la résistance R de la base d'encastrement, nous aurons

$$R = Pc + \frac{Cl}{2} + P''c' - P'l,$$

$$R = Pc + \frac{Cl}{2} - \frac{12Pc^2c'(l-c) + Cl^2c'}{12l^2(c-l)} - \frac{12Pc^2(3lc' - 2l^2 - 2cc' + lc) + Cl^2(6c' - 5l)}{12l^2(c-l)}$$

en mettant pour P'' et P' leurs valeurs (479), ce qui se réduit à

$$R = \frac{12Pc(l-c)^2 + Cl^2}{12l^2} \dots\dots (551).$$

Telle sera la formnle qui fera connaître la résistance à la rupture, pour un prisme encastré par les deux extrémités, et chargé d'un poids suspendu en un point quelconque de sa longueur et d'une charge uniforme continue.

852. Supposons que le poids  $P$  soit suspendu à égales distances des plans d'encastrément ; dans ce cas  $l = 2c$  ; si nous substituons dans la formule (551), il nous viendra

$$R = \frac{c(3P + 2C)}{12} \dots\dots\dots (552).$$

853. S'il s'agissait d'un prisme posé librement de niveau sur plusieurs appuis, dans les deux intervalles des extrémités, on appliquerait la formule (549) ou (550), parce que dans ces deux portions le solide serait comme encastré par un bout, et soutenu par un appui à l'autre bout. Et s'il s'agissait d'un solide encastré par les deux bouts et soutenu par plusieurs appuis intermédiaires, on se servirait dans tous les intervalles de la formule (551) ou (552). On se servira des formules (549) et (551), dans le cas où le poids  $P$  sera suspendu en un point quelconque, et des deux autres (550) et (552) dans le cas où ce poids sera au milieu de chaque portion du solide.

FIN.

# TABLE.

## QUATRIÈME PARTIE.

### *Stabilité.*

#### SECTION PREMIÈRE.

##### *Principes de Statique.*

<i>Leçon I.</i> Préliminaire. . . . .	Page 1
<i>Leçon II.</i> Principes d'équilibre, composition et décomposition des forces parallèles . . . . .	8
<i>Leçon III.</i> Principes d'équilibre, composition et décomposition des forces dont les directions ne sont pas parallèles . . . . .	15
<i>Leçon IV.</i> Des momens. . . . .	23
<i>Leçon V.</i> Des centres de gravité de polygones. . . . .	33
<i>Leçon VI.</i> Centre de gravité des figures planes terminées par des lignes courbes et des lignes droites . . . . .	40
<i>Leçon VII.</i> Centres de gravité des figures paraboliques et des surfaces planes quelconques. . . . .	50
<i>Leçon VIII.</i> Centres de gravité des polyèdres des cylindres et des cônes; théorème de Guldin pour trouver la superficie et le volume des corps de révolution, sachant trouver le centre de gravité de leur génératrice . . .	60
<i>Leçon IX.</i> Centre de gravité des corps sphériques . . . . .	67
<i>Leçon IX bis.</i> Centre de gravité des corps ellipsoïdes. . . . .	74
<i>Leçon X.</i> Centre de gravité des cylindres tronqués. . . . .	81
<i>Leçon XI.</i> Centre de gravité de l'ellipsoïde engendré autour d'un axe horizontal, de parabolôïde et d'un corps généralement quelconque . . . . .	92
<i>Leçon XII.</i> De l'équilibre des corps solides qui s'appuient sur un plan inébranlable par un ou plusieurs points, en ayant égard ou non au frottement . .	99

#### SECTION DEUXIÈME.

##### *Principes de Dynamique.*

<i>Leçon I.</i> Du mouvement uniforme rectiligne. . . . .	109
<i>Leçon II.</i> Du mouvement uniformément et continuellement varié; de la chute des corps graves, et de la direction que prennent ces corps lorsqu'ils sont animés simultanément d'une vitesse uniforme dans un sens quelconque, et de l'action de la pesanteur . . . . .	115

<i>Leçon III.</i> Du mouvement des corps assujétis à glisser sur des lignes données, dans l'hypothèse d'un poli parfait. . . . .	122
<i>Leçon IV.</i> Du choc direct des corps . . . . .	135

## SECTION TROISIÈME.

*Principes d'hydrostatique.*

<i>Leçon I.</i> Lois de l'équilibre des liquides contenus dans des vases ouverts par en haut; phénomène de la capillarité; équilibre des corps plongés dans un liquide; de la pesanteur spécifique des corps en général, et de la stabilité des corps flottans . . . . .	145
<i>Leçon II.</i> De la pression des liquides contre les parois latérales des vases ou des bassins quelconques . . . . .	156
<i>Leçon III.</i> De l'équilibre entre des liquides de densités différentes; de l'équilibre des fluides élastiques, et des effets mécaniques de l'air atmosphérique. . . . .	166

## SECTION QUATRIÈME.

*Principes d'hydrodynamique.*

<i>Leçon I.</i> De la manière dont les molécules des liquides incompressibles se comportent dans les vases qui les contiennent, pendant qu'ils sortent par des orifices percés dans le fond ou dans les parois des vases . . . . .	173
<i>Leçon II.</i> Détermination de l'écoulement par seconde, tant pour le cas de l'orifice percé au fond du vase que pour celui où il est percé dans une paroi verticale. . . . .	
<i>Leçon III.</i> Détermination de la quantité de liquide qui s'écoule par un orifice percé dans une paroi verticale du vase . . . . .	192
<i>Leçon IV.</i> Considérations sur ce qui précède, et quelques problèmes qui s'y rapportent . . . . .	199
<i>Leçon IV bis.</i> De la mesure de la vitesse de l'eau dans un canal ou une rivière, dans un tuyau d'une grande longueur, et de la pression des liquides en mouvement contre des surfaces qui doivent leur résister . . . . .	210
Table contenant les vitesses et les forces du vent, suivant les différens noms dont il est appelé . . . . .	<del>222</del>

## SECTION CINQUIÈME.

*Théorie générale de la résistance des corps solides.*

<i>Leçon I.</i> Préliminaire. . . . .	223
<i>Leçon II.</i> De la résistance stable pour une section droite quelconque d'un prisme ou cylindre supposé sans pesanteur, encastré par un bout et soumis à une force perpendiculaire à sa longueur, appliquée à l'extrémité libre. . . . .	225
<i>Leçon III.</i> De la résistance à la rupture des solides prismatiques encastrés par un bout et soumis à l'autre à un effort transversal. . . . .	
<i>Leçon IV.</i> De la courbe que prend un prisme encastré horizontalement par un bout, et soumis à une charge uniforme et à un poids suspendu à son extrême libre. . . . .	251

<i>Leçon V.</i> Problème sur les prismes encastrés horizontalement par un bout, et chargés uniformément dans toute leur longueur, et d'un poids suspendu à leur extrémité libre . . . . .	263
<i>Leçon VI.</i> De la courbe que prend un prisme encastré par un bout, et chargé dans sa longueur de poids dont les grandeurs sont en progression arithmétique croissante, dont le terme infiniment petit serait à l'extrémité isolée du solide. . . . .	269
<i>Leçon VII.</i> De la forme qu'il faut donner à un solide encastré horizontalement par un bout et chargé uniformément dans toute sa longueur, et d'un poids suspendu à son extrémité libre, pour que la courbe qu'affectera la lame neutre soit un arc de cercle, ou, ce qui revient au même, que le rayon de courbure soit constant, le solide étant sans pesanteur. . . . .	276
<i>Leçon VIII.</i> Équation de la courbe que prend un prisme posé librement sur deux appuis de niveau et soumis à l'action d'une charge uniforme dans l'intervalle des appuis, et d'un poids suspendu en un point quelconque de sa longueur. . . . .	287
<i>Leçon IX.</i> De la courbe que prend un prisme posé horizontalement et librement sur deux appuis, et chargé de diverses manières entre les appuis . . . . .	302
<i>Leçon X.</i> Suite de la recherche de la courbe que prend un prisme posé horizontalement et librement sur deux appuis, et chargé de diverses manières dans l'intervalle des appuis. . . . .	314
<i>Leçon XI.</i> Suite de la recherche de la courbe que prend un prisme posé librement sur deux appuis de niveau, et chargé d'une certaine manière dans l'intervalle des appuis. . . . .	321
<i>Leçon XII.</i> De la courbe que prend un prisme de niveau encastré par une extrémité et soutenu à l'autre par un appui, et soumis à l'action d'une charge uniforme et d'un poids suspendu en un point quelconque de l'intervalle des appuis. . . . .	329
<i>Leçon XIII.</i> De la courbe que prend un prisme de niveau encastré par les deux bouts, et soumis à l'action d'une charge uniforme et d'un poids suspendu en un point quelconque de l'intervalle des appuis. . . . .	337
<i>Leçon XIV.</i> De la courbe d'un prisme posé librement sur plusieurs appuis de niveau, et soumis à l'action d'un poids dans chaque intervalle des appuis, et d'une charge uniforme . . . . .	342
<i>Leçon XV.</i> De la forme qu'il faut donner à un solide posé librement sur deux appuis de niveau et soumis à l'action d'une charge uniforme et d'un poids suspendu en un point quelconque entre les appuis, pour que la lame neutre se courbe suivant un arc de cercle, le solide étant supposé sans pesanteur. . . . .	352

FIN DE LA TABLE.

## ERRATA.

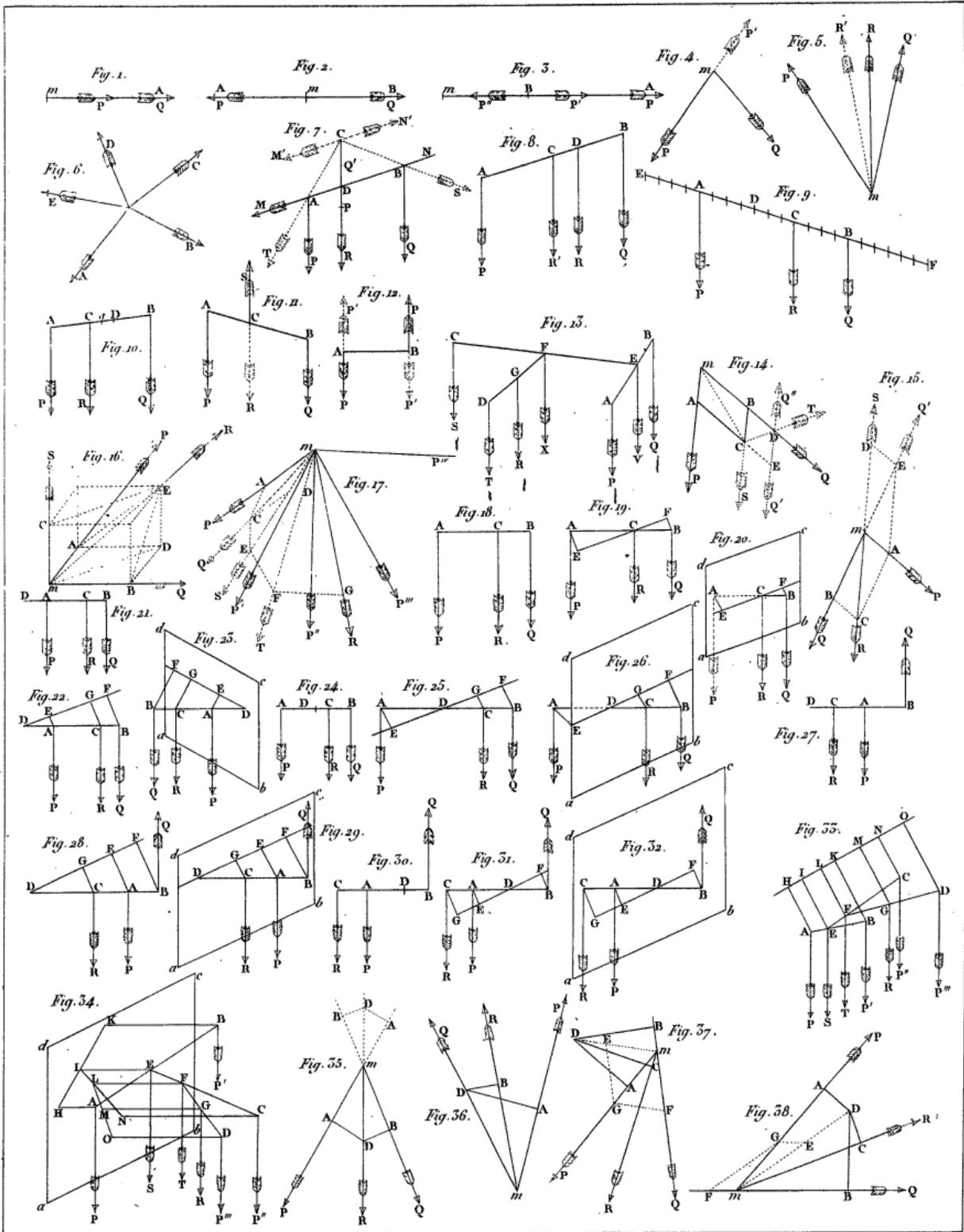
Pages. Lignes.

- 44, 34, le point C qui satisfait, *lisez* : le point C qui satisfait.
- 46, 2, représente en grandeur, *lisez* : représentent en grandeur.
- 47, 33,  $R^2 = P^2 + Q^2 + PQ \cos. \angle CAM$ , *lisez* :  $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos. \angle CAM$ .
- 30, 17, dont les diretions, *lisez* : dont les directions.
- 34, 32,  $R \times DC \times P = AD + Q \times DB$ , *lisez* :  $R \times DC = P \times AD + Q \times DB$ .
- 44, 5, Mais les triangles DbC, *lisez* : Mais les triangles Dbc.
- 55, 46, mom. seg.  $ACB = \frac{4}{p^2} [(pa - y^2)^2]$ , *lisez* : mom. seg.  $ACB = \frac{4}{p^2} [(pa - y^2)^2]$ .
- 70, 24, la formule du n° 464, *lisez* : la formule du n° 462.
- 72, 43, mené par la sphère, *lisez* : mené par le centre de la sphère.
- 73, 40,  $\frac{mph \left( R - \frac{h}{3} \right)}{360}$ , *lisez* :  $\frac{mph^2 \left( R - \frac{h}{3} \right)}{360}$ .
- 83, 4,  $g = \frac{3pR^2}{46R}$ , *lisez* :  $g' = \frac{3pR^2}{46R}$ .
- 84, 4, à la pyramide, *lisez* : de la pyramide.
- 86, 7,  $\times \text{seg. CaC}' =$ , *lisez* :  $\times \text{seg. Cac} =$ .
- Ib., 46,  $\frac{qR^2}{4}$ , *lisez* :  $\frac{pR^2}{4}$ .
- 93, 44, l'ellipse régénératrice, *lisez* : l'ellipse génératrice.
- 95, 6, tangeant ; *lisez* : tangent.
- Ib., 29, quand  $m$  est infiniment petit, *lisez* : quand  $h$  est infiniment petit.
- 410, 23, dès l'instant, *lisez* : de l'instant.
- 444, 4, et puissent toutes marcher, *lisez* : et qu'elles puissent toutes marcher.
- 447, 24, égal à  $Vt$ , *lisez* : égal à  $V't$ .
- 448, 9, serait égale, *lisez* : serait égal.
- Ib., 22, de sa courbe, *lisez* : de sa course.
- 422, 23, de la fig. 70, *lisez* : de la fig. 74.
- 423, 26,  $E = \frac{g^2 t^2}{2}$ , *lisez* :  $E = \frac{g^2 t^2}{2}$ .
- 428, 48,  $f = \frac{g^2 t^4}{4R}$ , *lisez* :  $f = \frac{9^2 t^4}{8R}$ .
- Ib., Ib.,  $f = \frac{\left( V't - \frac{9t^2}{2} \right)^2}{R^2}$ , *lisez* :  $f = \frac{\left( V't - 9 \frac{t^2}{2} \right)^2}{2R}$ .
- 437, 23, quantité de mouvemens, *lisez* : quantité de mouvement.
- 447, 24, et, agissant latéralement, *lisez* : et qui, agissant latéralement.
- 458, 40,  $= S \left( g + \frac{P}{S} \right)$ , *lisez* :  $= s \left( g + \frac{P}{S} \right)$ .
- 489, 9,  $M = \frac{2aS [C^2 - (c - d)^2]}{3c^3}$ , *lisez* :  $M = \frac{2aS [c^2 - (c - d)^2]}{3c^3}$ .
- 489, 24, la dépente, *lisez* : la dépense.
- 494, 23, dans l'équation (b) ci-dessus, *lisez* : dans l'équation (a) ci-dessus.
- Ib., 26,  $a^2 - 2ay'' + y^2 + 4h'a - 4h'y'' = 4h'x$ , *lisez* :  $a^2 - 2ay + y^2 + 4h'a - 4h'y = 4h'x$
- Ib., 27,  $(2a + 4h'y)''$ , *lisez* :  $(2a + 4h'y)$ .

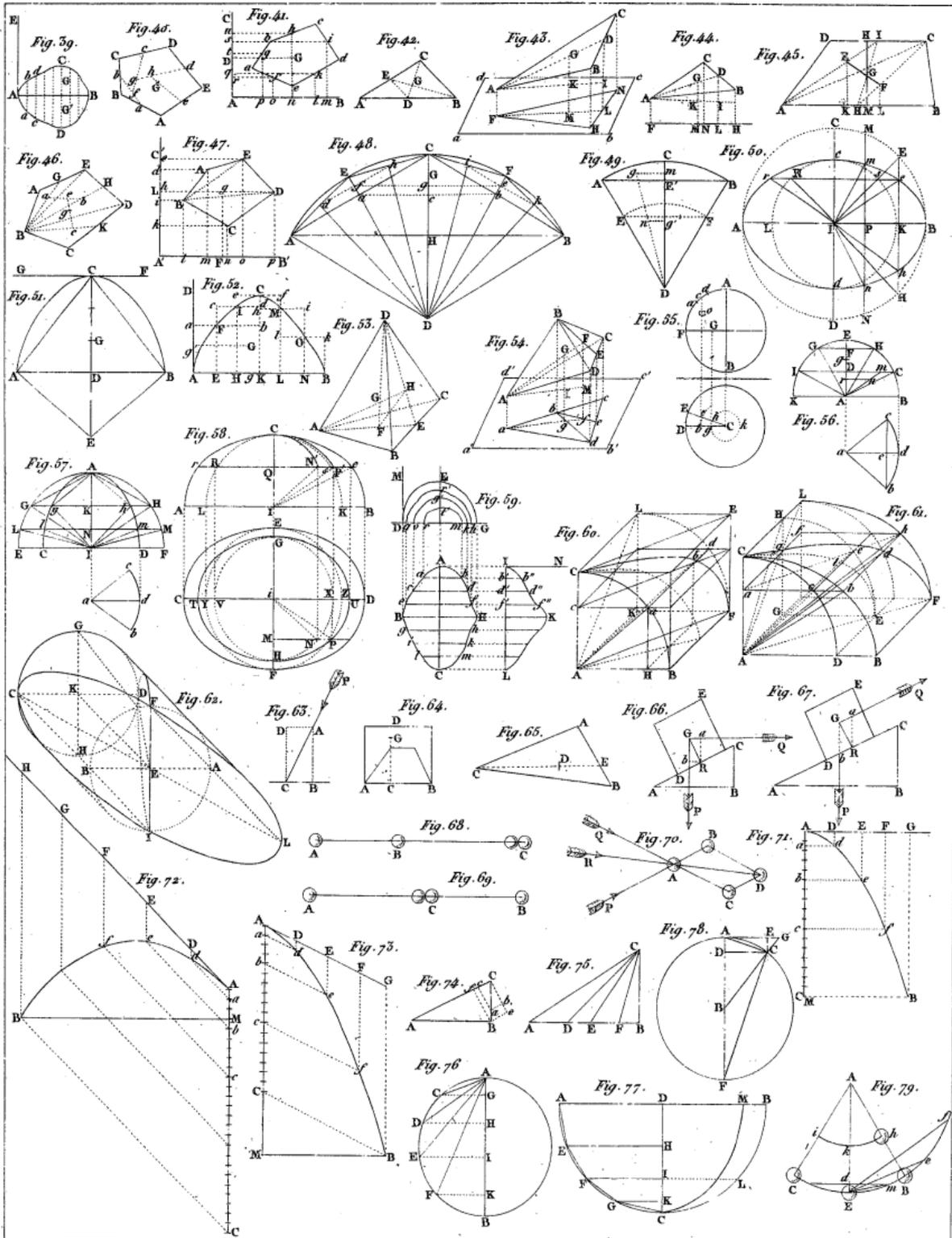
Pages. Lignes.

- 213, 11, peu celle marquée, *lisez* : peu de celle marquée.  
 221, 29, que s'ubira, *lisez* : que subira.  
 Ib., 21, et précisément, *lisez* : est précisément.  
 222, 29, de molécule consécutives, *lisez* : de molécules consécutives.  
 Ib., 34, forces triples, *lisez* : force triple.  
 223, 4, précédant, *lisez* : précédent.  
 229, 5, égal à l'unité, *lisez* : égale à l'unité.  
 234, 4, Du prisme située, *lisez* : du prisme situé.  
 235, 3,  $(6^3 - 46^{78})$ , *lisez* :  $(6^3 - 46^{73})$ .  
 239, 3, d'où  $A^2 = pr^4$ , *lisez* : d'où  $A^4 = p^2r^4$ .  
 Ib., 29, plus de résistance de matière, *lisez* : plus de résistance que de matière.
- 250, 48,  $\frac{4a^3 3r(2n^3 - n^3)2}{3}$ , *lisez* :  $\frac{4a^3 3r(2n^3 - n^3) \cdot 5}{3}$ .
- 253, 17,  $AM - AC - AC =$ , *lisez* :  $AM - AC =$ .
- 270, 13,  $+ (1 - 3)^3(x - 2) + \dots$ , *lisez* :  $+ (1 - 2)^3(x - 2) + \dots$ .
- Ib., 22,  $M = \{nl^3x \dots\}$ , *lisez* :  $M = \{nl^3x \dots\}$ .
- 271, 6,  $y = \frac{Q}{41^3 E} \{ \dots \}$ , *lisez* :  $y = \frac{Q}{31^3 E} \{ \dots \}$ .
- 274, 15,  $\frac{C(1-x)^3}{41^3}$ , *lisez* :  $\frac{C(1-x)^3}{21}$ .
- Ib., 29,  $d = \frac{C}{21E} (1-x^3)^2(1-x^7) + \dots$ , *lisez* :  $d = \frac{C}{21E} (1-x^3)^2(x-x^7) + \dots$ .
- 286, 20,  $z = \pm R^2 \sqrt{\frac{C^2 x^{72} - 1P^2}{P(2P+C)}}$ , *lisez* :  $z = \pm R \sqrt{\frac{4}{C^2 x^{72} - 1P^2}} \frac{1}{P(2P+C)}$ .
- 289, 8, longuer, *lisez* : longueur.
- 294, 7,  $y = x \text{ tang. } n + \{ (1 - c - x^2) \dots \}$ , *lisez* :  $y = x \text{ tang. } n + \frac{P(1+c)}{E1} \{ (1 - c - x$
- 296, 15, c'est-à-dire  $x = BE$ , *lisez* : c'est-à-dire  $y = BE$ .
- 304, 9,  $+ \frac{C^7}{21E} \{ \frac{61^4}{42} \dots \}$ , *lisez* :  $+ \frac{C^7}{21E} \{ \frac{514}{42} \dots \}$ .
- 308, 2, horizontal, *lisez* : horizontale.
- 309, 14,  $+ \frac{2x^3}{3}$ , *lisez* :  $+ 2x^3$ .
- 318, 6,  $P = -l \text{ tang. } + \frac{41Q1^3}{360E}$ , *lisez* :  $P = l \text{ tang. } m + \frac{41Q1^3}{360E}$ .
- 332, 2,  $M_0 + N$ , *lisez* :  $M_c + N$ .
- 359, 5,  $R = \frac{l(6P + 2Q + 2C)}{6}$ , *lisez* :  $R = \frac{l(6P + 2Q + 3C)}{6}$ .

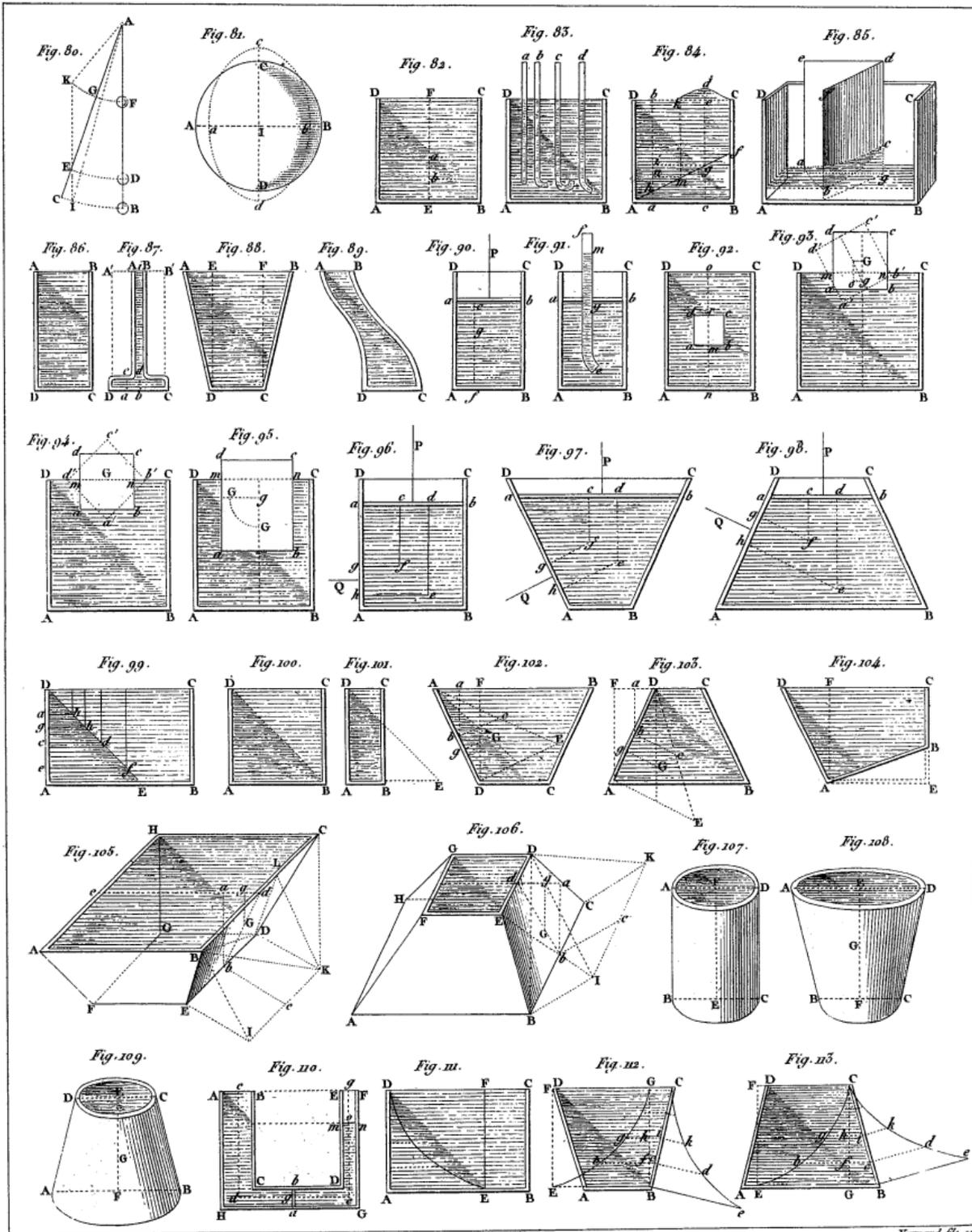
FIN DE L'ERRATA.



Normand, fils, etc.



Normand, fils &c.



Normand fils et c.

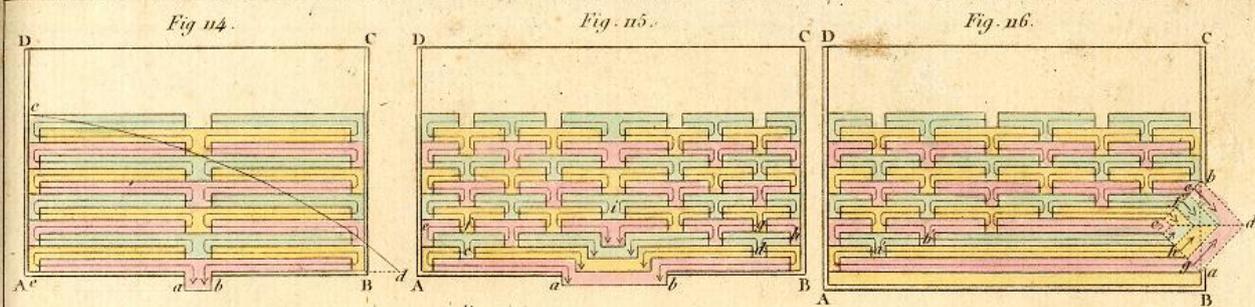


Fig. n7.

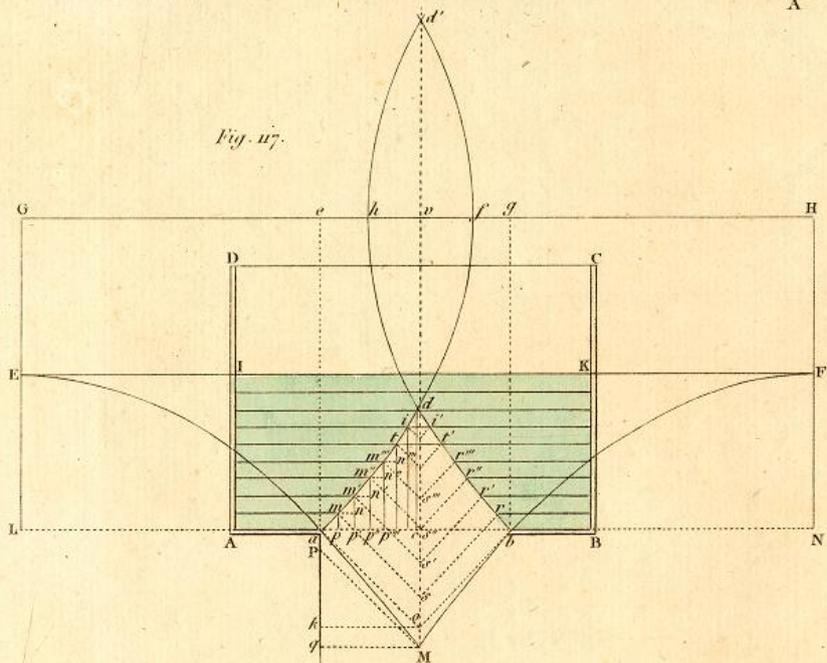


Fig. n9.

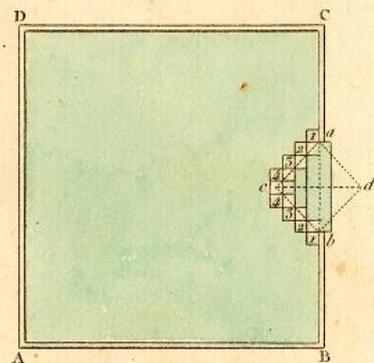
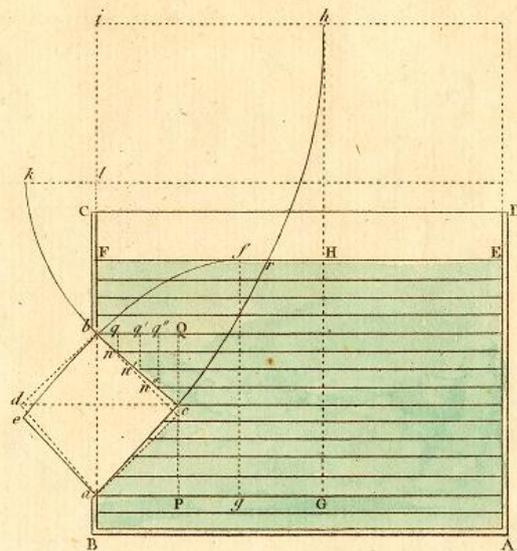
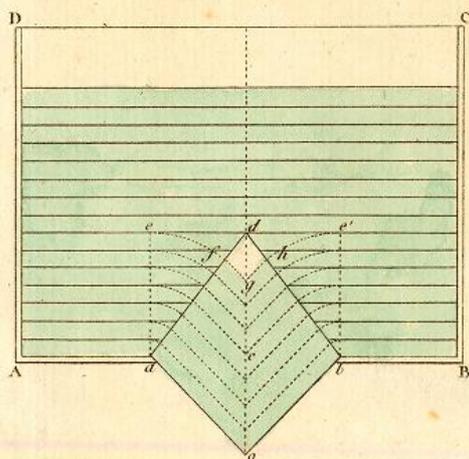
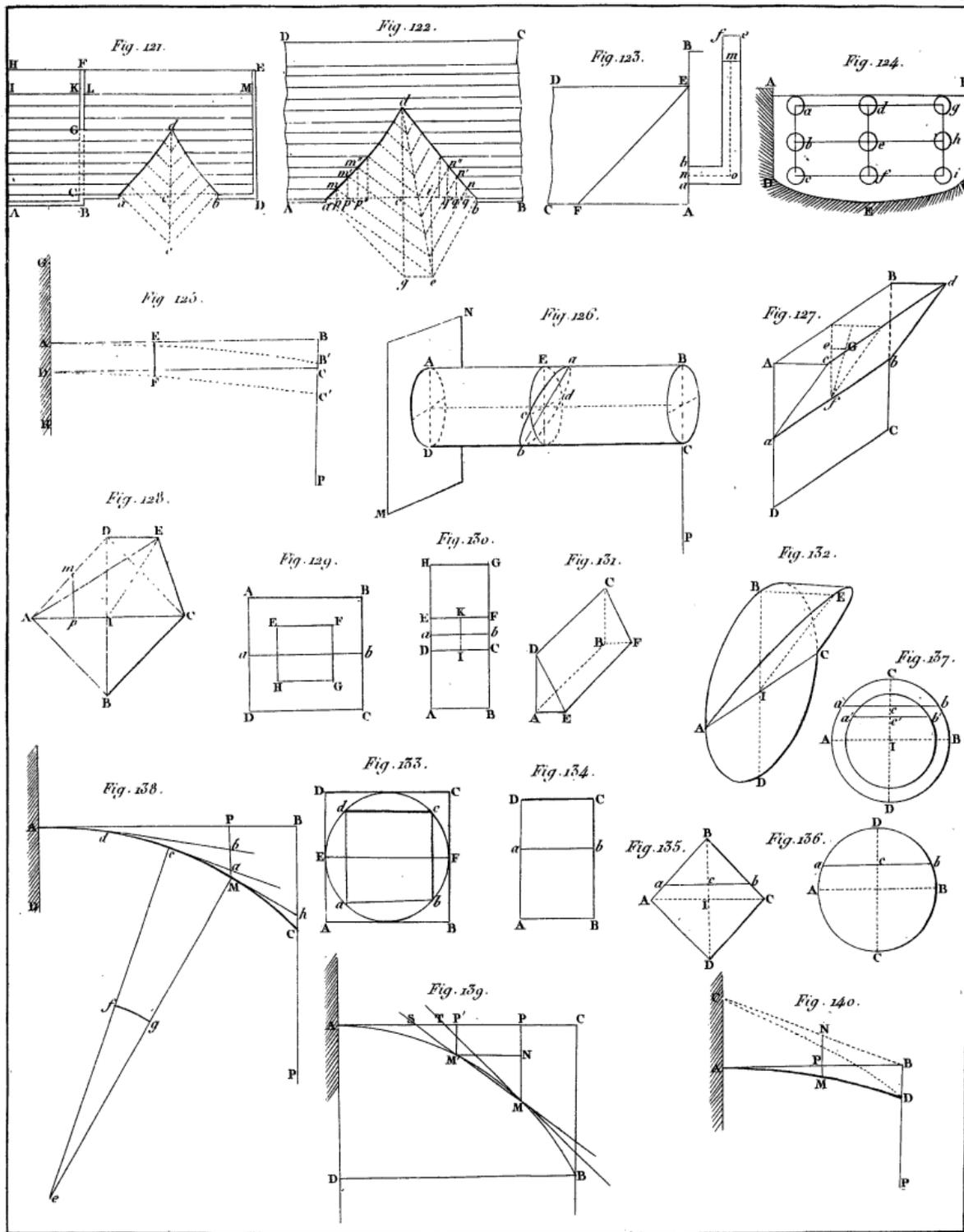


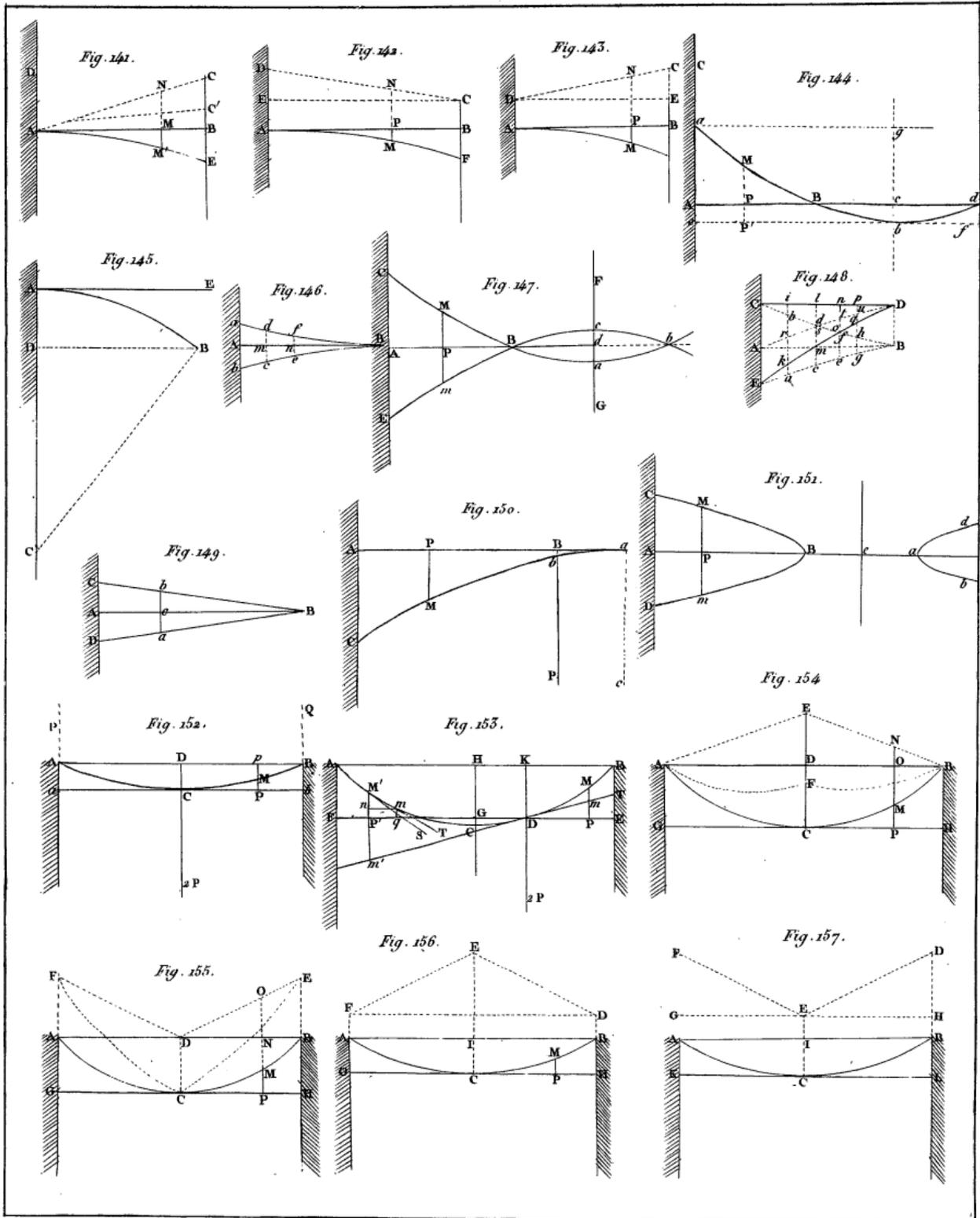
Fig. 120.

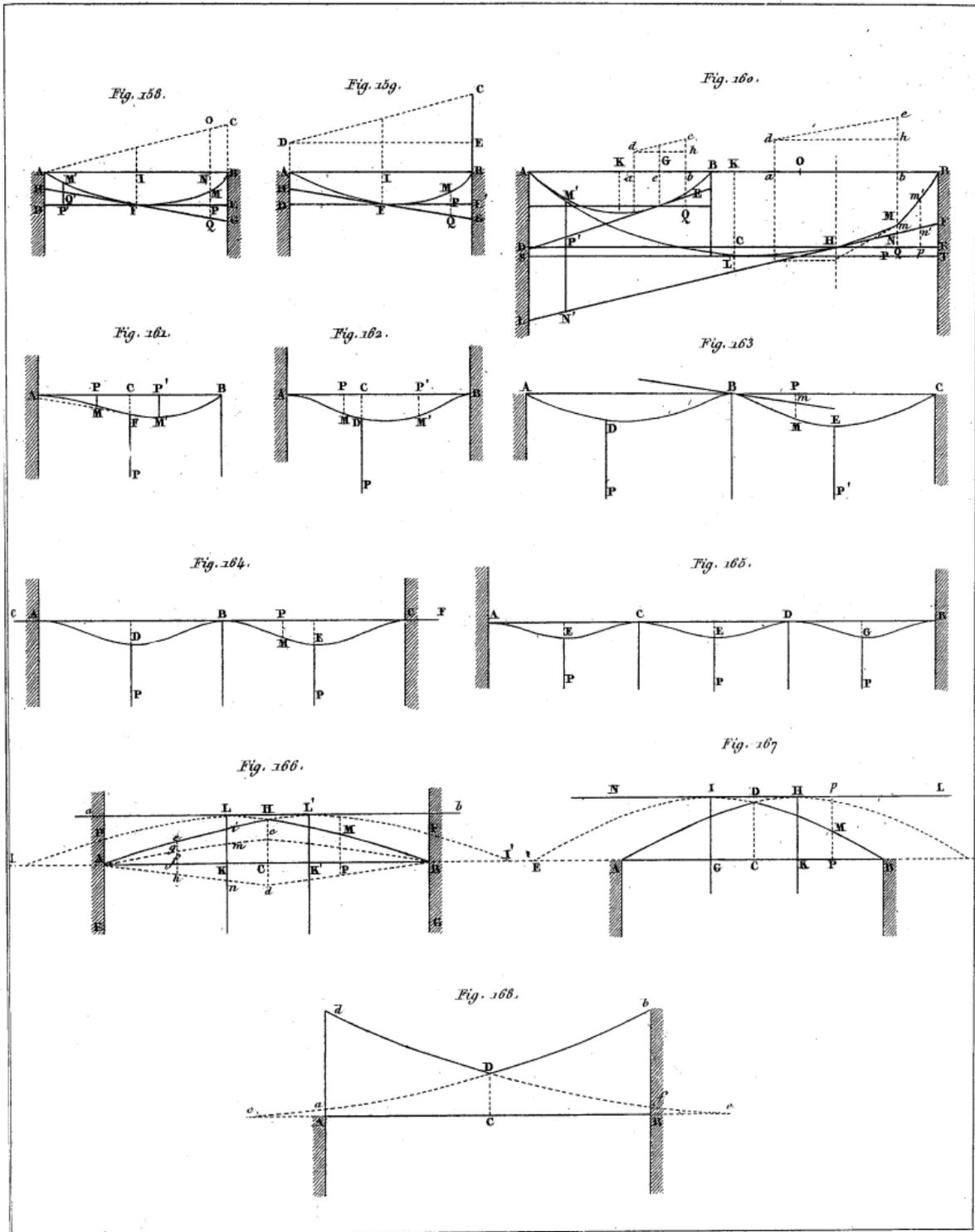
Fig. 118.





M<sup>re</sup> Dubois sculp.





M<sup>me</sup> Donliot Sculp<sup>r</sup>