http://cnum.cnam.fr
Conservatoire numérique des Arts & Métiers

Auteur ou collectivité : Laussedat, Aimé
Auteur : Laussedat, Aimé (1819-1907)
Auteur secondaire : École polytechnique (Palaiseau, Essonne)
Titre : Cours d'astronomie et de géodésie. École impériale polytechnique, 2e division, 1860-1862

Adresse : Paris : École polytechnique, 1860-1862
Collation : 1 vol. (308 p.) ; 32 cm
Cote : CNAM-BIB 4 Ra 70
Sujet(s) : Astronomie -- Manuels d'enseignement supérieur ; Géodésie -- Manuels d'enseignement supérieur
Langue : Français

Date de mise en ligne : 03/10/2014
Date de génération du PDF : 26/9/2017

Permalien : http://cnum.cnam.fr/redir?4RA70

La reproduction de tout ou partie des documents pour un usage personnel ou d'enseignement est autorisée, à condition que la mention complète de la source (*Conservatoire national des arts et métiers, Conservatoire numérique http://cnum.cnam.fr*) soit indiquée clairement. Toutes les utilisations à d'autres fins, notamment commerciales, sont soumises à autorisation, et/ou au règlement d'un droit de reproduction.

You may make digital or hard copies of this document for personal or classroom use, as long as the copies indicate *Conservatoire national des arts et métiers, Conservatoire numérique http://cnum.cnam.fr*. You may assemble and distribute links that point to other *CNUM* documents. Please do not republish these PDFs, or post them on other servers, or redistribute them to lists, without first getting explicit permission from *CNUM*.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Li Ra. 50

École Impériale
Polytechnique

2e Division.

1860 - 1862.

Cours d'Astronomie

et de

Géodésie.

Professeur Thaupedat
Capitaine du génie.

Première partie.

Instruments employés à la mesure du temps et à celle des angles.

Formules trigonométriques.

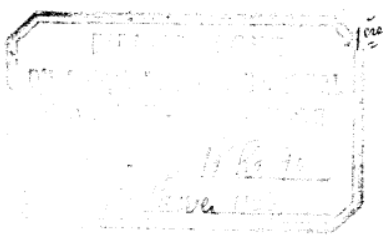
Chapitre 1er

Instruments d'horlogerie.

De la mesure du temps.

La notion du temps nous est aussi familière que celle de l'espace, et nous nous faisons à priori et sans définitions, une idée aussi nette de l'intervalle de temps qui sépare deux événements distincts et non simultanés que de la distance de deux points. Or, de même que pour mesurer une distance il faut employer une unité de longueur, parfaitement invariable, de même, pour mesurer un intervalle de temps, il faut avoir une unité dont la durée soit constante, s'ajoutant à elle même sans interruption, et pouvant se fractionner pour servir à la mesure d'intervalles plus grands ou plus petits qu'elle.

La périodicité du mouvement des astres nous procure à la fois des unités de temps convenables et des époques ou dates remarquables pouvant servir d'origines conventionnelles au temps qui se compte positivement ou négativement à partir de l'une d'elles.



1ère feuille.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les Astronomes font usage de deux unités peu différentes l'une de l'autre : le jour sidéral et le jour solaire moyen dont nous donnerons plus tard les définitions précises ; dans le usage civil on se sert exclusivement du jour solaire moyen. Soit qu'il s'agisse d'ailleurs du temps sidéral ou du temps moyen, les Astronomes divisent le jour en 24 heures, l'heure en 60 minutes, et la minute en 60 secondes [1]. Au delà ils emploient les fractions décimales de la seconde.

Lorsqu'on écrit des nombres d'heures de minutes et de secondes, on les accompagne des initiales h. m. s et suivant que l'on emploie le temps sidéral ou le temps moyen, on fait suivre le nombre inscrit des doubles initiales t.s. ou t.m. ; par exemple le jour sidéral est plus petit que le jour moyen et la différence exprimée en temps moyen est de $3^m\ 55^s,9584$ t.m.

Les instruments d'horlogerie sont destinés à marquer, au moyen d'aiguilles qu'un mécanisme fait mouvoir sur un cadran, le nombre d'heures, de minutes et de secondes écoulées depuis l'instant pris pour origine du jour.

La construction de ces instruments a été portée depuis deux cents ans à un degré extraordinaire de perfection, à ce point qu'une horloge peut ne varier que d'une fraction minime de seconde dans un jour ; toutefois la machine la mieux exécutée ne saurait avoir la régularité qui existe dans le mouvement céleste, et que l'on cherchera vainement ailleurs ; de là la nécessité de contrôler fréquemment la marche des instruments d'horlogerie au moyen d'observations astronomiques, indispensables du reste pour fixer la longueur de l'unité de temps.

Le principe de ces vérifications est extrêmement simple ; il repose sur l'uniformité du mouvement diurne apparent de la sphère céleste [2], et comme il renferme l'idée exacte que l'on doit se faire de l'usage des instruments que nous avons à décrire, nous l'exposerons dès à présent.

Supposons que la nuit, par un ciel découvert, on ait remarqué l'instant précis où une étoile facile à reconnaître [3] se trouvait dans une direction bien déterminée (par exemple dans le plan vertical qui contient les tiges parallèles de deux parallactomètres situés à quelque distance l'un de l'autre) et que l'on ait pu noter l'heure, la minute et la seconde que marquait alors une horloge dont on veut étudier la marche. Si l'on guette le lendemain le moment où l'étoile apparaîtra dans la même direction, l'intervalle de temps écoulé entre les deux observations sera exactement de 24 heures sidérales, et la différence entre l'heure marquée actuellement par l'horloge et celle qu'on a notée la veille, apprendra de combien elle a avancé ou

---

(1) A l'époque de l'établissement du Système métrique, on a songé d'introduire la division décimale dans la mesure du temps ; mais pour plusieurs raisons, qu'il serait inutile d'énoncer ici, la division sexagésimale a prévalu.

(2) Voyez la seconde partie du cours.

(3) Une étoile fixe et non une planète.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

retardé dans cet intervalle sur le temps sidéral. En réitérant la même observation pendant plusieurs jours, on jugera que l'horloge marche bien si les différences successives, c'est-à-dire la quantité dont elle avance ou dont elle retarde par 24 heures, sont à très peu près constantes.

S'il en est ainsi, l'époque d'un phénomène observé dans l'intervalle de deux observations consécutives de l'étoile se trouvera déterminée par rapport à l'instant de l'une de ces observations, et cela suffit pour que l'on puisse se servir de l'horloge; au contraire, si le retard ou l'avance se produisent d'une manière irrégulière, un observateur ne saurait en tirer aucun parti.

Des horloges et des chronomètres.

Les instruments employés à la mesure précise du temps sont de deux espèces: les horloges astronomiques qui sont établies à demeure dans les Observatoires, et les chronomètres, qui sont portatifs. Les conditions si opposées dans lesquelles ces deux sortes d'instruments doivent être placés, rendent nécessairement leur construction très différente; cependant les organes essentiels dont ils se composent les uns et les autres, différents pour la plupart par leur nature et par leur forme, sont en même nombre et remplissent des fonctions analogues.

Ces organes sont:

Le moteur, qui entretient le mouvement des autres parties de l'appareil;

Le rouage, qui transmet ce mouvement et qui sert de compteur;

Le régulateur, qui suspend l'action du moteur à des intervalles de temps égaux, tout en étant lui-même soumis, pendant chacun de ces intervalles, à l'influence nécessaire et plus ou moins prolongée du moteur.

Enfin l'échappement, qui est intimement lié au régulateur, en ce sens que c'est par son intermédiaire que le régulateur interrompt le mouvement du rouage et qu'il reçoit à son tour les impulsions qui entretiennent son propre mouvement. En outre, comme le moteur s'écarte peu à peu de sa position initiale, à mesure que son action se prolonge, afin de pouvoir l'y ramener facilement, c'est-à-dire pour remonter l'horloge ou le chronomètre, sans qu'ils cessent de marcher, on emploie un mécanisme particulier qui n'est mis en jeu qu'à des intervalles de temps plus ou moins longs, suivant la construction de l'instrument.

Description de l'horloge astronomique.

Du régulateur. — Nous commencerons la description de l'horloge astronomique par celle du régulateur, qui en est l'organe principal.

Ce régulateur est un pendule dont les oscillations marquent des intervalles de temps très sensiblement égaux; il constitue par lui-même le meilleur instrument

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que l'on puisse se prévaloir pour mesurer le temps.

L'idée d'évaluer le temps au moyen des mouvements du pendule appartient à Galilée, mais c'est à Huygens que l'on doit de l'avoir appliquée à la construction des horloges, perfectionnement qui a permis de donner aux observations une précision inouïe auparavant, et qui a été ainsi l'une des causes principales des grandes découvertes dont s'est enrichie l'Astronomie moderne.(1)

Pour que les oscillations d'un pendule soient sensiblement isochrones, il faut que leur amplitude soit très faible; en effet, on démontre en Mécanique rationnelle que la durée d'une oscillation est exprimée par la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

dans laquelle π désigne le rapport de la circonférence au diamètre, l la longueur du pendule, g l'intensité de la pesanteur dans le lieu où le pendule oscille, et α la demi amplitude de l'oscillation, quantité que l'on a déjà supposée assez petite pour pouvoir négliger dans la formule les termes en α^4 et ceux d'ordre supérieur. Or, cette formule, différentiée par rapport à t et à α, donne

$$dt = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\alpha}{8} d\alpha ;$$

d'où l'on voit que pour une même variation d'amplitude $d\alpha$, la durée de l'oscillation varie proportionnellement à l'amplitude elle même, que l'on doit, par conséquent, rendre la plus petite possible.

Dans la pratique, l'amplitude 2α ne dépasse guère 2 ou 3°, et comme d'un autre côté elle varie peu, les oscillations restent en définitive très sensiblement isochrones.

En se fondant sur les propriétés de la cycloïde, on peut concevoir un pendule dont les grandes et les petites oscillations seraient exactement isochrones, et par des expériences délicates faites en 1845, MM. Laugier et Pinnerl ont constaté qu'un pendule muni d'une suspension à ressort, analogue à celle dont nous parlerons plus loin, pouvait également avoir des oscillations dont la durée restait constante, tant que leur amplitude ne dépassait pas 5°; mais les difficultés que l'on rencontre lorsqu'on veut utiliser ces remarques dans la construction des horloges sont telles que l'on s'en est tenu jusqu'à présent au pendule ordinaire, dont le défaut d'isochronisme est du reste fort peu sensible.

En supposant les oscillations isochrones, la formule (1) montre que leur

---

(1) Nous n'avons à nous occuper dans ce cours ni des clepsydres ou horloges à eau, ni des anciennes horloges à poids dont le régulateur était un volant à mouvement alternatif produit par l'action d'une roue à couronne, dite roue de rencontre sur deux palettes portées par l'axe du volant. La description détaillée de ces anciennes machines appartient à l'histoire de l'horlogerie.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

durée dépend encore de la longueur du pendule et de la latitude avec laquelle l'intensité g de la pesanteur varie, mais comme les horloges ne sont pas destinées à être déplacées, la durée des oscillations ne dépend réellement en chaque lieu que de la longueur du pendule, et, par suite, on peut disposer de cette longueur pour obtenir un nombre déterminé d'oscillations dans un temps donné.

Dans les horloges astronomiques, le pendule doit battre la seconde, c'est-à-dire exécuter $24 \times 60 \times 60$, ou 86400 oscillations dans un jour sidéral ou dans un jour moyen, selon que l'on emploie l'une ou l'autre de ces unités.

Lorsqu'une horloge est réglée sur le temps sidéral et qu'on veut la faire marcher sur le temps moyen, il suffit d'allonger le pendule d'une très petite quantité; c'est évidemment le contraire dans l'autre cas.

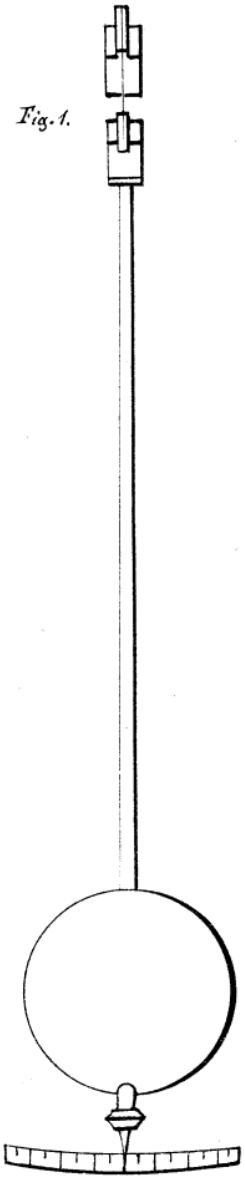


Fig. 1.

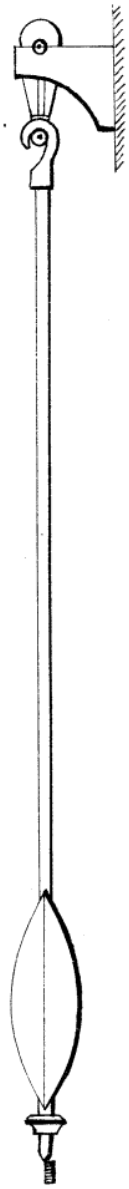


Fig. 2.

Le pendule est ordinairement formé d'une tige en bois ou en métal, suspendue par une double lame en ressort et qui porte à sa partie inférieure une masse de métal très dense ayant la forme d'une lentille.

La suspension à ressort a l'avantage d'être beaucoup moins altérable que la suspension à couteau, dont on faisait usage autrefois et qui est généralement abandonnée actuellement dans l'horlogerie de précision. Au lieu d'une seule lame métallique, on en emploie deux afin d'éviter la torsion et de faire osciller le pendule exactement dans le même plan.

La forme lenticulaire donnée à la masse de métal qui constitue le corps oscillant a pour but d'atténuer les effets de la résistance de l'air qui contribuent à détruire le mouvement du pendule. Ferdinand Berthoud a prouvé expérimentalement qu'à poids égal, une lentille dont la flèche est $\frac{1}{6}$ du diamètre perd $\frac{1}{10}$ de moins de son mouvement qu'une sphère. C'est dans le même but et aussi pour se rapprocher le plus possible des conditions du pendule simple que l'on emploie un métal très dense. Le poids des lentilles varie de 5 à 10 K.; elles sont en plomb coulé dans une enveloppe d'un autre métal susceptible de recevoir un plus beau poli.

La lentille n'est pas invariablement fixée à la tige; elle peut glisser sur celle-ci; et c'est ainsi que l'on allonge ou que l'on raccourcit le pendule. A cet effet, la tige traverse la lentille et est terminée par une vis à filets serrés sur laquelle s'engage une pièce à écrou dont le mouvement dans les deux sens opposés

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fait monter ou descendre la lentille d'une assez petite quantité pour chaque tour ; ce qui permet de régler avec une grande précision la durée des oscillations. L'amplitude de ces oscillations peut se mesurer au moyen d'un petit arc divisé, disposé immédiatement au dessous de la vis.

Lorsqu'on a réglé la longueur d'un pendule à une certaine époque de l'année, on remarque, en général, que la durée de ses oscillations augmente ou diminue avec la température, ce qui s'explique facilement par le changement que subit la longueur de la tige formée d'une substance plus ou moins dilatable.

Ces variations sont beaucoup plus sensibles lorsque la tige est en métal que lorsqu'elle est en bois, et l'on a même reconnu qu'en employant du sapin débité de droit fil, et recouvert d'un vernis préservatif contre l'action de l'humidité, on pouvait se procurer des tiges dont la longueur restait très sensiblement constante entre les limites des températures auxquelles sont exposées les horloges.(1)

Cette espèce de tige est très précieuse en ce qu'elle permet de construire à un prix peu élevé des horloges qui ont une marche déjà très régulière ; cependant il est préférable d'employer, quand on le peut, des pendules à tiges métalliques dont les différentes parties sont disposées de manière à ce que les effets de la dilatation s'y compensent exactement, et que l'on nomme pour cela pendules compensateurs.

On a imaginé plusieurs modes de compensation dont les deux seuls en usage dans la construction des horloges astronomiques sont le pendule à gille et le pendule à mercure dû tous les deux au célèbre artiste anglais Graham.(2)

La description du pendule à gille se trouve dans tous les traités de Physique, où sa théorie ——— est en même temps exposée. Nous croyons donc pouvoir nous dispenser de la donner ici.

Le pendule à mercure se compose de deux vases symétriquement placés de part et d'autre d'une tige à laquelle ils sont fixés par une armature ; ces vases contiennent du mercure dont la dilatation relève le centre d'oscillation lequel est abaissé par celle de la tige, ou inversement. On peut, en ajoutant ou en enlevant du mercure, arriver à une compensation parfaite. Ce excellent système est fréquemment employé par les artistes anglais et Allemands.

Quel que soit le mode de compensation dont on aura fait choix, supposons que l'on ait un pendule qui batte la seconde et dont les oscillations restent isochrones à toutes les températures ; pour mesurer le temps, il est clair qu'il suffira d'entretenir le mouvement d'un tel pendule et d'en compter les oscillations ; le mécanisme que nous

---

(1) La dilatation du sapin n'est pas absolument nulle. On est même parvenu à la mesurer ; mais elle est presque négligeable si on la compare à celle des métaux.

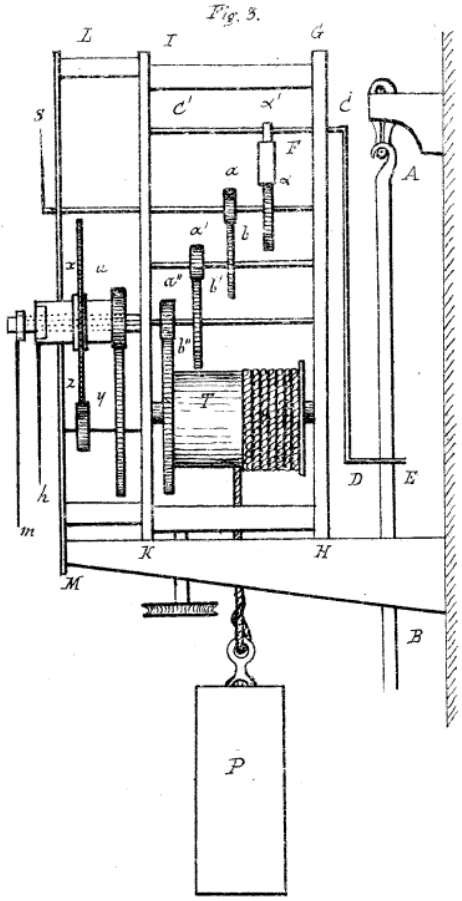
(2) Un autre artiste anglais non moins célèbre, J. Harrison, était parvenu dès 1726, à corriger la dilatation de la tige du pendule.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

nous à décrire en destiné à remplir ce double objet.

Concevons une roue qui fasse un petit mouvement à chaque oscillation du pendule, de manière à accomplir une révolution entière après 60 oscillations. Une aiguille fixée à l'axe de cette roue est mobile sur un cadran divisé en 60 parties y marquera les secondes dans l'intervalle d'une minute. Cette roue est à l'une des extrémités du rouage de l'horloge, et se nomme la roue d'échappement; nous la prendrons pour point de départ du mécanisme de l'horloge, et nous expliquerons comment elle est mise en relation d'un côté avec le pendule, et de l'autre avec le rouage proprement dit et le moteur.

Fig. 3.



De l'échappement. — Le pendule n'oscille que librement; sa tige AB est engagée entre les deux branches d'une fourchette ou fourchette DE portée elle-même par une autre tige CD mobile autour d'un axe horizontal CC', à laquelle le pendule transmet ses oscillations. Sur cet axe CC' qui doit être situé à la même hauteur que le point de suspension, est fixée une pièce F, qui a à peu près la forme d'une ancre et dont les deux extrémités recourbées ou palettes viennent, par suite des oscillations, s'interposer alternativement entre les dents de la roue d'échappement. Cette roue, sollicitée à tourner constamment par le moteur P qui agit sur elle par l'intermédiaire du rouage, se trouve ainsi arrêtée à des intervalles de temps égaux, et l'on conçoit qu'en lui donnant un nombre convenable de dents, elle pourra effectuer, comme nous l'avons dit, sa révolution en une minute. On conçoit encore, qu'en dégageant les palettes de l'ancre, les dents de la roue d'échappement pourront leur imprimer un léger mouvement qui, transmis par la fourchette, entretiendra celui du pendule.

La roue d'échappement et la pièce qui l'arrête successivement constituent, pris ensemble, l'organe de l'échappement dont la double fonction vient d'être indiquée; l'échappement le plus parfait est l'échappement dépendant à ancre et à repos, imaginé par

(1) Après avoir lu la description sur le croquis ci-joint, on fera bien de consulter la planche I du portefeuille.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Graham et que nous allons décrire avec quelques détails.

Il est assez facile de voir d'abord que chaque dent de la roue d'échappement n'avance d'un rang ou d'un intervalle, c'est-à-dire ne prend la place de celle qui la précède qu'après deux oscillations du pendule; si l'on veut que la durée de la révolution de cette roue soit d'une minute, ou de 60 secondes, il faut donc qu'elle porte 30 dents. Ces dents ne ressemblent pas d'ailleurs à celles des roues d'engrenage, elles ont une forme particulière, comme on le voit sur la figure 4.

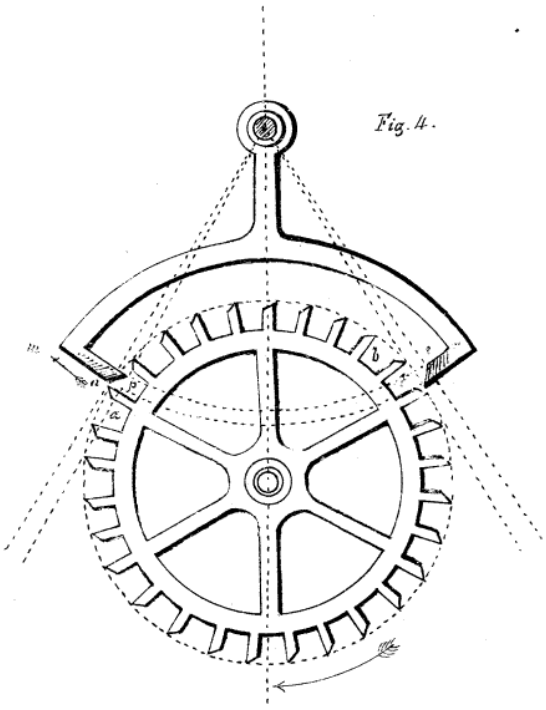


Fig. 4.

Les palettes de l'ancre embrassent un nombre de dents déterminé par la double condition que l'amplitude de l'oscillation de l'ancre qui est la même que celle du pendule, soit assez faible et que l'axe d'oscillation de cette ancre ne soit pas situé à une trop grande distance au dessus du centre de rotation de la roue, afin que cette pièce n'atteigne pas une grandeur démesurée. La première condition conduirait à faire embrasser à l'ancre le plus grand nombre possible de dents, c'est-à-dire 15, mais la seconde condition restreint ce nombre qui est ordinairement de 9 ou de 11 au plus; il est d'ailleurs évident que l'axe de l'ancre et de la roue doivent être dans le même plan vertical.

Supposons le nombre des dents embrassées par l'axe égal à 9; on prend sur la circonférence extérieure des dents un arc égal à 9 intervalles et par les extrémités de cet arc, on mène deux tangentes dont l'intersection donne la trace de l'axe de rotation de l'ancre sur le plan de la roue.

L'extérieur des palettes de l'ancre est sur une surface cylindrique qui a pour axe l'axe de rotation lui même; l'épaisseur des palettes est un peu moindre que le demi intervalle de deux dents de la roue et leur surface intérieure est cylindrique et concentrique avec la surface extérieure; enfin, ces palettes sont terminées par de petits plans inclinés formant un angle aigu l'un avec la surface cylindrique intérieure et l'autre avec la surface extérieure. Leurs traces np, pt sur le plan de la roue sont comprises entre les tangentes dont l'intersection détermine la position de l'axe d'oscillation de l'ancre et des droites menées par le même point qui font avec ces tangentes des angles chacun un peu moindres que la demi oscillation du pendule.

Pour se rendre compte des motifs de ce tracé, il suffit d'examiner ce qui se passe dans l'intervalle d'une double oscillation.

La roue d'échappement tournant dans le sens indiqué par la flèche et l'oscillation se faisant dans ce moment de droite à gauche, la dent a après avoir été arrêtée

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

un instant très court sur la surface cylindrique extérieure m n de la palette de gauche va glisser sur le plan incliné n p, et pendant ce temps elle communique à l'ancre, dans le sens de l'oscillation, une légère impulsion qui est transmise au pendule ; l'extrémité de la dent a arrivée au point p échappe tout-à-fait ; mais l'oscillation continuant à avoir lieu dans le même sens, la palette de droite pénètre au dessous de la dent b qui vient tomber sur la surface r s aussitôt après que la dent a a échappé ; presque en même temps l'oscillation de droite à gauche cesse, et celle de gauche à droite commence ; alors la dent b, après s'être reposée sur la surface cylindrique intérieure r s, glisse à son tour sur le plan incliné s t et communique à l'ancre et au pendule une petite impulsion dans le sens de l'oscillation.

L'excès du demi intervalle des dents sur l'épaisseur des palettes de l'ancre se nomme la chute, parceque c'est la quantité dont la dent qui doit être arrêtée au moment de l'échappement en éloignée de la palette sur laquelle elle va tomber, et cette quantité doit être rendue aussi petite que possible pour qu'il n'en résulte pas d'à-coups capables de troubler le mouvement du pendule ; l'angle des deux droites qui déterminent la grandeur du plan incliné de chaque palette de l'ancre s'appelle la levée ; il correspond au temps pendant lequel la roue d'échappement soulève l'une des palettes de l'ancre dans le sens de l'oscillation du pendule. On voit immédiatement pourquoi cet angle doit être un peu moindre que la demi amplitude de l'oscillation.

Pendant que les dents de la roue portent sur les surfaces cylindriques m n ou r s, la roue est arrêtée ainsi que tout le rouage ; mais il ne se produit aucun mouvement de recul, c'est-à-dire en sens inverse de la rotation, comme cela arrive avec d'autres échappements à ancre dans lesquels le tracé des surfaces m n et r s est moins soigné ; il y a donc repos pour le rouage, et il en résulte moins de perte dans le mouvement du pendule, qui conserve en même temps beaucoup plus de régularité.

Sauf les instants extrêmement courts de la chute, le pendule reste toujours sous l'influence du moteur, de là même la dénomination d'échappement dépendant ; on pourrait craindre, d'après cela, que le pendule n'étant plus libre, l'isochronisme de ses oscillations en fut altéré, mais le poids considérable de la lentille rend à peine sensibles les effets que peuvent produire les actions qui lui sont transmises par l'échappement et qui compensent simplement, comme on l'a déjà dit, les pertes de mouvement résultant des frottements et de la résistance de l'air. D'ailleurs, afin de diminuer le plus possible ces frottements, les faces des dents dont les extrémités portent sur les palettes de l'ancre ne sont pas normales à la circonférence de la roue, mais forment avec elle un angle légèrement aigu, de sorte que les dents ne portent jamais sur les palettes de l'ancre que par une arête.

Du rouage. — Nous avons actuellement à indiquer la disposition du rouage, à partir de l'arbre de la roue d'échappement jusqu'à celui du tambour, sur lequel le moteur agit directement.

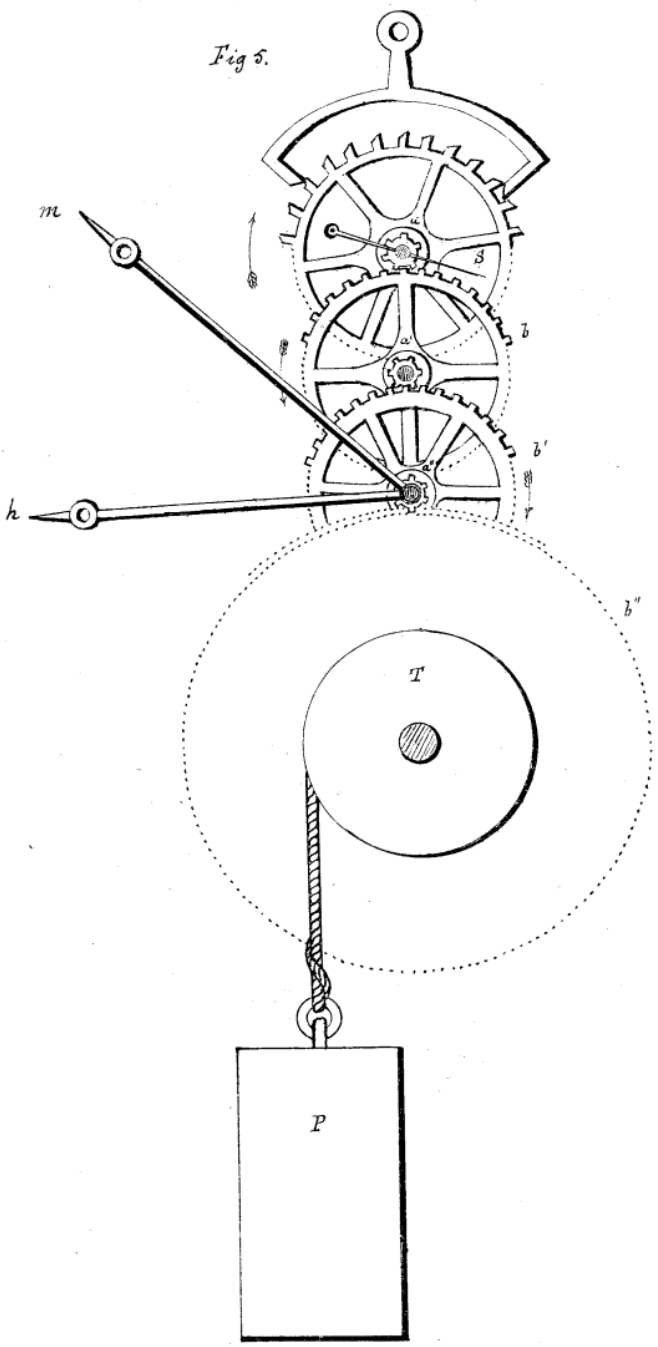
Les figures 3 et 5 rendront cette description facile à suivre. Sur l'axe de rotation de la roue d'échappement, qui porte, comme on sait, l'aiguille des secondes S, est fixé un premier pignon a qui engrène avec une roue dentée b de forme ordinaire (1) montée sur un second axe.

(1) On suppose connue la théorie des engrenages.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si l'on voulait faire porter l'aiguille des minutes par cet axe, il faudrait que le rapport $\frac{n}{N}$ du nombre des ailes du pignon a à celui des dents de la roue b fut égal à $\frac{1}{60}$, ce qui conduirait à employer une roue d'un très grand diamètre, d'ailleurs, en plaçant l'aiguille des minutes et celle des secondes sur deux axes concentriques, il en résulterait cet autre inconvénient encore plus grave que ces deux aiguilles tourneraient dans des sens opposés.

Fig 5.



L'axe de la roue b appelée roue moyenne ou intermédiaire ne porte donc pas d'aiguille ; mais le pignon a qui lui est fixé engrène avec la roue b' appelée roue du centre qui tourne dans le même sens que la roue d'échappement et dont l'axe porte l'aiguille des minutes m.

Pour que cette aiguille accomplisse une révolution en 60 minutes, celle des secondes effectuant la sienne en une minute, il suffit que l'on ait entre le nombre n et n' des ailes des pignons et ceux des dents des roues N et N', la relation

$$\frac{n\,n'}{N\,N'} = \frac{1}{60}$$

Supposons par exemple que l'on donne 8 ailes aux deux pignons, le problème peut encore admettre plusieurs solutions ; mais on le détermine tout à fait en introduisant la condition que les diamètres des deux roues doivent se rapprocher de l'égalité.

Dans le cas actuel nous avons

$$N\,N' = 60 \times 64,$$

les deux nombres 60 et 64 sont les deux facteurs les moins différents dans lesquels on puisse décomposer le produit de ces deux mêmes nombres ; on devra donc donner 60 dents à l'une des roues et 64 à l'autre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En général, lorsqu'on a fixé le nombre des ailes de chaque pignon, on décompose le produit de ce nombre multiplié par 60 en facteurs premiers, que l'on distribue ensuite en deux groupes, de manière à avoir, comme ci-dessus, deux facteurs qui diffèrent le moins possible l'un de l'autre. (1)

L'axe de la roue de centre porte encore un pignon a" qui engrène avec une roue b" montée habituellement sur le même axe que le tambour T, où vient s'enrouler la corde à laquelle on suspend le poids P qui est le moteur. Le nombre des dents de cette roue b" qui porte le nom de roue motrice et le rayon du tambour sont les éléments qui servent à calculer la quantité dont le poids doit descendre dans un jour, d'où l'on peut déduire le nombre de jours que l'horloge marchera sans avoir besoin d'être remontée.

Tel est l'ensemble du rouage qui transmet l'action du moteur à la roue d'échappement, mais nous n'avons trouvé, chemin faisant, que le moyen de faire compter les secondes et les minutes par des aiguilles portées, l'une par la roue d'échappement, l'autre, par la roue de centre; il nous faut encore une 3e aiguille pour enregistrer les heures.

Du rouage particulier appelé minuterie. — Cette aiguille ne pourrait pas être portée par l'axe de la roue motrice qui, dans la position qu'elle occupe, tourne dans le sens opposé à celui de la roue de centre ou de l'aiguille des minutes, il eut donc fallu employer un axe intermédiaire pour rétablir le sens ordinaire de la marche des aiguilles. Au lieu d'introduire cet axe, on a préféré employer, en dehors du rouage proprement dit, un système particulier de roues et de pignons appelé minuterie, au moyen duquel le mouvement de l'axe des minutes, fait marcher l'aiguille des heures, et tel qu'il devient facile de changer la position des aiguilles sans déranger le rouage placé dans la dépendance immédiate du moteur.

Voici la description de cette partie séparée du mécanisme. Le rouage étant contenu entre deux plaques métalliques ou platines G H, I K, réunies elles-mêmes par des traverses (fig. 3), on dispose en avant une 3e platine L M réunie à I K par d'autres traverses et l'intervalle sert à loger la minuterie.

Cette 3e platine porte extérieurement l'émail sur lequel sont tracés les cadrans. L'axe de la roue d'échappement et celui de la roue de centre traversent les deux platines I K et L M pour venir recevoir les aiguilles des secondes et des minutes. Toutefois, le dernier de ces deux axes, appelé axe à longue tige, ne porte pas immédiatement l'aiguille des minutes m; celle-ci est fixée à un canon t u ajusté à frottement sur l'axe, de telle sorte que cet axe l'entraîne dans son mouvement de rotation; mais ce frottement est assez doux pour qu'au contraire, le canon puisse tourner sur l'axe sans l'entraîner; ce qui permet de déplacer l'aiguille des minutes sur le cadran soit à la main, soit à l'aide d'une clef engagée sur le carré O qui termine le canon, sans réagir sur le rouage.

Lorsqu'on veut, comme cela se fait le plus souvent, employer le même cadran

---

(1) Les nombres des ailes des pignons sont choisis parmi les plus petits nombres pairs à partir de 6, qui est le plus petit de ceux qu'on emploie en horlogerie.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pour l'aiguille des heures et pour celle des minutes, sur le premier canon tu on en place un second vx entièrement libre et auquel est adaptée l'aiguille qui doit marquer les heures; pour qu'il en soit ainsi, il ne s'agit que de communiquer le mouvement du premier canon au second, en réduisant sa vitesse de rotation dans le rapport de 1 à 12. A cet effet, le canon tu porte un pignon u et le canon vx porte une roue dentée x, dite roue de cadran qui engrènent respectivement avec la roue de renvoi y et le pignon z, tous les deux fixés à un axe yz supporté par les deux platines IK et LM; il en clair que pour obtenir le résultat cherché, il suffira de satisfaire à la relation

$$\frac{zu}{xy} = \frac{1}{12},$$

dans laquelle x, y, z et u représentent les nombres d'ailes et de dents des pignons et des roues que ces mêmes lettres ont d'abord servi à désigner. Une des solutions les plus simples consiste à faire

$$z = 8, \quad u = 10, \quad x = 32 \quad \text{et} \quad y = 30$$

il y en a d'ailleurs plusieurs autres convenables, et l'on voit que dans tous les cas, grâce à l'indépendance de la minuterie et du rouage proprement dit, on pourra du même coup déplacer l'aiguille des minutes et celle des heures sur le cadran pour mettre l'horloge à l'heure. L'aiguille des secondes seule ne doit pas être touchée. On emploie des cadrans à un, à deux et à trois centres, en réunissant les aiguilles sur un même axe ou en les séparant tout à fait. Au lieu de marquer 12 heures seulement, on en marque fréquemment 24 sur les cadrans des horloges astronomiques.

En général, la disposition des roues dont se composent le rouage et la minuterie, leurs dimensions relatives et celles des pignons avec lesquels elles engrènent, en un mot ce qu'on appelle le calibre d'une horloge est très variable. Les diverses constructions adoptées par les horlogers dépendent de considérations pratiques, et souvent de conditions particulières qu'il se sont proposé de remplir. Le type que nous avons décrit, comme étant l'un des plus simples, suffira néanmoins pour guider dans l'examen d'une horloge astronomique, quelle que soit sa construction.

Du moteur. — A l'égard du moteur dont la position et le mode d'action ont été indiqués précédemment, il suffit de remarquer que c'est une force constante, et que dès lors son action est identique, à chaque oscillation, pendant tout le temps que l'horloge marche. On pourrait calculer le poids qu'il convient d'employer, selon le calibre, en tenant compte des frottements, et pour faire exercer un effort déterminé par les dents de la roue d'échappement sur les palettes de l'ancre; mais, dans ce cas, ainsi que dans la plupart des circonstances analogues, les horlogers s'en rapportent à l'expérience.

De l'appareil du remontage. — Pour terminer la description des horloges, il reste encore à indiquer comment on peut les remonter, non seulement sans entraîner le rouage en sens inverse, mais même sans qu'elles cessent un seul instant de marcher, condition

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

indispensable dans un instrument de précision qui doit servir à la mesure du temps.

Pour atteindre le premier résultat, c'est-à-dire pour remonter le poids sans entraîner le rouage en sens inverse, il suffirait d'employer la disposition suivante, dont on se contente dans les horloges communes.

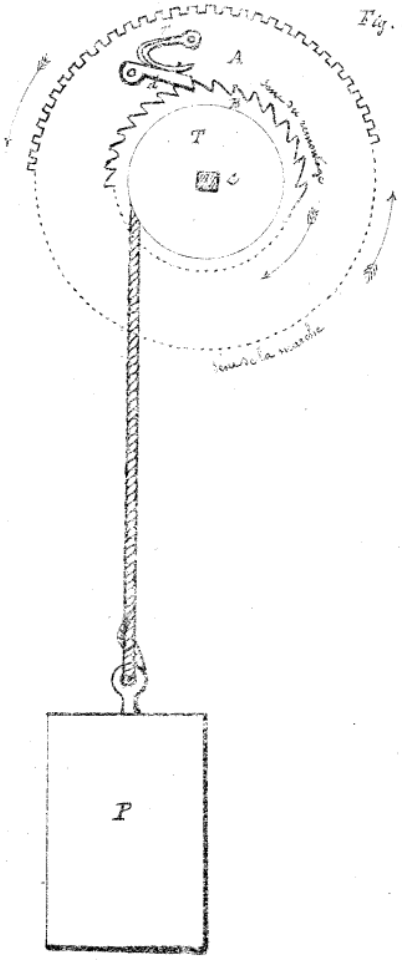


Fig. 6

La roue motrice A (fig. 6), au lieu d'être fixée au tambour en est seulement engagée sur le même axe. Une autre roue B, appelée roue à rochet, dont les dents n'ont pas une forme symétrique, mais sont inclinées dans un sens, fait corps avec le tambour et peut glisser sur la roue motrice. Un doigt d, mobile autour d'un tenon fixé à cette dernière, s'interpose entre les dents de la roue à rochet qui butent contre lui, lorsque cette roue tend à tourner dans un sens, mais qui s'en dégagent dans le mouvement en sens opposé. Un ressort r, également porté par la roue motrice, ramène le doigt soulevé par chaque dent qui passe.

Lorsque le tambour, et par conséquent la roue à rochet sont sollicités par le poids P, les dents de cette roue étant dirigées de façon à buter contre le doigt d, la roue motrice est entraînée et l'horloge marche; mais lorsqu'on remonte le poids au moyen d'une clé engagée sur le carré C, par lequel se termine l'axe du tambour, la roue à rochet tournant en sens contraire du mouvement de marche, ses dents se dégagent du doigt d, et la roue A reste immobile; le rouage ne rebrousse pas chemin, mais l'horloge s'arrête.

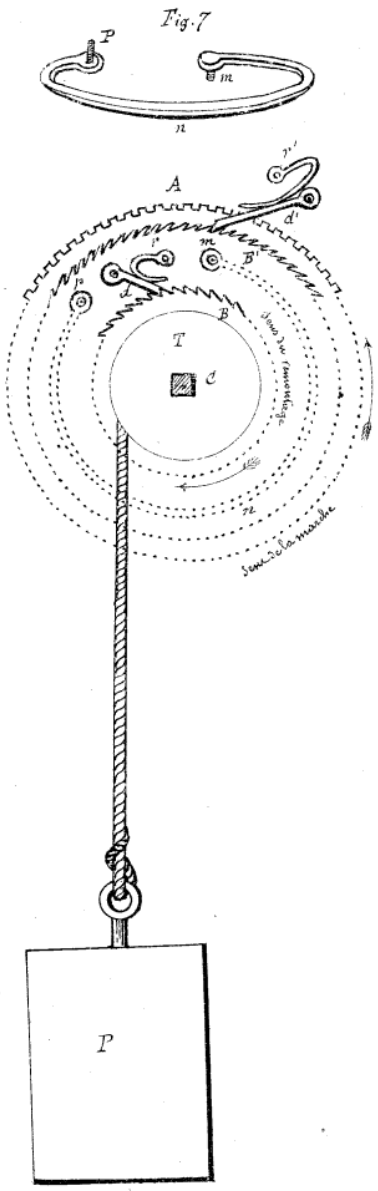
Remontoir d'égalité. — Pour que l'horloge continue à marcher pendant le remontage, il faut employer un mécanisme un peu plus compliqué que le précédent, mais que la description de celui-ci aidera à comprendre.

Entre la roue motrice A et la roue à rochet B (fig. 7), on a placé une seconde roue à rochet B' dont les dents sont inclinées en sens inverse de celle de la roue B et qui est libre sur l'axe du tambour. Cette roue porte le doigt d contre lequel viennent buter les dents de la roue B', lorsque celle-ci est soumise à l'action du moteur; et comme rien ne l'empêche de tourner dans ce sens là, elle est entraînée; elle entraîne à son tour la roue motrice à laquelle elle est liée par un ressort circulaire très fort m n p au moyen de deux petits tenons

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

m et p, dont l'un pénètre dans la roue B' et l'autre dans la roue A. Il est aisé de voir que, pour communiquer son mouvement à la roue A, la roue B doit commencer par tendre ce ressort auquel on donne le nom de ressort d'entretien, parce qu'il est destiné à entretenir le mouvement de la roue motrice, et par conséquent la marche de l'horloge pendant le remontage. Il suffit, pour que cet effet se produise, d'avoir disposé sur l'une des platines de l'horloge un doigt d' qui vienne s'interposer entre les dents de la roue B'. Alors, lorsqu'au moyen de la clé on fera tourner le tambour dans le sens du remontage, la roue à rochet B soulèvera le doigt d et n'entraînera plus la roue B' qui, ainsi que la roue A, ne sera plus soumise à d'autre force que celle de la tension du ressort d'entretien; mais le doigt d' s'opposant au mouvement que devrait prendre la roue B', la tension du ressort agit tout entière sur la roue motrice, ce qui suffit et au delà pour entretenir le mouvement de cette roue dans le sens ordinaire de la marche. L'action du moteur, suspendue pendant de très faibles intervalles de temps, restitue d'ailleurs promptement à la tension du ressort toute son intensité, et le remontage ne produit aucun trouble dans la marche de l'horloge.

Fig. 7



Il existe encore un moyen de remonter le poids d'une horloge sans que ce poids cesse d'exercer son action; mais il suffit de voir ce système pour en comprendre le mécanisme, et comme il est moins fréquemment employé qu'autrefois dans l'horlogerie de précision, nous ne le décrirons pas.

Installation des horloges dans les observatoires.

L'isochronisme des oscillations du pendule étant en quelque sorte le principe vital d'une bonne horloge, on doit s'attacher à mettre l'instrument non seulement à l'abri de tout choc, mais dans des conditions de stabilité parfaite. La chute des dents de l'échappement sur l'ancre produit un petit bruit qui permet à un observateur exercé de reconnaître si les deux demi-oscillations de l'ancre, de gauche à droite et de droite à gauche, ont exactement la même durée. S'il remarque une différence, il

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la corrige en agissant sur une vis portée par la fourchette. Cette rectification, le réglage de la longueur du pendule au moyen de la vis placée sous la lentille, la mise à l'heure par le carré des aiguilles et le remontage, sont les seules opérations que l'observateur puisse exécuter lui même, et sous aucun prétexte il ne doit toucher au mécanisme intérieur.

On place ordinairement les horloges contre des piliers en maçonnerie et dans le voisinage des instruments destinés à noter les heures des passages des astres dans le méridien du lieu. Mais comme on ne peut pas lire l'heure en même temps que l'on observe et que le bruit de l'échappement est trop faible pour être perçu à quelque distance, on emploie en outre un compteur, pièce d'horlogerie moins parfaite, dont les battements font un bruit plus sensible et que l'on a soin de régler fréquemment, de manière à ce que les battements coïncident exactement avec ceux de l'horloge pendant la durée des observations.

(Voy. dans le portefeuille, la Planche des instruments méridiens de l'observatoire de Paris).

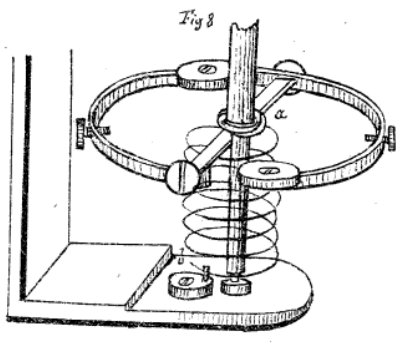
Description du Chronomètre.

Les chronomètres devant continuer à marquer l'heure pendant qu'on les transporte, on a été conduit à rejeter de leur construction le pendule et le poids moteur. Les effets de la pesanteur sont remplacés dans ces instruments par ceux auxquels donne naissance une propriété très marquée dans certains corps, l'élasticité.

L'invention des montres portatives est assez ancienne; mais les chronomètres, montres marines ou garde-temps (Time Keepers) ne datent que du siècle dernier. Les premiers instruments de ce genre capables de donner la longitude en mer ont été construits par Harrison.

Pour suivre la même marche que dans la description de l'horloge astronomique, nous nous occuperons d'abord du régulateur.

Du régulateur. — Cet organe se compose d'un balancier circulaire en métal, monté sur un axe vertical (fig. 8) auquel est fixée l'une des extrémités a d'un ressort d'acier, roulé en hélice, dont les spires sont serrées et assez nombreuses, et qui va s'attacher par son autre extrémité b à la platine qui supporte l'axe.


Fig 8

Lorsque le ressort est écarté de sa position d'équilibre, en tendant à y revenir, il accomplit une suite d'oscillations et entraîne avec lui le balancier, qu'il faut considérer comme le corps oscillant animé par le ressort, comme le pendule l'est par la pesanteur.

C'est encore Huygheus qui a imaginé d'appliquer au balancier de montre ce ressort auquel

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on a donné le nom de Spiral, à cause de la forme qu'il a reçue primitivement et qui en conservée dans les montres de poche.

Pour assurer la régularité de la marche des chronomètres pendant qu'on les transporte il fallait que le moment d'inertie du balancier fût aussi grand que possible et comme sa masse est nécessairement très petite on a dû lui donner une grande vitesse. Il faut d'ailleurs garantir les chronomètres contre tout mouvement brusque, en notamment lorsqu'on les transporte à la main on doit avoir soin de ne pas leur imprimer de mouvements de rotation autour de l'axe du balancier.

Indépendamment de ces causes accidentelles de trouble dans la marche des chronomètres, dont les effets sont ordinairement assez faibles, lorsqu'on emploie les précautions nécessaires, il en existe d'autres qui sont permanentes, comme l'épaississement des huiles, l'usure des pivots, &c., et qui font varier à la longue l'amplitude des oscillations, et, par suite, en général, leur durée.

Les artistes ont cherché à atténuer autant que possible, ces fâcheuses conséquences en construisant des ressorts dans lesquels les petites oscillations conservent une égale durée. Deux horlogers français, Pierre Leroy et Ferdinand Berthoud, sont parvenus par des voies différentes à ces importants résultats, le premier en découvrant qu'il y a dans tout ressort une longueur convenable pour laquelle l'isochronisme existe, et le second, en faisant varier l'épaisseur de ses ressorts d'un bout à l'autre de leur longueur. La méthode de P. Leroy étant de beaucoup la plus facile à mettre en pratique, a été suivie généralement; on l'a seulement un peu modifiée depuis, l'expérience ayant fait voir qu'il était préférable de laisser une légère accélération aux petites oscillations, la diminution d'amplitude résultat en effet de l'épaississement des huiles et de l'usure des pivots, cause générale de ralentissement qui tend à contrebalancer par l'accélération des petites oscillations.

Le principe énoncé par P. Leroy est celui-ci : dans tout ressort Spiral d'une dimension suffisante il y a une certaine longueur pour laquelle toutes les vibrations, grandes ou petites sont isochrones. Cette longueur trouvée, si l'on raccourcit le ressort, les grandes vibrations seront plus promptes que les petites, si, au contraire, on l'allonge, les petites vibrations seront plus rapides que les grandes. (1)

On vérifie le fait découvert par P. Leroy en pinçant en différents points de la longueur du ressort que l'on fait vibrer chaque fois et en observant la durée des petites et des grandes vibrations. Il paraît même que l'on peut trouver ainsi, dans un ressort, plusieurs longueurs dont les vibrations grandes et petites sont isochrones.

En se fondant sur toutes les considérations précédentes, on a été conduit à donner aux ressorts une longueur et une force telles que les oscillations du balancier s'accomplissent à raison de 4, 5 ou même 6 par seconde, et avec une amplitude de 300° à 400°.

Pour éviter les altérations résultant des variations de la température qui

---

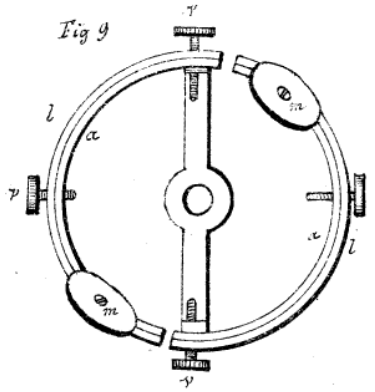
(1) D'après la remarque faite précédemment, on doit donc tenir le ressort un peu long.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

affecteraient le mouvement du balancier, et, par suite, la durée de ses oscillations, on construit du balancier dans lequel la dilatation produise des effets de sens contraires qui peuvent se compenser sensiblement. Cette idée a été appliquée, pour la première fois, dans les montres marines de Harrison.

La circonférence du balancier compensateur (fig. 9) est divisée en deux ou un plus grand nombre d'arcs formés de lames de métaux très inégalement dilatables, soudés ensemble et dont le moins dilatable est à l'intérieur. Supposons, par exemple, que l'on emploie de l'acier et du laiton; l'acier a sera à l'intérieur et le laiton l à l'extérieur; chacun de ces arcs porte à l'une de ses extrémités une petite masse métallique m destinée à produire la compensation. Lorsque la température s'élève, la lame d'acier résistant à la dilatation de la lame de laiton, les arcs prennent une plus forte courbure et les masses m se rapprochent de l'axe d'oscillation, tandis que les rayons qui portent ces arcs s'allongeant, tendent de leur côté à éloigner de cet axe une autre partie de la masse du balancier. On conçoit donc que le moment d'inertie de ce balancier par rapport à l'axe puisse rester à très peu près le même, sous cette double influence.

Fig 9



Les petites masses compensatrices ne sont pas invariablement fixées aux arcs du balancier; elles peuvent glisser sur ces arcs, et les artistes se sont ainsi ménagé un moyen d'arriver par tâtonnement à une compensation plus parfaite, qu'ils cherchent à établir pour deux points de température convenablement choisis. Les balanciers portent en outre de petites vis V symétriquement placées par rapport à l'axe, sur lesquelles on agit pour régler la durée de l'oscillation double (aller et retour) du balancier, qui doit être une fraction simple de la seconde de temps, comme $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$. Cette opération, analogue à celle qui consiste à élever ou à descendre la lentille du pendule des horloges, est beaucoup plus délicate, et ne peut pas être tentée par les observateurs, qui ne doivent jamais toucher à l'intérieur des chronomètres. Le jeu de vis de réglage se comprend d'ailleurs facilement, car, en enfonçant ou en retirant ces vis de très petites quantités, il est évident que l'on modifie le moment d'inertie du balancier, de telle sorte que l'on peut, par exemple, faire marcher le même chronomètre soit sur le temps moyen soit sur le temps sidéral.

Feu M. Lieussou, ingénieur hydrographe de la marine, a constaté par la discussion des observations d'un grand nombre de chronomètres, dont la marche avait été suivie à l'Observatoire de Paris, que la compensation du balancier établie pour deux points de température déterminés, n'existait ni pour les températures intermédiaires, ni pour les températures supérieures ou inférieures. Les écarts sont souvent tels que les chronomètres que l'on avait jugés bons, parce que leur marche, à la température de la salle de l'Observatoire était régulière, eussent été trouvés mauvais, transportés sous la ligne ou dans les régions polaires; et ce

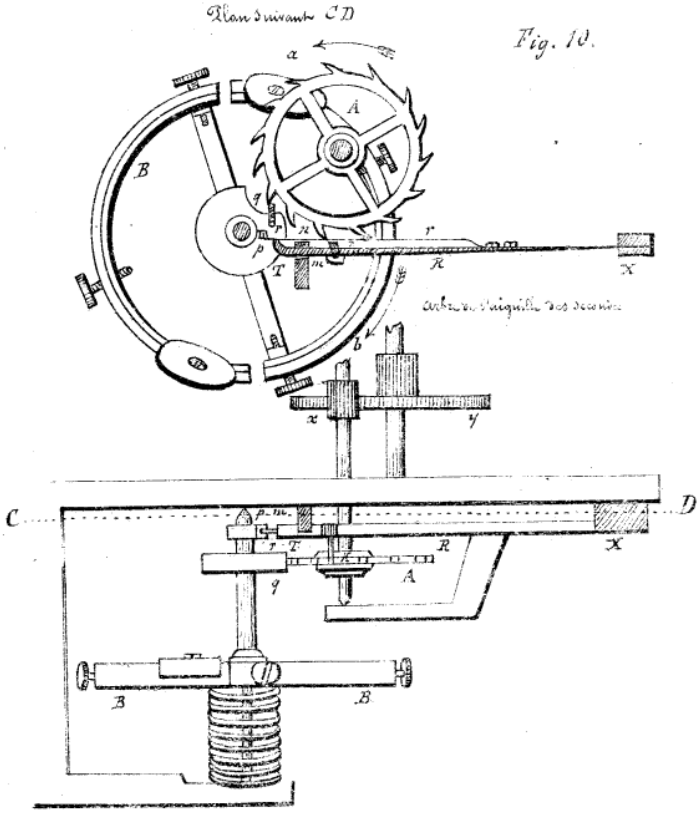
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui n'en par moins intéressante, la même discussion, appliquée à des chronomètres rejetés à cause de l'irrégularité de leur marche aux températures moyennes de Paris, a fait voir que ces chronomètres eussent été excellents sous d'autres latitudes (1). Cette remarque importante est de nature à provoquer des modifications dans la manière de régler la compensation du balancier et peut-être même dans la construction de quelques unes des parties essentielles des chronomètres.

De l'échappement. — Nous avons reconnu, en nous occupant des conditions dans lesquelles fonctionne l'échappement des horloges, qu'à raison de la masse considérable de la lentille, il n'y avait aucun inconvénient à ce que le pendule restât dans la dépendance du moteur pendant la durée presque entière de chacune de ses oscillations. Il n'en est plus de même dans le cas des chronomètres; alors le balancier ayant une très petite masse, qui doit être animée par les oscillations du ressort Spiral, pour que l'isochronisme de ses oscillations ne soit pas troublée, il faut évidemment que le balancier se meuve avec la plus grande liberté, sans cesser toutefois de produire périodiquement le dégagement d'une dent de la roue d'échappement et de recevoir, comme le pendule, de petites impulsions destinées à entretenir son mouvement. Telle est le résultat auquel on parvient au moyen de l'échappement libre à repos et à détente, dont l'invention est attribuée à P. Leroy. Voici la description de cet ingénieux mécanisme.

Plan suivant CD

Fig. 10.



La roue d'échappement A (fig. 10) qui, placée de même que dans l'horloge, a l'extrémité du rouage, est sans cesse sous l'influence du moteur, tend à tourner dans le sens indiqué par la flèche a; mais ses dents sont arrêtées successivement par le repos K porté par un ressort R assez long, dont l'épaisseur va en diminuant jusqu'à son extrémité X, qui est fixée à l'une des platines du chronomètre. Un second ressort r, très flexible, est juxtaposé au premier et vient s'appuyer par son extrémité libre contre la corne T

(1) Lieussou. Recherches sur les variations de la marche des pendules et des chronomètres. Paris. 1854.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

formée par celui-ci. Sur l'arbre du balancier B sont placées deux petites pièces en saillie; l'une à la hauteur des ressorts r, portant une levée p, l'autre à la hauteur de la roue d'échappement, présente une échancrure q, à l'un des bords de laquelle on a disposé une petite pierre dure; la levée p et le repos K sont également formés d'une matière semblable.

Supposons maintenant que le sens de l'oscillation du balancier soit celui de la flèche b; au moment où la levée p rencontre le ressort r, elle l'écarte, celui-ci entraîne le ressort R et par suite le repos K; une dent échappe; mais aussitôt après, l'élasticité fait revenir les deux ressorts dans leur première position, en sorte qu'il ne se produise que d'oscillations, le ressort R en maintenu entre deux arrêts m et n qui lui laissent seulement le jeu nécessaire pour que l'échappement puisse avoir lieu. La dent qui suit immédiatement celle qui vient de passer prend donc sa place sur le repos. Remarquons enfin que, lorsque la roue d'échappement devient libre de tourner, une de ses dents en frappant sur la face de l'échancrure q, imprime au balancier une petite impulsion qui entretient son mouvement.

Dans l'oscillation en sens inverse, la levée p déplace encore le ressort r, mais sans rougir dans ce cas sur le grand, de sorte qu'il passe seulement une dent de la roue d'échappement à chaque double oscillation.

Le balancier étant animé d'une grande vitesse au moment où la levée fait partir le repos, il en résulte que l'échappement se produit presque instantanément, en sorte que le balancier oscille ensuite librement, l'effort nécessaire pour lever le petit ressort r dans la seconde oscillation étant pour ainsi dire imperceptible.

Indépendamment de cette propriété essentielle, l'échappement libre présente encore l'avantage de ne point exiger que l'on entretienne de l'huile à son contact et l'on sait que l'épaississement de cette substance devient, avec le temps, une cause d'altération sensible. (1)

Du rouage. — Si l'arbre de la roue d'échappement pouvait porter lui même l'aiguille des secondes il n'y aurait aucune différence entre le rouage des chronomètres et celui des horloges; mais la double oscillation du balancier devant s'effectuer dans une fraction de seconde, il faudrait donner un trop grand nombre de dents à la roue d'échappement pour que sa révolution durât une minute; on préfère, dans ce cas, mettre l'aiguille des secondes (fig. 10) sur un autre arbre; et l'on donne, en général, 15 dents à la roue d'échappement. Alors, pour déterminer le rapport $\frac{x}{y}$ du nombre des ailes du pignon placé sur l'arbre qui porte la roue d'échappement à celui des dents de la roue montée sur l'arbre qui doit porter l'aiguille des secondes, il suffit de connaître la durée de la double oscillation du balancier. Cette durée indiquée par les battements successifs des dents de la roue d'échappement sur le repos, est comme nous l'avons déjà annoncé, de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{3}$ de seconde.

---

(1). Il est sans doute inutile de dire que les inconvénients résultant de l'usage habituel que l'on fait de l'huile en horlogerie est infiniment moindre que celui dans lequel on retomberait si l'on se dispensait d'en mettre dans les endroits où les frottements sont énergiques.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Supposons que le balancier batte les $\frac{2}{5}$ de la seconde ; alors il est clair que la roue d'échappement ayant 15 dents fera un tour en $15 \times \frac{2^s}{5}$, ou en dix secondes ; mais l'arbre de l'aiguille des secondes doit faire un tour en 60^s ; il faut donc que l'on ait $\frac{x}{y} = \frac{1}{10}$; de sorte que si l'on donne par exemple 8 ailes au pignon x, il faudra donner 80 dents à la roue y.

Entre la roue des secondes et la roue motrice, la disposition des autres roues redevient identique avec celle du rouage d'une horloge ; il en est de même de la minuterie. Nous ne nous arrêterons donc pas plus longtemps sur ce sujet (Voyez pour le calibre du chronomètre la Planche 1 du Portefeuille.)

Dans un but de conservation, les arbres des différentes roues sont tous en acier trempé très-dur, et les pivots par lesquels se terminent ces arbres portent sur des trous en laiton également trempé, ou en pierre fine, dans lesquels on entretient de l'huile ; pour les arbres qui sont animés d'une grande vitesse, comme ceux du balancier et de la roue d'échappement, et même celui de la roue de seconde, on emploie des trous en pierre ; pour les autres, il suffit, et quelques horlogers pensent même qu'il est préférable d'employer des trous en laiton.

Du moteur. — Le moteur est un ressort en ruban d'acier formant un grand nombre de spires autour d'un arbre A (fig. 11) dont l'axe se confond avec celui d'un cylindre creux B appelé barillet, qui enveloppe le ressort (1). Ce barillet peut porter la roue motrice D, tandis que l'arbre lui-même porte une roue à rochets E entre les dents de laquelle vient se placer un doigt d ayant son point d'appui sur l'une des platines.

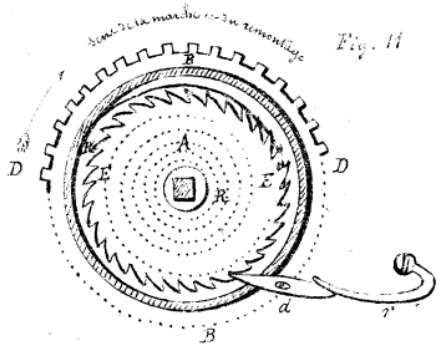


Fig. 11

Le ressort est fixé par l'une de ses extrémités R à l'arbre, et par l'autre R' à la paroi intérieure du barillet ; enfin l'arbre se termine par un carré C sur lequel on engage une clé pour remonter le chronomètre.

Supposons que l'on parte de l'état de repos, c'est-à-dire que le chronomètre soit arrêté, et que pour le monter, on fasse tourner la clé dans le sens indiqué par la flèche, qui est aussi celui de la marche, les dents de la roue à rochets étant convenablement dirigées se dégageront et l'arbre en tournant, enroulera le ressort autour de lui en spires plus serrées ; en un mot, le ressort se tendra et par suite sollicitera le barillet et la roue motrice à tourner dans le même sens, lorsqu'on cessera d'agir sur la clé, l'une des dents de la roue à rochets butant contre le doigt d empêchera l'arbre de tourner en sens contraire, et la tension du ressort s'exercera

(1) Les ressorts employés comme moteurs paraissent être une invention française du XVe Siècle.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sur la roue motrice qui réagira à son tour sur tout le rouage et le fera marcher, pourvu que, par un léger mouvement de rotation imprimé au chronomètre, on ait fait partir une première fois le balancier. Il est d'ailleurs bien évident que pour remonter la autre fois le chronomètre, sans qu'il cesse de marcher, il suffira d'engager la clé sur le carré et de la tourner dans le sens déjà indiqué, qui est à la fois celui de la marche et celui du remontage. Les choses se passent donc, dans ce cas, tout autrement que pour l'horloge, où le sens du remontage est celui de la marche étant opposés, on est obligé de recourir à un artifice pour entretenir le mouvement de la roue motrice pendant que l'on remonte le poids.

Toutefois, la disposition précédente, qui consiste à placer immédiatement la roue motrice sur le baillet, n'est pas la seule qui soit en usage, et même, pour qu'elle réussisse, il faut employer des ressorts d'une qualité particulière et d'une grande longueur, et remonter fréquemment le chronomètre. En effet, généralement la tension du ressort allant en diminuant à partir du moment où le chronomètre vient d'être remonté, la marche de l'instrument ne pourrait pas conserver sa régularité si l'on n'avait pas le soin de n'employer la tension du ressort que tant qu'elle ne varie pas d'une manière sensible.

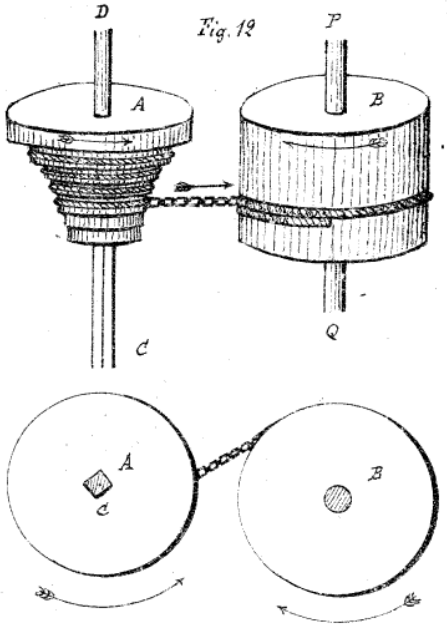


Fig. 12

Lorsque le ressort que l'on emploie ne peut pas conserver une tension à peu près uniforme, pendant 24 heures au moins, la roue motrice ne doit plus être placée directement sur le baillet, mais sur l'arbre d'une pièce A appelée fusée (fig. 12), de forme à peu près tronc-conique dont la surface est sillonnée de gradins tracés sur une courbe rampante, sur laquelle vient s'enrouler une chaîne qui réunit la fusée au baillet B. La forme de la fusée est déterminée par la condition que la chaîne qui transmet la tension du ressort agisse à chaque instant, à une distance de l'axe, telle que le moment par rapport à cet axe reste constant.

Les choses étant ainsi disposées, l'arbre PQ, auquel est assujetti l'une des extrémités du ressort, reste toujours fixe; et le baillet seul tourne tantôt dans un sens tantôt dans le sens opposé. Imaginons par exemple, qu'actuellement le ressort en se déroulant fasse tourner le baillet dans le sens de la flèche, la chaîne fera tourner la fusée dans le sens opposé, qui doit être évidemment celui de la marche. Pour remonter, on engage la clé sur le carré C porté par l'arbre de la fusée et l'on tourne dans le sens opposé à celui de la marche; la chaîne en s'enroulant sur la fusée entraîne le baillet et tend ainsi de nouveau le ressort; mais ici, le sens du remontage étant comme dans l'horloge, inverse du sens de la marche, il faut avoir un moyen d'entretenir le mouvement de la roue motrice pendant le remontage, et on emploie exclusivement dans les chronomètres, le système

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que nous avons décrit au sujet du remontage de l'horloge, pages 13, et 14.

Mentionnons, avant de terminer cette description, une pièce particulière appelée l'arrêtage, dont la fonction est d'empêcher que la tension du ressort dépasse une certaine limite et qui, par la résistance qu'elle oppose, prévient celui qui remonte le chronomètre de cesser d'agir sur la clé. Enfin, une petite aiguille mobile sur un cadran particulier où sont marqués des intervalles de temps de 0h à 48 ou 60h prévient aussi l'observateur de l'époque à laquelle le chronomètre a été remonté en dernier lieu.

Précautions à prendre dans le transport des chronomètres.

Lorsqu'on transporte un chronomètre d'une station à une autre en le laissant en marche, on doit toujours faire en sorte que cette marche soit altérée le moins possible, en garantissant l'instrument contre toute espèce de choc ou de secousse violentes; mais c'est surtout en mer qu'il est indispensable de prévoir toutes les causes de perturbation et de s'opposer à leurs effets. Les chronomètres embarqués sont renfermés dans des boîtes où ils sont portés par une suspension à la Cardan [1], et placés dans une chambre qui leur est affectée au centre du bâtiment, où les secousses se font moins fortement sentir. Pour les mieux garantir encore, on les met sur de l'étoupe ou de la laine; on a également soin de les tenir à l'abri de l'humidité et de les éloigner le plus possible de grandes masses de fer, qui exercent sur eux une action magnétique. On prend même la précaution jusqu'à les espacer à quelque distance les uns des autres pour éviter que l'influence réciproquement.

Afin d'atténuer les effets des variations de température, on place quelquefois dans l'armoire où sont renfermés les chronomètres, une lampe à double courant d'air; ou bien on les couvre d'une étoffe de laine. Lorsqu'on tire le canon, on les dépose sur un cadre suspendu; tous les jours ils sont remontés à la même heure, par un officier chargé spécialement de leur surveillance; en un mot, on prend tous les soins imaginables pour maintenir la régularité de la marche de ces instruments, d'où dépend, dans bien des cas, la sécurité du bâtiment.

Sur chacun des navires de l'État, il y a ordinairement au moins trois chronomètres que l'on ne déplace pas; et en outre un chronomètre dans sa suspension ou compteur que l'on emploie aux observations faites sur le pont, et qui est comparé avec les autres avant et après chaque série d'observations.

Compteur à pointage. — On donne ce nom à un chronomètre dont l'aiguille de seconde est en communication avec un bouton placé en dehors de l'enveloppe métallique de l'instrument; lorsqu'on presse ce bouton, l'extrémité de l'aiguille en forme de crochet

---

[1] Pour que les oscillations du balancier ne soient pas troublées par l'action de la pesanteur, il faut que cette action s'exerce symétriquement par rapport à l'axe de ce balancier, qui doit par conséquent, rester toujours vertical. Tel est un des principaux avantages que procure l'emploi de la suspension à la Cardan.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

s'abaisse et traverse une petite capsule placée au-dessous, percé en son milieu et remplie d'une encre visqueuse. La pointe de l'aiguille, en passant à travers le trou de la capsule entraîne une petite quantité de cette encre et laisse pour trace un point noir sur le cadran. On peut donc lire, sans crainte d'erreur, le nombre de secondes et la fraction de seconde que marquait le compteur à l'instant où l'on a pressé le bouton. Après chaque série d'observations, on essuie l'émail du cadran.

Un autre mécanisme très ingénieux consiste à arrêter l'aiguille des secondes sur le cadran par une pression instantanée sur un bouton extérieur et à la remettre en marche par une seconde pression qui a en outre pour effet de ramener l'aiguille au point du cadran où elle se trouverait si on ne l'avait pas arrêtée. On désigne les montres qui sont munies de ce mécanisme sous le nom de montres à Stop.

On a reconnu aux compteurs à pointage toutes les fois que des bruits étrangers peuvent empêcher d'entendre distinctement les battements du chronomètre, ou bien lorsqu'on n'est pas suffisamment exercé à compter ces battements et à en subdiviser au besoin l'intervalle. On les emploie avantageusement dans certaines expériences de physique ou de mécanique; enfin, nous aurons plus tard l'occasion d'indiquer une application importante du principe de ces instruments à l'enregistrement des observations astronomiques les plus délicates.

Épreuves à faire subir aux chronomètres.

En France, il y a quelques années, avant d'acquérir les chronomètres destinés à la marine de l'État, on les éprouvait à l'Observatoire de Paris où leur marche était comparée pendant un an, avec celle de la pendule, suivie elle-même au moyen d'observations astronomiques. Actuellement les chronomètres sont suivis directement au dépôt de la Marine, par les soins de l'Administration.

La condition d'achat d'un chronomètre a été jusque dans ces derniers temps que l'état calculé d'après la marche pendant 10 jours ne devait pas différer de $\pm 120^s$, au bout de trois mois, de l'état vrai déterminé par l'observation directe des astres. Cette condition serait une garantie sérieuse de la qualité des instruments si l'on pouvait admettre que leur marche reste sensiblement constante; car c'est dans cette hypothèse même que l'on calcule ordinairement, en mer, l'état actuel d'un chronomètre. Ainsi E_0 étant l'état initial du chronomètre, dans un certain lieu et à une date déterminée c'est-à-dire la différence entre l'heure qu'il marquait et l'heure déduite d'observations astronomiques, à la date et dans le lieu indiqués; si l'on désigne par m la marche d'une supposée constante, et par θ le temps écoulé jusqu'à l'époque d'une observation faite dans un autre lieu, le nouvel état sur le temps du premier lieu doit être $E_0 + m\theta$.

Or, d'après les recherches de M. Lieussou, la marche d'un chronomètre au lieu de rester constante, varie à la fois avec le temps et avec la température; de sorte qu'il convient de modifier les anciennes conditions d'admissibilité des chronomètres et la manière de calculer

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

leur état, à la mer. M. Lieusson a lui-même proposé ces modifications en se fondant sur la découverte de la loi empirique des variations que le temps et les changements de température font subir à la marche d'un chronomètre. Nous ne pouvons ici que renvoyer le lecteur à l'ouvrage déjà cité de ce habile Ingénieur et aux autres mémoires sur le même sujet insérés dans les Annales hydrographiques.

Après deux ou trois ans de service à la mer, les chronomètres doivent être visités par des horlogers qui en renouvellent les huiles et qui les règlent de nouveau.

Il ne faudrait pas croire, malgré la grande précision des chronomètres que les marins puissent s'en rapporter, pendant de longues traversées, uniquement aux indications que leur fournissent ces instruments; ils ne manquent pas, au contraire, d'en vérifier l'état aussi souvent que possible, soit aux relâches dont les positions géographiques sont exactement connues, soit par des observations de distances lunaires, méthode astronomique dont il sera question dans la suite de ce cours. Pour avoir une idée de la précision requise pour la détermination des longitudes, il suffit de savoir que l'on compte une heure de plus ou de moins, au même instant, en deux points de la Terre dont les longitudes diffèrent de 15°, ce qui fait 4^m par degré ou 4^s par minute de degré. Une minute de degré, compté sur l'équateur, ce qu'on nomme le mille marin, est représenté une distance de 1852 mètres environ. — D'après cela, en négligeant toutes les causes accidentelles qui peuvent troubler la marche des chronomètres: tempêtes, tir du canon, &^{a}, et en admettant que l'état vrai ne diffère pas de l'état calculé dans l'hypothèse d'une marche constante; de plus de 2^m au bout de 90 jours, on voit d'abord, qu'après une traversée de 30 jours seulement, on ne serait jamais sûr de l'heure à moins de 40^s; ni, si l'on est dans le voisinage de l'équateur, de la position du navire à moins de 10 milles; c'est-à-dire de 18 à 20 kilomètres. Mais il s'en faut encore de beaucoup que l'on puisse compter avec sécurité sur cette approximation à peine suffisante, et la moindre perturbation dans la marche des chronomètres ramènerait cette estime fautive et mettrait le bâtiment en danger.

Pendules et montres communes.

Les pendules d'appartements ont pour moteur un ressort analogue à celui des chronomètres et de montres. Généralement l'échappement est à ancre, mais d'une exécution médiocre; l'ancre n'embrasse qu'un petit nombre de dents, et l'amplitude des oscillations du pendule est beaucoup plus grande que dans les horloges astronomiques; au lieu de repos, il se produit un recul, &^{a}.

On remarque quelquefois que la lentille est portée par des tiges formées de deux métaux; cependant la compensation est rarement établie, et il ne faut voir ordinairement dans cette disposition apparente qu'un motif d'ornementation. Au lieu de la suspension à ressort, on emploie le plus souvent une simple suspension à fil. En résumé les mouvements que l'on place dans les pendules les plus soignées, ne doivent être comparés, sous aucun rapport, avec les pièces de l'horlogerie de précision.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il y a, dans ces pendules, ainsi que dans les grandes horloges d'édifices, un mécanisme particulier pour la sonnerie, qui serait sans usage dans les horloges astronomiques et que l'on se garde bien d'y ajouter.

Dans les montres de poche, qui doivent être d'un petit volume, et auxquelles on ne prétend pas, en général, donner une très grande précision, le ressort du balancier, au lieu d'être roulé en hélice, est un spiral plat; au lieu de l'échappement libre, on emploie l'échappement à cylindre de Graham, dont le jeu est analogue à celui de l'échappement à ancre, et quelquefois même un échappement à ancre, de construction particulière au moyen duquel le balancier est moins longtemps soumis à l'action du moteur et que l'on nomme échappement à ancre libre.

Enfin, la compensation ne s'obtient que par à peu près, en raccourcissant ou en allongeant la partie du ressort spiral qui vibre, au moyen d'une pièce appelée la raquette, que le propriétaire de la montre peut faire marcher lui-même, tandis que l'intérieur d'un chronomètre ne doit jamais être touché que par un horloger habile et, autant que possible, par celui-là même qui l'a construit.

Malgré ces différences, il y a des montres plates qui marchent très bien et qui peuvent dans certains cas tenir lieu de chronomètres.

Les principaux perfectionnements introduits depuis un assez petit nombre d'années dans la construction des montres de poche, en vue de diminuer leur volume et même leur prix sans nuire à leur qualité, sont: la suppression de la fusée, et par conséquent de la chaîne, rendue possible par l'emploi de ressorts plus longs et mieux fabriqués; la substitution de l'échappement à cylindre à la roue de rencontre qui était posée de champ entre les deux platines; la suppression de l'une de ces platines à laquelle un horloger de Paris, Lépine, a substitué avantageusement plusieurs ponts pour supporter les pivots; enfin l'emploi de pierres fines pour les trous ou contre-pivots des axes du balancier et des deux premières roues, ou pour employer le langage technique, les deux premiers mobiles.

Quoique ces détails soient étrangers au Cours, on a cru qu'ils ne seraient pas sans utilité à la suite de la description des instruments d'horlogerie de haute précision.

Chapitre II.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chapitre II.

Des instruments destinés à la mesure des angles.

L'étude des instruments propres à mesurer les angles dont on fait un usage continuel en Astronomie et en Géodésie, est encore plus indispensable que celle que nous venons d'achever. En effet, on peut, à la rigueur, observer avec un chronomètre dont on connaît le mécanisme qui le fait marcher, et le degré de précision que l'on obtient dépend surtout de la qualité de ce chronomètre; tandis que pour mesurer des angles, on doit savoir manœuvrer les instruments destinés à ce genre d'observations, en rectifier les différentes parties qui se dérangent inévitablement peu à peu, combattre les causes d'erreur et évaluer les effets de celles que l'on ne peut pas détruire entièrement. En d'autres termes, il faut, pour atteindre à toute l'exactitude possible, une habileté qui ne s'acquiert pas uniquement par la pratique, mais que l'observateur doit encore à une connaissance exacte des principes de la construction des instruments et de la puissance des méthodes d'observation auxquelles se prêtent ces instruments.

Les mesures d'angles ne comportent pas toujours le même degré de précision; il en résulte que les dimensions et la disposition même des instruments, qui dépendent souvent des circonstances dans lesquelles on doit opérer, peuvent être très variées; mais comme ces instruments se composent en général des mêmes organes élémentaires, leur étude se ramène en grande partie, à celle des propriétés de ces organes, dont les principaux sont les suivants:

Les lunettes, qui font voir les objets éloignés beaucoup plus distinctement qu'à l'œil nu, et qui permettent de pointer plus exactement sur eux;

Les niveaux au moyen desquels on donne aux axes des instruments une direction verticale ou horizontale, ou même, dans certains cas, une inclinaison déterminée;

Les cercles divisés, sur lesquels on évalue les angles;

Les verniers, portés par des alidades mobiles autour du même axe que le cercle, et destinés à augmenter la précision des mesures effectuées sur ce cercle.

Enfin, les micromètres qui servent à l'évaluation de très petits angles.

De la lunette astronomique.[1]

La lunette astronomique se compose de deux lentilles convergentes placées

[1] La théorie des instruments d'optique appartenant au cours de Physique, nous nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aux extrémités d'un tuyau. Celle de ces lentilles qui a le plus grand diamètre doit être tournée vers l'objet que l'on veut examiner à travers la lunette et se nomme l'objectif; l'autre, auprès de laquelle l'observateur vient placer son œil se nomme l'oculaire.

Lorsqu'elle est adaptée à un instrument de mesure, cette lunette contient encore une troisième partie essentielle appelée le réticule, qui sert à déterminer avec précision la direction d'un point éloigné, et dont nous indiquerons plus loin la position exacte entre l'objectif et l'oculaire, mais beaucoup plus près de ce dernier.

De l'objectif. — Rappelons d'abord quelques unes des propriétés des lentilles en les appliquant à l'objectif.

1° Un faisceau conique de rayons lumineux émané d'un même point suffisamment éloigné et ayant pour base l'objectif, se transforme, après son passage, à travers cet objectif, en un autre faisceau conique, dont le sommet est le foyer particulier du point lumineux; plus le point lumineux est éloigné de la lentille et plus le foyer en est rapproché.

2° Lorsque le point lumineux est situé sur l'axe de figure de l'objectif et à une distance telle que le faisceau de rayons qui en émane et qui tombe sur la surface de l'objectif puisse être considérée comme cylindrique, le faisceau émergent est toujours conique et son sommet s'appelle le foyer principal de l'objectif. Le lieu des foyers des rayons parallèles, dont la direction est oblique à l'axe se nomme le plan focal principal.

3° Les faisceaux de rayons émanés des différents points d'un objet éloigné produisent, par leur réunion dans le plan focal, une image de l'objet dont l'intensité lumineuse est évidemment proportionnelle à l'ouverture de l'objectif.

4° Il existe, dans toute lentille, un point tel qu'un rayon lumineux qui vient s'y passer n'est pas dévié de sa direction. Ce point, situé sur l'axe de figure, s'appelle le centre optique de la lentille. Les lignes droites qui joignent un point de l'objet au point correspondant de l'image passent donc toutes par le centre optique; en d'autres termes, le centre optique est un centre de similitude entre les objets et leurs images.

5° Dans le cas que nous examinons, l'objet et l'image étant situés de part et d'autre de la lentille, l'image est renversée; et comme elle se forme toujours sensiblement dans le plan focal principal, sa grandeur est proportionnelle à la distance de ce plan au centre optique, qui s'appelle elle-même la distance focale principale.

En étudiant le phénomène de la vision, on reconnaît que les images des objets vus à l'œil nu sont formées d'une manière analogue à celle que nous venons de décrire, par la réunion de faisceaux de rayons lumineux émanés de chaque point de l'objet et

---

Commençons à indiquer ici sommairement la propriété la plus importante de la lunette que l'on adapte aux instruments de mesure pour accroître la précision des observations.

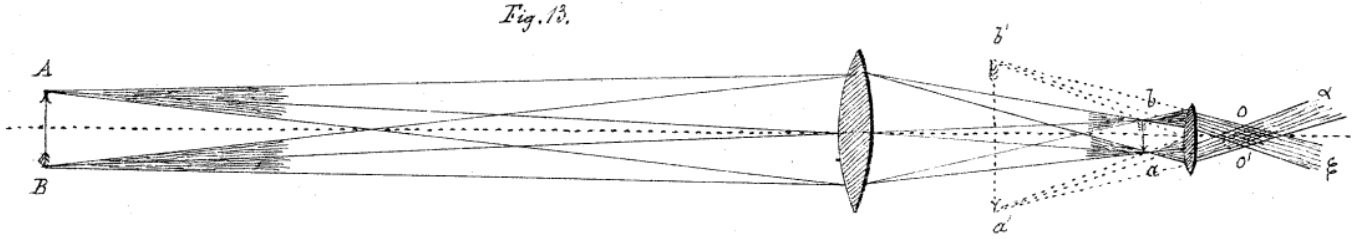
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ayant pour base commune l'ouverture de la pupille, elles sont donc bien moins brillantes que celle qui se forment au foyer d'un objectif dont le diamètre est toujours très grand relativement à celui de la pupille. On peut pressentir, d'après cela, en quoi consiste le rôle de l'objectif. Voici maintenant quel est celui de l'oculaire.

De l'oculaire. — Après avoir formé l'image au foyer de l'objectif, les rayons lumineux continuent chacun leur marche en ligne droite, et un œil qui, situé à une distance convenable de l'image, les recevrait directement, aurait la sensation de cette image, très brillante, mais en général trop petite pour être distincte. L'oculaire, à travers lequel ces rayons passent, avant de pénétrer dans l'œil, agit à la manière d'une loupe, et en changeant le degré de divergence des rayons, permet de regarder l'image de très près; d'où résulte l'amplification. L'effet produit par l'interposition d'une loupe entre l'œil et un objet dont on peut s'approcher autant qu'on le veut, est connu de tout le monde; quant à son explication, elle résulte très simplement de la théorie des lentilles. Je ferai seulement remarquer que l'oculaire a aussi un centre optique qui est un centre de similitude pour l'image réelle formée au foyer de l'objectif et pour l'image perçue par l'œil. Ces deux images étant situées de côté du centre sont de même sens.

Combinaison de l'objectif et de l'oculaire. — On peut suivre sur la figure 13 la marche de deux faisceaux de rayons lumineux partis des deux points extrêmes A et B

Fig. 13.



d'un objet éloigné jusqu'à leur sortie de l'oculaire en α et β. ab est l'image réelle renversée, formée au foyer de l'objectif, et a'b' est l'image virtuelle que l'on perçoit en regardant à travers l'oculaire. Cette seconde image, conservant le même sens que la première, se trouve encore renversée par rapport à l'objet. Avec un peu d'habitude, ces effets de la lunette astronomique est sans inconvénient.

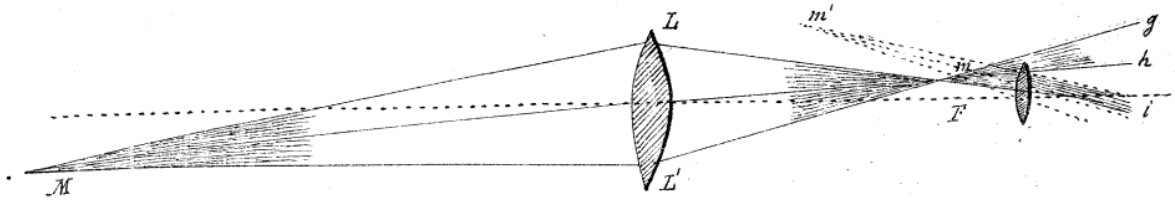
La même figure 13 montre encore que pour recevoir l'impression simultanée des deux points extrêmes a' et b', on doit placer l'œil en oo' à l'intersection des pinceaux α et β, de manière à ce que ces pinceaux puissent pénétrer à la fois par l'ouverture de la pupille. Nous reviendrons un peu plus loin sur cette remarque qui nous conduit naturellement à définir ce qu'on appelle le champs de l'instrument.

Du champs de la lunette. — Les rayons lumineux qui forment les faisceaux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dont les axes sont A a et B b (fig. 13) après s'être croisés en a et b rencontrent tous l'oculaire qui les dévie et les fait concourir à produire l'image virtuelle ; mais si l'on considère un faisceau dont l'inclinaison sur l'axe de figure des deux lentilles soit plus

Fig. 14



grande, il peut arriver qu'une partie des rayons de ce faisceau, après s'être croisés dans le plan focal, continue son chemin sans rencontrer l'oculaire, ou même qu'aucun de ces rayons ne tombe sur l'oculaire. Dans ce dernier cas, il n'y a pas d'image virtuelle du point de l'objet d'où est parti le faisceau ; dans l'autre, l'éclat de l'image est plus ou moins affaibli.

Soit, par exemple, un faisceau dont l'axe M m h (fig. 14) s'appuie sur le bord de l'oculaire, il est évident que la partie g m h de ce faisceau qui, après la formation de l'image réelle ne passe en dehors de l'oculaire, ne contribuera pas à produire l'image virtuelle m', laquelle sera d'autant plus faible que celle du point situé plus près de la direction de l'axe de figure.

Afin d'éviter cet effet d'une image dont l'éclat irait en s'affaiblissant sur les bords, on a coutume de placer au foyer de l'objectif un écran percé d'un trou circulaire ou diaphragme qui ne laisse passer que ceux des faisceaux dont tous les rayons vont tomber sur l'oculaire. D'après cette condition même, le diamètre du diaphragme est facile à déterminer. Le champ de la lunette est la partie de l'étendue comprise dans le cône qui a pour sommet le centre optique de l'objectif et pour base l'ouverture du diaphragme. On en connaîtra donc l'amplitude en divisant le diamètre du diaphragme par la distance focale de l'objectif. Lorsque la lunette fait partie d'un instrument et qu'elle est mobile autour du centre d'un cercle divisé, cette amplitude peut se mesurer plus simplement encore ; mais on a rarement besoin d'effectuer cette mesure, et il suffit, en général, de savoir si la lunette a un champ assez étendu pour le genre d'observation auxquelle elle est destinée ; ce qui s'apprécie immédiatement.

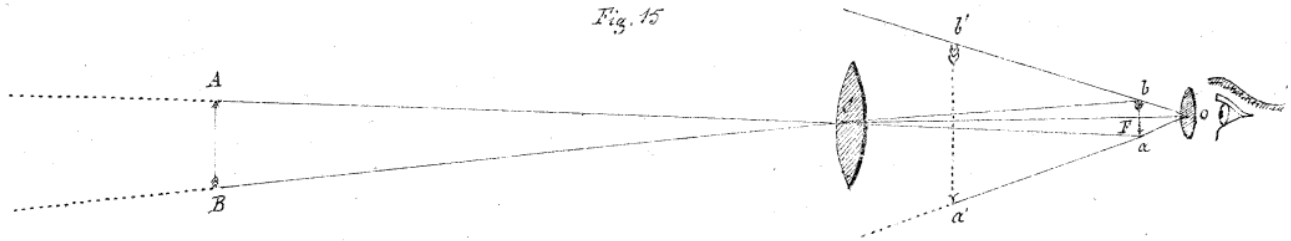
Du grossissement. — Le grossissement d'une lunette est le rapport de l'angle sous lequel l'image d'un objet est vue à travers cette lunette à celui que l'objet lui-même soustendrait à l'œil nu.

Ainsi, comme les dimensions de la lunette sont toujours négligeables relativement aux distances, l'angle A B C (figure 15) étant celui sous lequel on verrait

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'objet AB à l'œil nu, tandis que l'image a'b' est vue à travers l'oculaire sous l'angle a'Ob',

Fig. 15



le grossissement de la lunette est

$$G = \frac{a'Ob'}{ABC} = \frac{aOb}{aCb} ;$$

en considérant d'ailleurs pour plus de généralité, les rayons CA et CB comme passant par deux points quelconques de l'espace contenus dans le champs de la lunette, et tous deux assez éloignés pour que leurs images réelles se forment sensiblement dans le plan focal de l'objectif, le rapport ci-dessus ne cessera pas de représenter le grossissement de la lunette. On pourrait, à la rigueur, dans certains cas, mesurer directement les angles aOb et aCb, mais en transformant le rapport $\frac{aOb}{aCb}$, on parvient à d'autres expressions du grossissement qui en rendent la détermination plus facile et plus exacte.

On commence par admettre que l'oculaire soit disposé pour une vue infiniment presbyte, auquel cas le foyer principal de l'oculaire se confond avec celui de l'objectif.(1) Alors en désignant les distances focales CF et OF respectivement par F et f comme les angles aCb et aOb sont toujours assez petits, on a sensiblement

$$G = \frac{aOb}{aCb} = \frac{aOF}{aCF} = \frac{\frac{aF}{OF}}{\frac{aF}{CF}} = \frac{F}{f} ;$$

ainsi, en cherchant, d'une part, la distance focale de l'objectif, et de l'autre celle de l'oculaire, et en prenant le rapport de ces deux quantités, on aurait une mesure du grossissement; mais il faudrait pour cela que F et surtout f, qui peut être une quantité très petite, fussent déterminées avec une précision impossible à atteindre dans la plupart des cas; on a donc transformé ce rapport $\frac{F}{f}$ en un autre dont les deux termes peuvent s'évaluer

(1) On a ainsi une limite inférieure du grossissement par l'oculaire. Pour deux observateurs ayant des vues différentes, comme un myope et un presbyte, le grossissement n'est pas tout à fait le même, mais la différence n'est jamais très considérable.

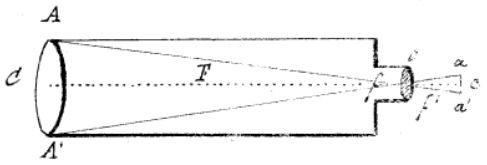
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

facilement avec une exactitude suffisante.

Supposons que l'objectif et l'oculaire placés aux deux extrémités du tuyau qui forme le corps de cette lunette conservent la même position relative que dans la figure 15. Si l'on tourne l'objectif vers un espace éclairé, et que l'on présente un écran de papier blanc à une petite distance, en arrière de l'oculaire, il viendra s'y former une image circulaire très lumineuse qui n'est autre chose que celle de l'ouverture de l'objectif. On peut, en effet, considérer tous les rayons lumineux qui traversent l'objectif comme ayant leur origine au point même où ils rencontrent le plan de l'extrémité du tuyau de la lunette, et comme en chacun de ces points il y a des rayons allant tomber dans toutes les directions possibles sur l'oculaire, l'image formée au delà de l'oculaire est bien celle que donnerait un cercle lumineux substitué au verre de l'objectif. On se convaincrait aisément que, dans cette expérience, l'objectif ne joue aucun rôle comme lentille, car en l'enlevant le résultat ne serait en rien modifié.

Voyons maintenant quel parti l'on peut tirer de cette remarque pour arriver à la détermination du grossissement de la lunette. — Joignons les deux extrémités A et A' d'un même diamètre de l'ouverture de l'objectif ou du tuyau de la lunette au centre optique O de l'oculaire (fig. 16), l'image de cette ouverture observée au foyer conjugué C aura pour diamètre $a a'$. Or, la distance OC est égale à $F + f$, et si l'on désigne par f' la distance oc, on aura la proportion

Fig. 16



$$\frac{A A'}{a a'} = \frac{F + f}{f'}$$

mais f est une assez petite quantité relativement à F pour que l'on puisse la négliger au numérateur ; d'un autre côté, f' diffère toujours très peu de f, de sorte que le rapport $\frac{F+f}{f'}$ est sensiblement égal à $\frac{F}{f}$; d'où il résulte enfin que l'on a cette nouvelle expression du grossissement $G = \frac{A A'}{a a'}$.

Le petit cercle lumineux $a a'$ a reçu le nom d'anneau oculaire, parce qu'il occupe précisément le lieu où l'observateur doit venir placer l'œil, ce qui a été déjà signalé dans le paragraphe relatif à la marche des rayons lumineux dans la lunette (page 28, fig 13, OO') ; il est évident, en effet, que les faisceaux de rayons lumineux dont la concentration dans un petit espace forme l'anneau oculaire, allant ensuite en divergeant, l'œil placé en cet endroit est dans les meilleures conditions pour voir du même coup toute l'étendue du champ avec la plus grande clarté possible. L'oculaire est ordinairement enchassé dans une monture fermée d'un côté par une petite plaque percée d'un trou qu'on nomme l'œilleton, et qui doit correspondre à peu près au lieu de l'anneau oculaire ; car c'est là que l'observateur vient placer son œil.

Revenons à l'expression $G = \frac{A A'}{a a'}$; elle montre qu'en mesurant, d'une part, le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diamètre de l'objectif, de l'autre celui de l'anneau oculaire, et en prenant le rapport de ces deux quantités, on obtient le grossissement de la lunette; la mesure du diamètre de l'objectif ne présente aucune difficulté, mais comme l'anneau oculaire est d'autant plus petit que le grossissement est plus fort, et que pour l'observer il faut le projeter sur un écran, on ne peut le mesurer avec exactitude qu'en prenant quelques précautions.

On emploie ordinairement dans ce but un petit instrument imaginé par Ramsden, qui se compose d'un écran formé d'une substance mince et transparente, sur laquelle sont tracées de très fines divisions, par exemple des dixièmes ou même des vingtièmes de millimètre que l'on voit distinctement au moyen d'une loupe. L'écran et la loupe peuvent glisser indépendamment l'un de l'autre dans un tuyau que l'on dispose en avant de l'oculaire de la lunette, et l'on parvient aisément : 1° à voir distinctement les divisions; 2° à amener l'écran au lieu même où se forme l'anneau, et par suite à évaluer le diamètre de cet anneau en parties de la division de l'écran, c'est-à-dire, à moins d'un dixième ou d'un vingtième de millimètre près; d'où l'on déduit le grossissement avec une approximation, en général, assez grande.

On a encore d'autres moyens de déterminer le grossissement d'une lunette; nous nous bornerons toutefois, en dernier lieu, à indiquer le suivant, qui est le plus simple de tous, mais qui est seulement applicable aux faibles grossissements. Il consiste à regarder directement avec l'œil gauche un objet, ou mieux une mire graduée placée à une distance convenable, en même temps qu'avec l'œil droit, armé de la lunette, on observe l'image dans la comparaison avec l'objet donne immédiatement le rapport cherché. Cette méthode est celle de Galilée, dont les lunettes étaient effectivement peu puissantes.

On peut adapter à la même lunette des oculaires de foyers différents, et il est clair que le grossissement sera d'autant plus fort que l'oculaire aura un plus court foyer.

Mais d'une part, le grossissement et le champ sont dans une dépendance telle que si l'un augmente, l'autre doit diminuer; d'où il suit que si l'on veut un champ étendu, il faut se contenter d'un grossissement modéré; et, d'un autre côté, le grossissement a une limite passée laquelle les images perdent toute netteté. Cette limite dépend des dimensions et de la qualité de l'objectif, ce qui fait dire que chaque lunette ne peut supporter qu'un certain grossissement maximum.

Du réticule. — Le réticule dont l'objet est de servir à déterminer avec précision la direction d'un point dans l'espace est un système de fils très fins tendus sur le diaphragme placé au foyer de la lunette. Le plus simple de ces systèmes est formé de deux fils qui se coupent à angle droit et dont le point d'intersection ou la croisée correspond à peu près au centre du diaphragme.

Habituellement la lunette est disposée sur les instruments de Géodésie ou d'Astronomie de telle sorte que l'un des fils soit horizontal; l'autre est, par conséquent dans un plan vertical, mais on le désigne, pour abréger, sous le nom de fil vertical.

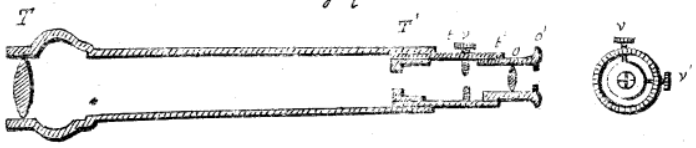
D'après une des propriétés énoncées précédemment, tous les points de l'espace dont

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on fera coïncider l'image avec la croisée des fils se trouvera alors sur le prolongement de la droite qui joint cette croisée avec le centre optique de l'objectif, et que l'on nomme ligne de visée ou de collimation. Cette droite, invariable de position dans la lunette tant que l'on ne dérange pas le réticule, est encore désignée souvent sous le nom d'axe optique; mais il ne faut cependant pas la confondre avec l'axe de figure de l'objectif et de l'oculaire, dont elle s'écarte peu à la vérité, mais avec lequel il n'est pas nécessaire, en général, qu'elle coïncide. (1)

Le diaphragme sur lequel est tendu le réticule est placé dans un tuyau tt' (fig. 17) qui peut glisser à frottement dans celui qui forme le corps de la lunette TT'; l'oculaire est de son côté porté par un autre petit tuyau OO' qui glisse de même dans le porte-réticule. Pour mettre la lunette au point, c'est-à-dire pour voir simultanément avec netteté l'image et la croisée des fils, la lunette étant tournée vers un espace éclairé, on commence par faire mouvoir le porte-oculaire jusqu'à ce que l'on voie distinctement les fils du réticule, puis on dirige la lunette vers un objet très éloigné et on fait mouvoir le porte réticule qui entraîne l'oculaire jusqu'à ce que l'image de l'objet éloigné paraisse parfaitement nette; il est évident qu'elle se forme alors précisément dans le plan des deux fils du réticule qui se trouve ainsi lui-même amené au foyer de l'objectif.

Fig. 17.



Les objets sur lesquels on a à diriger la lunette sont généralement assez éloignés pour que leurs images puissent être considérées comme venant se former dans le plan focal principal de l'objectif; on pourrait donc à la rigueur fixer le réticule dans ce plan, mais les changements de température peuvent faire varier la longueur du tuyau de la lunette et il vaut toujours mieux avoir la faculté de régler la position du réticule; on profite d'ailleurs de la mobilité du porte réticule pour raccourcir la lunette lorsqu'on la transporte. Quant à l'oculaire, il faut absolument que chaque observateur puisse l'éloigner ou le rapprocher de l'image réelle pour transporter l'image virtuelle à la distance de sa vue distincte.

Rectification de la position du réticule. — Dans l'opération de la mise au point, il peut arriver que l'on n'amène pas le réticule exactement dans le plan focal principal de l'objectif; il en résulte alors une parallaxe optique, c'est-à-dire un déplacement apparent de l'image par rapport aux fils suivant la position que prend l'œil de l'observateur sur le

---

(1) Dans quelques instruments spéciaux de nivellement, cette coïncidence est de rigueur; on a dans ce cas des moyens simples de vérification et de correction dont le principe sont du reste identiques avec ceux qui nous serviront pour la rectification des instruments que nous avons à étudier.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trajet des rayons lumineux qui sortent de l'oculaire, et, par suite, une fausse appréciation de la direction du point qui se projette sur la croisée même. Pour reconnaître s'il existe une parallaxe, on élève ou on abaisse l'œil au devant de l'œilleton, en observant avec soin si les points de l'image voisins du fil horizontal ne paraissent pas s'en approcher ou s'en éloigner, et suivant le sens du déplacement que l'on peut remarquer, il faut enfoncer ou retirer le réticule, en réitérant la même observation jusqu'à ce que tout effet sensible soit détruit.

Lorsque la lunette est adaptée à un instrument de mesure, son axe optique doit avoir une position déterminée par rapport à certaines parties de cet instrument (1) et comme il serait impossible d'en assurer l'invariabilité, pour rectifier cette position, on déplace le réticule dans son plan et par conséquent avec lui la croisée de fils qui est un point de l'axe optique. A cet effet, le diaphragme peut recevoir un mouvement latéral au moyen de vis de correction v, v' (fig. 17) sur lesquelles on agit extérieurement.

Enfin pour rendre s'il est nécessaire, l'un des fils horizontal, on fait tourner le porte-cuvette dans le grand tuyau autour de leur axe commun

Des diaphragmes. — Le diaphragme que porte le réticule n'a pas seulement pour objet de circonscrire le champ de la lunette, il est également destiné à intercepter les rayons étrangers qui pénètrent à travers l'objectif sous de grandes incidences et qui pourraient arriver à l'œil après s'être réfléchis sur la paroi intérieure du tuyau malgré la précaution que l'on prend de la noircir. D'autres diaphragmes sont disposés dans le même but un peu plus près de l'objectif, mais leurs diamètres doivent être déterminés par la condition de laisser passer tous les faisceaux de rayons lumineux qui concourent à la formation de l'image. Toutefois, lorsque la courbure de l'objectif ne sont pas tout-à-fait en rapport avec le diamètre de son ouverture, ce qui produit un défaut sensible de netteté dans les images appelée aberration de sphéricité, on peut placer un diaphragme immédiatement derrière l'objectif pour arrêter les rayons qui tombent près des bords; mais en faisant disparaître ainsi le défaut de netteté des images, on retombe dans l'inconvénient d'affaiblir leur éclat; en un mot on diminue l'ouverture de l'objectif, c'est-à-dire la puissance optique de la lunette.

Des épreuves à faire subir aux lunettes. — La lunette que l'on veut essayer ayant été mise au point avec soin, sur les taches de la lune, si cela se peut, on reconnaîtra qu'il n'y a pas d'aberration de sphéricité, en amenant les images sur les bords du champ, ou en posant de petits disques de papier de plus en plus grands au centre de l'objectif. Dans tous ces essais, les images doivent conserver leurs formes régulières et leur netteté, sans qu'on soit obligé de changer la mise au point. Tant que les disques ne couvrent pas entièrement la surface de l'objectif, il doit se former une image dont l'éclat seul va en s'affaiblissant. Si l'image disparaissait auparavant, ce serait une preuve qu'une partie de l'objectif est masquée par un diaphragme et il ne faudrait plus compter dans l'évaluation du grossissement que sur l'ouverture libre de cet objectif.

---

(1) Voyez plus loin les articles relatifs à la vérification des instruments.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On sait que la réfraction des rayons lumineux dans leur passage à travers les lentilles produit une décomposition de la lumière qui se traduit dans les lunettes par une irisation des images appelée aberration de réfrangibilité. Les lunettes dans lesquelles ce dernier défaut est corrigé sont dites achromatiques. Pour vérifier si la lunette qu'on essaie est achromatique, on la dirige sur un disque blanc parfaitement circulaire, sur lequel on la remet au point. Alors si on retire l'oculaire, l'image doit se colorer en violet pourpre et si on l'enfonce, elle doit se colorer en rouge verdâtre. Enfin, une épreuve très simple et néanmoins décisive pour juger de la qualité de la lunette, consiste à la diriger sur des caractères d'imprimerie plus ou moins fins placés à une distance convenable et à voir s'ils sont nets, réguliers et faciles à lire.

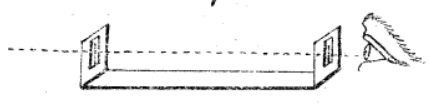
Des grandes lunettes et des télescopes. — Pour obtenir des grossissements considérables, on adapte aux lunettes de grandes dimensions des oculaires dont la distance focale n'est que de quelques millimètres; mais alors le champ est de plus en plus restreint, et les astres à cause du mouvement diurne, qui se trouve également amplifié, passeraient trop vite pour pouvoir être observés convenablement, si la lunette conservait la même direction. On a donc imaginé de monter les grandes lunettes sur un axe parallèle à l'axe du monde, auquel on donne, au moyen d'un mécanisme d'horlogerie, un mouvement de rotation égal à celui de la Sphère céleste, ce qui permet de maintenir dans le champ l'astre ou les astres que l'on observe pendant tout le temps nécessaire.

Les grandes lunettes montées équatorialement sont destinées à des recherches délicates qui sont étrangères au programme de ce cours. Il en est de même des télescopes à réflexion, dont la théorie qui ne présente aucune difficulté après celle des lunettes, se trouve dans tous les ouvrages élémentaires de Physique. Nous signalerons seulement ici l'invention récente faite par M. Foucault, de miroirs en verre argenté, dont la construction est facile et qui sont destinés à procurer des instruments puissants sous de moindres dimensions que les télescopes à miroirs métalliques. (1)

Les grandes lunettes et les télescopes qui supportent de forts grossissements, ayant un champ très restreint, pour en faciliter le pointé, on dispose sur un des côtés de leur tuyau une petite lunette auxiliaire appelée chercheur, dont on rend l'axe optique parallèle à celui de l'instrument.

Avantages de l'application des lunettes aux instruments divisés. — Avant l'invention des lunettes, pour pointer sur les objets éloignés, on se servait principalement d'alidades à pinnules, qui sont encore employées dans quelques instruments d'arpentage.

Fig. 18



Ces alidades (fig. 18) se composent d'une règle qui porte à chacune de ses extrémités et perpendiculairement à son plan, une plaque percée d'une fente

(1) M. Foucault continue à perfectionner, avec un grand succès, la construction de ses nouveaux télescopes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

au milieu de laquelle on tend un fil. La direction d'un objet se détermine en projetant les deux fils l'un sur l'autre et sur cet objet.

Avec cet appareil ou avec les autres dioptres analogues, les meilleurs observateurs (Tycho-Brahé entre autres) n'ont jamais mesuré les angles à moins d'une minute près. La lunette a permis de pousser l'approximation jusqu'à une seconde et même au delà. La raison de cette supériorité est facile à concevoir.

Premièrement, pour viser avec l'alidade, il faut que l'œil s'ajuste pour des distances très différentes, celle de l'objet et celle des fils. La lunette au contraire jouit de cette propriété remarquable que l'image de l'objet vient se peindre au lieu même occupé par le réticule qui remplace le fil de l'alidade le plus voisin de l'œil, tandis que le centre optique de l'objectif (point immatériel qui, avec la croisée des fils, détermine la ligne de visée) tient lieu de second fil. L'œil n'a donc besoin de s'ajuster dans ce cas que pour une seule distance qui est précisément celle de la vue distincte à laquelle on transporte l'image au moyen de l'oculaire.

En second lieu, les lunettes amplifient les images en leur donnant, en général une clarté supérieure à celle des objets; elles procurent donc le moyen de distinguer des détails imperceptibles à l'œil nu; ce qui donne une bien plus grande précision au pointé.

Enfin, les fils des alidades ont toujours des dimensions très sensibles en leur grosseur sous-tend à l'œil de l'observateur un angle qui peut aller à plusieurs minutes, tandis que les fils déliés dont sont formés les réticules des lunettes sous-tendent à peine quelques secondes. (1)

Des micromètres. — Au lieu de deux fils dont le point de croisée détermine une seule ligne de visée, concevons que l'on tende sur le diaphragme de la lunette astronomique deux systèmes de fils parallèles et très rapprochés dans deux sens rectangulaires. Les différents points de croisements des fils de ce réseau (d'où le nom de réticule) détermineront avec le centre optique de l'objectif autant de lignes de visée formant entre elles de très petits angles, et les intervalles des points situés sur un même fil mesureront également ceux des fils parallèles qui passent par ces points.

Le disque d'un astre sur lequel on dirige la lunette venant former son image sur ce réseau, on voit immédiatement qu'il sera possible d'évaluer son diamètre apparent au moyen de l'intervalle des fils entre lesquels l'image est comprise. Il suffit pour cela d'avoir déterminé préalablement, par des observations directes, faites sur une mire divisée et placée à une distance connue, l'amplitude des angles correspondants à chacun des

---

(1) Ce sont des fils d'araignée ou de platine; on se procure des fils de platine extrêmement fins par un procédé dû à Wollaston, qui consiste à passer à la filière une tige de platine renfermée dans une gaîne d'argent et à dissoudre ensuite l'argent dans un acide. Ces fils peuvent être fixés simplement sur le diaphragme au moyen d'un mélange de cire et de résine, et lorsqu'ils viennent à casser on les remplace facilement avec un peu d'adresse.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

intervalle des fils.

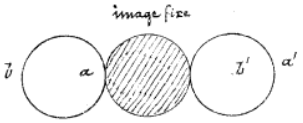
Tel est, en peu de mots, le principe des micromètres dont on a varié la disposition d'une foule de manières.

Le micromètre à fil mobile qui est souvent employé actuellement doit son extrême précision au soin avec lequel sont construites les vis micrométriques qui font marcher le fil.

Nous devons encore indiquer les micromètres à double image dont les deux principaux types sont l'héliomètre de Bouguer et le micromètre à prisme bi-réfringent de Rochon.

Supposons que l'on ait un moyen de faire apparaître dans la lunette deux images égales d'un même astre, dont l'une puisse au gré de l'observateur, se mouvoir par rapport à l'autre, tout en restant dans le plan focal. Si l'on amène successivement l'image mobile en contact avec l'autre aux deux extrémités du même diamètre (fig. 19), le premier point de contact de l'image mobile a se sera déplacé pour venir en a', d'un intervalle angulaire double de ce diamètre. Or si le mouvement est donné à l'image mobile au moyen d'une vis micrométrique, il est clair qu'on pourra l'évaluer avec toute la précision que comporte la construction de cette vis. Le grand avantage des micromètres à double image consiste en ce que le contact de deux images s'apprécie beaucoup mieux que celui d'un fil avec le bord d'une image.

Fig. 19.



Dans l'héliomètre, la double image est formée par deux objectifs de même distance focale, ou mieux, suivant l'idée de Dollond, par les deux moitiés d'un même objectif scié dans le sens de son épaisseur, dont l'une peut glisser le long de la section commune (fig. 20). Chaque moitié de l'objectif formant une image, lorsque leurs centres O et O' coïncident, les images se superposent exactement et n'en font qu'une; mais elles se séparent dès que l'on fait glisser la moitié qui est mobile au moyen d'une vis micrométrique dont chaque tour correspond à un déplacement angulaire d'un même point de l'image, déplacement que l'on doit d'abord déterminer expérimentalement. L'héliomètre, ainsi que son nom l'indique, a été destiné primitivement à la mesure des diamètres du disque solaire. Monté équatorialement et construit avec une rare perfection par Fraunhofer, il a été employé par Bessel à la recherche des parallaxes des étoiles et peut être considéré comme l'un des instruments les plus délicats qui soient à la disposition des Astronomes.

Fig. 20



La propriété dont jouissent certaines substances cristallisées de produire la double réfraction, a été utilisée par Rochon, pour obtenir les deux images. Dans ce cas, il n'y a qu'un seul objectif, et la duplication d'image au moyen d'un prisme de cristal de roche placé dans l'intérieur de la lunette à quelque distance en avant de l'oculaire. Les rayons lumineux reçus dans la lunette subissent la double réfraction en traversant ce

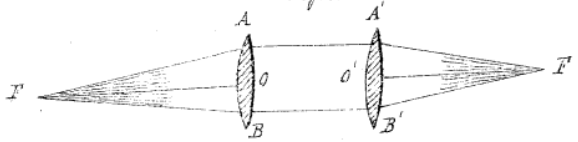
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

prisme, et l'observateur voit, par conséquent deux images au lieu d'une seule. La position relative de ces deux images dépendent de celle du prisme que l'on peut éloigner ou rapprocher de l'oculaire, au moyen d'une crémaillère, et les mouvements, qui entraînent la séparation ou le rapprochement des images, sont encore facile à mesurer.

Ce micromètre, étalonné avec soin, peut donner d'excellents résultats. Arago en a beaucoup perfectionné la disposition et l'a employé dans un nombre considérable d'observations très précises.

Principe de la collimation. — Un faisceau de rayons lumineux parallèles qui tombe sur une lentille convergente allant se concentrer au foyer principal de cette lentille; réciproquement, un faisceau conique de rayons qui émane de ce foyer, doit se transformer en traversant la lentille, en un faisceau cylindrique.

Fig. 21

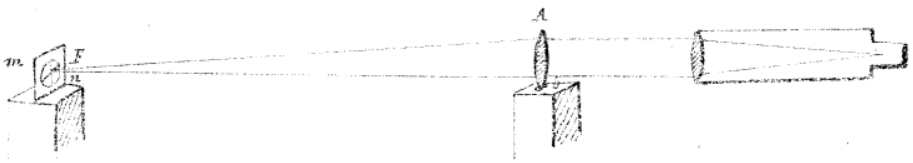


D'après cela, si l'on conçoit deux lentilles AB et A'B' (fig. 21) placées en regard, mais à une distance quelconque l'une de l'autre, et un point lumineux F situé dans le plan focal principal de l'une d'elles, les rayons émanés de ce point devenant parallèles dans leur trajet entre les deux lentilles iront converger en définitive en F', dans le plan focal principal de la seconde, exactement comme s'ils venaient d'un point situé à l'infini dans la direction OF à laquelle la ligne O'F' est évidemment parallèle.

Cette simple remarque constitue le principe de la collimation qui est appliqué fréquemment tant dans les observations astronomiques que dans les expériences d'optique.

Des collimateurs. — On a souvent besoin, par exemple, de pouvoir amener l'axe optique d'une lunette exactement dans la même direction, et le moyen qui se présente naturellement consiste à placer dans cette direction une mire éloignée sur laquelle on pointe avec la lunette. Mais comme l'établissement de cette mire présente presque toujours des inconvénients, on y supplée de la manière suivante. Sur un support parfaitement fixe, on dispose dans la direction voulue, d'une part une lentille AB (fig. 22), et de l'autre au foyer de cette lentille qui, pour plus d'exactitude, doit être assez long, une plaque ou mire mn percée d'une ouverture sur laquelle sont tendus deux fils en croix. En dirigeant la lunette sur cet appareil et en amenant

Fig. 22.



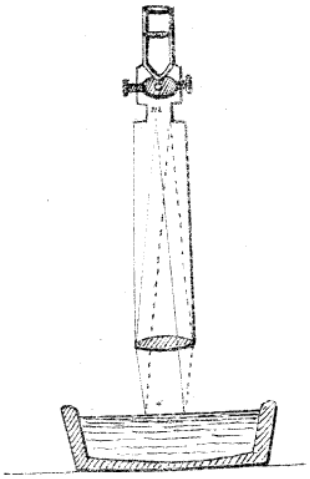
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'image de la croisée I' en coïncidence avec la croisée du réticule de la lunette; il en clair, d'après le principe précédent, que l'axe optique de la lunette reprendra la même direction, toutes les fois que cette opération sera renouvelée. Quand on observe de nuit, l'ouverture de la plaque est éclairée par une lampe placée derrière. Le système de la lentille et de la mire placée à son foyer porte le nom de collimateur.

Une lunette ordinaire peut évidemment servir de collimateur. Il suffit pour cela que la lumière du jour ou celle d'une lampe pénètre par l'oculaire et vienne éclairer l'intérieur du tube. Cette remarque a fait découvrir l'un des meilleurs procédés que l'on puisse employer pour rendre vertical l'axe optique d'une lunette.

Ce procédé consiste à pointer la lunette sur un bain de mercure (fig. 23) dont la surface, lorsqu'elle est bien nette, est le meilleur des miroirs, la lunette étant bien exactement mise au point, si l'on considère la croisée des fils comme un point lumineux, l'image de ce point produite par la réflexion à la surface du mercure, viendra se former exactement dans le plan focal de la lunette; et, lorsque, par un léger mouvement de rappel, on aura obtenu la coïncidence de la croisée des fils avec son image, il est évident que l'axe optique de la lunette sera parfaitement vertical.

Fig 23



Éclairage du champ de la lunette. — Dans les observations faites de nuit, pour rendre les fils du réticule visibles, on éclaire ordinairement l'intérieur du tube de la lunette au moyen d'un réflecteur diaphragmé placé dans le corps de la lunette et incliné sur son axe, sur lequel on dirige la lumière d'une lampe par une ouverture convenablement pratiquée. (Voy. les planches 5 et 6 du portefeuille).

On emploie aussi de très petits réflecteurs métalliques tels que m (fig 24) que l'on dispose à une petite distance en avant de l'objectif de la lunette et sur lesquels on dirige la lumière de la lampe.

Fig. 24



Enfin, dans le cas d'observation d'astres dont l'éclat est extrêmement faible, comme les comètes, on a proposé d'éclairer non plus l'intérieur de la lunette, mais les fils eux-mêmes supposés métalliques, et à travers lesquels on ferait passer un courant voltaïque.

Lorsqu'on pointe la lunette sur le bain de mercure, l'image des fils n'y serait pas visible, même de jour, si l'on ne prenait pas le soin d'projeter de la lumière diffuse dans le tube de la lunette. On emploie, en effet, un oculaire ordinaire (fig. 23)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par un petit microscope, qui porte un réflecteur m percé d'un trou, et auquel on peut donner toutes les inclinaisons et toutes les directions. Après quelques tâtonnements on parvient aisément par ce moyen à illuminer l'intérieur de la lunette et à voir à la fois les fils du réticule et leur image réfléchie par la surface du mercure.

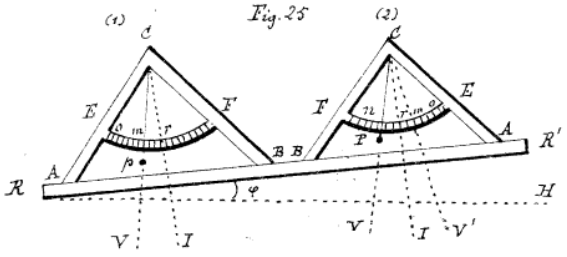
Du fil à plomb et des niveaux.

Dans la plupart des observations faites au moyen des instruments d'astronomie ou de Géodésie, on amène les lunettes dans les directions convenables, en les faisant tourner autour d'axes qui doivent être exactement horizontaux ou verticaux.

Pour vérifier l'horizontalité ou la verticalité de ces axes, ou pour mesurer leur inclinaison, on se sert du fil à plomb, ou de niveaux dont la construction est fondée soit sur le principe même du fil à plomb, soit sur celui de l'équilibre des fluides.

L'appareil qui, sous la forme la plus commode, peut fournir en même temps les indications les plus précises, est le niveau à bulle d'air, que l'on rencontre dans presque tous les instruments actuellement en usage, tandis que le fil à plomb et le niveau à perpendicule y deviennent de plus en plus rares. L'emploi du fil à plomb est d'ailleurs trop simple pour qu'il soit nécessaire de s'y arrêter. On pourrait en dire presque autant du niveau à perpendicule dont nous indiquerons cependant la théorie très élémentaire, parce qu'elle rend celle du niveau à bulle d'air plus facile à saisir.

Niveau à perpendicule. — Supposons qu'il s'agisse de mesurer l'inclinaison d'une règle RR' (fig. 25) au moyen du niveau à perpendicule ACB muni d'un arc divisé EF ayant son centre au sommet C où est attaché le fil à plomb, et qui ne diffère par autrement du niveau de maçon. Posons ce niveau sur la règle; si l'on connaît le point r où la graduation de l'arc est rencontrée par la perpendiculaire CI abaissée sur RR', l'inclinaison φ de la règle qui est égale à l'angle ICV se déduira simplement de la lecture de la division m, sur laquelle bat le fil à plomb. Pour découvrir ce point r, retournons le niveau bout pour bout et replaçons-le sur la règle dans la position (2) que nous écartons, sur la figure, de la position (1), afin que l'on puisse suivre le changement résultant de cette inversion; nous supposons, dans le même but, que la graduation de l'axe EF soit apparente sur les deux faces.



Après le retournement, le fil à plomb, qui conserve la direction de la verticale, a abandonné la division m et est venu tomber sur une nouvelle division n évidemment symétrique de la première par rapport au point r. On trouvera donc ce point en

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

prenant le milieu de l'arc m n et l'inclinaison cherchée sera égale à la moitié de l'amplitude de ce même arc. Ainsi le point r correspondra à la division $\frac{m+n}{2}$ et l'inclinaison de la règle sera

$$\varphi = \frac{n-m}{2}.$$

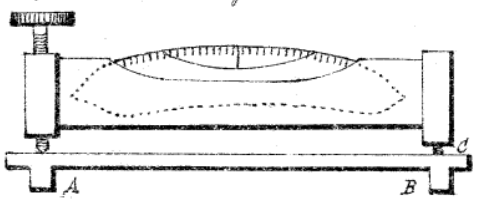
Le point r étant déterminé, si on le prend pour zéro d'une graduation tracée et numérotée symétriquement de part et d'autre quand on posera le niveau sur une règle, la division sur laquelle battra le fil à plomb donnera immédiatement la mesure de l'inclinaison de cette règle et en indiquera le sens, du moins tant que l'appareil ne sera pas dérangé. Il est clair d'ailleurs que pour rendre la règle horizontale, il suffirait d'élever l'une de ses extrémités ou d'abaisser l'autre jusqu'à ce que le fil à plomb vint battre sur la règle.

Enfin, quand on craindra que le niveau ait été dérangé par un choc ou par toute autre cause, et que par conséquent le repère ne soit plus juste, on pourra le vérifier et le régler s'il y a lieu, en suivant la même marche que la première fois. (a)

Cette marche est aussi celle qu'il convient d'adopter dans l'emploi du niveau à bulle d'air et se justifie exactement de la même manière.

Le niveau à bulle d'air (fig 26), se compose d'un tube de verre légèrement courbe fermé à ses deux bouts et contenant un liquide très fluide comme l'alcool ou l'éther, qui ne le remplit pas entièrement. Le reste de la capacité, occupé par de l'air ou seulement par la vapeur du liquide, forme ce qu'on appelle la bulle d'air. Le tube, convenablement enchassé dans une monture en métal, doit, lorsqu'on veut s'en servir, être couché horizontalement, la convexité de la courbure tournée vers le haut de sorte que la bulle d'air, dont le poids spécifique est moindre que celui du liquide, corresponde toujours à la partie supérieure de cette courbure qui reste apparente dans la monture et le long de laquelle il y a une graduation.

Fig. 26



Théorie du niveau à bulle d'air. — Pour faire cette théorie, on peut admettre que la section longitudinale principale de la surface intérieure du tube soit un arc de cercle, et que,

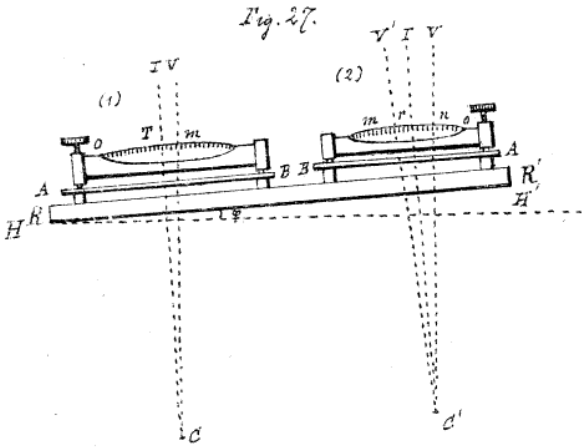
(a). La manœuvre par laquelle nous venons de déterminer la position du point de repère est celle-là même que les ouvriers emploient journellement pour vérifier et régler leurs niveaux. Cette première application du principe de symétrie peut être considérée comme le type des opérations conjuguées dont les observateurs font un usage continuel pour étudier l'état de leurs instruments, éliminer certaines erreurs, en mettre d'autres en évidence et les évaluer, et même effectuer des mesures qu'ils ne pourraient pas se procurer aussi facilement ou aussi exactement par une opération directe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par la nature même de l'appareil, le plan de cette section reste vertical. En ne considérant que cet arc, la bulle d'air, supposée réduite à la molécule du milieu de sa longueur, viendra, dans toutes les positions du niveau, en occuper le point le plus élevé, et déterminer ainsi sur cet arc la trace de la verticale qui passe par son centre.

L'analogie qui existe alors entre le niveau à perpendicule et le niveau à bulle d'air est évidente et l'on peut immédiatement transporter au dernier de ces instruments les conséquences auxquelles on est arrivé pour le premier.

En effet, en continuant pour le niveau à bulle d'air, la figure 27 sur laquelle il est représenté dans les deux positions symétriques (1) et (2), avant et après le retournement, et en comparant celle-ci avec la figure 26 relative au niveau à perpendicule, on voit qu'elle n'en diffère géométriquement que par la situation, inverse du centre de l'arc divisé. En conservant les mêmes notations, l'expression de l'inclinaison de la règle sera donc



$$\varphi = \frac{m - n}{2}$$

et la position du repère correspondra encore à la division $\frac{m+n}{2}$.

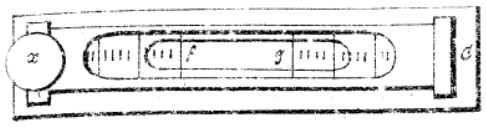
Voyons actuellement quelle sont les conditions de la pratique, pour en conclure comment on doit se servir du niveau à bulle d'air. Remarquons d'abord que si l'on veut un niveau sensible, c'est-à-dire sur lequel le plus léger changement d'inclinaison soit accusé par un déplacement notable de la bulle, il faut que la courbure du tube soit assez faible, et, comme les dimensions des niveaux sont nécessairement très limitées, il en doit résulter que l'amplitude totale de l'arc sera elle-même très restreinte. D'ailleurs, pour déterminer, dans les différentes cas, la position du milieu de la bulle auquel se rapporte la théorie, il faut que les deux extrémités de cette bulle, qui doit toujours avoir une assez grande longueur, restent toutes apparentes à la fois dans la partie du tube qui n'est pas recouverte par la monture métallique.

On conclut de là : 1° que le niveau à bulle d'air ne peut servir à mesurer que de faibles inclinaisons, et 2° que l'appareil doit être réglé de telle sorte que le repère du milieu de la bulle coïncide sensiblement avec le trait du milieu de la graduation du tube; ou plutôt, comme on n'observe pas le milieu de la bulle, mais les extrémités, on prend pour repères deux traits situés à égale distance de part et d'autre du milieu de la graduation; souvent même on supprime la graduation dans la partie moyenne du tube, et alors les deux premiers traits de chaque côté f et g (fig. 28) sont proprement les repères auxquels on rapporte les positions des extrémités de la bulle, en observant de combien de division

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ces extrémités s'en écartent. Lorsque le nombre de divisions est le même des deux côtés on dit que la bulle est entre ses repères.

Fig. 28

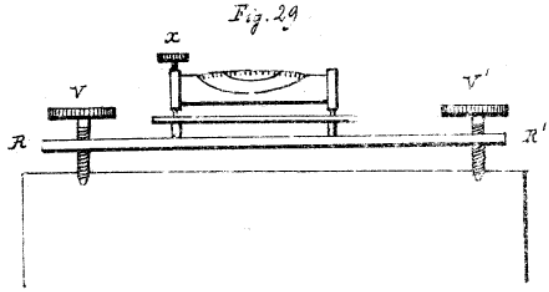


Rectification du niveau. — Par suite de la grande sensibilité du niveau à bulle d'air, les moindres influences extérieures suffisent pour le déranger lorsqu'il a été réglé ; il est donc nécessaire de le vérifier et de le rectifier fréquemment. A cet effet, l'appareil est muni d'une vis de réglage x (fig. 26 et 28) qui permet d'éloigner ou de rapprocher l'une de ses extrémités du tube de la platine à laquelle sont fixés les deux talons A et B.

On comprendra maintenant sans peine la manœuvre suivante, qui est sans cesse employée dans l'installation et la rectification de cet instrument.

Supposons simplement qu'il s'agisse de rendre horizontale une règle RR' (fig. 29), munie de vis calantes V, V' qui pénètrent dans des écrous portés par un support invariable. Plaçons le niveau sur la règle, et en agissant sur l'une des vis calantes ou même sur les deux à la fois, amenons la bulle entre ses repères. Retournons alors le niveau bout pour bout, si la bulle vient reprendre la même position, c'est que le niveau est réglé, et de plus, on aura rendu la règle RR' horizontale. Si au contraire, après le retournement, la bulle s'écarte de ses repères, son déplacement observé à l'une de ses extrémités et mesuré sur la graduation du tube, accusera le double de l'inclinaison actuelle de la règle, on rendra donc cette règle horizontale en agissant sur la vis calante V ou V' de manière à faire rétrograder l'extrémité observée de la bulle, de la moitié du nombre de divisions dont elle s'est avancée dans un sens ou dans l'autre. Il est clair en outre que pour régler le niveau il suffira alors d'agir sur la vis x jusqu'à ce que la bulle revienne entre ses repères.

Fig. 29



De là cette règle que pour rectifier à la fois le niveau et l'instrument, quand ce dernier est réglé, il faut observer la bulle avant et après le retournement ; puis corriger la moitié de l'écart entre les deux positions par la vis de l'instrument et l'autre moitié par la vis du niveau.

Mesure de l'inclinaison déduite de l'observation des extrémités de la bulle. — Lorsque le niveau adapté à un axe en est sensible, et que le moindre défaut d'horizontalité ou de verticalité de l'axe pourrait produire une erreur appréciable sur les résultats des observations, on ne s'astreint ni à rectifier cet axe, ni à régler le niveau avec une entière exactitude, parce que, parvenu on a y réussir, que cet état de perfection serait bientôt altéré, et qu'il faudrait sans cesse recommencer. Il est donc préférable de noter les divisions du tube

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

auxquelles correspondent les extrémités de la bulle, dans les deux positions inverses, d'où l'on conclut l'inclinaison de l'axe qui porte le niveau, et cette inclinaison, en tenant compte du sens qui doit lui être attribué, sert ensuite elle même à corriger les observations.

Le zéro des divisions du tube peut être placé à l'une de ses extrémités ou au milieu; la formule qui donne l'inclinaison est toujours la même pourvu que l'on suive la convention ordinaire relative aux signes des quantités comptées en sens opposés.

Supposons d'abord que le zéro soit pris à l'une des extrémités du tube; et, pour fixer les idées plaçons-le du côté de la vis de réglage. Posons le niveau ainsi construit sur l'axe à peu près horizontal dont nous voulons évaluer l'inclinaison, de telle sorte que la vis de correction, et par conséquent le zéro de la graduation se trouve à gauche; les deux extrémités de la bulle tomberont sur les directions m' et m'' dont la moyenne $\frac{m'+m''}{2} = m$ indiquera la position du milieu. Après le retournement les deux extrémités de la bulle tomberont généralement sur d'autres divisions n' et n'', et la moyenne $\frac{n'+n''}{2} = n$ indiquera la nouvelle position du milieu.

En substituant ces valeurs de m et de n dans la formule

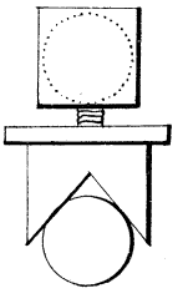
$$\varphi = \frac{m-n}{2},$$

elle deviendra

$$\varphi = \frac{(m'+m'')-(n'+n'')}{4}.$$

Une simple convention établie, en ayant égard à la manière dont est disposée la graduation, permettra dans tous les cas de déterminer à la fois le sens et l'amplitude de l'inclinaison de l'axe.

Fig. 30



Comme les axes des instruments sont ordinairement de forme cylindrique les talons du niveau sont taillés en forme de chevron (fig. 30), de manière à pouvoir reposer sur deux des génératrices de la surface.

Pour rendre un axe vertical, il y a une opération de plus à faire; mais, après les explications précédentes, on ne saurait rencontrer aucune difficulté dans l'emploi du niveau et nous nous bornerons à énoncer la série des observations dans l'ordre où elles doivent être exécutées.

Il suffit de savoir que le niveau est fixé à l'axe qui l'entraîne dans tous ses mouvements, mais de telle sorte cependant que l'on peut régler sa position sur l'axe au moyen d'une vis de correction. L'axe est lui même supporté par un pied à trois vis calantes.

Pour rectifier cet axe: 1° On commence par le faire tourner jusqu'à ce

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que le tube du niveau devienne sensiblement parallèle à la ligne qui joint deux vis à caler en agissant alors sur ces deux vis, on amène la bulle entre ses repères;

2° On fait ensuite tourner le niveau de 180°, de manière à lui faire prendre une position symétrique de la première; si la bulle ne revient pas entre ses repères, on l'y ramène en faisant la moitié de la correction par les vis calantes, et l'autre moitié par la vis du niveau. Le niveau est alors réglé, et l'axe est dans un plan perpendiculaire à la direction de la ligne qui passe par les deux vis;

Enfin on amène le niveau dans une direction perpendiculaire aux deux premières, et en agissant sur la 3e vis à caler qui se trouve sur cette direction, on ramène la bulle entre ses repères et on achève ainsi de rendre l'axe vertical.

Ces opérations ne réussissent pas toujours du premier coup; mais, après quelques tâtonnements, que les observateurs exercés parviennent à resserrer rapidement, la bulle se trouve maintenue très près de ses repères pendant une rotation entière de l'axe. — On peut donc mesurer en notant les divisions sur lesquelles viennent tomber les extrémités de la bulle dans deux positions symétriques du niveau, non pas l'inclinaison absolue de l'axe, mais celle de sa projection sur un plan vertical quelconque déterminé par la direction du niveau.

Pour avoir l'inclinaison d'un axe au moyen d'un niveau, il faut évidemment connaître la valeur en secondes des divisions marquées sur le tube.

Les artistes ont recours pour cela à un instrument très simple auquel ils donnent le nom d'éprouvette et qui est fondé sur l'emploi de la vis micrométrique.

Les observateurs font souvent eux-mêmes cette détermination quand le niveau est ou peut être convenablement adapté à un instrument muni d'une lunette mobile autour d'un cercle vertical divisé. La marche à suivre est extrêmement simple; — il est inutile de l'indiquer, mais avant d'avoir fait la description des cercles divisés et des moyens que l'on emploie pour évaluer les angles avec une grande précision.

Détails sur la construction des tubes de niveau. — Nous avons admis, dans tout ce qui précède, que la courbure de la surface intérieure du niveau était parfaitement régulière, au moins à sa partie supérieure, où l'on observe la bulle. On employait autrefois et l'on emploie encore aujourd'hui, mais seulement dans la fabrication des instruments de qualité médiocre, des tubes courbés par le ramollissement du verre ou sous leur propre poids, lorsqu'ils ont été suspendus horizontalement par leurs deux extrémités. Une pareille courbure ne pouvant évidemment être régulière que par hasard. Pour l'obtenir d'une manière certaine, on a remplacé les tubes bruts par des tubes rodés, c'est-à-dire usés intérieurement sur une petite largeur et dans le sens longitudinal, par le frottement du verre sur une tige métallique recouverte d'émeri.

Lorsque l'artiste croit le tube assez bien rodé, il trace la graduation en donnant aux parties égales une grandeur arbitraire; puis après avoir rempli de liquide la plus grande partie du tube, dont il bouche provisoirement les deux extrémités, il le soumet à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'éprouvette. S'il trouve le niveau d'une sensibilité convenable et la courbure régulière, il ferme définitivement le tube, en étirant ses deux bouts à la lampe; après quoi le niveau doit être éprouvé une dernière fois pour voir si cette opération ne l'a pas altéré.

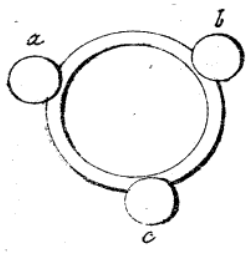
On a construit ainsi des niveaux très réguliers sur lesquels une seconde sexagésimale correspondait à 3 ou 4 millimètres; ce qui donnait un rayon de courbure de 400 à 600^{m} de longueur [1], mais lorsqu'on dépasse une certaine limite, la trop grande mobilité de la bulle devient à son tour un inconvénient, en empêchant de bien observer. Les niveaux sur lesquels une seconde est représentée par un millimètre environ, sont ceux dont l'emploi est le plus avantageux, parce qu'ils ont une sensibilité suffisante et que la bulle atteint encore assez rapidement sa position d'équilibre.

Les tubes doivent être disposés dans leur monture métallique de telle sorte que les dilatations produites sur celle-ci par les changements de température puissent s'exercer librement et sans réagir sur la courbure.

On emploie des tubes d'un grand diamètre, et on laisse à la bulle assez de longueur pour atténuer, autant que possible, les effets de la capillarité. Les dilatations inégales du verre, du liquide et de la vapeur, produisent sur la longueur de la bulle des changements sensibles, qui sont cependant sans inconvénients, puisque l'on doit toujours observer les deux extrémités de la bulle, en supposant du moins que la courbure du tube ne varie pas.

Horizon artificiel. — Dans plusieurs circonstances, et particulièrement lorsqu'on emploie à terre le instrument à réflexion, auquel on ne peut pas adapter de niveaux, on a besoin d'observer l'angle compris entre la direction d'un astre et celle d'une image réfléchie sur la surface d'un miroir horizontal, angle dont la moitié est égale à la hauteur de l'astre au-dessus de l'horizon. Ce miroir, auquel on donne le nom d'horizon artificiel, est ordinairement formé d'une plaque d'émail, enchassée dans une monture portée par trois vis a, b, c, (fig. 31).

Fig. 31



On cale ce miroir horizontalement au moyen d'un niveau ordinaire à bulle d'air et par une série d'opérations entièrement analogues à celles qui ont été indiquées pour rendre un axe vertical. La seule différence consiste en ce que, dans le cas de l'horizon artificiel, le niveau est librement posé sur la surface du miroir.

Horizon de mercure. — En versant dans une capsule circulaire d'un assez grand diamètre une certaine quantité de mercure dont la surface, lorsqu'elle est nette, est un

---

[1] On sait, ou l'on peut s'assurer par un calcul très simple, que la longueur d'un arc de 1" est $\frac{1}{206265}$ de celle du rayon.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

miroir de plus parfait, on le projette immédiatement sur un horizon artificiel qui remplace avantageusement celui dont il vient d'être question. On doit seulement éviter d'observer près des bords où le métal liquide en contact avec le vase est se trouve soumis à l'action de la capillarité qui, agissant dans un autre sens que la pesanteur, altère l'horizontalité de sa surface.

On emploie depuis longtemps le bain de mercure à la manière de l'horizon artificiel en émail, pour mesurer le double de la hauteur d'un astre; mais depuis quelques années, il sert surtout à pointer l'axe optique d'une lunette verticalement, comme nous l'avons expliqué à l'article de la lunette astronomique. Dans les observatoires établis près des grandes villes, cette opération réussit difficilement à cause des ébranlements du sol par le passage des voitures, ébranlements qui, se communiquant au mercure, en ridentent la surface et font disparaître les images qui s'y formaient par réflexion, ou du moins les agitent et les rendent inobservables.

On a proposé plusieurs moyens de parer à ces inconvénients; l'un des plus ingénieux est celui que l'on doit au Colonel Kossard. Ce habile observateur a remarqué que, dans une capsule circulaire, les ondulations produites à la surface du mercure par les vibrations du sol étaient concentriques, et que dès lors, en amenant l'un des fils d'une lunette pointée verticalement sur le bain de mercure dans une direction allant du centre à la circonférence de la capsule, l'image de ce fil devait rester visible.

L'expérience a confirmé cette prévision, de sorte que tant que l'agitation du mercure n'est pas trop forte, on peut observer l'image réfléchie de l'un ou de l'autre des fils du réticule, ce qui suffit ordinairement. Seulement, pour obtenir un meilleur résultat, il faut pointer à quelque distance du centre, où le trouble est évidemment maximum. Quant au fil dirigé dans le sens perpendiculaire, son image disparaît totalement.

Ligne d'horizon. — A la mer, il est à peu près impossible d'installer un horizon artificiel, malgré beaucoup de tentatives faites dans ce but, on n'a pas d'autre ressource que de mesurer la hauteur des astres au dessus de la ligne d'horizon qui tranche plus ou moins nettement sur le ciel et qui est la base du cône visuel tangent à la surface de la mer. A cause de la forme du globe terrestre et de la présence de l'atmosphère, les observations rapportées à cette ligne exigent deux espèces de corrections qui seront indiquées par la suite.

Des cercles divisés et du vernier circulaire.

Des cercles divisés. — Les cercles divisés qui servent à la mesure des angles sont centrés sur les axes de rotation autour desquels s'effectuent les mouvements des lunettes.

Dans les instruments de petites dimensions, la lunette fait corps avec une alidade dont l'index parcourt les divisions du cercle ou limbe; dans les grands instruments, la lunette est liée au cercle divisé qu'elle entraîne dans ses mouvements, et les divisions

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

passent successivement sous des microscopes fixes au moyen desquels on fait la lecture.

Les cercles des instruments les plus répandus portent la division sexagésimale. Dans les travaux géodésiques de la carte de France, on a cependant employé la division centésimale. Nous supposerons toujours que les instruments que nous décrirons appartiennent au premier système, et nous bornerons à indiquer plus loin la manière la plus simple de transformer les mesures d'une division dans l'autre.

On a longtemps employé des arcs de cercle (quarts de cercle, sextants, octants) préférablement à des cercles entiers, parce qu'on pouvait leur donner un plus grand rayon; ce qui permettait de subdiviser le degré en un plus grand nombre de parties et d'augmenter ainsi la précision des mesures. Mais depuis que l'art de diviser les cercles a été poussé à un haut degré de perfection, comme on pouvait faire des observations plus précises qu'auparavant avec des instruments de moindres dimensions, on en a profité pour construire des cercles entiers.

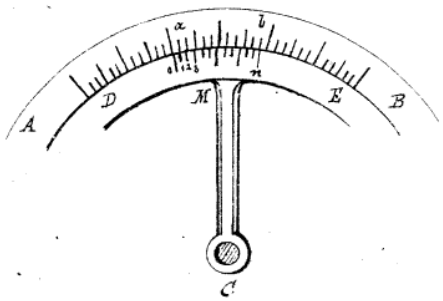
Cette innovation ou plutôt ce retour à une forme adoptée par les plus anciens astronomes, a eu d'heureuses conséquences; car on n'a pas tardé à reconnaître que les cercles entiers, en se prêtant à des vérifications et à des méthodes d'observation inapplicables avec de simples arcs de cercle, avaient sur ceux-ci de nombreux avantages qui compensaient et au delà les effets d'une diminution du rayon.

Il serait impossible, même sur les grands cercles des observatoires (à plus forte raison sur ceux des instruments portatifs) de tracer sans confusion, des divisions assez multipliées pour que la lecture immédiate donnât à la minute des angles un degré de précision en rapport avec celui que le pointé par la lunette permet d'atteindre. Après avoir poussé la division aussi loin que les dimensions du cercle le comportent, il faut donc avoir recours à des moyens indirects de subdivision.

Pour opérer cette subdivision, on emploie, en général, dans les instruments portatifs, le vernier; et dans les instruments fixes le micromètre à fil mobile placé au foyer d'un microscope composé. Nous ne décrirons ici que le vernier, l'usage du micromètre à fil mobile étant plus rare et ne présentant, d'ailleurs, aucune difficulté.

Principe du vernier. — Soit AB (fig. 32) un arc de cercle divisé dont le centre est en C et DE un autre arc concentrique porté par une alidade CM mobile autour du même centre. Sur ce second arc prenons, de 0 en n une longueur égale à l'intervalle ab composé de $n \pm 1$ divisions du premier et divisons cette longueur en n parties égales. Au moyen de cette division auxiliaire qui constitue le vernier, lorsque le trait 0 ou l'index tombera entre deux traits de l'arc AB, on pourra déterminer l'angle auquel il correspond à $\frac{1}{n}$ près de la valeur d'une division de cet arc.

Fig. 32.



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En effet, si l'on désigne par l la longueur d'une division de l'arc AB ou du limbe, et par v celle d'une division du vernier, on aura :

$$(n \pm 1)\, l = n v ; \qquad \text{d'où} \qquad v = l \pm \frac{l}{n} ;$$

c'est-à-dire que chaque division du vernier différera en plus ou en moins d'une division du limbe, de la $n^{ième}$ partie de la longueur de cette division.

Adoptons la seconde construction, d'après laquelle les divisions du vernier sont plus petites que celles du limbe, et numérotons alors les traits de zéro à n dans le sens même de la graduation du limbe [1], la coïncidence du vernier étant établie, comme sur la figure 32, avec deux traits du limbe, on voit immédiatement que chacun des traits 1, 2, 3, ... $n-1$ du vernier est en retard sur le trait correspondant du limbe de 1, 2, 3, ... $n-1$ fois $\frac{l}{n}$.

Supposons maintenant que par un très faible mouvement de l'alidade, on fasse avancer le vernier d'une quantité moindre que l ; si, à l'aide d'une loupe, on parcourt le vernier et la partie correspondante du limbe, on reconnaît par exemple que le trait n° 3 du vernier est sensiblement en coïncidence avec un trait du limbe, on en conclura évidemment que ce trait s'est avancé de la quantité $3\frac{l}{n}$; par conséquent, son zéro aura dépassé de la même quantité le trait α avec lequel il était d'abord en coïncidence. Ainsi, en général, lorsque le zéro du vernier tombe entre deux traits du limbe, il dépasse celui qui donne la plus petite lecture d'une quantité égale à $\frac{l}{n}$ multipliée par le rang du trait du vernier pour lequel la coïncidence existe sensiblement.

Pour construire le vernier circulaire et pour en faire usage, il faut avoir égard au mode de division du cercle auquel on l'applique.

Pour fixer les idées, considérons un limbe divisé de 10' en 10', et supposons que l'on veuille mesurer les angles à 15" près, au moyen du vernier, il faudra que l'on ait $\frac{l}{n} = 15''$, et comme $l = 10'$, on tire de là $n = 40$; pour construire le vernier, on prendra donc un arc composé de 39 divisions du limbe et on le divisera en 40 parties.

L'approximation que l'on peut obtenir au moyen du vernier n'est pas indéfinie, car elle est mesurée précisément par la différence qui existe entre la longueur de division du limbe et du vernier, et à mesure que cette différence diminue, la coïncidence devient plus difficile à saisir, de telle sorte que, passé une certaine limite, l'indétermination pourrait porter sur un nombre plus ou moins considérable de traits.

L'expérience a prouvé par exemple que sur un cercle de 0m, 20 de diamètre, le

---

[1] Le vernier ainsi construit s'appelle vernier direct ; l'autre construction est celle du vernier rétrograde.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

vernier ne pourrait guère donner une approximation de plus de 10", que l'on porte cependant à 5" par l'estime. Dans ce cas, le limbe est divisé de 10' en 10', et le vernier a 60 divisions.

Pour obtenir plus d'exactitude dans la mesure des angles, on dispose plusieurs verniers qui doivent conserver toujours la même distance, et l'on prend la moyenne des lectures faites sur chacun d'eux; le meilleur moyen de maintenir la même distance entre les verniers est de les tracer sur un cercle entier concentrique avec le limbe et que l'on désigne souvent sous le nom de cercle alidade.

Des instruments de Géodésie.

(Voyez les Planches 2, 3 et 4 du Portefeuille).

Malgré l'ingénieux artifice du vernier ou le secours des appareils micrométriques, l'évaluation des angles ne se fait qu'avec un degré d'approximation qui dépend des dimensions du cercle divisé et qui est beaucoup moindre, par conséquent, dans les instruments portatifs que dans ceux des observatoires.

Quelle que soit d'ailleurs l'habileté des artistes, il reste toujours dans les instruments les mieux exécutés de légères imperfections qui deviennent des sources d'erreurs dans les observations. Ainsi, les divisions ne sont jamais rigoureusement égales; le centre de ces divisions ne correspond pas exactement à l'axe de rotation de l'alidade; le jeu de cet axe dans la pièce qui l'emboîte, si faible qu'il soit, suffit, dans certains cas, pour altérer la précision des mesures; en un mot, les formes des différentes pièces des instruments ou les mouvements que l'on donne à quelques unes d'entre elles ne peuvent que s'approcher de la perfection géométrique sans jamais l'atteindre.

Méthode de la répétition. — Pour s'affranchir de l'erreur de division sur laquelle l'attention s'est portée pendant longtemps et qui était en effet l'une des plus graves que l'on eût à craindre dans les anciens instruments, le célèbre astronome allemand Tobie Mayer a imaginé la méthode de la répétition.

Cette méthode consiste à porter plusieurs fois la mesure d'un angle sur un cercle divisé, de telle sorte que chaque mesure s'ajoute, sans discontinuité à la précédente, à faire une seule lecture à la fin de l'opération et à diviser cette lecture par le nombre des mesures. On obtient ainsi une valeur de l'angle cherché dans laquelle l'erreur de division et l'erreur de lecture se trouvent divisées par le même nombre.

Dans les instruments répétiteurs, le cercle et la lunette peuvent être fixés l'un à l'autre et tourner ensemble autour d'un axe qui passe par le centre des divisions; ou bien le cercle peut être maintenu dans une position déterminée, tandis que la lunette devenue indépendante, tourne en entraînant l'alidade qui lui est liée invariablement.

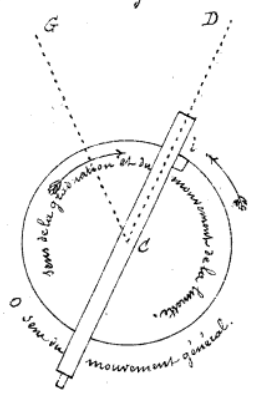
Nous désignerons le premier de ces mouvements sous le nom de mouvement général et le second, sous le nom de mouvement particulier de la lunette. (1)

(1) Chacun de ces mouvements se décompose en deux parties, un mouvement rapide

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Supposons par exemple qu'il s'agisse de mesurer l'angle de deux directions CG, CD, comprises dans le plan du limbe dont le centre est en C (fig. 33), on mettra l'index i de l'alidade en coïncidence avec le zéro du limbe, puis, en ayant égard au sens dans lequel croissent les divisions, on dirigera la lunette sur le point G (objet de gauche) par le mouvement général. Cela fait, et le cercle étant fixé, on détachera la lunette et on l'amènera, par son mouvement particulier, sur le point D (objet de droite); on aura ainsi une première mesure de l'angle, mais au lieu de faire la lecture, on recommencera l'opération en partant de la nouvelle position de l'alidade sur le limbe, c'est-à-dire qu'en maintenant l'alidade dans cette position, et après avoir rendu libre le mouvement général, on ramènera, par ce mouvement, la lunette sur le point G, et l'on continuera comme ci-dessus. En répétant n fois l'opération, il est évident que si l'on désigne par α l'amplitude de l'angle GCD, la distance de l'index i de l'alidade au zéro du limbe sera successivement α, 2α, 3α ... $n\alpha$.

Fig. 33.



Nous avons supposé que le plan du limbe contenait les deux objets D et G, de sorte que l'angle mesuré est effectivement celui qui est compris entre les directions de ces deux objets, mais on a généralement besoin de réduire les angles à l'horizon et pour faire cette réduction par le calcul, il faut encore mesurer séparément les hauteurs de chaque point au dessus de l'horizon ou leurs distances zénithales qui en sont les compléments.

Le cercle répétiteur employé par les observateurs français dans les grandes triangulations qui couvrent notre territoire, est construit de manière à permettre d'opérer successivement la mesure des angles dans le plan des objets et celle des distances zénithales. Mais la manœuvre de cet instrument est moins simple que celle du théodolite qui donne immédiatement les angles réduits à l'horizon et qui est désormais à peu près exclusivement en usage. Nous nous bornerons donc à la description de ce dernier.

Du théodolite. — Cet instrument représenté sur les planches 2 et 3 du portefeuille se compose essentiellement d'un système de deux axes, l'un vertical, l'autre horizontal, passant chacun par le centre d'un cercle divisé au plan duquel il est perpendiculaire, et d'une lunette mobile autour de l'axe horizontal. Le tout est monté sur un trépied armé de vis à caler.

Le mouvement de rotation de l'instrument autour de l'axe vertical et celui de la lunette autour de l'axe horizontal permettent de diriger celle-ci successivement sur les différents objets visibles d'une même station et de mesurer dans les distances zénithales de ces objets que les angles compris entre leurs directions, réduits à l'horizon. À cet effet, le limbe

---

au moyen duquel on fait apparaître les images des objets dans la lunette; puis, ce mouvement étant arrêté par une vis de pression ou autrement, on lui fait succéder un mouvement lent ou de rappel, qui sert à donner au pointé toute l'exactitude possible.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

horizontal et le limbe vertical peuvent être fixés, le premier au trépied et le second à la platine sur laquelle repose l'axe horizontal, tandis que des alidades entraînées dans tous les mouvements de rotation en indiquent l'amplitude par leurs déplacements sur le limbe.

Pour que l'instrument soit répétiteur, il faut que les cercles divisés puissent tantôt conserver la fixité que nous venons de supposer, tantôt réunis aux alidades, suivre les mouvements de rotation. La condition passant par le plan des deux axes, planche 3, montre comment cette double condition se trouve réalisée par la construction. Indépendamment des axes, des cercles et de la lunette d'observation, on remarquera sur la figure des planches 2 et 3 le grand niveau fixe qui sert à vérifier l'axe vertical, le petit niveau qui peut se retourner sur l'axe horizontal à la rectification duquel il est destiné, et une seconde lunette appelée lunette de repère fixée au pied de l'instrument pour servir au besoin à accuser les faibles déplacements que pourrait éprouver celui-ci pendant la durée des observations.

Mise en station du théodolite. — L'instrument étant placé sur un support bien stable, il faut, avant de procéder aux observations, rectifier :

1° l'axe vertical ; 2° l'axe horizontal et 3° l'axe optique de la lunette d'observation.

Nous n'aurons pas à revenir sur les deux premières rectifications qui s'effectuent chacune au moyen de l'un des niveaux et par le procédé qui a été indiqué dans un article précédent.

La troisième rectification qui a pour but de rendre l'axe optique de la lunette perpendiculaire à l'axe horizontal, est fondée, comme les deux autres sur le principe de la symétrie. Elle consiste à viser sur un même point situé à une très grande distance, avec le cercle vertical à droite, une seconde fois avec le cercle à gauche, et à faire dans les deux cas la lecture sur le limbe horizontal.

Si l'axe optique est perpendiculaire à l'axe horizontal, l'objet visé étant supposé assez éloigné pour que l'on puisse négliger les dimensions de l'instrument, la différence des deux lectures doit être de 180° exactement. Dans le cas contraire, le complément de cette différence à 180° est le double de la quantité dont l'axe optique est écarté de la perpendiculaire. Pour faire la rectification, il suffira donc de déplacer l'alidade de la moitié de cet écart, en faisant marcher la vis de rappel de l'alidade dans le sens convenable, ce qui détruira la coïncidence de l'image du point visé avec la croisée des fils, puis de rétablir cette coïncidence en agissant sur la vis de correction qui fait mouvoir horizontalement le réticule.

La rectification de l'axe optique doit être naturellement précédée de la mise au point de la lunette qui s'effectue comme nous l'avons expliqué précédemment.

On s'assure en même temps de la verticalité de l'un des deux fils du réticule en visant sur un objet bien défini et en faisant tourner la lunette autour de l'axe horizontal sans perdre cet objet de vue. Pendant cette rotation, le fil doit toujours recouvrir exactement le même point de l'objet, sinon il a une inclinaison dans un sens ou dans l'autre que l'on corrige en faisant tourner légèrement le porte réticule dans le tuyau de la lunette.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Mesure des angles réduits à l'horizon. — La mesure de l'angle compris entre deux objets et réduit à l'horizon peut se répéter en suivant la marche qui a été exposée plus haut pour la mesure des angles dans le plan des objets, mais il est préférable de modifier cette marche en y introduisant le principe des observations croisées ou symétriques. La modification dont il s'agit a pour effet de diminuer l'erreur que peut produire l'excentricité de position de la lunette par rapport à l'axe vertical, lorsqu'on observe des objets terrestres qui ne sont pas très éloignés et en même temps celle qui résulterait d'une rectification imparfaite de l'axe horizontal, dans le cas où les deux objets considérés sont à des hauteurs très inégales, comme cela arrive, par exemple, quand on prend la distance angulaire d'un astre à un objet terrestre. Elle consiste simplement à faire un nombre pair d'observations de l'angle cherché, en effectuant alternativement une mesure avec le cercle vertical à droite et la suivante avec le cercle à gauche. On démontre très facilement par la géométrie les deux propriétés dont jouit cette méthode.

Mesure des distances zénithales. — Quoique l'inclinaison de l'axe optique de la lunette soit déterminée à chaque observation, la lecture immédiate du limbe n'en donne pas la mesure, parce que rien n'indique sur ce limbe la direction exacte du diamètre vertical ou du diamètre horizontal à partir desquels devrait se compter cette inclinaison. Là encore on a recours aux observations symétriques, et voici comment on procède. Après avoir visé l'objet dont on cherche la distance zénithale, avec le cercle vertical à droite, on fait tourner l'instrument de 180° autour de l'axe vertical et l'on ramène la lunette sur l'objet en lui faisant décrire évidemment sur le cercle vertical un angle double de celui qu'il s'agit de trouver : On a donc celui-ci en prenant la demi différence des lectures faites sur le limbe dans ses deux positions.

L'opération par laquelle on obtient la distance zénithale double peut se répéter autant de fois qu'on le veut. Pour cela, si l'on a commencé avec le cercle à droite, toutes les fois qu'on reviendra à cette position, on laissera le cercle réuni à l'alidade et on visera l'objet, en le entraînant ensemble dans le mouvement de la lunette, c'est-à-dire par le mouvement général. Quand, au contraire, le cercle sera à gauche, on ramènera la lunette sur l'objet par le mouvement particulier de l'alidade.

A chaque pointé, l'observateur doit noter avec soin les indications de la bulle du grand niveau, pour en conclure l'inclinaison de l'axe vertical dont il faut corriger la distance zénithale observée.

Valeur des parties du grand niveau. — Nous indiquerons, à ce propos, un moyen très simple de trouver la valeur des divisions ou parties du grand niveau en secondes de degré. Voici en quoi il consiste : Le niveau étant parallèle à la ligne qui passe par deux des vis à caler et la lunette étant entre ses repères, on cherche, en faisant mouvoir la lunette autour de l'axe horizontal, un objet bien défini situé à l'horizon, sur lequel on pointe exactement en se servant de la vis de rappel, et on fait la lecture par le cercle vertical. En agissant ensuite sur l'une des vis à caler, on déplace la bulle d'un nombre déterminé de divisions ; cette opération dérange l'axe optique de la lunette de sa direction primitive,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mais si l'on rectifie le pointé, au moyen de la vis de rappel de l'alidade, et que l'on fasse une nouvelle lecture, il est évident que la différence des deux lectures est la mesure de l'angle dont l'inclinaison du niveau a varié. On aura donc la valeur cherchée d'une partie du niveau, en divisant cette différence des lectures exprimée en secondes par le nombre des divisions dont l'une des extrémités de la bulle a été déplacée.

En faisant usage de la vis de correction du niveau, l'opération qui vient d'être décrite peut être répétée un assez grand nombre de fois pour donner la valeur moyenne d'une partie du niveau avec toute la précision nécessaire.

Vices de la méthode de la répétition et moyens employés pour y remédier. — La méthode de la répétition suppose, comme nous l'avons vu, que les arcs portés successivement sur le limbe s'ajoutent les uns aux autres sans discontinuité.

Or, c'est ce qui n'a jamais bien rigoureusement, le jeu des axes emboités les uns dans les autres, celui des vis de rappel dans leurs écrous (temps perdus), les frottements, l'élasticité des métaux, les variations de la température, l'action de la gravité étant autant de causes qui interviennent dans les opérations successives et souvent d'une manière assez sensible pour infirmer le principe de la méthode.

Dans la construction des nouveaux instruments, on a cherché à combattre quelques unes des erreurs produites par ces différentes causes. Ainsi, les vis de rappel ont été perfectionnées, on a rendu les mouvements des axes aussi doux que possible par d'ingénieuses dispositions mécaniques; aux cercles évidés dont les rais pouvaient fléchir, on commence à substituer des cercles pleins. Enfin, la lunette de retière et le grand niveau sont souvent disposés de manière à pouvoir accuser non seulement les mouvements accidentels du support de l'instrument, lesquels sont rarement à craindre, mais même les faibles déplacements du limbe horizontal ou du limbe vertical si ceux-ci venaient à être entraînés par les mouvements de rotation des cercles alidades.

Les observateurs, de leur côté, dans le but d'éliminer les erreurs qui dépendent du sens dans lequel s'effectuent les opérations ont eu recours aux opérations conjuguées par symétrie. S'il s'agit, par exemple, d'obtenir l'angle compris entre deux objets, après une série de mesures directes faites en allant de l'objet de gauche à l'objet de droite, ils font une nouvelle série comprenant le même nombre de répétitions, en rétrogradant, c'est-à-dire en allant de l'objet de droite à l'objet de gauche et ils prennent la moyenne des deux résultats.

Dans la détermination des latitudes géographiques pour laquelle la dernière précision est requise, on mesure ordinairement les distances zénithales d'étoiles qui passent au méridien. En choisissant deux étoiles qui passent à peu près à égale distance du zénith, l'une au nord et l'autre au sud, les erreurs provenant de l'action de la pesanteur doivent être sensiblement égales, et comme elles affectent les mesures en sens contraire, la combinaison de ces mesures donne un résultat qui en est indépendant. C'est ainsi que M. Biot a opéré en 1825 à Formentera pour rectifier la latitude de cette station qui forme l'extrémité de l'arc de France et d'Espagne.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En faisant succéder à une série d'observations directes d'un astre, une série semblable d'observations de l'image de cet astre vue par réflexion à la surface d'un bain de mercure, on atteint le même but. Ce second procédé a été appliqué avec beaucoup de succès par le Colonel Brousseaud dans les observations de latitudes qu'il a faites sur le parallèle moyen.

Méthode de la réitération. — La méthode de la répétition n'a pas été adoptée aussi généralement à l'étranger qu'en France. En Angleterre, par exemple, on a préféré employer des instruments de plus grandes dimensions et prendre des moyennes de plusieurs mesures indépendantes les unes des autres, en nombre moins considérable, d'ailleurs, que celui des répétitions que certains observateurs ont poussé jusqu'à l'exagération. Au lieu de recommencer la mesure du même angle, en partant d'un même trait du limbe, on peut, quand la construction de l'instrument s'y prête, partir de traits différents, régulièrement distribués sur la circonférence de ce limbe. C'est ainsi que les Astronomes ont l'habitude de déplacer de temps en temps les grands cercles des observatoires, afin de faire servir les différentes parties de la circonférence à la mesure des mêmes angles. Cette pratique a pour effet d'éliminer, en grande partie, les erreurs de la division qui ne sont pas purement accidentelles, comme on pourrait le croire au premier abord. Appliquée aux instruments portatifs, elle constitue ce qu'on a appelé, dans ces derniers temps, la méthode de la réitération. Cette méthode a été employée d'abord par l'illustre astronome allemand Bessel, dans la triangulation de la Prusse orientale et depuis, par un grand nombre d'autres observateurs.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on veuille réitérer 12 fois une même angle, on prendra successivement pour origine les traits de la division du limbe marqués 0°, 30°, 60° ..... 330° ou à peu près, car il est inutile de s'astreindre à une coïncidence exacte de ces traits avec le zéro de l'un des verniers de l'alidade, les erreurs des traits voisins étant supposées sensiblement égales. Il suffit, comme on voit, de pouvoir faire tourner le limbe et le fixer solidement dans différentes positions, en laissant l'alidade indépendante. Il est facile de concevoir, d'après cela, que la construction des instruments réitérateurs peut être beaucoup plus simple que celle des instruments répétiteurs; il en est de même de leur manœuvre et comme enfin, on lit nécessairement les verniers à chaque observation, il en résulte que plusieurs des causes d'erreurs signalées à propos de la répétition n'existent plus ou sont moins à craindre. On achève de les éliminer à peu près complètement en faisant des observations en nombre pair, alternativement directes et inverses, comme nous l'avons expliqué précédemment.

Comparaison des méthodes de la répétition et de la réitération. — Pour pouvoir juger de l'efficacité de l'une et de l'autre de ces deux méthodes, il convient d'insister encore sur la nature des différentes erreurs que l'on cherche à combattre. Ces erreurs peuvent se partager en deux classes: les erreurs systématiques ou constantes et les erreurs accidentelles. Les premières sont les plus dangereuses, en ce qu'elles se produisent souvent dans le même sens, quand les observations successives sont faites dans des conditions identiques, ou bien encore suivant une loi difficile à découvrir. Telles sont: l'erreur

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'excentricité provenant de ce que l'axe géométrique de rotation ne passe pas rigoureusement par le centre de division. On l'élimine heureusement comme il est facile de s'en rendre compte, par l'emploi de verniers diamétralement opposés ou équidistants;

Les erreurs résultant du frottement, de l'élasticité, de l'effet de la pesanteur, enfin une partie des erreurs de la division.

Ces différentes erreurs, quoique généralement faibles, ne sont nullement négligeables dans les observations où l'on vise à une grande précision et paraissent plus faciles à éviter quand on emploie la méthode de la réitération que quand on suit celle de la répétition. Cela tient, d'abord, comme nous l'avons déjà remarqué, à une plus grande simplicité dans la construction et la manœuvre des instruments réitérateurs, puis au contrôle continuel que l'observateur exerce sur la marche des opérations enfin à la méthode elle-même par laquelle on évite la superposition de la continuité et qui a la propriété d'éliminer rapidement par compensation les erreurs systématiques de la division, c'est-à-dire celles qui affectent plus ou moins régulièrement cette division sur les différentes parties de la circonférence du limbe.

Les erreurs accidentelles sont celles qui se produisent indifféremment tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre, de telle sorte que la valeur numérique de ces erreurs est tantôt positive et tantôt négative. On les atténue en prenant la moyenne de plusieurs observations.

Dans cette classe sont comprises les trois principales erreurs qui affectent inévitablement toute mesure d'angle : l'erreur de pointé, l'erreur de lecture et une partie de l'erreur de division.

La précision du pointé dépend de la puissance optique de la lunette, de la nature de l'objet visé, des circonstances atmosphériques et de l'habileté de l'observateur.

L'erreur de lecture varie naturellement avec la grandeur du cercle et dépend de l'étendue du vernier qui en limitée elle même par la grandeur du cercle et par la grosseur des traits. L'habileté de l'observateur se trouve également ici en jeu. Quand au lieu de verniers, on peut employer des microscopes armés de vis micrométriques, la lecture est plus facile et plus exacte à la fois.

Enfin l'erreur accidentelle de division est très faible, depuis que les cercles sont divisés à l'aide de machines délicates. Toutefois les machines elles mêmes ne sauraient être parfaites et quand on étudie soit leur propre construction soit leur manière de fonctionner on est conduit à penser qu'elles donnent naissance à ces erreurs systématiques dont nous venons de parler plus haut et que la méthode de la réitération a la propriété d'éliminer rapidement. (1)

---

(1) L'emploi de plusieurs verniers équidistants atténue aussi les erreurs systématiques de la division. La démonstration de cette propriété se déduit d'une formule empirique au moyen de laquelle on peut représenter, en général, les phénomènes périodiques et par conséquent la partie périodique des erreurs de division. Elle avait été introduite dans les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Dans la méthode de la répétition, les erreurs de division et de lecture qui affectent une seule mesure sont divisées par le nombre des observations, puisqu'une simple mesure d'angle se compose toujours de deux lectures et que lorsqu'on répète un angle, on ne fait aussi que deux lectures, l'une au commencement et l'autre à la fin de l'opération. Il n'en est pas de même de l'erreur de pointé que l'on commet chaque fois que la lunette a été déplacée. En se fondant sur la théorie des probabilités, on peut admettre que celle-ci est divisée par la racine carrée du nombre des observations.

Dans la méthode de la réitération où l'on fait la lecture du vernier à chaque pointé, l'erreur accidentelle de division, l'erreur de lecture et l'erreur de pointé sont divisées toutes les trois par la racine carrée du nombre des observations seulement. Il semblerait, d'après cela, que pour atteindre le même degré d'exactitude avec cette seconde méthode, il faut faire un plus grand nombre d'observations que lorsqu'on emploie la méthode de la répétition. Mais il faut remarquer d'abord que la partie systématique de l'erreur de division est éliminée à part, après un petit nombre de réitérations et comme, à supposer même que les autres erreurs aient le même signe, leur somme ne s'élève qu'à un petit nombre de secondes, on conçoit qu'il suffit aussi d'un nombre assez restreint de réitérations pour réduire l'erreur à une seconde ou même à quelques dixièmes de seconde. Or, jusqu'à présent on n'est pas parvenu à atteindre une plus grande précision d'une manière certaine.

On ne doit pas perdre de vue que par la méthode de la réitération, on évite plus facilement plusieurs erreurs constantes qui rendent la méthode de la répétition moins sûre et moins précise qu'on ne l'a cru pendant longtemps, principalement lorsqu'il s'agit de la mesure des distances zénithales.

Telles sont les idées généralement admises actuellement par les observateurs qui entreprennent de grandes opérations géodésiques. Cela ne veut pas dire que toutes les anciennes observations faites en suivant la méthode de la répétition soient inférieures à celles qui ont été exécutées par la nouvelle méthode, mais il est certain que les perfectionnements apportés à la construction des instruments aidant, les opérations ont acquis plus de rapidité et de précision à la fois.

Degré de précision des observations. — L'évaluation des erreurs probables que l'on commet dans une seule observation ne peut pas être indiquée avec détail dans ce cours.

L'erreur de pointé a été estimée au moyen de pointés alternatifs et réciproques d'une lunette de théodolite et d'une lunette plus forte dirigées l'une sur l'autre, le pointé de la seconde lunette beaucoup plus exact que celui de la première se faisant au moyen

---

programme de l'École par M. Faye, mais le nombre restreint de leçons consacrées à l'étude des instruments en a nécessité la suppression. C'est également M. Faye qui a commencé à enseigner la méthode de la réitération, peu connue en France auparavant comme méthode géodésique.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'une vis micrométrique donnait une mesure de la précision de ce pointé. On a été conduit à porter cette erreur à 1" environ pour une lunette dont le grossissement est compris entre 30 et 40 fois, l'objet visé étant d'ailleurs supposé très net.

L'erreur de lecture peut être estimée à la moitié de l'approximation immédiate que donne chaque vernier; mais comme il y a toujours au moins deux verniers et quelquefois quatre, l'erreur à craindre sur la moyenne de lectures est encore moindre. Par exemple, sur un cercle dont les verniers donnent 10" à la lecture et 5" à l'estime, l'erreur sur la moyenne de lectures de 2 verniers n'est plus que de $\frac{5}{\sqrt{2}} = 3",5$ et l'erreur sur la moyenne de lectures de 4 verniers de $\frac{5}{2} = 2",5$.

Enfin, on peut étudier les divisions d'un cercle, mais cette étude est une opération délicate que nous n'entreprendrons pas de décrire ici. Nous nous bornerons à dire que dans les bons instruments, l'erreur de division est à peu près du même ordre que l'erreur de lecture dont il est d'ailleurs assez difficile de la séparer. Cependant, lorsque les verniers peuvent être remplacés par des microscopes, la précision de la lecture augmentant, les erreurs de la division se dégagent plus manifestement et l'on peut parvenir aussi plus aisément à découvrir la loi empirique suivant laquelle elles croissent, décroissent ou changent de signe.

Des instruments à réflexion. (1)

(Voy. la planche 5 du Portefeuille).

Les instruments à réflexion destinés principalement aux marins et aux voyageurs offrent sur ceux que nous avons décrits précédemment cet avantage précieux de pouvoir être tenus à la main et employés par un observateur en mouvement. On s'en sert le plus ordinairement pour mesurer la hauteur du Soleil, soit en mer, soit à terre, et pour prendre la distance de la Lune au Soleil ou à un autre astre. On peut aussi les employer à mesurer la distance angulaire d'un astre et d'un objet terrestre ou celle de deux objets terrestres. Dans tous les cas, les mesures s'effectuent dans le plan des objets considérés.

---

(1) Le principe de ces instruments a été indiqué dès 1664 par le Docteur Hooke, Newton s'en est occupé ensuite et a proposé en 1669 des modifications à l'invention de Hooke; mais ce n'est qu'en 1731 que Hadley ayant fait de son côté la même découverte la publia et fit construire l'instrument qui a longtemps porté son nom; l'octant de Hadley. En 1767, Mayer substitua un cercle entier à l'arc de 45° ou de 60° employé jusque là, afin de pouvoir appliquer à l'instrument le principe de la répétition. En 1775, Borda modifia de la manière la plus heureuse le cercle à réflexion de Mayer qui avait conservé

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le principe de cet instrument est le suivant :

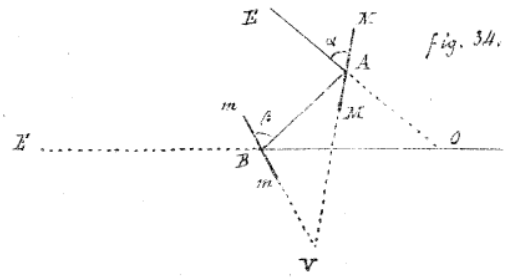


fig. 34.

Un rayon lumineux EA (*fig. 34.*) situé dans un plan perpendiculaire à ceux de deux miroirs MM et mm et réfléchi successivement à la surface de chacun d'eux en dévie, après la seconde réflexion, d'une quantité telle que sa dernière direction BO fait avec la première direction incidente EA, un angle EOB double de l'angle V des deux miroirs.

On a en effet, immédiatement par les deux triangles ABV et ABO, et en vertu de la loi de la réflexion :

$$V = \beta - \alpha$$

et

$$O = 2\beta - 2\alpha$$

d'où

$$O = 2V$$

Le plus simple des instruments à réflexion porte le nom d'octant ou de sextant, selon que l'arc divisé qui lui est adapté est de 45° ou de 60°. La construction est d'ailleurs la même dans les deux cas.

Description du Sextant. — Cet instrument se compose essentiellement d'un limbe divisé d'un peu plus de 60° d'amplitude, dont les extrémités sont réunies au centre par deux branches ; d'une alidade mobile autour du centre ; d'un grand miroir ou premier réflecteur, porté par l'alidade qui l'entraîne dans tous ses mouvements ; d'un petit miroir ou second réflecteur fixé sur l'une des branches de l'arc et d'une lunette disposée sur la branche opposée. Des croisillons placés entre le limbe et les branches donnent à ce système une solidité convenable et fournissent des points d'appui à la poignée qui sert à saisir l'instrument.

Les plans des deux miroirs sont perpendiculaires au plan du limbe et celui du grand miroir passe par l'axe de rotation de l'alidade : la moitié inférieure du petit miroir est seule étamée et la moitié supérieure est transparente ; enfin l'axe optique de la lunette est dirigé sur le petit miroir sous une incidence assez faible, égale à celle de la ligne qui joint les centres des deux miroirs.

En regardant dans la lunette, on peut donc voir à la fois un objet situé

---

quelques uns des défauts du sextant. Plus tard le savant marin espagnol Mendoza y a encore ajouté un perfectionnement qui facilite beaucoup les observations. Enfin plusieurs artistes anglais et allemands ont construit des cercles à réflexion qui ne sont pas répétiteurs mais qui jouissent de propriétés également précieuses et dont l'usage est aussi facile.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans la direction même de cette lunette, à travers la partie non étamée du petit miroir, et un autre objet situé dans une direction différente, dont l'image est transmise par deux réflexions successives, l'une à la surface du grand miroir et l'autre à la surface de la partie étamée du petit miroir.

Usage du sextant. — Pour mesurer l'angle compris entre deux objets éloignés, on commence par faire coïncider sensiblement le plan du sextant avec celui des objets, puis la lunette étant dirigée sur l'un d'eux, on fait tourner l'alidade et par conséquent le grand miroir jusqu'à ce que l'image réfléchie du second objet apparaisse dans le champ de la lunette. On serre alors la vis de pression de l'alidade, et avec la vis de rappel on achève d'amener les images des deux objets à la superposition. L'angle que forment alors les deux miroirs est que l'on peut aisément mesurer sur le limbe est égal à la moitié de l'angle cherché. On évite ordinairement la multiplication par 2 en doublant la valeur des arcs sur la graduation même de l'instrument.

Point de parallélisme. — Pour que la lecture faite au point de la division auquel correspond le zéro du vernier de l'alidade donne immédiatement la mesure de l'angle observé, il faut évidemment qu'en ramenant ce zéro sur celui du limbe, les deux miroirs soient parallèles; sinon il est nécessaire de connaître d'abord le point de parallélisme, c'est-à-dire le point du limbe auquel correspond le zéro du vernier quand les miroirs sont parallèles. La distance de ce point au zéro du limbe est ce qu'on appelle la collimation. Comme ce point peut tomber d'un côté ou de l'autre du zéro, la graduation, croissant de droite à gauche sur le limbe, les artistes ont soin de tracer quelques divisions à droite du zéro. Suivant que le point de parallélisme tombe à droite ou à gauche, les lectures faites sur le limbe doivent être augmentées ou diminuées de la collimation.

Point de coïncidence. — Lorsque l'objet visé directement est très rapproché, ce n'est plus à partir du zéro ou du point de parallélisme des miroirs qu'il faut compter les angles; considérons, en effet, les deux points A et B (fig. 35) et joignons ces points au centre C du grand miroir qui est en même temps le centre des divisions. L'angle qu'il s'agit de mesurer est BCA. Or, en partant du point de parallélisme, l'angle que l'on mesurerait serait égal à BCA' qui diffère de BCA de l'angle A'CA = CAP, lequel ne peut être considéré comme négligeable que si la distance CP du centre C à l'axe

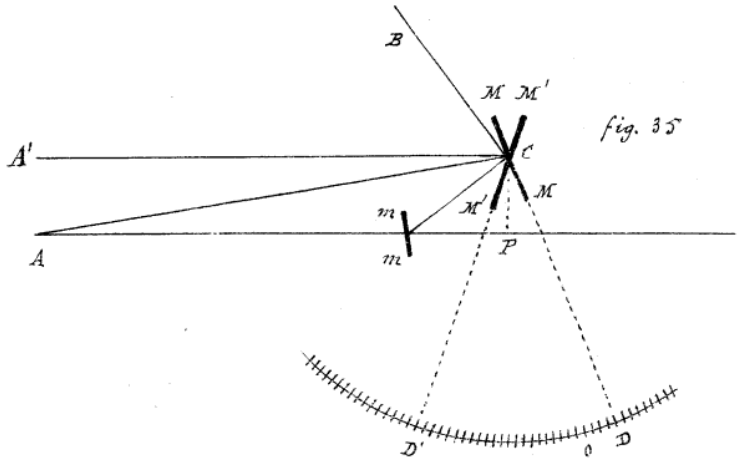


fig. 35

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

optique de la lunette en elle même négligeable relativement à la distance CA de l'objet A. C'est d'ailleurs, ce que l'on peut admettre, en général, dès que la distance CA dépasse 2 Kilomètres. Dans le cas contraire, on commence par superposer l'image directe de l'objet A et l'image réfléchie de ce même objet; on fait la lecture du vernier en D point de coïncidence qui tombe ordinairement au delà du zéro, puis on détache l'alidade et on amène l'image réfléchie du second objet B à son tour en coïncidence avec l'image directe du premier, en faisant tourner le miroir MM d'un angle DCD' qui est égal à la moitié de l'angle ACB. La nouvelle lecture ajoutée à la première donne la mesure de l'angle cherché.

Toutes les fois que le zéro du vernier tombe du côté des divisions auxiliaires qu'il s'agisse de trouver le point de parallelisme ou un point de coïncidence, il faut avoir soin en lisant le vernier, de remarquer que l'évaluation de la fraction de division doit se faire en rétrogradant.

Réticule. — Les mouvements involontaires de l'observateur ne lui permettant pas d'amener les images en coïncidence exactement au centre du champ de la lunette, au lieu d'une simple croisée de fils, le réticule est composé de quatre fils formant un carré à l'intérieur duquel on s'efforce de maintenir les images.

Rectifications de l'instrument. Pour que les mesures faites avec le sextant soient exactes, il faut: 1° que les plans des deux miroirs soient réellement perpendiculaires à celui du limbe, et 2° que l'axe optique de la lunette soit parallèle à ce plan.

1. On vérifie d'abord la perpendicularité du grand miroir, en plaçant l'œil presque dans le prolongement de son plan, de manière à voir à la fois une partie de l'arc divisé directement et son image réfléchie par le miroir. Si l'arc et son image paraissent être exactement dans le prolongement l'un de l'autre comme s'ils appartenaient à une même circonférence, le grand miroir est perpendiculaire au plan du limbe; mais si l'on remarque une brisure, selon qu'elle est rentrante ou saillante, le miroir est incliné en avant ou en arrière; quelquefois, la monture du miroir porte des vis de correction qui permettent d'en rectifier la position. Quand ces vis n'existent pas, l'instrument doit être rendu au constructeur qui peut seul se charger, dans ce cas, de la rectification.

2. On s'assure ensuite que le petit miroir est perpendiculaire au plan du limbe, en visant directement un objet, puis en faisant mouvoir lentement l'alidade amenée près du zéro du limbe jusqu'à ce que l'image réfléchie du même objet vienne passer sur l'image directe. Lorsque les deux images se superposent exactement, le petit miroir est perpendiculaire au plan du limbe; dans le cas contraire, on rectifie sa position au moyen de vis de correction dont on reconnaît facilement la disposition et l'usage sur chaque instrument.

3. Pour reconnaître si l'axe optique de la lunette est parallèle au plan du limbe, on pose le sextant sur une table et après avoir rendu deux des fils de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

lunette horizontaux par une rotation convenable du porte-réticule, on dirige la lunette sur un mur situé à 15 ou 20 mètres de l'instrument. On place alors aux deux extrémités de l'arc divisé de petites pièces métalliques appelées viseurs dont la hauteur est sensiblement égale à celle de l'axe optique au dessus du plan du limbe (voy. planche 5, les accessoires du cercle à réflexion). En projetant à vue les arêtes supérieures des deux viseurs l'une sur l'autre et sur le mur, on peut faire tracer sur celui-ci une ligne horizontale qui, regardée à travers la lunette, doit former son image à égale distance des deux fils horizontaux. Quand cela n'a pas lieu, on voit immédiatement si l'axe optique penche en avant ou en arrière et on rectifie sa position au moyen de vis de correction qui permettent d'élever ou d'abaisser légèrement la partie antérieure de la lunette.

La vérification du parallélisme de l'axe optique peut même se faire sans viseurs, en se servant du plan du limbe lui même pour tracer la ligne horizontale sur le mur et en tenant compte au besoin de la hauteur de la lunette au dessus du plan.

4. La lunette peut encore glisser dans une coulisse et s'éloigner ou se rapprocher du plan du limbe tout en lui restant parallèle. Ce mouvement permet de régler les intensités relatives des deux images.

Enfin, lorsque l'un des objets est trop lumineux on éteint une certaine quantité de ses rayons soit au moyen d'un écran qui recouvre en partie le grand miroir, soit en interposant des verres colorés sur le trajet de ces rayons, soit encore en en plaçant un devant l'oculaire. Ce dernier moyen est le meilleur, mais il s'applique seulement au cas où l'on observe le soleil directement et par réflexion à la fois.

Erreurs instrumentales et d'observation. 1. Lorsque les rectifications indiquées ci-dessus ne sont pas faites avec le plus grand soin, il en résulte que le plan de l'observation est plus ou moins incliné sur celui du limbe. D'un autre côté, la difficulté d'amener les images au contact ou en coïncidence sur l'axe optique ou au moins au milieu de l'intervalle des deux fils parallèles au plan du limbe fait qu'on se contente des observations faites entre ces deux fils. On commet ainsi une erreur de déviation dont on peut, à la rigueur, tenir compte, en estimant la distance du point où le contact a été observé au fil le plus voisin, celle des deux fils dont la valeur angulaire peut être déterminée facilement, étant prise pour unité. La réduction correspondante est donnée par une table calculée à l'avance d'après une formule très simple et souvent employée.

2. Les miroirs et les verres colorés que l'on interpose sur le trajet des rayons lumineux doivent être plans et à faces parallèles, sinon les images sont déformées et les réfractions ne sont plus égales à l'entrée et à la sortie des verres. Le premier défaut n'est pas possible dans les instruments sortis des mains d'un bon artiste. Le défaut de parallélisme des faces est, au contraire, souvent assez

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

marqué et presque inévitable. Heureusement les rayons lumineux tombant sous d'assez faible incidence, sans subir sur les verres colorés que sur le petit miroir, les déviations qui en résultent sont elles-mêmes peu sensibles. Mais on verrait facilement au moyen d'une figure que celle que le défaut de parallélisme des faces du grand miroir peut produire ne doit jamais être négligé. La correction à faire subir à chaque angle mesuré, est une fonction de cet angle et de celui que forment les deux faces du miroir. Quand ce dernier est connu, on peut donc la calculer au moyen d'une formule, mais il est plus simple et tout aussi exact de la conclure d'un certain nombre d'observations faites au moyen de l'instrument.

Pour vérifier d'abord le parallélisme des faces du miroir, on observe un angle de 120° environ entre deux objets éloignés et bien distincts, une première fois en laissant le miroir dans la position que lui avait donnée l'artiste, puis une seconde fois, après avoir renversé ce miroir dans sa monture. Si les angles observés dans ces deux positions successives sont identiquement égaux, on en conclut que les faces opposées sont parallèles; dans le cas contraire, leur demi-différence est la correction qu'il faudrait faire subir à l'angle mesuré dans l'une ou dans l'autre position du miroir, en ayant seulement égard au signe qu'il convient de lui donner. Lorsque cette demi-différence est une quantité notable, en opérant pour des angles de 10°, 20°, 30°, &c. comme on a d'abord opéré pour l'angle de 120°, on déterminera les corrections correspondantes dont on formera une table que l'on pourra étendre, si l'on veut, en procédant par interpolation.

3. L'axe de rotation de l'alidade passe rarement d'une manière rigoureuse par le centre des divisions du limbe. Or, pour peu que sa distance à ce point soit appréciable, toutes les opérations sont affectées d'une erreur d'excentricité.

La correction qu'il faut appliquer à la mesure de chaque angle peut encore se déduire d'une formule que l'on réduit en table et dont les constantes se déterminent au moyen des observations de deux angles déjà connus par des mesures antérieures faites avec un instrument exempt de l'erreur d'excentricité, comme le théodolite.

Enfin on a encore à se préoccuper, comme dans tous les instruments qui servent à la mesure des angles, de l'erreur de division, de l'erreur de lecture et de l'erreur de pointé.

Lorsque le sextant a été construit par un artiste habile, les deux premières erreurs sont du même ordre que dans les théodolites dont les cercles ont à peu près le même diamètre et il ne semble pas qu'il soit possible de les éviter.

Quant à l'erreur de pointé, elle est toujours beaucoup plus forte que dans les instruments fixes. Le sextant tenu à la main étant exposé à des oscillations continuelles, il faut que la lunette ait beaucoup de champ pour que les objets y restent visibles et par suite un faible grossissement. Les lunettes que l'on emploie ordinairement grossissent de 5 à 6 fois et ont un champ de plusieurs degrés. Quand

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on opère dans des conditions de stabilité défavorables, comme à bord d'un bâtiment fortement agité par la mer, on supprime même tout-à-fait la lunette et on se sert simplement d'un tube creux à l'intérieur duquel est disposé un réticule formé de fils métalliques assez gros. Quand au contraire, le temps est très calme ou si l'on est à terre, on peut adapter au sextant une lunette dont le grossissement soit de 12 à 15 fois.

D'après tout ce que nous venons de dire, on conçoit que, dans les observations faites à la mer, avec le sextant, on parvienne difficilement à obtenir les angles à moins de 1' près, même dans les circonstances les plus favorables.

Nous terminerons ce qui se rapporte au sextant en indiquant le moyen que l'on emploie ordinairement pour déterminer le point de parallélisme des deux miroirs ou la collimation du zéro du limbe.

Détermination de la collimation ou du point de parallélisme des deux miroirs. Cette opération s'effectue en amenant successivement au contact l'image directe du disque du soleil et l'image réfléchie de ce même disque de part et d'autre de la première. La demi somme des deux lectures du vernier faites l'une à droite et l'autre à gauche du zéro du limbe est la valeur du diamètre apparent de l'astre au moment de l'observation et leur demi différence est celle de la collimation. Il est d'ailleurs évident que si des deux lectures celle qui est faite à droite du zéro du limbe est la plus forte, la collimation est positive et que dans le cas contraire, elle est négative.

La même opération peut servir à faire disparaître la collimation, ce qui dispense l'observateur de s'occuper de cette correction. Quand on connaît, en effet, la valeur du diamètre apparent du soleil, il suffit de placer le zéro du vernier exactement sur le point de la graduation qui correspond à cette quantité, puis après avoir dirigé la lunette sur le soleil, au lieu d'amener les deux images de l'astre au contact, en se servant de la vis de rappel de l'alidade, on les y amène en faisant tourner légèrement le petit miroir autour d'un axe perpendiculaire au plan du limbe, au moyen de vis de correction destinées à cet usage.

Du cercle à réflexion. La plupart des erreurs que l'on est exposé à commettre en employant le sextant, peuvent être éliminées ou du moins considérablement atténuées quand on remplace l'arc divisé par une circonférence entière. L'instrument prend alors le nom de cercle à réflexion.

Tobie Mayer, en imaginant cette nouvelle disposition, y avait surtout vu l'avantage de pouvoir lui appliquer le principe de la répétition et de combattre ainsi les erreurs de division beaucoup plus à craindre de son temps qu'aujourd'hui.

Borda ne perfectionna pas seulement la construction de Mayer; il créa une méthode d'observation qui éliminait du même coup plusieurs erreurs dont il n'était plus nécessaire dès lors de s'occuper. Bien que notre intention ne soit pas de traiter ce sujet avec tous les développements qu'il comporte, nous croyons cependant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

devoir montrer que la méthode si ingénieuse de Borda est encore une application du principe général des observations symétriques.

Les organes et les moyens de rectification sont analogues à ceux que nous avons décrits en parlant du Sextant ; seulement la lunette et le petit miroir sont disposés sur une alidade mobile comme celle du grand miroir. La figure de la planche 5 faciliteront la comparaison de deux instruments.

Pour répéter les angles au moyen du cercle à réflexion, on peut employer deux méthodes distinctes ; la première par laquelle on mesure les angles simples, doubles, triples, &c. est celle de Tobie Mayer ; elle nécessite l'observation du parallélisme des miroirs au commencement de chaque répétition, et, par conséquent, deux observations pour un seul résultat, la seconde méthode au moyen de laquelle on obtient les angles doubles, quadruples, sextuples, &c. est celle de Borda ; elle peut s'appliquer elle-même de deux manières, soit en retournant alternativement le limbe de 180° autour de l'axe optique de la lunette qui pendant toute la durée des observations reste dirigée sur le même objet, soit en laissant le plan du limbe tourné du même côté et en changeant la lunette d'objet après chaque coïncidence. Pour rendre possible ces deux genres d'opération, Borda a eu simplement à retirer un peu la lunette et à éloigner le petit miroir qui, dans le cercle à réflexion de Mayer, se trouvait placé tout près de celle-ci et du grand miroir. En jetant les yeux sur les deux figures suivantes qui représentent le cercle de Mayer (fig. 36.) et le cercle de Borda (fig. 37.), on verra facilement que dans le premier, l'extrémité de la

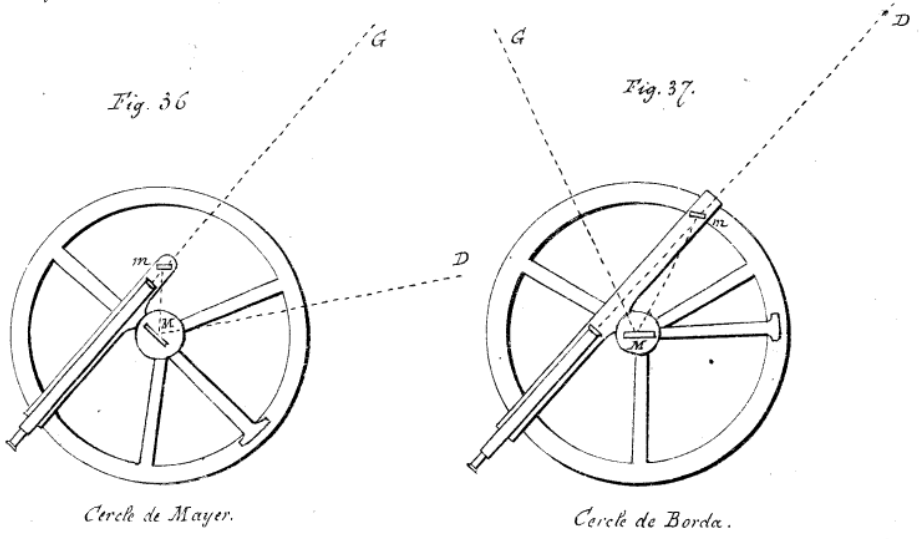


Fig. 36

Cercle de Mayer.

Fig. 37.

Cercle de Borda.

lunette et le petit miroir interceptent les rayons lumineux qui viendraient d'objets situés à gauche ou au dessus de celui sur lequel est dirigée la lunette, tandis que dans le second ces inconvénients n'existe plus.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'observation que l'on peut faire avec le cercle de Mayer a été désignée sous le nom d'observation à droite. Avec le cercle de Borda, on peut en outre faire l'observation à gauche qui lui est symétrique.

C'est en les combinant alternativement, comme nous l'avons dit plus haut, soit par l'inversion du cercle, soit en changeant la lunette d'objet, ou en faisant ce qu'il appelle des observations croisées, que le célèbre ingénieur est parvenu à éliminer en totalité ou en grande partie les erreurs que l'on commet en faisant usage du sextant et dont on ne prend pas toujours la peine de corriger les observations.

C'est ainsi que les erreurs provenant du défaut de parallélisme des verres colorés et du petit miroir étant de signes contraires dans l'observation à droite et dans l'observation à gauche, disparaissent dans la moyenne; il en est à peu près de même pour celle qui est produite par l'imperfection du grand miroir. La répétition réduit les erreurs de division et de lecture et même celle du pointé, quoique dans une plus faible proportion. Enfin l'erreur de collimation n'est plus à craindre. Les boîtes de cercles à réflexion renferment des verres colorés de différentes dimensions et de différentes nuances qui se placent tantôt entre les deux miroirs, tantôt devant le grand miroir (Voy. pl. 5); la préférence qu'on doit accorder aux uns ou aux autres dépend des circonstances dans lesquelles on opère. On ne peut mieux faire que de consulter à ce sujet l'ouvrage de Borda lui-même, intitulé: Description et usage du cercle de réflexion.

Quand on veut faire usage pour la première fois soit du sextant soit du cercle à réflexion, on éprouve une grande difficulté à maintenir l'instrument dans le plan des objets et à amener les deux images à la fois dans le champs de la lunette. Dans la pratique, cette difficulté n'existe pas en général. On connaît presque toujours assez approximativement l'angle qu'il s'agit de mesurer. On peut donc placer à l'avance l'alidade en un point de la division tel qu'en dirigeant ensuite la lunette sur l'un des objets et en donnant à l'instrument un mouvement lent d'oscillation autour de l'axe optique, l'image du second objet apparaisse aussi dans le champs de cette lunette. Rien n'est plus facile alors que de l'y maintenir et d'opérer la coïncidence ou d'observer le contact, en agissant sur la vis de rappel.

Lorsqu'on emploie le cercle, pour répéter le même angle plusieurs fois, il est nécessaire de faire tourner alternativement l'alidade du grand miroir et celle de la lunette et du petit miroir, d'une même quantité qui correspond à l'amplitude de l'angle cherché. C'est pour faciliter cette manœuvre que Mendoza a fait ajouter un arc de cercle concentrique avec le limbe dont les extrémités s'appuient sur l'alidade de la lunette et qui porte deux petits curseurs mobiles le long d'une graduation. La position de ces curseurs se trouve déterminée par la valeur approximative de l'angle cherché et ils servent ensuite de pointe d'arrêt à l'alidade du grand miroir, soit que cette alidade se meuve dans un sens, soit qu'étant fixée sur le limbe, on fasse tourner l'autre alidade qui entraîne l'arc dans son mouvement en sens opposé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les observations faites en mer avec le cercle à réflexion sont susceptibles d'une plus grande exactitude que celles que l'on peut faire à l'aide d'un simple sextant, et lorsqu'il s'agit, par exemple, de déterminer la longitude par l'observation des distances de la Lune au Soleil ou à une étoile (voy. la 3e Partie du Cours), le résultat que l'on veut atteindre vaut bien la peine qu'on s'emploie un instrument plus précis. Il n'en est pas de même quand on a seulement à observer la hauteur du Soleil pour déterminer soit l'heure, soit la latitude et dans ces deux cas, le sextant suffit. Mais quand on est à terre et que l'on se propose de trouver aussi exactement que possible la position géographique d'une station et de dresser la carte d'une contrée peu connue, il est bien préférable d'employer le cercle à réflexion.

L'observation de la hauteur du Soleil se fait à terre sur un horizon artificiel en émail noir calé au moyen d'un niveau à bulle d'air, ou sur un horizon de mercure, ou encore, lorsque l'air est agité, sur un horizon d'huile, d'encre épaisse ou de goudron. Il faut avoir soin, quand on amène le bord des images au contact, de noter celle des deux images qui est au-dessus ou au-dessous de l'autre pour faire ensuite la correction du diamètre apparent : On peut d'ailleurs éviter cette correction en faisant un certain nombre d'observations avec l'image directe en dessus et un même nombre avec cette image en dessous de l'image réfléchie. On estime qu'avec un cercle à réflexion, la hauteur du Soleil peut être obtenue à quelques secondes près. On augmenterait encore le degré de précision de ce genre d'observation en installant le cercle sur un pied [1] et en employant une lunette dont le grossissement serait de 15 à 20 fois.

L'observation de la distance de la Lune au Soleil ou à un autre astre se fait en amenant les images au contact et doit être corrigée du demi-diamètre ou des demi-diamètres apparents. La distance de la Lune au Soleil est plus facile à observer que celle de la lune aux planètes ou aux étoiles ; aussi l'emploie-t-on de préférence, autant que possible, surtout en mer.

La hauteur du Soleil s'observe en mer en amenant le bord inférieur de l'astre en contact avec la ligne de l'horizon.

Celle de la Lune s'observe d'une manière analogue en amenant le bord éclairé de cet astre au contact avec l'horizon. Dans tous les cas, il y a lieu de faire les corrections de réfraction, de parallaxe et le plus souvent celle du demi-diamètre, en mer on a en outre à faire celle de la dépression de l'horizon. Les formules de ces corrections seront toutes données plus loin.

L'observation de la hauteur du Soleil est susceptible d'une plus grande exactitude que celle de la Lune, des planètes et des étoiles. Pour ces dernières, comme il faut attendre le crépuscule et qu'alors la ligne de l'horizon devient beaucoup moins nette, on ne parvient guère à mesurer leur hauteur à moins de 3 ou 4' près.

---

[1] On en construit actuellement de très portatifs et très commodes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Appendice.

A l'Etranger, où la méthode de répétition n'a jamais été employée avec la même confiance qu'en France, la construction et l'usage du cercle à réflexion ont été assez notablement modifiés. Ainsi, l'artiste anglais Troughton, dans le but de détruire l'erreur d'excentricité qui subsiste dans le cercle de Borda, a disposé le grand miroir sur un axe qui en commun à une alidade à trois branches terminées par des verniers équidistants et placée de l'autre côté du cercle. En employant la méthode des observations croisées avec ces instruments, on élimine, d'ailleurs, le même erreur qu'avec le cercle de Borda et la lecture faite successivement sur les trois verniers atténuent l'erreur de la division.

Dans les cercles que construisent actuellement Pistor et Martins, de Berlin, l'erreur d'excentricité se trouve également détruite, au moyen de deux verniers opposés seulement. D'autres perfectionnements ont encore été introduits dans la construction des cercles à réflexion et notamment la substitution de prismes de verre à réflexion totale aux miroirs ordinaires.

Chapitre III.

Trigonométrie.

Tableau des principales formules dont on a à faire usage dans les calculs de transformation.

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1,$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a,$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b,$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1,$$

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2} a = 1 + \cos a,$$

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2} a = 1 - \cos a,$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q),$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\sin p - \sin q = 2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\sin\tfrac{1}{2}(p-q),$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q),$$

$$\cos q - \cos p = 2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\sin\tfrac{1}{2}(p-q),$$

$$\sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a = \sin(a+b)\sin(a-b),$$

$$\cos^2 a - \sin^2 b = \cos(a+b)\cos(a-b),$$

$$\operatorname{tang}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b}{1 \pm \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b},$$

$$\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b},$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \frac{1-\cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1+\cos a},$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b},$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin q - \sin q} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q)},$$

$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}\ ;\ \cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}\ ;\ \text{et si } \operatorname{tg} a = \frac{m}{n},$$

$$\sin a = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}, \qquad \cos a = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Nous ajouterons à ce tableau les formules et les données suivantes qu'il n'en est pas moins utile de pouvoir retrouver facilement:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots\ldots$$

$$x = \sin x + \frac{1}{2.3}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4.5}\sin^5 x \ldots\ldots$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \cos x - \frac{1}{2.3}\cos^3 x - \frac{1.3}{2.4.5}\cos^5 x$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\text{tang } x = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \ldots\ldots$$

$$x = \text{tang } x - \frac{1}{3}\text{tang}^3 x + \frac{1}{5}\text{tang}^5 x \ldots\ldots$$

$$\text{arc tang } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \&c. \ldots$$

$$\log(1 \pm x) = M\left(\pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots\right)$$

$$2\cos^2 x = \cos 2x + 1,$$

$$4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x,$$

$$8\cos^4 x = \cos 4x + 4\cos 2x + 3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2\sin^2 x = -\cos 2x + 1,$$

$$4\sin^3 x = -\sin 3x + 3\sin x,$$

$$8\sin^4 x = -\cos 4x - 4\cos 2x + x$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}\sin nx,$$

$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx - \sqrt{-1}\sin nx,$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$\pi = 3,\ 141592\,6536, \qquad \log \pi = 0,\ 4971\,498727,$

la base de logarithmes népériens

$e = 2,\ 718281828,$

$\log e = M = 0,\ 4342\,944819, \qquad \log M = \bar{1},\ 6377\,843113$ [1]

Division de la circonférence. — Nous employons ordinairement la division

---

[1] On recommande d'employer, dans tout le calcul, la caractéristique négative.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sexagésimale de la circonférence ; cependant comme on rencontre des instruments dont les cercles portent la division centésimale et qu'il existe des travaux importants dans lesquels cette dernière a été admise, il est nécessaire de savoir facilement passer de l'une à l'autre de ces divisions.

Dans la première, la circonférence contient 360 degrés ; 1° vaut 60′ ; 1′ vaut 60″.

Dans la seconde, elle contient 400 grades ; 1ᵍ vaut 100ᶜ ; 1ᶜ vaut 100ᶜᶜ.

Soit en général, D le nombre de degrés et G le nombre de grades contenus dans un même arc, on aura la proportion

$$\frac{D}{G} = \frac{9}{10} ;$$

d'où $$D = G - \frac{1}{10} G \qquad \text{et} \qquad G = D + \frac{1}{9} D ;$$

on déduit de là les règles suivantes pour la conversion des grades et fractions de grade en degrés, minutes et secondes ou réciproquement.

Pour convertir en degrés, minutes et secondes un arc exprimé en grades et fractions de grade, on retranche du nombre proposé son dixième, la partie entière du reste donne les degrés, on multiplie la partie décimale par 60 ; ce qui donne les minutes, et en multipliant par 60 la nouvelle partie décimale, on a les secondes et la fraction de seconde.

Réciproquement, pour convertir en grades un arc exprimé en degrés, minutes et secondes, on commence par transformer les secondes en fractions décimales de minute en les divisant par 60, puis on transforme de même les minutes en fractions décimales de degré, on ajoute au nombre ainsi obtenu son neuvième, et l'on a l'arc exprimé en grades.

Pour certaines comparaisons immédiates, il peut être utile de se rappeler que $1^{c} = 0'',54$ et que $1^{cc} = 0'',324$.

Subdivision de l'unité de temps. — Pour la mesure du temps, nous avons adopté également la division sexagésimale du jour (note de la p. 1) ; lorsqu'on rencontre des ouvrages dans lesquels la division décimale est employée, pour effectuer la transformation, il suffit de savoir que dans ce dernier système, le jour est divisé en 10 heures, l'heure en 100 minutes et la minute en 100 secondes.

Substitution des nombres dans les formules trigonométriques. Tandis que les angles ou les arcs qui leur servent de mesure sont exprimés en parties de la circonférence, les fonctions trigonométriques de ces axes sont naturellement exprimées en parties du rayon. Dans les formules qui renferment à la fois des arcs et des fonctions trigonométriques, il y a donc en réalité deux espèces d'unité, et dans les applications numériques

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

il est nécessaire, selon les circonstances, de tout ramener à l'une ou à l'autre de ces unités.

On part pour cela, du rapport de la circonférence au diamètre; ou, ce qui est la même chose, du rapport de la demi circonférence au rayon.

Dans le cercle dont le rayon est pris pour unité, la demi circonférence est égale à π, c'est-à-dire à 3, 1415926, et d'un autre côté, elle contient 648000" sexagésimales, la longueur de l'arc d'une seconde est donc égale à

$$\frac{3,1415926}{648000} = \frac{1}{206264,8},$$

et comme l'arc d'une seconde diffère extrêmement peu de son sinus, on a aussi, avec une exactitude toujours suffisante dans les applications numériques

$$\sin 1'' = \frac{1}{206264,8};$$

c'est ce rapport dont on se sert dans les transformations en supposant les degrés et les minutes contenus dans les angles réduits en secondes. On voit, en effet, facilement que si le calcul donne la valeur d'un arc en parties du rayon, pour l'exprimer en secondes, il suffira de diviser le premier nombre par $\sin 1''$ ou de le multiplier par 206264,8.

Réciproquement, si la valeur d'un arc est donnée en secondes, et que l'on ait besoin de l'exprimer en parties du rayon, il faudra multiplier le nombre donné par $\sin 1''$, ou le diviser par 206264,8.

$$\log 206264,8 = \log \frac{1}{\sin 1''} = 5,3144251; \quad \log \frac{1}{206264,8} = \log \sin 1'' = \bar{6},6855749$$ (1)

Trigonométrie rectiligne.

Si l'on désigne par A la longueur d'une ligne droite, par b celle de sa projec-

(1) Dans la plupart des calculs, on peut se contenter d'employer les logarithmes à cinq décimales; lorsqu'on s'est assuré que le degré d'exactitude que l'on obtient ainsi est celui auquel on peut prétendre, il faut éviter d'écrire les décimales suivantes qui ne servent alors qu'à augmenter inutilement la longueur des calculs et même les chances d'erreur. Les tables de Logarithmes à cinq décimales de Lalande, ou mieux celles de M. Houël (Paris, Mallet-Bachelier 1858) sont donc généralement suffisantes. Ces dernières sont à la fois très commodes et très complètes. On y trouve des tables auxiliaires au moyen desquelles on peut calculer complètement les logarithmes à 8 décimales, et au besoin à 20 décimales. Enfin elles renferment les logarithmes d'addition et de soustraction de Gauss, publiées, pour la première fois, dans un ouvrage français et dont l'usage permet, dans un grand nombre de cas, d'abréger considérablement le calcul.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

-tion. Sur une autre ligne droite située dans le même plan, et par C, l'angle compris entre ces droites, on a entre les quantités a, b et c la relation

$$b = a \cos C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

En se fondant sur cette relation et sur les théorèmes connus de la Géométrie, on trouve, en désignant par a, b, c, les trois côtés d'un triangle rectiligne, et par A, B, C, les angles qui leur sont respectivement opposés, les trois équations

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

au moyen desquelles étant donnés trois des éléments d'un triangle, dont un côté au moins, on peut trouver les trois autres.

Toutefois, dans les applications, on emploie d'autres formules qui s'adaptent plus simplement aux différents cas de la résolution des triangles.

Formules des triangles rectangles. — En supposant $A = 90°$, on a

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ b &= a \cos C = a \sin B \\ c &= b \operatorname{tg} C = b \cot g B \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Formules des triangles quelconques. — Les formules suivantes se déduisent facilement des relations fondamentales (2)

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

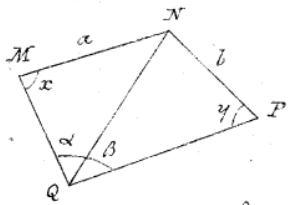
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \cot \tfrac{1}{2} C \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \\ \cos \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Dans les trois dernières de ces formules, on a fait

$$a + b + c = 2p.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Il est encore utile de connaître la formule suivante :

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x+y)\operatorname{tg}(45^\circ-\varphi),$$

dans laquelle $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}$, et qui répond à la question : trouver sur une carte la position d'un point Q d'où l'on a observé trois autres points déjà déterminés. **M, N, P** [1]

Trigonométrie sphérique.

a, b, c désignant les trois côtés d'un triangle sphérique tracé à la surface de la sphère dont le rayon est égal à l'unité [2], et A, B, C les angles respectivement opposés à ces côtés, on parvient facilement aux relations suivantes qui contiennent chacune les trois côtés et un angle.

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A \\ \cos b &= \cos a\cos c + \sin a\sin c\cos B \\ \cos c &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ces formules fondamentales correspondent à celles de la trigonométrie rectiligne dont on se sert pour les établir et auxquelles elles peuvent se réduire si l'on considère le triangle rectiligne comme appartenant à une sphère dont le rayon serait infiniment grand. L'ensemble des trois formules (1) suffit évidemment pour résoudre toutes les questions où trois des six éléments d'un triangle sphérique sont connus ; mais on en a déduit d'autres formules qui répondent plus directement à chacun des cas de la résolution des triangles sphériques et que nous allons rapporter ici.

Relation entre deux côtés et les angles opposés, ou analogie des sinus.

---

(1) Cette question se présente fréquemment dans les reconnaissances géodésiques, en topographie et surtout en hydrographie. On se contente ordinairement de la résoudre par une construction graphique ; elle présente un cas d'indétermination facile à discuter.

(2) Tant que l'on ne s'occupe que de l'amplitude des arcs ou des angles au centre dont ils sont la mesure, on peut admettre que tous les triangles sont tracés sur une sphère de rayon un et les formules établies dans cette hypothèse sont suffisantes ; s'il devient lorsqu'on aura besoin de considérer les longueurs effectives des arcs tracés sur une sphère de rayon R différent de l'unité, on les introduira simplement dans les mêmes formules en y substituant aux quantités a, b, c les rapports $\dfrac{\alpha}{R}, \dfrac{\beta}{R}, \dfrac{\gamma}{R}$ des longueurs de chacun des côtés au rayon.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Relation entre deux côtés et deux angles dont l'un compris entre les côtés, ou autrement en quatre éléments consécutifs.

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{cotg} a \sin b = \operatorname{cotg} A \sin C + \cos b \cos C \\
&\operatorname{cotg} a \sin c = \operatorname{cotg} A \sin B + \cos c \cos B \\
&\operatorname{cotg} b \sin a = \operatorname{cotg} B \sin C + \cos a \cos C \\
&\operatorname{cotg} b \sin c = \operatorname{cotg} B \sin A + \cos c \cos A \\
&\operatorname{cotg} c \sin a = \operatorname{cotg} C \sin B + \cos a \cos B \\
&\operatorname{cotg} c \sin b = \operatorname{cotg} C \sin A + \cos b \cos A
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Relation entre un côté et les trois angles.

$$\left.\begin{aligned}
&\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\
&\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \\
&\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

Formules des triangles sphériques rectangles. — Les formules qui répondent au triangle sphérique rectangle se déduisent des précédentes, en y faisant $A = 90°$, c'est à dire $\sin A = 1$ et $\cos A = 0$. On trouve ainsi :

$$\cos a = \cos b \cos c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sin b = \sin a \sin B \\
&\sin c = \sin a \sin C
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C \\
&\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B \\
&\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\cos B = \cos b \sin C \\
&\cos C = \cos c \sin B
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Toutes ces formules sont facilement calculables par logarithmes et couriennement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aux différents cas de triangles sphériques rectangles.

Formules de triangles sphériques quelconques. — Les relations (1), (2), (3) et (4) répondent, comme il est facile de s'en assurer, à toutes les combinaisons que l'on peut faire des six éléments d'un triangle considérés quatre à quatre, on tirerait immédiatement de l'une d'elles la valeur de chacun des éléments que l'on peut avoir à calculer; mais comme à l'exception de celle du groupe (2), ces relations contiennent deux termes dans leur second membre, ce qui en rend le calcul un peu plus pénible; on les transforme ordinairement, ou même on fait usage de formules plus commodes que l'on en parvient à en déduire.

Nous allons d'abord donner ces dernières, puis nous indiquerons la marche à suivre, en général, pour transformer les expressions binômes dont il s'agit en monômes.

On conserve l'analogie des quatre sinus

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

De la formule fondamentale on déduit les trois suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}} \\ \cos \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}} \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-a)}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (11)$$

dans lesquelles $a + b + c = 2s$.

Par la formule (4) ou par le triangle supplémentaire, on trouverait de même

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\sin B \sin C}} \\ \cos \tfrac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{\cos (S-B) \cos (S-C)}{\sin B \sin C}} \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\cos (S-B) \cos (S-C)}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (12)$$

formules dans lesquelles $A + B + C = 2S$.

Formules de Delambre et de Gauss. — En partant de la formule connue

$$\sin \tfrac{1}{2} (A+B) = \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B + \sin \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} A .$$

dans laquelle on remplace

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\sin \frac{1}{2} A$, $\cos \frac{1}{2} B$, &ª.

par leurs valeurs tirées des relations (11), on parvient, en réduisant aux formules suivantes, qui ont été remarquées presque en même temps, par Delambre et par Gauss,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2} C} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} \\
\frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2} C} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2} c} \\
\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2} C} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2} c} \\
\frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2} C} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2} c}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (13)$$

Analogies de Néper. — Enfin, en divisant deux de ces dernières relations, l'une par l'autre, on trouve les quatre analogies de Néper:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C \\
\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C \\
\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \\
\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (14)$$

d'où l'on peut encore tirer immédiatement la proportion

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}$$

On voit facilement quelle soit celle de ces différentes formules, on de leurs analogues obtenues par la permutation des lettres qui conviennent à chacun des cas de la résolution des triangles.

Expressions binômes. — Quand on a une expression binôme à calculer et que l'on n'a pas de tables de logarithmes d'addition et de soustraction, on peut transformer cette expression de plusieurs manières. La plus simple est de représenter chacun des deux termes par la tangente trigonométrique d'un angle auxiliaire.

Considérons l'expression générale $p = a \pm b$

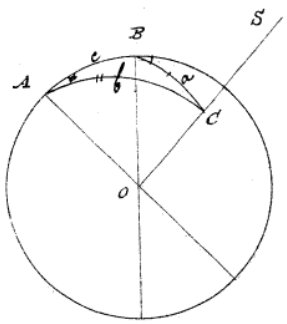
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en posant $a = tg\,\varphi$ et $b = tg\,\psi$,
ce qui est toujours possible, il vient :

$$p = tg\,\varphi \pm tg\,\psi = \frac{\sin(\varphi \pm \psi)}{\cos\varphi\,\cos\psi}.$$

Formules de transformation de coordonnées sphériques.

Pour déterminer la direction d'un rayon visuel OS dans l'espace, on la rapporte à un axe fixe OA passant par le lieu de l'observation O et à un plan fixe qui contient l'axe.



Du point O on imagine une sphère d'un rayon égal à l'unité, coupant l'axe en A, le rayon visuel OS en C et le plan fixe suivant un grand cercle OAB ; les coordonnées sphériques du point C qui déterminent la direction OS sont, par rapport à l'axe OA,

$$AOC = b \quad \text{et} \quad BAC = A ;$$

par rapport à un autre axe OB contenu dans le plan pris pour origine, les coordonnées du même point C seraient

$$BOC = a \quad \text{et} \quad ABC = B,$$

ou son supplément, si l'on veut que les angles dièdres croissent dans le même sens.

Pour passer du premier système au second, en supposant d'ailleurs que l'angle compris entre les deux axes soit connu, il est évident qu'il suffira de reprendre les formules de la trigonométrie sphérique. — On a coutume d'employer dans ce cas les trois suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A \quad \ldots\ldots (I) \\ \sin a\cos B &= \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A \quad \ldots\ldots (II) \\ \sin a\sin B &= \sin b\sin A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III) \end{aligned}\right\} (1)$$

La 1ère et la 3e de ces formules sont deux de celles que nous avons vues précédemment ; quant à la 2e, elle se déduit facilement de la relation entre quatre éléments consécutifs.

---

(1) On peut arriver très simplement à ces formules de transformation en prenant pour intermédiaires les coordonnées rectilignes du point C rapportées à deux systèmes d'axes rectangulaires. On prend à cet effet les lignes OA et OB alternativement pour axe des x et la perpendiculaire menée au plan AOB pour l'axe des z commun aux deux systèmes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On remarquera que les formules (I) et (II) suffisent pour calculer a et B ; mais la 3e sert de vérification. D'ailleurs en éliminant a par la division membre à membre des équations (II) et (III) on obtient B par sa tangente ; c'est-à-dire plus exactement que par son sinus ou son cosinus. Quant aux signes, il est facile de voir qu'il n'y a pas lieu de s'en préoccuper dans le cas de la transformation des coordonnées ; car les angles plans sont tous plus petits que 180°, et dès lors, leurs sinus sont positifs, ce qui détermine le signe de B, par exemple dans l'équation (III).

Si l'on voulait rendre les formules (I) et (II) plus facilement calculables par logarithmes, on pourrait suivre la méthode générale indiquée ci-dessus, mais on y arrive plus simplement encore en employant un seul angle auxiliaire.

Posons $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} b \cos A$; les formules (I) et (II) deviendront :

$$\cos a = \cos b (\cos c + \sin c \operatorname{tg}\varphi) ; \text{ d'où } \cos a = \frac{\cos b}{\cos\varphi} \cos(c-\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

$$\sin a \cos B = \cos b (\sin c - \cos c \operatorname{tg}\varphi) ; \text{ d'où } \sin a \cos B = \frac{\cos b}{\cos\varphi} \sin(c-\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots (V)$$

Ces deux formules sont sous une forme très commode pour le calcul, mais elles donnent les inconnues a et B par leurs cosinus. On obtiendra celles-ci par leurs tangentes, en combinant les formules (IV) et (V) entre elles et avec la formule (III).

En divisant en effet (III) par (V), il vient :

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b \cos\varphi \sin A}{\sin(c-\varphi)} \quad \text{et à cause de } \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} b \cos A,$$

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} A \frac{\sin\varphi}{\sin(c-\varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (VI)$$

et, en divisant (V) par (IV), on trouve immédiatement

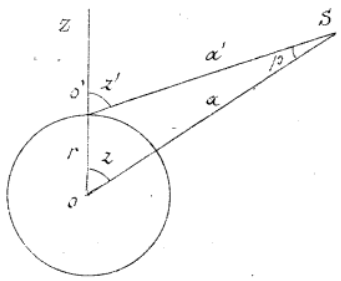
$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg}(c-\varphi)}{\cos B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (VII)$$

Développement en série des formules trigonométriques.

Le degré d'exactitude que l'on peut obtenir lorsqu'on passe des formules aux nombres dépendant du plus ou du moins de rapidité avec lequel varient certaines fonctions trigonométriques, et, par suite, leurs logarithmes, il est souvent préférable de substituer aux formules finies des séries très convergentes, dont il suffit de considérer les premiers termes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous citerons les deux exemples suivants dont nous aurons à faire usage par la suite.



Etant donnée les coordonnées d'un astre rapportées au centre de la terre, trouver les coordonnées de cet astre vu d'un point situé à la surface.

On suppose que l'axe des coordonnées n'a pas changé; la question se réduit à déterminer l'angle p qui porte le nom de parallaxe et qui est la différence entre l'angle connu z et l'angle cherché z', car la coordonnée dièdre ne change pas non plus. Ainsi l'on aura d'abord

$$z' = z + p$$

Supposons que l'on veuille calculer en même temps le rapport

$$\frac{a'}{a} = \rho,$$

le triangle rectiligne OSO' donnera, d'une part

$$\frac{\sin p}{\sin (p+z)} = \frac{r}{a} = m; \qquad \text{d'où} \quad \operatorname{tg} p = \frac{m \sin z}{1 - m \cos z} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

et de l'autre $$\rho = (1 + m^2 - 2m \cos z)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

En désignant par p' et ρ' les dérivées de p et de ρ considérées comme des fonctions de z, on aura pour l'équation (1)

$$p' = \frac{m \cos z - m^2}{m^2 - 2m \cos z + 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

et par l'équation (2) $$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{m \sin z}{m^2 - 2m \cos z + 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Multiplions les deux membres de cette dernière équation par $\sqrt{-1}$, et retranchons les respectivement des deux membres de l'équation (3), il viendra

$$p' - \frac{\rho'}{\rho}\sqrt{-1} = -m\,\frac{m - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)}{m^2 - 2m\cos z + 1} = -m\,\frac{1}{m - (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)},$$

et, en multipliant haut et bas par $-(\cos z - \sqrt{-1}\sin z)$

$$p' - \frac{\rho'}{\rho}\sqrt{-1} = \frac{m(\cos z - \sqrt{-1}\sin z)}{1 - m(\cos z - \sqrt{-1}\sin z)}$$

enfin, en effectuant la division

$$p' - \frac{\rho'}{\rho}\sqrt{-1} = m(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) + m^2(\cos 2z - \sqrt{-1}\sin 2z) + m^3(\cos 3z - \sqrt{-1}\sin 3z) + \ldots\ldots\ldots$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

équation qui peut se décomposer dans les deux suivantes:

$$\rho' = m \cos z + m^2 \cos 2z + m^3 \cos 3z + \text{------}$$

et

$$\frac{\rho'}{\rho} = m \sin z + m^2 \sin 2z + m^3 \sin 3z + \text{-------}$$

En revenant alors aux dérivées aux fonctions génératrices et remarquant que $l.\rho$ s'annule en même temps que m, il viendra

$$\rho = m \sin z + \frac{1}{2} m^2 \sin 2z + \frac{1}{3} m^3 \sin 3z + \text{--------} \quad (5)$$

et

$$l.\rho = -m \cos z - \frac{1}{2} m^2 \cos 2z - \frac{1}{3} m^3 \cos 3z + \text{----------}$$

ou, en désignant par M le module des logarithmes tabulaires

$$\log \rho = -M \left(m \cos z + \frac{1}{2} m^2 \cos z + \frac{1}{3} m^3 \cos 3z + \text{-----}\right) \text{-----} (6)$$

Le rapport $\frac{r}{a}$ étant toujours < 1 et généralement très petit, les Séries (5) et (6) sont très convergentes, et il suffit le plus ordinairement d'en calculer les deux ou trois premiers termes au plus.

Dans la formule (5) ρ est exprimé en parties du rayon; pour obtenir sa valeur en seconde, il faudra diviser tous les termes de la Série par $\sin 1''$, et comme on peut substituer $\sin 2''$ à $2 \sin 1''$ et $\sin 3''$ à $3 \sin 1''$, on aura définitivement

$$\rho = \frac{m}{\sin 1''} \sin z + \frac{m^2}{\sin 2''} \sin 2z + \frac{m^3}{\sin 3''} \sin 3z + \text{-------}$$

Cette formule est due à Delambre qui y est parvenu par une voie très différente.

S'il s'agissait du problème inverse de celui que nous venons de considérer, et qu'il fallut déterminer z connaissant z', le même triangle OSO' donnerait immédiatement la relation

$$\sin \rho = m \sin z',$$

et comme ρ est toujours très petit, on pourrait calculer sa valeur par la formule

$$\rho = \frac{m}{\sin 1''} \sin z'$$

Prenons pour second exemple la formule des triangles rectangles

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C,$$

dans laquelle on suppose connus l'angle C et l'un des côtés a ou b; si l'angle C est petit, au lieu de calculer le côté inconnu par la formule précédente, et pour obtenir plus d'exactitude, on développe la différence $a - b$, qui est également une quantité assez petite en une Série dont les termes sont ordonnés suivant les puissances paires et croissantes de $\operatorname{tg} \frac{1}{2} C$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Écrivons la formule donnée sous la forme

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{1}{\cos C};$$

on en tire

$$\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} = \frac{1 - \cos C}{1 + \cos C};$$

et par suite

$$\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)} = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} C.$$

Si l'on fait

$$a - b = -p,$$

on aura

$$a + b = 2a + p;$$

et l'on pourra écrire

$$\frac{\sin p}{\sin(2a+p)} = -\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} C;$$

d'où, en comparant à la formule développée plus haut :

$$a - b = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C}{\sin 1''} \sin 2a - \frac{\operatorname{tg}^4 \frac{1}{2} C}{\sin 2''} \sin 4a + \frac{\operatorname{tg}^6 \frac{1}{2} C}{\sin 3''} \sin 6a + \cdots\cdots$$

série d'autant plus convergente que l'angle C en plus petit. Cette formule a été établie directement par Lagrange.

Remarque. — Lorsqu'une formule que l'on a pu développer en série doit être appliquée un grand nombre de fois, comme cela arrive fréquemment tant en Astronomie qu'en Géodésie, il est avantageux de calculer à l'avance des tables dans lesquelles il suffit ensuite de prendre à vue ou par interpolation les valeurs de chaque terme, de sorte que les opérations à faire pour obtenir le résultat cherché se réduisent à de simples additions ou soustractions.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Deuxième partie.

Astronomie.

Chapitre I.

Du mouvement diurne.

La Terre, d'où nous observons les mouvements des corps célestes, est un globe sensiblement sphérique, animé d'un mouvement de rotation autour de l'un de ses diamètres et d'un mouvement de translation autour du Soleil.

Le premier de ces deux mouvements est uniforme et s'accomplit dans un jour, d'où vient le nom de mouvement diurne; le second s'effectue dans une année en suivant les lois de Képler. Nous nous occuperons dans ce chapitre des phénomènes qui se rapportent au mouvement diurne.

Sphère céleste. — Les distances qui nous séparent des étoiles sont si considérables que les dimensions du globe terrestre et celles de son orbite elle-même s'évanouissent devant elles. Il en résulte que quelles que soient notre position à la surface de la Terre et celle de la Terre dans son orbite, les distances angulaires relatives des étoiles ne changent pas. Ce fait se vérifie facilement au moyen des instruments décrits précédemment.

Le mouvement uniforme de la Terre s'effectue de l'Ouest à l'Est ou dans le sens direct, autour d'un axe que nous pouvons considérer en outre comme restant parallèle à lui-même dans le mouvement de translation, et se traduit pour nous en un mouvement de rotation également uniforme, dans le sens rétrograde ou de l'Est à l'Ouest, de toutes les étoiles qui semblent fixées à la surface d'une sphère dont nous occupons le centre. Dans l'exposé des phénomènes, nous ferons allusion tantôt au mouvement apparent et tantôt au mouvement réel.

La sphère des étoiles, à l'existence de laquelle croyaient les Anciens, n'est plus, pour les Astronomes modernes, qu'une pure fiction géométrique. La position relative des points en lesquels les astres se projettent sur cette sphère de rayon indéfini se détermine au moyen de différents systèmes de coordonnées comptées les unes sur de grands cercles, passant par un même diamètre, et les autres sur le grand cercle perpendiculaire à ce diamètre.

L'axe de rotation restant parallèle à lui-même et le déplacement de la Terre dans son orbite étant insensible, eu égard à la grande distance des étoiles, les deux points où

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la direction de l'axe prolongée va rencontrer la Sphère céleste paraissent immobiles ; ces deux points s'appellent les pôles de la Sphère céleste, et la droite qui les joint est souvent désignée sous le nom d'axe du monde.

Une autre direction constante en chaque point de la Surface de la Terre, mais variable d'un point à un autre, est celle de la verticale, donnée immédiatement par le fil à plomb.

Les deux points opposés où cette direction va rencontrer la Sphère céleste sont le zénith et le nadir.

Le premier de ces points est seul visible ; en général, les dimensions de la Terre et notre position à Sa Surface ne nous permettent de voir que la moitié de la Sphère céleste : le grand cercle de cette Sphère, qui la partage en deux hémisphères, l'un visible et l'autre invisible, s'appelle l'horizon du lieu de l'observatoire ; son plan est perpendiculaire à la verticale de ce lieu. (1)

D'après cela nous ne voyons aussi que l'un des pôles célestes ; la verticale du lieu et le pôle visible ou pôle élevé déterminent un plan fixe que l'on nomme le méridien du lieu. La perspective de ce plan sur la Sphère céleste coïncide successivement avec tous les méridiens célestes que l'on conçoit tracés sur la Sphère par les deux pôles et par chaque étoile.

On appelle équateur céleste le grand cercle de la Sphère, perpendiculaire à l'axe de rotation ; les autres cercles perpendiculaires à cet axe sont les parallèles célestes.

Selon la position de l'observateur à la Surface du globe, la distance du pôle au zénith ou l'angle de la verticale avec la ligne des pôles varie depuis 0° jusqu'à 90°, et les cercles décrits par chaque étoile peuvent être parallèles, obliques ou perpendiculaires au plan de l'horizon ; d'où les dénominations de Sphère parallèle, Sphère oblique, Sphère droite pour désigner les différents aspects que présente la Sphère céleste en différents lieux de la Terre.

Dans la Sphère parallèle les étoiles décrivent toutes des cercles parallèles à l'horizon ; celles d'un même hémisphère restent toujours au-dessus de l'horizon, et celles de l'autre hémisphère toujours au dessous.

Dans la Sphère droite, tous les parallèles divisent les astres sont coupés en deux parties égales par le plan de l'horizon qui contient alors l'axe du monde ; pour les lieux qui ont la Sphère droite, tous les astres restent donc Successivement au-dessus

---

(1) Lorsqu'on restitue à la Terre ses dimensions, il y a lieu de distinguer l'horizon sensible et l'horizon rationnel ; le premier est le plan perpendiculaire à la verticale menée par le point de la Surface occupé par l'observateur, et le second est le plan parallèle au premier mené par le centre. Les perspectives de ces deux plans sur la Sphère céleste se confondent dans un seul et même grand cercle qui est l'horizon céleste que nous venons de définir. Enfin, la ligne qui limite l'étendue de la Surface du globe terrestre que découvre un observateur dont l'œil est situé à une hauteur plus ou moins considérable au dessus de cette Surface s'appelle l'horizon visuel ou apparent.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de l'horizon pendant une moitié du jour et au dessous pendant l'autre moitié.

Dans la sphère oblique, les étoiles voisines du pôle élevé ou étoiles circompolaires décrivent leurs cercles diurnes sans descendre au dessous de l'horizon; celles qui sont plus rapprochées de l'équateur ont un lever et un coucher qui correspondent aux deux points d'intersection de leur parallèle diurne avec l'horizon; enfin, les étoiles voisines du pôle abaissé ne paraissent jamais au dessus de l'horizon.

Les deux parallèles qui servent de limites à la région des étoiles toujours visibles et à celle des étoiles toujours invisibles dans un lieu déterminé d'observation, sont situés de part et d'autre et à la même distance de l'équateur, on les désigne sous le nom de cercle de perpétuelle apparition, et l'autre sous le nom de cercle de perpétuelle occultation.

Les parallèles des étoiles circompolaires jusqu'au cercle de perpétuelle apparition rencontrent le méridien en deux points dont les directions sont, l'une au dessus, l'autre au dessous de celle du pôle et qui sont symétriquement placés par rapport à ce pôle. Lorsqu'une étoile arrive à celui de ces deux points qui est le plus rapproché du zénith, on dit qu'elle est à sa culmination ou à son passage supérieur; et lorsqu'elle arrive au point opposé, elle est à son passage inférieur.

Les petits cercles de la sphère céleste parallèles à l'horizon et dont tous les points sont par conséquent également distants du zénith se nomment almicantarats.(1) Lorsqu'un almicantarat et le parallèle diurne d'un astre se coupent, leurs points d'intersection sur la sphère sont symétriquement placés par rapport au plan du méridien.

Les propriétés énoncées dans les deux paragraphes précédents résultent immédiatement de définitions; elles servent à déterminer très simplement la direction du méridien et la distance zénithale du pôle, dont on a besoin dans la plupart des circonstances où l'on entreprend des observations astronomiques ou géodésiques.

Ainsi on peut déduire la direction du méridien de deux observations d'une même étoile faites au moyen du théodolithe. A cet effet, la lunette étant fixée sur la même division du cercle vertical est amenée successivement par le mouvement de rotation autour de l'axe vertical dans les deux directions où se trouve l'étoile lorsqu'elle traverse le même almicantarat de part et d'autre du méridien.

Dans la position moyenne entre les deux qu'elle aura prises, la lunette se trouvera dans le plan du méridien qu'on pourra lui faire décrire en lui rendant son mouvement de rotation autour de l'axe horizontal de l'instrument. De même, la distance zénithale du pôle s'obtient en moyennant les distances zénithales d'une même étoile circompolaire à son passage supérieur et à son passage inférieur au méridien et en prenant la demi somme de ces distances. Nous verrons bientôt que cette quantité est le complément de la latitude géographique, ou la colatitude du lieu.

---

(1) Cette expression, ainsi que celle de zénith, nadir, azimuth viennent de l'Arabe; il en est de même de noms particuliers qui servent à désigner la plupart des étoiles les plus brillantes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Coordonnées azimuthale. — La direction d'un astre à un instant donné se détermine simplement au moyen de deux coordonnées sphériques qui ont pour axe la verticale et qui se mesurent immédiatement avec le théodolithe. Ces coordonnées sont la distance zénithale z de l'astre, ou sa hauteur h qui en est le complément, et son azimuth A qui est l'angle dièdre compris entre le méridien du lieu et le vertical qui passe par l'astre. Les azimuts se comptent sur l'horizon à partir du Sud et en allant vers l'Ouest, c'est-à-dire dans le sens du mouvement apparent des astres.

Les angles analogues compris entre le méridien et les points de l'horizon où un astre se lève ou se couche se nomment amplitudes. L'amplitude ortive est celle qui se rapporte au lever, et l'amplitude occase, celle qui se rapporte au coucher de l'astre.

On appelle premier vertical le grand cercle vertical qui est perpendiculaire au méridien. La trace du méridien sur l'horizon est la méridienne; cette ligne et sa perpendiculaire, qui est la trace du premier vertical sur l'horizon, déterminent sur la sphère les quatre points cardinaux : Nord, Sud, Est, Ouest.

On vérifie directement que le mouvement diurne de la sphère céleste est uniforme et que chaque étoile décrit, dans ce mouvement, un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation, au moyen d'une horloge et de l'équatorial, instrument entièrement analogue à un théodolite dont l'axe serait incliné parallèlement à l'axe des pôles. La même vérification peut être faite avec le théodolite, en ayant recours aux formules de transformation de la page 78. Ces observations prouvent que le mouvement de rotation du sphéroïde terrestre est réellement uniforme et que l'axe autour duquel il s'effectue reste sensiblement parallèle à lui-même.

Jour sidéral. — L'intervalle de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs d'une même étoile ou de son méridien céleste au méridien d'un lieu, est le jour sidéral dont la durée est constante mais différente, comme nous le verrons plus tard, de la durée du jour solaire [1]. Le jour sidéral est d'ailleurs divisé, comme le jour solaire, en 24 heures; l'heure en 60 minutes et la minute en 60 secondes; de sorte que le jour sidéral compte 86 400 secondes sidérales.

On prend pour origine du jour sidéral l'instant où le point vernal passe au méridien du lieu. Ce point est celui où se trouve le Soleil, dans son mouvement apparent, lorsqu'il traverse l'équateur céleste, à l'époque de l'équinoxe du printemps.

Le mouvement étant uniforme, l'angle compris entre les méridiens célestes de deux étoiles peut se mesurer par l'intervalle de temps qui s'écoule entre les passages successifs de ces étoiles au méridien d'un même lieu. On appelle, d'après cela, les méridiens célestes des cercles horaires et les angles de ces différents cercles avec le méridien du lieu

---

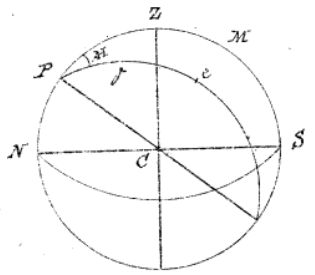
(1) Voyez la Théorie du Soleil. — La durée du jour solaire dépasse de 4^m environ celle du jour sidéral. Cette différence est due au mouvement propre apparent du Soleil, dans le sens opposé à celui du mouvement diurne.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des angles horaires.

Réciproquement, le temps peut se mesurer par le passage au méridien, d'étoiles dont les cercles horaires font entre eux des angles connus.

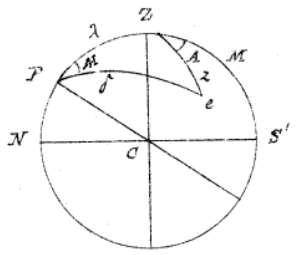
Coordonnées horaires. — L'angle horaire H d'une étoile e et sa distance polaire δ déterminent sa position à un instant donné et pour le lieu de l'observation dont le zénith est en Z.



Les angles horaires comptés à partir du méridien local croissent naturellement dans le sens du mouvement apparent.

L'heure sidérale H du lieu est donnée par l'angle horaire du point vernal qui n'est pas directement observable, mais dont on a pu néanmoins déterminer la distance aux cercles horaires d'un grand nombre d'étoiles; de sorte que la détermination de l'angle horaire d'une de ces étoiles conduit à la connaissance de l'heure sidérale du lieu.

Les coordonnées horaires ayant pour axe la ligne des pôles, pourraient s'observer immédiatement au moyen de l'équatorial, mais il est aussi facile et beaucoup plus exact de les déduire d'observations faites avec le théodolithe ou avec des instruments analogues.



Pour passer des coordonnées azimutales aux coordonnées horaires, ou réciproquement, on emploiera les formules de transformation connues, qui deviendront, en y substituant les notations indiquées et en désignant par λ l'angle des deux axes ou la distance du pôle au zénith.

$$\cos\delta = \cos\lambda\cos z - \sin\lambda z\cos A,$$

$$\sin\delta\cos H = \sin\lambda\cos z + \cos\lambda\sin z\cos A,$$

$$\sin\delta\sin H = \sin z\sin A.$$

On aura pour les transformations inverses

$$\cos z = \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos H,$$

$$\sin z\cos A = \sin\lambda\cos\delta - \cos\lambda\sin\delta\cos H,$$

$$\sin z\sin A = \sin\delta\sin H$$

En faisant varier les différents éléments que renferme la formule

$$\cos z = \cos\lambda\cos\delta + \sin\delta\sin\delta\cos H,$$

on peut en déduire les circonstances du mouvement diurne de la sphère céleste dans tous les lieux de la Terre et suivant la position de l'astre que l'on considère.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

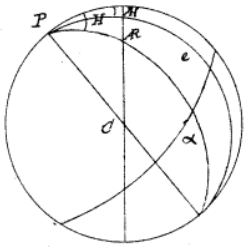
Coordonnées uranographiques. — Les positions relatives des étoiles sur la sphère céleste se déterminent au moyen d'un système de coordonnées analogues aux coordonnées horaires ; on conserve la distance polaire δ ou son complément qui est la déclinaison d et l'on prend pour angle dièdre celui que le méridien céleste de l'étoile fait avec le méridien céleste du point équinoxial du printemps. Cet angle se nomme l'ascension droite AR de l'étoile.

Les ascensions droites s'expriment en temps et se comptent de 0^h à 24^h dans le sens direct, c'est-à-dire qu'elles croissent dans l'ordre du passage des étoiles au méridien d'un même milieu.

On voit immédiatement qu'entre l'ascension droite AR d'une étoile, son angle horaire AH avec le méridien d'un lieu et l'heure sidérale H' de ce lieu, il existe la relation

$$AR = H - \frac{1}{15} AH$$

dans laquelle AH est exprimé en arc et les deux autres quantités en temps. D'ailleurs, lorsqu'un angle est donné en arc, pour l'exprimer en temps, il suffit de remarquer que la circonférence contient 360°, tandis que le jour sidéral est divisé en 24 heures ; d'où il résulte qu'une heure sidérale équivaut à un angle horaire de 15°, une minute de temps à 15 minutes d'arc, et une seconde de temps à 15 secondes d'arc.



On désigne souvent les ascensions droites et les déclinaisons sous le nom de coordonnées équatoriales pour les distinguer d'un autre système de coordonnées uranographiques rapportées au plan de l'écliptique et dont il sera question par la suite. Dans le premier de ces systèmes, les méridiens des étoiles s'appellent aussi cercles de déclinaison, et les parallèles cercles diurnes.

Coordonnées géographiques. — On admet généralement en Géographie que la Terre est exactement sphérique, et, pour déterminer la position d'un point à sa surface, on emploie des méridiens, un équateur et des parallèles, c'est-à-dire des cercles dont les plans passent par l'axe de rotation ou sont perpendiculaires à cet axe.

Nous verrons plus loin qu'en réalité la Terre est un sphéroïde aplati vers les pôles et présentant même quelques irrégularités ; en sorte que non seulement les verticales des différents points de la surface qui sont les normales à cette surface ne convergent pas vers un point unique, mais que les méridiens et les parallèles ne doivent pas être considérés comme des courbes rigoureusement planes.

Sans entrer ici dans d'autres détails à ce sujet, nous pouvons admettre que le sphéroïde terrestre soit terminé par une surface de révolution, ce qui en définitive

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

s'écarte peu de la vérité, et nous appellerons latitude l d'un lieu l'angle que fait la verticale de ce lieu avec le plan de l'équateur ; le complément de cet angle ou celui que la verticale fait avec la ligne des pôles sera la colatitude λ du lieu.

La latitude est donnée astronomiquement par la hauteur du pôle céleste au-dessus de l'horizon et la colatitude par la distance de ce pôle au zénith. C'est ainsi que la latitude ou la colatitude peuvent être considérées et déterminées, quelle que soit d'ailleurs la figure exacte du sphéroïde terrestre.

Nous avons déjà vu que le méridien d'un lieu était le plan qui passe par la verticale de ce lieu et par le pôle visible de la sphère céleste, c'est-à-dire par une parallèle à l'axe de rotation de la Terre ; en supposant, comme nous venons de le faire, que la Terre soit un solide de révolution, tous les méridiens passeront par l'axe, et nous appellerons longitude L d'un lieu, l'angle dièdre que forme le méridien de ce lieu avec le méridien d'un autre lieu pris pour origine et que l'on désigne sous le nom de premier méridien. La longitude exprimée en arc se compte alors sur l'équateur et la différence de longitude entre deux lieux donnés est l'arc de l'équateur compris entre les méridiens de ces lieux. Cette différence peut être également exprimée en temps ; en vertu de l'uniformité du mouvement diurne, elle est égale à l'intervalle de temps qui s'écoule entre les passages d'une même étoile aux méridiens des deux stations d'observation ; la comparaison de deux pendules réglées sur le méridien de chacune de ces stations faite à un même instant physique, donnerait donc, par la différence des heures observées, la différence de longitude cherchée. Un phénomène visible en se manifestant dans les deux stations à la fois suffit pour rendre cette comparaison possible.

Le premier méridien adopté généralement jusque dans le siècle dernier avait été fixé par Ptolémée et passait par l'île de Fer, qui du temps de cet astronome, formait la limite des pays connus du côté de l'Ouest. On a admis pendant longtemps que ce méridien se trouvait situé à 20° à l'ouest de Paris. Les longitudes étaient comptées en allant vers l'Est, c'est-à-dire que lorsque le point vernal passait au méridien de l'Île de Fer, la longitude de tous les lieux du globe était donnée par l'heure sidérale comptée en chacun de ces lieux, à ce même instant.

Cette convention a cessé d'être en usage, et actuellement chaque grande nation prend pour premier méridien celui de son principal Observatoire ou celui d'un monument de sa capitale.

Les longitudes relatives de la plupart des différentes observatoires ont d'ailleurs été déterminées avec soin. Le méridien de Paris passe par le point central de l'observatoire.

Les marins et les géographes comptent ordinairement les longitudes de 0° à 180° à l'Est et à l'Ouest du premier méridien ; mais il serait préférable de convenir de les compter toutes en allant vers l'ouest, de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h.

Dès les premiers voyages de circumnavigation, on a remarqué qu'en s'avançant toujours vers l'Ouest, et revenant au lieu de départ, on avait perdu un jour en apparence, car on se trouvait avoir une date en retard d'une unité sur celle des habitants

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de ce lieu. Le contraire devait arriver aux voyageurs qui s'avançaient toujours vers l'Est, et cela s'explique facilement par ce fait que l'on transporte avec soi le méridien sur lequel on se règle pour compter les jours, et en ayant égard au sens du mouvement diurne. La convention adoptée généralement par les Marins pour retrouver la même date à leur retour dans le port d'embarquement, consiste en ce que, lorsqu'ils parviennent à 180° de leur 1er méridien, ceux qui s'avancent vers l'Est retranchent un jour, et ceux qui s'avancent vers l'ouest ajoutent au contraire un jour à leur date. Dans le but d'éviter les erreurs de date qui pourraient résulter de la manière ordinaire de compter le temps en chaque lieu à partir du passage d'un astre réel ou fictif au méridien, quelques astronomes ont proposé de rapporter les événements dont on veut fixer exactement l'époque à un phénomène indépendant de la position géographique du lieu d'où on le observe. Le temps se compte alors en jours solaires moyens, à partir de l'instant où le soleil moyen traverse l'équateur; on le nomme temps équinoxial.

La solution de la plupart des problèmes d'uranographie et de Géographie est fondée sur l'uniformité du mouvement diurne de la Sphère céleste autour de la ligne des pôles. C'est ainsi que l'on parvient à déterminer la direction du méridien, la latitude d'un lieu, la distance polaire d'une étoile, son angle horaire, et, par suite l'heure du lieu, par des observations faites au moyen du théodolite sur cette étoile en différents points de son parallèle.

Toutes ces questions se ramènent à la résolution de triangles Sphériques qui ont pour sommets le pôle, le zénith et les positions successives de l'étoile. Les circonstances les plus favorables aux observations se déduisent aisément de la discussion des formules générales indiquées précédemment; mais nous ne nous y arrêterons pas ici parce que les problèmes dont il s'agit seront traités avec tout le détail nécessaire à la fin du cours.

La détermination exacte des positions géographiques à laquelle on est ainsi conduit est en effet un des principaux objets dont nous aurons à nous occuper; mais pour y parvenir, soit que l'on observe les étoiles, soit que l'on observe les autres astres qui se déplacent sur la Sphère céleste, il faut, indépendamment des instruments propres à la mesure des angles et à la mesure du temps, avoir à sa disposition des tables astronomiques dont nous ferons connaître par la suite la composition et l'usage. Ces tables ont elles-mêmes pour base les observations des ascensions droites et des déclinaisons des astres faites avec un haut degré de précision au moyen des instruments méridiens installés dans les observatoires fixes.

Remarque. — On a souvent besoin de convertir les degrés, minutes et secondes en temps, et réciproquement. Il suffit pour y parvenir aisément, de considérer que 360° correspondent à 24 heures, 1 heure équivaut à 15°, 1m à 15' et 1s à 15". Pour effectuer l'opération, dans le premier cas, au lieu de diviser par 15, il est plus simple de multiplier par 4 et de diviser par 60: de même, dans le second cas, au lieu de multiplier par 15 on

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

divise par 4 et l'on multiplie par 60.

Chapitre II.

Instruments des Observatoires.

(Voyez les planches 6 et 7 du Portef.)

De la Lunette méridienne.

L'instrument qui sert à déterminer les ascensions droites des astres est la lunette méridienne accompagnée d'une pendule réglée sur le temps sidéral.

L'axe optique de cette lunette décrit le plan du méridien et la pendule sert à noter l'instant précis où un astre qui passe dans le champ de la lunette traverse le fil vertical qui représente le méridien. La différence entre les heures des observations de deux astres est précisément la différence de leurs ascensions droites.

La lunette méridienne, imaginée par Rœmer, à la fin du 17e siècle est aussi désignée sous le nom d'instrument des passages. — Sa simplicité et sa précision l'ont fait adopter par tous les astronomes.

On construit des pendules dont la marche est d'une extrême régularité; mais on conçoit que cette marche ne saurait être identique avec celle d'une pendule idéale qui battrait exactement 86 400^s dans un jour sidéral; il est donc indispensable d'étudier sans cesse la marche de la pendule, qui peut en outre subir de légères variations par suite des défauts de compensation. A cet effet, chaque jour, ou du moins toutes les fois que l'état du ciel le permet, on observe une étoile située près de l'équateur et l'on note les heures de la pendule au moment de chacun des passages de l'étoile au méridien, sur un registre dont l'inspection permet de connaître l'heure que marquerait la pendule idéale.

Ce que nous disons ici pour les horloges astronomiques s'applique également aux chronomètres que l'on emploie avec les instruments portatifs; seulement le mode d'observation est nécessairement différent quand on opère avec un instrument autre que la lunette méridienne.

Description de la lunette méridienne. — Les lunettes méridiennes des observatoires fixes grossissent environ de 150 à 200 fois. Dans le but de résister à la flexion, le tuyau de cette lunette et l'axe qui le supporte sont ordinairement formés de deux troncs de cônes opposés par la base et assemblés dans une pièce cubique; les tourillons cylindriques fixés aux deux extrémités de l'axe reposent sur des coussinets qui sont eux-mêmes portés par des massifs en pierre de taille; la cavité des coussinets présente deux plans inclinés

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sur lesquels le tourillon ne s'appuient que par deux de leurs génératrices ; en outre, afin de diminuer la pression sur les coussinets et l'usure du tourillon, on a allégé tout l'instrument au moyen d'un système de contre-poids. Les pièces accessoires qui accompagnent généralement la lunette méridienne, mais qui ne sont pas toutes indispensables, sont des collimateurs dans la direction du méridien et dans celle de l'axe du tourillon ;

; un petit cercle vertical muni d'un niveau qui est fixé à la lunette et qui sert à l'amener dans la direction où doit passer l'étoile que l'on veut observer ; un grand niveau que l'on pose sur le tourillon et qui est destiné à rendre l'axe de rotation horizontal ou à mesurer son inclinaison ; un bain de mercure dont on se sert pour diverses vérifications ; enfin, un système d'éclairage et un réflecteur disposé à l'intérieur de la lunette pour permettre de voir les fils du réticule pendant les observations de nuit. L'éclat de la lumière projetée à travers l'axe de rotation qui est creux, peut d'ailleurs être modéré à volonté, afin de ne pas effacer celui des astres que l'on observe.

Rectifications de l'instrument. — L'axe optique de la lunette méridienne doit décrire exactement le plan du méridien ; pour cela, il faut :

1° Que cet axe soit perpendiculaire à l'axe de rotation. On le reconnaît en retournant bout pour bout l'axe du tourillon et en visant dans chaque position sur une mire divisée placée à une assez grande distance. La correction s'opère, s'il y a lieu, au moyen d'une vis qui déplace le réticule dans son plan.

2° Que l'axe de rotation soit horizontal. On mesure son inclinaison à l'aide du niveau dont on opère le retournement. La correction se fait au moyen d'une vis de rappel qui peut élever ou abaisser l'un des coussinets.

On pourrait à la rigueur faire usage du bain de mercure pour effectuer simultanément ces deux premières rectifications.

3° Il faut enfin que ce même axe de rotation soit exactement orienté. L'observation de trois passages consécutifs d'une étoile circompolaire au dessus et au dessous du pôle apprend si le plan vertical décrit par l'axe optique se confond avec le plan du méridien, ou de combien il s'en écarte. La correction s'effectue ordinairement au moyen d'une vis de rappel qui donne un mouvement azimutal à l'axe de rotation, en déplaçant horizontalement l'autre coussinet. (1)

Disposition particulière du réticule. — Le réticule de la lunette méridienne est composé de deux fils horizontaux assez rapprochés entre lesquels on maintient l'étoile que l'on observe et de plusieurs fils verticaux placés à des intervalles égaux de part et d'autre

---

(1) A l'Observatoire de Paris, depuis quelques années, les coussinets sont scellés sur les piliers qui les supportent, et l'on tient compte, par le calcul, du défaut d'horizontalité ou d'orientation de l'axe de rotation.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'un fil central méridien.

On note l'heure du passage de l'étoile à chaque fil, c'est-à-dire l'instant où le fil paraît bissecter l'étoile et l'on prend la moyenne des observations pour l'heure du passage de l'étoile au méridien. L'erreur à craindre sur une seule observation se trouve alors divisée par la racine carrée du nombre des fils. On emploie ordinairement 5 fils. Or comme on a reconnu que dans une lunette qui grossit de 150 à 200 fois, l'instant du passage d'une étoile située dans le voisinage de l'équateur s'évalue à $0^s,2$ près; avec les 5 fils, l'erreur n'est plus que de la moitié environ ou de $0^s,1$.

Enregistreur électrique. — On a imaginé, dans ces derniers temps, de noter les observations des passages au moyen de l'électricité; ce qui permet d'employer un bien plus grand nombre de fils, l'observateur n'étant plus dans l'obligation de compter lui-même les secondes et les fractions de seconde, ni surtout de les inscrire. Cet enregistrement se fait simplement en appuyant sur une touche toutes les fois que l'on estime que l'étoile est bissectée par l'un des fils. Un mécanisme transmet instantanément le choc à un style qui marque un point sur une bande de papier animée d'un mouvement continu et uniforme réglé sur le mouvement de la pendule. Le nombre des fils a été porté jusqu'à 25; et l'erreur à craindre se trouve alors réduite à une petite fraction de seconde.

Distance équatoriale des fils. — Les fils du réticule ne pouvant pas être rigoureusement équidistants par construction, la moyenne des observations ne correspondra pas généralement au fil du milieu, mais à un fil idéal dont il faut connaître la distance à chacun des fils du réticule, lorsqu'on veut utiliser des observations incomplètes. C'est à quoi l'on arrive en observant à chaque fil le passage d'une étoile dont la distance polaire Δ est connue.

Ainsi, θ, θ', θ'', ... représentant les intervalles de temps écoulés entre les bissections successives

$$\theta \sin \Delta = t, \qquad \theta' \sin \Delta = t', \qquad \theta'' \sin \Delta = t'' \ldots\ldots$$

seront ces intervalles réduits à l'équateur et mesureront les distances des fils exprimées en temps, ou ce que l'on appelle les distances équatoriales des fils. — Réciproquement, ces distances t, t', t'' .... étant déterminées, on aurait pour les intervalles T, T', T'' .... des passages d'une étoile dont la distance polaire serait δ.

$$T = \frac{t}{\sin \delta}, \qquad T' = \frac{t'}{\sin \delta}, \qquad T = \frac{t''}{\sin \delta} \ldots\ldots$$

Cependant si l'étoile observée était très voisine du pôle, ces formules ne seraient plus suffisamment exactes, et l'on devrait avoir recours à la relation suivante

$$\sin 15\, t = \sin 15\, T \sin \delta,$$

dans laquelle t représente la distance équatoriale de l'une quelconque des fils latéraux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

au fil du milieu pour une étoile dont la distance polaire est δ, et T l'intervalle de temps que l'étoile mettrait à aller du fil latéral au fil du milieu.

Cette expression, à laquelle on parvient facilement, peut être mise sous une forme plus commode pour le calcul en développant les sinus et s'arrêtant aux deux premiers termes; on trouve ainsi :

$$t = T \sin\delta - \frac{15^2}{2.3} T^3 \sin^2 1'' \sin\delta \cos^2\delta,$$

et

$$T = \frac{t}{\sin\delta} + \frac{15^2}{2.3}\left(\frac{t}{\sin\delta}\right)^3 \sin^2 1'' \cos^2\delta.$$

La première de ces deux formules donne la distance équatoriale t quand on a observé le temps T, la seconde sert à trouver l'intervalle de temps qui s'écoule entre le passage de l'étoile à l'un quelconque des fils et le fil idéal moyen, en fonction de la distance équatoriale déterminée par un grand nombre d'observations.

On peut supprimer le facteur $\cos^2\delta$ et réduire les formules en table.

Outre les erreurs inévitables que l'on commet en estimant les instants de passage d'une étoile à chacun des fils de la lunette, erreurs d'autant plus sensibles que la distance polaire de l'étoile en est plus petite; il en existe encore de deux sortes, les unes provenant de l'observateur et les autres de l'instrument.

1° Equation personnelle. — Le passage d'une étoile sous un même fil n'est pas observé au même instant par tous les astronomes. La différence des heures notées par deux observateurs pour ce passage ou leur équation personnelle relative est une quantité constante dont il faut nécessairement tenir compte lorsque les résultats obtenus par ces observateurs doivent faire partie d'une même série. Le moyen le plus simple de déterminer cette équation est le suivant : Le premier observateur note le passage d'une étoile équatoriale aux deux premiers fils de la lunette et en aussitôt remplacé par le second qui note le passage de la même étoile aux deux derniers. Chaque groupe d'observation est réduit au fil idéal moyen et la différence des moyennes est la quantité cherchée. Pour plus de précision, cette épreuve doit être répétée plusieurs fois. On a des exemples d'astronomes très exercés pour lesquels l'équation personnelle dépassait une seconde.

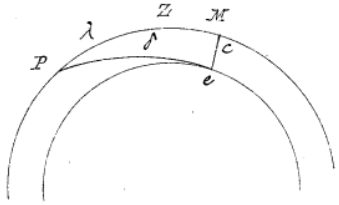
2° Erreurs instrumentales. — Les principales erreurs qui proviennent de l'instrument correspondent aux trois rectifications précédemment indiquées et que l'on ne parvient pas toujours à effectuer d'une manière parfaite. On les corrige au moyen des formules suivantes, dans lesquelles λ désigne la colatitude du lieu, δ la distance polaire de l'étoile et z sa distance zénithale.

Les erreurs de collimation, d'inclinaison et de déviation sont toujours très petites et peuvent être considérées comme les accroissements de trois variables indépendantes dont l'heure de l'observation serait une fonction. On obtiendra donc la correction totale en cherchant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les corrections partielles correspondant à chacune de ces trois erreurs prises isolément et en en faisant la somme.

Erreur de collimation. — Appelons c l'angle que l'axe optique fait avec la perpendiculaire à l'axe de rotation ; le cône décrit par l'axe optique dans le mouvement de la lunette est coupé par la sphère suivant un cercle parallèle au méridien.



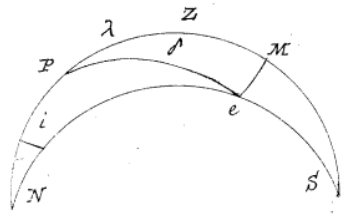
Si du point e, position où l'on observe l'étoile, on abaisse l'arc de grand cercle eM perpendiculaire au méridien, cet arc eM mesurera la déviation c de l'axe optique de la lunette, et par le triangle rectangle PeM on aura :

$$\sin P = \frac{\sin c}{\sin \delta} ;$$

d'où en remplaçant $\sin P$ et $\sin c$ par $p \sin 1''$ et $c \sin 1''$; et désignant par p_1 la correction cherchée exprimée en temps

$$p_1 = \frac{1}{15} \frac{c}{\sin \delta} .$$

Erreur d'inclinaison de l'axe de rotation. — Soit i l'inclinaison de l'axe de rotation ; e la position où l'on observe l'étoile sur le grand cercle perpendiculaire à l'axe de rotation, tandis qu'on aurait dû l'observer en M ; dans le triangle PeN, on connaît $Pe = \delta$, $PN = 90° - \lambda$ et l'angle $PNe = i$, l'angle en P ou son supplément qui mesure la correction cherchée pourra donc se calculer par la relation des quatre éléments consécutifs, et l'on aura :



$$\operatorname{cotg} \delta \cos \lambda = \operatorname{cotg} i \sin P - \sin \lambda \cos P ;$$

d'où, en développant les sinus et cosinus des arcs i et P et s'arrêtant dans chaque développement au premier terme

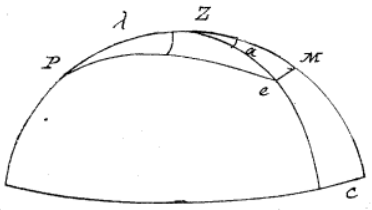
$$\frac{\cos \delta \cos \lambda + \sin \lambda \sin \delta}{\sin \delta} = \frac{P}{i} ;$$

et comme d'ailleurs $\delta - \lambda = z$, en désignant par p_2 la correction exprimée en temps, on a

$$p_2 = \frac{1}{15} \frac{i \cos z}{\sin \delta} .$$

Erreur de déviation azimutale. — Appelons a la déviation azimutale de l'axe de rotation ; le plan décrit par l'axe optique est un plan vertical qui fait précisément un

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



angle a avec le méridien et l'on observe l'étoile en e au lieu de l'observer en M, dans le méridien ; il s'agit encore de calculer l'angle en P du triangle PZe dans lequel on connaît $PZ = \lambda$, $Pe = \delta$ et $PZe = 180° - a$; la relation des quatre éléments consécutifs donnera dans ce cas

$$\operatorname{cotg} \delta \sin \lambda = - \operatorname{cotg} a \sin P + \cos \lambda \cos P ;$$

d'où en se fondant sur la petitesse de l'angle a et P, et en désignant par p_3 la correction cherchée exprimée en temps

$$p_3 = \frac{1}{15} \frac{a \sin z'}{\sin \delta}.$$

En résumé, si h est la moyenne des heures des passages d'une étoile aux fils de la lunette, l'ascension droite de cette étoile sera

$$AR = h + \frac{1}{15} \frac{c + i \cos z + a \sin z}{\sin \delta}.$$

Il s'agit actuellement de voir comment on déterminera les trois quantités c, i et a.

Mesure de l'erreur de collimation. — Lorsqu'on a une mire graduée placée à une distance D de l'objectif de la lunette, en faisant la lecture correspondant au fil du milieu avant et après l'invertion du tourillon, l'erreur de collimation est donnée par l'expression

$$c = \frac{\frac{1}{2} N}{D \sin 1''},$$

N étant le nombre de divisions interceptées entre les deux directions de l'axe optique exprimé au moyen de la même unité que la distance D.

Quand on n'a pas de mire, le moyen le plus simple de déterminer l'erreur de collimation consiste à observer le passage d'une étoile circompolaire aux deux premiers fils dans la position ordinaire de la lunette, puis à changer le tourillon de place et à observer le passage de cette étoile aux mêmes fils devenus les derniers. La demi différence des heures des observations faites dans ces deux positions et réduite au fil moyen est égale à $\frac{1}{15} \frac{c}{\sin \delta}$, d'où il est facile de déduire la valeur de c, celle de δ étant connue.

Mesure de l'inclinaison de l'axe de rotation. — Cette mesure s'effectue comme on l'a expliqué dans la théorie du niveau. Si l'on désigne par o et o' les lectures faites aux extrémités de la bulle du niveau du côté de l'Ouest, avant et après le retournement ; par e et e' les lectures faites du côté de l'Est, et par i l'inclinaison cherchée, la formule à laquelle on est arrivé deviendra :

$$i = \frac{(o + e) - (o' + e')}{4} \alpha'' = \frac{(o - o') - (e' - e)}{4} \alpha'' ,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

α représentant la valeur des divisions du niveau en secondes. Toutefois, la quantité i calculée au moyen de cette formule représente exactement l'inclinaison de l'axe des tourillons sur l'horizon, seulement à la condition que les tourillons aient le même diamètre et que les angles des coussinets soient égaux ainsi que ceux des crochets des niveaux que l'on fait reposer sur les tourillons.

On pourrait à la rigueur tenir compte par le calcul de toutes les imperfections semblables que l'on constaterait dans l'instrument; mais heureusement l'habileté des artistes dispense en général de la plupart des corrections minutieuses qu'elles exigeraient.

Mesure de la déviation azimutale. — Pour maintenir l'axe optique de la lunette dans le plan du méridien, on se sert, lorsque la position de l'observatoire le permet, d'une mire assez éloignée pour que son image se fasse sensiblement au foyer principal de la lunette, ou bien l'on fait usage de collimateurs.

Pour mesurer la déviation azimutale qui peut provenir d'une variation dans la position de la mire elle-même, ou d'un défaut de rectification, on pourrait observer, comme nous l'avons dit, trois passages consécutifs d'une étoile circompolaire; mais on peut se dispenser d'attendre aussi longtemps, en observant successivement deux étoiles dont les distances polaires soient très différentes. Soient R et R' les ascensions droites supposées connues des deux étoiles observées; t et t' les heures de observations; d'après la formule de correction précédemment établie, on aura, en ayant égard aux signes de la correction et de la déviation azimutale.

$$24^h - (t - R) = \frac{1}{15}\,\frac{a \sin z}{\sin \delta},$$

$$24^h - (t' - R') = \frac{1}{15}\,\frac{a \sin z}{\sin \delta'};$$

d'où l'on tire

$$a = 15\,\frac{R' - R - (t' - t)}{\dfrac{\sin z'}{\sin \delta'} - \dfrac{\sin z}{\sin \delta}}.$$

Du cercle mural.

Cet instrument est destiné à déterminer les distances zénithales méridiennes des astres et la latitude de l'observatoire, d'où l'on conclut les distances polaires au moyen de la formule

$$\delta = \lambda \pm z.$$

Il se compose d'un grand cercle divisé, placé dans le plan du méridien contre un pilier en pierre de taille dans lequel est engagé un axe fixé perpendiculairement au cercle et tournant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

avec lui. Une lunette grossissant environ 150 fois en attachée au limbe, suivant un diamètre. Comme dans la lunette méridienne, un système de contrepoids diminue le frottement sur les coussinets, et un appareil d'éclairage, dont on peut régler l'intensité, permet de voir la nuit les fils du réticule en même temps que les astres. Des systèmes de vis de pression et de vis de rappel permettent d'arrêter les mouvements du cercle et de pointer avec précision.

Les divisions sont tracées sur la tranche du limbe, et la lecture se fait à l'aide de microscopes munis de micromètres qui sont scellés dans le mur. La lunette peut être fixée sur l'un quelconque des diamètres du cercle ; ce qui permet de mesurer le même arc céleste en employant successivement toutes les parties du limbe, et par conséquent d'appliquer aux observations la méthode de la réitération. Afin d'obtenir la plus grande précision possible, les astronomes s'astreignent à étudier les erreurs individuelles de chacune des divisions de leurs cercles, dont ils dressent des tables de correction. — Ils ont également des tables de correction pour tenir compte des effets des variations de température sur les micromètres.

L'axe optique de la lunette du cercle mural doit être parallèle au plan du limbe et décrire le plan du méridien ; le limbe doit pour cela être établi lui-même dans ce dernier plan. Des vis de rectification permettent de régler la position de l'instrument, le voisinage de la lunette méridienne rend d'ailleurs toutes les vérifications faciles.

Il faut en outre s'assurer de l'horizontalité exacte des fils transversaux. On observe, pour cela, le passage d'une étoile équatoriale qui doit suivre les fils sur toute leur longueur.

La hauteur d'une étoile au dessus de l'horizon se détermine en observant l'étoile d'abord directement, puis par réflexion sur un bain de mercure, et en prenant la demi différence des lectures que l'on a faites dans les deux positions du cercle.

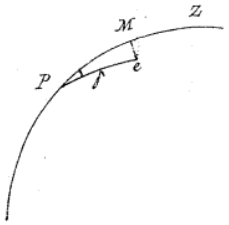
On peut aussi trouver directement la distance zénithale d'un astre ; pour cela, on commence par pointer la lunette vers le nadir au moyen de la réflexion des fils du réticule dans un bain de mercure, puis on vise l'étoile, et l'on déduit immédiatement l'angle cherché de lectures correspondant aux deux observations.

La latitude s'obtient, comme on l'a déjà expliqué, par l'observation des distances zénithales d'une étoile circompolaire à son passage supérieur et à son passage inférieur.

Réduction au méridien. — Lorsqu'on observe une étoile voisine du pôle, en la suivant tout le temps qu'elle reste dans la lunette, pour réduire au méridien les diverses observations que l'on a eu le temps de faire, tant directement que par réflexion, on a soin de noter l'heure de chacune de ces observations, pour la faire entrer dans la formule suivante.

Soit PZ le méridien et e la position de l'étoile, à l'instant comme de l'observation qu'il s'agit de réduire ; si du point e on abaisse un arc de grand cercle eM perpendiculaire sur le méridien, PM sera égal à la distance polaire observée, et la correc

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



-tion cherchée sera la différence des deux côtés PM et Pe du triangle PeM rectangle en M ; en désignant donc par x cette correction, on aura

$$tg\,(\delta - x) = tg\,\delta \cos H\,;$$

d'où, par la formule connue, et en s'arrêtant au premier terme du développement

$$x = \frac{H}{4} \sin 2\delta \sin 1'' \quad (1)$$

et comme l'angle horaire $H = 15\,P$, P désignant l'intervalle de temps écoulé depuis le passage de l'étoile au méridien, on aura définitivement

$$x = \frac{15^2}{4} P \sin 2\delta \sin 1''$$

en prenant pour δ, dans cette formule, la distance polaire résultant de l'observation faite au fil du milieu.

Cercle méridien. — On emploie maintenant dans la plupart des grands observatoires, le cercle méridien au moyen duquel on détermine à la fois l'ascension droite et la distance polaire d'un astre. Réduit à d'assez faibles dimensions pour devenir facilement transportable, le cercle méridien a déjà rendu de grands services à la géographie et en appelé à devenir d'un usage de plus en plus fréquent dans les voyages et dans les expéditions scientifiques. Lorsque cet instrument est muni d'un axe vertical et d'un cercle azimutal, il sert encore à faire des observations importantes hors du méridien et notamment dans le premier vertical.

Parmi les autres instruments que l'on emploie dans les observatoires, nous citerons l'équatorial ou la machine parallactique, l'héliomètre et le télescope à réflexion.

L'équatorial est spécialement destiné à la mesure des petites différences d'ascension droite et de distances polaires, par exemple entre une étoile et un astre nouvellement découvert, dont on ne peut pas toujours observer le passage au méridien. La lunette qui en constitue par un mouvement d'horlogerie, et dont l'axe optique trace sur la sphère céleste un parallèle diurne, porte à son foyer un micromètre composé de

---

(1) La formule donne

$$x = \frac{tg^2 \frac{1}{2} H}{\sin 1''} \sin 2\delta$$

mais H étant très petit, on peut remplacer $tg \frac{1}{2} H$ par $\frac{1}{2} H \sin 1''$. Pour les étoiles très voisines du pôle, on emploie les deux termes suivants du développement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fils rectangulaires, dont les uns représentent des cercles horaires et les autres des arcs de parallèles. — Les astres que l'on observe, restant continuellement dans le champ de la lunette, du moins sur une assez grande étendue de leur parallèle, les mesures micrométriques que l'on a à effectuer peuvent être réitérées et conduire à des résultats d'une grande précision.

La planche 7 du portefeuille représente l'équatorial de l'observatoire de Poulkowa, l'un des plus grands qui existent actuellement.

Les autres instruments que nous avons cités sont consacrés à des recherches délicates d'astronomie stellaire, qui sortent du programme de ce cours.

Chapitre III.

Description du Ciel;

Indication sommaire des principales théories astronomiques traitées dans le Cours.

(Voy. les Planches 8, 9 et 10 du Portefeuille).

Description du Ciel. — Nous avons dit que les étoiles pouvaient, à cause de leur distance énorme, être considérées comme immobiles dans l'espace; on a cependant constaté qu'elles éprouvaient les unes par rapport aux autres de très faibles déplacements dus aux mouvements propres dont elles sont animées. On est même parvenu à estimer la parallaxe annuelle de quelques unes d'entre elles; c'est-à-dire l'angle sous lequel le rayon de l'orbite terrestre serait vu de ces étoiles. On a une idée de leur éloignement prodigieux, lorsque la grandeur déjà considérable de ce rayon étant déterminée, on sait que pour aucune étoile la parallaxe annuelle ne paraît atteindre 1".

Quoi qu'il en soit, les étoiles sont les repères dont on se sert pour suivre les mouvements apparents ou réels des corps du Système Solaire, lesquels se déplacent plus ou moins rapidement par rapport à elles. Pour les distinguer les unes des autres, en jetant les yeux sur le ciel, on a formé, dès l'antiquité, des groupes ou constellations, qui ont reçu des noms de héros mythologiques, d'animaux, &c., et l'on a même donné des noms particuliers aux étoiles les plus remarquables que l'on peut rattacher les unes aux autres par un système d'alignements faciles à retenir.

Avec un peu d'habitude, on parvient bientôt par ce moyen à s'orienter et à reconnaître l'état du ciel, selon la latitude, la saison de l'année et l'heure de la nuit; ce qui permet de se préparer plus rapidement aux observations que l'on veut faire; et,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans certaines circonstances, de noter les phénomènes accidentels dont on peut être témoin; comme l'apparition d'une comète, celle d'un bolide dont la trajectoire se projette sur la sphère céleste, &c.

Tout le monde sait, par exemple, que l'étoile polaire se trouve sur l'alignement des gardes de la Grande Ourse, l'une des plus belles constellations boréales; pour déterminer plus exactement, et sans instruments, la direction du plan méridien, il est utile en outre de savoir que l'étoile se trouve sensiblement dans ce plan, lorsque, sous nos latitudes, la Grande Ourse et Cassiopée, qui est une autre constellation remarquable, sont, l'une près de l'horizon, et l'autre près du zénith de l'observateur.

Catalogues. Désignation des étoiles. — Pour faire entrer dans des catalogues toutes les étoiles dont on pouvait déterminer les ascensions droites et les distances polaires, on les a soumises à une classification conventionnelle en divers ordres de grandeur, d'après leur éclat et non d'après leurs diamètres apparents qui ne sont pas mesurables, et on les a désignées chacune, soit par une lettre grecque ou romaine, soit par un nombre suivi du nom de la constellation à laquelle elle appartient. Ces catalogues permettent de retrouver, à un instant donné, la position de l'étoile qui y est inscrite; de sorte que, pourvu qu'elle soit au-dessus de l'horizon, on peut au besoin diriger sur elle la lunette d'un instrument, lors même qu'on ne l'aperçoit pas à l'œil nu.

Pendant la nuit, lorsqu'il n'y a pas de clair de lune, on voit à l'œil nu les étoiles de la 6e grandeur; avec les lunettes, la classification a été poussée jusqu'à la 16e grandeur.

Globes et cartes célestes. — Au moyen de coordonnées observées des étoiles, on a également construit des cartes et des globes célestes sur lesquels on reconnaît immédiatement les groupes d'étoiles les plus remarquables. Indépendamment de leur utilité pour l'étude de l'uranographie, les cartes et les globes présentent encore cet avantage qu'en les consultant, on acquiert promptement une idée exacte de l'état du Ciel, à un instant quelconque, et que l'on peut ainsi apprécier, dans certains cas, l'opportunité de telle ou telle observation. Les cartes célestes détaillées ont encore d'autres usages; elles ont beaucoup contribué, par exemple, à la découverte récente d'un grand nombre de petites planètes.

Les élèves trouveront sur les cartes 8 et 9 de leur Portefeuille et sur les globes qui sont exposés dans les salles, les noms des principales constellations boréales, zodiacales et australes, et la désignation des plus belles étoiles dont elles sont composées (1).

Les différentes régions du Ciel et les astres qu'on y a découverts, soit à l'œil nu, soit à l'aide de télescopes de plus en plus puissants, ont été soumis, surtout depuis la seconde moitié du siècle dernier, à l'examen le plus attentif, par un grand nombre d'astronomes. C'est ainsi que l'on a cherché à déterminer l'éclat relatif des différentes étoiles et la couleur

---

(1) Voir pour plus de détails l'Astronomie de Lalande, l'Uranographie de Francœur et les Traités de Cosmographie.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dominante qui paraît leur être propre, et que l'on a reconnu que, pour plusieurs d'entre-elles, cet éclat et cette couleur varient avec le temps, quelquefois même périodiquement.[1] On a encore constaté l'existence de Systèmes binaires, ternaires, &c, c'est-à-dire composés de deux ou d'un plus grand nombre d'étoiles qui se meuvent les unes autour des autres, et l'on a traité les éléments de ces mouvements par le calcul, dans le but de vérifier que la loi de la gravitation s'étendait encore à ces astres éloignés.[2]

Les régions de la voie lactée, les amas d'étoiles, les nébuleuses résolubles et irréductibles, annulaires, planétaires, &c. &c. ont été soigneusement étudiés et classés; on a également signalé les espaces où les étoiles sont rares, et ceux qui en sont totalement privés, désignés sous le nom expressif de sacs à charbon.

Tous ces phénomènes, toutes les découvertes et les conjectures auxquelles ils ont donné lieu, sont du plus grand intérêt au point de vue de la philosophie naturelle; mais on n'en a encore fait aucun usage dans les applications de l'astronomie, dont nous avons spécialement à nous occuper ici[3], et nous ne nous y arrêterons pas plus longtemps.[4]

Utilité pratique des principales théories astronomiques. — Les attractions combinées du soleil et de la Lune sur le renflement équatorial du Sphéroïde terrestre produisent les phénomènes de la précession et de la nutation qui font varier la direction de l'axe de rotation de la Terre dans l'espace, le point où le prolongement de cet axe va percer la Sphère céleste n'est donc pas fixe; et, par suite, les coordonnées équatoriales des étoiles varient avec le temps. — D'autres causes analogues désignées d'une manière générale sous le nom de perturbations, compliquent encore ce phénomène que l'observation a fait découvrir et dont l'application a été donnée par la Mécanique céleste, qui enseigne en outre à tenir compte par le calcul de tous les changements qui se produisent :

Les astronomes ont fait choix, dans les différentes régions du ciel, d'un certain nombre d'étoiles prises parmi les plus brillantes, dont les coordonnées déterminées et calculées avec soin pour des dates assez rapprochées sont publiées dans les Annuaires Astronomiques, tels que la Connaissance des temps, en France; le Nautical almanac, en Angleterre, &c. Ces coordonnées sont également corrigées de l'aberration, mouvement appa-

---

(1) On fait abstraction, bien entendu, de la scintillation, phénomène purement optique et météorologique qui affecte de la même manière la lumière envoyée par les différentes étoiles.

(2) Cette vérification a été faite pour la première fois par feu Savary, de l'Observatoire de Paris, qui publia la méthode dont il avait fait usage dans la connaissance des temps, pour 1830.

(3) Les étoiles doubles et les nébuleuses servent cependant à éprouver la puissance des lunettes.

(4) Les ouvrages les plus intéressants à consulter sur l'Astronomie Stellaire, sont les Outlines of astronomy de J. Herschel, le Cosmos de Humboldt et l'Astronomie populaire d'Arago.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

-rent des étoiles autour de leur position réelle, résultant de la vitesse de la propagation de la lumière combinée avec celle dont la Terre est animée dans son orbite. Ces étoiles dites fondamentales, servent de termes de comparaison pour les travaux des Astronomes eux-mêmes, et leurs positions prédites sont de la plus grande utilité dans les observations astronomiques relatives à la Géodésie et à la Navigation, en ce qu'elles permettent de tirer promptement parti des résultats immédiats de ces observations.

Pour employer les observations des astres qui appartiennent à notre Système Solaire, il a fallu préalablement étudier leurs mouvements propres et en connaître aussi exactement que possible la théorie, afin de pouvoir prédire à l'avance la position que ces astres vus de la Terre doivent occuper dans le Ciel, à une date déterminée. Tel est le but pratique de la théorie du Soleil (qui n'est autre chose que la théorie de la Terre) et de celle de la Lune et des planètes.

Ces théories se rapportent naturellement au centre de la Terre et des différents astres considérés; mais comme l'observateur est situé à la surface du globe terrestre, il ne voit pas ces astres dans les directions indiquées, à l'exception de ceux qui passeraient à son zénith, et pour ramener les observations au centre, il doit calculer la parallaxe qui résulte de ce transport d'origine.

Enfin l'atmosphère qui enveloppe notre planète nous fait voir les astres dans une direction différente de celle dans laquelle ils se trouvent réellement, sauf encore ceux qui passent au zénith. Les observations doivent donc être corrigées de cette déviation, qui porte le nom de réfraction astronomique.

La plupart des corrections qu'il faut faire subir aux observations immédiates sont facilitées par des Tables que l'on trouve dans la Connaissance des Temps. Il sera donc utile d'avoir une idée exacte de la manière dont ces Tables sont construites.

Rappelons, en terminant, que les Astronomes font usage de deux espèces de temps pour régler leurs horloges: le temps sidéral et le temps solaire moyen.

Le premier se détermine directement par l'observation des étoiles; quant au second, il n'est pas directement observable; mais nous apprendrons, dans la théorie du Soleil, à passer du temps solaire vrai au temps moyen, et, au besoin, de celui-ci au temps sidéral, ou inversement.

Chapitre IV.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chapitre IV.

Réfraction astronomique.

Lorsqu'on détermine la latitude d'une même station par l'observation de passages supérieurs et inférieurs d'étoiles circompolaires différentes, on reconnaît à mesure que l'on prend des étoiles plus éloignées du pôle, que la demi-somme de leurs distances zénithales méridiennes va en diminuant ; ce qui ne peut s'expliquer d'une manière satisfaisante que par une déviation de plus en plus forte des rayons lumineux à mesure qu'ils se rapprochent de l'horizon. D'autres effets très sensibles de la réfraction produite par l'atmosphère sont l'excès de la durée de l'apparition des astres au-dessus de l'horizon sur celle que l'on peut calculer d'après le mouvement diurne, la déformation des disques du Soleil et de la Lune, &c.

Voici en peu de mots l'analyse de ce phénomène : un rayon lumineux parti d'un astre en dévié progressivement depuis son entrée dans la première couche de l'atmosphère jusqu'à la surface de la Terre, où cette densité en devenue beaucoup plus grande. La trajectoire de ce rayon est donc une courbe dont la concavité est tournée vers le centre de la Terre et la direction du dernier élément de cette courbe étant celle dans laquelle nous voyons l'astre, il en clair que les distances zénithales se trouvent diminuées.

La réfraction n'altère pas sensiblement les azimuts ; cela résulte immédiatement de ce que l'épaisseur de l'atmosphère étant très faible relativement à la grandeur du rayon terrestre [1], on peut admettre que les couches atmosphériques d'égale densité, supposées à l'état d'équilibre sont sphériques et concentriques dans l'étendue traversée par les rayons lumineux qui arrivent à l'œil de l'observateur.

Il est encore à remarquer que, dans cette étendue assez limitée, la sphéricité

---

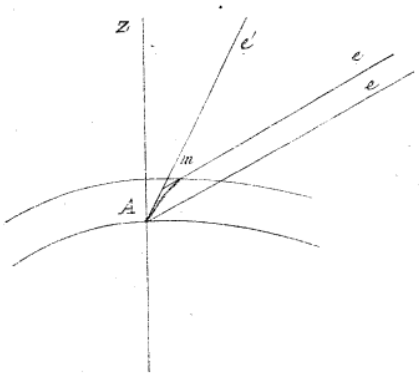
(1) L'épaisseur de l'atmosphère n'est pas parfaitement connue. Les plus fortes évaluations déduites de l'observation des phénomènes crépusculaires la portent à 115 000^{m}. (Bravais) ; d'autres évaluations, fondées sur des observations du même genre, mais interprétées différemment, la réduisent à 60 000 m. au plus ; enfin, M. Biot croit avoir établi qu'elle ne devrait pas dépasser 48 000 mètres. Le savant physicien est parvenu à ce résultat en discutant les observations météorologiques faites à différentes hauteurs dans l'atmosphère par M. Gay-Lussac, dans son ascension aérostatique, et par MM. de Humboldt et Boussingault pendant leur voyage dans les Andes du Pérou.

Quel que soit, au surplus, celui de ces nombres que l'on adopte, l'épaisseur de l'atmosphère comparée à la longueur du rayon terrestre (environ 6 366 000 m.) sera toujours très faible, et les conséquences que nous en tirons dans le texte sont suffisamment justifiées.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des couches en peu prononcée, et que dès lors tout doit s'y passer à peu près comme si les couches étaient planes et parallèles, surtout lorsque l'on considère des rayons assez élevés au dessus de l'horizon.

La dispersion étant d'ailleurs très faible dans les gaz, ses effets, à peine sensibles près de l'horizon, sont tout à fait négligeables dans la théorie de la réfraction.



Enfin, à cause du peu de hauteur de l'atmosphère comparée à la distance des astres (même celle de la lune) on peut considérer le rayon réfracté en e m A et le rayon e A qui arriverait directement à l'œil de l'observateur comme parallèles dans leur trajet hors de l'atmosphère; il en résulte que la réfraction est égale à la somme des angles de contingence de la trajectoire du rayon lumineux à travers l'atmosphère.

Pour corriger les observations de l'erreur due à la réfraction, les astronomes font usage de tables dites de réfractions moyennes qui correspondent à la pression de $0^m,760$ et à la température de 10° centigrades dans la couche inférieure de l'atmosphère. L'argument de ces tables est la distance zénithale ou la hauteur apparente observée de l'astre.

On passe de la réfraction moyenne à la réfraction actuelle en multipliant la première par deux facteurs fournis par des tables dont les arguments sont les hauteurs barométrique et thermométrique.

Pour donner dès à présent une idée de l'importance de cette correction, nous transcrivons ici un extrait de la table des réfractions moyennes.

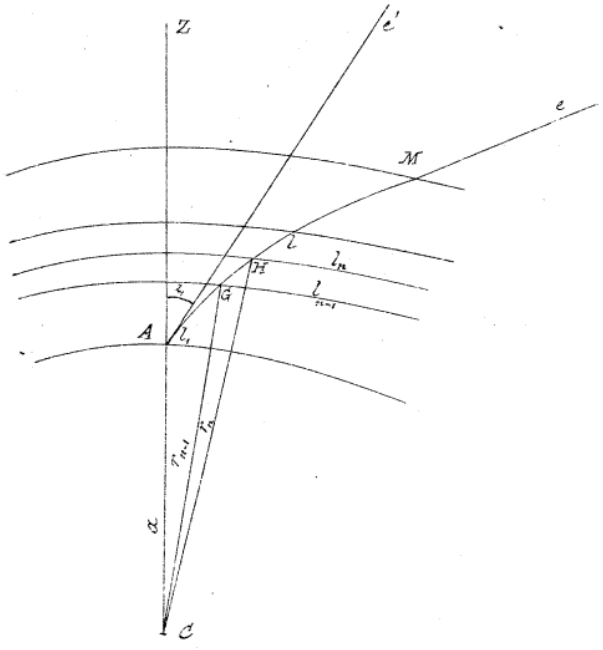
Distance zénithale	Réfraction.	Distance zénithale	Réfraction	Distance zénithale.	Réfraction.
0°	0"	35°	41"	82°	6" 35
1	1	40	49	83	7 26
2	2	45	58	84	8 30
3	3	50	1 9	85	9 55
4	4	55	1 23	86	11 49
5	5	60	1 41	87	14 29
10	10	65	2 4	88	18 23
15	16	70	2 39	89	24 22
20	21	75	3 55	90	33 48
25	27	80	5 20		
30	34	81	5 54		

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On remarquera que de 0° à 75° de distance zénithale, la réfraction croît proportionnellement à cette distance; que vers 45° elle atteint 1' et qu'elle croît ensuite de plus en plus rapidement à mesure que le rayon lumineux se rapproche de l'horizon, où elle dépasse un demi degré.

Nous allons indiquer comment ces tables sont construites; et d'abord, la loi de la constitution de l'atmosphère étant à peine connue jusqu'aux plus grandes hauteurs où l'homme est parvenu, il semble difficile de suivre un rayon lumineux à travers toute l'atmosphère et de déterminer les modifications successives qu'éprouve sa direction. Cette difficulté est en effet à peu près insurmontable lorsqu'il s'agit d'un rayon peu incliné sur l'horizon; mais heureusement, pour toutes les distances zénithales qui n'excèdent pas 75°, grâce à la faible courbure des couches atmosphériques, on peut arriver à une détermination très exacte des réfractions, indépendamment de toute hypothèse sur la constitution de l'atmosphère; il suffit d'admettre, comme nous l'avons déjà dit, que les couches d'égale densité sont sphériques et concentriques. (1)

Considérons un rayon lumineux e M d'un astre e; dans l'atmosphère, ce rayon s'infléchit suivant la courbe M A, de telle sorte que l'astre en est vu par l'observateur placé en A dans la direction A e' de la tangente au dernier élément de la courbe.



Soient $z_1 = Z A e'$ la distance zénithale apparente de l'astre;

l_1 l'indice de réfraction de la couche d'air dans laquelle se trouve l'observateur;

et a la distance du point A au centre de la Terre.

De ces trois quantités, la dernière est supposée connue (2), et les deux autres peuvent se déterminer par l'observation.

Soient maintenant:

l_n l'indice de réfraction de la $n^{ième}$ couche d'air à partir de la surface du sol;

z_n et R_n les angles d'incidence et de réfraction du rayon lumineux

---

(1) Les développements suivants de la théorie des réfractions appartenant plutôt à la physique mathématique qu'à l'astronomie, ne seront exigés que jusqu'à l'établissement de l'équation (4). — Les élèves admettront à l'examen le résultat définitif

$$\theta = A \operatorname{tg} z + B \operatorname{tg}^3 z + \cdots\cdots$$

formule dans laquelle les coefficients A et B ont les valeurs numériques données plus loin. (p. 112)

(2) Voyez la 3e partie du Cours.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à son passage de cette couche dans la couche inférieure

Enfin $r_n = CH$ le rayon de la surface de séparation des deux couches

Soient de même l_{n-1}, z_{n-1}, R_{n-1} et r_{n-1} les quantités analogues relatives à la $(n-1)^{ème}$ couche.

Par la loi de la réfraction on a

$$\frac{\sin z_n}{\sin R_n} = \frac{l_{n-1}}{l_n};$$

et, d'un autre côté, dans le triangle CGH,

$$\frac{\sin R_n}{\sin z_{n-1}} = \frac{r_{n-1}}{r_n};$$

d'où, en multipliant membre à membre,

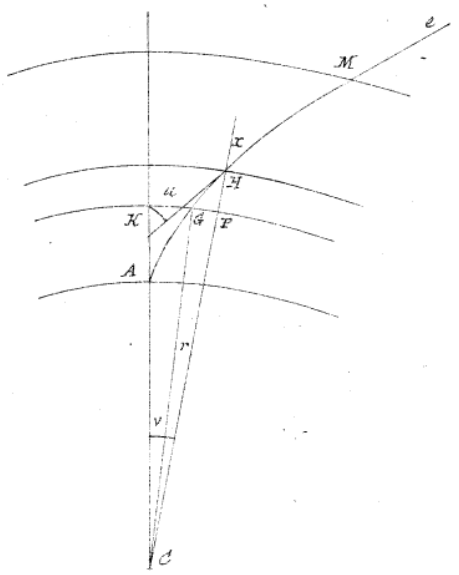
$$\frac{\sin z_n}{\sin z_{n-1}} = \frac{l_{n-1}\, r_{n-1}}{l_n\, r_n};$$

ou bien $$l_n r_n \sin z_n = l_{n-1} r_{n-1} \sin z_{n-1} = \text{constante}.$$

De sorte qu'en passant à la dernière couche, on aurait, en désignant par a l, et z, les quantités relatives à une couche quelconque.

$$r l \sin z = a l, \sin z, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

équation de la trajectoire du rayon lumineux; laquelle serait entièrement déterminée si l'on connaissait la relation qui existe entre les rayons vecteurs et les indices de réfraction des couches, c'est à-dire entre les hauteurs de ces couches et leurs densités. Mais il est inutile de connaître cette trajectoire elle même, et il s'agit seulement d'évaluer la somme des angles de contingence de cet élément depuis l'entrée du rayon lumineux dans l'atmosphère jusqu'au lieu de l'observation.



En appelant u l'angle de la tangente à la courbe en un point quelconque H avec la verticale du point A et v l'angle compris entre cette verticale et celle du point H, z désignant toujours l'angle d'incidence du rayon lumineux, on aura dans le triangle KHC

$$u = v + z.$$

Mais l'accroissement infiniment petit de u est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

égal à l'angle de contingence de la courbe, c'est-à-dire à la différentielle de la réfraction; par conséquent

$$d\theta = dv + dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

On a d'ailleurs en général

$$tg\, z = \frac{r\, dv}{dr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

En éliminant v entre les équations (1), (2) et (3), on arrivera comme il suit à l'expression de la différentielle de la réfraction.

L'équation (1) différentiée devient

$$r\, l \cos z\, dz + r \sin z\, dl + l \sin z\, dr = 0;$$

d'où

$$dz + tg\, z \frac{dl}{l} + \frac{dr}{r} tg\, z = 0$$

Or, l'équation (3) donne

$$dv = \frac{dr}{r} tg\, z;$$

donc

$$d\theta = -\frac{dl}{l} \frac{\sin z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}}$$

Mais on a par l'équation (1)

$$\sin z = \frac{a l_1}{r l} \sin z_1.$$

En substituant cette valeur de $\sin z$ dans l'équation précédente, il vient

$$d\theta = \frac{-\frac{dl}{l} a l_1 \sin z_1}{\sqrt{l^2 r^2 - l_1^2 a^2 \sin^2 z_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Les physiciens ont reconnu par l'expérience que, pour un même gaz, la quantité $l^2 - 1$ que l'on nomme puissance réfractive du milieu, est proportionnelle à la densité de ce milieu; de sorte que si l'on désigne par ρ la densité d'une couche de l'atmosphère, on aura

$$\frac{l^2 - 1}{\rho} = p;$$

d'où

$$l = \sqrt{1 + p\rho} \qquad \text{et} \qquad dl = \frac{p\, d\rho}{2\sqrt{1 + p\rho}};$$

on a également

$$\frac{l_1^2 - 1}{\delta} = p;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où $$l_1 = \sqrt{1+p\delta},$$

δ étant la densité de la couche inférieure de l'atmosphère. Le rapport constant p s'appelle le pouvoir réfringent.

En substituant ces valeurs de l, dl et l_1 dans l'équation (4), il viendra

$$d\theta = \frac{-p\,d\rho\sqrt{1+p\delta}\,\frac{a}{r}\sin z_1}{2(1+p\rho)\sqrt{1+p\rho(1+p\delta)\frac{a^2}{r^2}\sin^2 z_1}}$$

C'est cette expression qu'il s'agit d'intégrer depuis la couche d'air la plus voisine du sol jusqu'à la limite de l'atmosphère.

Pour pouvoir effectuer cette intégration par approximation, sans faire d'hypothèse sur la constitution de l'atmosphère, on développe en série après avoir posé

$$\frac{a}{r} = 1-\lambda \qquad \text{et} \qquad \frac{p\delta}{2(1+p\delta)} = \alpha;$$

d'où $$1+p\delta = \frac{1}{1-2\alpha} \qquad \text{et} \qquad p = \frac{1}{\delta}\frac{2\alpha}{1-2\alpha},$$

la hauteur de l'atmosphère étant très faible comparativement au rayon de la Terre, λ est une très petite quantité. D'un autre côté, les physiciens ont déterminé pour l'air la valeur de p, qui est très petite; de sorte qu'il en est de même de celle de α.

En substituant les expressions précédentes dans l'équation (5) il viendra d'abord

$$d\theta = \frac{-\frac{1}{\delta}\frac{2\alpha}{1-2\alpha}\sin z_1 \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}}(1-\lambda)\,d\rho}{2\left(1+\frac{\rho}{\delta}\frac{2\alpha}{1-2\alpha}\right)\sqrt{1+\frac{\rho}{\delta}\frac{2\alpha}{1-2\alpha}-(1-2\lambda+\lambda^2)\frac{1}{1-2\alpha}\sin^2 z}}$$

Simplifions et multiplions haut et bas par $\cos z_1$, on aura

$$d\theta = \frac{-\frac{1}{\delta}2\alpha\,\mathrm{tg}\,z_1\,(1-\lambda)\,d\rho}{\left\{1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\delta}\right)\right\}\sqrt{\frac{1-2\alpha+\frac{\rho}{\delta}2\alpha-(1-2\lambda+\lambda^2)\sin^2 z_1}{\cos^2 z_1}}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{\delta}\alpha\,\mathrm{tg}\,z_1\,(1-\lambda)\,d\rho}{\left\{1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\delta}\right)\right\}\sqrt{1-2\left[\frac{\alpha\left(1-\frac{\rho}{\delta}\right)}{\cos^2 z_1}-\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\right)\mathrm{tg}^2 z_1\right]}}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Développons actuellement les deux facteurs du dénominateur, que nous ferons d'abord passer au numérateur; nous aurons successivement

$$d\theta = -\frac{\alpha}{\delta} tg\, z_1 (1-\delta)\left\{1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\delta}\right)^{-1}\left[1-2\left\{\frac{\alpha-\left(1-\frac{\rho}{\delta}\right)}{\cos^2 z_1}\left(\delta-\frac{1}{2}\delta^2\right)tg^2 z_1\right\}\right]^{-\frac{1}{2}} d\rho =$$

$$= -\frac{\alpha}{\delta} tg\, z_1 (1-\delta)\left\{1+2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\delta}\right)+\cdots\right\}\left\{1+\left[\frac{\alpha\left(1-\frac{\rho}{\delta}\right)}{\cos^2 z_1}-\left(\delta-\frac{1}{2}\delta^2\right)tg^2 z_1+\cdots\right]\right\} d\rho.$$

et en négligeant les termes du 3e ordre en α et δ,

$$d\theta = -\frac{\alpha}{\delta} tg\, z_1 (1-\delta)\, d\rho - \frac{2\alpha^2\left(1-\frac{\rho}{\delta}\right)}{\delta} tg\, z_1\, d\rho - \frac{\alpha^2}{\delta}\left(1-\frac{\rho}{\delta}\right)\frac{tg\, z_1}{\cos^2 z_1}\, d\rho +$$

$$+ \frac{\alpha}{\delta} tg^3 z_1\, \delta\, d\rho + \cdots\cdots$$

En rapprochant les termes en $\delta\, d\rho$, et en mettant $-\frac{\alpha}{\delta} tg\, z_1$ en facteur, il vient

$$d\theta = -\frac{\alpha}{\delta} tg\, z_1\left\{d\rho - \frac{\delta\, d\rho}{\cos^2 z_1} + \alpha\left(1-\frac{\rho}{\delta}\right)\frac{2\cos^2 z_1 + 1}{\cos^2 z_1}\, d\rho\right\}$$

d'où en intégrant $\theta = -\frac{\alpha}{\delta} tg\, z_1\left\{\rho - \frac{1}{\cos^2 z_1}\int \delta\, d\rho + \alpha\frac{2\cos^2 z_1+1}{\cos^2 z_1}\left(\rho - \frac{\rho^2}{2\delta}\right)\right\} + C$;

et, en prenant la limite de l'atmosphère pour laquelle $\rho = 0$ et $\rho = \delta$,

$$\theta = -\frac{\alpha}{\delta} tg\, z_1\left\{-\delta - \frac{1}{\cos^2 z_1}\int_0^{\delta} \delta\, d\rho - \frac{\frac{1}{2}\alpha(2\cos^2 z_1+1)}{\cos^2 z_1}\delta\right\};$$

ou $$\theta = \alpha\, tg\, z_1\left\{1 + \frac{\frac{1}{2}(\cos^2 z_1+1)}{\cos^2 z_1} + \frac{1}{\cos^2 z_1}\int_0^{\delta} \delta\, d\rho\right\}.$$

Il ne reste plus maintenant que $\delta\, d\rho$ sous le signe $\int$. En intégrant par parties, on aura

$$\int \delta\, d\rho = \delta\rho - \int \rho\, d\delta,$$

et en prenant les limites indiquées pour ρ, comme pour $\rho = \delta$, $\delta = 0$, $\delta\rho$ disparaîtra, et l'on aura simplement

$$\int_0^{\delta} \delta\, d\rho = \int_0^{\Delta} \rho\, d\delta,$$

en appelant Δ la valeur de δ à la limite supérieure de l'atmosphère.

Considérons une couche d'air infiniment mince dans une colonne verticale

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ayant pour section l'unité de surface ; si ϖ désigne la pression à la partie inférieure de la couche, et g la densité de la pesanteur à cette hauteur, on aura :

$$d\varpi = -g\rho\,ds ;$$

mais
$$\frac{a}{r} = 1 - \delta ;$$

donc
$$-\frac{a\,dr}{r^2} = -ds ;$$

ou
$$dr = ds\,\frac{r^2}{a} \qquad \text{et} \qquad d\varpi = -g\rho\,\frac{r^2}{a}\,ds .$$

D'un autre côté si l'on néglige l'effet de la force centrifuge, qui varie peu dans toute la hauteur de l'atmosphère, on aura, en désignant par G l'intensité de la pesanteur à la surface de la Terre :

$$\frac{g}{G} = \frac{a^2}{r^2} ;$$

d'où
$$g = \frac{a^2}{r^2}\,G \qquad \text{et} \qquad d\varpi = -G\rho\,a\,ds ;$$

par conséquent
$$-\int_0^s \rho\,ds = \frac{1}{Ga}\int_\pi^0 d\varpi = -\frac{\pi}{Ga} ,$$

π étant la pression à la base de la colonne d'air. Or si nous désignons par H la hauteur d'une atmosphère idéale de densité constante qui ferait équilibre à cette pression π que l'on constate dans la dernière couche, le poids d'une colonne ayant pour pression l'unité, y serait

$$GH\delta = \pi ;$$

d'où
$$\frac{\pi}{G} = \pi\delta ;$$

ainsi
$$\int_0^s \delta\,d\rho = -\int_0^s \rho\,ds = -\frac{H}{Ga} = -\frac{H\delta}{a} ;$$

l'expression
$$\theta = \alpha\,\mathrm{tg}\,z_1\left\{1 + \frac{\alpha}{2}\,\frac{2\cos^2 z_1 + 1}{\cos^2 z_1} + \frac{1}{\delta\cos^2 z_1}\int_0^s \delta\,d\rho\right\}$$

devient donc
$$\theta = \frac{\alpha\,\mathrm{tg}\,z_1}{\sin 1''}\left\{1 + \frac{\frac{1}{2}\alpha(2\cos^2 z_1 + 1) - \frac{H}{a}}{\cos^2 z_1}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Les constantes de cette formule sont le rayon terrestre a, α et H. On peut prendre pour a le rayon équatorial qui est égal à $6\,366\,198^m$ (1) ; quant aux valeurs de

(1) On verra en Géodésie comment on a trouvé cette valeur du rayon de l'équateur terrestre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

α et de H, elles ont été déterminées pour l'état de la couche d'air dans laquelle est placé l'observateur; c.à.d. à 10° centésimaux de température et à la pression barométrique de $0^m,760$.

D'après MM. Biot et Arago, la densité du mercure est 10473, celle de l'air à 0° et sous la pression $0^m,760$ étant prise pour unité, et la hauteur de l'atmosphère fictive dans les mêmes conditions de température et de pression serait

$$H_0 = 7960^m;$$

par d'autres considérations, Laplace a trouvé

$$H_0 = 7974^m$$

. Enfin les résultats obtenus par M. Regnault donneraient

$$H_0 = 7993^m,15.$$

Mais les différences qui existent entre ces nombres sont peu sensibles sur les résultats relatifs à la réfraction.

D'après la valeur de $\frac{l^2-1}{\rho} = p$, pour l'air, $\alpha = \frac{p\delta}{2(1+p\delta)}$ devenant $\alpha = \frac{p}{2(1+p)}$ à la température de 0° et sous la pression de $0^m,760$ pour laquelle $\delta = 1$, M. Biot a trouvé:

$$\alpha_0 = 0,000293434;$$

par des observations astronomiques, Delambre avait obtenu

$$\alpha_0 = 0,000293878.$$

En adoptant les nombres de Laplace et de Delambre, la formule (6) devient

$$\theta_0 = 60'',56706\ tg\, z_1 - 0'',067018\ tg^3 z_1.$$

Il s'agit actuellement de chercher jusqu'à quelle limite de distance zénithale cette formule approximative peut suffire pour calculer les réfractions.

Pour cela, on pousse le développement de $d\theta$ jusqu'aux termes du 3e ordre en α et δ, et en discutant ces termes, on reconnaît que le plus considérable est égal à

$$-\frac{3}{2}\frac{\alpha}{\rho}\,\delta^2\, tg^5 z_1\, d\rho,$$

et qu'il est diminué par tous ceux du même ordre; en sorte que, pour les distances zénithales pour lesquelles ce terme sera négligeable, la formule précédente suffira.

Or, l'intégrale de ce terme prise entre les limites $\rho = 0$ et $\rho = \delta$ est

$$-\frac{3}{2}\frac{\alpha}{\rho}\, tg^5 z_1 \int_\rho^\delta \delta^2\, d\rho;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En intégrant par parties, il vient

$$\int s^2 d\rho = s^2\rho - 2\int \rho\, s\, ds,$$

et en prenant les limites

$$\int_s^o d\rho = -2\int_o^s s \times \rho\, ds;$$

car $s^2\rho$ est nul pour $\rho = 0$; et pour $\rho = \delta$ s étant alors nul.

Le terme intégré est donc égal à

$$3\,\frac{\alpha}{r}\,tg^2 z, \int_o^s s\rho\, ds.$$

Mais il est facile de prouver que $\int_o^s s\rho\, ds$ est plus grand dans l'hypothèse d'une température uniforme que dans toute autre.

En effet, nous venons de trouver

$$d\varpi = -Ga\rho\, ds,$$

et, d'après cela, on voit que $\rho\, ds$ est une partie de la masse d'air contenue dans la couche de rayon r.

Or, si la température était uniforme, cette masse d'air serait à une plus grande hauteur que dans la réalité, où la température allant en décroissant à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère, la couche d'air de condensent, et par suite s est plus faible dans l'atmosphère réelle que dans une atmosphère de température uniforme.

Il en est de même pour $s\rho\, ds$, et par conséquent pour le terme

$$3\,\frac{\alpha}{r}\,tg^2 z, \int_r^s s\rho\, ds.$$

Cherchons donc ce que devient ce terme dans l'hypothèse d'une température uniforme.

Considérons de nouveau une colonne d'air verticale; en conservant les notations précédentes, nous aurons

$$d\varpi = -Ga\rho\, ds \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

comme dans une atmosphère de température uniforme, les pressions sont proportionnelles aux densités, on a encore

$$\frac{\varpi}{\pi} = \frac{\rho}{\delta} \qquad \text{ou} \qquad \varpi = \frac{\pi}{\delta}\rho \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

et en divisant (1) par (2)

$$\frac{d\varpi}{\varpi} = -\frac{Ga}{\pi}\,\delta\, ds;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mais

$$\pi = G\delta H ;$$

H représentant encore la hauteur d'une atmosphère idéale de densité constante.

Donc $$\frac{d\varpi}{\varpi} = -\frac{a}{H}\, ds ;$$

et en intégrant $$l.\varpi = -\frac{a}{H}\, s + C.$$

A la surface de la Terre $s = 0$ et la pression est π ; par conséquent

$$C = l.\pi \qquad \text{et} \qquad l.\frac{\varpi}{\pi} = -\frac{ds}{H} ;$$

d'où $$\varpi = \pi e^{-\frac{as}{H}} ;$$

ou bien, comme les densités sont proportionnelles aux pressions,

$$\rho = \delta e^{-\frac{as}{H}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Nous avons posé

$$\frac{a}{r} = 1 - s ,$$

d'où $$\frac{r}{a} = \frac{1}{1-s} = 1 + s + s^2 + \ldots\ldots\ldots$$

s étant une quantité très petite, on a sensiblement

$$r = a + as ;$$

de sorte que as représente la hauteur de la couche d'air dont la densité est ρ. On voit donc, d'après l'équation (3) que dans une atmosphère dont la température serait uniforme, la pression et la densité des couches décroîtraient en progression géométrique quand la hauteur décroîtrait en progression arithmétique

Si l'on substitue maintenant la valeur de ρ dans l'intégrale

$$3\frac{\alpha}{\delta}\, tg^5 z, \int_0^{\circ} s\rho\, ds ,$$

l'atmosphère étant indéfinie, on aura, pour la limite supérieure de cette intégrale

$$r = \infty ;$$

et par conséquent $\quad 1 - s = 0 \quad$ ou $\quad s = 1 ;$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'expression deviendra donc

$$3\alpha\, tg^5 z_1 \int_0^1 e^{-\frac{as}{H}}$$

laquelle est évidemment moindre que

$$3\alpha\, tg^5 z_1 \int_0^\infty e^{-\frac{as}{H}} 1\,ds$$

Or, l'on sait que

$$\int_0^\infty e^{-\frac{as}{H}} 1\,ds = \frac{H^2}{a^2};$$

et l'on a par conséquent

$$3\alpha\, tg^5 z_1 \int_0^1 e^{-\frac{as}{H}} 1\,ds < 3\alpha\, tg^5 z_1\, \frac{H^2}{a^2}.$$

Pour $z = 79°$ et avec les valeurs précédentes de a_1, α_0 et H_0,

$$3\alpha\, tg^5 z_1\, \frac{H_0^2}{a^2}$$

est à peine égale à 1"; donc, pour toutes les distances zénithales moindres que 79°, la somme des termes négligés ne s'élève certainement pas à 1", et l'on peut adopter d'après cela la formule

$$\theta = 60".56706\, tg\, z_1 - 0",067018\, tg^3 z_1,$$

pour calculer les réfractions depuis $z_1 = 0$ jusqu'à $z_1 = 74°$, c'est-à-dire dans les limites dans lesquelles on observe le plus ordinairement.

Mais pour de plus grandes distances, les termes négligés deviendraient de plus en plus sensibles, et l'on ne peut évidemment pas employer une formule développée suivant les puissances de $tg\, z_1$; supposons donc que nous nous arrêtions à la distance de 74°: nous pourrons déjà construire une table assez étendue qui donnera les réfractions pour l'état particulier de la couche inférieure de l'atmosphère pour lequel la température est 0° et la pression 0m,760.

Il s'agit actuellement de voir comment on calculera les réfractions pour un état correspondant à une température et à une pression quelconques.

Coefficients météorologiques [1]. — Désignons par α le coefficient de dilatabilité de l'air, égal à 0,003665, d'après M. Regnault, et par m celui du mercure

---

[1] Exigé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

égal à 0,00018018.

Soit h une hauteur barométrique et t une température pour laquelle on veut connaître la valeur de la réfraction.

On ramènera d'abord la hauteur du baromètre à ce qu'elle serait si le mercure ne s'était pas dilaté, en divisant h par $1+mt$.

Actuellement, si l'on considère une masse d'air qui occupe un volume égal à l'unité, à 0° et sous 0m,760 de pression, cette même masse occupera un volume égal à $1+\alpha t$ sous la même pression, et à $t°$; sous la pression $\frac{h}{1+mt}$ ce volume sera

$$(1+\alpha t)\,\frac{0,760}{\left(\frac{h}{1+mt}\right)},$$

ou

$$(1+\alpha t)(1+mt)\,\frac{0,760}{h};$$

le produit de ce volume par la densité cherchée δ de l'air sera égal au produit du volume 1 par la densité de l'air à 0° et à 0m,760, qui est également prise pour unité; ainsi

$$\frac{(1+\alpha t)(1+mt)\times 0,760}{h}\times\delta = 1;$$

d'où

$$\delta = \frac{h}{(1+\alpha t)(1+mt)\times 0,760}.$$

État hygrométrique. — On néglige la correction relative à la présence de la vapeur d'eau dans l'atmosphère, parce que, si d'une part le pouvoir réfringent de la vapeur d'eau est plus grand que celui de l'air sec, de l'autre, à tension égale, sa densité est inférieure à celle de l'air, en sorte qu'il y a à peu près compensation. Les constantes ont d'ailleurs été déterminées pour un état hygrométrique moyen de l'air.

M. Caillet, Examinateur de la Marine, qui a calculé il y a quelques années de nouvelles tables de réfraction, a également construit des tables pour les facteurs thermométrique et barométrique en se fondant sur le principe précédent et en l'appliquant à la formule

$$\theta = \frac{\alpha}{\sin 1''}\operatorname{tg} z_1 + \frac{\alpha^2}{\sin 2''}\,\frac{1+2\cos^2 z_1}{\cos^2 z_1}\operatorname{tg} z_1 - \frac{\alpha}{\sin 1''}\,\frac{H}{a}\,\frac{\operatorname{tg} z_1}{\cos^2 z_1}.$$

D'après la valeur de α

$$\alpha = \frac{p\delta}{2(1+p\delta)}$$

δ étant très petit, on peut admettre que α et α_0 sont sensiblement proportionnels aux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

densité ; de sorte que

$$\alpha = \alpha_0 \frac{h}{0,760\,(1+\alpha t)(1+mt)}$$

D'un autre côté relativement à H, si la température restait constante, la pression étant proportionnelle à la densité, H resterait constant, quel que fut l'état du baromètre ; car $\pi = G\,\delta H$; mais si la température change, H se dilatera ; de sorte que

$$H = H_0\,(1+\alpha t)\,;$$

en posant $\eta = \frac{h}{0,760}$ et $\varepsilon = \frac{1}{(1+mt)(1+\alpha t)}$

pour une pression et une température quelconques, la formule précédente devient

$$\theta = \frac{\alpha_0}{\sin 1''}\,\eta\,\varepsilon \operatorname{tg} z_1 \frac{\alpha_0^2}{\sin 2''}\,\eta^2\,\varepsilon^2\,\frac{1+2\cos^2 z_1}{\cos^2 z_1}\operatorname{tg} z_1 - \frac{\alpha_0}{\sin 1''}\,\eta\,\frac{1}{1+nt}\,\frac{H_0}{a}\,\frac{\operatorname{tg} z_1}{\cos^2 z_1},$$

ou

$$\theta = \theta_0\,\eta\,\varepsilon + \frac{\alpha_0}{\sin 1''}\left[\frac{\alpha_0}{2}\,(\eta\varepsilon - 1) - \frac{H_0}{a}\,\alpha t\right]\frac{\operatorname{tg} z_1}{\cos^2 z_1} + \frac{\alpha_0^2}{\sin 1''}\,\eta\,\varepsilon\,(\eta\varepsilon - 1)\operatorname{tg} z_1\,;$$

tant que z_1 ne dépasse pas 85°, le dernier terme ne s'élève jamais à plus de quelques centièmes de seconde et en tout-à-fait négligeable.

Les tables de M. Caillet sont calculées pour la température de 0° et la pression de 0m,760, conditions auxquelles se rapporte précisément la formule de la réfraction. Il en a facilement déduit une table des réfractions moyennes correspondant à la température de 10° et à la pression de 0m,760. C'est cette dernière qui fut une des premières années dans la Connaissance des temps.

De 0° à 74°, M. Caillet s'est servi de la formule établie précédemment ; au delà il a fait usage d'une autre formule également due à Laplace, mais plus compliquée et qui est fondée sur une hypothèse relative à la constitution de l'atmosphère, constitution qui nous est encore inconnue.

Avant d'indiquer cette formule, nous allons passer en revue les principales méthodes proposées par les Astronomes et les Géomètres, pour construire les tables de réfraction.

Aperçu historique de la question des réfractions.[1] — Les anciens avaient remarqué les effets de la réfraction ; mais leurs moyens d'observation ne leur avaient pas permis de les déterminer avec exactitude.

Tycho-Brahé paraît être le premier qui ait construit une table d'après la comparaison des observations des distances zénithales de différentes étoiles à leurs passages supérieurs et inférieurs. Comme ses instruments ne lui donnaient les

---

[1] D'après Delambre et Biot : non exigé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

angle qu'à une minute près, il admettait que la réfraction était nulle jusqu'à 45°, moins exact en cela que Ptolémée, qui ne croyait la réfraction nulle qu'au zénith.

La caille construisit aussi approximativement une Table, en comparant les différences des distances zénithales méridiennes de plusieurs étoiles en deux lieux éloignés en latitude.

La première formule en celle de D. Cassini (1661). Elle en fondée sur l'hypothèse d'une atmosphère de densité moyenne uniforme substituée à l'atmosphère réelle, et s'accorde avec les formules plus exactes jusque vers 65°, ce qui n'a rien de surprenant, d'après la remarque que nous avons faite relativement au peu d'épaisseur de l'atmosphère, et par suite à la faible amplitude de la trajectoire dans ces limites; toutefois, cette hypothèse altère trop la véritable condition de la constitution de l'atmosphère; et au delà de 65° à 70°, la réfraction que l'on trouve dans la Table de Cassini, sont tout-à-fait inexactes.

Newton a donné une formule vers 1721. La méthode par laquelle il y est parvenu n'a été connue qu'en 1835 par la publication de sa correspondance avec Flamsteed, par M. Baily. L'ignorance où l'on était de son temps à l'égard des principales données physiques de la question l'a seule empêché d'arriver à des résultats pratiques satisfaisants. Sa formule, quoique beaucoup plus savante que celle de Cassini, en bien moins exacte.

L'hypothèse de Newton consistait à admettre que dans toute l'atmosphère les pressions étaient proportionnelles aux densités; ce qui revient à l'hypothèse d'une température uniforme et se trouve par conséquent fort en désaccord avec la réalité. Néanmoins cette hypothèse aurait conduit, comme toute autre, à des résultats assez exacts jusque vers 70°; mais Newton voulant donner une formule pour la réfraction jusqu'à l'horizon, avait déterminé les constantes au moyen de fortes distances zénithales que lui avait communiqué Flamsteed. De là l'inexactitude de sa Table: Cassini, au contraire, avait employé des réfractions correspondant à des distances zénithales peu considérables et bien observées.

Bradley, se fondant probablement sur la remarque que, pour les faibles distances zénithales, les réfractions étaient sensiblement proportionnelles aux tangentes de ces distances, eut l'idée de faire entrer un multiple de la réfraction sous le signe tangente, afin de ne pas arriver à l'infini à l'horizon. Sa formule en celle-ci

$$\theta = m \operatorname{tg} (z_1 - n\theta),$$

dans laquelle $m = 57''$ et $n = 3$.

Bradley détermina les constantes m et n d'après d'excellentes observations qu'il avait faites lui-même, et sa Table, beaucoup plus exacte que celles que l'on connaissait auparavant, en restée en usage jusque dans ces derniers temps, dans plusieurs grands observatoires.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La formule de Bradley paraît avoir été établie d'une manière tout à fait empirique ; mais il est à remarquer qu'on la retrouve lorsqu'on essaie l'hypothèse du décroissement de densité en progression arithmétique, quand les hauteurs croissent elles-mêmes suivant une progression semblable. C'est une des hypothèses examinées par Laplace, bien qu'elle ne représente pas rigoureusement ces états.

Pour la réfraction géodésique dont nous aurons à nous occuper plus tard, comme la station d'où l'on observe et le signal sur lequel on vise sont dans des couches de hauteurs peu différentes, cette hypothèse peut être admise sans erreur sensible, et elle conduit alors à cette loi simple que la réfraction géodésique est proportionnelle à l'angle des verticales des deux points considérés.

Picard en France, Newton et Halley en Angleterre, avaient démontré qu'il était indispensable de tenir compte des variations de la température et de la pression de l'air dans une même ligne d'observation. Cependant les coefficients thermométrique et barométrique ne furent introduits que vers le milieu du 18e siècle par les trois grands Astronomes que possédaient alors l'Angleterre, la France et l'Allemagne : Bradley, Lacaille et Tobie Mayer.

Après Laplace, un autre Géomètre, Kramp, partant de l'hypothèse de Newton et se servant de données physiques plus récentes, était parvenu à une formule qui donne les réfractions jusqu'à l'horizon, plus exactement qu'on ne l'avait fait auparavant. Ses travaux ont servi de point de départ à ceux de Laplace sur le même sujet.

Nous n'entreprendrons pas d'exposer l'analyse de Laplace pour le cas des distances zénithales ; mais nous pourrons au moins en donner une idée succincte.

La loi de la constitution de l'atmosphère est comprise entre les deux limites qui correspondent aux hypothèses de Cassini et de Newton : une densité constante et une densité décroissant en progression géométrique quand la hauteur croît en progression arithmétique ; ce qui revient, comme nous l'avons démontré, à supposer la température de l'atmosphère uniforme dans toute son étendue.

La première de ces deux hypothèses donne pour la hauteur de l'atmosphère comptée à partir du niveau de la mer à la température de 0° et sous la pression de 0m,760

$$H = 7974^{m}$$ (Ce nombre a été déduit par Laplace d'observations barométriques faites à différentes hauteurs).

On en conclut, pour la valeur de la réfraction horizontale

$$\theta_h = 21' 30''$$ tandis que les Astronomes trouvent

$$\theta_h = 35'$$ environ ;

d'où il résulte que l'hypothèse d'une densité constante donne une réfraction horizontale beaucoup trop faible.

Par la seconde hypothèse, celle de la température uniforme, on trouve dans les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mêmes circonstances de température et de pression.

$$\theta_h = 39' 54'',$$

réfraction trop forte ; ce qui prouve que l'hypothèse en fausse ; et en effet, l'on sait que la température va en diminuant assez rapidement à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère. Or, comme l'air se condense par le froid, il en résulte que la différence de densité d'une couche de l'atmosphère à la couche immédiatement supérieure en diminuée. La limite de cette diminution correspondrait à l'hypothèse d'une différence nulle ou d'une densité constante ; et l'on a vu que dans ce cas la réfraction horizontale était trop faible.

On obtient des limites plus étroites en partant d'une nouvelle loi hypothétique, dont l'expression est celle-ci :

$$\frac{a}{r} = \left(\frac{l}{l_1}\right)^m$$

dans laquelle m est une quantité qui répond à ce que l'on appelle le coefficient de la réfraction dans la théorie des réfractions géodésiques.

On démontre facilement que cette équation exprime l'hypothèse du décroissement de la densité en progression arithmétique quand la hauteur des couches croît suivant une progression semblable, et que la hauteur de l'atmosphère en double de celle que l'on trouve dans l'hypothèse d'une densité constante.

Enfin, quant au décroissement de la température, on trouve qu'il est de 1° pour 63^{m}80 d'élévation dans l'atmosphère ; les observations ont prouvé que la diminution de la chaleur était moins rapide.

Dans l'atmosphère d'une densité constante, il faut s'élever de moitié moins pour éprouver une diminution de 1° ; celle-ci en donc plus éloignée de satisfaire à la fois aux observations relatives aux réfractions et à la chaleur.

D'après cela, la loi de la nature se trouve comprise entre des limites qui donnent l'hypothèse d'une densité décroissant en progression arithmétique et celle d'une densité décroissant en progression géométrique, lorsque les hauteurs croissent en progression arithmétique.

C'est en combinant ces deux hypothèses de manière à obtenir des expressions qui se prêtassent à l'intégration que Laplace est parvenu à la formule de la réfraction étendue jusqu'à l'horizon. Les constantes y sont déterminées de manière à donner pour θ_h la réfraction même trouvée par l'observation.

$$\theta = 2790'',157,\ 0,754916 - 0,4904167\, T^2 \sin z, \frac{z}{\sqrt{\pi}}\, e^{T^2} \int_T^\infty e^{-t^2} dt - 10021'',343 \sin 2z, ;$$

dans cette formule $T = 25,961924 \cos z$, et t est une fonction de T.

La loi hypothétique qui conduit à cette formule donne un décroissement de 46°,24 pour une hauteur de 6909^m,64 lorsqu'on adopte pour donnée la réfraction horizontale

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

35', 6". L'ascension de Gay-Lussac avait donné une différence de 40° 25' pour 6980^m au-dessus du niveau de la Seine. Ces deux résultats concordent autant qu'on pouvait l'espérer en pareil cas.

Lorsqu'on a exceptionnellement à observer des astres dont la distance zénithale est supérieure à 90°, on déduit simplement la valeur de la réfraction de celle qui correspond à une distance zénithale moindre que 90° et qui diffère autant de cet angle que la distance zénithale dont il s'agit, en remarquant que la trajectoire du rayon lumineux a été horizontale en un certain point de l'atmosphère et qu'elle est symétrique de part et d'autre de la verticale de ce point.

Un célèbre Géomètre anglais, Ivory, a repris le problème des réfractions depuis Laplace et l'a traité en représentant la constitution de l'atmosphère par une expression parabolique composée des deux premières puissances des densités; ce qui donne une seule parabole pour toute l'atmosphère, hypothèse contredite par les observations barométriques de MM. de Humboldt et Boussingault et par celle de Gay-Lussac dans son ascension aérostatique. Les résultats auxquels est parvenu Ivory n'en sont pas moins très remarquables, et son analyse mettra peut-être sur la voie d'une solution complète de la question des réfractions.

Enfin Bessel a construit une Table fondée sur des observations directes qui ne donne que la variation des réfractions pour les faibles hauteurs avec une très grande exactitude, mais pour toutes les hauteurs auxquelles on observe ordinairement les astres, cette Table est une des meilleures que l'on possède, et les Astronomes étrangers en font généralement usage.

En France, on continue à préférer les Tables calculées au moyen des formules de Laplace; et nous avons vu, en effet, que ce sont encore ces formules dont M. Caillet s'est servi pour construire les Tables qui sont insérées dans la Connaissance des temps.

Il convient de se rappeler que la première des deux formules de Laplace est indépendante de toute hypothèse sur la constitution de l'atmosphère et suffit pour calculer les réfractions correspondantes aux distances zénithales auxquelles on observe le plus ordinairement. Quant à la seconde, elle s'appuie sur une hypothèse et est soumise à la condition de donner la réfraction horizontale trouvée par les observations astronomiques. Or, cette réfraction est elle-même incertaine, et les observateurs les plus habiles, Piazzi, Delambre, Brinckley, Bessel, ont constaté des irrégularités très grandes dans les réfractions, dès 80° de distance zénithale; ce qui doit engager à ne se servir que rarement d'observations faites au delà de 80 à 85°.

Formules de Simpson. — Outre les formules indiquées ci-dessus, il en existe une autre d'une grande simplicité, qui est due à Simpson et au moyen de laquelle Delambre a remarqué que l'on pouvait calculer les réfractions avec beaucoup d'exactitude jusque vers 80 ou 82°, en attribuant aux constantes des valeurs différentes à mesure que l'on considérait des distances zénithales de plus en plus grandes; ces constantes pouvant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

se déduise d'observations directes. Cette formule est la suivante:

$$\sin(z - A\theta) = B \sin z.$$

On l'établit facilement en partant de l'hypothèse de Cassini, elle renferme celle de Bradley et l'on peut y ramener différentes formules données par d'autres astronomes.

Enfin, en dehors de toute théorie, on parviendrait à déterminer la latitude d'un lieu et la réfraction pour toutes les distances zénithales, en observant une même étoile depuis son passage au méridien est près du zénith jusque près de l'horizon. Mais il faut pour cela un excellent cercle azimutal. — Cette méthode a été employée par Piazzi à Palerme, avec le grand instrument construit par Ramsden.

(1) Delambre a encore remarqué que toutes les formules de réfraction pouvaient être développées en série sous la forme

$$\theta = A \operatorname{tg} z_1 + B \operatorname{tg}^3 z_1 + C \operatorname{tg}^5 z_1 + \ldots\ldots$$

$A, B, C \ldots\ldots$ étant des coefficients qui vont en décroissant rapidement; de sorte que l'on peut se borner à considérer les premiers termes à la condition de n'employer la formule que pour des distances zénithales au dessous de 80°. Il en a conclu qu'en se servant d'un nombre suffisant d'étoiles circompolaires, à leurs passages supérieurs et inférieurs au méridien, on pourrait déterminer ces coefficients en même temps que la latitude du lieu de l'observation; et, en effet, si l'on désigne la distance zénithale apparente d'une étoile à son passage supérieur par ξ_1 et la distance zénithale de la même étoile à son passage inférieur par z_1, les distances zénithales vraies correspondantes seront:

$$\xi_1 + A \operatorname{tang} \xi_1 + B \operatorname{tg}^3 z_1 + C \operatorname{tg}^5 \xi_1,$$

et

$$z_1 + A \operatorname{tg} z_1 + B \operatorname{tg}^3 z_1 + C \operatorname{tg}^5 z_1,$$

en négligeant les autres termes. Mais comme la somme des deux distances zénithales est égale au double de la distance du pôle au zénith, on aura

$$\xi_1 + z_1 + A(\operatorname{tg} \xi_1 + \operatorname{tg} z_1) + B(\operatorname{tg}^3 \xi_1 + \operatorname{tg}^3 z_1) + C(\operatorname{tg}^5 \xi_1 + \operatorname{tg}^5 z_1) = 2\lambda;$$

et l'on pourra former autant d'équations semblables que l'on aura observé d'étoiles. Pour déterminer A, B, C et λ, il suffit d'employer les observations de quatre étoiles circompolaires.

En appliquant cette méthode à des observations de distances zénithales faites par Méchain au fort de Montjouich, près Barcelonne, sur la polaire (α Petite Ourse), β Petite ourse, α Dragon et ξ Grande ourse, Delambre a trouvé pour la formule de la réfraction

$$\theta = 61''1766 \operatorname{tg} z_1 - 0''2648 \operatorname{tg}^3 z + 0''002485 \operatorname{tg}^5 z_1;$$

---

(1) Exigé

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et pour la colatitude de Montjouich

$$\lambda = 48^\circ\ 33'\ 19'',97$$

En prenant un nombre d'observations supérieur à celui des inconnues que l'on a à déterminer, on parviendrait à des résultats plus exacts par la discussion des équations de condition.

Des parallaxes de hauteur.

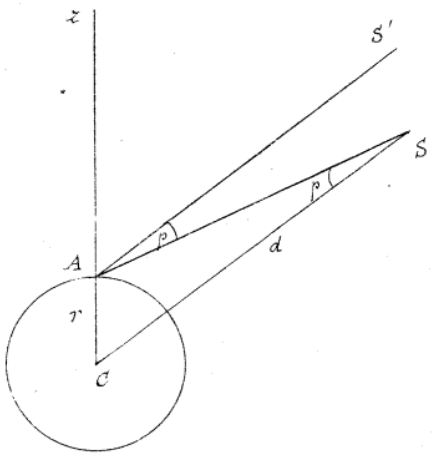
On sait que par suite de l'énorme distance qui nous sépare des étoiles, la position occupée par l'observateur à la surface de la Terre n'influe en rien sur les directions apparentes de ces astres. Il n'en est pas de même pour les corps célestes beaucoup plus rapprochés de nous, comme le Soleil, la Lune et les Planètes.

Les positions de ces derniers que l'on trouve inscrites dans les éphémérides astronomiques sont rapportées au centre de la Terre et pour comparer ces positions avec celles que l'on observe d'un point de la surface, il y a lieu de faire subir aux unes ou aux autres une correction.

Dans les observations immédiates dont nous nous occupons, comme celles que l'on fait au moyen du théodolithe ou des instruments méridiens cette correction ne porte que sur les hauteurs ou les distances zénithales; les passages au méridien ne sont en rien modifiés et les azimuts peuvent être eux-mêmes considérés comme inaltérés en général.

Cela résulte de la forme de la Terre qui est sensiblement celle d'un ellipsoïde de révolution très peu différent d'une sphère.

Soit, en effet, S le centre du Soleil, C le centre de la Terre et A le lieu de l'observation. Au lieu de voir l'astre dans la direction AS' parallèle à CS, l'observateur le voit dans la direction AS. Or, s'il est permis de supposer que la Terre soit sphérique, toutes ces lignes peuvent être considérées comme étant contenues dans un même plan qui passe par la verticale du lieu A. L'astre paraît donc abaissé mais sans sortir du vertical où il se trouve.



L'angle $S'AS$ dont l'astre paraît abaissé ou son égal ASC est une parallaxe.

1. Soit z_1 une distance zénithale observée;
   $z' = z_1 + \theta$ cette distance corrigée de la réfraction;
   r le rayon de la Terre;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d la distance du centre de la Terre et de l'astre observé et posons $\frac{r}{d} = \sin \pi$; π sera la parallaxe horizontale de l'astre ou l'angle sous lequel un observateur transporté au centre de l'astre verrait le rayon de la Terre.

On voit facilement, d'après la figure que la parallaxe de hauteur p ou la correction qu'il faut faire subir dans ce cas à z' sera donné par la formule $\sin p = \frac{r}{d} \sin z'$ ou,

$$p = \frac{\sin \pi}{\sin 1''} \sin z'$$

p étant toujours un angle très petit.

L'angle au centre cherché sera donc

$$z = z_1 + \theta - p$$

2. Lorsque l'angle z en connu, et c'est en effet cet angle qu'on obtient, par exemple, lorsqu'on calcule la distance zénithale d'un astre au moyen de l'heure et de la latitude du lieu de l'observation, on trouve l'angle z_1 par la formule inverse

$$z_1 = z - \theta + p \quad .$$

et p doit être calculé par la formule

$$p = \frac{\sin \pi}{\sin 1''} \sin z + \frac{\sin^2 \pi}{\sin 2''} \sin 2z + \frac{\sin^3 \pi}{\sin 3''} \sin 3z,$$

dont la démonstration donnée précédemment se rapporte précisément au cas actuel.

Pour les astres autres que la Lune, le premier terme de cette série est toujours suffisant.

La proximité de notre satellite exige même que l'on ait égard à la latitude du lieu de l'observation d'où dépend la grandeur du rayon terrestre en ce point ; c'est pourquoi l'on trouve dans les éphémérides la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune au moyen de laquelle on calcule la parallaxe horizontale relative au lieu d'où l'on observe, d'après une formule très simple à établir quand on connaît la forme exacte de la Terre.

Nous verrons plus loin comment on est parvenu à déterminer les parallaxes horizontales du Soleil et de la Lune à leurs distances moyennes de la terre et comment on calcule ces parallaxes et celles des autres astres du Système Solaire à un instant quelconque ; nous pourrons admettre dans ce qui va suivre que toutes les observations de distances zénithales sont corrigées de la parallaxe aussi bien que de la réfraction.

Chapitre V.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chapitre V.

Du Soleil.

Trajectoire apparente du Soleil.

Quand on observe le Soleil pendant un jour seulement et à la simple vue, son mouvement apparent se confond sensiblement avec celui de la Sphère céleste. Mais si l'on continue l'observation en notant avec soin les constellations qui se lèvent un peu avant ou qui se couchent un peu après lui, on ne tarde pas à reconnaître qu'il se déplace peu à peu dans le sens opposé à celui du mouvement diurne et comme les points de l'horizon où son lever et son coucher changent incessamment on voit que son ascension droite et sa distance polaire varient à la fois. Les observations poursuivies pendant une année entière montrent que cet astre reste pendant six mois dans l'hémisphère boréal et pendant les six autres mois dans l'hémisphère austral ; et si l'on détermine avec exactitude, pendant la même période, ses ascension droites et ses distances polaires lors de son passage au méridien, on reconnaît, soit par le calcul, soit en les rapportant graphiquement ses positions successives sur un globe, qu'il décrit un grand cercle incliné sur l'équateur ; ce grand cercle se nomme l'écliptique.

Lorsqu'on veut observer le Soleil à l'aide de lunettes, il est indispensable de placer au devant de l'oculaire un verre fortement coloré, afin d'atténuer l'éclat excessif de son image qui, sans cette précaution, blesserait les yeux de l'observateur [1]. Les mesures s'opèrent au moment où l'un des bords de cette image se trouve en contact avec le fil du réticule et les observations se rapportent ensuite facilement au centre du disque apparent qui est exactement circulaire.

Les deux points où l'écliptique coupe l'équateur céleste s'appellent l'un l'équinoxe de printemps et l'autre l'équinoxe d'automne et les deux points situés à 90° des premiers sont les solstices d'été et le solstice d'hiver. On verra plus loin les origines de toutes ces dénominations. L'écliptique est divisé en 12 signes, de 30° chacun, correspondant à douze constellations plus ou moins remarquables dont l'ensemble forme le zodiaque. Ces douze constellations sont : le Bélier, le Taureau, les Gémeaux, l'Ecrevisse, le Lion, la Vierge, la Balance, le Scorpion, le Sagittaire, le Capricorne, le Verseau et les Poissons. Leurs

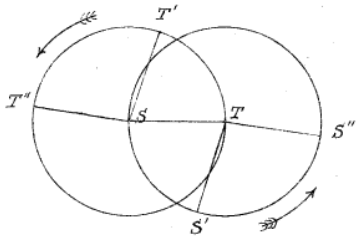
(1) Lorsqu'on emploie de grandes lunettes ou des télescopes, la chaleur concentrée par les objectifs peut, dans certains cas, faire éclater les verres colorés. Les observateurs exercés savent éviter ces accidents, soit en diaphragmant les ouvertures des lunettes, soit en employant immédiatement d'assez forts grossissements ; mais il est remarquable que les fils des réticules qui sont placés précisément aux foyers des objectifs, où la chaleur est à son maximum de concentration, n'en sont nullement altérés ; ce qu'il faut attribuer sans doute à leur extrême ténuité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

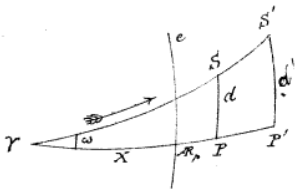
noms latins et l'ordre dans lequel ils se succèdent se retrouvent facilement au moyen du distique suivant :

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arciteneus, Caper, Amphora, Pisces.

Dans la théorie des mouvements réels, l'écliptique est le plan de l'orbite terrestre qui passe par le centre du Soleil et sur lequel est inclinée l'axe de rotation de la Terre. Le mouvement du Soleil et le mouvement réel de la Terre sont tous les deux dirigés dans le même sens. Soient S le Soleil et T, T', T'' trois positions successives de la Terre lorsque l'observateur, d'abord en T, vient en T' puis en T'', il se croit toujours en T et voit le Soleil dans les directions TS, TS', TS''. Le Soleil lui paraît donc décrire l'orbite $SS'S''$ et le mouvement de cet astre lui semble dirigé de droite à gauche comme le mouvement réel de la Terre autour du Soleil.



Éléments de la position de l'écliptique sur la sphère céleste. — La détermination de la position exacte de l'écliptique est la première recherche à entreprendre dans l'étude de la théorie du Soleil. Soit γ le point où l'écliptique coupe l'équateur, en passant de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal, c'est-à-dire l'équinoxe du printemps que l'on nomme encore le point vernal, et ω l'inclinaison de ces deux plans ou l'obliquité de l'écliptique. Il s'agit de déterminer ω et de rapporter la position du point γ à celle d'une étoile remarquable. Supposons qu'on ait observé à deux époques différentes, les déclinaisons d et d' du Soleil ainsi que les ascensions droites $\mathcal{R}_p$ et $\mathcal{R}'_p$ rapportées provisoirement à l'étoile choisie; enfin, désignons par X l'ascension droite de cette étoile comptée à partir de l'origine ordinaire, c'est-à-dire du point vernal; les deux inconnues de la question sont X et ω.



Aux époques des observations, les véritables ascensions droites du Soleil sont :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_p + X \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R}' = \mathcal{R}'_p + X,$$

et le triangle rectangle γSP donne

$$\sin(\mathcal{R}_p + X)\, \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg} d.$$

On a de même dans le triangle $\gamma S'P'$

$$\sin(\mathcal{R}'_p + X)\, \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg} d'.$$

Pour résoudre ces équations, on pose :

$$\operatorname{tg}\omega \cos X = x \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang}\omega \sin X = y.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Elles deviennent alors

$$\sin A_p\, x + \cos A_p\, y = \operatorname{tang} d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sin A'_p\, x + \cos A'_p\, y = \operatorname{tang} d' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

On en tire pour x et y des valeurs de la forme

$$x = \frac{M}{\sin (A'_p - A_p)}, \qquad y = \frac{N}{\sin (A'_p - A_p)};$$

que l'on substitue dans les équations

$$\operatorname{tg} \omega \cos X = x \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} \omega \sin X = y;$$

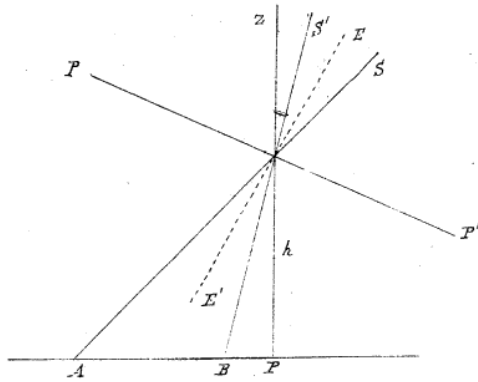
d'où l'on obtient $\operatorname{tg} X$ puis $\operatorname{tg} \omega$.

On voit par les expressions (1) et (2) que les résultats seront d'autant plus exacts que $\sin (A_p - A'_p)$ sera plus grand; de sorte que si l'on voulait se contenter de deux observations, il faudrait attendre, pour faire la seconde, que l'ascension droite ait varié de 90°.

On peut encore démontrer, soit par des considérations géométriques, soit analytiquement, que l'une des observations doit être faite à l'équinoxe et l'autre au solstice, et il en résulte que les observations deviennent à peu près indépendantes l'une de l'autre. C'est ainsi, en effet, que les astronomes ont toujours opéré.

Obliquité de l'écliptique. — Lorsque le soleil est parvenu à 90° des équinoxes, sa déclinaison en est égale à l'obliquité de l'écliptique, et comme elle atteint un maximum, elle varie très lentement, d'où en vient précisément le nom de solstice (sol stat); de sorte que si l'on connaît la latitude de l'observatoire, il suffit de mesurer la hauteur ou la distance zénithale méridienne de l'astre, à l'époque de l'un des solstices, pour en déduire l'obliquité de l'écliptique.

Les anciens astronomes déterminaient à la fois la latitude du lieu où ils observaient et l'obliquité de l'écliptique. Ils se servaient pour cela du gnomon, instrument formé ordinairement d'un style vertical érigé sur un sol dont la surface avait été rendue plane et horizontale. En mesurant dans le cours d'une année, au moment du passage supérieur du soleil au méridien, la longueur maximum AP et la longueur minimum BP de l'ombre de ce style dont la hauteur était également connue, on avait les éléments nécessaires pour le calcul de ω et de l.



En effet, en désignant par h la hauteur du style et par z et z' les distances zénithales méridiennes ZCS et ZCS' du soleil qui correspondent aux époques où l'ombre du gnomon atteint son maximum

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et son minimum, on a évidemment

$$tg\ z = \frac{AP}{h},$$

et

$$tg\ z' = \frac{BP}{h};$$

d'où l'on conclut

$$\frac{z - z'}{2} = \omega$$

et

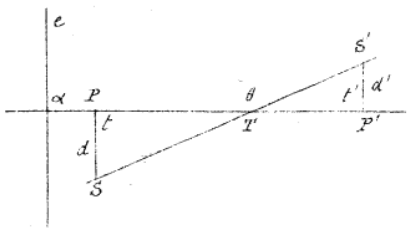
$$\frac{z + z'}{2} = l$$

En comparant les résultats ainsi obtenus à différentes époques depuis 1100 ans avant J.C (observations chinoises) jusque dans le commencement du siècle dernier, on a reconnu que l'obliquité de l'écliptique avait subi une diminution lente et progressive, phénomène dont la Mécanique céleste a donné l'explication en prouvant de plus qu'il ne se produirait pas indéfiniment dans le même sens.

Les déterminations faites au moyen du gnomon, très précieuses à cause des époques auxquelles elles remontent, sont loin d'avoir la précision des observations modernes; actuellement on observe l'obliquité de l'écliptique au cercle mural, et comme ce serait un hasard si l'instant du Solstice coïncidait exactement avec celui du passage du Soleil au méridien, on a soin de faire une correction appelée réduction au Solstice. Cependant cette correction serait à peine sensible si l'on ne faisait au cercle mural qu'une observation lors du passage le plus voisin du Solstice; mais comme pour obtenir plus d'exactitude on emploie ordinairement plusieurs observations faites durant une quinzaine de jours avant et une quinzaine de jours après, la correction devient indispensable. Toutefois, nous nous dispensons, pour abréger, de donner la formule de cette correction dont la démonstration ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

Point vernal. — La position du point vernal par rapport à l'étoile prise pour origine provisoire des ascensions droites se détermine de la manière suivante:

Si l'on a observé le Soleil à son passage méridien pendant deux jours consécutifs, la première observation ayant été faite quand la déclinaison était encore australe, et la seconde quand la déclinaison en devenue boréale, le Soleil aura traversé l'équateur dans l'intervalle; c'est l'instant du passage qu'il s'agit de déterminer.



Les ascensions droites sont comptées actuellement à partir du méridien céleste, c'est-à-dire que l'horloge est réglée sur le passage de cette étoile au méridien.

Soit α le point où ce méridien rencontre l'équateur; on a donc observé

1° $\alpha P = t$ $\quad PS = d$;

2° $\alpha P' = t'$ $\quad P'S' = d'$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'arc SS' décrit par le Soleil en 24 heures étant assez petit, et la déclinaison du Soleil variant avec la plus grande uniformité à cette époque, on peut admettre que l'on a la proportion

$$\frac{t'-t}{d+d'} = \frac{\theta - t}{d};$$

d'où

$$\theta = t + (t'-t)\,\frac{d}{d+d'},$$

θ désigne l'heure cherchée du passage du Soleil à l'équateur, c'est-à-dire l'ascension droite provisoire du point vernal comptée à partir du méridien de l'étoile, ou plutôt le complément à 24 heures de l'ascension droite absolue de l'étoile.

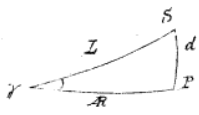
Remarquons que $t'-t$ surpasse 24 heures sidérales de l'excès du jour solaire sur le jour sidéral, c'est-à-dire de 4" environ.

On détermine encore la position du point vernal, ce qui revient au même, l'ascension droite absolue d'une étoile par une méthode dûe à Flamsteed et qui conduit à des résultats indépendants des incertitudes dont peuvent être affectées la latitude du lieu de l'observation, la réfraction ou la parallaxe du Soleil.

Elle consiste à observer, à deux époques éloignées d'un peu moins de six mois une même étoile située dans le voisinage de l'équateur et le Soleil lorsque sa déclinaison devient sensiblement égale à celle de cette étoile. La position de l'étoile étant supposée invariable pendant l'intervalle de temps qui s'écoule entre les deux époques, tandis que le Soleil s'est déplacé dans son orbite, la différence des ascensions droites des deux autres varie, dans cet intervalle, d'une quantité dont la moitié correspond à la distance du Soleil au solstice intermédiaire entre les deux positions successives; d'où l'on conclut immédiatement les distances du Soleil, et, par suite celle de l'étoile à l'équinoxe du printemps.

La déclinaison du Soleil ne pouvant pas être exactement la même que celle de l'étoile, dont la position ne reste pas non plus tout à fait invariable, les observations doivent subir quelques corrections, d'ailleurs très simples, et les résultats auxquels on parvient par cette méthode ont une grande exactitude.

Coordonnées écliptiques. — La position du plan de l'écliptique étant déterminée sur la sphère céleste, le diamètre perpendiculaire à ce plan en pris à son tour pour axe d'un nouveau système de coordonnées uranographiques qu'on appelle la longitude et la latitude célestes, mais qui n'ont aucun rapport avec la latitude et la longitude géographiques et que l'on peut, sans inconvénients, représenter dans les formules par les mêmes lettres, parce qu'il est impossible de les confondre les unes avec les autres.



Lorsqu'on voudra passer, pour un astre quelconque, des coordonnées équatoriales aux coordonnées écliptiques, ou réciproquement, on emploiera les formules générales de transformation; mais s'il s'agit du Soleil, en appelant L la longitude de l'astre comptée comme les ascensions

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

droites à partir du point vernal et dans le sens direct, on aura dans le triangle re
-tangle $\Upsilon S P$ les deux relations

$$\operatorname{tang} A R = \operatorname{tang} L \cos \omega,$$

$$\sin d = \sin L \sin \omega,$$

pour passer de l'un des systèmes à l'autre.

Nous admettrons ici que la latitude du Soleil, ou, ce qui revient au même, celle de la Terre soit toujours nulle; il n'en est pas rigoureusement ainsi, la théorie met en évidence des écarts qui se reproduisent de part et d'autre du plan de l'écliptique, et qui sont dus à l'action des autres corps de notre Système planétaire sur le globe terrestre; mais ces écarts que nous négligeons, n'atteignent jamais une seconde.

Année tropique. — L'année tropique est le temps qui sépare deux retours successifs du Soleil au même équinoxe. On obtient très exactement sa durée à l'aide d'observations faites à des époques éloignées; par exemple, en comparant celles de Bra
-dley et de Lacaille en 1750 avec les observations modernes, on a trouvé pour la durée moyenne de l'année tropique dans le courant du siècle qui vient de s'écouler

$$T = 366^{j}.5^{h}.48'.\ 24222.$$

Cette durée n'est pas constante. Laplace a démontré qu'elle était actuelle
-ment plus courte de 11^{s} que du temps d'Hipparque. Ce faible changement est dû à ce qu'on appelle les inégalités séculaires.

La position du point vernal et l'obliquité de l'écliptique varient également avec le temps. Nous reviendrons un peu plus loin sur ces phénomènes que l'observation a fait découvrir, et dont on a aujourd'hui l'explication complète; mais nous les né
-gligerons dans cette première étude de la Théorie du Soleil.

Chapitre VI.

Mouvement du Soleil dans le plan de l'écliptique.

Si le mouvement apparent du Soleil était uniforme, sa longitude, à une époque déterminée, serait proportionnelle au temps compté à partir de l'instant où elle était nulle; et en calculant les valeurs correspondantes de R et de d, on devrait trouver des résultats conformes à ceux que donne l'observation. Or, c'est ce qui n'a pas lieu. La longitude du Soleil ne varie donc pas proportionnellement au temps; en d'autres termes, son mouvement dans le plan de l'écliptique n'est

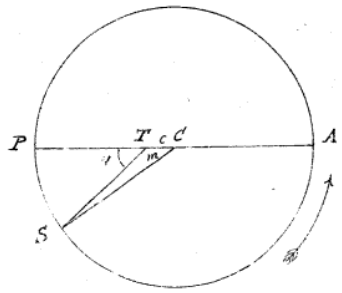
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par uniforme.

De plus, les variations du diamètre apparent du Soleil mesuré à différentes époques de l'année, au moyen d'un micromètre placé au foyer d'une lunette, ou bien avec l'héliomètre, prouvent que la distance de la Terre à cet astre n'est pas constante et permettent de déterminer la forme de la courbe que l'astre paraît décrire. (Rien pareille mesure micrométrique effectuée dans tous les sens ne tend à démontrer la parfaite circularité du disque solaire, du moins dans les limites de précision que comportent les instruments les plus délicats en usage aujourd'hui).

Les Anciens avaient reconnu l'inégalité du mouvement du Soleil par celle de la durée des saisons, qui est très sensible [1]; mais faute d'instruments précis, ils n'avaient pas pu étudier la loi des variations du diamètre apparent qui leur eût révélé l'inexactitude des théories qu'ils avaient imaginées [2], et dont nous allons dire quelques mots.

Hypothèse de l'excentrique. — Dans cette hypothèse, le mouvement du Soleil est circulaire et uniforme, mais la Terre n'est pas au centre du mouvement.



Le point P, où le Soleil est le plus rapproché de la Terre, s'appelle le périgée, le point A, où il est le plus éloigné, est l'apogée. L'angle PCS que l'on appelle anomalie moyenne, est proportionnelle au temps; l'angle PTS, qui n'en diffère que d'une petite quantité, et que l'on nomme anomalie vraie, se déduit facilement de la première.

Soient en effet m l'anomalie moyenne, v l'anomalie vraie, e la distance TC de la Terre au centre du mouvement. La différence des deux anomalies désignée sous le nom d'équation du centre sera, d'après la formule de Delambre, en prenant le rayon du cercle pour unité

$$v - m = \frac{e}{\sin 1''} \sin m + \frac{e}{\sin 2''} \sin 2m \ldots\ldots$$

---

(1) Ainsi, en 1850, la durée du printemps a été de 92^j 20^h 57^m;
celle de l'été " 93 14 0;
" de l'automne " 89 17 38;
" de l'hiver " 89 1 17.
et en ajoutant les durées des deux premières saisons et celles des deux dernières, on trouve 186^j 14^h 57^m et 178^j 18^h 55^m, dont la différence est trop grande pour échapper à la plus grossière observation.

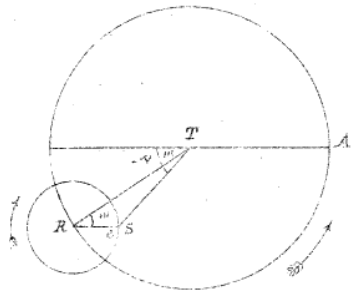
(2) En réalité on ne procède pas ainsi et l'on n'a jamais procédé ainsi à l'étude de la forme de l'orbite du Soleil; il suffit de concevoir que cela se pourrait à la rigueur.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

D'ailleurs si l'on désigne par T la durée de la révolution et que l'on pose $\frac{2\pi}{T} = n$, n sera le moyen mouvement en longitude, et l'on pourra représenter l'anomalie moyenne par nt.

En remplaçant m par cette valeur dans la formule précédente, on pourra calculer l'anomalie vraie du Soleil, et, par suite, sa longitude à un instant donné.

Hypothèse de l'epicycle. — Dans cette seconde hypothèse, le Soleil décrit, d'un mouvement uniforme et dans le sens rétrograde, un petit cercle dont le centre parcourt lui-même, dans le sens direct, une circonférence au centre de laquelle se trouve la Terre. Ce second mouvement est uniforme et tel que le rayon KS reste toujours parallèle à une même direction.



Le petit cercle porte le nom d'epicycle et la circonférence décrite par son centre s'appelle le déférent.

En adoptant la notation indiquée dans la figure, on retrouverait la même formule que pour l'hypothèse de l'excentrique.

Une conséquence de cette théorie qui suffit pour la rendre inadmissible, c'est que l'excentricité qu'il faudrait employer pour calculer la direction du Soleil est double de celle qui est donnée directement par l'observation des diamètres apparents à l'apogée et au périgée. Les Anciens qui croyaient naturellement que les mouvements des astres devaient s'effectuer dans des cercles restés uniformes, n'employaient d'ailleurs ces différentes hypothèses que pour trouver des solutions géométriques satisfaisantes et n'y attachaient pas d'idées absolues.

Le mouvement elliptique, dont il va être question, présente un accord remarquable avec les observations.

Lois de Képler. — Les véritables lois du mouvement de la Terre et des autres planètes autour du Soleil sont les suivantes :

1° Les planètes circulent autour du Soleil dans des courbes planes et leurs rayons vecteurs décrivent autour du centre de cet astre des aires proportionnelles au temps ;

2° Les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers ;

3° Les carrés des temps des révolutions sont proportionnels aux cubes des grands axes des orbites.

Ces lois ont été déduites par Képler des observations de Tycho-Brahé, à la suite de calculs immenses poursuivis avec une persévérance et une sagacité sans exemple. Newton a démontré ensuite qu'elles découlaient toutes les trois du principe de la gravitation universelle, sur lequel est fondé la Mécanique céleste.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La première de ces lois est une propriété de tout point attiré vers un centre fixe; on peut en donner, d'après Newton, une démonstration géométrique très simple.

La seconde pourrait se vérifier à la rigueur par l'observation, en ce qui concerne la forme de l'orbite terrestre, puisque les rayons vecteurs sont en raison inverse des diamètres apparents du Soleil vu des différents points de cette orbite.

Enfin, la troisième est une conséquence de ce que l'attraction des corps célestes est en raison inverse du carré de la distance. Mais nous devons nous borner ici à admettre ces lois comme ayant été déduites de l'observation, sans nous arrêter à des considérations d'un autre ordre, qui seront d'ailleurs développées dans le cours d'analyse.

Du mouvement elliptique. — L'application que nous allons faire des deux premières de ces lois se rapportera au mouvement apparent du Soleil autour de la Terre, parce que c'est en effet celui que nous observons immédiatement. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que si l'on suppose la Terre immobile, le Soleil devra avoir un mouvement apparent identique avec le mouvement de la Terre autour de cet astre. On s'en assurerait exactement comme on l'a déjà fait dans l'hypothèse du mouvement circulaire.

Il est bon de se rappeler que le but vers lequel on tend en définitive est de trouver le moyen d'assigner, pour une date quelconque, la direction du centre du Soleil déterminée par deux coordonnées sphériques, et la valeur du demi-diamètre apparent de cet astre dont on a besoin pour ramener au centre les observations des bords.

En adoptant d'abord les coordonnées écliptiques, la question se réduit, comme on le voit facilement, à chercher l'expression de la longitude du Soleil et celle de son rayon vecteur en fonction du temps, le demi grand axe de l'orbite étant pris pour unité de longueur, et la valeur du demi diamètre apparent à cette distance étant supposée connue. Or, c'est à quoi l'on parvient effectivement en se fondant sur les deux premières lois énoncées du mouvement elliptique.

Nous suivrons, dans la solution de cette question, la marche indiquée par Képler lui-même.

Problème de Képler. — L'ellipse décrite par le Soleil diffère à peine d'une circonférence de cercle, car le diamètre apparent de cet astre varie très peu; les aires que décrit le rayon vecteur sont donc, à peu de chose près, des secteurs circulaires proportionnels aux angles au centre, et en vertu de la première loi de Képler, ces angles sont aussi sensiblement proportionnels au temps.

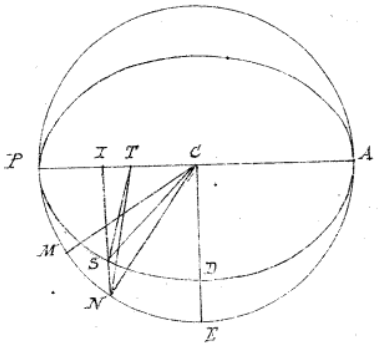
Le mouvement du Soleil ne diffère donc pas beaucoup de celui d'un mobile animé d'un mouvement uniforme dans une orbite circulaire dont la Terre serait le centre. C'est pourquoi il est commode de déterminer le mouvement exact en le comparant au mouvement très simple de cet astre fictif.

Soit PA le grand axe de l'ellipse décrite par le Soleil; la Terre étant en T à l'un des foyers de l'ellipse, P sera le périgée et A l'apogée. Nous prendrons pour orbite du Soleil fictif la circonférence décrite sur PA comme diamètre, et nous supposerons

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'il la parcourt dans le même temps que le Soleil accomplit sa révolution, de manière en outre à passer en même temps que lui au périgée et à l'apogée.

Cela posé S et M étant deux positions simultanées du Soleil vrai et du Soleil fictif, joignons le point S au point T et le point M au centre C; l'angle PTS est l'anomalie vraie, et l'angle PCM l'anomalie moyenne. Menons encore la perpendiculaire ISN sur le grand axe et joignons le point N au centre C; l'angle auxiliaire PCN a reçu le nom d'anomalie excentrique.



Appelons v l'anomalie vraie PTS,
m l'anomalie moyenne PCM,
u l'anomalie excentrique PCN,
e l'excentricité de l'ellipse TC,
r le rayon vecteur TS,

et prenons pour unité le demi-grand axe de l'ellipse ou la moyenne distance du Soleil à la Terre.

L'aire de l'ellipse étant décrite par le Soleil vrai dans le même temps que celle du cercle par le Soleil fictif, les aires des secteurs PTS, PCM seront dans le rapport de ces aires totales et par suite des lignes CE et CD. Or, on a, par des propriétés connues de l'ellipse

$$\frac{CE}{CD} = \frac{IN}{IS} = \frac{\text{Surf. } PTN}{\text{Surf. } PTS},$$

donc

$$\frac{\text{Surf. } PCM}{\text{Surf. } PTS} = \frac{\text{Surf. } PTN}{\text{Surf. } PTS}$$

d'où

$$\text{Surf } PCM = \text{Surf. } PTN = \text{Surf. } PCN - \text{Surf. } TCN;$$

et par conséquent le rayon CM étant pris pour unité

$$\tfrac{1}{2} PM = \tfrac{1}{2} PN - \text{Surf. } TCN = \tfrac{1}{2} u - \tfrac{1}{2} e \sin u;$$

ou bien

$$m = u - e \sin u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

On encore

$$r^2 = \overline{TI}^2 + \overline{IS}^2 = (\cos u - e)^2 + \sin^2 u\,(1 - e^2) = (1 - e\cos u)^2$$

$$r = 1 - e\cos u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Telles sont les expressions de l'anomalie moyenne et du rayon vecteur en fonction de l'anomalie excentrique. Cherchons actuellement celle de l'anomalie vraie en fonction de la même quantité. On a par le triangle TIS

$$\cos v = \frac{TI}{TS} = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et par suite $$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}v = \frac{1-\cos v}{1+\cos v} = \frac{(1+e)(1-\cos u)}{(1-e)(1+\cos u)},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u \qquad \text{(3)}$$

L'anomalie moyenne étant donnée, l'équation (1) servira à calculer l'anomalie excentrique dont la valeur portée dans les équations (2) et (3) fera connaître celles du rayon vecteur et de l'anomalie vraie, d'où l'on passe immédiatement à la longitude. Cette solution en générale et quoiqu'on ne puisse tirer la valeur de u de l'équation (1) que par tâtonnement, on l'emploie avantageusement dans la théorie des planètes nouvellement découvertes dont les orbites sont très excentriques et dans celle des comètes; mais lorsqu'il s'agit du Soleil ou des planètes dont les orbites sont peu excentriques, on a recours à des séries procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de l'anomalie, ces séries étant alors assez convergentes pour qu'on n'ait besoin de calculer qu'un petit nombre de termes. Ainsi, pour le Soleil, l'excentricité e de son orbite, étant seulement de 0,016[7705], on peut s'arrêter aux termes en e^3 dans les développements qui expriment l'anomalie vraie et le rayon vecteur ou son logarithme en fonction de l'anomalie moyenne, ou, ce qui revient au même, en fonction du temps.

On peut effectuer ces développements de plusieurs manières; la méthode d'approximations successives dont nous allons faire usage, a l'avantage d'être à la fois l'une des plus simples et des plus directes.

Nous chercherons d'abord le développement de l'anomalie excentrique en fonction de l'anomalie moyenne.

Développement de l'anomalie excentrique. — De l'équation

$$m = u - e\sin u$$

on tire $$u = m + e\sin u \qquad \text{(4)}$$

Si l'on négligeait tout à fait l'excentricité e, on aurait $u = m$, et par conséquent $\sin u = \sin m$.

Si l'on ne néglige que les puissances de e supérieures à la première, on aura

$$e\sin u = e\sin m;$$

l'équation (4) donne par suite

$$u = m + e\sin m,$$

$$\sin u = \sin(m + e\sin m) = \sin m\cos(e\sin m) + \cos m\sin(e\sin m),$$

$$\sin u = \sin m\left\{1 - \frac{e^2\sin^2 m}{1.2.} + \dots\right\} + \cos m\left\{\frac{e\sin m}{1} - \dots\right\}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et de là, en négligeant les puissances de e supérieures à la première

$$\sin u = \sin m + e \sin m \cos m .$$

Multipliant par e et conservant la deuxième puissance,

$$e \sin u = e \sin m + e^2 \sin m \cos m ;$$

donc

$$u = m + e \sin m + e^2 \sin m \cos m .$$

On déduit de là

$$\sin u = \sin m \left\{ 1 - \frac{(e \sin m + e^2 \sin m \cos m)^2}{1.2.} + \dots \right\} + \cos m \left\{ \frac{e \sin m + e^2 \sin m \cos m}{1} \dots \right\}$$

et par suite, en négligeant les puissances de e supérieures à la deuxième

$$\sin u = \sin m + e \sin m \cos m + e^2 \left(\sin m - \tfrac{1}{2} \sin^3 m \right)$$

Portant dans l'équation (4) cette valeur de $\sin u$, on aura, en ne négligeant que les puissances de e supérieures à la troisième.

$$u = m + e \sin m + e^2 \sin m \cos m + e^3 \left(\sin m - \tfrac{3}{2} \sin^3 m \right) \dots\dots\dots\dots (5)$$

On pourrait poursuivre indéfiniment ces opérations et l'on obtiendrait autant de termes que l'on voudrait de la série ordonnée par rapport à e dans laquelle u peut être développée ; mais comme dans la théorie du Soleil, les termes en e^3 suffisent, nous ne pousserons pas plus loin le calcul.

En remarquant que $\sin m \cos m = \frac{1}{2} \sin 2m$ et que $\sin^3 m = \frac{3}{4} \sin m - \frac{1}{4} \sin 3m$, on peut écrire comme il suit la valeur de u

$$u = m + \left(e - \tfrac{7}{8} e^3 \right) \sin m + \tfrac{1}{2} \sin 2m + \tfrac{3}{8} e^3 \sin 3m \dots\dots\dots\dots (6)$$

Rayon vecteur. — On déduit de l'équation (5)

$$e \cos u = e \cos m \left\{ 1 - \frac{[e \sin m + e^2 \cos m \sin m + e^3 (\sin m - \frac{3}{2} \sin^3 m)^2]^2}{1.2} + \dots \right\}$$

$$- e \sin m \left\{ \frac{e \sin m + e^2 \sin m \cos m + e^3 (\sin m - \frac{3}{2} \sin^3 m)}{1} - \dots \right\}$$

en négligeant encore les puissances de e supérieures à la troisième

$$e \cos u = e \cos m - e^2 \sin^2 m - \tfrac{3}{2} e^3 \sin^2 m \cos m ;$$

élevant au carré et au cube, et négligeant toujours e^4, il vient

$$e^2 \cos^2 u = e^2 \cos^2 m - 2 e^3 \sin^2 m \cos m ,$$
$$e^3 \cos^3 u = e^3 \cos^3 m .$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En remplaçant dans les équations précédentes les puissances des sinus et cosinus de m par leurs développements en fonction des cosinus des multiples de cette quantité, il viendra

$$e\cos u = e\cos m - \tfrac{1}{2}e^2(1-\cos 2m) - \tfrac{3}{8}e^3(\cos m - \cos 3m),$$

$$e^2\cos^2 u = \tfrac{1}{2}e^2(1+\cos 2m) - \tfrac{1}{2}e^3(\cos m - \cos 3m),$$

$$e^3\cos^3 u = \tfrac{1}{4}e^3(3\cos m + \cos 3m).$$

Cela posé, comme on a, d'après l'expression (2) du rayon vecteur

$$r = 1 - e\cos u,$$

$$r^2 = 1 - 2e\cos u + e^2\cos^2 u,$$

$$\frac{1}{r} = 1 + e\cos u + e^2\cos^2 u + e^3\cos^3 u,$$

$$\frac{1}{r^2} = 1 + 2e\cos u + 3e^2\cos^2 u + 4e^3\cos^3 u,$$

et

$$\log r^\bullet = -M\left(e\cos u + \tfrac{1}{2}e^2\cos^2 u + \tfrac{1}{3}e^3\cos^3 u\right)$$

En substituant dans ces différentes expressions celles de $e\cos u$, $e^2\cos^2 u$, &c. trouvées ci-dessus, il viendra

$$r = 1 - e\cos m + \tfrac{1}{2}e^2(1-\cos 2m) + \tfrac{3}{8}e^3(\cos m - \cos 3m),$$

$$r^2 = 1 - 2e\cos m + \tfrac{1}{2}e^2(3-\cos 2m) + \tfrac{1}{4}e^3(\cos m - \cos 3m)$$

$$\frac{1}{r} = 1 + e\cos m + e^2\cos 2m + \tfrac{1}{8}e^3(9\cos 3m - \cos m),$$

$$\frac{1}{r^2} = 1 + 2e\cos m + \tfrac{1}{2}e^2(1+5\cos 2m) + \tfrac{1}{4}e^3(3\cos m + 13\cos m 3)$$

$$\log r = -M\left\{e\cos m + \tfrac{1}{4}e^2(-1+3\cos 2m) + e^3\left(\tfrac{17}{24}\cos 3m - \tfrac{3}{8}\cos m\right)\right\}$$

On ordonne généralement ces formules suivant les cosinus des multiples de m, elles deviennent alors

$$r = \left(1+\tfrac{1}{2}e^2\right) = \left(e - \tfrac{3}{8}e^3\right)\cos m - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2m - \tfrac{3}{8}e^3\cos 3m,$$

$$r^2 = \left(1+\tfrac{3}{2}e^2\right) - \left(2e - \tfrac{1}{4}e^3\right)\cos m - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2m - \tfrac{1}{4}e^3\cos 3m,$$

$$\frac{1}{r} = 1 + \left(e - \tfrac{1}{8}e^3\right)\cos m + e^2\cos 2m + \tfrac{9}{8}e^3\cos 3m,$$

$$\frac{1}{r^2} = \left(1+\tfrac{1}{2}e^2\right) + \left(2e + \tfrac{3}{4}e^3\right)\cos m + \tfrac{5}{2}e^2\cos 2m + \tfrac{13}{4}e^3\cos 3m,$$

$$\log r = -M\left\{-\frac{e^2}{4} + \left(e - \tfrac{3}{8}e^3\right)\cos m + \tfrac{3}{4}e^2\cos^2 m + \tfrac{17}{24}e^3\cos 3m\right\}$$

Anomalie vraie. — L'anomalie excentrique étant calculée par le développement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

précédent, on pourrait trouver l'anomalie vraie par la formule

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u;$$

mais il est préférable, comme nous l'avons déjà dit, d'employer la formule qui donne le développement de v, ou plutôt de l'équation du centre $v - m$, en série ordonnée suivant les puissances de l'excentricité.

Voici le moyen le plus aisé d'obtenir cette formule :

T étant la durée de la révolution de l'astre, $\frac{2\pi}{T} = n$ est ce qu'on appelle son mouvement moyen.

Soit ds l'aire décrite par le rayon vecteur pendant le temps dt, son expression sera

$$ds = \tfrac{1}{2} r^2 dv.$$

Or, d'après la première loi de Képler, on a

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\pi \sqrt{1-e^2}}{T};$$

car $\pi \sqrt{1-e^2}$ représente l'aire de l'ellipse. En égalant la valeur que l'on en tire pour ds à la précédente, il vient

$$\tfrac{1}{2} r^2 dv = \frac{\pi \sqrt{1-e^2}}{T} dt = \tfrac{1}{2} n dt \sqrt{1-e^2},$$

ou

$$dv = \sqrt{1-e^2} \frac{n dt}{r^2}.$$

Mais $n dt = d nt = d m$; par conséquent

$$dv = \sqrt{1-e^2} \frac{dm}{r^2}.$$

Remplaçant dans cette équation $\frac{1}{r^2}$ par la valeur trouvée plus haut, on aura

$$dv = \sqrt{1-e^2} \left\{ \left(1 + \tfrac{1}{2} e^2\right) + \left(2e + \tfrac{3}{4} e^3\right) \cos m + \tfrac{5}{2} e^2 \cos 2m + \tfrac{13}{4} e^3 \cos 3m \right\} dm;$$

d'où en intégrant et remarquant que v et m s'annulent en même temps

$$v = \sqrt{1-e^2} \left\{ \left(1 + \tfrac{1}{2} e^2\right) m + \left(2e + \tfrac{3}{4} e^3\right) \sin m + \tfrac{5}{4} e^2 \sin 2m + \tfrac{13}{12} e^3 \sin 3m \right\}.$$

Développant actuellement $\sqrt{1-e^2}$ et négligeant partout e^4, il vient définitivement

$$v = m + \left(2e - \tfrac{1}{4} e^3\right) \sin m + \tfrac{5}{4} e^2 \sin 2m + \tfrac{13}{12} e^3 \sin 3m.$$

La différence entre l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne ou l'équation du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

centre sera donc

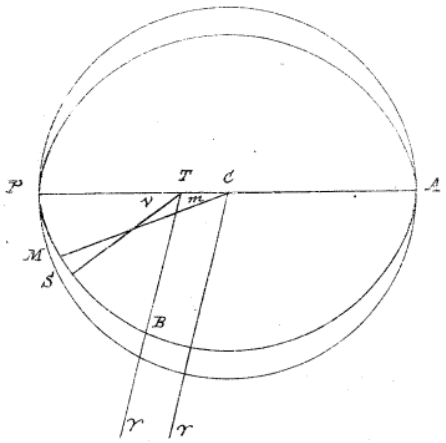
$$v - m = \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right)\sin m + \frac{5}{4}e^2 \sin 2m + \frac{13}{12}e^3 \sin 3m. \quad (1)$$

Au moyen de cette expression nous pourrons maintenant calculer la longitude. pour cela nous supposerons comme la longitude π du périgée, c'est-à-dire l'angle BTP supérieur à 180°, TB étant le rayon vecteur dirigé vers le point vernal, la longitude L du soleil devra se compter également dans le même sens et surpassera π de l'angle $PTS = v$; ainsi on a

$$L = \pi + v.$$

Mais un observateur, placé en C verrait le point équinoxial dans une direction parallèle à $T\Upsilon$, par conséquent, il attribuerait au périgée la même longitude π que l'observateur placé en T. La longitude du soleil fictif à l'instant où le soleil vrai est en S sera donc

$$M = \pi + m.$$



Et retranchant cette égalité de la première, nous avons

$$L - M = v - m = E;$$

E représentant l'équation du centre. Cette quantité étant donnée par la formule précédente, on pourra calculer L connaissant la longitude moyenne.

D'un autre côté, la longitude moyenne se déduit facilement de la valeur qu'elle avait à une certaine époque et du temps t écoulé depuis cette époque; car il suffit de lui ajouter le produit nt qui représente l'angle décrit par le rayon vecteur; si cette époque est celle qu'on a prise pour origine du temps, t sera le nombre positif ou négatif qui exprimera l'instant de l'observation. L'époque prise pour origine du temps est ordinairement le 1er Janvier à midi; la longitude moyenne du soleil à ce moment est un des éléments nécessaires pour calculer le mouvement du Soleil. En la désignant par M_0, nous aurons

$$M = M_0 + nt;$$

mais nous avons déjà

$$m = M - \pi,$$

donc

$$m = M_0 + nt - \pi.$$

---

(1) Dans tous les développements de formules relatives au mouvement elliptique, les élèves s'arrêteront aux termes qui contiennent le carré de l'excentricité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En remplaçant m par cette valeur dans les formules auxquelles nous sommes parvenus précédemment, l'équation du centre et le logarithme du rayon vecteur se trouveront immédiatement exprimés en fonction du temps t.

En résumé, nous avons considéré jusqu'ici dans la Théorie du Soleil six éléments, savoir :

1° L'ascension droite absolue d'une étoile, ou la position du point vernal;

2° L'obliquité de l'écliptique : ces éléments, joint au précédent, déterminent le plan de l'orbite solaire;

3° L'excentricité e qui détermine la forme de cette orbite;

4° La longitude du périgée π qui en donne l'orientation;

5° La durée de la révolution T, ou, ce qui revient au même, le moyen mouvement $n = \frac{2\pi}{T}$;

6° La longitude moyenne à l'origine du temps M_0.

Nous connaissons déjà plusieurs de ces éléments; voici comment on peut déterminer également par l'observation π, M_0 et e.

Détermination des éléments du mouvement elliptique du Soleil. Supposons qu'on ait fait un grand nombre d'observations du Soleil. On en formera un tableau à deux colonnes contenant les dates et les longitudes. On cherchera dans ce tableau deux époques très sensiblement distantes d'une demi-année, et pour lesquelles les longitudes diffèrent de 180°; ces époques sont voisines l'une du périgée, l'autre de l'apogée; car les longitudes diffèrent de 180°, le soleil est, à ces deux époques, aux deux extrémités d'une corde passant par la Terre, et parmi toutes ces cordes, il n'y en a qu'une, le grand axe, qui partage l'orbite en deux parties égales. On aura donc ainsi la longitude vraie du périgée qui en sera alors égale à sa longitude moyenne, c'est-à-dire π, ou du moins on conçoit que l'on obtiendra ces éléments par une interpolation convenable.

Maintenant si τ désigne le temps écoulé depuis le passage du soleil au périgée jusqu'à l'instant pris pour origine du temps, on aura pour la longitude moyenne du Soleil à cet instant, ou ce qu'on appelle la longitude moyenne de l'époque,

$$M_0 = \pi + n\tau;$$

enfin, lorsque le soleil est au périgée, sa distance à la Terre est $1-e$; à l'apogée elle est $1+e$; ces distances sont en raison inverse des diamètres apparents que l'on peut mesurer.

On a donc

$$\frac{1-e}{1+e} = \frac{D}{D'}$$

On peut tirer e de cette égalité et l'on trouve ainsi environ $\frac{1}{60}$.

L'hypothèse des anciens donnait une excentricité à peu près deux fois plus

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

forte ; car elle conduisait, en négligeant la puissance de e supérieure à la première, à la formule

$$v - m = e \sin m,$$

tandis que celle du mouvement elliptique donne

$$v - m = 2e \sin m.$$

La simple observation du diamètre apparent montre donc l'inexactitude de l'ancienne hypothèse.

On a un moyen plus exact de déterminer l'excentricité. Il repose sur ce que l'équation du centre, à son maximum, est sensiblement égale au double de l'excentricité ; on a en effet, en négligeant le terme en e^2

$$E = 2e \sin m,$$

expression qui atteint son maximum lorsque $\sin m$ est égal à 1. Or, on a vu que

$$L = M + E = M_0 + nt + E ;$$

si E est maximum, la dérivée, par rapport au temps, en nulle, et il reste, en différentiant l'équation précédente

$$\frac{dL}{dt} = n .$$

Cela signifie qu'à l'instant du maximum, le mouvement vrai est égal au mouvement moyen. Si donc nous pouvons déterminer l'instant où les deux mouvements sont égaux, en divisant par deux la valeur que prend à cet instant l'équation du centre, nous aurons l'excentricité.

Or, l'examen de la Table de longitudes et des dates correspondantes donne pour chaque date le mouvement vrai en divisant l'accroissement de la longitude d'une époque à une autre par le temps écoulé entre ces deux époques ; la valeur que l'on obtient ainsi pour le mouvement vrai $\frac{dL}{dt}$ est d'autant plus approchée que les accroissements sont plus petits. On calculera ce nombre pour les différentes dates, et l'on prendra pour l'instant du maximum celle pour laquelle ce nombre se rapproche le plus de la constante n ; on obtiendra ensuite l'équation du centre en retranchant la longitude moyenne de la longitude vraie. On peut d'ailleurs écarter la considération de la longitude moyenne en remarquant que l'équation du centre a deux maximums, l'un positif, l'autre négatif, égaux tous deux en valeur absolue à 2e. Ces maximums correspondent aux valeurs +1 et −1 de $\sin m$. On les déterminera comme nous venons de l'indiquer et l'on connaîtra ainsi les longitudes L, L' aux époques où elles ont lieu et les dates t et t' correspondantes. On aura alors

$$L = M_0 + nt + 2e,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$L' = M_0 + nt' - 2e ;$$

d'où par soustraction,

$$L - L' = n(t - t') + 4e$$

$$e = \frac{(L - L') - n(t - t')}{4} .$$

On peut d'ailleurs, au moyen de trois observations, déterminer à la fois les trois éléments M_0, π et e. Pour cela, on observe l'ascension droite du Soleil à trois époques t, t', t''. Soient R, R', R'' les valeurs observées; on en déduit les valeurs correspondantes L, L', L'' de la longitude au moyen de la formule

$$\operatorname{tg} R = \operatorname{tg} L \cos\omega ,$$

et par suite celles des trois constantes cherchées.

On sait en effet que la longitude du Soleil est donnée, si l'on néglige les termes qui contiennent le carré de l'excentricité et les puissances supérieures, par la formule

$$\left.\begin{aligned} L &= M_0 + nt + 2e \sin(M_0 + nt - \pi) \\ L' &= M_0 + nt' + 2e \sin(M_0 + nt' - \pi) \\ L'' &= M_0 + nt'' + 2e \sin(M_0 + nt'' - \pi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

On a de même

Pour résoudre ces équations, on pose

$$\left.\begin{aligned} 2e \sin(M_0 - \pi) &= x \\ 2e \cos(M_0 - \pi) &= y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Si l'on développe $\sin(M_0 + nt - \pi)$ dans les équations (1) et que l'on ait égard aux relations (2), ces équations deviennent

$$\left.\begin{aligned} L &= M_0 + nt + x\cos nt + y \sin nt \\ L' &= M_0 + nt' + x\cos nt' + y \sin nt' \\ L'' &= M_0 + nt'' + x\cos nt'' + y \sin nt'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

En retranchant la première des équations (3) successivement de la seconde et de la troisième, on élimine M_0 et l'on trouve

$$(\cos nt' - \cos nt)\, x + (\sin nt' - \sin nt)\, y = L' - L - n(t' - t),$$

$$(\cos nt'' - \cos nt)\, x + (\sin nt'' - \sin nt)\, y = L'' - L - n(t'' - t) .$$

De là on tire :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$2 \sin \tfrac{1}{2} n (t+t') \sin \tfrac{1}{2} n (t'-t)\, x - 2 \cos \tfrac{1}{2} n (t+t') \sin \tfrac{1}{2} n (t'-t)\, y = L - L' + n (t'-t) ,$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2} n (t+t'') \sin \tfrac{1}{2} n (t''-t)\, x - 2 \cos \tfrac{1}{2} n (t+t'') \sin \tfrac{1}{2} n (t''-t)\, y = L - L'' + n (t''-t) .$$

Ces deux dernières équations sont du premier degré en x et y; on déduit les valeurs de ces deux inconnues; et par suite, on trouve facilement $M_0 - \pi$, car les équations (2) donnent :

$$\operatorname{tg} (M_0 - \pi) = \frac{x}{y} .$$

Pour déterminer les inconnues, il ne reste plus alors que de simples substitutions à faire dans les équations (2) et (3).

Même en considérant un plus grand nombre de termes du développement de l'équation du centre, on n'obtient ainsi que des valeurs approchées des éléments que l'on cherche; il faut, pour trouver des valeurs plus exactes, employer un grand nombre d'observations que l'on traite par la méthode des moindres carrés ou par des méthodes analogues.

Le même procédé s'applique au calcul approché des éléments elliptiques des planètes, avec cette différence que le mouvement moyen n des planètes est inconnu et qu'il faut quatre observations pour déterminer à la fois les quantités e, π, M_0 et n.

On a trouvé pour la valeur des éléments de l'orbite solaire rapportés au 1er janvier 1850,

AR	α d'Andromède	$= 0^h\, 0'''\, 38^s, 52$	
"	ω	$= 23°\, 27'\, 31'', 95$	
"	n	$= \,"\, 59'\, 8'', 33$	(le jour moyen étant pris pour unité de temps)
"	π	$= 280°\, 21'\, 40'', 00$	
"	M_0	$= 280°\, 46'\, 36'', 12$	
"	e	$= 0,016\,770\,46$	

Aucune de ces quantités n'est constante; les attractions que les différents corps du système solaire exercent sur le sphéroïde terrestre, font éprouver à ces éléments des changements assez lents ou assez faibles, que nous continuerons à négliger quant à présent, mais dont nous indiquerons le moyen de tenir compte un peu plus loin.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chapitre VII.

Mesure du temps par l'observation du Soleil.

L'heure solaire est le temps écoulé depuis le passage du centre du Soleil au méridien du lieu de l'observation. Elle est mesurée par l'angle compris entre le méridien céleste qui passe par le centre du Soleil et le méridien du lieu. — Le jour solaire est l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du Soleil au méridien. Cette quantité n'est pas constante et ne peut pas servir par conséquent à la mesure immédiate du temps. La variation de la durée du jour solaire provient de deux causes distinctes.

1° Le mouvement du Soleil dans le plan de l'écliptique n'est pas uniforme;

2° Ce plan est incliné sur celui de l'équateur.

Or, il est à peu près évident que ces deux causes d'inégalité tout à fait indépendantes l'une de l'autre ne sauraient se compenser; leurs conséquences deviennent d'ailleurs manifestes dans l'expression suivante de l'ascension droite du Soleil que nous allons déduire très simplement des formules établies antérieurement.

Ascension droite du Soleil. — La longitude L étant calculée et l'obliquité ω étant connue, on aura immédiatement

$$\operatorname{tg} R = \cos\omega \operatorname{tg} L$$

d'où, par la formule de Lagrange

$$L - R = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega \sin 2L + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}\omega \sin 4L + \dots\dots$$

Le second membre de cette équation, pris en signe contraire, est ce qu'on appelle la réduction à l'équateur. Désignons par R' cette quantité, nous aurons

$$R = L + R = M_0 + nt + E + R$$

Ainsi pour obtenir l'ascension droite du Soleil, on voit qu'il faut ajouter à la longitude moyenne deux séries dont les valeurs varient avec le temps et ne doivent s'annuler que dans des circonstances particulières. La somme algébrique de ces deux séries $E + R$ s'appelle l'équation du temps; elle est égale à la différence entre l'ascension droite du Soleil et sa longitude moyenne, et cette dernière quantité seule varie proportionnellement au temps.

Jour solaire moyen. — L'inégalité de durée des jours solaires provenant du mouvement inégal du Soleil dans une orbite dont le plan est incliné sur celui de l'équateur, on a été conduit à imaginer successivement un premier Soleil fictif animé d'un mouvement uniforme dans le plan de l'écliptique et passant au périgée et à l'apogée en même temps que le Soleil vrai, puis un second Soleil idéal ou Soleil moyen, lequel parcourt l'équateur

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'un mouvement uniforme et passe à l'équinoxe vernal au même instant que le premier soleil fictif. Les retours consécutifs de ce second soleil idéal règlent la durée du jour solaire moyen qui est une quantité constante et que l'on peut prendre par conséquent pour unité de temps, soit dans les usages de la vie civile, soit en astronomie.

Le Soleil fictif qui parcourt l'écliptique a évidemment pour longitude $M_0 + nt$. Or, d'après les définitions précédentes, le Soleil moyen a pour ascension droite cette même quantité. Si donc nous représentons par $AR\,Ov$ et $AR\,Om$ les ascensions droites du Soleil moyen, nous aurons

$$AR\,Ov = M_0 + nt + E + R$$

$$AR\,Om = M_0 + nt.$$

D'où l'on voit que la différence entre les ascensions droites des deux Soleils est égale à $E+R$, c'est-à-dire à l'équation du temps. La valeur de cette équation est donnée pour tous les jours de l'année dans les éphémérides du Soleil; elle sert à passer facilement, comme nous allons le voir, de l'heure vraie à l'heure moyenne ou inversement.

Discussion de l'équation du temps. — L'équation du centre est nulle deux fois par an: lors des passages du Soleil au périgée et à l'apogée, et dans les intervalles elle atteint deux maximums égaux et de signes contraires.

La réduction à l'équateur est nulle de son côté quatre fois par an: aux équinoxes et aux solstices, et elle passe par quatre maxima; mais les époques où la réduction à l'équateur et l'équation du centre atteignent leurs maxima ou deviennent nulles ne sont pas les mêmes. Il en résulte que l'équation du temps devient nulle ou maxima à d'autres dates. Le calcul montre que l'équation du temps est nulle vers le 15 Avril, le 15 Juin, le 31 Août et le 24 Décembre. Elle atteint différents maxima vers le 11 Février, le 14 Mai, le 26 Juillet et le 2 Novembre.

La plus grande différence entre les ascensions droites du Soleil vrai et du Soleil moyen est de $16^m, 18^s$.

Des différentes espèces de temps. — Nous savons, par ce qui précède, qu'il y a trois espèces de temps: le temps sidéral, le temps solaire vrai et le temps solaire moyen.

Le jour solaire est astronomique ou civil. Le premier commence à midi vrai ou à midi moyen, selon qu'il s'agit du temps vrai ou du temps moyen.

Il se compte de 0^h à 24^h. Le jour civil commence à minuit et se compose de deux périodes de 12 heures: matin et soir.

Les horloges ne peuvent être réglées que sur le temps sidéral ou le temps moyen qui sont seuls uniformes. On a fait autrefois usage d'horloges dites à équation qui marchaient sur le temps vrai; mais on y a renoncé parce que leur mécanisme compliqué n'est pas susceptible de précision.

Les horloges astronomiques sont ordinairement réglées sur le temps sidéral

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et la horloge publique sur le temps moyen.

Il est souvent nécessaire de transformer un temps dans un autre, et pour cela il faut d'abord connaître le rapport de la durée du jour sidéral à celle du jour moyen. On y parvient par la considération suivante.

Soit θ la durée du jour sidéral, τ celle du jour solaire moyen et T celle de l'année tropique ; ces trois quantités étant exprimées au moyen de la même unité. La vitesse du mouvement diurne en $\frac{2\pi}{\theta}$, celle dont le Soleil moyen est animé en sens inverse par suite de son mouvement propre en $\frac{2\pi}{T}$; leur différence représente la vitesse avec laquelle le Soleil moyen, s'il était observable, semblerait accomplir sa révolution diurne. On a donc

$$\frac{2\pi}{\theta} - \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\tau},$$

ou bien

$$\frac{1}{\theta} - \frac{1}{T} = \frac{1}{\tau} ;$$

d'où l'on tire

$$\tau = \frac{T\theta}{T-\theta},$$

et en prenant le jour sidéral pour unité

$$\tau = \frac{T}{T-1}$$

Or, $T = 366^{j.\,sid.},\ 24222$

Donc, $$\tau = \frac{366^{j.\,sid.},\ 24222}{365,\ 24222} = 1^{j.\,sid.},\ 002739.$$

Ainsi un jour moyen = 1, 002739 jour sidéral ; en renversant le rapport, c'est-à-dire en prenant à son tour le jour moyen pour unité, on aurait :

1 jour sidéral = 0, 997269 jour moyen

ou bien 1 jour moyen = $24^h\ 3^m.\ 56^s,\ 6496$ en temps sidéral

et 1 jour sidéral = $23^h\ 56^m\ 4^s,\ 0416$ en temps moyen.

On peut d'ailleurs arriver encore plus simplement à ce résultat en remarquant que dans le cours d'une année tropique, le Soleil passe au méridien une fois de moins que le point vernal. La durée de l'année tropique étant de 366, 24222 jours sidéraux, comprendra donc 365, 24222 jours moyens ; d'où la relation précédente entre les deux espèces de temps.

Le raisonnement que nous faisons ici, évident si l'année tropique était

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

composée d'un nombre entier de jours sidéraux n'est pas moins rigoureuse lorsqu'on l'applique à un nombre fractionnaire quelconque.

En effet soit $\frac{1}{n}$ la fraction qui accompagne le nombre entier de jours sidéraux ; en considérant n années, on voit que le Soleil passe au méridien n fois de moins que le point vernal, d'où l'on tire la même conséquence que ci-dessus.

Ephémérides du Soleil. Avant d'indiquer le moyen d'opérer la conversion d'un temps dans un autre et les autres applications usuelles de la théorie du Soleil, nous devons faire connaître la composition des éphémérides que cette théorie sert à calculer et dans lesquelles on vient puiser les renseignements dont on a besoin. Nous reproduisons à cet effet une tête de page de la Connaissance des temps.

Soleil.

Mois et Année.

Jours du mois	à midi moyen à Paris.			Temps moyen à midi vrai à Paris.	Diff.	Jours du mois	à midi moyen à Paris.				
	Longitude du Soleil.	Latitude du Soleil.	Logarithme de la distance du Soleil.				Temps sidéral Æ 0 m.	Ascension droite du Soleil.	Différence.	Déclinaison du Soleil.	Diff.

On voit que ces tables contiennent pour chaque jour les coordonnées du centre du Soleil, longitude et latitude, logarithme du rayon vecteur, ascension droite et déclinaison, correspondant à l'instant du passage du Soleil moyen au méridien de Paris.

L'ascension droite est exprimée comme celle des étoiles en temps sidéral et peut servir à trouver l'état d'une pendule ou d'une chronomètre réglé sur le temps sidéral par l'observation du passage du Soleil au méridien, après qu'on l'aura calculée par l'interpolation pour l'instant du midi vrai du lieu de l'observation.

Une colonne intitulée temps sidéral (à midi moyen) contient l'ascension droite du Soleil moyen et indique l'heure que devrait marquer une pendule réglée sur le temps sidéral, lors du passage du Soleil moyen au méridien de Paris, si ce passage pouvait s'observer. Ces éléments ne sont pas moins utiles pour effectuer la conversion des temps.

Enfin une dernière colonne intitulée temps moyen au midi vrai donne l'équation du temps ou son complément à 12 heures, c'est-à-dire indique, d'après son titre même, l'heure que doit marquer une pendule réglée sur le temps moyen au moment

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du passage du Soleil au méridien de Paris.

Tout nombre inscrit dans cette colonne en diminuant également à la différence des nombres correspondants inscrits dans les deux colonnes suivantes ; car cette différence est égale à l'équation du temps calculé à l'instant du midi moyen, laquelle diffère très peu de l'équation du temps au midi vrai. Pour calculer cette dernière quantité, on prend donc la différence des ascensions droites au Soleil moyen et au Soleil vrai à midi moyen, et la faible correction qu'il reste à faire est donnée par une table.

Toutes les données précédentes étant calculées pour des intervalles de 24 heures et rapportées au méridien de Paris, pour les époques intermédiaires et pour d'autres lieux que Paris, on les obtiendra par interpolation, en tenant compte au besoin des différences secondes.

Une autre table renferme, pour des dates assez rapprochées, le demi-diamètre apparent du Soleil calculé d'après le rayon vecteur et qu'il est nécessaire de connaître pour ramener au centre de l'astre l'observation de l'un de ses bords.

La connaissance des temps renferme en outre deux tables séparées, calculées au moyen des relations trouvées entre le jour moyen et le jour sidéral à l'aide desquelles on transforme immédiatement en temps sidéral un intervalle de temps exprimé en temps moyen, ou réciproquement.

Mentionnons enfin la table des positions géographiques qui, outre la latitude et la longitude d'un grand nombre de lieux exprimées en arcs, contient la seconde de ces coordonnées exprimée en temps, ce qui permet de passer du temps de Paris à celui de tous les lieux indiqués, par une addition ou une soustraction, selon que le lieu considéré est à l'Est ou à l'Ouest de Paris.

Chapitre VIII.

Applications.

Conversion des temps. — D'après les définitions, l'heure vraie est mesurée par l'angle horaire du Soleil vrai, l'heure moyenne par l'angle horaire du Soleil moyen et l'heure sidérale par l'angle horaire du point vernal. La différence de l'heure vraie et de l'heure moyenne est donc égale et de signe contraire à la différence des ascensions droites du Soleil vrai et du Soleil moyen, ce qui n'est autre chose que l'équation du temps.

De même, la différence de l'heure sidérale et de l'heure moyenne est égale à la différence prise en signe contraire des ascensions droites du point vernal et du Soleil moyen.

Mais, l'ascension droite du point vernal est zéro et celle du Soleil moyen

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en $M_0 + nt = M$ que l'on trouve dans la colonne intitulée Temps sidéral au midi moyen de Paris. On aura donc

$$\frac{1}{15}(H \odot m - H r) = -M,$$

ou bien l'heure moyenne = l'heure sidérale $- M$.

Il est facile d'après cela de procéder à la conversion d'un temps dans un autre au moyen des tables.

Exemples. Conversion du temps vrai en temps moyen.

Le 22 Mai 1847, à Bayonne, par une observation du Soleil, on a trouvé, pour l'instant de l'observation . . . . . $2^h\,54^m\,58^s,23$ heure vraie

La table des positions géographiques donne pour la longitude occidentale de Bayonne . . . . . $+\,15^m\,16^s$

L'heure vraie de Paris était donc . . . . . $3^h\,10^m\,14^s,23$

L'équation du temps à la même date, et pour midi vrai était de . . . . . $-\,3^m\,40^s,13$

La variation de l'équation du temps à cette époque étant de $+\,4^s,24$ (diff.), on a par la proportion $24^h : 3^h\,10^m\,14^s,98 :: 4^s,24 : x$ = $0^s,75$

Et pour l'heure de Paris . . . . . $3^h\,6^m\,34^s,85$

en retranchant la longitude . . . . . $15^m\,16^s$

On a trouvé définitivement pour l'heure moyenne de Bayonne . . $2^h\,51^m\,18^s,85$

Seulement on a admis que dans l'intervalle de 24 heures, l'équation du temps variait proportionnellement au temps, ce qui est suffisamment exact dans l'exemple choisi.

Conversion du temps moyen en temps vrai. On n'aura qu'à suivre la marche inverse; ainsi, en reprenant l'exemple précédent, l'heure moyenne de Paris étant . . . . . $3^h\,6^m\,34^s,85$

on retranchera l'équation du temps pour midi, qui est négative, ce qui fera $+\,3^m\,40^s,13$

Et l'on aura l'heure vraie approchée . . . . . $3^h\,10^m\,14^s,98$

au moyen de laquelle, avec la variation $+\,4^s,24$ de l'équation du temps en 24^h on calculera la correction à retrancher . . . . . $-\,0^s,75$

Et l'on retrouvera l'heure vraie de Paris . . . . . $3^h\,10^m\,14^s,23$

Conversion du temps sidéral en temps moyen. Au moment d'une observation

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la pendule sidérale marquait à Paris, le 26 Mai 1847, $20^h\,17^m\,38^s,56$, on demande l'heure moyenne ..... $20^h\,17^m\,38^s,56$ } temps sidéral.

Le même jour, à midi moyen, elle allait marquer, d'après la colonne intitulée Temps sidéral ..... $4^h\,13^m\,42^s,52$ } temps sidéral.

La différence en donc le temps sidéral écoulé depuis midi moyen ..... $16^h\,3^m\,56^s,04$ } heure comptée du midi moyen et exprimée en temps sidéral.

Pour cet intervalle, la table qui sert à convertir le temps sidéral en temps moyen donne la correction ..... $-\,2^m\,37^s,93$

L'heure moyenne demandée est donc ..... $16^h\,1^m\,18^s,11$ en temps moyen.

Conversion du temps moyen en temps sidéral ou inversement. On trouvera de la manière suivante l'heure sidérale correspondant à l'heure moyenne $16^h\,1^m\,18^s,11$ temps moyen

Dans la table qui sert à convertir le temps moyen en temps sidéral, on trouvera, pour l'heure donnée, la correction ..... $+\,2^m\,37^s,04$

Le temps écoulé depuis midi moyen exprimé en temps sidéral sera donc ..... $16^h\,3^m\,56^s,04$ } temps sidéral.

D'ailleurs le temps sidéral à midi moyen donné par la table du soleil est de ..... $4^h\,13^m\,42^s\,52$ } temps sidéral.

L'heure sidérale cherchée sera donc ..... $20^h\,17^m\,38^s,56$

Conversion du temps vrai en temps sidéral ou réciproquement. — Il n'y a aucune difficulté à passer de l'heure vraie à l'heure sidérale ou inversement, en employant l'intermédiaire de l'heure moyenne. Nous ne nous y arrêterons donc pas en nous bornerons à renvoyer le lecteur à l'explication de table que l'on trouve à la fin de la Connaissance des temps.

Nous verrons plus loin par quelles observations on parvient à déterminer l'heure sidérale ou l'heure vraie avec la dernière précision, mais nous pouvons dès à présent indiquer les moyens beaucoup plus simples que l'on emploie pour obtenir approximativement l'heure vraie ou l'heure moyenne.

Des cadrans solaires.

Pour régler les horloges ou les montres ordinaires avec toute l'exactitude que comportent ces instruments, on se sert généralement d'une méridienne tracée soit sur un plan vertical, soit sur un plan horizontal exposé au Soleil. L'instant du passage

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de cet astre au méridien ou le midi vrai en celui où l'ombre d'une tige rectiligne convenablement placée en avant de la méridienne vient recouvrir exactement cette dernière ligne. Ou bien d'une simple méridienne, on peut tracer sur la même surface une série de lignes horaires sur lesquelles l'ombre de la tige passe successivement en marquant ainsi les différentes heures du jour. On a alors ce qu'on appelle un cadran solaire.

Le mouvement de l'ombre portée par un corps sur une surface qui est éclairée partout ailleurs par le soleil, est un phénomène si frappant que l'on retrouve le gnomon en usage chez tous les peuples qui ont cultivé l'astronomie. Le gnomon vertical qui est le type primitif des instruments employés à la mesure des hauteurs et des azimuts, et dont nous avons indiqué la principale destination (page) pouvait bien servir en même temps à observer l'instant du midi vrai, mais lorsqu'on a voulu que la marche de l'ombre servit à marquer le passage du soleil dans les différents plans horaires, on a été conduit à incliner la tige du gnomon parallèlement à l'axe de rotation de la sphère céleste. C'est ainsi que les cadrans solaires présentent à leur tour le type des instruments installés équatorialement.

Les gnomons verticaux sont hors d'usage depuis que l'on possède des instruments d'astronomie d'une précision bien supérieure. Mais les cadrans solaires conservent au contraire un caractère d'utilité générale qui devrait en rendre l'emploi plus fréquent, même dans les grandes villes où il n'est pas rare de constater des différences considérables entre les heures marquées par les horloges publiques de deux quartiers voisins.

Voici le principe géométrique très simple d'après lequel sont construits ces appareils.

Principe des cadrans solaires. — Une tige rectiligne parallèle à l'axe du monde que l'on nomme Style, est implantée par une de ses extrémités dans un mur vertical ou sur une tablette horizontale dont le soleil éclaire directement la surface. Si, par ce style, on fait passer le plan du méridien et une série d'autres plans compris successivement entre eux des angles de 15°, puis que l'on cherche les traces de chacun de ces plans horaires sur le mur ou sur la tablette, ces traces seront évidemment les lignes horaires que l'ombre du Style viendra recouvrir chaque fois que le Soleil passera dans le plan correspondant.

Cadran vertical déclinant. — Les cadrans verticaux sont ceux que l'on construit le plus fréquemment et donc, pour cette raison, nous nous occuperons spécialement. Dans nos climats, on doit choisir autant que possible une façade exposée au midi, mais comme il est rare de rencontrer des bâtiments exactement orientés, nous traiterons le cas le plus général d'un cadran à tracer sur un mur dont la direction fait un angle avec la ligne Est-Ouest. Cet angle du mur avec le premier vertical est ce qu'on appelle la déclinaison du cadran; on dit que le cadran ou le mur décline à l'Est ou à l'ouest, selon que leur exposition se rapproche

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de l'une ou de l'autre de ces deux points de l'horizon.

Les données du problème sont ordinairement la latitude du lieu et la déclinaison du mur. La latitude sera connue avec une précision suffisante en la prenant sur une carte géographique et on trouverait au besoin la déclinaison du mur au moyen d'une boussole, mais nous allons voir que l'on peut se dispenser de la chercher directement. Nous ferons d'abord remarquer que l'ombre d'une tige ou d'une arête rectiligne est toujours accompagnée d'une pénombre qui en rend l'observation plus ou moins inexacte; pour remédier à cet inconvénient, on a l'usage de placer à l'extrémité du style une plaque circulaire percée en son centre d'un trou à travers lequel passent les rayons du soleil. Ce n'est plus alors l'ombre du style qu'on observe mais l'image du soleil qui se forme au centre de l'ombre de la plaque, et, quoiqu'il y ait encore dans ce cas une pénombre, l'observation se fait avec plus de précision, parce que l'on distingue mieux le centre de l'image lumineuse que le milieu de l'ombre du style. Celui-ci ne joue donc plus aucun rôle et on peut le remplacer par une tige de forme quelconque portant à son extrémité la plaque convenablement inclinée. Par suite de cette nouvelle disposition, les conditions de la question se trouvent elles mêmes modifiées. Ainsi, la plaque étant disposée à l'avance à une distance du mur qui dépend simplement des dimensions que l'on veut donner au cadran, et le centre du trou représentant l'extrémité du style qui en d'ailleurs supprimé, on connaît après avoir projeté le centre du trou sur le mur, la distance exacte de ce trou au mur et la latitude du lieu; à quoi il faudrait encore ajouter la déclinaison du mur. Mais nous remplacerons cette donnée par une observation du centre de l'image du soleil à l'instant du midi vrai indiqué par une montre réglée sur le temps du lieu, sauf à reconnaître plus tard que l'on peut même se passer de cette indication.

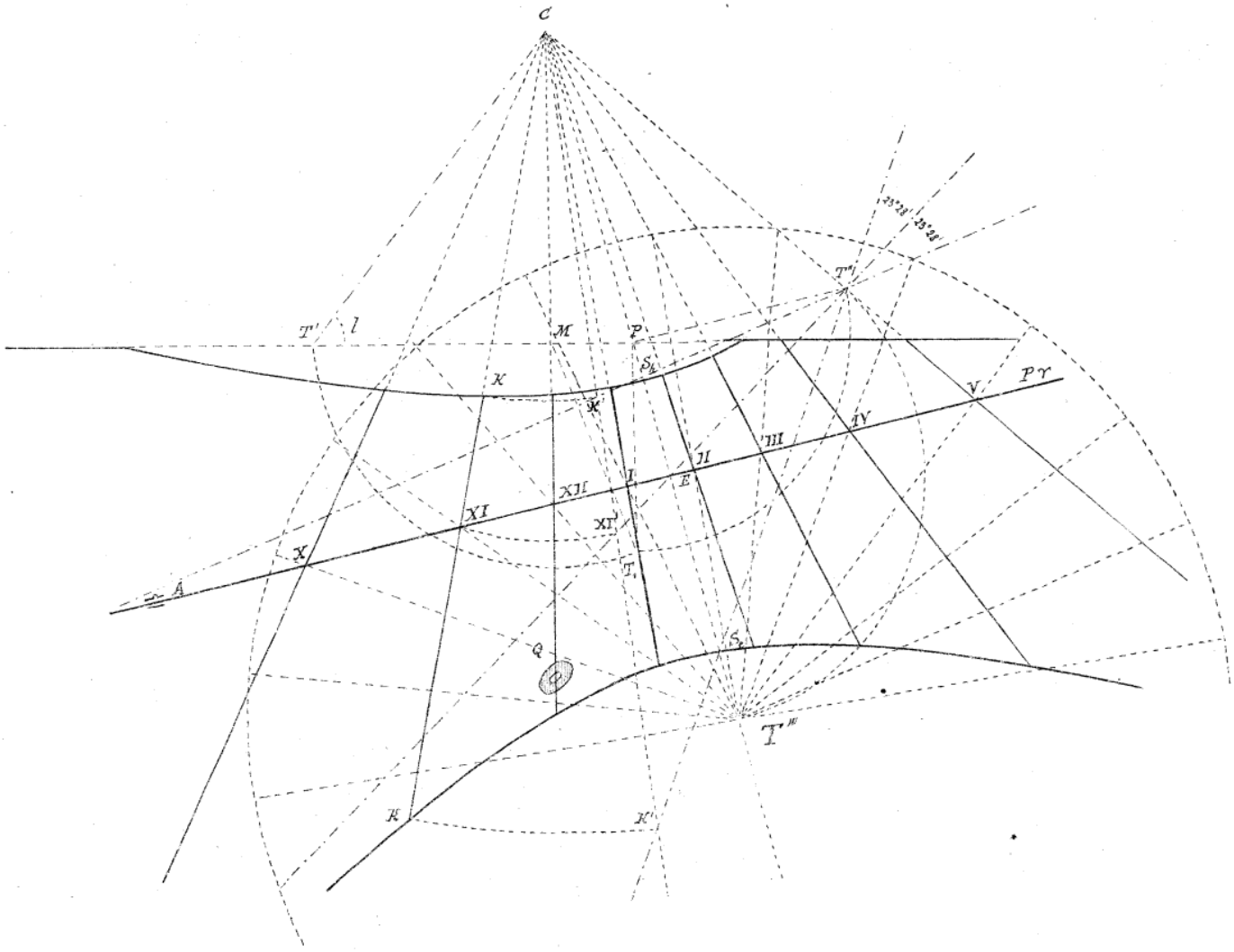
Soit donc P le pied de la perpendiculaire abaissée du centre du trou à la plaque sur le mur et PT la distance du trou au mur rabattue en PT, autour de l'horizontale du point P; soit encore O le centre de l'image du soleil ou le point d'ombre marqué sur le mur à l'instant précis du midi vrai, enfin l la latitude du lieu exprimée en degrés et minutes.

La méridienne ou la ligne de XII heures est verticale, car elle est l'intersection du plan méridien et du plan du tableau qui sont tous les deux verticaux. Or, on connaît le point O qui lui appartient; on peut donc la tracer, et l'on aura ainsi une droite OM sur le prolongement de laquelle est situé le point de concours C de toutes les lignes d'heures du cadran qui n'est autre chose que la trace du style dont le centre de la plaque représente l'extrémité.

Pour déterminer ce point qu'on appelle le centre du cadran, considérons dans le plan horizontal mené par le centre T de la plaque, le triangle PTM rectangle en P dont les deux côtés PM et PT sont connus, ce qui permet de le construire en le rabattant autour de PM, et nous pourrions remarquer en passant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que l'angle PMT_1 de ce triangle est le complément de la déclinaison du mur que l'on déduit ainsi de la donnée de la question. En imaginant actuellement le Style du cadran, c'est-à-dire une ligne droite menée par le centre de la plaque parallèlement à l'axe du monde, on verra facilement que cette ligne est l'hypothénuse d'un triangle rectangle MCT' dont on connaît le côté MT' et l'angle CTM qui est égal à la latitude l, TM étant la projection du Style CT' sur le plan horizontal qui passe par le point T. On peut donc construire facilement ce triangle en le rabattant autour de son côté vertical en $MT'C$. On obtient ainsi le point C, et en le joignant au point P, on a la projection CP du Style ou la Soustylaire qui est une ligne très importante à considérer en gnomique. Dans la question actuelle, cette ligne va nous servir à construire un cadran auxiliaire dans un plan parallèle à l'équateur et passant par l'extrémité T' du Style. Pour cela, rabattons le triangle CPT



2e Division. 1860-62. Cours de Géodésie. 39e feuille.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rectangle en P autour de CP, le Style viendra en CT'' et la perpendiculaire T''E élevée sur CT'' sera, en rabattement, la trace du plan parallèle à l'équateur sur le plan qui contient le Style et la Soustylaire; on la nomme l'équinoxiale, parce que c'est la ligne que décrit sensiblement l'image du Soleil aux équinoxes. Rabattons autour de cette ligne AP, le plan parallèle à l'équateur, l'extrémité T du Style viendra en T''' sur la Soustylaire et nous construirons aisément autour de ce point les lignes horaires du cadran équatorial, qui font évidemment entre elles des angles de 15°, en remarquant simplement que la ligne de midi sur ce cadran est celle qui joint le centre T''' au point où la ligne de XII heures du cadran vertical rencontre l'équinoxiale. Les intersections des lignes du cadran équatorial avec cette dernière, seront des points communs aux deux cadrans, et il suffira par conséquent de joindre les points C à ces différents points pour achever de tracer le cadran vertical.

Pour atteindre le plus d'exactitude possible dans le tracé des lignes horaires, il faut avoir soin d'employer pour décrire la circonférence du cadran équatorial, un rayon aussi grand que l'étendue de l'épure le permet.

Limites du cadran. — Ordinairement on ne dispose que d'un espace limité dans le sens horizontal, aussi bien que dans le sens vertical. On doit donc déterminer la distance du trou au mur par cette considération, en s'attachant particulièrement à pouvoir tracer l'heure toute l'année dans le voisinage du méridien. Les courbes que décrit l'image du Soleil sur le cadran aux deux Solstices servent naturellement de limites à la partie supérieure et à la partie inférieure du cadran, et il est inutile de prolonger les lignes d'heures au delà de ces courbes extrêmes. La courbe du Solstice d'hiver doit être elle-même arrêtée aux deux points où elle rencontre l'horizontale de la projection du trou, puisque l'image du Soleil à travers le trou de la plaque ne peut jamais s'élever au dessus de cette ligne.

Tracé des courbes de déclinaison. — Pour tracer les courbes des Solstices, et si l'on veut, celles qui correspondent à l'entrée du Soleil dans chacun des Signes du zodiaque que l'on nomme en général courbes de déclinaison, on conçoit à l'une des dates choisies, le cône décrit autour de l'axe du monde par le rayon lumineux qui va du centre du Soleil à celui de la plaque. La déclinaison ou la distance polaire de l'astre restant sensiblement la même dans un jour, ce cône en droit est la courbe décrite par l'image sur le plan du mur en l'intersection de sa seconde nappe par ce plan. Toutes les courbes de déclinaison sont donc des sections coniques et l'on démontre facilement que sous les latitudes moyennes, ce sont toujours des hyperboles. On voit aussi immédiatement que les sommets de ces hyperboles sont situés sur la soustylaire, puisque le plan projetant du Style dont elle est la trace est perpendiculaire au plan du mur qui est le plan sécant.

On construira ces courbes par points, de la manière suivante: Supposons qu'il s'agisse de tracer la courbe du Solstice d'été. Par le rabattement T''' du centre du trou, menons la ligne T'''S_e faisant avec T'''E un angle égal à 23° 28' correspondant à la plus grande déclinaison boréale du Soleil. Cette ligne est le rabattement de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

génératrice du cône correspondant au solstice, située dans le plan projetant du style, et par conséquent le point S_e où elle rencontre la soustylaire, est le sommet de la courbe cherchée.

Pour obtenir le point qui appartient à cette courbe sur une ligne horaire quelconque, sur celle de XI heures, par exemple, considérons le plan horaire $CT(XI)$ qui renferme cette ligne et le style. La trace de ce plan sur celui du cadran équatorial en perpendiculaire au style CT et égale à $T'''(XI)$; en prenant donc pour $T''E$ une longueur $T''(XI') = T'''(XI)$, le triangle $T''C(XI')$ sera égal au triangle $TC(XI)$ de l'espace dont il peut être considéré comme le rabattement sur le plan du cadran autour du style déjà rabattu lui même une première fois en CT''. La génératrice du cône décrit au solstice qui en contient dans le plan horaire $TC(XI)$ se confondra dans ce rabattement avec la ligne S_e; et par conséquent le point d'intersection K' de cette ligne avec CH prolongée donnera la distance CK' du point de la courbe situé sur la ligne de XI heures, au centre C du cadran, ou plus simplement, la longueur K' sera égale à $K(XI)$ et se portera facilement de XI en K sur la ligne de XI heures.

La courbe du solstice d'hiver s'obtiendrait de même, en menant de l'autre côté de $T''E$ une droite TS_h faisant avec cette ligne le même angle de 23° 28'. Pour les courbes intermédiaires on n'aurait qu'à chercher la déclinaison du soleil pour les dates correspondantes et à mener des droites qui feraient avec $T''E$ des angles égaux à ces déclinaisons, en tenant compte naturellement du signe de celles-ci (Voyez le premier des deux tableaux suivants).

Courbes du temps moyen. — Les cadrans solaires construits comme nous venons de l'indiquer, donnent le temps vrai, mais il est facile de leur faire marquer le temps moyen, en substituant aux lignes horaires rectilignes des courbes dites du temps moyen, dont le tracé résulte très simplement de la valeur de l'équation du temps à différentes dates.

Si l'on veut avoir, par exemple, la méridienne du temps moyen, après avoir construit les courbes de déclinaison correspondant à l'entrée du soleil dans chacun des signes du zodiaque, on tracera autour de la méridienne du temps vrai des lignes horaires de minute en minute, puis sur chacune des lignes de déclinaison, on prendra le point qui correspond en temps vrai, à midi augmenté ou diminué de l'équation du temps, selon que le midi moyen en postérieur ou antérieur au midi vrai, et la courbe qui joindra tous les points ainsi obtenus sera la méridienne du temps moyen. Pour faciliter le tracé de cette courbe et pour le rendre plus exact, on cherche aussi les dates pour lesquelles l'équation du temps en moins ou atteint ses plus grandes valeurs, ce qui donne les points d'intersection avec la méridienne du temps vrai et les points où ses lignes horaires sont tangentes à cette courbe qui est elle même tangente aux courbes des solstices.

On s'y prendrait exactement de la même manière pour tracer les courbes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du temps moyen correspondant à une quelconque de lignes horaires du cadran.

Voici deux tables dont les éléments extraits de l'annuaire du bureau des longitudes pour 1859 varient peu et peuvent servir au tracé de la méridienne du temps moyen pendant un grand nombre d'années.

I.

Dates.	Déclinaisons du Soleil.	Temps moyen à midi vrai.
21 Janvier	19° 57′ A	0h 11m 33s
21 Février	10 38	0 13 54
21 Mars	0 8 B	0 7 25
21 Avril	11 46	11 58 43
21 Mai	20 8	11 56 17
22 Juin	23 28	0 1 32
23 Juillet	20 10	0 6 9
23 Août	11 34	0 2 33
23 Septembre	0 2	11 52 28
21 Octobre	10 37 A	11 44 46
21 Novembre	19 53	11 45 57
22 Décembre	23 28	11 58 41

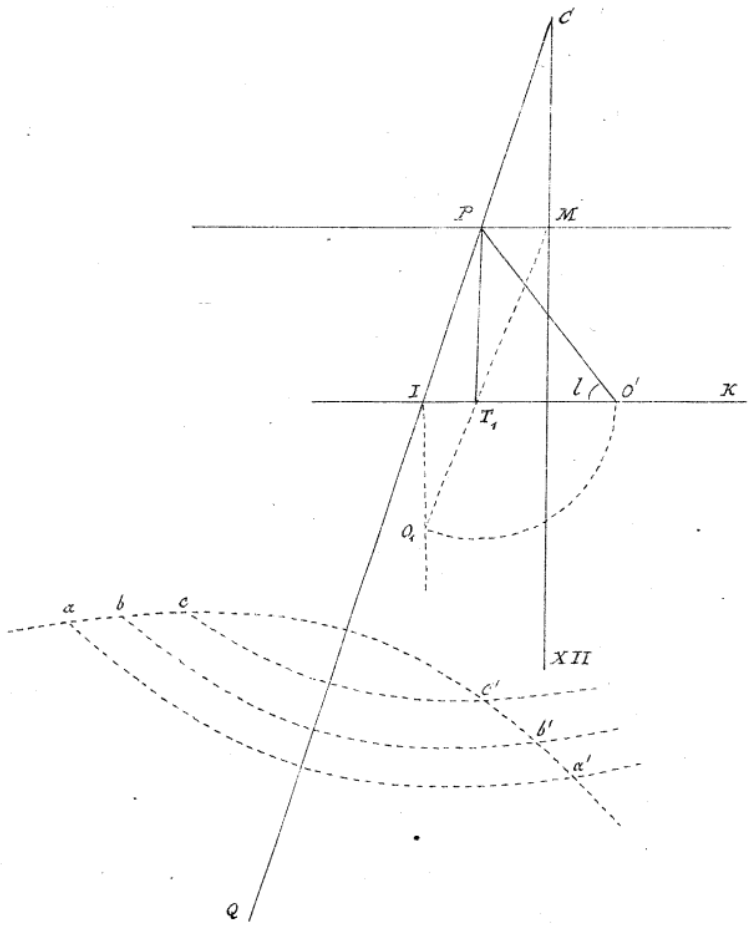
II.

Dates.	Déclinaisons du Soleil.	Temps moyen à midi vrai.
11 Février	14° 6′ A	0h 14m 32s
15 Avril	9 41 B	0 0 6
14 Mai	18 34	11 56 7
15 Juin	23 19	0 0 2
26 Juillet	19 32	0 6 13
1er Septembre	8 24	0 0 0
2 Novembre	14 21 A	11 43 42
25 Décembre	23 26	0 0 11

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Construction immédiate du cadran par la Soustylaire. — Nous avons supposé précédemment que l'instant du midi vrai était connu, ce qui permet de tracer facilement la méridienne sur laquelle on détermine ensuite la position du centre du cadran. cette donnée qui manque le plus ordinairement n'est heureusement pas nécessaire, et il y a plusieurs manières d'y suppléer. Celle que nous allons indiquer a l'avantage de n'exiger que des opérations graphiques très simples que l'on peut exécuter directement sur le mur, au moyen d'un fil à plomb, d'une règle, d'un compas et d'un niveau de maçon.

La plaque étant scellée dans le mur, et après avoir déterminé la projection du centre du trou et la distance de ce trou au mur, on observe dès le matin, quelque temps après que le mur a commencé à être éclairé, plusieurs points d'ombre a, b, c à des intervalles de temps assez rapprochés, par exemple de 15^m en 15^m, puis du point P comme centre on décrit des arcs de cercle qui passent par ces différents points et l'on attend que l'ombre ou plutôt l'image du soleil vienne passer successivement sur ces arcs, en c', b' et a'. Le milieu de tous ces arcs et le point P déterminent la soustylaire PQ sur laquelle doit se trouver le centre du cadran.



On peut actuellement se proposer de chercher la distance PM du point P à la méridienne. Pour cela, par le point T, rabattement du centre du trou, menons l'horizontale indéfinie IK, et imaginons un style auxiliaire qui serait projeté en PI, P devenant ainsi le centre d'un cadran dont PT, serait la méridienne. Or, connaissant la distance IT, de la projection de l'extrémité du style auxiliaire à cette méridienne et la latitude du lieu, il est facile de trouver la distance IO de cette même extrémité au mur; car, dans le triangle rectangle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

POT de l'espace, l'angle en O en égal à la hauteur du pôle ou à la latitude l, et par conséquent ce triangle pourra immédiatement se construire en rabattement en P T, O'. Cela fait, en décrivant du point T, comme centre avec T, O' pour rayon un arc de cercle, on obtiendra le point Q, et la distance O, I ; d'où il est facile de voir qu'en menant la droite O, T, et la prolongeant jusqu'à l'horizontale du point P en M, on aura la distance cherchée PM ou simplement un point M de la méridienne, ce qui suffit pour tracer cette ligne qui est verticale et dont l'intersection avec la soustylaire donnera le centre C du cadran.

Ce centre étant connu, on pourrait achever la construction du cadran, c'est-à-dire le tracé des lignes d'heures par la méthode géométrique indiquée ci-dessus, mais il est beaucoup plus simple et au moins aussi exact de suivre la méthode empirique qui consiste à régler une montre ordinaire sur la méridienne C (XII), puis à marquer d'heure en heure ou de demi-heure en demi-heure, en temps de cette montre, un point d'ombre sur le cadran. En joignant ensuite les différents points d'ombre avec le centre C, on aura évidemment toutes les lignes horaires correspondantes.

Cette opération, de même que celle au moyen de laquelle on détermine la soustylaire, présente cet avantage d'exactitude d'autant plus grande qu'elle aura été faite plus près du solstice d'été. Quant à la marche de la montre, on la reconnaîtra en observant deux midis consécutifs et si elle était très sensible, il faudrait y avoir égard pour corriger légèrement la position de chacune des lignes horaires.

Quand, au lieu d'une plaque percée d'un trou on se contente d'employer un style, le moyen le plus simple de le diriger parallèlement à l'axe du monde est le suivant :

On trace d'abord une méridienne sur le terrain et à une distance convenable en avant du mur, soit au moyen de l'observation de la polaire à son passage au méridien, soit par la méthode des ombres correspondantes du soleil (Voyez le paragraphe suivant). Cette méridienne étant jalonnée avec soin, on suspend dans sa direction et en se rapprochant du mur deux fils à plomb que l'on projette l'un sur l'autre et sur ce mur, où l'on trace leur projection que l'on prend pour la méridienne du cadran, puis, ayant choisi sur cette ligne le point où l'on veut placer le centre, on y fait pratiquer un trou à scellement.

On doit avoir disposé à l'avance une plaque métallique ou un simple calibre en bois mince présentant un angle égal au complément de la latitude du lieu. On applique alors l'un des côtés de cet angle sur la méridienne du mur en approchant l'angle du point pris pour centre et on l'amène dans le plan du méridien en se guidant d'après les indications des deux fils à plomb. Il suffit ensuite de placer le style sur le côté extérieur de l'angle et de le sceller dans cette position.

On peut encore choisir des données différentes de celles dont nous avons fait usage, et déduire la construction du cadran de point d'ombre et de la déclinaison du soleil à la date correspondante. On peut aussi substituer à la méthode purement géométrique, la méthode analytique[a]. Enfin, au lieu de tracer des cadrans sur un plan vertical, on peut

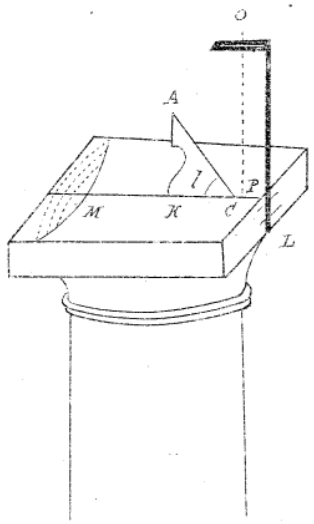
---

[a] Voyez Biot, Astronomie physique, Tome 1er, page 75 et suivantes ; Francœur, astronomie pratique, &c. &c.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en tracer sur des plans inclinés ou sur des surfaces quelconques ; mais nous avons préféré nous borner ici au cas le plus ordinaire de la pratique et indiquer le moyen le plus facile à appliquer. Nous ajouterons seulement quelques mots sur les cadrans horizontaux qui sont également d'un usage fréquent et d'une construction très simple, mais qui sont ordinairement exécutés sur de plus petites dimensions que les cadrans verticaux et par conséquent moins susceptibles d'exactitude.

Cadran horizontal. — Cette espèce de cadran se construit généralement sur une tablette en pierre ou en ardoise posée sur un pilier en maçonnerie. Comme on connaît toujours à peu près la direction du méridien, on commence par orienter convenablement la tablette qui doit aussi être bien posée de niveau.



Cela étant fait, au milieu du côté méridional, on scelle provisoirement une tige OI qui porte à la partie supérieure une plaque percée d'un trou O ; puis du point O on abaisse au moyen d'un fil à plomb, la perpendiculaire OP sur le plan de la tablette ; on procède ensuite à la détermination de la méridienne qui passe par le point P par l'observation des ombres correspondantes du Soleil sur des arcs de cercle décrits du point P comme centre, et en joignant le milieu de ces arcs à ce point. Après avoir enlevé le faux style OI, il suffit ensuite de sceller à demeure sur la méridienne une lame métallique ACK découpée de manière à présenter un angle C égal à la hauteur du pôle et dont on rend le plan bien exactement perpendiculaire à celui de la tablette.

Quant au tracé des lignes horaires, le centre du cadran étant ici en C, on y procédera graphiquement ou par le calcul en employant un cadran équinoxial auxiliaire, ou simplement par la méthode empirique qui est toujours suffisante dans ce cas.

Montre solaire. — On donne ce nom à un petit instrument portatif qui sert à déterminer l'heure d'après la hauteur du Soleil. C'est un cylindre en bois que l'on tient suspendu verticalement et sur lequel sont tracées des génératrices qui correspondent à différentes dates de l'année. A sa partie supérieure se trouve disposé un bouton armé d'un style horizontal mobile que l'on peut amener au dessus de l'une quelconque des génératrices. Lorsqu'on veut avoir l'heure, on amène ce style sur la génératrice du jour où l'on se trouve puis on le tourne vers le Soleil. L'ombre de l'extrémité du style tombe en un certain point de la génératrice, et la position de ce point fait immédiatement connaître l'heure, parce qu'on a calculé ou observé antérieurement les points où l'ombre doit tomber aux différentes heures de la date indiquée. Au centre, on a

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

joins par une courbe les points des diverses génératrices qui répondent à une même heure, de sorte qu'on peut opérer sur les intervalles compris entre deux génératrices lorsqu'on se trouve à une date intermédiaire entre celle auxquelles répondent ces dernières. Cet appareil ne convient que pour la latitude à laquelle il a été construit; on peut cependant l'utiliser sous d'autres latitudes en employant une table de correction facile à calculer.(1)

Note sur la manière d'obtenir approximativement l'heure sur un cadran solaire par l'observation de l'ombre lunaire.(*) — On verra plus loin que par suite de son mouvement propre qui est très rapide et dans le sens direct, la lune revient chaque jour au méridien en moyenne 50^m plus tard que le jour précédent, c'est-à-dire que le jour lunaire est plus long que le jour solaire de cette quantité. Or, le jour de la nouvelle lune, cet astre passe au méridien à peu près en même temps que le Soleil; à partir de ce moment, on aura donc le retard du jour lunaire sur le jour solaire, en multipliant par $\frac{5}{6}$ l'âge de la lune, c'est-à-dire le nombre de jours écoulé. Par conséquent, lorsque la lumière de la lune deviendra assez intense pour produire une ombre sensible sur un cadran solaire, on voit qu'il suffira, pour trouver approximativement l'heure solaire, d'ajouter à celle que marque l'ombre du style les $\frac{5}{6}$ de l'âge de la lune que l'on trouve dans tous les almanachs.

Chapitre IX.

Modifications de la théorie du mouvement apparent du Soleil.

Phénomènes de la précession et de la nutation.

La théorie du Soleil, celle que nous avons envisagée jusqu'ici, est fondée sur les lois de Képler. Mais ces lois ne sont rigoureusement vraies, qu'autant qu'on les applique à deux corps isolés dans l'espace, dont l'un aurait une masse infiniment grande par rapport à celle de l'autre.

En réalité, le Soleil et la Terre s'attirent tous les deux, et c'est autour du

---

(1) On a construit des montres dites universelles qui peuvent se transporter à toutes les latitudes. L'école possède un instrument de ce genre, dont la disposition a été imaginée par M. de Pérouny.

(*) Non exigé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

centre de gravité du système formé par les deux corps que s'effectue le mouvement de chacun d'eux.

De plus, la terre n'est pas une sphère; elle est aplatie vers les pôles et renflée à l'équateur. De là la nécessité de considérer les attractions du Soleil et de la Lune sur le renflement équatorial.

Enfin les planètes, par leur attraction, modifient le mouvement de la Terre d'une manière très faible il est vrai, mais dont il faut cependant tenir compte.

L'étude des modifications qui résultent de cet attraction appartient à la Mécanique céleste; nous admettrons les résultats auxquels sont parvenus les Géomètres, et nous nous bornerons, en les appliquant, à constater l'accord que présentent la théorie et l'observation.

Précession des équinoxes. — Le premier des phénomènes dus aux causes dont nous venons de parler et le plus sensible de tous est celui de la précession des équinoxes. Sa découverte remonte à Hipparque, le plus grand Astronome de l'antiquité, qui le reconnut en comparant ses propres observations, entreprises vers l'an 160 avant J.C. à Rhodes, avec celles qu'avaient faites deux autres astronomes Grecs, Aristille et Timocharis, de l'École d'Alexandrie, 140 ans auparavant. Cherchons par la comparaison des observations contenues dans les catalogues modernes à découvrir la loi de ce phénomène.

Noms des Etoiles.	Lacaille. (1750)		Différences entre 1750 et 1800.		Piazzi. (1800)		Différences entre 1800 et 1850.		Observations modernes (1850)	
	A	δ	dA	$d\delta$	A	δ	dA	$d\delta$	A	δ
γ Pégase	0° 0' 0"	76° 12' 22"	0' 0"	− 16'43"	0° 0' 0"	75° 55' 39"	0' 0"	−16'37"	0° 0' 0"	75° 39' 2"
γ Persée	41° 37' 1"	37° 29' 41"	+14'47"	−12'22"	41° 51' 48"	37° 17' 19"	−14'55"	−12'11"	42° 6' 43"	37° 5' 8"
α Orion	85° 18' 50"	82° 39' 45"	+ 2' 6"	− 1'11"	85° 20' 56'	82° 38' 34"	+ 2' 6"	− 1'11"	85° 23' 2"	82° 37' 33"
δ Hydre	138° 43' 48"	97° 35' 12"	− 1' 46"	+12'37"	138° 42' 2"	97° 47' 49"	− 1' 32"	+12'52"	138° 40' 30"	98° 0' 41"
δ Corbeau	184° 8' 40"	105° 7' 16"	+ 0' 6"	+16'42"	184° 8' 46"	105° 23' 58"	+ 0' 11"	+16'49"	184° 8' 57"	105° 40' 47"
α Dragon	209° 18' 30"	24° 25' 20"	−17' 56"	+14'32"	209° 0' 34"	24° 39' 52"	− 18'20"	+14'31"	208° 42' 14"	24° 54' 23"
γ Dragon ...	267° 36' 8"	38° 28' 17"	−20' 52"	+ 0'36"	267° 15' 16"	38° 28' 53"	− 21' 7"	+ 0' 36"	266° 54' 9"	38° 29' 29"
α Cygne	308° 7' 44"	45° 36' 5"	−12' 46"	−10'27"	307° 54' 58"	45° 25' 38"	− 12'55"	−10'26"	307° 42' 3"	45° 15' 12"
α Andromède..	358° 46' 49"	62° 17' 25"	+ 0' 4"	−16'37"	358° 46' 53°	62° 0' 48"	0' 0"	−16'34"	358° 46' 53"	61° 44' 14"

Le tableau précédent contient les ascensions droites et les distances polaires de neuf étoiles différentes observées en 1750 par Lacaille, en 1800 par Piazzi et en 1850 par les observations de l'époque actuelle: les ascensions droites y sont toutes rapportées à γ de Pégase, dont l'ascension droite absolue est restée assez faible dans la période considérée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Dans d'autres colonnes sont inscrits les changements qu'ont éprouvés les distances polaires et les ascensions droites de 1750 à 1800 et de 1800 à 1850.

A l'inspection de ce tableau, on reconnaît que les coordonnées de chaque étoile varient d'une manière très notable et sensiblement uniforme, mais que la variation n'est pas la même pour toutes les étoiles. La loi de cette variation paraît très compliquée; cependant on peut la découvrir en classant les étoiles dans l'ordre de leurs ascensions droites; c'est ce que l'on a fait dans le tableau ci-dessus. Si l'on examine alors les nombres inscrits dans l'une des colonnes intitulées $d\delta$, on voit que:

Quand R croît de 0° à 85°18'50" $d\delta$ croît de − 16'43" à − 1'11"
.... id..... de 85°18'50" à 184°8'40" ...id.... de − 1' 1" à + 16'42"
.... id..... de 184°8'40" à 267°36'8" $d\delta$ décroît de + 16'42" à + 0'36"
.... id..... de 267°36'8" à 358°46'49" ...id.... de + 0'36" à − 16'37"

$d\delta$ suit donc une marche analogue à celle de $\cos R$; de là l'idée naturelle de voir s'il n'existe pas une liaison entre ces deux quantités; c'est en effet ce qui a lieu et l'on trouve, pour l'intervalle des cinquante années

$$d\delta = -\ 16'45''\cos R;$$

16'45" étant le maximum de $d\delta$; d'où il résulte que la variation $d\delta$ de la distance polaire est donnée pour une année par la formule

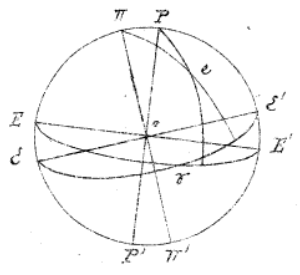
$$d\delta = -\ 20'',1\cos R.$$

On trouverait de même empiriquement

$$d R = 20'',1 \sin R \operatorname{cotg} \delta.$$

Ces formules permettent sans doute de calculer à l'avance les variations que doivent éprouver les ascensions droites et les déclinaisons des étoiles entre deux dates déterminées; mais elles sont trop compliquées pour donner lieu à un énoncé géométrique capable de mettre sur la trace du phénomène qui les produit, tandis qu'en employant les coordonnées écliptiques, la loi de ces variations se présente sous la forme la plus simple.

Pour obtenir les coordonnées écliptiques, en partant des coordonnées équatoriales, on emploie les formules de transformation connues, dans lesquelles il suffit d'introduire les notations qui conviennent à la question. Ainsi, soient P et P' les pôles de l'équateur Π et Π' ceux du grand cercle de l'écliptique, L étant la longitude et R l'ascension droite de l'étoile e, d et δ sa déclinaison et sa distance polaire; enfin l et λ sa latitude et sa distance au pôle de l'écliptique. Le triangle $P\Pi e$ donne, pour passer des données équatoriales aux coordonnées écliptiques, les trois formules suivantes:



$$\sin l = \cos\omega \sin d - \sin\omega \cos d \sin R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\cos l \sin L = \sin \omega \sin d + \cos \omega \cos d \sin \mathfrak{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\cos l \cos L = \cos d \cos \mathfrak{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

et les formules inverses :

$$\sin d = \cos \omega \sin l + \sin \omega \cos l \sin L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\cos d \sin \mathfrak{A} = -\sin \omega \sin l + \cos \omega \cos l \sin L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\cos d \cos \mathfrak{A} = \cos l \cos L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Nous allons faire usage des trois premières formules, en supposant la valeur de ω comme aux différentes dates des observations, car cette valeur elle même ne reste pas constante.

Prenons pour exemple, deux étoiles dans le catalogues de Bradley (1755), de Piazzi (1800) et d'Airy (1845).

α de la Vierge (Epi)

Dates.	$\mathfrak{A}$	$d\mathfrak{A}$	d	$d.d$
1755	198° 41' 48"	+ 35'18"	9° 52' 28" A	+ 11'16"
1800	198° 40' 6"	+ 35'25"	10° 6' 44"	+ 11'17"
1845	199° 15' 31"		10° 21' 1"	

α du Cocher (Chèvre)

Dates.	$\mathfrak{A}$	$d\mathfrak{A}$	d	$d.d$
1755	74° 39' 30"	+ 49'31"	45° 43' 5" B	+ 3'33"
1800	75° 29' 1"	+ 49'49"	45° 46' 38"	+ 3'21"
1845	76° 18' 43"		45° 49' 59"	

Avec ces données et les trois valeurs correspondantes de ω :

1755 ..... $\omega = 23° 28' 17"$
1800 ..... $23° 27' 56"$
1845 ..... $23° 27' 35"$

Nous trouverons par les formules précédentes :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

	Dates	L	dL	l	dl
L'Epi ...	1755	200° 25' 26"	+ 37'40"	2° 2' 9" B	+ 7"
	1800	201° 3' 6"	+ 27'43"	2° 2' 16"	+ 10"
	1845	201° 40' 49"		2° 2' 26"	
La Chèvre ...	1755	75° 26' 8"	+ 37'40"	22° 51' 41" B	+ 2"
	1800	79° 3' 48"	+ 37'44"	22° 51' 43"	+ 2"
	1845	79° 41' 32"		22° 51' 45"	

On voit immédiatement, d'après ce dernier tableau, que les latitudes des étoiles restent sensiblement constantes, tandis que leurs longitudes croissent proportionnellement au temps, et de quantités qui sont les mêmes pour toutes les étoiles.

L'usage dans lequel étaient les astronomes grecs de rapporter la position des astres au plan de l'écliptique facilita la découverte du phénomène qui paraît au contraire avoir échappé aux Astronomes Chinois, malgré la période de temps considérable qu'embrassaient leurs observations, parce qu'ils rapportaient la position des astres à l'équateur.

Hipparque supposant la Terre immobile, regardait l'équinoxe à partir duquel se comptent les longitudes comme un point fixe dans l'espace et expliquait la précession par un mouvement très lent et dans le sens direct de toute la Sphère céleste autour de l'axe de l'écliptique, indépendamment de son mouvement diurne autour de l'axe de l'équateur.

Copernic, en restituant à la Terre le mouvement dont elle est animée autour de son axe, expliqua d'une manière tout à fait satisfaisante le phénomène dont il s'agit par un mouvement conique de cet axe autour de celui de l'écliptique et dans le sens rétrograde; alors la Sphère céleste et le plan de l'écliptique restant fixes, on voit sans peine comment le mouvement de l'axe, auquel se trouve lié l'équateur, fait rétrograder la ligne d'intersection de ce plan avec l'écliptique, sur l'écliptique même, sans changer l'inclinaison mutuelle de ces deux plans; de sorte que les latitudes restent constantes et que le point vernal, origine des longitudes, rétrogradant dans le ciel, les longitudes croissent conformément à l'observation.

Cette dernière manière de rendre compte du phénomène lui a fait donner le nom de rétrogradation de la ligne des équinoxes ou du point vernal. On ne lui en conserve pas moins celui de précession des équinoxes que lui avaient donné les Anciens, et qui exprime que l'époque de l'équinoxe, c'est-à-dire l'instant où le Soleil traverse l'équateur précède le retour de cet astre au point de la Sphère céleste avec lequel coïncidait l'équinoxe lors de la dernière observation.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Nous avons vu plus haut que la longitude de l'étoile augmente de 37' 40" dans l'espace de 45 ans ; on en déduit que la variation dans une année est de 50",2 et, par suite, que la période du mouvement conique de l'axe de la Terre est d'environ 26 000 ans.

Explication physique du phénomène de la précession. — Le phénomène de la précession est dû aux attractions du Soleil et de la Lune sur le renflement équatorial terrestre. Considérons seulement l'action de l'un de ces deux astres, celle du Soleil par exemple. Pour cela, imaginons une Sphère décrite sur la ligne des pôles comme diamètre, et examinons séparément quels sont les effets de l'attraction du Soleil sur cette Sphère et sur l'ensemble du ménisque restant. La première se réduit à une attraction appliquée au centre de la Terre, tandis que, par suite de l'inégale intensité avec laquelle le Soleil agit sur la partie la plus éloignée du ménisque et sur la partie la plus rapprochée, la seconde force peut se transformer en une attraction appliquée de même au centre et en un couple qui tend à faire tourner lentement la Terre autour d'un axe situé dans le plan de l'écliptique. La résultante des forces qui ont leur point d'application au centre de la Terre combinée avec la vitesse dont la Terre elle-même est animée, produisent son mouvement de translation, et la rotation lente dont nous venons de parler en se composant avec la rotation rapide de la Terre autour de son axe produit un léger déplacement de cet axe. L'action de la Lune donne naissance à des effets analogues à ceux que nous venons de décrire et la superposition de ces différents effets constitue la précession lunisolaire.

En traitant cette question d'une manière complète par la Mécanique, on prouve rigoureusement que la courbe décrite par le pôle de l'équateur sur la Sphère céleste est un petit cercle dont le pôle de l'écliptique en est le centre, et l'on explique en même temps le phénomène suivant :

Nutation de l'axe terrestre.

En déterminant avec plus de précision qu'on ne l'avait fait jusqu'alors les variations des coordonnées des étoiles, Bradley découvrit, il y a un siècle environ, que la précession ne suffisait pas pour en rendre compte, et il fut conduit à conclure que l'axe de la Terre dans son mouvement autour de l'axe de l'écliptique éprouve une sorte de balancement ou de nutation qui le fait osciller de part et d'autre des génératrices du cône de la précession, lesquelles ne doivent plus être considérées dès lors que comme des positions moyennes de l'axe.

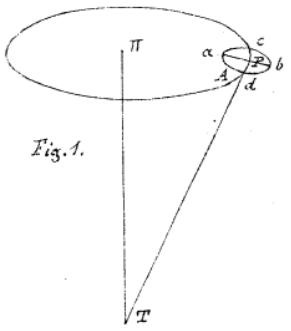


Fig. 1.

Ce mouvement d'oscillation est tel que si la précession n'existait pas, l'axe de la Terre décrirait autour de l'une de ses positions moyennes dans l'intervalle de 18 ans 2/3 un petit cône à base elliptique dont le demi-grand axe aurait sur la Sphère céleste une amplitude de 18",25, celle du demi-petit axe étant de 13",74.

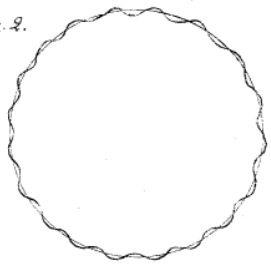
T π étant l'axe de l'écliptique, T P une position moyenne de l'axe du monde et a b c d l'ellipse de nutation sur la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sphère céleste ; le grand axe ab de cette ellipse est dans le plan ΠTP et son petit axe cd est perpendiculaire à ce plan.

Maintenant, en tenant compte à la fois de la précession et de la nutation, on voit que le pôle de l'équateur décrit une courbe épicycloïdale analogue à celle que représente la fig. 2, sur laquelle il est inutile de dire que la nutation se trouverait extrêmement exagérée.

Fig. 2.



La période de la nutation a la même durée que celle de la rétrogradation des nœuds de la Lune ; il était donc naturel de penser que la nutation est principalement produite par l'attraction de cet astre : c'est en effet ce que l'on a reconnu, et d'Alembert qui, le premier, a soumis cette question à des calculs d'une grande exactitude, a trouvé pour l'étendue de la nutation un nombre plus certain même que celui qui résultait des observations de Bradley.

Conséquences de la Précession et de la Nutation.

Variation de la précession. — Il résulte d'abord du phénomène de la nutation que la précession 50″,2 n'en est qu'une valeur moyenne ; en effet, la précession se compose de cette valeur moyenne et de l'effet périodique de la nutation qu'il faut lui ajouter avec son signe, comme une petite équation, pour obtenir la position vraie de l'axe de l'équateur à un instant donné.

Changement dans l'aspect de la sphère céleste. — Le pôle de l'équateur se déplaçant par an d'un arc de 50″,2 et accomplissant par suite sa révolution entière autour du pôle de l'écliptique en 26000 ans environ, la distance au pôle de l'étoile, qui porte actuellement le nom d'étoile polaire, varie sans cesse. A l'époque à laquelle remontent les plus anciennes observations, l'étoile polaire était à 12° du pôle, elle en allait sans cesse en s'en rapprochant. Aujourd'hui, elle en a 1° 28′ de ce point, et elle continuera à s'en approcher jusqu'en 2095 où sa distance sera réduite à 26′ 30″ ; elle s'en éloignera à partir de cette époque pendant 13000 ans et sa distance sera alors de 46°, puis elle s'en rapprochera et ainsi de suite. D'autres étoiles lui succèderont dans le voisinage du pôle et joueront à leur tour le rôle d'étoile polaire. Dans 12000 ans environ, Wega, α de la Lyre, se trouvera à 5° du pôle.

La précession des équinoxes change aussi l'aspect de l'hémisphère céleste visible en un lieu déterminé de la Terre. On comprend qu'elle doit avoir pour effet de rendre visibles, dans la suite des temps, des étoiles qui restent actuellement au dessous de l'horizon d'un lieu, et réciproquement de rendre plus tard invisibles des étoiles qui sont maintenant visibles en ce lieu.

Le déplacement du point vernal a également changé la correspondance des signes et des constellations. Ainsi, du temps d'Hipparque, ce point était à l'origine

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la constellation du Bélier, tandis qu'aujourd'hui il se trouve transporté à 30° environ dans le sens rétrograde, c'est-à-dire qu'il a atteint la constellation des Poissons. Comme on a cependant conservé la convention par laquelle l'origine du signe du Bélier répond toujours à l'équinoxe du printemps, on voit que les signes restent fixes par rapport au point vernal, tandis que les constellations se déplacent sans cesse par rapport au même point. Il faut donc bien distinguer les signes de l'écliptique et les constellations qui portent le même nom.

Précession par les planètes.

Variation de l'obliquité de l'écliptique. — Les actions du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre ne suffisent pas pour expliquer la diminution que l'on observe dans l'obliquité de l'écliptique, et on sait même que l'effet qu'ils produisent sur cet élément ne pourra devenir sensible qu'après un temps considérable. On a trouvé la cause de cette diminution dans les actions combinées des différentes planètes qui déplacent peu à peu le plan de l'écliptique dans l'espace. La quantité dont l'inclinaison du plan de l'écliptique sur celui de l'équateur diminue annuellement est de 0″48 environ.

Enfin, par suite de la nutation, l'obliquité de l'écliptique varie périodiquement d'une petite quantité; la période est celle de la nutation, 18 ans $\frac{2}{3}$ et l'amplitude de cette variation est de 36″,5.

Chapitre X.

Réduction des observations. — Formation des catalogues — Calculs des éphémérides.

On appelle pôle moyen, équateur moyen, et équinoxe moyen les positions moyennes que prendraient à chaque instant le pôle, l'équateur et l'équinoxe s'il n'y avait pas de nutation. On appelle de même obliquité moyenne celle de l'écliptique sur l'équateur moyen.

Le pôle vrai, l'équinoxe vrai et l'obliquité vraie à une époque déterminée sont ceux qui résulteraient des observations faites à cette époque.

Nous nous proposons d'indiquer dans ce chapitre comment les variations des éléments de l'orbite solaire étant connues, on peut calculer les coordonnées moyennes ou vraies d'un astre, pour une date déterminée antérieure ou postérieure à celle à laquelle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

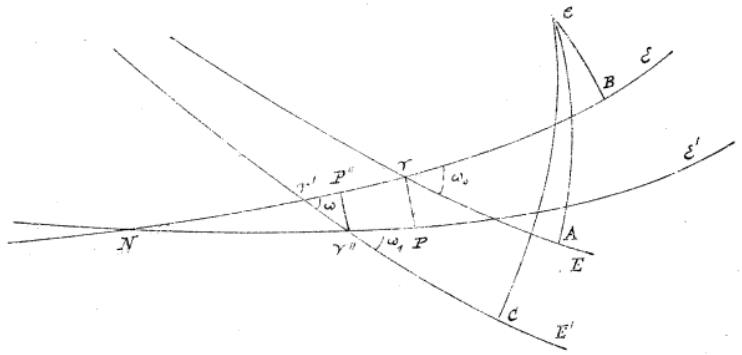
on connaîtrait ces coordonnées. Il sera facile de concevoir d'après cela comment on procède à la formation des catalogues et au calcul des éphémérides.

Les astronomes ont été conduits par la nature des mouvements qu'ils ont à considérer, à les décomposer en deux parties, dont l'une est uniforme et progressive, et l'autre périodique; cette dernière qui est en général très peu étendue, est donnée par ce qu'on appelle des équations. Dans le mouvement général des équinoxes, la partie progressive est la précession dont la nutation peut être considérée comme une équation. Nous verrons même que la précession ne répond pas à un mouvement rigoureusement uniforme.

Dans les formules qui servent à calculer les effets de ces deux mouvements, les termes relatifs à la précession, sont les termes séculaires, et ceux qui représentent la nutation sont les termes périodiques.

Toutes les quantités qui dépendent de la précession sont, comme elle, fonction du temps θ et peuvent se développer en séries, procédant suivant les puissances croissantes d'un accroissement t donné à cette variable. C'est ordinairement sous cette forme qu'on obtient les expressions relatives à la précession. Quand les intervalles sont peu considérables, on peut s'arrêter aux termes du premier degré et alors les variations sont sensiblement proportionnelles au temps.

Expression des coordonnées équatoriales d'une étoile pour $1850 + t$ — Soit NE l'écliptique et γE l'équateur en 1850, ces deux plans formant un angle ω_0. Après le temps t, l'équateur est venu de γE en $\gamma' E'$, formant avec NE un angle ω; mais en même temps l'écliptique s'est déplacée et fait avec $\gamma' E'$ l'angle ω_1. Pour le moment, nous faisons d'ailleurs abstraction de la nutation, de sorte que ω_1 est une quantité qu'on mesurerait directement si l'on pouvait rendre les observations indépendantes de ce mouvement.



$\gamma\gamma'$ est la précession lunisolaire ordinairement désignée par Ψ; $\gamma'\gamma'' = \alpha$ est la précession par les planètes. Si l'on mène le grand cercle γP perpendiculaire sur l'écliptique NE et $\gamma'' P''$ perpendiculaire sur NE, on peut considérer les arcs $\gamma P''$ et $\gamma'' P$ comme égaux, à cause du faible déplacement angulaire de l'écliptique, et chacun de ces arcs représente alors la précession générale ou apparente Ψ'; car $\gamma'' P$ est évidemment le déplacement du point vernal en longitude.

En développant Ψ, α et Ψ' par la théorie, on trouve, l'année julienne de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$365^{jm}.25$ étant prise pour unité de temps :

$$\psi = 50'', 37140\, t - 0'', 00010881\, t^2,$$

$$\psi' = 50'', 23752\, t + 0'', 00011290\, t^2,$$

$$\alpha = 0'', 14790\, t - 0'', 00024168\, t^2.$$

ω et ω_1 peuvent se développer de la même manière

$$\omega = \omega_0 + 0'', 00000719\, t^2,$$

$$\omega_1 = \omega_0 - 0'', 47566\, t - 0, 00000149\, t^2.$$

D'ailleurs l'observation donnait pour 1850 . 0

$$\omega_1 = 23° 27' 32''$$

A l'aide de ces données, il est théoriquement très simple de passer des coordonnées équatoriales d'une étoile en 1850. 0 à ses coordonnées en $1850 + t$, t pouvant être positif et négatif.

L'observation fait connaître la déclinaison $eA = \delta$ et l'ascension droite $\gamma A = R$ de l'étoile.

Par les formules de transformation, on peut calculer $eB = l$ et $\gamma B = L$.

Désignant ensuite par L' et l' la longitude et la latitude rapportées au point γ', nous aurons :

$$L' = L + \psi,$$

$$l' = l$$

Nous pourrons maintenant transformer L' et l' en coordonnées équatoriales rapportées à $\gamma' E'$; nous nous servirons pour cela de ω qui est connu, et nous obtiendrons

$$eC = \delta' \qquad \text{et} \qquad \gamma' C = R'.$$

Pour rapporter l'étoile au point vernal vrai γ'', il n'y aura plus qu'à retrancher α de R', et nous aurons enfin

$$R_t = R' - \alpha,$$

$$\delta_t = \delta'$$

Enfin, on pourrait encore passer aux coordonnées écliptiques en se servant de ω_1.

Pour la plupart des étoiles lorsque l'intervalle de temps t ne comprend qu'un petit nombre d'années on peut éviter ce long calcul. En effet, tant que la quantité ψ qu'il faut ajouter à L pour avoir L' peut être considérée comme la différentielle de L', cette quantité ψ étant connue, en désignant toujours par un accent les coordonnées rapportées à γ' comme origine, on a évidemment

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\mathcal{R}_t = \mathcal{R}' - \alpha = \mathcal{R} + d\mathcal{R} - \alpha,$$
$$\delta_t = \delta + d\delta.$$

et pour calculer $d\mathcal{R}$ et $d\delta$, il suffit de différentier une fois les formules de transformation, dans lesquelles on peut alors considérer ω comme constant, pourvu que t ne dépasse pas une dizaine d'années.

Mais quand t est trop grand, ou qu'il s'agit d'une étoile très éloignée du pôle, on est obligé de faire plusieurs différentiations ou de recourir aux formules de transformation elles-mêmes et de suivre la marche qui a d'abord été indiquée.

Formules de la nutation. — Pour tenir compte de la nutation, il faut ajouter à la précession générale la nutation en longitude N_L dont l'expression est

$$N_L = 17'',25 \sin \mathfrak{N} + 0'',21 \sin \mathfrak{N} - 1''27 \sin 2\odot - 0'',20 \sin 2\mathbb{C},$$

$\mathfrak{N}$ désignant la longitude du nœud ascendant de la Lune, $\odot$ et $\mathbb{C}$ les longitudes du Soleil et de la Lune à la date considérée.

On ne peut plus, dans ce cas, négliger la variation de l'obliquité de l'écliptique, puisque la période de cette variation n'est que de 18 ans environ. Pour calculer l'effet de la nutation en $\mathcal{R}$ et δ, il faut donc alors, en différentiant les formules de transformation faire varier à la fois $\mathcal{R}$, δ, L et ω. L'altération de l'obliquité de l'écliptique par la nutation est:

$$N_\omega = 9'',22 \cos \mathfrak{N} - 0'',09 \cos 2\mathfrak{N}$$
$$+ 0''09 \cos 2\mathbb{C} + 0'',55 \cos 2\odot$$

L'expression totale du déplacement en longitude est

$$50'',23572\,t + 0'',0001128\,t^2 + N_L;$$

les deux premiers termes formant la partie séculaire. Dans l'expression de la variation de l'obliquité de l'écliptique, c'est le terme en t^2 de la valeur donnée plus haut pour ω qui forme la partie séculaire.

Pour que les résultats de ces calculs concordent avec l'observation, il faut en outre avoir égard à l'aberration résultant de ce que la lumière ne se propage pas instantanément. L'explication de ce phénomène et la manière d'en tenir compte seront indiquées dans une des leçons suivantes.

Telles sont les méthodes que l'on emploie soit pour réduire à une même date des observations faites à différentes époques, soit pour calculer les coordonnées équatoriales apparentes des étoiles pour des époques postérieures à celle des observations et que l'on consigne à l'avance dans les Annuaires astronomiques.

Catalogues d'étoiles. — Les éphémérides que l'on trouve dans ces Annuaires ne contiennent que les positions apparentes des étoiles dites fondamentales; mais on peut

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

avoir besoin d'en observer d'autres, et alors on a recours aux catalogues dans lesquels on trouve les coordonnées d'un grand nombre d'étoiles rapportées au point vernal moyen et à l'équateur moyen d'une date déterminée.

L'observateur doit alors calculer lui-même la précession, la nutation et l'aberration; mais on trouve actuellement dans le Nautical Almanac des tables qui simplifient heureusement beaucoup ce calcul dont nous devions pour cela nous borner à indiquer le principe.

Enfin, dans ce transport de coordonnées, d'une époque à une autre, on doit même avoir égard au faible mouvement propre des étoiles; mais cette correction est très facile, car il est toujours permis d'admettre que le mouvement extrêmement lent dont il s'agit est proportionnel au temps, et l'on trouve dans les catalogues le mouvement propre annuel.

Coordonnées vraies du Soleil. — Pour tenir compte, dans la théorie du Soleil, de la nutation et des perturbations produites par les planètes, il faut remarquer que la longitude moyenne $M = M_0 + nt$ se compte simplement à partir du point vernal moyen, de sorte que pour calculer la longitude vraie, il suffira en désignant par N la valeur actuelle de la nutation en longitude et par P l'effet général des perturbations, d'employer la formule

$$L = M + E + N + P,$$

et $$R = M + E + N + P + R.$$

On calculera également δ au moyen de L et de l'obliquité vraie par la formule ordinaire; et quant à la latitude du Soleil, on sait qu'elle provient entièrement des perturbations.

Pour l'équation du temps et le temps sidéral, on se rappellera que l'ascension droite du Soleil moyen est égale à la longitude moyenne M, celle-ci étant comptée du point vernal moyen.

Or, pour pouvoir comparer le passage du Soleil moyen au méridien, avec ceux du Soleil vrai, ou du point vernal vrai qui marquent le temps vrai ou le temps sidéral, il faut nécessairement prendre la même origine pour l'ascension droite du Soleil moyen.

C'est ce que l'on fera en ajoutant à M la nutation en longitude projetée sur l'équateur et l'on aura pour le temps sidéral à midi moyen:

$$M + N \cos \omega,$$

et pour l'équation du temps qui est la différence des ascensions droites du Soleil vrai et du Soleil moyen

$$Q = M + E + N + P + R - (M + N \cos \omega) = E + P + R + 2N \sin^2 \tfrac{1}{2} \omega.$$

Année sidérale. — L'année sidérale est l'intervalle de temps que le Soleil met à revenir au même point du ciel, à une même étoile par exemple. Sa durée est constante

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et c'est à elle que s'appliquent les lois de Képler.

Elle se déduit de l'observation de la durée de l'année tropique moyenne et de celle du mouvement de rétrogradation du point vernal.

En prenant la dérivée de l'expression de la précession générale Ψ' en $1850 + t$, on a pour cette vitesse de rétrogradation du point vernal

$$\frac{d\Psi'}{dt} = p' = 50'',23572 + 0'',00022578\,t;$$

d'une autre côté, on trouve que le moyen mouvement tropique du Soleil, en tenant compte de la variation de vitesse du point vernal est, en $1850 + t$

$$n = 1296027'',618064 + 0'',00022578\,t.$$

t étant toujours exprimé en année julienne de $365^j,25$, le moyen mouvement sidéral du Soleil est donc

$$n - p' = 1295977'',382344.$$

D'après cela, la durée de l'année tropique est, en $1850 + t$,

$$\frac{2\pi}{n} \times 365^j,25 = 365^j,2422166 - 0^j,000000636\,t;$$

et l'année sidérale est toujours égale à

$$\frac{2\pi}{n - p'} \times 365^j,25 = 365^j,2563744$$

Variation des éléments de l'orbite terrestre. — Nous avons déjà vu que le plan de l'écliptique se déplaçait lentement dans l'espace par l'effet de l'action des planètes sur le mouvement de la Terre autour du Soleil. Il en résulte qu'à notre époque, l'obliquité de l'écliptique va en diminuant, ce qui produit de faibles changements dans l'étendue relative des zônes dans lesquelles on partage le globe terrestre. Mais, cette diminution cessera et l'obliquité ira ensuite en croissant en augmentant. L'amplitude de ces oscillations qui mettent des milliers d'années à s'accomplir, est de quelques degrés à peine. La diminution est actuellement de 48'' environ par siècle.

L'excentricité de l'ellipse décrite par la Terre est également dans sa période de décroissance, elle peut s'évaluer pour $1850 + t$ par la formule

$$e = 0,01677046 - 0,0000004334\,t$$

D'après M. Le Verrier, ses limites sont 0,0033 et 0,086712.

L'axe de l'ellipse ne conserve pas la même orientation dans l'espace; l'astronome arabe Albatenius (Al Batani) a découvert au IXe siècle que cet axe se déplaçait dans le sens direct, et, d'après les observations et les calculs les plus exacts, la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

longitude du périgée pour 1850 + t en donné par la formule

$$\pi = 280°21'40'' + 11'',56795\,t.$$

Le temps que le Soleil met à revenir au périgée diffère donc de la durée de l'année sidérale et de l'année tropique. Les anomalies se comptant à partir du périgée, on a donné à cette période le nom d'année anomalistique. Elle est plus longue que l'année sidérale de $4^m 35^s$.

Le mouvement de la ligne des équinoxes et celui du périhélie concourent pour faire varier la durée des saisons. Le changement de l'excentricité de l'ellipse intervient également dans ce phénomène.

Tous les éléments du mouvement elliptique varient donc, sauf la durée de l'année sidérale, et par suite le demi-grand axe de l'orbite, c'est-à-dire la moyenne distance de la Terre au Soleil.

Remarque. — Nous venons de prévenir que les lois de Képler s'appliquaient à l'année sidérale; ce n'est cependant pas le mouvement sidéral que l'on emploie pour calculer l'anomalie moyenne, mais le mouvement tropique n dont on a eu besoin pour calculer $M_0 + nt$, c'est-à-dire la longitude moyenne comptée à partir de l'équinoxe moyen. On passe ensuite de cette longitude moyenne à l'anomalie moyenne $M_0 + nt - \pi$ en reportant la précession sur la longitude. Or, on vient de voir que

$$\pi = 280°21'40'' + 11'',56795\,t;$$

il suffira donc de faire

$$\pi = 280°21'40'' + 61'',80367\,t;$$

car le mouvement direct du périhélie étant de $11'',56795$, et le mouvement rétrograde du point vernal de $50'',23572$, si l'on transporte au périhélie le mouvement du point vernal, le premier de ces deux points semblera (aussi) par rapport au second un mouvement de $61'',80367$ dans le sens direct en dans $365^j,25$ qui est l'unité de temps employée dans tous ces calculs.

Chapitre XI.

Calendrier — Durée des jours et des nuits — Saisons et Climats.

Du calendrier. — Le calendrier a pour objet la division du temps en périodes de différentes longueurs au moyen desquelles on puisse assigner l'époque d'un événement accompli au futur, rapproché ou éloigné, c'est en un mot la base de la chronologie.

On sait que les périodes actuellement en usage sont le jour, la semaine, le mois,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'année et le siècle.

Le nom de calendrier vient de celui des Calendes sous lequel les Romains désignaient le premier jour de chaque mois.

Il existe deux espèces de calendriers : le calendrier solaire et le calendrier lunaire.

Les peuples de l'Antiquité et particulièrement les Grecs ont cherché à les faire concorder au moyen de périodes ou de cycles dont nous mentionnerons les plus intéressants après l'étude du mouvement de la Lune ; mais toutes les nations occidentales, à l'exception des Musulmans ont adopté exclusivement le calendrier solaire, sauf pour ce qui concerne la fixation de certaines fêtes religieuses.

Le jour civil a la même durée que le jour solaire astronomique et comme celui-ci il est divisé en 24 heures ; seulement il commence à minuit au lieu de commencer à midi et se compose de deux périodes égales de 12 heures chacune, matin et soir. Enfin le phénomène du lever et du coucher du Soleil le divise encore en deux parties de durée variable et généralement inégales, le jour et la nuit.

La semaine est une période régulière de sept jours qui se superpose en quelque sorte à celle des mois, des années et des siècles, sans avoir de rapports déterminés avec celles. Son origine est très ancienne, elle paraît avoir été connue de tous les peuples de l'Orient et cependant les Grecs ni les anciens Romains n'en ont fait usage. L'idée de donner à chacun des jours de la semaine le nom de l'une des sept planètes est relativement assez récente[1]. Cette période n'a été introduite qu'au IIIe siècle dans le calendrier latin. Au lieu de la semaine, les Egyptiens et les Grecs employaient la décade qui a été remise en vigueur pendant quelques années dans le calendrier républicain institué à une époque où l'on s'efforçait d'introduire partout le système décimal.

Le mois est une période de durée variable qui a été établie originairement pour correspondre à la révolution synodique de la Lune[2]. La succession de douze mois constitue l'année civile dont la durée moyenne s'approche autant que possible de celle de l'année tropique.

Toute la difficulté de régler le calendrier provient de ce que les révolutions du Soleil et de la Lune ne contiennent ni l'une ni l'autre un nombre entier de jours. Nous avons déjà dû qu'il y avait deux espèces de calendrier. Le calendrier lunaire suffisait

---

(1) Les noms des jours de la semaine proviennent de ce que la première heure de chaque jour était consacrée à l'une des sept planètes, au nombre desquelles les Anciens comptaient le Soleil et la Lune. Les peuples néo-latins ont changé les noms de deux jours consacrés à Saturne et au Soleil dont ils ont fait le Samedi et le Dimanche. On retrouve les anciens noms conservés dans d'autres langues, par exemple en Anglais, Saturday et Sunday.

(2) Le nom du mois a pour origine celui de la Lune dans les langues anciennes. On en retrouve encore le radical dans les langues germaniques, moon (Angl.), mond (allem.)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et devait même être préféré par les peuples nomades ou pasteurs. Les nations plus civilisées durent au contraire avoir recours au calendrier solaire qui ramène les jours de même durée et de même température moyenne sensiblement aux mêmes dates, et qui permet par conséquent de fixer facilement les époques convenables aux travaux de l'agriculture, par exemple, par le retour de certaines fêtes.

Les Egyptiens avaient une année solaire de 365 jours qui laissait altérer à la longue cette propriété et qui en qualifiée pour ce motif d'année vague. Cette année était composée de 12 mois de 30 jours divisés en 3 décades, à la suite desquels venaient 5 jours complémentaires. Ce sont ces mêmes divisions qui figurent dans le calendrier républicain suivi en France de 1793 à 1806.

Les Grecs, après avoir employé le calendrier lunaire avec l'année de 354 jours dont les mois étaient alternativement de 29 et de 30 jours adoptèrent l'année Egyptienne et sa division.

Les Romains comptaient les jours en rétrogradant à partir des Calendes, des nones et des ides, trois jours de fêtes qui divisaient inégalement chaque mois. Les ides qui arrivaient le 13 ou le 15 du mois étaient précédés de 9 jours par les nones qui tombaient par conséquent le 5 ou le 7.

Le calendrier Romain, réformé par Jules César a été adopté depuis dans tout l'occident avec l'introduction de la semaine substituée avantageusement aux divisions irrégulières données par les calendes, les nones et les ides. Les peuples modernes, en adoptant le calendrier romain ont conservé les noms des mois et le nombre de jours dont ils étaient composés, malgré leur irrégularité, dont nous indiquerons plus loin la cause très peu raisonnable. Indépendamment du nom donné à chaque jour de la semaine, pour préciser les dates, il désignent les jours par des numéros allant depuis le commencement jusqu'à la fin du mois.

Les Astronomes se sont conformés naturellement aux usages civils; néanmoins ils comptent fréquemment les jours sans interruption dans tout le cours de l'année à partir du 1er Janvier à midi moyen. Toutes leurs dates sont d'ailleurs en retard de 12 heures sur les dates civiles.

La difficulté de régler le calendrier solaire consistait, comme nous savons, à mettre l'année civile qui devait nécessairement se composer d'un nombre entier de jours en harmonie avec l'année tropique dont la durée est de $365^{j}{,}24222$, afin que les saisons reviennent exactement aux mêmes époques pendant un grand nombre de siècles. On est parvenu à la surmonter d'une manière très simple par le procédé des intercalations.

Réforme Julienne. — A l'époque de Jules César, l'institution du calendrier romain avait été tellement faussée par les Pontifes que la discordance s'élevait à 90 jours, c'est-à-dire à une saison entière. D'après le conseil de l'Astronome Sosigène, venu à cet effet d'Alexandrie, J. César décida que sur quatre années consécutives, il y en aurait

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trois de 365 jours et une de 366 jours, ce qui donnait à l'année civile une durée moyenne de 365j, 25. Le jour intercalaire ayant été placé dans le mois de Février à la suite du sixième jour avant les calendes de Mars qui s'appelait sexto-calendas, fut appelé lui-même bissexto-calendas, d'où est venu le nom de bissextile donné à l'année de 366 jours. Dans le calendrier de J. César, les 12 mois de chaque année bissextile étaient alternativement de 31 jours et de 30 jours; dans les autres années (années communes), le mois de février n'avait que 29 jours. Cet ordre simple et régulier fut altéré quand le mois qui suivait Juillet (consacré à Jules César) ayant reçu lui même le nom d'Auguste, on voulut que ces deux mois contins sent un nombre égal de jours.(1)

La première année dans laquelle le calendrier Julien fut suivi est l'année 47 avant J.C. Le commencement de cette année fut reculé du nombre de jours dont la correspondance des saisons et des fêtes avait été troublée; depuis l'époque de première institution religieuse des Romains; il en résulta que l'année précédente fut de 445 jours. Les chronologistes désignent celle-ci sous le nom d'année de confusion.

Le calendrier Julien fut suivi sans modification pendant plusieurs siècles. Le Concile de Nicée qui se tint en 325 après J.C. et qui s'occupa du calendrier pour fixer l'époque des fêtes ecclésiastiques, le maintint tel qu'il était. Cependant la valeur moyenne attribuée à l'année civile par Jules César dépassant un peu celle de l'année tropique, il finit par en résulter un changement en sens inverse de celui qui s'était produit avant la réforme Julienne dans les dates auxquelles arrivaient, chaque année, les commencements de saisons.

Une nouvelle réforme devint donc nécessaire. Proposée à différentes époques et notamment vers la fin du 14e siècle, par un savant Français, le Cardinal P. d'Ailly, elle ne fut accomplie que deux siècles plus tard par le pape Grégoire XIII, aidé par l'astronome Lilio. Il fut alors décidé que dans l'espace de 100 ans il y aurait 97 années bissextiles au lieu de 100 qu'indiquait le calendrier Julien. On supprimait ainsi 3 jours sur 400 ans et par conséquent l'année civile se trouvait diminuée de 0j, 0075; elle était donc réduite à 365j, 2425, quantité très peu différente de la valeur de l'année tropique.(2)

---

(1) Quelques uns des noms des mois indiquent l'ordre qu'ils occupaient dans le calendrier quand Mars était le premier, Septembre, Octobre, Novembre et Décembre. Hennet qui rappellent la nature des fêtes qui y étaient célébrées, Février (februare, purifier), Avril (aperire), Mai (majores). D'autres enfin étaient ceux de divinités, de grands hommes ou de princes auxquels on les avait consacrés, Janus, Mars, Junius Brutus, Julius César, Augustus.

(2) Règle du calendrier Grégorien. — Les années séculaires dont le millésime, après la suppression des deux derniers zéros, reste divisible par 4 sont bissextiles, les trois autres ne le sont pas. Ainsi l'année 1600 a été bissextile, les années 1700, 1800 ne l'ont pas été; l'année 1900 ne le sera pas non plus, mais l'année 2000 le sera et ainsi de suite.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'année grégorienne ainsi obtenue est encore plus grande que l'année tropique de $0^j,00028$; mais il faudrait environ 4000 ans pour que la date de l'équinoxe avançât d'un seul jour ; or, dans un pareil intervalle de temps, la durée de l'année tropique subit elle-même une variation séculaire, et il est inutile d'ailleurs, de régler le calendrier pour des époques aussi éloignées.

Quand la réforme grégorienne fut établie, l'imperfection du Calendrier Julien avait déjà fait avancer de 10 jours la date de l'équinoxe depuis le Concile de Nicée. Pour faire disparaître cette avance et ramener les fêtes aux dates qu'avait fixées le Concile, le Pape décréta que le lendemain du 4 Octobre se nommerait non pas le 5 Octobre, mais le 15 Octobre 1582, et l'année de la réforme n'eût par conséquent que 355 jours.

Le calendrier grégorien ne fut pas immédiatement adopté par le peuple protestant, il n'y a guère qu'un siècle qu'il est suivi par les Anglais. Les Russes (l'Eglise Grecque) conservent encore le calendrier Julien ; il en résulte maintenant une différence de 12 jours entre leur calendrier et le nôtre. Dans les relations qui existent entre les nations appartenant à la religion grecque et les autres peuples de l'Europe, on inscrit au dessous de la date prise dans le calendrier Julien (ancien Style) celle qui lui correspond dans le calendrier Grégorien (nouveau Style)

Période Persanne. — Dès les dernières années du XIe Siècle, c'est-à-dire longtemps avant la réforme Grégorienne, les Persans avaient trouvé un moyen de faire accorder encore plus exactement l'année civile avec l'année tropique. Dans le calendrier Persan, pendant 28 ans on compte une année bissextile tous les quatre ans, après quoi, on regarde seulement comme bissextile la 5e qui suit. Ainsi on ajoute aux 365 jours de l'année 8 jours en 33 ans, ce qui fixe la durée de l'année à $365^j,2424$. Cassini, sans avoir eu connaissance de cette période, l'avait imaginée de son côté.[1]

Des différentes ères. — Une ère est une époque remarquable qui sert d'origine à la supputation des années.

L'ère chrétienne, adoptée par les peuples modernes, remonte à l'année de la naissance de J.C.

Les Anciens ont eu différentes ères dont nous allons citer les principales.

L'ère de Nabonassar, qui date de l'année − 745 est dont l'importance vient de ce qu'elle a été adoptée par Ptolémée et par plusieurs autres astronomes.

L'ère des Olympiades qui commence en l'année − 775 date de la reprise des jeux Olympiques et qui a été en vigueur chez les Grecs.

L'ère des Romains, qui remonte à l'année de la fondation de Rome en l'an − 752. (ab urbe condita).

Les époques qui ont servi d'origine à ces différentes ères sont assez mal définies. Les dates que nous venons de citer sont celles que donnent les astronomes, les chronologistes

---

[1] On peut encore citer la période Egyptienne ou Sothiaque de 1461 jours qui correspond à 4 années Juliennes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui, après l'année −1 comptent l'année +1 et qui ne sont pas obligés, comme les Astronomes, de dater une année du chiffre 0 désignant les origines des trois ères par les années 746, 776 et 783 avant J.C. (1)

Durée des jours et des nuits. — Si dans la formule générale

$$\cos H = \frac{\cos z - \cos\lambda \cos\delta}{\sin\lambda \sin\delta},$$

nous faisons $z = 90°$, λ désignant la colatitude d'un lieu déterminé et δ la valeur de la distance polaire du Soleil à une certaine date de l'année, on aura l'arc semi-diurne pour ce lieu et pour cette date par la formule

$$\cos H = -\operatorname{cotg}\delta \operatorname{cotg}\lambda$$

λ étant supposé constant, si l'on fait varier δ depuis $90° - \omega$ jusqu'à $90° + \omega$, on trouvera pour un même lieu la durée du jour aux différentes dates de l'année.

Enfin, en donnant à λ toutes les valeurs depuis 0° jusqu'à 180°, la discussion de la même formule conduirait très simplement à la division du globe terrestre en cinq zônes ou climats.

Climats. — Des quatre parallèles qui limitent ces différentes zônes, les deux premiers sont à une latitude égale à l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur et portent le nom de Tropiques; les deux autres sont à une latitude complémentaire de celle des deux premiers et sont appelés les cercles polaires.

La zône comprise entre les deux tropiques s'appelle la zône torride; le Soleil passe deux fois par an au zénith de chaque point de cette zône, excepté pour les points des tropiques eux-mêmes, où ces astres ne passe au zénith qu'au Solstice d'été ou au Solstice d'hiver. Les zônes tempérées s'étendent depuis les tropiques jusqu'aux cercles polaires; le Soleil se lève et se couche chaque jour de l'année dans toute l'étendue de ces deux zônes, mais il ne passe au zénith d'aucun des lieux qu'elles renferment. Enfin les zônes glaciales s'étendent depuis les cercles polaires jusqu'aux pôles; elles comprennent tous les points où le Soleil reste constamment au dessus ou au dessous de l'horizon pendant plusieurs jours de suite à certaines époques de l'année.

Jour apparent — Jour crépusculaire. — Si l'on voulait tenir compte de la réfraction, du diamètre apparent du Soleil et du crépuscule, les résultats que nous venons d'indiquer seraient modifiés d'une manière notable. En effet, la réfraction élève le Soleil de 35′ à l'horizon, son diamètre apparent permet de le voir quand son centre est déjà abaissé de

---

(1) Nous ne nous sommes occupés ici que du calendrier civil et de ses rapports avec la Chronologie. Pour le calendrier Ecclésiastique qui sert à fixer les dates des fêtes mobiles, voyez les ouvrages spéciaux.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

16′ ; enfin la lueur crépusculaire dure pendant tout le temps que le Soleil emploie à descendre de 18° au dessous de l'horizon apparent. La nuit totale commence donc ou finit lorsque la distance zénithale du Soleil est

$$z = 90° + 35′ + 16′ + 18°.$$

Pour obtenir la durée du jour augmentée des deux crépuscules, il faut par conséquent, dans la formule précédente, remplacer z par cette valeur. En faisant le calcul pour la latitude de Paris, on trouve que vers le Solstice d'été, il n'y a pas de nuit complète.

Saisons. — Les passages du Soleil aux équinoxes et aux solstices dont on sait déterminer les époques précises par l'observation, partagent l'année en quatre saisons. Nous avons fait remarquer dans l'un des chapitres précédents, que les durées inégales de chacune d'elles étaient en outre lentement variables.

La température en un lieu dépend, si l'on fait abstraction des causes accidentelles qui peuvent influer sur elle, de la durée de la présence du Soleil au dessus de l'horizon et de l'obliquité de ses rayons à une heure déterminée, à midi, par exemple.

Il est facile de voir, d'après ce qui précède, que la température à une époque donnée, ne doit pas être la même pour les différents lieux de la Terre. Cette circonstance était un obstacle à l'établissement du calendrier républicain dans lequel le nom des mois d'ailleurs très harmonieux et bien préférable sous ce rapport à ceux qui nous viennent des anciens, convenaient seulement au climat de la France.

Chapitre XII.

Distance, dimensions et constitution physique du Soleil.

(Voy. la planche 13 du portefeuille)

Distance du Soleil à la Terre. — Nous avons vu précédemment que l'excentricité de l'orbite terrestre était et devait rester une quantité assez faible relativement à la moyenne distance de la Terre au Soleil. Le rapport de cette moyenne distance au rayon de la Terre, est donné par l'inverse de ce qu'on appelle la parallaxe horizontale du Soleil. La Terre n'étant pas exactement sphérique, on prend pour terme de comparaison le rayon équatorial, et, en général, pour tous les astres dont la distance à la Terre n'est pas trop grande, on donne indifféremment cette distance par son rapport au rayon équatorial ou la parallaxe horizontale équatoriale de l'astre.

Nous verrons bientôt (Chap.e XIX), par quelles observations on est parvenu à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

déterminer la parallaxe du Soleil avec une assez grande approximation. Admettons pour le moment la valeur 8″,57 qui résulte de ces observations; ce nombre signifie que le rayon équatorial terrestre vu du centre du Soleil, lorsque cet astre est à sa moyenne distance, sous-tend un angle de 8″,57; d'où l'on déduit, pour le rapport du rayon R de l'orbite terrestre au rayon r de la Terre

$$\frac{R}{r} = \frac{206264.8}{8,57} = 24033;$$

ainsi $R = 24000\, r$ environ.

Dimensions du Soleil. — L'observation directe apprend que le diamètre apparent du Soleil à sa moyenne distance de la Terre est de 32′ 0″. Cette distance étant désormais connue, on en conclura la grandeur réelle du rayon ρ du Soleil. On peut même remarquer immédiatement que le rayon du Soleil et celui de la Terre sont dans le même rapport que les angles assez petits qu'ils sous-tendent à la même distance, et que l'on a par conséquent

$$\frac{\rho}{r} = \frac{16'}{8'',57} = 112 \quad \text{ou} \quad \rho = 112\, r;$$

ainsi le rayon du Soleil est égal à 112 fois environ celui de la Terre; ce qui fait à peu près le double du rayon de l'orbite lunaire (Chap. XIII.)

Le phénomène que l'on observe à la surface du Soleil prouvent que cet astre a la forme sphérique; et puisque l'on connaît le rayon de cette sphère, il sera facile d'en calculer la surface et le volume.

Taches du Soleil. — Quand on examine le Soleil à l'aide de lunettes, on voit fréquemment sur la surface, des taches noires plus ou moins nombreuses. Ces taches se composent de deux parties bien distinctes, dont l'une occupant le milieu, est d'un noir très prononcé et porte le nom de noyau, tandis que l'autre appelée pénombre, s'étend plus ou moins régulièrement sur le contour du noyau en présentant une teinte grisâtre. La découverte de ces taches remonte au temps de Galilée; elle paraît avoir été faite d'abord par l'astronome hollandais Fabricius. Les dimensions des taches sont très variables, quelques unes sont assez considérables pour être visibles à l'œil nu (1).

Les taches du Soleil ont servi à constater que cet astre est animé d'un mouvement de rotation direct autour d'un axe incliné sur le plan de l'écliptique. On reconnaît en effet, que ces taches, tout en conservant à peu près leur position relative se déplacent sur le disque du Soleil en s'avançant de l'Est à l'Ouest, puis qu'après avoir disparu à l'Ouest, elles reparaissent du côté de l'Est. Enfin on juge que l'axe de rotation

(1) On a mesuré des taches dont le diamètre apparent dépassait 2 minutes et demie. Pour se faire une idée de leur étendue, il suffit de rappeler que le diamètre de la Terre vu à la même distance n'est que de 17″ environ.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en incliné sur le plan de l'écliptique, en suivant les positions successives de chaque tache sur le parallèle qu'elle décrit. La durée de la rotation du Soleil a été mesurée à différentes époques et par plusieurs observateurs. Cassini avait trouvé $25^j\,14^h\,5^m$; Delambre $25^j\,0^h\,17^m$; M. Petersen 25 jours $4^h\,30^m$; et enfin M. Laugier, qui a fait un très grand nombre d'observations à ce sujet, a trouvé en moyenne $25^j\,8^h\,10^m$. Un autre observateur, M. Schwabe, qui s'est occupé spécialement de l'étude des taches du Soleil, donne pour limites $25^j,07$ et $25^j,75$. Il est en effet très difficile d'arriver à un résultat rigoureusement exact, les taches subissant des changements de forme, ainsi qu'il résulte des observations de M. Laugier.

La durée apparente de la rotation est un peu plus longue que la durée réelle, par suite du mouvement de translation de la Terre. Si l'on a trouvé par exemple, que la durée apparente est de $27^j,4$, en divisant la durée de l'année sidérale ou $365^j,25638$ par 27,4, on aura, pour le nombre des rotations apparentes effectuées dans ce temps, 13,33. Or, en un an, la Terre ayant accompli une révolution autour du Soleil, dans le même sens que celui dans lequel le Soleil tourne autour de son axe, il en résulte qu'un observateur placé sur la Terre a eu une rotation de moins. Le nombre de rotations réellement effectuées est donc de 14,33 et la durée de la rotation est par conséquent de

$$\frac{365,25698}{14,33} = 25^j,4.$$

Delambre a conclu en outre de l'observation des taches que l'angle de l'équateur Solaire avec le plan de l'écliptique était de 7°19'. M. Laugier a trouvé 7°9' et M. Petersen 6°51' seulement.

La longitude du nœud de l'équateur Solaire sur l'écliptique était de 80°45' d'après les observations de Delambre. M. Laugier a trouvé 75° et M. Petersen 73°29'.

Les taches ne se rencontrent pas sur toute l'étendue du disque; elles sont distribuées sur deux zônes de 30° chacune environ de part et d'autre de l'équateur et laissent entre elles un intervalle de 6°.(1)

On remarque encore sur le disque du Soleil des bandes ou des raies beaucoup plus brillantes que le reste de la surface, auxquelles on a donné le nom de facules. On reconnait aussi, avec de bons telescopes que toute la surface du Soleil est couverte de points lumineux et de points obscurs ou de rugosités alternativement sombres et brillantes. Ces points et ces rugosités d'éclats différents ont été désignés sous le nom de Leucules.

Les apparences que présentent les taches, la disparition de la pénombre du côté oriental de la tache, lorsque celle-ci s'approche du bord occidental du disque Solaire, leurs changements de forme, leur disparition complète et la formation de nouvelles taches ont conduit successivement les observateurs à faire des conjectures de plus en plus plausibles sur la constitution physique du Soleil. Celle d'Herschel, soutenue et développée par Arago, est aujourd'hui presque généralement admise. On regarde le Soleil comme

(1) On en a cependant vu quelques unes à 40° de l'équateur et au delà

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

étant formé d'un noyau opaque entouré d'une première atmosphère vaporeuse et d'une seconde atmosphère lumineuse à laquelle on a donné le nom de photosphère. On a même quelque raison de supposer qu'il existe une troisième enveloppe nuageuse. La photosphère semble être dans un état continuel d'agitation, et les ouvertures qui se forment dans cette enveloppe, en laissant apercevoir le noyau, produisent les taches[1]. D'après M. Schwabe, les apparitions des taches seraient périodiques.

Arago a prouvé, par des expériences de polarisation, que la surface du Soleil était à l'état gazeux. Il a également démontré que l'intensité lumineuse était la même au centre et sur les bords.

Enfin, d'après des expériences très délicates, entreprises dès 1842 et répétées en 1852, par le P. Secchi, l'intensité calorifique de diverses régions du disque solaire n'est pas la même, et le maximum a lieu dans le voisinage de l'équateur. Ces expériences ont été faites au moyen d'une pile thermo-électrique sur laquelle on dirigeait l'image du Soleil obtenue à travers une lunette.

Lumière zodiacale. — La lumière zodiacale est un phénomène qui apparaît vers l'équinoxe du printemps, après le coucher du Soleil, et vers l'équinoxe d'automne un peu avant le lever de cet astre; c'est une lueur de forme lenticulaire qui s'appuie sur l'horizon et dont la hauteur atteint quelquefois de 70° à 90°; sa largeur varie de 10° à 30°. Son grand axe est dirigé vers le Soleil et se projette sur l'écliptique. Cette lueur participe d'ailleurs au mouvement diurne; quand on l'observe le soir, son extrémité supérieure s'abaisse de plus en plus, et au bout de quelque temps elle disparaît complétement.

Ce phénomène est difficile à observer dans nos climats, tandis qu'il est très apparent dans les tropiques. Il paraît avoir été observé dès le 15e siècle; mais c'est Cassini qui l'a décrit le premier avec détail.

Quelques Astronomes ont cru que la lumière zodiacale était une atmosphère du Soleil. Mais Sir J. Herschell a prouvé l'invraisemblance de cette hypothèse. De son côté il suppose que la lumière zodiacale est due à une sorte de nébuleuse très diffuse, et attribue à son action les déviations que l'on a récemment observées dans la marche de plusieurs comètes. On ignore encore la véritable nature de ce phénomène.

Mouvement général de translation du Soleil et des planètes dans l'espace. Selon la remarque de M. Herschel, les observations des mouvements propres d'un grand nombre d'étoiles prouvent que le Soleil doit être animé d'un mouvement de translation dans le ciel et qu'il se dirige actuellement, en entraînant avec lui tout le Système planétaire, vers un point de la constellation d'Hercule dont l'ascension droite et la déclinaison ont même été calculées avec un certain degré d'approximation.

---

[1] Plusieurs astronomes habiles observateurs ont cru pouvoir simplifier cette conception et regarder le Soleil comme composé de deux parties essentielles, le noyau et la photosphère.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chapitre XIII.

De la Lune.

Éléments de l'orbite lunaire. – Phénomènes accomplis dans une lunaison.

Les Anciens observaient le mouvement de la Lune principalement dans le but de découvrir des périodes propres à faire concorder le calendrier lunaire avec le calendrier solaire, et à prédire les éclipses.

Ce dernier phénomène ont suggéré un moyen de déterminer la longitude terrestre; mais ce moyen rarement applicable, a été remplacé par des observations qui peuvent se faire toutes les fois que la Lune est au-dessus de l'horizon, et qui doivent leur précision à la rapidité du mouvement de cet astre. De là l'importance capitale de la théorie de la Lune dans l'astronomie moderne.

Éléments de l'orbite lunaire. – Le mouvement relatif de la Lune autour de la Terre est fortement troublé par l'action du Soleil sur ces deux corps, de sorte que l'ellipse que notre satellite tend à décrire est sans cesse modifiée dans sa forme et dans sa position. On peut cependant, dans une première approximation, considérer le mouvement de la Lune comme elliptique sauf à signaler ensuite quelles sont les principales inégalités de ce mouvement, inégalités qui doivent évidemment dépendre des relations de position des trois corps, le Soleil, la Terre et la Lune.

Les éléments de l'orbite lunaire sont au nombre de sept, savoir:

1° L'inclinaison i du plan de l'orbite sur celui de l'écliptique;

2° La longitude Ω du nœud ascendant, c'est-à-dire du point où la Lune traverse le plan de l'écliptique en allant de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal. (Le point opposé est le nœud descendant);

3° La durée de la révolution sidérale S' ou le mouvement moyen n';

4° La parallaxe horizontale équatoriale ou la moyenne distance des centres de la Lune et de la Terre a';

5° L'excentricité e';

6° La distance du périgée au nœud ascendant π';

7° Enfin la longitude moyenne de l'époque M'_0.

Les deux angles π' et M'_0 sont mesurés dans le plan de l'orbite.

Pour déterminer ces différents éléments, on connaît approximativement, on emploie des observations de la Lune convenablement choisies et corrigées.

Inclinaison du plan de l'orbite et longitude du nœud. – Pour déterminer l'inclinaison

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et la longitude du nœud ascendant, c'est-à-dire la position du plan de l'orbite lunaire, par rapport au plan de l'écliptique, on calculera d'abord les longitudes et les latitudes de la Lune au moyen des ascensions droites et des déclinaisons observées de cet astre.

Or, comme en général, à cause des phases, il n'y a qu'un seul bord visible, les observations doivent être corrigées du demi diamètre apparent pour être rapportées au centre de la Lune. Lorsque cette correction est appliquée à la détermination de l'ascension droite, il faut en outre avoir égard à la déclinaison de l'astre. Enfin le diamètre apparent mesuré entre les deux extrémités du croissant, est un peu diminué par la réfraction et augmenté par la parallaxe, ce qui oblige à lui faire subir aussi des corrections.

Tous les termes de ces réductions sont d'ailleurs calculés dans des tables.[1]

D'un autre côté les distances zénithales, d'où l'on déduit les déclinaisons, doivent avoir été corrigées de la réfraction et de la parallaxe[2]; et, comme la distance de la Lune à la Terre est beaucoup moindre que celle des autres astres, il n'est pas permis dans ce cas de considérer la Terre comme sphérique. La correction dépend par conséquent de la latitude du lieu où sont faites les observations; elle est donnée par une formule très simple, pourvu que l'on admette que la Terre soit une ellipsoïde de révolution, et il est facile, quand on connaît la valeur de l'aplatissement de s'assurer que cette correction peut s'élever à plusieurs secondes.

Supposons toutes les corrections faites; nous transformerons alors les ascensions droites et les déclinaisons en longitudes et latitudes; et si nous avons un nombre suffisant d'observations, nous obtiendrons approximativement l'inclinaison de l'orbite de la Lune par la plus grande valeur de la latitude de cet astre et la longitude du nœud ascendant par celle de la Lune au moment où sa latitude est nulle.

Plusieurs déterminations de ce genre apprendront que l'inclinaison a une valeur moyenne de 5°9′ environ et que le nœud a un mouvement rétrograde qui s'effectue dans une période d'à peu près 18 ans $\frac{2}{3}$.

Durée de la révolution sidérale. — La durée de la révolution sidérale est le temps qui s'écoule entre deux retours de la Lune à une même étoile, ou encore à une même longitude, en tenant compte de la précession; en 1850, on avait

$$S' = 27^{j\,m}.\,321655;$$

---

(1) Depuis que la théorie est arrivée à un assez haut degré de perfection, le diamètre apparent de la Lune a pu être calculé à l'avance, en le conclurant des observations faites à l'époque de la pleine Lune à l'instrument des passages et au cercle mural, ce qui dispense de mesurer la distance des extrémités du croissant et donne des résultats plus exacts.

(2) C'est principalement parce que les anciens ne savaient pas faire cette correction qu'ils se bornaient en général à employer des observations d'éclipses pour déterminer les éléments du mouvement de la Lune.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la durée de la révolution tropique, c'est-à-dire l'intervalle de temps écoulé entre deux retours de la Lune à une même longitude, en négligeant la précession en un peu moindre et de

$$27^{j\,m},321576.$$

Pendant ce temps, en effet, le point équinoxial rétrograde de 3″,758 que la Lune parcourt en 6ʰ,847 ou 0ʲ,000079 ; et en ajoutant ce dernier nombre à la révolution tropique, on retombe sur la révolution sidérale.

Le quotient $\frac{360}{S}$ donne le moyen mouvement diurne

$$n' = 13°10'35'',04.$$

C'est ce déplacement rapide de la Lune dans le Ciel qui rend l'observation de cet astre spécialement propre à la détermination des longitudes terrestres.

Nous expliquerons un peu plus loin comment on est parvenu à déterminer très simplement et avec une grande exactitude la durée de la révolution sidérale de la Lune.

Excentricité. — L'excentricité peut se déduire de l'observation des diamètres apparents maximum et minimum, ou de la plus grande équation du centre ; mais il est facile de voir que ces méthodes ne sont pas rigoureuses et la véritable valeur de l'excentricité obtenue par des moyens exacts est celle-ci :

$$e' = 0,548442.$$

Distance du périgée au nœud ascendant. — On peut déduire encore ces éléments des diamètres apparents ; en effet, ces diamètres apparents deviennent égaux lorsque la Lune est à la même distance et le milieu de l'arc compris entre les deux positions observées de l'astre correspond sensiblement au périgée ou à l'apogée. On reconnaît aussi l'instant où la Lune passe au périgée à ce que sa vitesse angulaire devient maximum.

Longitude moyenne de l'époque. — Ces éléments s'obtiennent comme dans le cas de la théorie du Soleil, au moyen de π' et de n'.

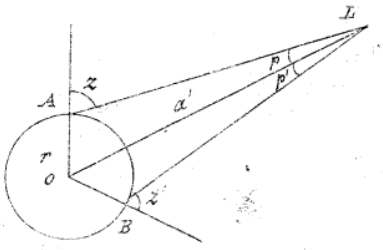
Distance de la Lune à la Terre. — Enfin, pour trouver la distance de la Lune à la Terre, on a observé la parallaxe de cet astre, en prenant pour base une distance aussi grande que possible à la surface de la Terre. Voici le principe de cette opération entièrement analogue à celle qu'effectuent les arpenteurs pour mesurer la distance d'un objet inaccessible.

Supposons que deux observateurs placés sur le même méridien terrestre, mais en des lieux A et B très éloignés l'un de l'autre, aient observé le même jour les distances zénithales z et z' de la Lune lors de son passage au méridien.

En appelant :

r le rayon terrestre ;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



a' la distance du centre de la Terre et de la Lune ;

l et l' les latitudes des deux lieux d'observation que nous supposerons, l'un dans l'hémisphère boréal et l'autre dans l'hémisphère austral ; de sorte que nous prendrons l avec le signe + et l' avec le signe − .

On aura pour les deux parallaxes de hauteur :

$$p = \frac{r}{a'} \sin z \qquad \text{et} \qquad p' = \frac{r}{a'} \sin z' ;$$

d'où

$$p + p' = \frac{r}{a'} (\sin z + \sin z') ;$$

mais d'un autre côté, on a aussi dans le quadrilatère $A B O L$

$$p + p' = z + z' - (l - l') ,$$

en égalant les seconds membres de ces deux relations, il vient, pour la parallaxe horizontale $\frac{r}{a'}$ de la Lune :

$$\frac{r}{a'} = \frac{z + z' - (l - l')}{2 \sin \frac{1}{2} (z - z') \cos \frac{1}{2} (z + z')}$$

De semblables opérations ont été réellement effectuées en 1751 par Lacaille au Cap de Bonne Espérance, et Bradley, Wargentin et Lalande en Europe. Les observations n'ayant pas été simultanées, parce que les stations n'étaient pas situées sur le même méridien, pour pouvoir combiner l'observation de Lacaille avec celle de l'un des autres astronomes, il fallait que l'une ou l'autre des distances zénithales fut corrigée de la variation de la déclinaison de la Lune dans l'intervalle de leurs passages aux deux méridiens. On avait dû encore choisir l'époque où la Lune était à sa moyenne distance et tenir compte de l'inégalité des deux rayons terrestres aboutissant aux deux stations considérées pour arriver à la valeur de la parallaxe horizontale équatoriale. On a trouvé en définitive

$$\frac{r}{a'} = \sin 57'2'' = \frac{1}{60,2729}$$

d'où

$$a' = 60,2729\, r .$$

Dimensions de la Lune. — Le rapport du demi diamètre apparent à la parallaxe donne celui des rayons r et r'. On trouve ainsi :

$$r' = 0,2724\, r \quad \text{ou} \quad \frac{3}{11} r \text{ environ} ;$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où l'on conclut que le rapport des surfaces de la Lune et de la Terre est à peu près $\frac{1}{14}$ et celui des volumes $\frac{1}{50}$.

La théorie conduit à cette conséquence que la Lune doit être aplatie dans le sens de son axe de rotation. Les mesures les plus délicates n'accusent cependant aucune différence entre les diamètres apparents, à l'époque de la pleine Lune. Il faut avoir soin que les mesures soient faites au même instant; car si la Lune est à l'horizon, sa distance à l'observateur est à peu près égale à sa distance au centre, c'est-à-dire à 60 rayons terrestres, tandis qu'au zénith cette distance ne serait plus que de 59 rayons; d'où il résulte une différence sensible dans les diamètres apparents, suivant la hauteur à laquelle on observe la Lune.

Variations des éléments de l'orbite lunaire. — Ces variations dues comme nous l'avons dit, à l'action perturbatrice du Soleil, sont analogues à celles des éléments de l'orbite terrestre, mais elles se trouvent considérablement amplifiées et se manifestent en peu de temps.

Ainsi le plan de l'orbite lunaire se déplace progressivement, de telle sorte que son axe décrit en 18 ans $\frac{2}{3}$ un cône droit autour de l'axe de l'écliptique.

Ce phénomène facile à reconnaître par les étoiles que la Lune rencontre successivement en traversant l'écliptique, s'explique de la même manière que la rétrogradation du point vernal. C'est lui qui détermine la période de la nutation de l'axe de la Terre. Il entraîne un changement dans l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur le plan de l'équateur qui varie ainsi de 23° 27′ + 5° 9′ à 23° 27′ − 5° 9′; ou de 28° 36′ à à 18° 18′ environ.

Il résulte de là que dans les passages successifs au méridien d'un même lieu, la Lune se rapproche ou s'éloigne notablement du zénith.

Bien que l'action perturbatrice du Soleil ne fasse pas varier en moyenne l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique; elle produit cependant sur ces éléments une altération périodique ou une nutation de l'axe de l'orbite qui s'élève à 23′. Les deux valeurs extrêmes de l'inclinaison sont de 4° 57′ 22″ et de 5° 20′ 6″.

La période exacte de la révolution du nœud est de

$$18^{\text{ans}}\ 218^{\text{j}},0908.$$

La longitude du nœud et l'inclinaison sont affectées de plusieurs inégalités dont les deux suivantes sont les plus importantes et se correspondent.

$$\text{Pour } \mathfrak{N}\ 1°37′45″ \sin 2(\odot - \mathbb{C}),$$

$$\text{et pour } i\ 0°8′47″ \cos 2(\odot - \mathbb{C}).$$

Le périgée lunaire a un mouvement direct qui lui fait accomplir une révolution en 8 ans $310^{\text{j}},5756$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les intervalles de temps qui s'écoulent entre deux retours de la Lune à son nœud ou au périgée s'appellent le mois draconitique et le mois anomalistique ; nous indiquerons plus loin leurs durées qui diffèrent toutes les deux de celle du mois sidéral.

Enfin, la durée de la révolution sidérale a une variation séculaire, tandis que celle des planètes reste constante, ou du moins n'éprouve que de légères variations périodiques. Cette inégalité en actuellement dans une phase d'accélération. Elle a été découverte par Halley, en comparant les moyens mouvements déduits des observations d'éclipses faites par les Chaldéens 720 ans et 719 ans avant J. C, à Alexandrie, 120 ans avant J. C, et au Caire par les Astronomes arabes du 8e et du 9e siècle, avec celui qu'indiquent les observations modernes. Laplace en a trouvé la cause dans la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite terrestre. Elle n'ira donc pas en augmentant indéfiniment. L'accélération actuelle est de 18" environ par siècle, ce qui correspond à un déplacement angulaire de la Lune d'un peu plus de 10 secondes.

Passons maintenant à la méthode qui a réellement servi à déterminer la durée de la révolution sidérale de la Lune.

De la révolution synodique de la Lune et des phénomènes qui en dépendent. Le retour successif de la Lune dans une même position relativement au Soleil et à la Terre (le 1er de ces trois astres étant supposé projeté sur le plan de l'écliptique) détermine une période qui a reçu le nom de mois synodique ou de lunaison. C'est le mois apparent dont la périodicité est marquée par le phénomène sensible des phases.

Cette période serait précisément égale à celle de la révolution sidérale si la Terre était immobile en même temps que le Soleil. Mais il est facile de voir qu'elle est augmentée par l'effet du mouvement de translation de la Terre qui s'effectue dans le même sens que celui de la Lune. Dans la théorie des apparences, le Soleil ayant également un mouvement direct, il est évident que la Lune doit mettre plus de temps pour revenir au Soleil que pour revenir à une étoile.

Soient S la durée de la révolution sidérale du Soleil et S' la durée de la révolution sidérale de la Lune ; les moyens mouvements de ces deux astres seront

$$n = \frac{2\pi}{S} \qquad \text{et} \qquad n' = \frac{2\pi}{S'}$$

Le moyen mouvement relatif ou synodique de la Lune sera $n' - n$, et la durée de la révolution synodique que nous représenterons par σ sera

$$\sigma = \frac{2\pi}{n' - n}$$

Or, cette durée peut être déduite avec une grande précision de deux observations d'éclipse de Lune semblables faites à des intervalles de temps assez éloignés, et comme on

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

connais déjà n, de la dernière relation on tire la valeur de n' et par suite celle de S'. Il suffit pour calculer σ de diviser le temps écoulé entre les deux éclipses considérées par le nombre de lunaisons qui en comme exactement. L'erreur qui peut exister sur la détermination de l'instant du milieu de l'éclipse se trouvera d'ailleurs divisée par ce nombre qui, pour ce motif, doit toujours être assez grand.

On conçoit très bien que n étant constant, en employant des observations faites à des dates de plus en plus éloignées, on a pu découvrir l'accélération du moyen mouvement n'. On trouve actuellement pour la durée de la révolution Synodique

$$\sigma = 29^j, 53059 \text{ ou environ } 29^j\frac{1}{2}$$

et comme

$$S = 365^j, 256374,$$

on en conclut, pour la révolution sidérale de la Lune, la valeur indiquée précédemment

$$S' = 27^j, 32166 \text{ ou environ } 27^j\frac{1}{3}.$$

Des phases. — La Lune est un corps sphérique obscur dont la moitié seulement est éclairée par la lumière du Soleil et les observateurs placés à la surface de la Terre ne peuvent voir en général qu'une partie plus ou moins considérable de l'hémisphère éclairé. Les phases dépendent donc des positions respectives du Soleil et de la Lune par rapport à la Terre.

On appelle proprement phase le rapport de la partie du diamètre perpendiculaire à la ligne des cornes qui se trouve dans l'obscurité au diamètre entier du disque de la Lune.

La Terre vue de la Lune présenterait également des phases, et il est facile de s'assurer que ces phases seraient sensiblement complémentaires de celles de la Lune.[1]

Les différentes positions relatives de la Lune et du Soleil se désignent sous le nom d'aspects. Ces aspects règlent les phases, dont la grandeur est effectivement déterminée par celle de l'angle qui a son sommet à la Lune et dont les côtés passent par le Soleil et la Terre. Si cet angle est nul, la phase est nulle; s'il est droit ou égal à 270°, la phase est $\frac{1}{2}$; s'il est égal à deux droits, la phase est totale.

Quand la phase est totale, le Soleil et la Lune sont en conjonction; on est à la nouvelle Lune que les Grecs désignaient sous le nom de Néoménie, et qui était consacrée par une fête; quand elle est égale à $\frac{1}{2}$ (dichotome), la Lune est à son premier ou à son dernier quartier; enfin quand elle est nulle, ces deux astres sont en opposition, on est à la pleine Lune. La nouvelle et la pleine Lune se nomment encore les Syzygies; le premier et le dernier quartier se désignent sous le nom de quadratures, et les positions intermédiaires entre les quatre principales que nous venons d'indiquer sous les octants.[2]

---

[1] L'inclinaison maximum de deux rayons solaires allant à la Terre et à la Lune est de 8' environ.

[2] Les quatre principaux aspects sont encore fréquemment représentés par les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

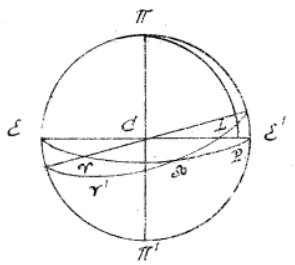
Vers la nouvelle Lune, l'hémisphère de cet astre qui ne reçoit pas directement les rayons solaires est cependant éclairé par une faible lueur à laquelle on a donné le nom de lumière cendrée, et qui provient des rayons solaires réfléchis par la Terre vers la Lune qui nous les renvoie à son tour. Cette lueur reste visible pendant plusieurs jours, mais son éclat va en diminuant pour deux raisons à la fois. La Terre réfléchit moins de lumière vers la Lune dont la partie éclairée directement par le Soleil va en augmentant et finit par devenir assez brillante pour effacer la lumière cendrée. L'explication de ce phénomène a été donnée par Maestlin et Léonard de Vinci.

Après la nouvelle Lune la ligne de séparation d'ombre et de lumière tourne sa convexité vers le Soleil, puis elle diminue de courbure, et au premier quartier elle devient une droite ; elle reprend ensuite une courbure qui va en augmentant et dont la convexité est tournée du côté opposé au Soleil jusqu'à la pleine Lune ; après quoi, les mêmes phénomènes se reproduisent dans l'ordre inverse. On voit facilement que lorsqu'elle est courbe, la ligne de séparation d'ombre et de lumière se projette sur le disque de la Lune suivant une ellipse dont le grand axe passe par les extrémités des cornes et est un diamètre de ce disque.

Chapitre XIV.

Tables et Ephémérides de la Lune.

Coordonnées écliptiques du centre de la Lune. — Si le mouvement de la Lune dans le plan de son orbite était elliptique, on pourrait le calculer et le rapporter au plan de l'écliptique par des formules analogues à celles qui nous ont servi à rapporter le mouvement du Soleil au plan de l'équateur ; il suffirait ensuite de transformer les longitudes et latitudes en ascensions droites et déclinaisons, par la méthode ordinaire.



Ainsi l'on aurait pour la longitude

$$L' = M'_0 + n't + E + R$$

R désignant la réduction à l'écliptique de l'arc $\mathfrak{S}L$, et la latitude l' serait donnée dans le triangle $PL\mathfrak{S}$ dont le côté $P\mathfrak{S}$ est égal à $L' - \mathfrak{S}$ par la formule

---

Symboles suivants :

☌	conjonction	$\mathbb{C} - \odot = 0°$
□	quadratures	$\mathbb{C} - \odot = 90°$ ou $270°$
☍	opposition	$\mathbb{C} - \odot = 180°$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\operatorname{tg} l' = \operatorname{tg} i \sin (L' - \Omega),$$

mais l'action du Soleil introduit dans le mouvement de la Lune un grand nombre d'inégalités qui en rendent le calcul très compliqué.

Principales inégalités du mouvement de la Lune. — Les deux inégalités les plus considérables du mouvement de la Lune avaient été découvertes par les Anciens. La première est l'équation du centre E qui est simplement due au mouvement elliptique; la seconde est l'évection.

Hipparque avait d'abord cherché à calculer le mouvement de la Lune comme celui du Soleil dans l'excentrique, et il avait assigné à l'équation du centre E une valeur maximum de 5°; mais cette valeur était trop faible et la véritable expression de l'équation du centre est

$$6° 16' 24'',8 \sin m',$$

m' étant l'anomalie moyenne de la Lune, de sorte que la période de cette inégalité est le mois anomalistique.

Hipparque avait bien reconnu que les positions de la Lune calculées dans l'excentrique, n'étaient pas d'accord avec les positions observées, particulièrement aux quadratures; mais il n'était pas parvenu à trouver la loi de la seconde inégalité.

Ptolémée en continuant les observations d'Hipparque et en les discutant, découvrit cette seconde inégalité et chercha à représenter le mouvement de la Lune sur un épicycle dont le déférent était lui même en mouvement: l'expression de cette inégalité, à laquelle les Astronomes modernes ont donné le nom d'évection [1], est celle-ci:

$$1° 20' \sin \{2 (\odot - \mathbb{C}) - m'\} \quad \text{période: } 31 \text{ jours } 19^h \tfrac{1}{2} \text{ [2]}$$

dans laquelle $\odot$ désigne la longitude du Soleil et $\mathbb{C}$ celle de la Lune. Aux Syzygies, cette inégalité se superpose à l'équation du centre qu'elle diminue, de sorte que par les observations d'éclipses seules, on devrait trouver l'équation du centre de la Lune plus petite que la véritable de toute la valeur de l'évection.

Tycho Brahé a reconnu une autre inégalité importante appelée variation,

---

[1] De evehere, élever, parce qu'elle élève le calcul des lieux de la Lune à un plus haut degré d'exactitude que lorsqu'on employait l'équation du centre seule.

[2] Le mouvement diurne synodique de la Lune . . . . $\Delta (\odot - \mathbb{C}) = 12° 11' 26'',7$
anomalistique " . . . . . $\Delta m' = 13° 3' 54''$

$$2 (\odot - \mathbb{C}) - \Delta m' = 11° 18' 59'',4 \qquad \frac{2\pi}{11° 18' 59'',4} = 31^j 19^h 26^m 21^s$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui avait été déjà découverte auparavant, en 975, par l'astronome arabe Aboul-Wéfa. Cette inégalité a pour expression

$$0°36' \sin 2(\odot - \mathbb{C}); \quad \text{période : } \tfrac{1}{2} \text{ mois synodique}$$

elle ne dépend donc que des aspects et s'évanouit aux syzygies et aux quadratures ; ce qui explique sans doute pourquoi, indépendamment de ce qu'elle est beaucoup moindre que la précédente, elle a pu échapper aux anciens astronomes.

Enfin Képler découvrit, encore d'après les observations de Tycho, une quatrième inégalité qui dépend de l'anomalie moyenne du Soleil, ce qui lui a fait donner le nom d'équation annuelle ; elle en égale à

$$0°11'16'' \sin m. \qquad \text{période : une année anomalistique.}$$

Explication des inégalités du mouvement lunaire. — L'équation du centre ne doit pas être comptée au nombre des perturbations ; elle provient simplement du mouvement elliptique déterminé par l'attraction de la Terre sur la Lune. Pour les autres inégalités qui sont produites par l'action perturbatrice du Soleil, on devait s'attendre à trouver dans leurs arguments la différence des longitudes du Soleil et de la Lune et les anomalies moyennes de ces deux astres. Ces différents éléments servent en effet à déterminer les positions relatives des trois corps qui réagissent les uns sur les autres ; mais lorsqu'ils se combinent pour produire une perturbation, celle-ci devient difficile à expliquer ; c'est ce qui arrive pour l'évection. Au contraire, les perturbations dont l'argument est simple, comme la variation et l'équation annuelle, s'expliquent facilement.

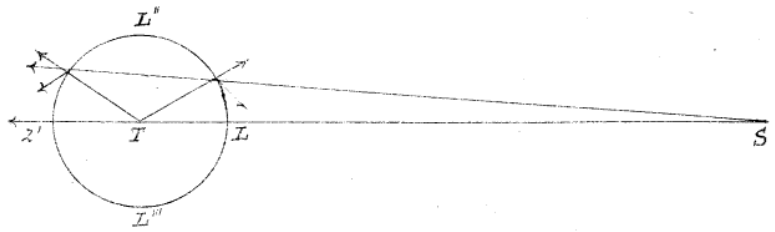
La variation ayant pour expression

$$36' \sin 2(\odot - \mathbb{C})$$

a pour période la moitié du mois synodique, et résulte des changements d'intensité relative des actions du Soleil sur la Terre et sur la Lune dans les différents aspects.

Pour analyser le phénomène avec quelque détail, décomposons la force attractive du Soleil en deux parties, l'une suivant le rayon de l'orbite, supposée circulaire, que décrirait la Lune sous la seule influence de l'attraction terrestre, et l'autre tangentiellement à cette orbite.

Considérons d'abord la partie dirigée suivant le rayon que l'on nomme la force radiale, et ne prenons pas de vue qu'il s'agit de la différence des effets produits par l'attraction du Soleil sur la Terre et sur la Lune.



On voit immédiatement qu'aux syzygies la force radiale agit en sens contraire de l'attraction terrestre et qu'il doit en être de même avant et après

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les Syzygies sur une certaine étendue de l'orbite, puis qu'à l'opposition la Terre en plus attirée que la Lune et qu'à la conjonction elle l'en moins ; quand la Lune en près des quadratures, au contraire, l'attraction du Soleil étant sensiblement la même sur elle et sur la Terre, la force radiale en beaucoup moindre, elle s'annule en deux points et change même de sens. Or, la pesanteur terrestre tendant à courber la trajectoire de la Lune, aux Syzygies où la pesanteur en diminuée par la force radiale, la courbure devra être diminuée, et elle devra, au contraire, être augmentée aux quadratures.

Ainsi, malgré que ce résultat paraisse avoir de paradoxal au premier abord, l'orbite lunaire, par l'effet de la force radiale, est aplatie dans le sens de la ligne qui va de la Terre au Soleil, et allongée dans le sens perpendiculaire. Seulement, en moyenne, la Lune en soutenue par cette force à une plus grande distance de la Terre.

Quant à la force tangentielle qui, en réalité, joue le plus grand rôle dans ce phénomène, elle augmente l'effet que nous venons de décrire, par l'accélération qu'elle imprime au mouvement de la Lune vers les Syzygies, et par le retard qu'elle fait subir à ce mouvement vers les quadratures. Ces accélération et ce retards successifs sont la conséquence des changements de sens de la force tangentielle qui en évidemment nulle quatre fois dans le cours d'une lunaison, aux Syzygies, où la force radiale seule subsiste et près des quadratures où les distances de la Lune et de la Terre au Soleil deviennent égales : Ainsi, de L en L', la force tangentielle produit un retard, de L' en L'' une accélération, de L'' en L''' un nouveau retard, et de L''' en L une nouvelle accélération.

On conçoit bien d'après cela, qu'il doit y avoir une inégalité très sensible dont l'argument soit la différence des longitudes du Soleil et de la Lune ; telle est, en effet, la variation qui en la première inégalité expliquée par Newton.

Il y a une autre inégalité qu'il ne faut pas confondre avec la variation, et qui résulte du changement d'intensité de l'action du Soleil sur la Lune, lorsque celle-ci se rapproche ou s'éloigne du Soleil. Elle dépend, comme on voit, de la parallaxe du Soleil par rapport au rayon de l'orbite lunaire, et on la désigne sous le nom d'équation parallactique. Elle est beaucoup plus faible que la variation et a une période double ou d'un mois Synodique.

L'équation annuelle qui a pour argument l'anomalie moyenne du Soleil et pour période une année, est évidemment produite par les changements d'intensité relative des actions du Soleil sur la Lune et sur la Terre, suivant que le premier astre est plus ou moins éloigné de son orbite apparente. L'argument de cette inégalité doit donc être le même que celui de l'équation du centre du Soleil ; seulement, les effets du changement de distance du Soleil sur le mouvement réel de la Terre et sur celui de son satellite sont de signes contraires. Quand la Terre se rapproche du Soleil, son mouvement s'accélère, et celui de la Lune se ralentit ; quand la Terre s'éloigne du Soleil, c'est le contraire.

L'équation annuelle dépend, comme on voit, de l'excentricité de l'orbite terrestre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La variation séculaire de cette excentricité a donné naissance à l'inégalité séculaire que nous avons signalée dans le mouvement moyen de la Lune. Laplace, qui a découvert cette cause, fait remarquer que l'influence directe des planètes sur le mouvement de la Lune est bien moins sensible que l'influence indirecte qu'elle exercent sur ce mouvement en produisant les variations séculaires des éléments de l'orbite terrestre.

Indépendamment des sortes inégalités qui ont été découvertes par les Anciens observateurs, le mouvement de la Lune en longitude en renferme beaucoup d'autres. Quelques unes ont été trouvées directement en comparant les positions de la Lune calculées en tenant compte des inégalités déjà connues avec les positions observées et en cherchant la loi empirique des différences[1]. C'est ainsi que Mayer en parvint à construire des tables qui renfermaient 14 inégalités et dont l'exactitude permettait déjà d'employer les observations lunaires à la détermination approchée des longitudes géographiques.[2]

Mais la plupart des inégalités que l'on emploie actuellement ont été indiquées par la théorie, qui en fournit un nombre presque indéfini, parmi lesquelles les astronomes cherchent celles qui peuvent acquérir des valeurs assez sensibles pour qu'il soit utile d'en tenir compte.

La latitude de la Lune a aussi des inégalités dont les arguments sont la différence des longitudes de la Lune et du Soleil, l'anomalie moyenne de la Lune et la longitude du nœud. Ces inégalités sont beaucoup moins considérables que celles de la longitude.

Au moyen des tables de la Lune, on calcule les éphémérides qui figurent dans les annuaires astronomiques, et qui contiennent, comme celles du Soleil, les coordonnées équatoriales et écliptiques du centre de l'astre, pour chaque jour de l'année.

A cause de la rapidité du mouvement de la Lune, les coordonnées sont même données d'heure en heure, en temps moyen de l'observatoire principal du pays qui en a fait la publication.

La parallaxe horizontale équatoriale et le demi diamètre apparent sont donnés pour les mêmes dates et dans un même tableau qui est disposé de la manière suivante :

Jours	Longitude	Latitude	Parallaxe	Ascension droite.	Déclinaison	Demi-diamètre.

[1] On suivait pour cela une marche analogue à celle qui nous a servi (p. 162) pour découvrir la loi des variations des coordonnées équatoriales des étoiles, résultant du phénomène de la précession.

[2] Les tables de Mayer étaient fondées tant sur les observations que sur la théorie de la Lune d'Euler.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chapitre XV.

Périodes remarquables — Phénomène des Éclipses.

(Voy. la planche 13 du portefeuille).

Des différents mois lunaires — Outre le mois sidéral, le mois tropique et le mois synodique, on distingue encore le mois anomalistique, c'est-à-dire l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs de la Lune au périgée ou à l'apogée, et le mois draconitique dont la durée est égale au temps qui sépare deux retours de la Lune à un même nœud. On calcule facilement la durée de ce mois quand on connaît la révolution sidérale de la Lune, ainsi que celle de son périgée et de son nœud ascendant. Voici les valeurs des différents mois, en négligeant le mois tropique, qui diffère extrêmement peu du mois sidéral.

Mois sidéral	27, 32166	jours moyens
Mois synodique	29, 53059	"
Mois anomalistique	27, 55457	"
Mois draconitique	27, 21222	"

Cycles. — La connaissance de ces nombres permet de déterminer des périodes qui ramènent dans le même ordre certains phénomènes, tels que le retour simultané de la Lune à son nœud et à une conjonction ou à une opposition.

On donne à ces périodes le nom de cycles. Les anciens les ont cherchées soit pour régler leur calendrier lunisolaire, soit pour prédire les éclipses.

Les deux plus célèbres sont le cycle de Méton et le Saros des Chaldéens.

Le cycle de Méton est la réunion de 19 années qui comprennent 235 mois synodiques; en faisant les produits de $365^j, 2422$ par 19 et de $29^j, 53059$ par 235, on trouve en effet

$$365,2422 \times 19 = 6939,60218;$$

$$29,53059 \times 235 = 6939,68865.$$

Le calendrier lunaire des Grecs se composait de 12 années communes de 12 mois et de 7 de 13 mois. Les mois eux-mêmes étaient inégaux; il y en avait 110 de 29 jours et 125 de 30 jours (1). Les 19 années comprenaient donc 6940 jours.

(1) Les années du cycle de Méton étaient indiquées à Athènes par une inscription monumentale en lettres d'or; de là le nombre d'or conservé encore actuellement dans le calendrier ecclésiastique où l'on se sert du cycle de Méton pour établir une relation simple entre les épactes successives. L'épacte est l'âge de la Lune le 1er Janvier

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On remarqua qu'après une période, il y avait environ un quart de jour de retard sur la nouvelle Lune, ce qui engagea à la quadrupler et à retrancher un jour au bout de 76 ans. Ce nouveau cycle fut imaginé vers l'an 331 avant J.C. par un astronome nommé Calippe.

Dans la période Calippique, les mois étaient répartis comme nous venons de l'indiquer plus haut, avec cette différence qu'on retranchait un jour au bout de 76 années. On trouvait ainsi pour la durée de l'année un nombre sensiblement exact, car le nombre de jours compris dans la période était de

$$4\left[(110\times 29)+(125\times 30)\right]-1 = 27760-1 = 27759,$$

et le quotient de 27759 par 76 est égal à 365,21. On faisait donc la durée de l'année de $365^j\frac{1}{4}$, peu différente de l'année julienne.

Les Musulmans ont conservé le calendrier lunaire, et l'année de 354 ou de 355 jours. Les années de 355 jours sont au nombre de 11 sur 30 destinées à compenser à peu près l'erreur qui résulte de ce que le mois lunaire n'est pas exactement de $29^j\frac{1}{2}$. Entre autres inconvénients, ce calendrier présente celui de n'avoir aucune relation simple avec le calendrier solaire, qui est celui des nations les plus civilisées; de sorte que les règles à suivre pour établir la concordance des dates sont extrêmement compliquées. Nous avons déjà fait remarquer, d'ailleurs, que dans le calendrier lunaire, les saisons tombaient à toutes les époques de l'année.

Le Saros ou cycle Chaldéen, se composait de $6585^j, 32124$

et comprenait	223	révolutions	Synodiques correspondant à très peu près à
à	241	"	tropiques ou même Sidéraux
	239	"	anomalistiques
et	242	"	draconitiques.

Cette période ramenait à peu près les éclipses de même grandeur et de même durée au même jour de l'année de 365^j. Les éclipses observées pendant une première période servaient donc à prédire les éclipses futures.

On peut vérifier facilement le degré d'exactitude de ce nombre précédent, ou même déduire directement la période des éclipses du mouvement du Soleil et de celui du nœud de la Lune.

Déterminons d'abord la durée de la révolution Synodique du nœud. Soit n le moyen mouvement du Soleil par jour, et q celui du nœud, on a

$$n = 59'\,8'',19 \quad \text{et} \quad q = 3'\,10'',78.$$

---

de chaque année; on en conclut facilement les dates des nouvelles et des pleines Lunes, et l'on sait que c'est la pleine Lune qui suit le 21 Mars supposé le jour de l'équinoxe qui sert à fixer la date de la fête de Pâques, et par suite celle de toutes les autres fêtes mobiles.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Comme les deux mouvements ont lieu en sens inverse, si nous supposons que le Soleil et le nœud partent de la même longitude, au bout d'un jour, ils seront séparés d'un angle égal à $n+q$; ils se rejoindront donc, c'est-à-dire que la révolution synodique du nœud Σ sera achevée après un temps égal à

$$\frac{2\pi}{n+q}$$

Ainsi l'on aura $\Sigma = \frac{1296000}{3738,97} = 346^j,6195$

D'ailleurs, la durée σ de la révolution de la Lune est de $29^j,5306$; on en conclut

$$\Sigma = 11,737860\,\sigma.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par la série des nombres entiers jusqu'à ce que le coefficient de σ devienne lui-même très peu différent d'un nombre entier, on trouve, en s'arrêtant au nombre 19 :

$$19\,\Sigma = 223,018\,\sigma$$

et en effet $19\,\Sigma = 6585,78$

et $223\,\sigma = 6585,23$

ce qui est à très peu près la durée du Saros des Chaldéens. — Dans cet intervalle, qui est de 18 ans 11 jours, il se produit 70 éclipses : 41 de Soleil et 29 de Lune. Les éclipses de Soleil sont donc plus fréquentes que celles de Lune, à peu près dans le rapport de 4 à 3 ; cependant, dans un même lieu, on observe moins d'éclipses de Soleil que d'éclipses de Lune, parce que les unes ne sont visibles que d'une région assez limitée de la Terre, tandis qu'on peut voir les autres de tout un hémisphère.

Enfin Hipparque avait déduit de ses propres observations, comparées avec les observations les plus anciennes, deux autres périodes.

La première, de 345 ans environ, ou, plus exactement, de $126007^j,042$, renfermait à très peu près

$$4267 \text{ révolutions synodiques}$$
$$4573 \quad " \quad \text{anomalistiques}$$
$$\text{et} \quad 4612 \quad " \quad \text{sidérales}.$$

On peut remarquer que les deux premiers de ce nombre sont divisibles par 17, ce qui donne une période de 4712,2 — 20 ans et 3 mois $\frac{1}{2}$ environ pour la coïncidence des révolutions synodiques et anomalistiques.

La seconde période signalée par Hipparque était de 441 ans et 103 jours

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

composés de 5458 mois synodiques, et 5923 mois draconitiques.

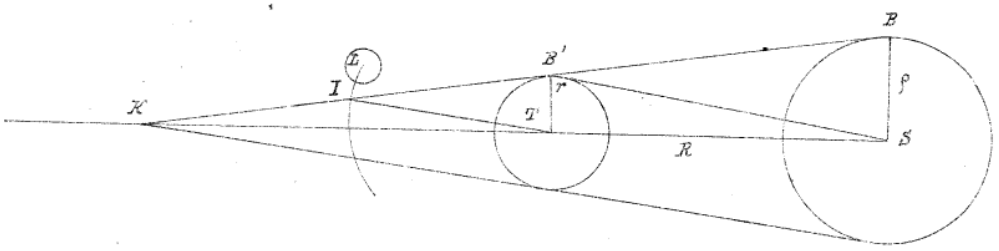
Ces différents nombres, qui sont d'une exactitude remarquable, ont servi à déterminer les grandeurs des variations séculaires des éléments de l'orbite lunaire.

Des éclipses de Lune. — Lorsque la Lune pénètre dans le cône projeté derrière la Terre, on dit qu'elle en éclipsée, et le phénomène en visible à la fois et au même instant pour tous les lieux de l'hémisphère terrestre qui ont l'astre au dessus de leur horizon. Si le plan de l'orbite lunaire avait une plus faible inclinaison sur celui de l'écliptique, il pourrait y avoir éclipse à chaque opposition [1]; mais dans l'état des choses, il faut en outre que la Lune soit dans le voisinage de l'un de ses nœuds. De là le nom d'écliptique donné au plan de l'orbite terrestre.

Il est facile de vérifier que la distance du sommet du cône d'ombre au centre de la Terre est de beaucoup supérieure au rayon de l'orbite lunaire. Représentons en effet une section faite par un plan passant par les lignes des centres du Soleil et de la Terre

Soient

R la distance des centres de ces deux astres
ρ le rayon du Soleil
r celui de la Terre
et x la distance inconnue KT



on a par les triangles semblables BSK, $B'TK$

$$\frac{\rho}{r} = \frac{R+x}{x}, \quad \text{d'où} \quad x = R\frac{r}{\rho - r}$$

et comme nous avons trouvé approximativement

$$R = 24000\,r \quad \text{et} \quad \rho = 112\,r,$$

il en résulte que $x = 217$ environ;

tandis que la distance des centres de la Terre et de la Lune n'atteint jamais $64\,r$; on peut encore vérifier de la même manière que le diamètre de la section faite dans le cône d'ombre

---

(1) C'est ce qui arrive pour les trois premiers satellites de Jupiter.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par une sphère ayant pour rayon celui de l'orbite lunaire est beaucoup plus grand que le diamètre de la Lune, et l'on conçoit, d'après cela, que les éclipses totales peuvent avoir une assez longue durée.

La variété que présente le phénomène, qu'il s'agisse d'éclipse partielle ou d'éclipse totale, dépendent d'ailleurs immédiatement de la latitude de la Lune, ou, ce qui revient au même, de la distance de la Lune au nœud le plus voisin. Pour que l'éclipse soit possible, il faut, en effet, que la latitude ne dépasse pas une certaine limite facile à déterminer. Supposons que le plan de la figure précédente soit perpendiculaire à celui de l'écliptique, et que la Lune soit en L à l'instant de l'opposition; il est évident que, pour qu'il y ait éclipse, il faut que la latitude du bord le plus voisin du cône d'ombre soit plus petite que ITK.

En désignant par l la latitude du centre de la Lune, par d' le diamètre apparent de cet astre, et par p' sa parallaxe, enfin par d et p le diamètre apparent et la parallaxe du Soleil, on devra donc avoir

$$l - \frac{d'}{2} < ITK;$$

Or,
$$ITK = BIT - IKT = p' - IKT;$$

et
$$IKT = BB'S - B'SK = \frac{d'}{2} - p,$$

la condition cherchée est donc $\quad l < \frac{d'}{2} + p' + p - \frac{d}{2}$

En égard aux limites entre lesquelles sont comprises les différentes quantités p, p', d et d', on trouve que si la latitude de la Lune au moment de l'opposition est plus petite que $57'\,57''$, l'éclipse est certaine, tandis que si elle est plus grande que $63',45''$, elle est impossible.

Pour la limite correspondante de la distance de la Lune à son nœud, on trouve par la formule

$$tg\, l = tg\, i \sin (C - \mathfrak{N}),$$

$12°\,24'$; au moyen des éphémérides de la Lune, on reconnaît donc à l'époque de chaque opposition, s'il y a ou non probabilité d'éclipse.

En employant les véritables valeurs des parallaxes et des diamètres apparents à la même date, on s'assure ensuite que l'éclipse doit avoir lieu, et l'on peut alors procéder aux calculs au moyen desquels on en détermine toutes les circonstances, comme les instants de l'immersion et de l'émersion, celui du milieu de l'éclipse et sa grandeur, si elle est partielle. Pour donner une idée de cette grandeur, on divise le diamètre de la Lune en 12 parties égales qui l'on nomme doigts, et on indique le nombre de doigts que renferme la partie éclipsée du diamètre qui joint les centres des deux axes du croissant. Dans le cas des éclipses, la ligne de séparation d'ombre et de lumière est évidemment un arc de cercle dont la forme manifeste par conséquent la rondeur de la Terre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Une construction graphique très simple dont les élements sont donnés par les tables permet de déterminer avec une approximation suffisante les différentes phases des éclipses de Lune.

Si la Terre n'avait pas d'atmosphère, la partie du disque lunaire qui plonge dans le cône d'ombre serait tout-à-fait obscure; mais les rayons solaires qui en rasant la surface de la Terre, sont réfractés par l'atmosphère, l'éclairent d'une lueur rougeâtre, qui devient d'autant plus sensible que l'éclipse est plus considérable.

Les éclipses de Lune ont servi depuis longtemps à la détermination des longitudes terrestres. La première idée de cette solution de l'un des problèmes les plus délicats de la Géographie physique est due à Hipparque. Les moyens d'observation qu'employaient les Anciens ne leur permettaient pas de déterminer l'instant de l'éclipse à moins de 3 ou 4^m près; ce qui donne une incertitude d'un degré à la surface de la Terre. Actuellement même, on a de la peine à préciser ces instants à une demi-minute ce qui fait 7 à 8' de degré et correspond à 12 ou 15 kilomètres à l'équateur. La difficulté de ce genre d'observation tient à la présence de la pénombre. Pour obtenir la plus grande précision possible, on observe les heures de l'entrée et de la sortie du bord de certaines taches bien connues de la surface de la Lune, et l'on prend la moyenne des résultats auxquels conduisent toutes ces observations.

Eclipses de Soleil. — Les éclipses de Soleil arrivent à l'époque de la conjonction. Elles sont occasionnées par le passage de la Lune entre la Terre et le Soleil. Dans ce cas, il n'y a donc pas, à proprement parler, éclipse, mais occultation du Soleil par la Lune. Aussi le phénomène au lieu d'être instantané pour tout un hémisphère terrestre, est purement local, et ses différentes phases doivent être calculées pour chacune des stations d'où l'on peut l'observer.

En suivant une marche semblable à celle qui nous a servi pour les éclipses de Lune, on peut déterminer la longueur du cône d'ombre projeté derrière la Lune. On trouve ainsi que la distance du centre de la Lune au sommet du cône est en moyenne de 58, 7 r; sa valeur maximum est de 59, 7 r et sa valeur minimum de 57, 7 r, tandis que la distance maximum du centre de la Lune à la surface de la Terre est de 54, 9, et sa distance minimum de 62, 8. Le cône d'ombre peut donc avoir son sommet en avant de la surface de la Terre ou au delà de cette surface.

Dans ce dernier cas, il y a éclipse totale pour les points de la Terre situés à l'intérieur du cône, et dans l'autre, l'éclipse est annulaire pour les points qu'atteint le prolongement du cône; enfin il y a éclipse partielle pour les lieux qui sont dans la pénombre.

Pour qu'une éclipse puisse avoir lieu, il faut que la latitude de l'un des bords de la Lune soit assez faible pour que cet astre atteigne le cône tangent extérieurement au Soleil et à la Terre. Cette condition s'exprime par l'inégalité

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$l < \frac{d}{2} + \frac{d'}{2} + p' - p ;$$

d'où l'on conclut que l'éclipse est certaine si la latitude du centre de la Lune est inférieure à 1° 23' 18" et qu'elle est impossible si cette latitude est supérieure à 1° 34' 52". On peut voir aussi, d'après cela, que pour que l'éclipse soit possible, il faut que la distance de la Lune à son nœud ne dépasse pas 18° 26'.

L'annonce des éclipses doit comprendre l'indication des principales localités pour lesquelles elles sont visibles et de quelle nature sera l'éclipse pour chacune d'elles. Les calculs en sont assez longs mais d'ailleurs sans difficultés. On emploie avantageusement les procédés graphiques pour en indiquer les différentes circonstances.

La solution du problème de longitudes par l'observation des éclipses de Soleil rentre dans celle qui est fondée sur la mesure des distances lunaires et qui sera exposée à la fin du cours.

Les éclipses totales de Soleil sont accompagnées de phénomènes remarquables. On voit autour du Soleil une auréole lumineuse au milieu de laquelle se projette comme un cercle noir. Cette auréole paraît formée de rayons brillants qui partent pour la plupart du centre. On aperçoit aussi sur le contour et souvent même à l'intérieur du disque de la Lune des protubérances lumineuses, roses, lilas, ou pourpres que l'on a cherché à expliquer en les considérant comme des images d'une troisième atmosphère du Soleil. La lumière de l'auréole est plus vive autour du disque de la Lune où elle forme ce qu'on appelle la couronne. Son éclat y est assez grand pour produire des effets photogéniques, ainsi que cela a été constaté lors de la dernière éclipse (du 18 Juillet 1860), en Espagne, où M. Warren de la Rue d'une part et M. Aguilar et le P. Secchi de l'autre, ont obtenu des photographies très intéressantes de la phase totale.

Au moment de l'occultation totale, on voit souvent courir sur le sol des bandes alternativement brillantes et obscures d'un mouvement qui paraît s'accélérer. Le même fait se reproduit lors de la réapparition des rayons solaires, avec cette différence que le mouvement est décroissant. Ce phénomène des franges encore inexpliqué a été étudié avec beaucoup de soin à Patna, en 1860, par M. Mannheim.

Ordinairement pendant les éclipses totales, la nuit n'est pas complète, on peut facilement lire, écrire ou dessiner; toutefois l'obscurité est assez grande pour que les étoiles de première et de seconde grandeur deviennent visibles et l'on cite certaines éclipses pendant lesquelles l'obscurité était profonde. La température s'abaisse généralement de plusieurs degrés et les observateurs ont signalé des phénomènes très marqués chez la plupart des êtres animés. La durée d'une éclipse totale de Soleil est toujours assez courte, l'excès du diamètre apparent de la Lune sur celui du Soleil étant très faible et le mouvement de la Lune très rapide.

Le nombre des éclipses soit de Lune soit de Soleil qui ont lieu dans une même année est variable. Il ne peut pas y en avoir plus de 7 ni moins de 2; et dans

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce dernier cas, ce sont deux éclipses de Soleil. On peut se rendre aisément compte de ces différences. Les limites relatives aux éclipses de Soleil sont beaucoup plus étendues que celles qui se rapportent aux éclipses de Lune, car on a vu que la première espèce d'éclipse était possible tant que la distance de la Lune à son nœud ne dépassait pas 18° 26', tandis que pour la seconde, il ne faut pas que cette différence dépasse 12° 24'. En doublant ces deux nombres on a les amplitudes des arcs de l'écliptique qui correspondent aux deux espèces d'éclipses. Or, il est évident que pendant le temps que la Terre met à parcourir un arc de près de 37°, il y a une nouvelle Lune et par conséquent une éclipse de Soleil; au contraire, la Terre peut parcourir l'arc de 24° 48' entre deux nouvelles Lunes consécutives et par conséquent sans qu'il y ait éclipse de Lune. On voit encore par la grandeur de l'arc de 37° qu'il peut y avoir deux éclipses de Soleil et une de Lune à un premier nœud et autant au nœud suivant. Enfin, en remarquant que la durée de l'année solaire dépasse 12 lunaisons de 11 ou 12 jours, et en tenant compte en outre de la rétrogradation des nœuds de la Lune, on comprend bien que le nombre des éclipses doit varier d'une année à l'autre, et l'on s'explique la supériorité du nombre des éclipses de Soleil sur celui des éclipses de Lune.

Chapitre XVI.

Aspect physique de la Lune. — Rotation et Libration.

(Voy. les planches 13 et 14 du portefeuille).

Quand on examine la Lune avec de lunettes, on reconnaît que ses bords présentent de irrégularités qui sont d'ailleurs tellement sensibles, pour le bord intérieur surtout, qu'on peut les distinguer à l'œil nu à certaines époques de la lunaison. Si la lunette que l'on emploie a un pouvoir amplifiant tant soit peu considérable, on juge aussitôt que la surface de la Lune est couverte d'aspérités qui, étant diversement éclairées par la lumière du Soleil, aux différentes phases, projettent des ombres dont la grandeur varie, ce qui ne laisse aucun doute sur la nature rugueuse de cette surface.

Le Soleil envoyant de la lumière à la Lune de tous les points de l'hémisphère qui la regarde, il en résulte une légère pénombre qui borde la ligne de séparation d'ombre et de lumière, mais l'étendue de cette pénombre est à peine sensible. Si la Lune avait une atmosphère analogue à celle qui entoure la Terre, les phénomènes crépusculaires qui s'y produiraient se traduiraient pour nous en une dégradation de teinte entre la partie éclairée et la partie obscure du disque. Un observateur habile, Schroeter, a aperçu des traces de ce phénomène. L'étendue de $2° \frac{1}{2}$ qu'il donne à la zone de dégradation

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

indiquerait l'existence d'une atmosphère de 450 mètres de hauteur environ ; mais cette observation aurait besoin d'être confirmée, et il paraît au contraire très probable que la Lune n'a pas d'atmosphère, ou du moins que si cette atmosphère existe, elle est d'une rareté extrême.

Ainsi, la occultations d'étoiles par la Lune sont instantanées, tandis que s'il y avait une atmosphère d'une densité sensible, l'éclat de l'étoile devrait aller en s'affaiblissant par degrés. La durée de l'occultation, calculée d'après le mouvement de la Lune et le diamètre apparent de cet astre, est précisément celle que l'on observe, tandis que cette durée serait diminuée par la présence de l'atmosphère lunaire qui dévierait les rayons lumineux envoyés par l'étoile. On a reconnu ainsi que la réfraction horizontale# produite par notre atmosphère est de 35'. On voit par conséquent combien l'atmosphère de la Lune doit être faible comparée à l'atmosphère terrestre.

L'absence d'atmosphère autour de la Lune aurait pour conséquence qu'il ne peut pas y avoir d'eau à la Surface de notre Satellite, et que les êtres organisés s'y trouveraient dans des conditions tout à fait différentes de celles que l'on trouve à la Surface de la Terre. Les températures y seraient extrêmes et sans transition.

Les aspérités que l'on remarque à la Surface de la Lune ont généralement le caractère de montagnes volcaniques. Il suffit d'avoir regardé l'astre une fois dans une lunette, quelques jours avant ou après la pleine Lune, pour en être convaincu.

La mesure exacte des ombres portées par ces montagnes a permis de calculer leur hauteur au dessus des plaines environnantes. On a trouvé de cette manière que les plus hautes atteignaient et dépassaient 7 000^{m}. Or, les pics les plus élevés qui existent à la Surface de la Terre n'ont guère plus de 8 500^{m}, et la plus haute montagne du nouveau continent l'Aconcagua (Chili) n'a que 7290^{m}. Les aspérités de la Lune sont donc, relativement à la grosseur de cet astre, beaucoup plus fortes que celles de la Terre.

Dans certaines régions de la Lune, les montagnes, extrêmement multipliées, affectent presque toutes la forme circulaire des cratères volcaniques et quelques-uns de ces cratères ou de ces cirques ont un diamètre considérable. Dans d'autres régions, les plis de la Surface de la Lune deviennent rectilignes, mais toujours sur d'assez faibles longueurs. Enfin, il y a des espaces très étendus dans lesquels les montagnes deviennent rares ; ces espaces ont une teinte grisâtre et ont été désignés sous le nom de mers, avant qu'on eût examiné attentivement la question de savoir s'il y avait de l'eau à la Surface de la Lune. Or, indépendamment de la forte présomption qui résulte déjà de la rareté de l'atmosphère lunaire, des expériences de polarisation ont conduit Arago à nier la présence de l'eau sur la Lune.

Rotation de la Lune. — Les taches de la Lune ont servi à constater que cet astre a un mouvement de rotation dont la vitesse est égale à la vitesse moyenne de son mouvement de translation.

L'inclinaison de l'équateur de la Lune sur le plan de son orbite est de 3° 29' et son inclinaison sur l'écliptique de 1° 40'.

à la Surface de la Lune n'atteint pas 1", tandis qu'à la Surface de la Terre, la réfraction horizontale

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les deux vitesses de rotation et de translation ont pu, dans l'origine, ne pas être les mêmes ; mais Lagrange a démontré que si elles étaient peu différentes, elles ont dû s'égaliser et que désormais cette égalité se maintiendra.

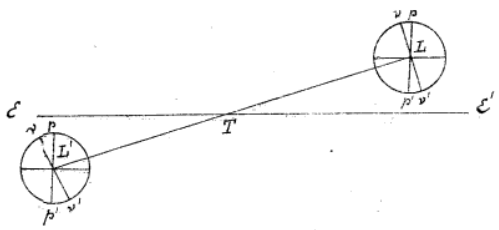
En admettant que la Lune ait été à l'état fluide, son mouvement de rotation a dû déterminer un aplatissement dans le sens de la ligne des pôles et l'attraction de la Terre a dû produire un allongement dans la direction de la ligne des centres. Il en résulte que la Lune doit avoir la forme d'un ellipsoïde à trois axes dont le plus petit est sensiblement perpendiculaire au plan de l'orbite. L'observation n'a pas permis de constater cet aplatissement qui, par conséquent doit être très faible. Relativement au grand axe dirigé vers la Terre, Lagrange a fait voir que si, pour une cause quelconque, il avait été écarté de cette direction, il aurait dû y revenir et la dépasser par une suite d'oscillations. Telle serait la libration réelle que l'observation n'a pas non plus permis de reconnaître.

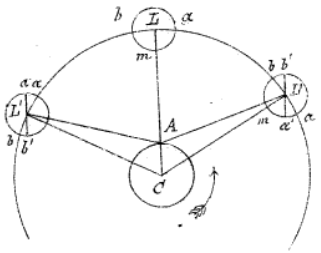
Cassini avait découvert que le plan de l'équateur de la Lune, celui de l'orbite décrit par cet astre et un plan mené par son centre parallèlement à l'écliptique se coupaient toujours suivant une même ligne droite. Lagrange a prouvé qu'il en devait être effectivement ainsi.

Enfin, la théorie est également d'accord avec l'observation sur ce point que l'inclinaison moyenne du plan de l'orbite lunaire sur celui de l'écliptique, doit rester constante.

Libration apparente de la Lune. — La libration apparente de la Lune consiste en ce que cet astre ne nous montre pas toujours exactement la même face. On distingue trois librations différentes :

1° La libration en longitude due à ce que le mouvement de rotation de la Lune est uniforme, tandis que son mouvement de translation ne l'est pas. Par suite de cette circonstance, les taches de la Lune paraissent tantôt à droite, tantôt à gauche de leur position moyenne, et la Lune semble animée d'un mouvement d'oscillation autour de son axe de rotation ; ce mouvement est désigné sous le nom de libration en longitude, parce qu'il s'effectue dans la direction du plan de l'orbite lunaire, qui est à peu près la même que celle de l'écliptique.





2° La libration en latitude qui tient à l'obliquité du plan de l'équateur de la Lune sur celui de son orbite. Il est facile de voir que cette circonstance suffit pour produire une libration qui découvre et cache alternativement les régions voisines des pôles. Pour nous en rendre compte, prenons la Lune dans deux positions diamétralement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

opposée sur son orbite en L et en L'. On voit que lorsque la Lune est en L on ne peut pas apercevoir son pôle p et on aperçoit au contraire le pôle opposé, tandis que lorsque la Lune est venue en L', le pôle p est devenu visible et le pôle p' est invisible à son tour.

3e. La libration diurne qui tient à ce que l'observateur est placé à la surface de la Terre. Il est évident que lorsque la Lune est au zénith en L, sa partie visible est amb et que lorsqu'elle est rapprochée de l'horizon, la partie visible devient a'm'b', un peu différente de amb qui reste tourné vers le centre de la Terre.

Chapitre XVII.

Phénomène des Marées.

Le phénomène des marées consiste en ce que sur les côtes de grandes mers le niveau des eaux s'élève et s'abaisse périodiquement.

On appelle flot, flux ou montant la marée montante; ebe, reflux, jusant ou perdant la marée descendante. Quand la mer cesse de monter, on a la pleine mer ou haute mer; la mer est basse au moment où elle cesse de descendre. La marée totale est la différence entre une pleine mer et la basse mer qui la suit, ou, pour plus d'exactitude, entre la moyenne des deux pleines mers consécutives et la basse mer intermédiaire.

La mer moyenne ou la moyenne entre la haute et la basse mer est une surface à peu près constante; on la prend ordinairement pour la surface de niveau à laquelle on rapporte les altitudes en géodésie. Elle n'est pas absolument identique avec la surface d'équilibre que prendrait la mer si le phénomène de la marée cessait; mais elle en diffère très peu.

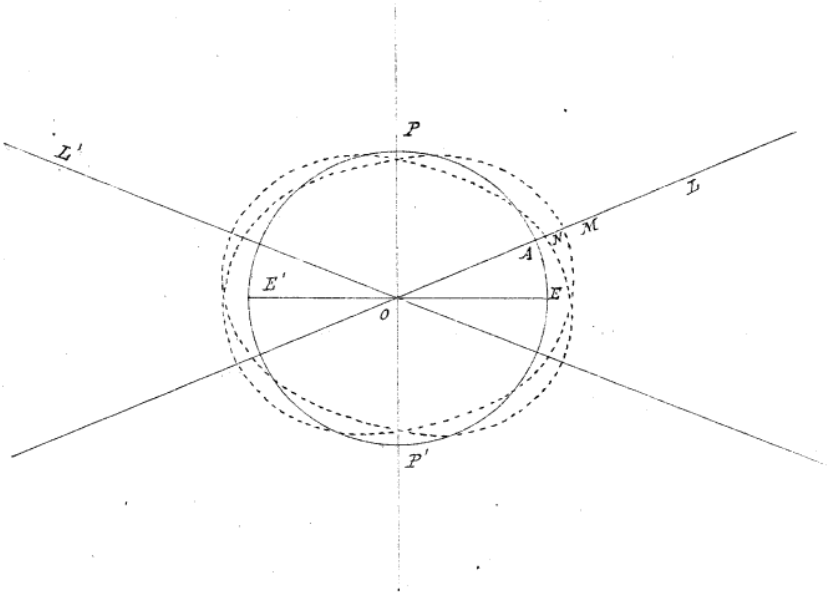
La période des marées est partout la même, l'intervalle entre deux hautes mers est $12^h\,25^m$, c'est-à-dire la moitié du jour lunaire. De plus, l'intensité de la marée varie avec les phases de la Lune; elle est plus grande aux syzygies qu'aux quadratures. Il y a donc une relation évidente entre les marées et le mouvement de la Lune; les marées dépendent aussi du mouvement du Soleil; on a été conduit naturellement à supposer qu'elles provenaient de l'attraction de ces deux astres sur les eaux de la mer.

En admettant que le globe terrestre soit sphérique et entouré de toutes parts par un liquide parfaitement fluide, et en ne considérant d'abord que l'attraction exercée par la Lune sur la masse liquide, on trouve par un calcul très simple que la forme que tend à prendre cette masse peut être assimilée à celle d'un ellipsoïde de révolution autour de la ligne des centres de la Terre et de la Lune. L'attraction du Soleil tendrait à lui faire prendre une forme analogue autour de la ligne qui joint la Terre au Soleil. Ces deux ellipsoïdes se combinent pour produire la déformation sans cesse variable de la surface

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la mer.

Mais cette théorie est loin de rendre compte de tous les faits observés. Ainsi elle semble indiquer que les deux marées du même jour ne sont pas de même hauteur. Par exemple, lorsque la Lune est en L, à une certaine distance de l'équateur, la marée en A est AM; lorsque dans son mouvement diurne la Lune passe au méridien inférieur en L', l'ellipsoïde formé par la masse liquide a pour grand axe le rayon L'O et la marée en A n'est plus que AN. En réalité au contraire, les deux marées du même jour sont toujours sensiblement égales.



En outre, d'après les expressions des forces qui produisent la haute et la basse mer devrait avoir une amplitude moindre que celle de la haute mer, tandis que ces amplitudes sont égales.

Retard des marées. — Enfin les marées devraient s'observer à l'instant du passage de la Lune au méridien; au lieu de cela elles sont toujours en retard, et ce retard est dû à deux causes; l'une générale, l'autre variable pour les différentes ports.

Newton attribuait le retard général à l'inertie de la matière en vertu de laquelle il a fallu dans le principe un certain temps pour que l'attraction lunaire imprimât un mouvement à la masse liquide et qui laisserait encore ce mouvement se continuer si l'attraction venait à cesser. Bernoulli supposait que l'attraction mettait un certain temps à se propager, mais Laplace a démontré qu'elle se propage infiniment plus vite que la lumière.

Enfin Laplace pensait lui-même que le retard venait du frottement sur les fonds, et il est probable que cette cause se joint à l'inertie.

La marée que l'on observe n'est pas celle qui correspond au passage antérieur de la Lune au méridien; c'est ce que l'on reconnaît aux syzygies qui précèdent toujours de $1^{j}\frac{1}{2}$ les plus fortes marées.

Le retard particulier est dû à la présence et à la forme des continents. Si par exemple la marée circule, avant d'atteindre un port, dans un canal tel que la Manche

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou le canal de Bristol, sa marche en plus ou moins retardée, selon les dimensions de ce canal.

La marche de la marée, étudiée sur les côtes des grands continents et des îles de l'Océan, a permis de construire approximativement sur la mappemonde des courbes cotidales (du mot anglais tide qui signifie marée), passant par les points qui ont la haute mer à la même heure, et au moyen desquelles on suit en quelque sorte le mouvement de cette immense vague.

Calcul des marées. — Laplace a donné des formules au moyen desquelles on peut calculer la hauteur et l'heure des marées.

Hauteur. — La hauteur aux syzygies est donnée par la formule

$$y = \left(\frac{A \cos 2d'}{a^3} + \frac{B \cos 2d}{R^3} \right) y_0,$$

où d et d' sont les déclinaisons du Soleil et de la Lune, A et B des coefficients constants, y_0 une quantité variable d'un port à l'autre qu'on nomme l'unité de hauteur; c'est la demi-marée totale qui a lieu à une syzygie où d et d' sont nuls, et où la Lune et le Soleil sont à leur moyenne distance. On l'a trouvée par l'observation de la moyenne des demi-marées totales, observées 36 heures après les syzygies des équinoxes pendant un assez grand nombre d'années.

Le coefficient par lequel il faut multiplier l'unité de hauteur varie de 1,17 à 0,68. Pour l'obtenir dans chaque cas, il faut, à cause du retard, prendre d et d' un jour $\frac{1}{2}$ avant l'époque de la syzygie pour laquelle on veut avoir la hauteur.

La hauteur de la marée totale varie avec les mers, les côtes et les fonds; elle dépend surtout de la configuration de la côte qui permet à la vague de glisser plus ou moins facilement, ou qui retient les eaux et les oblige à s'élever considérablement comme à Granville et à Bristol.

Dans les mers intérieures ou fermées, les marées sont à peine sensibles. Dans le fond de l'Adriatique, qui forme un canal, elles s'élèvent cependant à 1m; mais à Marseille et à Alger, elles sont à peine de 0m,25.

La pression barométrique influe sur la hauteur de la mer, qui augmente quand la pression diminue; si le mercure s'élève dans le baromètre, le niveau de la mer s'abaisse d'une quantité qui est à l'élévation du baromètre dans le rapport de la densité du mercure à la densité de l'eau. (1)

---

(1) Quelquefois les grandes marées coïncident avec des tempêtes; elles atteignent alors une hauteur très considérable et causent de grands ravages.

Il convient encore de signaler un autre phénomène dont les effets extraordinaires sont connus sous le nom de raz de marée, peuvent se superposer aux précédents et augmenter par conséquent les désastres.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Heure — L'heure de la marée est donnée par la formule

$$H = h + E - 22^m + \frac{1}{30} \operatorname{arctang} \left(\frac{\frac{r^3}{R^3} \cos^2 d \sin 2(AR - AR')}{2,89481 \frac{r^3}{a^3} \cos^2 d' + \frac{r^3}{R^3} \cos^2 d \sin 2(AR - AR')} \right)$$

h est l'heure du passage de la Lune au méridien, E est l'établissement du port, c'est-à-dire le retard de la pleine mer sur le passage de la Lune au méridien, le jour d'une Syzygie équinoxiale lorsqu'en même temps la Lune est dans l'équateur et que les deux astres (Lune et Soleil) sont à leur moyenne distance. Les 22^m proviennent du retard des marées aux Syzygies, AR et AR' sont les ascensions droites du Soleil et de la Lune.

Tableau relatif à quelques uns des ports de France.

	Unité de hauteur	Etablissement du port
Bayonne (embouchure de l'Adour)	$1^m,4$	$3^h,11^m$
La Rochelle (entrée de la Charente)	2,7	3,18
Cordouan	2,4	3,40
Lorient (Tour-Louis)	2,2	3,11
Brest	3,2	3,26
St Malo	5,7	5,41
Granville	6,2	5,41
Cherbourg	2,8	7,26
le Hâvre	3,6	8,56
Dieppe	4,4	10,11
Dunkerque	2,7	11,26

Ce tableau montre la grande inégalité qui existe entre les marées dans les différents ports de France; en prenant par exemple la marée maximum 1,17, on voit qu'elle atteint à Granville une hauteur de $1,17 \times 6,2 = 7^m25$, tandis qu'à Bayonne elle ne s'élève qu'à $1^m,6$.

Laplace est parvenu à calculer la masse de la Lune d'après les marées. De nombreuses observations faites à Brest lui ont appris que les actions de la Lune et du Soleil étaient à très peu près dans le rapport de 1 à 2,35, d'où il a conclu que la masse de notre satellite était $\frac{1}{77}$ de celle de la Terre. La valeur de cette masse déduite de la mutation est $\frac{1}{34}$. Cet accord est une confirmation de la loi de la gravitation universelle.

En résumé, la partie la plus frappante du phénomène des marées se trouve bien expliquée par l'attraction de la Lune et du Soleil sur la masse liquide

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui recouvre la plus grande partie du globe terrestre. Mais si l'on remarque que ce globe n'est pas entièrement recouvert par les eaux ; que les mers ont des profondeurs très variables ; qu'elles sont limitées par des pentes généralement faibles, on comprendra que les choses doivent se passer autrement que ne semblerait l'indiquer une théorie dans laquelle ces circonstances ont été négligées, le frottement sur le fond et la viscosité du liquide étant des causes impossibles à soumettre au calcul.

L'Annuaire du Bureau des Longitudes renferme des tables qui servent à calculer la hauteur et l'heure des marées dans les principaux ports des côtes de l'Europe occidentale. Ces tables sont calculées d'après les formules de Laplace.

Depuis quelques années, M. Chazallon, Ingénieur hydrographe de la Marine a institué des observations régulières dans plusieurs de nos ports. Ces observations sont faites au moyen du Marégraphe, instrument dans lequel un flotteur marque sur un papier mû d'un mouvement uniforme la hauteur de la mer ; ces indications sont réduites dans des proportions convenables à l'aide d'un mécanisme. On obtient des courbes sinueuses qui permettent d'obtenir la marée totale et la mer moyenne ; on en a déduit aussi le niveau d'équilibre.

Bien que les indications de ces instruments n'aient pas toujours une très grande précision, à cause du mouvement irrégulier de la surface de la mer, M. Chazallon, en comparant les résultats fournis par les observations ainsi faites avec les formules de Laplace, paraît être déjà arrivé à des conséquences remarquables. Le Dépôt de la Marine publie un Annuaire détaillé des marées des côtes de France, composé par cet Ingénieur.

Chapitre XVIII.

Des Planètes.

Mouvements apparents et réels de ces astres.

Les planètes connues des Anciens sont, dans l'ordre de leurs distances au Soleil : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne.

On connaît en outre aujourd'hui deux grandes planètes : Uranus et Neptune, et un grand nombre de petites planètes découvertes depuis le commencement de ce Siècle entre Mars et Jupiter. A la fin de 1860, les petites planètes étaient au nombre de 62.

Les planètes connues des Anciens sont naturellement les seules qui soient visibles à l'œil nu ; elles se distinguent des étoiles par l'absence presque complète de scintillation. Leur mouvement apparent est tantôt direct, tantôt rétrograde avec des Stations

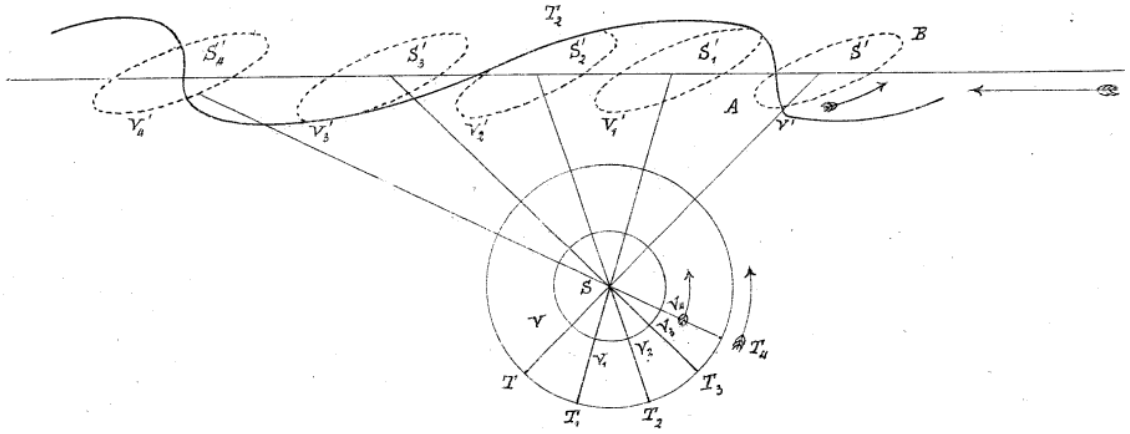
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

intermédiaires.

Les planètes plus rapprochées du Soleil que la Terre, c'est-à-dire Mercure et Vénus, se nomment planètes inférieures ou intérieures ; les autres sont les planètes supérieures ou extérieures.

Les mouvements de planètes dans le ciel, si irréguliers en apparence, les phases que l'on observe sur quelques unes de ces astres lorsqu'on les regarde à travers de lunette ainsi que la variation de leurs diamètres apparents, s'expliquent très simplement par leurs mouvements réels autour du Soleil dans des orbites généralement peu inclinées sur l'écliptique.

Supposons que la Terre soit en T et Vénus en V à la conjonction inférieure. Si elle était apparente, l'orbite de cette planète se projetterait sur la Sphère suivant une ellipse AB ayant le Soleil S' pour centre, Vénus paraissant alors placé en V'. Lorsque la Terre sera en T_1, le Soleil se projettera en S'_1 et Vénus ayant une vitesse angulaire plus grande sera venue en V'_1. Pour une autre position T_2 de la Terre, Vénus se projettera en V'_2 et paraîtra ainsi décrire une ligne sinueuse placée successivement au dessus de l'écliptique.



En suivant le mouvement d'une planète supérieure, on expliquerait de la même manière les Stations, les rétrogradations et les accélérations.

Éléments du mouvement elliptique des planètes. On sait que toutes les planètes décrivent des orbites elliptiques autour du Soleil en suivant les lois de Képler ; pour celles que nous avons nommées plus haut, on peut ajouter que les plans de leurs orbites sont peu inclinés sur celui de l'écliptique, et que, sauf celles de Mercure et de Mars, ces orbites ont une faible excentricité. (Voyez le tableau de la page 214).

Les éléments des orbites des planètes sont au nombre de sept :

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ω la longitude du nœud de l'orbite ;
i l'inclinaison du plan de cet orbite sur celui de l'écliptique ;
a_1 le demi-grand axe de l'ellipse ou la moyenne distance de la planète au Soleil ;
e l'excentricité de l'ellipse ;
π la longitude du périhélie ;
M_0 la longitude moyenne de la planète à l'instant pris pour origine du temps ;
enfin S_1 la durée de la révolution sidérale ; mais ce dernier élément est lié à la longueur du demi-grand axe et aux quantités analogues du mouvement de la Terre par la relation

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (3^e \text{ Loi de Képler}).$$

et si l'on prend l'année sidérale pour unité de temps et le demi-grand axe de l'orbite terrestre pour unité de longueur, il restera

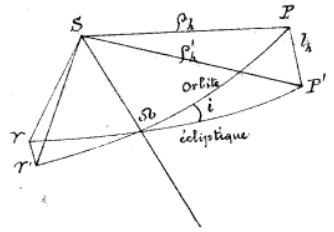
$$S_1 = a_1^{\frac{2}{3}},$$

d'où l'on déduit le mouvement moyen :

$$\frac{2\pi}{S_1} = n_1$$

Lorsque les six éléments distincts de l'orbite d'une planète sont connus, on peut calculer, pour un instant donné t, les coordonnées de la planète rapportées au centre du Soleil et passer de ces coordonnées à celles qui ont le centre de la Terre pour origine. Les premières se nomment coordonnées héliocentriques, et les secondes coordonnées géocentriques.

Occupons-nous d'abord des premières :



Du point P où se trouve la planète, abaissons l'arc PP' perpendiculaire sur l'écliptique ;

$\gamma S P' = L'_h$ sera la longitude héliocentrique ;

$P S P' = l_h$ la latitude héliocentrique ;

Enfin $S P' = \rho'_h$ sera ce que l'on appelle la distance accourcie de la planète au Soleil.

Prenons sur l'orbite de la planète un arc $\Omega \gamma' = \Omega \gamma$; si nous comptons les longitudes à partir du point γ', nous aurons :

$$\gamma' S P = L_h = M_0 + n_1 t + E,$$

en désignant par E l'équation du centre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Mais cette quantité diffère de la longitude héliocentrique vraie $\Upsilon S P'$ de la réduction à l'écliptique de l'arc ΩP, c'est-à-dire de $\Omega P - \Omega P'$, de sorte que, pour calculer la longitude héliocentrique, on aura une formule de cette forme

$$L'_h = L_h + R = M_0 + n_1 t + E + R, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

la réduction à l'écliptique étant calculée par la formule

$$R = - tg^2 \frac{i}{2} \sin 2 (L_h - \Omega) + \ldots\ldots$$

D'un autre côté, le triangle $P \Omega P'$ donne pour la latitude héliocentrique

$$\sin l_h = \sin i \sin (L_h - \Omega) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

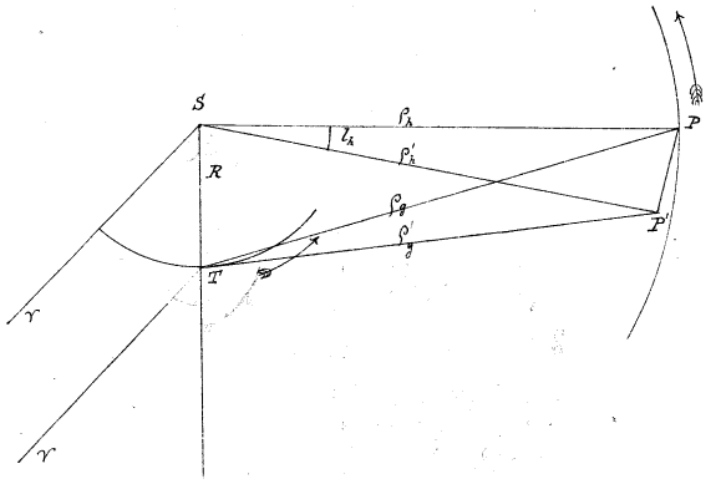
Enfin, dans le triangle PSP', on a

$$\rho'_h = \rho_h \cos l_h = \frac{a_1 (1 - e^2)}{1 + e \cos (L_h - \pi)}$$

expression que l'on développe en série, comme dans la Théorie du Soleil (1).

Connaissant ces trois coordonnées L_h, l_h et ρ_h voyons comment on pourra calculer les coordonnées géocentriques L'_g, l'_g, ρ'_g

S étant la position du Soleil et T celle de la Terre, si par le point T nous menons la ligne $T\Upsilon$ parallèle à $S\Upsilon$ qui est la ligne des équinoxes, l'angle $\Upsilon TP'$ sera la longitude géocentrique L'_g de la planète.



Or, dans le triangle STP' nous connaissons $\rho'_h = SP$, $R = ST$ distance de la Terre au Soleil au moment donné, et enfin l'angle en $S = \Upsilon SP' - \Upsilon$ différence des longitudes héliocentriques de la Terre et de la planète; la longitude de la Terre $\odot$ est égale à $\odot - 180°$, $\odot$ étant la longitude du Soleil, laquelle est connue, ainsi que R

(1) Ce développement est celui de l'équation du centre en fonction de l'anomalie moyenne s'effectuera par une méthode différente de celle que l'on a employée dans la Théorie du Soleil lorsqu'il s'agit d'une planète dont l'orbite a une forte excentricité.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par la Théorie du Soleil.

Ainsi $$S = L'_h - (\odot - 180°).$$

Mais $$\gamma TP' = \gamma SP' + SPT ;$$

donc $$SP'T = L'_g - L'_h,$$ et le triangle STP' donnera

$$tg\,(L'_g - L'_h) = \frac{\frac{R}{\rho'_h}\sin S}{1 - \frac{R}{\rho'_h}\cos S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

d'où l'on tirera la valeur de la longitude géocentrique.

Le même triangle $SP'T$ nous donnera, pour la distance accourcie de la planète à la Terre

$$\rho'_g = \frac{\sin S}{\sin P'}\,\rho'_h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

et pour la latitude géocentrique, on aura, par les deux valeurs de PP' prises dans les triangles PSP et PTP'

$$tg\,l_g = \frac{\rho'}{\rho_h}\,tg\,l_h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

Les formules (I), (II) et (III) servent à calculer les éphémérides des planètes; mais pour que les résultats soient, autant que possible, d'accord avec les observations, il faut avoir égard aux perturbations, à la précession, à la nutation et à l'aberration.

Les trois angles du triangle STP formé par la Terre, le Soleil et la projection de la planète sur le plan de l'écliptique portent chacun une dénomination particulière. L'angle au Soleil s'appelle la commutation; l'angle à la planète la parallaxe annuelle, et l'angle à la Terre l'élongation.

Pour les planètes inférieures, l'élongation a un maximum que l'on appelle la digression de la planète.

Pour les planètes supérieures, l'élongation passe par toutes les valeurs comprises entre 0 et 360°.

Nous avons vu comment on peut calculer les coordonnées héliocentriques d'une planète et en déduire les coordonnées géocentriques quand on connaît les six éléments. Nous avons trouvé six relations qui relient ces diverses quantités et il en résulte que trois observations complètes, faites de la surface de la Terre suffisent pour déterminer ces éléments.

La solution du problème de Képler, que nous avons donnée à propos de la Théorie du Soleil, est insuffisante quand l'excentricité d'une planète est trop forte. On use

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

peut par non plus s'appliquer aux comètes. Pour déterminer les éléments de ces derniers astres, on admet que leur orbite est une parabole, ce qui a sensiblement lieu pour la plupart d'entre eux. Toutefois cette hypothèse n'est pas toujours admissible: une méthode indiquée par Gauss permet de déterminer la nature de la section conique que parcourt une comète dont on a des observations convenablement espacées.

Les méthodes généralement en usage pour calculer les éléments des planètes et des comètes sont celle de Laplace pour les planètes à petite excentricité, et celle de Lagrange pour les Comètes et les planètes à forte excentricité.

Voici les éléments des planètes principales rapportés à l'année 1850. (1)

Planètes.	Ω	i	ϖ	e	M_0	S	a	Masses.
Mercure ☿	46°33'3",25	7° 0' 8",15	75° 7' 0"	0,2056179	327°15'19",9	87j,9692580	0,38709812	$\frac{1}{3000000}$
Vénus ♀	75° 19' 4",15	3° 23' 30",75	129° 23' 56"	0,0068334	245°33'14",4	224j,7007869	0,72333230	$\frac{1}{401847}$
Terre ♁	0 0 0	0 0 0	100° 21' 40"	0,0167 7046	100° 46' 36",1	365j,2563744	1,0000000	$\frac{1}{354936}$
Mars ♂	48° 22' 44",75	1° 51' 5",08	333° 17' 50",6	0,0932616	85° 40' 50",6	686j,9796458	1,52369352	$\frac{1}{2,680337}$
Jupiter ♃	98° 54' 20",45	1° 18' 40",31	11° 54' 53",1	0,0482388	160° 1' 20",3	4332j,5848212	5,20116636	$\frac{1}{1050}$
Saturne ♄	112° 21' 43",96	2° 29' 28",14	90° 6' 12",0	0,0559956	14° 50' 40",6	10759j,2198174	9,53787090	$\frac{1}{3512}$
Uranus ♅	73° 14' 14",35	0° 46' 29",91	168° 16' 45",0	0,0465775	28° 26' 41",5	30686j,8203296	19,18330500	$\frac{1}{24000}$
Neptune ♆	130° 6' 5",58	1° 46' 58",97	47° 14' 37",3	0,0087195	325° 8' 58",5	60126j,72	30,04	$\frac{1}{14400}$

En étudiant les mouvements apparents des planètes, les Anciens avaient été conduits à en expliquer les stations et les rétrogradations par le mouvement de translation de ces astres autour du Soleil; seulement, comme ils admettaient en principe que les mouvements réels devaient être uniformes et les orbites circulaires; ils avaient eu recours à l'hypothèse de l'excentrique pour rendre compte des irrégularités que l'observation faisait découvrir dans ces mouvements. Ce fut Képler qui démontra l'insuffisance de cette hypothèse. Les observations que Tycho-Brahé avait faites sur Mars, planète dont l'excentricité est très forte, comme on peut le voir sur le tableau précédent, présentaient en effet des discordances trop grandes avec la théorie de l'excentrique. Après de nombreux tâtonnements, Képler essaya l'ellipse et parvint enfin à la découverte de véritables lois

(1) Les nombres consignés dans ce tableau sont extraits des annales de l'Observatoire de Paris, t. II.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du mouvement des corps célestes.

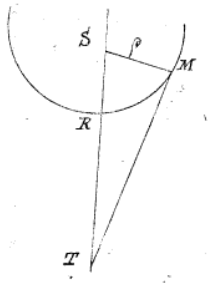
Avant de connaître la théorie exacte du mouvement des planètes, on avait cependant pu déterminer approximativement quelques uns des éléments de ce mouvement, par exemple la révolution sidérale et la distance moyenne de l'astre au Soleil, celle de la Terre au Soleil étant prise pour unité.

La durée de la révolution sidérale peut se déduire de celle de la révolution synodique. Or, on trouve facilement cette dernière en notant le temps qui s'écoule entre deux retours de la planète à une opposition. A la vérité, la durée de la révolution synodique n'en pas constante; elle en affectée de certaines inégalités; mais en faisant un grand nombre d'observations et prenant la moyenne, on peut arriver à la déterminer très approximativement.

Ce procédé s'applique seulement aux planètes supérieures, les conjonctions des planètes inférieures ne pouvant pas s'observer, parce qu'aux époques où elles ont lieu, la lumière que nous envoient ces planètes en effacée par celle du Soleil. Pour déterminer la révolution synodique de ces dernières, on observe le temps écoulé entre deux passages consécutifs de la planète à son nœud; on admet que ce nœud n'a pas rétrogradé d'une manière sensible et l'on prend le temps qui sépare les deux observations pour durée de la révolution synodique. Il y a encore d'autres moyens plus exacts que nous ne nous arrêterons pas à indiquer ici.

On peut aussi déterminer d'une manière approchée les distances des planètes. Le procédé qu'on emploie en différent, suivant que la planète en inférieure ou supérieure.

Si la planète en inférieure, on observe sa digression, c'est-à-dire la valeur maximum que peut prendre son élongation, et on déduit de cette observation le rapport des distances de la planète et de la Terre au Soleil. Le triangle SMT donne en effet



$$\sin STM = \frac{SM}{ST} = \frac{\rho}{R}$$

Si la planète en supérieure, on fait usage de la formule précédemment établie

$$tg\, P' = tg\,(L'_h - L'_g) = \frac{\frac{R}{\rho \cos l_h} \sin S}{1 - \frac{R}{\rho \cos l_h} \cos S}$$

Les plans des orbites sont généralement très peu inclinés sur celui de l'écliptique. Il en résulte que le facteur $\cos l_h$ peut être remplacé par l'unité. La formule devient alors

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\operatorname{tg}(L'_h - L'_g) = \frac{\frac{R}{\rho}\sin S}{1 - \frac{R}{\rho}\cos S}$$

Dans cette formule, L_g représente la longitude géocentrique de la planète que l'on peut observer, et L'_h sera sa longitude héliocentrique, que l'on peut facilement déterminer ainsi que l'angle S, car l'angle S ou son supplément à 360° est sensiblement égal au produit du moyen mouvement de la planète par le temps écoulé depuis la dernière opposition, quantités qui sont toutes les deux des résultats de l'observation. Or, on a la formule

$$L'_h = \odot + 180° + S$$

dans laquelle $\odot$ représente la longitude du Soleil, qui est également connue.

Il ne reste donc d'inconnu dans la formule (1) que le rapport $\frac{R}{\rho}$ que l'on cherche.

Chapitre XIX.

Parallaxe du Soleil.

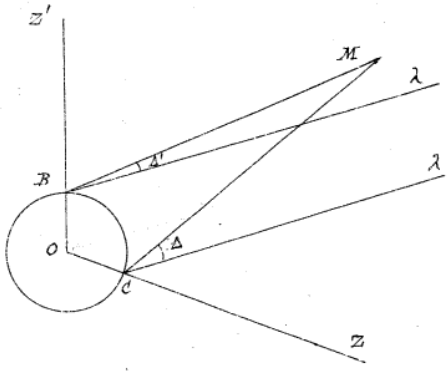
Nous pouvons admettre, d'après ce qui précède, que nous connaissons les rapports des rayons des orbites des différentes planètes à celui de l'orbite terrestre; il nous reste maintenant à indiquer comment on a observé la parallaxe du Soleil, d'où l'on a conclu la distance de la Terre, et par suite de toutes les autres planètes à cet astre.

Le Soleil est trop éloigné de la Terre pour que sa parallaxe puisse être déterminée avec autant de précision que celle de la Lune. Mais on peut appliquer la méthode qui a servi pour trouver cette dernière à une planète plus rapprochée de la Terre que le Soleil et en déduire ensuite la parallaxe du Soleil. Les observations les plus avantageuses seraient celles que l'on ferait sur Vénus au moment de sa conjonction inférieure, alors que sa distance à la Terre n'est guère plus du quart de celle du Soleil. Mais cette conjonction ne peut pas s'observer, à moins que Vénus ne passe sur le disque du Soleil. Or, de pareils passages n'ont lieu que rarement, avant de songer à en profiter, on a donc eu recours à Mars qui, au moment de l'opposition est à une distance de la Terre égale au 0,52 de celle du Soleil.

Le 5 Octobre 1751, Lacaille, au Cap de Bonne Espérance et Wargentin à Stockholm, ont observé la différence de distance zénithale de Mars et d'une étoile voisine

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

λ du Versean. Les deux différences observées étaient



$$\Delta' = \xi' - z' = 1'57'',7$$

$$\Delta = z - \xi = 1'25'',8.$$

Or, la différence de ces deux valeurs en égale à la somme des parallaxes de hauteur. Donc

$$p + p' = 31'',9.$$

Mais $p+p' = \frac{r}{d \sin 1''} \left\{ 2 \sin \tfrac{1}{2}(z+z') \cos \tfrac{1}{2}(z-z') \right\}$.

d'où $$d = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(z+z') \cos \frac{1}{2}(z-z')}{31'',9 \sin 1''}.$$

D'ailleurs on avait

$$z = 25° 0',$$

$$z' = 68° 14';$$

et en substituant on trouve $d = 8740\, r$

En outre les Tables de Mayer donnaient pour l'instant de l'observation

$$d = 0,4327\, R,$$

R représentant le rayon de l'orbite terrestre;

d'où $$8740\, r = 0,4327\, R,$$

et $$R = 20198\, r.$$

On en tire ensuite $$\frac{r}{R \sin 1''} = 10''$$

Telle sont les valeurs du rayon de l'orbite terrestre et de la parallaxe du Soleil auxquelles ont conduit ces mesures. Cette parallaxe est plus forte que celle adoptée aujourd'hui par les Astronomes, et qui a été déduite de l'observation du passage de Vénus sur le disque Solaire en 1769.

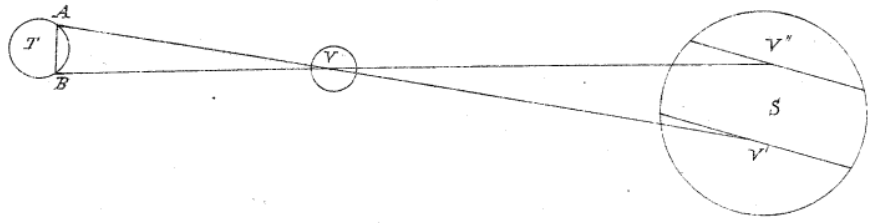
Le principe de la détermination de la parallaxe du Soleil par l'observation du passage de Vénus est très simple à saisir.

Imaginons d'abord que pendant le passage de Vénus, deux observateurs placés en A et en B, à la surface de la Terre, déterminent au même instant les positions V' et V'' dans lesquelles ils voient le centre de la planète projetée sur le disque du Soleil. En considérant ce disque comme un tableau dont le plan serait parallèle à la ligne AB, le rapport de la distance rectiligne des deux points V' et V'' à la corde AB du globe ter-
-restre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

serait égal à celui des deux distances V V' et A V de Vénus au Soleil et à la Terre, qui en connu.

Or, l'angle sous lequel on voit V'V" de la Terre résulte des deux observations que nous avons supposé faites simultanément en A et en B, et on en conclura réciproquement l'angle sous lequel la corde A B et par suite le rayon terrestre seraient vus du Soleil, c'est-à-dire la parallaxe cherchée.



Le degré de précision que présenterait l'opération ainsi effectuée dépendrait nécessairement de celui que l'on peut obtenir au moyen des instruments qui servent à mesurer les angles; mais au lieu de déterminer les positions de deux points, tels que V' et V", sur le disque par des mesures angulaires, on observe de chacune des Stations A et B la durée entière du passage de la planète sur ce disque. Le rapport de la durée du passage observée dans une Station au temps calculé que la planète emploierait à parcourir un diamètre du disque détermine celui de la grandeur de la corde que la planète paraît décrire à ce diamètre; et en combinant les deux observations pour lesquelles les cordes décrites sont parallèles, on obtient la distance angulaire de ces deux cordes elles-mêmes, qui en l'élément dont on se sert pour obtenir la parallaxe. On conçoit bien que des erreurs de quelques secondes de temps dans l'observation de la durée du passage ne sauraient avoir une influence sensible sur le résultat définitif, quand on sait que cette durée peut s'élever à plusieurs heures, et que la différence des durées observées dans les deux Stations peut devenir elle-même assez considérable, si les deux Stations sont suffisamment éloignées. C'est dans cette substitution de l'observation de temps assez long à celle d'angles très petits que consiste l'avantage de cette ingénieuse méthode due à Halley.

Tous les passages de Vénus ne sont pas également favorables à la détermination de la parallaxe du Soleil. Si les cordes que la planète semble parcourir des deux Stations étaient trop voisines du centre, leur différence serait trop petite pour conduire à un résultat exact, et si ces cordes elles-mêmes étaient trop petites, c'est-à-dire si les durées des passages étaient trop courtes, il en serait évidemment de même.

Les passages de Vénus ne viennent qu'après une période de 113 ans; il y en a alors deux qui se succèdent à 8 années d'intervalle; ainsi, il y a eu un passage en 1761 et un second en 1769; mais il faut attendre encore les années 1874 et 1882 pour que ce phénomène se reproduise.

En réalité, la détermination de la parallaxe du Soleil par l'observation des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

passage de Vénus n'est pas aussi simple qu'elle le paraît d'après l'aperçu qui précède. Le calcul est long et compliqué. La discussion des observations faites en 1769 en plusieurs lieux de la Terre, a donné pour la parallaxe du Soleil 8",5776 (1).

La parallaxe du Soleil étant trouvée, on connaît les dimensions du système solaire.

On pourrait maintenant penser que le rayon de l'orbite terrestre doit être une base suffisante pour mesurer, au moins d'une manière approchée, la distance des étoiles à la Terre. Cependant les efforts des Astronomes ont été longtemps infructueux pour déterminer la parallaxe annuelle des étoiles, c'est-à-dire l'angle sous lequel un observateur placé à la distance des étoiles, verrait le rayon de l'orbite terrestre; tout ce qu'ils pouvaient conclure de leurs observations c'est que cette parallaxe n'atteignait 1" pour aucune étoile. Ce n'est qu'en 1835 que Bessel parvint à obtenir celle de la 61e du Cygne, qui est de 0",37. Depuis, on en a déterminé quelques autres; la plus forte est celle de α du Centaure, de 0",91. Ces parallaxes conduisent à des nombres prodigieux pour les distances des étoiles à la Terre.

C'est en cherchant les parallaxes des étoiles que l'on a été conduit à la découverte de l'aberration. L'astronome français Lemonnier reconnut le premier que la distance de l'étoile polaire au pôle avait une petite variation périodique; mais il n'en tira aucune conclusion.

Bradley, en se fondant sur ses propres observations, expliqua le phénomène et fit voir que chaque étoile doit décrire une petite ellipse apparente autour de sa position vraie. Ce ne fut qu'après avoir découvert l'aberration qu'il reconnut la nutation. Cela tient à ce que la période dans laquelle s'effectue le mouvement dû à la nutation est beaucoup plus longue que celle de l'aberration.

Chapitre XX.

Vitesse de la lumière. — Phénomène de l'aberration.

Vitesse de la lumière. — Avant de décrire le phénomène de l'aberration, il est nécessaire d'indiquer en quelques mots comment on a découvert et mesuré la vitesse de la lumière.

On sait, depuis Galilée, que Jupiter est accompagné de 4 satellites dont le mouvement autour de la planète est sensiblement uniforme et s'effectue dans des plans très

(1) M. Le Verrier a trouvé, par une voie tout à fait indirecte, 8",95 (Voy. le Compte rendu de la séance de l'Acad. des Sciences du 10 Mai 1858).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

peu incliné sur celui de la planète. Les trois premiers de ces satellites entrent dans le cône d'ombre projeté derrière la planète à toutes leurs oppositions; leurs éclipses doivent donc arriver tr[illegible]ent.

[illegible] grand nombre d'observations, D. Cassini (1668) construisit des Tables [illegible] de ces satellites, à l'aide desquelles on pouvait calculer les époques des retours des éclipses. Peu de temps après, Rœmer remarqua que la théorie n'était pas parfaitement d'accord avec les observations; mais que les discordances suivaient une certaine loi: l'éclipse arrivait en effet toujours avant l'époque indiquée par les Tables, lorsque Jupiter était en opposition, et après, lorsque la planète était en conjonction. Il soupçonna de là que ces avances ou ces retards devaient provenir de la différence de temps que la lumière met dans les deux cas à venir de l'astre à la Terre. Dans le premier cas, par exemple, si nous considérons l'instant de l'émersion d'un satellite éclipsé, la lumière réfléchie par la surface de ce satellite n'aura à parcourir qu'une distance de 4, 2 R environ, tandis que dans le second cas, la distance sera de 6, 2 R, c'est-à-dire plus grande de tout le diamètre de l'orbite terrestre.

[illegible]

D'après ce principe, soient T l'intervalle de temps écoulé entre deux éclipses observées l'une à la conjonction, l'autre à l'opposition, n le nombre des éclipses intermédiaires et σ la durée de la révolution synodique du satellite, résultat moyen d'un grand nombre d'observations faites dans tous les aspects; enfin j et j' les distances de Jupiter à la Terre à la conjonction et à l'opposition, et v la vitesse de la lumière, c'est-à-dire l'espace qu'elle parcourt dans l'unité de temps; on aura évidemment

$$T = n\sigma + \frac{j - j'}{v} = n\sigma + \frac{2R}{v},$$

relation dans laquelle tout est connu, à l'exception de v, dont on peut par conséquent trouver la valeur.

En employant les observations les plus précises, on a trouvé ainsi que la lumière met $16^m 36^s$ à parcourir le diamètre de l'orbite terrestre supposé circulaire; ce qui fait environ 308 000 kilomètres, ou 77 000 lieues par seconde.

Remarque. — Quelque grande que soit cette vitesse, les distances des étoiles à la Terre sont tellement considérables que la lumière doit mettre plus de 3 ans à venir de α du Centaure à la Terre; 9 ans à venir de la 61e du Cygne, et que des étoiles pourraient s'éteindre sans que nous cessions de les voir pendant un grand nombre d'années à la place qu'elles occupent, tandis qu'il en peut exister d'autres dont la lumière ne nous est pas encore parvenue.

Aberration annuelle des étoiles. — La vitesse de la Terre dans son orbite, quoique bien inférieure à celle de la lumière, a avec elle un rapport fini et appréciable; elle est d'environ $30^K, 5$ par seconde, c'est-à-dire égale à très peu près à un dix millième de la vitesse de la lumière; il en résulte, comme on peut facilement le concevoir, que les astres ne nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

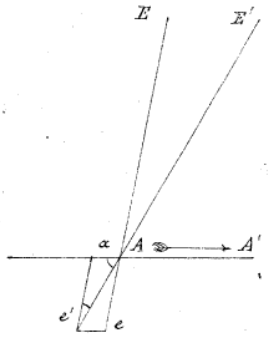
paraissent pas dans la position qu'ils occupent réellement.

Pour déterminer les positions apparentes des astres d'après leurs positions vraies il faut chercher la résultante de la vitesse de la lumière suivant la direction qu'elle parcourt pour arriver à la Terre avec celle de la Terre elle même prise en sens contraire.

Soit par exemple E la position véritable d'une étoile, et EA le rayon lumineux qu'elle envoie à un observateur placé en A; prenons les longueurs Aa et Ae proportionnelles aux vitesses de la Terre et de la lumière. La diagonale du parallélogramme construit sur ces deux longueurs sera dirigée vers la position apparente E' de l'étoile.

L'angle des deux directions AE, AE' est ce qu'on appelle l'angle d'aberration.

Il est facile à évaluer, car on a pour le triangle Aae':

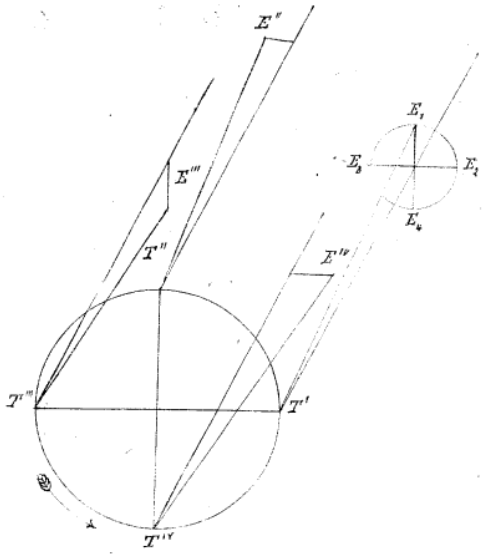


$$\frac{\sin Ae'\alpha}{\sin \alpha A e'} = \frac{\sin EAE'}{\sin EAA'} = \frac{v}{V};$$

d'où l'on tire, en appelant α l'angle d'aberration, et en remplaçant $E'AA'$ par EAA' qui en diffère très peu.

$$\sin \alpha = \frac{v}{V} \sin EAA'.$$

Pour suivre les effets de l'aberration pendant toute l'année, considérons le mouvement de la Terre comme circulaire et uniforme.



Soient E la position vraie de l'étoile et T' T'', T''', T^{IV} quatre positions de la Terre sur son orbite aux extrémités de deux diamètres perpendiculaires entre eux.

Lorsque la Terre est en T', on obtient la position apparente E' de l'étoile ou plus exactement la direction dans laquelle on doit voir l'étoile, en construisant la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont proportionnels à la vitesse de la lumière et à la vitesse de translation de la Terre cette dernière étant seulement changée de signe. La même construction donnera les directions apparentes de l'étoile lorsqu'on supposera la Terre transportée successivement en T'', T''', T^{IV}. Rapportons maintenant à une même position T' de la Terre les directions de rayons visuels menés de l'étoile; non seulement quand celle-ci est en E'', E''', E^{IV}, mais encore quand elle occupe les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

positions intermédiaires ; nous formerons ainsi un cône dont la trace sur la Sphère céleste sera l'orbite apparente de l'étoile. D'ailleurs la courbe E_1, E_2, E_3, E_4 est un cercle puisque les longueurs EE_1, EE_2 sont toutes égales ; l'étoile est donc vue comme si elle décrivait un cercle parallèle au plan de l'écliptique, et sa projection de la Sphère céleste est une ellipse.

Pour déterminer les axes de cette ellipse, reprenons la formule qui donne la valeur de l'angle d'aberration

$$\sin \alpha = \frac{v}{V} \sin EAA' ;$$

ou, à cause de la petitesse de cet angle

$$\alpha = \frac{v}{V \sin 1''} \sin EAA' .$$

Si nous supposons v constant, le maximum de cette expression, c'est-à-dire l'angle soustendu par le grand axe est

$$\frac{v}{V \sin 1''} = 20'',45,$$

et le minimum de la même expression, ou le petit axe de l'ellipse est

$$\frac{v}{V \sin 1''} \sin l = 20'',45 \sin l ,$$

l désignant la latitude de l'étoile. Si l'étoile est voisine du pôle de l'écliptique, l'ellipse devient un cercle, si elle est au contraire voisine de ce plan, elle se réduit à une ligne droite.

Il y a une différence caractéristique entre le déplacement apparent sur l'ellipse d'aberration et la parallaxe de l'étoile quand elle est sensible. Par le premier, l'étoile est vue dans un plan perpendiculaire à celui qui la contient en même temps que la Terre et le Soleil ; tandis que la seconde s'opère dans ce dernier plan. D'ailleurs les deux effets ne peuvent pas être comparés sous le rapport de l'amplitude, le premier étant beaucoup plus sensible que le second.

Aberration diurne. — Il existe aussi une aberration diurne due au mouvement de rotation de la Terre autour de son axe. En vertu de ce mouvement un point situé à l'équateur est animé d'une vitesse dont le rapport à la vitesse de translation n'est que $\frac{1}{65,7}$.

On en conclut pour l'aberration diurne un maximum de 0″32 qui serait encore moindre à nos latitudes. Aussi l'on ne tient compte de cette aberration que dans

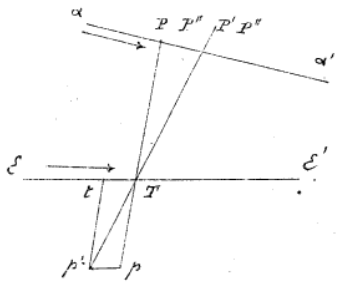
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les observations qui exigent une extrême précision.

Formules d'aberration. — On établit d'abord les formules les plus simples qui donnent l'aberration en longitude et l'aberration en latitude ; puis on obtient l'aberration en ascension droite et en déclinaison en différentiant les formules de transformation de coordonnées sphériques. Ces différentes formules ont été réduites en tables qui servent à calculer les positions apparentes des étoiles quand on a déjà trouvé les positions vraies, ou à passer des positions observées aux positions vraies d'où l'on peut ensuite déduire les positions moyennes à une date déterminée pour la formation des catalogues.

Aberration des planètes. — Pour une planète, l'aberration résulte non seulement du mouvement de translation de la Terre, mais aussi de celui de la planète elle même.

Soient EE' l'arc de l'écliptique que parcourt actuellement la Terre et $\alpha\alpha'$ celui où se trouve la planète que l'on considère, les sens de mouvements des deux astres étant ceux qui sont indiqués par les flèches.



La lumière partie du point P où se trouvait la planète à un certain instant et qui arrive à la Terre en T paraîtra venir d'un autre point P' dont la direction est celle de la diagonale du parallélogramme des vitesses de la lumière et de la Terre $Ttpp'$. Or, pendant le temps que la lumière a mis à franchir la distance PT, la planète s'est déplacée dans son orbite ; elle se trouve donc en P'' en deçà ou au delà de la direction TP, selon les vitesses et les positions relatives de la Terre et de la planète ; $P'TP''$ en donne l'angle d'aberration.

Chapitre XXI.

Masses, dimensions et apparences physiques des planètes.

Masses du Soleil, de la Lune et des planètes. — Cette question devant être traitée dans le cours d'Analyse, nous nous bornerons ici à en indiquer le principe.

On commence par déterminer la masse du Soleil. Pour cela, en se fondant sur la loi de l'attraction universelle, on calcule l'espace que parcourrait dans une seconde un corps transporté à la distance du Soleil à la Terre, et qui serait soumis à l'action de la pesanteur terrestre ; comme on sait d'ailleurs évaluer la quantité dont la Terre tombe vers le Soleil dans le même temps, le rapport des deux nombres ainsi obtenus donne précisément

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le rapport des masses de la Terre et du Soleil.

On peut procéder d'une manière tout à fait semblable pour trouver les masses des planètes qui sont accompagnées de satellites ; quant aux planètes qui n'ont pas de satellites, on déduit leurs masses des perturbations qu'elles produisent. Enfin, on a déterminé la masse de la Lune, comme nous l'avons dit précédemment, au moyen de la nutation ou en partant des observations des marées correspondant aux quadratures et aux Syzygies.

Dimensions et apparences physiques des planètes. — Les deux planètes inférieures Mercure et Vénus, présentent des phases analogues à celles de la Lune et qui s'expliquent tout aussi facilement. Ces phases, que l'on peut suivre dans la lunette, prouvent que les planètes sont des corps sphériques obscurs dont un hémisphère est éclairé par la lumière du Soleil. Les phases des planètes supérieures sont insensibles, à l'exception de celle de Mars, qui atteint aux quadratures un huitième du diamètre de la planète.

Mercure. — Cette planète la plus voisine du Soleil est, précisément à cause de cela, la plus difficile à observer. Sa surface a paru accidentée et traversée par des bandes, une troncature observée à l'une des cornes, quand il y a phase, a permis d'évaluer la durée de la rotation de la planète autour d'un axe qui forme avec le plan de l'écliptique un angle de 70°. Cette durée est de $24^h\,5^m\,30^s$.

Le diamètre apparent de mercure varie entre 5" et 12" ; son diamètre réel est de 120 lieues environ, ou 0,35, celui de la Terre étant pris pour unité. Des mesures micrométriques délicates ont fait reconnaître un aplatissement assez faible. Sa masse est $\frac{1}{3000000}$ de celle du Soleil.

Vénus. — Les taches que l'on observe assez difficilement à la surface de cette planète ont indiqué une rotation dont la durée est de 24 heures environ et qui s'effectue autour d'un axe incliné de 75° sur le plan de l'écliptique. D'assez fortes troncatures, visibles dans certaines phases, ont fait supposer qu'il existait de hautes montagnes à la surface de Vénus. Vers les quartiers, on remarque aussi que la ligne de séparation d'ombre et de lumière n'est pas nettement tranchée ; et il semble y avoir une dégradation de teinte qui accuserait la présence d'une atmosphère très dense.

Le diamètre apparent de Vénus varie entre 10" et 62" ; son diamètre réel est de 2800 lieues, ou plus exactement 0,96 de celui de la Terre. Jusqu'à présent on n'a pas constaté d'aplatissement.

Sa masse est de $\frac{1}{401847}$.

Vénus est l'astre dont l'éclat est le plus vif. On la voit quelquefois même dans le milieu du jour.

Mars. — La surface de Mars, vue dans de bons télescopes, présente des contours dont les formes sont nettement tracées. On a trouvé que la durée de sa

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rotation était de $24^h\,37^m$, et que son axe de rotation était incliné de 30° environ sur le plan de l'écliptique.

Son diamètre apparent varie entre 4" et 18"; son diamètre réel est de 1500 lieues ou 0,52 de celui de la Terre. L'aplatissement de son disque est très sensible et est de $\frac{1}{38}$ environ.

Indépendamment des taches persistantes, on remarque encore à la surface de Mars et dans le voisinage des pôles, des taches qui varient de grandeur et qui ont fait conjecturer qu'il pouvait y avoir dans ces points de la mer considérable de glaces. Mars paraît également avoir une atmosphère. Enfin cette planète est très facile à distinguer dans le ciel à sa couleur rouge très prononcée.

Jupiter. — La surface de cette planète est sillonnée de bandes alternativement claires et obscures et sensiblement parallèles au plan de l'écliptique. On y remarque des divisions ou bifurcations dont l'observation a servi à déterminer la durée de la rotation de la planète, qui est de $9^h\,55^m$. L'axe de rotation a une très faible inclinaison sur le plan de l'écliptique.

Le diamètre apparent de Jupiter est en moyenne de 37". Son diamètre réel est de 31000 lieues ou 11 fois $\frac{1}{2}$ à peu près celui de la Terre. Son disque est visiblement elliptique et l'aplatissement est de $\frac{1}{16}$ environ. Son volume est égal à 13000 fois celui de la Terre. Sa masse est $\frac{1}{1050}$ de celle du Soleil.

Jupiter est accompagné, comme on sait, de quatre satellites dont les orbites sont peu inclinées sur le plan de celle de la planète. Les éclipses fréquentes de ces satellites, que l'on voit facilement à l'aide de lunettes d'assez faible dimensions, sont utilisées pour la détermination des longitudes terrestres.

L'éclat de Jupiter est très vif et comparable seulement à celui de Vénus.

Saturne. — La surface de Saturne présente des bandes analogues à celles de Jupiter. La rotation de la planète est difficile à observer; sa durée a été évaluée à $10^h\,30^m$. L'axe est incliné de 60° 50' sur le plan de l'écliptique.

Le diamètre apparent de Saturne est de 18" en moyenne; son diamètre réel est de 28000 lieues ou de 9 fois $\frac{1}{2}$ celui de la Terre; mais sa masse n'est que de $\frac{1}{3512}$ de celle du Soleil, et comme celle de la Terre est $\frac{1}{354936}$, c'est-à-dire seulement 100 fois plus petite, il s'ensuit que la densité de Saturne est environ $\frac{1}{10}$ de celle de la Terre. Saturne a un aspect plus terne que les autres planètes visibles à l'œil nu.

Anneau de Saturne. La planète est entourée d'un anneau circulaire très large et très mince dont les apparences varient depuis celle d'une simple ligne droite lumineuse qui parfois même disparaît tout à fait jusqu'à celle d'un anneau elliptique très ouvert. En regardant attentivement cet anneau on remarque qu'il se

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

subdivisé en deux parties concentriques. On a reconnu en outre, dans ces derniers temps, la présence d'un anneau intérieur obscur mais transparent. Pour que ces anneaux se maintiennent à la distance où ils se trouvent de la planète, il faut qu'ils soient animés d'un mouvement de rotation dans leur plan; les observations d'Herschel s'accordent à cet égard avec la théorie; mais elles n'ont pas encore été vérifiées par d'autres observateurs.

Le diamètre apparent extérieur de l'anneau est de 40"; sa largeur est de 6" environ et celle de l'anneau obscur de 2". Son épaisseur est relativement très faible; on l'évalue à moins de 400 Kilomètres.

Les Satellites de Saturne sont au nombre de 8. Quelques uns d'entre eux sont très difficiles à voir à cause de leur petitesse et de l'éclat de la Planète. Leurs distances à celle-ci varient entre 3,50 et 64,36, rayons de la planète.

Uranus. — Cette planète a été découverte en 1781 par Herschel, qui l'annonça d'abord comme une comète; mais le calcul fit reconnaître peu de temps après sa véritable nature par celle de son orbite. On ne voit à sa surface ni bandes ni taches. Son diamètre apparent est de 4", et son diamètre réel est un peu plus de 4 fois ½ celui de la Terre.

Uranus est accompagné de 5 Satellites au moins et peut être de 8. On conçoit que ces Satellites soient encore plus difficiles à observer que ceux de Saturne, même avec les plus puissants instruments. Les mouvements de ces Satellites présentent une anomalie remarquable. Ils paraissent avoir lieu dans le sens rétrograde et dans des plans presque perpendiculaires à celui de l'écliptique.

Neptune. — Cette planète, la plus éloignée du Soleil que l'on connaisse, a été découverte en 1846 à Berlin, par M. Galle, sur les indications de M. Le Verrier. Son diamètre apparent est de 2"7, et son diamètre réel un peu moins de 4 fois ½ celui de la Terre.

Elle a un Satellite qui a été découvert par M. Lassell.

Planètes ultra-zodiacales, comprises entre Mars et Jupiter. La découverte de la première de ces planètes (Cérès) date du premier jour du Siècle actuel; elle fut faite à Palerme par Piazzi.

De 1802 à 1807, trois autres petites planètes furent découvertes (Pallas, et Vesta) par Olbers, et (Junon) par Harding.

Olbers avait institué des observations dans le but de trouver d'autres planètes dont il soupçonnait l'existence dans la même région; mais ces observations étant restées plusieurs années sans succès, ce plan fut abandonné. Il fut heureusement repris par M. Hencke de Driessen, qui employa dans ces recherches les cartes célestes détaillées publiées par l'Académie de Berlin, et comprenant toutes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les étoiles jusqu'à la 9e grandeur dans une zône qui s'étend à 15° de part et d'autre de l'équateur. M. Hencke découvrit effectivement ainsi, en 1845, une 5e petite planète. A partir de cette époque et jusqu'à ce jour, les Astronomes de tous les pays, en suivant la même voie, sont parvenus à découvrir un grand nombre de ces astéroïdes. (1)

---

(1) Les limites imposées à ce cours nous ont obligé à passer très rapidement sur la théorie des planètes et sur les détails qui se rapportent à leur constitution physique. Les ouvrages les plus intéressants à consulter sur ces différents sujets sont le Tome V de l'Astronomie physique, de M. Biot; l'Astronomie populaire, d'Arago; le Cosmos, de Humboldt; les Outlines of Astronomy, de Sir. J. Herschel, et le Solar System, de M. Kind. On trouvera dans les mêmes ouvrages et dans les Comètes, de M. Kind, tout ce qui se rapporte à l'Astronomie cométaire dont nous n'avions pas à nous occuper ici.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Troisième Partie.

Géodésie.

Chapitre Premier.

Enumération des principales opérations géodésiques.

Opérations préliminaires. – Reconnaissances du terrain. – Etablissement des signaux.
(Voy. les Pl. 18 et 20 du Portefeuille)

Avant-Propos. – Cette dernière partie du Cours comprend la construction des canevas de grandes cartes topographiques, ou, plus généralement, la détermination de position géographique à la surface du globe et l'étude de la figure de la Terre.

Les mesures géodésiques ont fourni à l'Astronomie sa principale unité de longueur qui est le rayon de l'équateur terrestre. En prouvant l'aplatissement de la Terre, ces mesures ont justifié l'explication que Newton avait donnée du phénomène de la précession et ont indiqué en même temps la cause de la nutation et celle de la variation de l'intensité de la pesanteur avec la latitude; enfin, on y a puisé l'unité de longueur conventionnelle appelée le mètre, qui est la base de notre Système actuel de poids et mesures.

Une valeur déjà assez exacte du rayon terrestre due à l'astronome français Picard, a encore permis à Newton de vérifier la loi de l'attraction universelle au moment où, trompé par une fausse mesure, il était sur le point de l'abandonner.

Tels sont les principaux services que la Géodésie a rendus à l'Astronomie. D'un autre côté, nous savons que l'on détermine les positions géographiques au moyen d'observations astronomiques. L'Astronomie et la Géodésie ont donc une relation intime, et l'on peut même les considérer comme deux branches d'une même Science qui a été la source de la plupart des perfectionnements apportés dans les temps modernes à la Géographie physique et à la navigation.

Pour déterminer la grandeur du rayon de la Terre, supposée sphérique, il suffirait de mesurer la plus courte distance de deux points assez éloignés dont les positions géographiques seraient connues. La résolution d'un triangle sphérique qui aurait pour sommets ces deux points et le pôle donnerait l'amplitude de l'arc; d'où l'on conclurait aisément le rayon de la Sphère.

Mais la détermination des longitudes, devenue très précise au moyen des signaux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

électrique ; ne l'était pas à l'époque où ont été entrepris les grands travaux géodésiques, et la méthode précédente incommode à appliquer, même à présent, eût été alors tout à fait impraticable. D'ailleurs, la Terre n'étant pas sphérique, on n'aurait obtenu ainsi que la valeur d'un rayon de courbure moyen entre ceux des points considérés.

En supposant que la Terre soit terminée par une surface de révolution autour de son axe de rotation, il suffit, pour en connaître la figure, de déterminer celle de son méridien. On parvient à ce dernier résultat en mesurant plusieurs arcs de méridien à de latitudes éloignées ; la différence de latitude des points extrêmes de chaque arc donne l'angle des normales en ces points ; d'où l'on déduit les rayons de courbure moyens du méridien aux différentes latitudes, et par suite sa forme et ses dimensions.

La longueur des arcs s'obtient avec une précision supérieure à celle avec laquelle on peut observer les latitudes, car l'erreur que comporte leur mesure ne dépasse pas un petit nombre de mètres pour 1000 Kilomètres, tandis que celle de latitude peut atteindre et dépasser 1", qui correspond à un arc terrestre de 31^m environ. Comme l'erreur de latitude est indépendante de la longueur de l'arc, il y a évidemment avantage à employer de grands arcs.

La mesure des arcs, bien que susceptible d'une grande précision, est une opération extrêmement délicate ; elle peut se faire soit en portant successivement une mesure de longueur dans une direction convenablement jalonnée, soit par des triangulations. Depuis le 17e siècle, cette dernière méthode a été employée à peu près exclusivement.

Les Anciens nous ont laissé quelques mesures d'arcs qui, faute d'instruments convenables ne pouvaient pas avoir une grande exactitude. D'ailleurs ces mesures nous sont parvenues exprimées en unités dont la valeur est incertaine.

La première mesure exacte que nous puissions citer est celle de Fernel, médecin et Astronome français, qui mesura la route de Paris à Amiens (1), en comptant, à l'aide d'un mécanisme le nombre de tours de roue de sa voiture. Il trouva ainsi, pour un arc de 1° à la latitude de 49 à 50°, 57070 toises de Paris, nombre qui, par un hasard heureux, est très près de la vérité.

Picard trouva ensuite pour le même arc, et par des procédés infiniment plus précis 57060^T et Lacaille 57074^T.

Le Géomètre Hollandais Snellius, le premier qui ait employé les triangulations, avait trouvé auparavant pour l'arc de 1° le nombre beaucoup trop faible 55021^T, et l'Anglais Norwood 57424^T, qui est un nombre trop fort ; c'est en se servant de ce

---

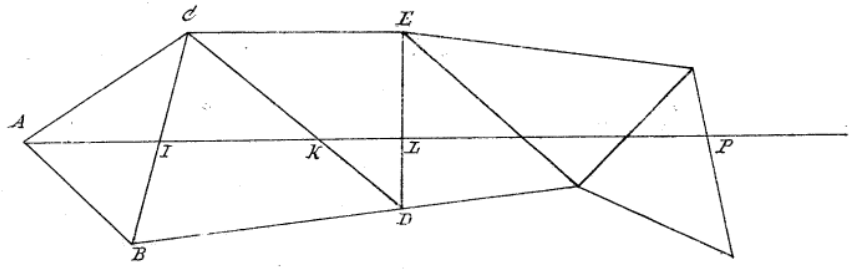
(1) Cette route est très sensiblement en ligne droite et dirigée du Sud au Nord.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dernier résultat, pour calculer la quantité dont la Lune tombe vers la Terre dans l'unité de temps, que Newton avait été conduit à douter de la simplicité de la loi de la gravitation universelle.

On ne connaît en fait de détermination précise résultant d'une mesure directe, que celle des Astronomes anglais Mason et Dixon, faite en Amérique vers le milieu du siècle dernier.

Principes de triangulation. — On prend un certain nombre de stations $B\,C\,D\,E$ disposées de part et d'autre de l'arc qu'il faut mesurer et qui passe par le point A. On considère ces stations comme des sommets de triangles dont on mesure tous les angles; on mesure également avec une grande précision l'un des côtés, $A\,B$ par exemple, et l'on en conclut tous les autres par le calcul. Si l'on a en outre le moyen de déterminer l'angle $P\,A\,B$ de la méridienne avec le côté $A\,B$, on pourra résoudre le triangle $A\,B\,I$, puis $C\,I\,K$, puis $K\,D\,L$, et l'on obtiendra successivement les arcs de méridien $A\,I$, $I\,K$, $K\,L$, &c.



Il en résulte que les sommets auxiliaires peuvent encore servir de points de repère pour construire la carte du pays, et réciproquement, les opérations destinées à la construction des cartes fournissent des éléments pour l'étude de la figure de la Terre.

Nous avons supposé les triangles $A\,B\,C$, $B\,C\,D$, &c rectilignes; ils sont en réalité sphériques. Nous verrons bientôt comment on y a égard dans le calcul.

Forme des triangles. — On doit choisir les sommets de telle sorte que les triangles soient aussi rapprochés que possible de la forme équilatérale; car c'est alors qu'une même erreur sur les angles produit la moindre erreur sur les côtés; cela est facile à prouver.

Dimensions des côtés. — La grandeur des côtés dépend de celle des instruments avec lesquels on mesure les angles. En France, on a employé des cercles de $0^{m},35$ à $0^{m},45$ de diamètre et les triangles avaient des côtés de 40 à 50 mille mètres. En Angleterre où l'on a fait usage de cercles qui avaient jusqu'à 1^{m} de diamètre, on pouvait donner de plus grandes longueurs aux côtés.

Triangles de divers ordres. — Dans les grandes triangulations destinées à la construction des cartes géographiques, on dirige ordinairement des chaînes de triangles

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

suivant des méridiens et des parallèles, et l'on recouvre ensuite de triangles les espaces compris entre ces chaînes : c'est la triangulation du premier ordre. Sur les côtés de ce premier réseau, on appuie d'autres triangles qui forment la triangulation du 2e ordre ; enfin sur l'ensemble de tous ces côtés, on établit la triangulation du 3e ordre, destinée à fournir des points de repère multipliés pour la Topographie.

Les bases que l'on mesure ont généralement une longueur beaucoup moindre que celle des triangles. Dans les opérations de la méridienne de France, on a mesuré deux bases, l'une près de Melun, de 11842m,15, et l'autre près de Perpignan, de 11706m,40. Pour la carte de France, les Ingénieurs géographes ont mesuré cinq autres bases dans les voisinages des localités suivantes : Brest (10526m,91), Bordeaux (11119m,08), Aix (8066m,65), Ensisheim (Alsace) (19044m,40), Combes (Landes) (12220m,03).

Ensemble des opérations géodésiques. — Les opérations dont se compose la triangulation se font dans l'ordre suivant :

1° Reconnaissance du terrain — Choix des stations. — Établissement des signaux. — Formation de chaînes de triangles dans le sens des méridiens et dans le sens des parallèles, reconnaissance des bases.

2° Mesure d'une base. — Triangles de jonction.

3° Observation des angles horizontaux et verticaux ; calculs provisoires ; réductions ; calculs définitifs des triangles en partant de la base mesurée.

4° Mesure des bases de vérification aux extrémités des chaînes.

5° Achèvement de la triangulation du premier ordre, dans l'intérieur des quadrilatères formés par les chaînes.

6° Observations astronomiques de latitudes et d'azimuts en différentes stations choisies généralement aux nœuds des chaînes.

7° Calcul des coordonnées géographiques de tous les sommets du 1er ordre.

8° Choix d'un système de projection — Division de la carte en feuilles. — Tracé des lignes de projection — Placement des points du 1er ordre par latitude et longitude.

9° Triangulation du 2e et du 3e ordre.

10° Détermination des altitudes dont les observations et les calculs marchent d'ailleurs avec ceux relatifs aux triangles.

Reconnaissance du terrain. — Choix des Stations. — On fait une reconnaissance générale du terrain pour déterminer les points de Station ; dans ce but il faut se transporter immédiatement aux lieux les plus élevés de la contrée et sur des édifices qui, par leur position et leur construction, pourraient être adoptés comme observatoires. A mesure qu'on détermine les Stations, s'il n'y a pas de monuments propre à servir de signal, on en fait construire en charpente.

Des signaux — Les signaux doivent être parfaitement stables. — Il est rare que les monuments existants conviennent bien. — Les clochers élancés disparaissent

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

quand on s'en éloigne et leurs flèches peuvent être agitées par le vent ; les monuments plus fixes et plus apparents, comme les tours, les donjons, ne sont pas éclairés de la même manière aux différentes heures du jour, et présentent ainsi des phases qui rendent difficile le pointé exact de la ligne du milieu ; on peut, il est vrai, corriger les observations ; mais il vaut mieux éviter cette correction quand on le peut.

Les signaux adoptés en France sont des pyramides quadrangulaires revêtues de planches ; le prolongement du poinçon de la charpente sert de point de mire et porte un tronc de pyramide renversé destiné à rendre le sommet plus distinct et le pointé plus précis. Dans l'intérieur on suspend un fil à plomb au moyen duquel l'observateur peut placer son instrument exactement dans la verticale du point de mire. Dans les pays boisés et plats, ces signaux doivent quelquefois recevoir des dimensions considérables ; l'instrument est alors posé sur des pièces de charpente indépendantes de celles qui supportent la plate forme où stationne l'observateur.

Les meilleurs signaux sont de solide construction en maçonnerie comme celles que les Anglais ont employées dans l'Inde.

Il importe que les signaux soient parfaitement visibles de toute la station environnante. Ils peuvent se projeter sur le ciel ou sur le terrain en arrière. Dans le premier cas ils sont vus par vision négative ; c'est la meilleure condition. Dans les reconnaissances, on peut juger facilement si les signaux que l'on place seront vus de cette manière ; pour cela, on prend une distance zénithale sur la station précédente ; on vise ensuite de l'autre côté du signal tangentiellement au terrain et on prend une seconde distance zénithale ; si la somme des deux distances dépasse 180°, l'objet sera vu par vision négative.

Dans la mesure de la méridienne de France, lorsque les signaux ne se détachaient pas assez bien, on a eu recours aux observations de nuit qui se font en pointant sur des réverbères ou des miroirs paraboliques. Mais ce procédé présente des inconvénients à cause des réfractions extraordinaires, et il est bien préférable d'employer comme on l'a fait à l'étranger, l'appareil désigné sous le nom d'héliotrope, qui permet d'observer de jour et procure une excellente pointé.

L'héliotrope de Gauss, tel qu'on le construit actuellement, se compose d'une lunette assez forte montée sur un axe à peu près vertical autour duquel elle peut faire le tour de l'horizon ; cet axe est lui-même engagé dans une colonne supportée par trois vis calantes qui servent à élever ou à abaisser l'axe optique de la lunette et à la diriger sur le point où l'on veut envoyer les rayons solaires. En dessous de l'objectif se trouve disposé un système de deux miroirs plans, perpendiculaires entre eux, et dont l'intersection commune est perpendiculaire à l'axe optique de la lunette. En faisant tourner le système des miroirs autour de cette intersection, de manière à faire pénétrer dans la lunette l'image du soleil réfléchi à la surface de l'un des miroirs, il est évident que l'autre surface enverra une seconde image dans le prolongement de l'axe optique de la lunette, et qui sera par conséquent visible du point de l'horizon sur lequel la lunette

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aura été d'abord dirigée.

Les signaux héliotropiques sont visibles à de distances énormes et procurent les meilleurs pointés. On en a fait usage en Allemagne, en Russie, en Angleterre, en Espagne, dans l'Inde, &c.

Chapitre II.

Mesure des bases.

(Voy. la Planche 17 du Portefeuille).

La mesure des bases exige une précision extrême; une erreur sur la base se reproduit sur les côtés du triangle et sur les chaînes proportionnellement à leur longueur.

On a d'abord employé des règles de bois. C'est ainsi que les Académiciens français Bouguer, La Condamine et Godin ont mesuré la base qui a servi à calculer le degré au Pérou. Les règles de bois étaient étalonnées chaque jour sur une règle en fer qui avait, à la température de 13° Réaumur, la longueur d'une toise de Paris. Une copie exacte de cette toise, rapportée par Bouguer, a servi depuis d'étalon dans toutes les mesures de bases sous le nom de Toise du Pérou.

On a généralement abandonné les règles en bois, qui sont sujettes à se déjeter et dont la dilatation trop irrégulière serait difficile à calculer. La plupart des mesures de bases a été exécutée au moyen de règles métalliques.

Lorsqu'on emploie plusieurs règles, portées bout à bout, voici en général quelles sont les principales opérations dont se compose la mesure d'une base:

Etalonner les règles sur la Toise du Pérou ou sur un type analogue et déterminer les coefficients de dilatation des métaux dont elles sont composées pour la correction des variations de température; porter les règles bout à bout sans choc; les placer exactement sur le même alignement, ou si on les dévie, ce qui donne une base brisée, mesurer la déviation les placer horizontalement ou mesurer leur inclinaison. Il y a encore des dispositions à prendre à la fin de chaque journée, et quand on arrive à la fin d'une base. Enfin la longueur mesurée doit être réduite à ce qu'elle serait au niveau de la mer.

La longueur des règles est comptée d'un bout à l'autre ou entre deux traits marqués près de leurs extrémités; les premières, où les règles à bouts s'étalonnent au moyen du comparateur, et les secondes, ou règles à traits, au moyen de microscopes établis sur des supports invariables.

Règles de Borda. — Ces règles, employées à la mesure des bases en France

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Sont au nombre de quatre; elles sont en platine, à bouts, et ont été comparées à la toise de fer du Pérou, qui est également une règle à bouts.

La longueur normale de la toise du Pérou est celle que prend cette règle à la température de 13° Réaumur ou de 16°25 centigrades.

Les résultats de la comparaison pour les quatre règles ont été les suivants:

Règle N°1 (module) à 17°6 = 2 fois la longueur normale de la règle du Pérou;
N°2 à 0° = N°1 − 0,2 partie,
N°3 " = N°2 − 0,4 "
N°4 " = N°3 − 0,4 "

Les parties à l'aide desquelles sont exprimées ces différences de longueur, sont des divisions de règle dont la valeur sera indiquée ci-après:

On sait que la longueur d'une règle métallique étant L à la température $t°$, sa longueur L' à $t'°$ sera

$$L' = L + \alpha (t' - t),$$

α désignant le coefficient de dilatation du métal. Dans le but d'évaluer la température, ou du moins de tenir compte des effets de sa variation, la règle de Borda est formée de deux lames superposées, l'une en platine, qui est la règle proprement dite, et l'autre en cuivre, plus courte de 6^{lig} que la première. Les coefficients de dilatation de ces deux métaux sont:

Pour le platine .... $\alpha = 0,0000085655$ pour 1° centigrade
Pour le cuivre .... $\alpha' = 0,0000187785$ "

La dilatation relative ... $0,0000102130$ est donc encore un peu supérieure à celle du platine.

La règle de cuivre fixée par l'une de ses extrémités à celle de platine, peut glisser librement par son autre extrémité. Les dilatations relatives sont rendues sensibles au moyen de divisions tracées sur une réglette portée par la règle de platine et engagée dans une coulisse pratiquée dans la règle de cuivre sur le bord de laquelle est tracé un vernier.

Ces divisions sont des $\frac{1}{20\,000}$ de la longueur de la règle et le vernier permet d'évaluer des $\frac{1}{200000}$. La dilatation relative étant comme, on aurait pu, par les lectures successives du vernier, déterminer à chaque instant la température de la règle de platine et en conclure ensuite la longueur; mais il était plus simple de calculer immédiatement l'allongement de la règle de platine d'après le nombre des divisions parcourues par le même vernier; et c'est ce que l'on a fait de la manière suivante:

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Par des expériences spéciales on avait reconnu que pour chaque degré du thermomètre métallique, c'est-à-dire pour une partie dans le vernier avancait, la règle de platine s'allongeait de 0m,9245 ; on avait trouvé en outre qu'à 0° la moyenne des lectures faites sur les verniers des quatre règles était le nombre 330m,8. Si l'on désigne par p ce nombre et par P la moyenne des lectures faites à une température quelconque

$$(P - p) \times 0,9245 \times \frac{L}{200000},$$

serait la correction à ajouter à la longueur de chaque règle, de sorte que pour n règles on aurait

$$n\,(P-p) \times \frac{0,9245}{200000}\, L,$$

L étant la moyenne des 4 règles à 0° ; mais comme on devait tout rapporter à la toise du Pérou, prise à la température de 16°,25 centigrades, on an module (Règle X°1) pris à la température de 17°,6, il fallait en outre savoir à quoi correspondait le degré du thermomètre métallique ; des expériences très délicates montrèrent que 23m,16 de ce thermomètre correspondaient à 1° centigrade, de sorte qu'on pouvait déterminer le nombre auquel les zéros des verniers des 4 règles devaient correspondre en moyenne à la température 0°. Soit p' la moyenne correspondante à 17°,6 l'excès de la moyenne P sur ce nombre, p' donnerait le coefficient de la correction dans la formule :

$$x = (P - p')\, 0,9245 \times n \times \frac{L}{200000},$$

la longueur de la règle moyenne résultant des relations de la page 271.

Pour éviter les chocs qui pourraient se produire en plaçant les règles bout à bout, on laisse entre elles un petit intervalle que l'on mesure à l'aide d'une languette glissant dans une coulisse que chacune des règles de platine porte à son extrémité. Ces languettes sont divisées en parties qui sont des $\frac{1}{20000}$ de la longueur de la règle, et au moyen de verniers on lit les $\frac{1}{200000}$ et l'on évalue les $\frac{1}{400000}$, ce qui correspond à peu près à un millième de millimètre. La longueur des languettes est ramenée également à la température de 17°,6.

En ajoutant les languettes aux quatre règles, on a ce qu'on appelle une portée.

On évite la flexion des règles en les faisant reposer sur de fortes madriers en bois portés par des trépieds en fer ; ces trépieds sont munis de vis calantes qui reposent elles mêmes sur des semelles en bois. Les madriers supportent en outre des toits destinés à garantir les règles et surmontés de petites tiges verticales placées à leurs deux extrémités destinées à faciliter l'alignement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour empêcher les règles de charrier sur les madriers, elles y sont maintenues au moyen de brides et de guides qui ne s'opposent pas d'ailleurs à leur libre dilatation.

Les opérations devant durer assez longtemps (la mesure de la base de Melun a exigé 45 jours), afin de pouvoir reprendre chaque matin la mesure exactement au point où l'on était arrivé la veille, on enfonçait en terre un piquet dont la tête était ensuite recouverte d'une lame de plomb sur laquelle on projetait l'extrémité de la dernière règle posée, au moyen d'un fil à plomb. A la fin de opération, on tenait compte de la demi épaisseur du fil à plomb aux deux extrémités de la base.

Les deux extrémités de la base sont marquées sur des bornes ou termes en pierre de taille (granite, marbre, &c.) dans lesquelles sont encastrés des cylindres de bronze (Voy. la fig. 12 du portefeuille); comme la longueur de la base ne contient pas un nombre exact de règles, il reste encore une mesure assez délicate à effectuer en arrivant au second terme.

Base brisée. — Lorsque le terrain sur lequel on opère ne permet pas de se diriger exactement en ligne droite, on peut mesurer la base en plusieurs parties que l'on projette sur la ligne qui passe par les deux termes. Cette circonstance s'est présentée pour les deux bases de Melun et de Perpignan, dont les emplacements avaient été choisis sur des routes offrant un terrain solide et uni; mais dont les inflexions obligèrent à se dévier. La formule de réduction à employer est d'ailleurs très simple.

Réduction des règles à l'horizon. — Soit L la longueur de la règle, θ son inclinaison sur l'horizon, la correction sera

$$L - L' = x = 2L \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} L \theta^2 \sin^2 1''$$

en supposant θ exprimé en minutes. Cette formule doit être réduite en Table, ainsi que celle qui servirait à obtenir la différence de niveau dN entre les deux extrémités d'une règle.

Réduction de la base au niveau de la mer. — Pour opérer cette réduction il est suffisamment exact de prendre, pour la hauteur moyenne des règles, la moyenne des altitudes des deux termes.

Soit h cette altitude moyenne; ρ le rayon de courbure, ou, avec une exactitude suffisante, le rayon moyen; B la longueur de la base; B' la longueur réduite, on aura:

$$B' = \frac{\rho}{\rho + h} B$$

et pour la correction $\qquad B - B' = B \left(\frac{h}{\rho} - \frac{h^2}{\rho^2} + \frac{h^3}{\rho^3} \cdots \right)$

Le 1er terme suffit généralement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Modèle du Registre qui sert à l'inscription de tous les éléments de la mesure d'une base avec la règle de Borda

N.os des Règles	Therm. métallique	Sanguette	Nivean vers le 1.er terme	Nivean vers le 2.e terme	Inclinaison double	Réduction à l'horizon	dN +	dN −	Observations.
1									
2									
3									
4									
1									

Calcul de la base au moyen des éléments contenus dans ce registre. — On ajoute avec leurs signes:

1.° Le double du nombre des règles posées sur le terrain . . . . . +
2.° La somme des sanguettes réduite à la température de 17°,6 . . . . . +
3.° La collimation du zéro des sanguettes . . . . . +
4.° La réduction à l'horizon . . . . . −
5.° La réduction au niveau de la mer . . . . . −
6.° La réduction des règles à la température de 17°,6 à laquelle le module en égal à la double toise (il suffit d'appliquer à toute la réduction due à la température moyenne des observations) . . . . . −

Cette somme donne la base exprimée en toises. On multiplie par 1.m,949063 pour l'avoir en mètres.

Erreurs à craindre — Les erreurs qui affectent la mesure d'une base sont de deux sortes:

1.° Les erreurs constantes ou celles qui se reproduisent à chaque opération partielle, telle que l'erreur d'étalonnage et celle commise sur la valeur du coefficient de dilatation.

2.° Les erreurs accidentelles qui se détruisent en partie; telles que l'erreur de division et de lecture des sanguettes — L'erreur sur la lecture de l'inclinaison — L'erreur d'alignement [1] — L'erreur sur la température.

Les premières sont celles qui sont le plus à craindre.

Evaluation du degré de précision. — L'étalonnage étant fait avec soin, l'erreur ne doit pas dépasser 0.mm,01; pour une base de 10000.m comprenant 2500 règles, l'erreur serait

(1) Cette erreur n'est accidentelle qu'autant qu'on applique à toutes les règles, la correction moyenne d'alignement, comme l'a fait Delambre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de 25 millimètres.

L'erreur sur le coefficient de dilatation doit être de même ordre ; soit 25 millim. d'erreur.

La lecture de languettes faite sur le terrain, en lui attribuant $0^{mm},02$ pour maximum, cette erreur multipliée par $\sqrt{2500} = 50$, donnerait 1 millim. seulement.

L'erreur d'inclinaison et de défaut d'alignement serait très faible. — L'erreur relative à la détermination de la température est difficile à exprimer.

On peut donc admettre que le maximum de l'erreur s'éloignerait peu de

$$\frac{50^{mm}}{10000} = \frac{1}{200000} \quad (1)$$

En allemagne, la discussion de quelques mesures a conduit à supposer que cette erreur pouvait être réduite à $\frac{1}{500\,000}$ et même à $\frac{1}{800\,000}$.

Pour avoir une vérification immédiate, si le temps ne permet pas de recommencer l'opération, on doit diviser la base en deux ou trois segments que l'on évalue au moyen d'une chaîne de triangles dont les angles sont observés avec un soin particulier.

Les opérations de la mesure d'une base et les calculs varient avec la nature de l'appareil. Toutefois, ce qui a été dit sur la règle de Borda suffit pour qu'on puisse se rendre compte des différents systèmes dont on fait usage.

A défaut d'instruments de précision, on se sert d'une chaîne d'arpenteur, ou de règles en sapin imprégnées d'huile et vernissées. Nous verrons même plus loin que l'on peut se passer, dans quelques circonstances, de mesurer une base, les dimensions du sphéroïde terrestre étant supposées déjà connues avec une exactitude suffisante.

Après la description détaillée de la règle de Borda, nous nous bornerons à indiquer sommairement les principaux appareils dont on a fait usage à l'étranger.

En Angleterre : le Capitaine Mudge s'est servi de madriers de sapin et de tubes de verre de 20 pieds.

Le Major Roy a opéré avec une chaîne d'acier de 100 pieds de longueur, convenablement tendue.

Le Major Général Colby, en Irlande, et le Colonel Everest, dans l'Inde, ont employé des règles bi-métalliques à compensation. La distance des points invariables de deux

(1) On trouvera dans la 1ère partie de la Description géométrique de la France, par M. le Colonel Puissant, page 471 et suivantes, une comparaison des bases mesurées et de leurs longueurs, déduites les unes des autres, qui permettra d'apprécier le degré d'exactitude des triangulations françaises.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

règles consécutives en mesurée par un système de microscopes accouplés et dont la distance est elle même compensée. Le principe de cet appareil est dû à l'horloger français Berthoud.

En Russie, on s'est servi d'un système à languettes analogues à celles des règles de Borda; puis on y a substitué un levier coudé, dont l'un des bras servant d'aiguille, indique sur un cadran, l'intervalle de deux règles consécutives. Cet appareil dû à M. Struve, a été employé en Amérique.

En Prusse, on a fait usage de règles bi-métalliques en zinc et en fer forgé, construites d'après les idées de Bessel. Dans ce système, la dilatation relative des règles et la distance de deux règles consécutives sont données par l'interposition de coins de verre gradués (imaginés par Reichenbach) entre deux biseaux d'acier dont les arêtes sont, l'une horizontale, l'autre verticale. L'appareil de Bessel a été adopté en Danemarck et en Belgique. On a remarqué que, par suite de changements survenus dans l'état moléculaire des métaux dont ces règles sont composées, il est indispensable de les étalonner toutes les fois qu'on veut les employer à une mesure nouvelle; leur coefficient de dilatation ne conservant pas une valeur constante.

Kassler, aux Etats-Unis, et le Major Porro, en Piémont, ont fait usage d'un système de microscopes isolés, sous lesquels on vient placer les extrémités d'une règle marquées par des fils croisés, ou par des traits en que l'on transporte successivement sur la direction de la base. L'appareil du Major Porro, légèrement modifié, a été employé par les Officiers du Dépôt de la Guerre à la mesure d'une base dans les environs d'Alger, et par le P. Secchi, Directeur de l'Observatoire de Rome, à la vérification de la base du P. Boscovich sur la voie Appienne.

Enfin le Gouvernement Espagnol a fait construire à Paris, par M. Brunner, une magnifique règle en platine, qui a servi à la mesure d'une base près de Madrid. Les résultats auxquels sont parvenus les officiers Espagnols, dans la campagne de 1858, sont d'une exactitude remarquable.

L'étalonnage de toutes les règles employées à l'étranger a été fait sur la toise du Pérou, sur la règle N°1 de Borda, ou sur des copies authentiques de ces types. Cette opération en elle même une des plus importantes et des plus délicates à exécuter.

On a émis l'opinion, surtout à l'étranger, que les petites bases étaient préférables aux grandes. Les partisans de cette opinion donnent pour raison que la mesure d'une petite base exige moins de temps, et par conséquent une attention moins soutenue que celle d'une grande base; qu'on a moins à redouter des changements considérables de température pendant l'opération; enfin qu'il vaut mieux mesurer deux fois la même base que d'en mesurer une plus longue une seule fois.

La base mesurée près de Kœnigsberg, par Bessel, n'a que 934^T, ou $1822^m,33$;

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le Général Baeyer a mesuré depuis deux autres bases en Prusse, l'une de 1198^{T},72, ou 2336^{m},35, près de Berlin, et l'autre de 1094^{T}, près Bonn.

En France, on a cherché, au contraire, à mesurer les plus grandes bases possible; on a vu précédemment que la plus petite, celle d'Aix, avait 8066^{m}, et que la plus grande, celle d'Ensisheim, dépassait 19000^{m}.

Pour rattacher les bases aux côtés de triangulation, qui ont généralement de beaucoup plus grandes dimensions, on fait une triangulation spéciale, qui doit être dirigée d'après la double condition de conserver aux triangles une forme convenable et d'arriver le plus promptement possible à la dimension des grands côtés.

Chapitre III.

Mesure des angles. — Calcul des triangles.

(Voy. la Pl. 20 du Portefeuille).

Dans les triangulations du 1er ordre, on a employé en France des cercles répétiteurs de 0^{m},35 à 0^{m},42 de diamètre, et chaque angle a été observé par trois séries de vingt répétitions, prises à des heures différentes.

Les angles du 2e ordre ont été observés avec des théodolites de 0^{m},22 de diamètre, par une seule série de dix répétitions.

Ceux du 3e ordre ont été obtenus par une série de 6 répétitions.

Pour réduire à l'horizon les angles du triangle du 1er ordre, et pour calculer les différences de niveau de tous les sommets, on a mesuré les distances zénithales des différents signaux.

Pour le premier ordre, les observations ont été faites par une série de dix répétitions; pour le deuxième et le troisième ordre, par une série de six répétitions.

Les réfractions les plus régulières et les plus faibles ayant lieu vers le milieu de la journée, on choisit cette époque pour l'observation des distances zénithales et on mesure les angles compris entre les signaux le matin et le soir. On a dû renoncer à observer de nuit les distances zénithales à cause des anomalies considérables que présentent les réfractions.

Avant de calculer les triangles, on peut avoir à faire subir aux angles une ou plusieurs des corrections que nous allons indiquer.

Réduction à l'horizon. — Pour réduire à l'horizon des angles observés dans le plan

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des objets, on peut se servir de deux moyens; l'un consiste à employer des instruments, tels que le théodolite, qui donnent eux-mêmes cette réduction; l'autre à faire subir une correction à chaque angle observé. On exprime la différence entre cet angle et l'angle réduit en fonction de l'angle observé et des distances zénithales des deux objets. (1)

---

(1). Formule de la réduction à l'horizon. — Pour cela, on part de la formule générale

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

et au lieu de calculer C on cherche la correction qu'il faut faire subir à l'angle observé c. Cette correction étant très petite, on peut négliger toutes les puissances de x supérieures à la 1ère, on a donc

$$C = c + x, \qquad \cos C = \cos c - x \sin c;$$

et si nous posons $a = 90° - \alpha$ et $b = 90° - \zeta$,

on pourra écrire $$\cos c - x \sin c = \frac{\cos c - \sin \alpha \sin \zeta}{\cos \alpha \cos \zeta}$$

Développons les sinus et cosinus des petits angles α et ζ en négligeant seulement les termes du 3e ordre, il viendra:

$$\cos c - x \sin c = \frac{\cos c - \alpha \zeta}{1 - \frac{\alpha^2 + \zeta^2}{2}} = (\cos c - \alpha \zeta \left(1 + \frac{\alpha^2 + \zeta^2}{2}\right)$$

d'où $$x = \frac{\alpha \zeta - \frac{\alpha^2 + \zeta^2}{2} \cos c}{\sin c};$$

en négligeant toujours les termes d'un ordre supérieur au deuxième, l'expression précédente montre d'ailleurs que x est du 2e ordre par rapport à α et ζ, et que, par conséquent on a pu négliger x^2 dans le développement de

$$\cos (c + x)$$

On trouvera enfin:

$$x = \frac{\alpha \zeta (\sin^2 \tfrac{1}{2} c + \cos^2 \tfrac{1}{2} c) - \frac{\alpha^2 + \zeta^2}{2} (\cos^2 \tfrac{1}{2} c - \sin^2 \tfrac{1}{2} c)}{2 \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} c} \sin 1'' = \left(\frac{\alpha + \zeta}{2}\right)^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c \sin 1'' - \left(\frac{\alpha - \zeta}{2}\right)^2 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} c \sin 1''$$

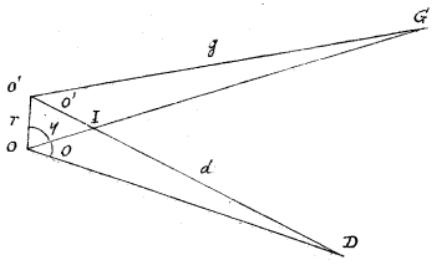
Dans le but d'abréger les calculs, les deux termes de cette formule ont été réduits en Tables. (non exigé)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Lorsqu'on employait le cercle répétiteur, cette correction était inévitable. Maintenant le théodolithe a remplacé généralement le cercle dans les opérations géodésiques, et l'instrument donne les angles réduits à l'horizon.

Réduction au centre de la station. — La correction désignée sous ce nom est nécessaire lorsque l'observateur ne peut pas se placer exactement sur la verticale des sommets des signaux. Soit O l'angle observé; il s'agit de trouver l'angle O', ou plutôt la différence $O' - O$. Or les triangles $O'IG$, OID donnent l'égalité

$$O' + G = O + D;$$



d'où l'on tire

$$O' - O = D - G \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Mais si l'on désigne par y l'angle $O'OG$, et par r la distance OO', les triangles $OO'G$, $OO'D$ fournissent les relations

$$\sin D = \frac{r \sin (O + y)}{d} \quad \text{et} \quad \sin G = \frac{r \sin y}{g};$$

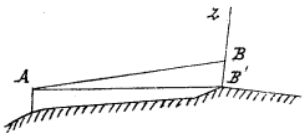
ou comme les angles sont très petits

$$D = \frac{r \sin (O + y)}{d \sin 1''}, \qquad G = \frac{r \sin y}{g \sin 1''}$$

En remplaçant D et G par ces valeurs dans l'équation (1), on trouve la différence $O' - O$. Pour calculer les angles D et G, il faut connaître r, que l'on mesure d'une manière approchée, les angles O et y que l'on observe, enfin les côtés d et g que l'on calcule provisoirement au moyen des angles observés en D et en G.

L'excentricité de la lunette et les phases des signaux aux différentes heures de la journée donneraient lieu à des corrections analogues à la précédente.

Réduction des distances zénithales au sommet du signal. — L'observateur étant placé en B' au pied d'un signal, la distance zénithale $AB'z$ observée diffère de l'angle ABz qui sert dans le calcul de différence de niveau. Il faut donc corriger l'angle $AB'z$ de l'angle $A = ABz - ABz'$, et l'on a évidemment



$$A = \frac{h \sin z}{d \sin 1''}$$

Dans cette formule, h représente la hauteur BB', d la distance AB, et z la distance zénithale observée, que l'on peut employer à calculer le terme de correction.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les angles réduits à l'horizon, au centre de la station et au centre du signal s'appellent les angles réduits.

La somme de ces angles réduits d'un triangle géodésique est généralement supérieure à 180°, parce que ce triangle est sphérique. L'excès sphérique est seulement de quelques secondes; on prend le tiers, et en le retranchant de chacun des angles observés, on a de nouveaux angles auxquels on donne le nom d'angles corrigés. Ces angles servent à calculer les éléments du triangle auxquels ils appartiennent, comme si les triangles étaient rectilignes, et l'erreur que l'on commet en agissant ainsi tombe au dessous de celle qui résulte des erreurs d'observation. On le prouve au moyen du théorème suivant, qui est dû à Legendre.

Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle sphérique, α, ξ, γ les amplitudes des arcs correspondants, enfin A, B, C les angles sphériques opposés respectivement aux côtés a, b, c, on a, d'après la formule fondamentale

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\xi\cos\gamma}{\sin\xi\sin\gamma}.$$

Développons les sinus et cosinus en nous arrêtant aux termes du 4e ordre, il viendra:

$$\cos A = \frac{1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \left(1 - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{24}\right)\left(1 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^4}{24}\right)}{\left(\gamma - \frac{\gamma^3}{6}\right)\left(\xi - \frac{\xi^3}{6}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\xi^2+\gamma^2-\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 - 6\beta^2\gamma^2}{24}}{\xi\gamma\left(1 + \frac{\xi^2+\gamma^2}{6}\right)}$$

ou, en multipliant haut et bas par

$$\left(1 + \frac{\xi^2+\gamma^2}{6}\right)$$

$$\cos A = \frac{\xi^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\xi\gamma} + \frac{\alpha^4+\xi^4+\gamma^4-2\alpha^2\xi^2-2\alpha^2\gamma^2-2\xi^2\gamma^2}{24\xi\gamma r^2}$$

puis en rétablissant le rayon

$$\cos A = \frac{b^2+c^2+a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bcr^2}.$$

Désignons maintenant par A' l'angle correspondant du triangle dont les côtés soient égaux à a, b, c. On sait que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

d'où $$\sin^2 A' = 1 - \cos^2 A' = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2}.$$

En comparant cette expression avec celle de $\cos A$, on verra que

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc \sin^2 A'}{6r^2}.$$

Mais si on désigne par x l'excès très petit de A sur A', on pourra écrire

$$\cos A = \cos (A' + x) = \cos A' - x \sin A';$$

d'où l'on conclut $$x = \frac{bc \sin A'}{6r^2};$$

et en appelant T la surface du triangle rectiligne, laquelle a pour valeur

$$\frac{bc \sin A'}{2},$$

on a $$x = \frac{T}{3r^2}$$

Ainsi $$A = A' + \frac{T}{3r^2},$$

$$B = B' + \frac{T}{3r^2},$$

$$C = C' + \frac{T}{3r^2},$$

Donc $$A + B + C = 180^\circ + \frac{T}{r^2};$$

ou bien, en appelant $\mathcal{E}$ l'excès sphérique

$$\mathcal{E} = \frac{T}{r^2}$$

Mais d'ailleurs on sait que l'excès sphérique a pour expression $\frac{S}{r^2}$, S étant la surface du triangle sphérique. Donc enfin :

$$T = S, \; A' = A - \frac{\mathcal{E}}{3}, \quad B' = B - \frac{\mathcal{E}}{3}, \quad C = C - \frac{\mathcal{E}}{3}.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le théorème de Legendre peut encore s'énoncer de la manière suivante : Etant donné un triangle sphérique dont le côté soit très petit par rapport au rayon de la sphère, si l'on construit un triangle rectiligne qui ait les côtés de même longueur que ceux du triangle sphérique, les surfaces des deux triangles seront très approximativement égales, et les angles du triangle sphérique seront égaux à ceux du triangle rectiligne augmentés du tiers de l'excès sphérique.

Dans le calcul précédent, on n'a réellement négligé que les quantités du 4e ordre et celles d'un ordre supérieur. En effet, quand on développe cos A en fonction de a, b, c, le premier terme négligé soit du 4e ordre ; comme on peut le constater en continuant le développement ; et quand on écrit plus loin

$$\cos A = \cos A' - x \sin A',$$

on néglige les termes en x^2 et par suite les termes du 4e ordre par rapport à $\frac{1}{r}$ puisque l'expression de x contient r^2 en dénominateur. Or si l'on suppose que le côté a d'un triangle géodésique soit de 100 kilomètres, le rayon de la Terre étant approximativement de 6 400 000 m, le rapport

$$\frac{a}{r} = 0,016$$

d'où

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = 0,000004,$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^4 = 0,00000064.$$

D'ailleurs un arc de 1" vaut, en parties du rayon 0,000005 ; la quantité $\left(\frac{a}{r}\right)^3$ est donc comparable à un arc de 1" et ne doit pas être négligée dans les opérations géodésiques, tandis que $\frac{a^4}{r^4}$ est une quantité tout à fait négligeable. Le théorème de Legendre se trouve ainsi justifié.

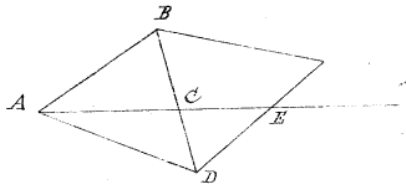
A la vérité, dans les opérations géodésiques, l'excès de la somme des trois angles observés sur deux droits se compose de l'excès sphérique plus de la somme des erreurs sur les trois angles. On a donc

$$A + B + C = 180° + E + e.$$

On n'en prend pas moins le tiers et on le retranche de chacun des angles observés, parce que le calcul des probabilités indique que l'erreur doit être également répartie par tiers. D'où résulte le procédé indiqué plus haut pour passer des angles réduits aux angles corrigés.

On voit qu'il est inutile, pour calculer les triangles de chercher la valeur de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



l'excès sphérique. Mais on en a besoin dans certaines circonstances, par exemple quand on connaît le côté AB d'un triangle géodésique ABC, l'angle CAB de la méridienne avec ce côté, l'angle DBA appartenant aussi au triangle ADB et qu'on veut calculer l'angle en C, nécessaire ensuite pour calculer le triangle DCE.

Or, on a, d'après ce qui précède :

$$\mathcal{E} = \frac{bc \sin A'}{2r^2 \sin 1''}.$$

D'ailleurs
$$b = \frac{c \sin B'}{\sin C'};$$

donc
$$\mathcal{E} = \frac{c^2 \sin A' \sin B'}{2r^2 \sin C' \sin 1''}.$$

Pour calculer ce terme de comparaison, on peut supposer que les angles du triangle rectiligne soient égaux à ceux du triangle sphérique, en sorte que la formule devient

$$\mathcal{E} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2r^2 \sin (A+B) \sin 1''}$$

Comme preuve directe que l'approximation donnée par le théorème de Legendre est toujours suffisante, on peut citer le calcul du Colonel Puissant sur le plus grand triangle géodésique mesuré en Espagne par MM. Biot et Arago. — En cherchant l'un des côtés de ce triangle successivement par les formules de la trigonométrie sphérique, et par les formules de la trigonométrie rectiligne, appliquées aux angles corrigés de l'excès sphérique, M. Puissant a trouvé pour la longueur de ce côté les nombres 82 555^T,64 et 82 555^T,62. Dans ce même triangle, l'excès de la somme des angles observés sur 180° était de 39″,40 et l'excès sphérique calculé directement fut trouvé de 39″,03. Il ne faut pas s'attendre à trouver un pareil accord dans tous les cas; les erreurs dépassent souvent plusieurs secondes.

Quand on répartit également les erreurs sur les trois angles d'un triangle, on altère un peu les tours d'horizon qui ne font plus exactement 360°. En toute rigueur, la répartition des erreurs devrait être faite de manière à satisfaire en même temps aux tours d'horizon et aux triangles sphériques; mais la méthode qu'il faudrait employer serait très longue, et on n'y a recours que dans quelques cas particuliers.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Modèle d'un registre pour le calcul des triangles.

N^os des côtés	Noms des Sommets	Nombre des répétitions	Angles			Calcul des côtés	Côtés en mètres	Renvoi aux N^os des côtés
			Réduits	Sphériques	Corrigés			
			0 "	0 "	0 "		M	
	(S)		. .	. .	. .	l dg ... cl. sin S ... l. sin d		
	(d)		. .	. .	. .	l. s. g ...		
						l. d. g + cl. sin S ... l. sin g		
	(g)		. .	. .	. .	l. s. d		
				180° 1'	180° 0' 0",0			
					= Excès sphérique calculé			
	[.....]				= Erreur			

Chapitre IV.

Calcul des coordonnées géographiques des Sommets d'une triangulation.

Pour rapporter les différents Sommets de la triangulation sur la carte on a continué de calculer soit leur distance à la méridienne et à la perpendiculaire passant par l'observatoire principal, soit leurs coordonnées géographiques. La première méthode a été employée par Cassini ; la seconde est celle qui a été suivie dans la construction de la Carte de France, et nous ne parlerons que de cette dernière.

Nous supposerons que l'on ait déterminé astronomiquement la latitude et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la longitude du sommet de la triangulation pris pour point de départ et l'azimut d'un premier côté passant par ce sommet.

La comparaison d'un assez grand nombre de mesures effectuées à différentes latitudes et que nous rapporterons plus loin, a prouvé que la forme du globe terrestre se rapprochait très sensiblement de celle d'un ellipsoïde de révolution et a permis de déterminer avec beaucoup d'exactitude l'aplatissement, c'est-à-dire le rapport de la différence des deux axes de l'ellipse méridienne au grand axe, ou, ce qui revient au même, l'excentricité de cette ellipse

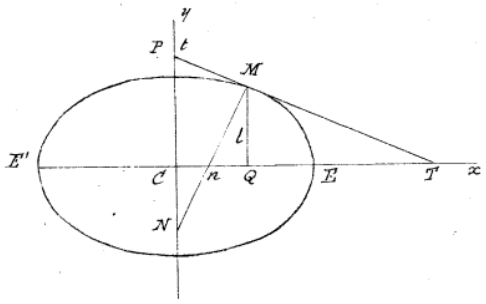
L'aplatissement $\alpha = \dfrac{a-b}{a}$

et le carré de l'excentricité $e^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2}$

Cela posé, nous allons indiquer préalablement plusieurs formules relatives à l'ellipsoïde de révolution, qui nous seront nécessaires pour arriver au calcul exact des coordonnées géographiques, et dont nous aurons également à faire usage pour résoudre les questions relatives à la figure de la Terre.

Formules servant à exprimer différentes lignes de l'ellipsoïde de révolution en fonction de son excentricité, de son demi-grand axe et de la latitude du point de la surface auquel elle se rapporte.

Soient



a le demi grand-axe de l'ellipse méridienne,
b le demi-petit axe,
$N = MN$ la grande normale,
$n = Mn$ la petite normale,
$T = MT$ la tangente,
$l = MnT$ la latitude du point M.

On trouve les formules suivantes en partant de l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes et en remplaçant b^2 par $a^2(1-e^2)$

$$x = \frac{a\cos l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} \text{ rayon du parallèle}; \qquad y = \frac{a(1-e)\sin l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}};$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} \text{ grande normale terminée au petit axe},$$

---

(1) En Géodésie, comme en Astronomie, on désigne simplement sous le nom d'excentricité, le rapport de l'excentricité linéaire de l'ellipse au demi-grand axe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$n = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = N(1-e^2)$$ petite normale terminée au grand axe,

$$T = \frac{a(1-e^2)\operatorname{tg} l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = N(1-e^2)\operatorname{tg} l$$ tangente terminée au grand axe,

$$t = \frac{a\operatorname{cotg} l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = N\operatorname{cotg} l$$ tangente terminée au petit axe,

$$nP = \frac{a(1-e^2)\cos l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = N(1-e^2)\cos l$$ sous normale,

$$PT = \frac{a(1-e^2)\operatorname{tg} l \sin l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = N(1-e^2)\operatorname{tg} l \sin l$$ sous-tangente;

$$Cn = \frac{ae^2\cos l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = Ne^2\cos l;$$

$$CN = \frac{ae^2\sin l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = Ne^2\sin l.$$

Rayons de courbure de l'ellipsoïde. — La grande normale est le rayon de courbure d'une section faite dans l'ellipsoïde par un plan passant par cette normale et perpendiculaire au méridien.

Ainsi $$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}$$ est un des rayons de courbure

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = \frac{N(1-e^2)}{1-e^2\sin^2 l}$$ est celui de la section méridienne.

Ces deux expressions sont donc celles des rayons de courbure dans deux sections principales, et d'après un théorème d'Euler, le rayon de courbure d'une section quelconque suivant l'azimuth A sera

$$R = \frac{\rho N}{\rho\sin^2 A + N\cos^2 A} = N\left(1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2 l\cos^2 A\right)^{-1}$$

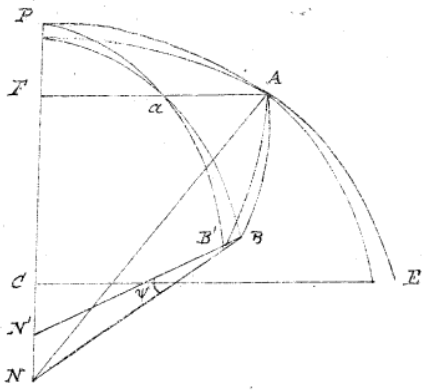
En assimilant le globe terrestre à un ellipsoïde de révolution, et la longueur du demi grand axe ainsi que l'aplatissement ou l'excentricité de l'ellipse méridienne étant déterminés par les mesures dont nous parlerons plus loin, il y avait deux moyens de calculer les coordonnées géographiques des sommets et les azimuths des différents côtés d'une triangulation, soit en considérant des triangles sphéroïdiques tracés à la surface même de l'ellipsoïde terrestre, soit en projetant les sommets sur des sphères osculatrices à cet ellipsoïde. Ce dernier moyen est le plus simple, et c'est celui que nous

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

emploierons.

Les deux rayons de courbure principaux d'un ellipsoïde de révolution en un point quelconque de sa surface sont celui de l'ellipse méridienne et la grande normale. Lorsque l'ellipsoïde a un faible aplatissement, ces deux rayons sont peu différents l'un de l'autre, et une sphère qui a l'un d'eux pour rayon a un contact intime avec l'ellipsoïde. Pour chaque triangle, nous substituerons à la surface de l'ellipsoïde celle de la sphère qui a pour rayon la grande normale, laquelle est évidemment tangente à l'ellipsoïde tout le long d'un parallèle.

Considérons l'ellipse méridienne PAE et menons la normale au point A. La circonférence de cercle qui a son centre en N et pour rayon la grande normale est le méridien de la sphère substituée à l'ellipsoïde qu'elle touche suivant le parallèle AF.



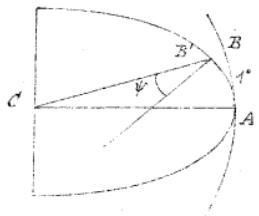
Par la verticale AN du point A, faisons passer un plan qui forme avec le méridien de ce point un angle égal à l'azimut du point B sur l'horizon du point A; ce plan coupera la sphère et l'ellipsoïde suivant deux arcs AB, AB' qui seront tangents en A.

Or, si l'on prend sur le premier une longueur AB égale à celle du côté géodésique donnée par une mesure directe ou comme par le calcul antérieure et qu'on mène par le point B le rayon BN de la sphère le point B' où ce rayon rencontrera l'ellipsoïde sera très voisin de B; l'arc AB' et l'arc AB peuvent par conséquent être considérés comme ayant même longueur [1]. De plus, si par le point B et par l'axe NP on fait passer un plan, on pourra admettre que ce plan contient à la fois le méridien du point B sur la sphère et celui du point B' sur l'ellipse.

Il résulte de là :

---

(1) On trouve, en effet, en calculant les éléments de l'ellipsoïde qu'à l'équateur où la sphère osculatrice se sépare plus rapidement de l'ellipsoïde que dans les autres régions, la distance BB' correspondant à un côté géodésique de 1° n'est que de 6^{m} et la différence des arcs AB, AB' est à peine de 0^{m},04. D'ailleurs le maximum de l'angle ψ pour un côté géodésique de 1° est de 23″; de sorte que les éléments en B et en B' des arcs correspondants ont tout au plus cette inclinaison qui donnerait lieu à une réduction trop faible pour qu'on doive en tenir compte. (Biot, Astr. phys. t. III).



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

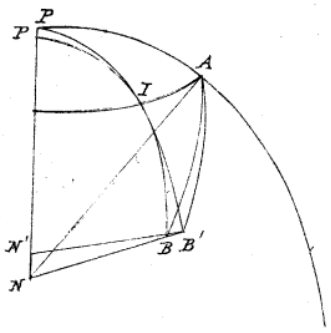
1° Que la différence de longitudes de points A et B calculée sur la Sphère sera la même que celle du point A et B' sur l'ellipsoïde.

2° Que l'azimuth du côté AB sur l'horizon du point B est égal, sans erreur sensible, à celui du côté AB' sur l'horizon du point B'; car l'angle B n'est autre chose que l'angle B' réduit à l'horizon du point B, et les éléments de cette réduction sont si faibles que celle-ci est négligeable; les éléments de réduction ne dépassent pas 23" (d'après la note de la page précédente.

3° Enfin que la latitude comptée sur la Sphère exigent au contraire une correction. En effet, les deux méridiens aB et aB' sont tangents en a sur le parallèle du point A, et aB = aB'; mais la verticale du point B' ou la normale à l'ellipsoïde en ce point diffère de la verticale du point B sur la Sphère, et va rencontrer l'axe en un point N' autre que le point N, l'arc sur l'ellipsoïde étant plus courbé que sur la Sphère. L'angle N'B'N = ψ, qui peut atteindre une valeur de plusieurs secondes, est la correction cherchée, c'est-à-dire ce qu'il faut ajouter à la latitude du point B appartenant à la Sphère pour avoir la latitude du point B' de l'ellipsoïde.

Formule des latitudes. — Calculons d'abord la différence des latitudes sur la Sphère qui a pour rayon la grande normale.

Désignons par l la latitude cherchée et par l_0 celle du point A. Soit en outre u la longueur de l'arc de la Sphère de rayon 1 qui correspond au côté géodésique $AB = K$, c'est-à-dire en désignant par N la grande normale AN, que $u = \frac{K}{N}$, la latitude l pourra être considérée comme une fonction d'une variable dont u serait l'accroissement fini; nous aurons donc, par la série de Maclaurin



$$l = l_0 + \left(\frac{dl}{du}\right) u + \left(\frac{d^2 l}{du^2}\right)_0 \frac{u^2}{1.2} + \cdots\cdots$$

Or, le triangle pAB, dans lequel les côtés pB, pA sont les compléments de latitudes donne

$$\sin l = \sin l_0 \cos u - \cos l_0 \sin u \cos A,$$

et en prenant les dérivées successives

$$\cos l \frac{dl}{du} = -\sin l_0 \sin u - \cos l_0 \cos u \cos A$$

$$\cos l \frac{d^2 l}{du^2} - \sin l \left(\frac{dl}{du}\right)^2 = -\sin l_0 \cos u + \cos l_0 \sin u \cos A.$$

Si l'on fait $u = 0$, il vient :

$$\left(\frac{dl}{du}\right)_0 = -\cos A,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$$\left(\frac{d^2 l}{du^2}\right)_0 = tg\, l_0 \cos^2 A - tg\, l_0 = - tg\, l_0 \sin^2 A.$$

et la formule donne, en se bornant aux deux premiers termes et augmentant d'une unité les indices de l et l_0 qui deviendront respectivement l_1 et l

$$l_1 - l = - u \cos A - \tfrac{1}{2} tg\, l \sin^2 A\, u^2$$

$$l_1 = l = - \cos A \frac{K}{N \sin 1''} - \tfrac{1}{2} tg\, l \sin^2 A \frac{K^2}{N^2 \sin 1''}$$

Pour passer à la différence de latitude comptée sur l'ellipsoïde, remarquons que $IB = IB'$; or

$$IB = N(l_1 - l),$$

et

$$IB' = \rho (l' - l);$$

ou bien $N(l_1 - l) = \rho (l_1 - l)$; d'où $l' - l = \frac{N}{\rho} (l_1 - l)$

l étant la latitude de B' et ρ le rayon de courbure moyen de l'arc IB' ou simplement celui d'une des extrémités de cet arc.

Or, $N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}$ et $\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}$

par conséquent $\frac{N}{\rho} = \frac{1 - e^2 \sin^2 l}{1 - e^2} = (1 - e^2 \sin^2 l)(1 + e^2 + e^4 + \cdots)$

et $l' - l = \left(- \cos A \frac{K}{N \sin 1''} - \frac{1}{2} tg\, l \sin^2 A \frac{K^2}{N^2 \sin 1''} \right) (1 - e^2 \sin^2 l)(1 + e^2 + e^4 + \cdots)$

et en négligeant les termes qui renferment les puissances de e supérieures à la 2e

$$l' - l = \left(- \cos A \frac{K}{N \sin 1''} - \frac{1}{2} tg\, l \sin^2 A \frac{K^2}{N^2 \sin 1''} \right) (1 + e^2 \cos^2 l)$$

Telle est la formule des latitudes employée à la Carte de France. Cependant il est nécessaire d'ajouter qu'il y a lieu de tenir compte de quelques uns des termes négligés dans le développement lorsqu'on veut obtenir la plus grande précision possible. Le 2e volume du mémorial du Dépôt de la Guerre renferme des tables de correction qui donnent à vue les valeurs de ces termes très petits. On a également réduit en table les valeurs des coefficients

$$\frac{1 + e^2 \cos^2 l}{N \sin 1''} = P, \qquad \frac{(1 + e^2 \cos^2 l)\, tg\, l}{2 N^2 \sin 1''} = Q.$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et la formule en comme sous cette forme

$$l' - l = - P K \cos A - Q K^2 \sin^2 A .$$

Formule des longitudes. (1) D'après la remarque que nous avons faite plus haut, il suffira de chercher l'expression de la différence des longitudes des deux points considérés en les supposant rapportés tous les deux sur la sphère qui a pour rayon la grande normale passant par le premier point.

Désignons par L la longitude du point A, par L celle du point B et par l, l', l_1, les mêmes quantités que dans l'article précédent. Le triangle sphérique PAB donne

$$\frac{\sin (L' - L)}{\sin u} = \frac{\sin A}{\cos l_1},$$

d'où en développant le sinus du 1er membre et se bornant à deux termes,

$$L' - L - \frac{(L' - L)^3}{6} = \left(u - \frac{u^3}{6} \right) \frac{\sin A}{\cos l_1},$$

$$L' - L = \frac{\sin A}{\cos l_1} \left(u - \frac{u^3}{6} \right) + \frac{(L' - L)^3}{6}$$

En négligeant le dernier terme on aurait

$$L - L = \frac{\sin A}{\cos l_1} \left(u - \frac{u^3}{6} \right),$$

première valeur approchée que l'on peut substituer dans le 2e membre de l'équation ; celle-ci devient alors, en supprimant les termes qui renferment des puissances de u supérieures à la 3e

$$L' - L = \frac{\sin A}{\cos l_1} u - \frac{\sin A}{\cos l_1} \frac{u^3}{6} + \frac{\sin^3 A}{\cos^3 l} u^3 ;$$

et en remplaçant u par $\frac{K}{N}$ et passant aux angles

$$L' - L = \frac{\sin A}{\cos l_1} \frac{K}{N \sin 1''} - \frac{1}{6} \frac{\sin A}{\cos l_1} \frac{K^3}{N^3 \sin 1''} + \frac{1}{6} \frac{\sin^3 A}{\cos^3 l_1} \frac{K^3}{N^3 \sin 1''}$$

Dans le triangle $B' N N'$ on a

$$\frac{N}{N'} = \frac{\cos l'}{\cos l_1}$$

On peut donc, dans la formule, remplacer $N \cos l_1$ par $N' \cos l'$; elle devient ainsi

$$L' - L = \frac{K}{N' \sin 1''} \frac{\sin A}{\cos l'} - \frac{1}{6} \frac{K^3}{N'^3 \sin 1''} \frac{\sin A}{\cos l'} + \frac{1}{6} \frac{K^3}{N'^3 \sin 1''} \frac{\sin^3 A}{\cos^3 l} ;$$

(1) Non exigé jusqu'à la fin du chapitre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

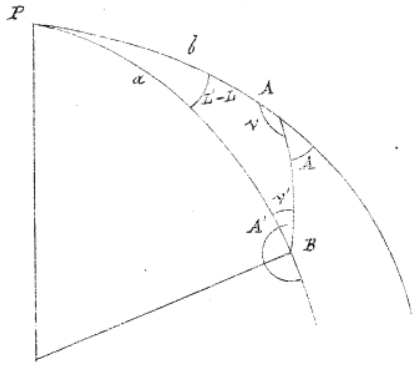
seulement pour n'avoir dans la formule que la grande normale au point B', on a remplacé dans le dénominateur du second terme N^2 par N'^2; mais ce terme est très petit et l'erreur qui résulte de cette substitution est négligeable.

Le 1er terme de ce développement est de beaucoup plus influent. Tous les calculs exécutés au dépôt de la Guerre, on s'est même arrêté à celui-là. Le facteur $\frac{1}{N' \sin 1''} = R$ a été réduit en table, et la formule est devenue

$$L' - L = R \frac{\sin A}{\cos l}$$

Le 6e volume du Mémorial du Dépôt de la Guerre renferme également une table de correction qui donne ceux des termes négligés qui peuvent acquérir une valeur sensible.

Formule des azimuts. — Désignons par A l'azimut de B sur l'horizon de A et par A' celui de A sur l'horizon de B, ces azimuts étant, selon l'usage, comptés du Sud à l'Ouest, et variant de 0° à 360°; soient ν et ν' les angles en A et en B du triangle sphérique PAB. On a



$$\nu = 180° - A,$$
et $$\nu' = A - 180°;$$
d'où $$\nu + \nu' = A' - A.$$

La première analogie de Képler donne

$$tg \tfrac{1}{2} (\nu + \nu') = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (L' - L)$$

D'ailleurs $$a = 90° - l, \qquad b = 90° - l',$$

et par conséquent $$a + b = 180° - (l + l')$$

et $$a - b = l - l'.$$

En remplaçant $\nu + \nu'$, $a + b$, $a - b$ par leurs valeurs, l'équation devient

$$tg \tfrac{1}{2} (A' - A) = \frac{\cos \frac{1}{2} (l - l')}{\sin \frac{1}{2} (l + l')} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (L' - L),$$

et en prenant les inverses des deux membres

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (A' - A) = \frac{\sin \frac{1}{2} (l + l')}{\cos \frac{1}{2} (l - l')} tg \tfrac{1}{2} (L' - L)$$

$$tg \left\{ 90° - \frac{(A' - A)}{2} \right\} = \frac{\sin \frac{1}{2} (l + l')}{\cos \frac{1}{2} (l - l')} tg \tfrac{1}{2} (L' - L)$$

Si l'on opérait dans un plan, $A' - A$ serait égale à 180°, et l'on conçoit que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans toutes les opérations géodésiques, il doit en être à très peu près de même; $90° - \frac{1}{2}(A'-A)$ est donc un angle très petit, et on peut le substituer à sa tangente, de même que $\frac{1}{2}(L'-L)$, l'équation devient ainsi, en multipliant par 2, et remplaçant $\cos\frac{1}{2}(l-l')$ par l'unité

$$180° - (A-A) = \sin\tfrac{1}{2}(l+l')(L'-L),$$

d'où l'on tire

$$A' - A = 180° - \sin\tfrac{1}{2}(l+l')(L'-L),$$

formule extrêmement simple, dans laquelle il n'entre que des quantités déjà connues par les calculs précédents.

Le terme $(L'-L)\sin\frac{1}{2}(l+l')$ qui mesure la différence des angles qu'un même côté géodésique forme avec les méridiens de ses deux extrémités est désigné sous le nom de convergence des méridiens.

On sait effectivement que sur une carte, les méridiens ne peuvent pas être représentés par des droites parallèles (à moins de conventions spéciales), et la formule précédente montre que les lignes qui représentent les méridiens doivent s'incliner de plus en plus, à mesure que l'on s'avance vers le Nord; car le terme de la convergence augmente avec l et l'. Cette convergence est déjà sensible dans les cartes topographiques qui embrassent quelques lieues carrées, et l'on doit en tenir compte.

Remarque. — Lorsqu'on cherche à vérifier par des observations directes les résultats auxquels on arrive par les calculs précédents, on trouve en général des discordances assez sensibles; ces discordances peuvent provenir de trois causes, savoir: les fautes de calcul, les erreurs d'observation, ou enfin les imperfections de la théorie. Lorsque, par des vérifications et des corrections convenables, on a éliminé la première cause et réduit la seconde autant que possible, on trouve encore des discordances qui ne peuvent être attribuées qu'à l'insuffisance des hypothèses, d'où l'on est parti pour établir la théorie, et l'on doit en conclure que la Terre n'a pas rigoureusement la forme d'un ellipsoïde de révolution.

C'est ici seulement que l'on doit faire intervenir l'existence des continents; l'observation a prouvé en effet que les grandes chaînes de montagnes attirent le fil à plomb et plus généralement agissent sur tous les instruments destinés à nous donner la direction de la verticale, d'où dépend en chaque point celle de l'élément de la surface idéale de la Terre.

Définitions rigoureuses des méridiens et des parallèles. — La Terre n'étant pas une surface de révolution, il convient de modifier la définition des méridiens et des parallèles qui ne sont plus des courbes planes. Un méridien est le lieu des pieds de toutes les verticales parallèles à un même méridien céleste; tous ces points ont en effet même longitude. Les points appartenant à un parallèle doivent avoir même latitude; on peut donc dire qu'un parallèle, sur le globe, est la ligne qui unit les traces de toutes les verticales qui font le même angle avec la ligne des pôles ou qui sont parallèles aux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

génératrices d'un cône ayant cette ligne pour axe. (1)

Distance de deux points dont on a déterminé par l'observation la latitude et la différence de longitudes. — Cette question peut se présenter dans plusieurs circonstances; par exemple, s'il s'agit de faire la triangulation d'un pays et que l'on n'ait ni le temps ni les appareils nécessaires pour mesurer une base; on pourra ainsi s'en procurer une dont l'exactitude dépendra entièrement de celle des observations astronomiques.

Les Ingénieurs Hydrographes la rencontrent fréquemment; M. Puissant a eu également à la résoudre pour rattacher la Corse au continent; elle est d'ailleurs très simple. En partant des formules précédemment établies

$$l' - l = - p K \cos A - Q K^2 \sin^2 A$$

et

$$L' - L = R \frac{K \sin A}{\cos l}$$

dans lesquelles nous ferons $K \cos A = x$ et $K \sin A = y$;

il viendra $l' - l = - Px - Q y^2$ et $L - L = \frac{R}{\cos l} y$;

d'où $y = \frac{L' - L}{R} \cos l$ et $x = \frac{l' - l}{P} - \frac{Q}{P} \frac{(L' - L)^2}{R^2} \cos^2 l.$

Ces valeurs de x et de y étant calculées, on trouvera

$$\operatorname{tg} A = \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad K = \frac{y}{\sin A} = \frac{x}{\cos A};$$

c'est-à-dire l'azimut du côté géodésique K sur l'horizon du point dont les coordonnées géographiques sont L et L' et la longueur de ce côté K. Toutefois, l'emploi de ces formules suppose la distance K de l'ordre de grandeur des côtés géodésiques ordinaires, autrement la question serait moins simple; et il faudrait employer le développement en série de l'expression qui donne la ligne géodésique ou de plus courte distance entre deux points à la surface de l'ellipsoïde de révolution (Voy. à ce sujet, Puissant, Traité de Géodésie, t. 1er).

---

(1) Bien que, d'après ces définitions, les méridiens et les parallèles soient généralement des courbes à double courbure, il n'y a aucun inconvénient à les considérer comme des courbes planes en géographie, où les différences ne seraient pas appréciables.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chapitre V.

Calcul des différences de niveau des sommets de la triangulation.

Détermination de l'altitude des différents points de la Carte. — La longitude et la latitude d'un point déterminent sa projection sur le Sphéroïde terrestre ; pour définir complétement sa position, il faut connaître en outre sa hauteur au-dessus du niveau de la mer ou son altitude. Tel est l'objet du nivellement.

Il y a trois espèces de nivellement :

1° Le nivellement au niveau à bulle d'air par petites portées et par lignes de visées horizontales. Ce procédé, dans lequel on néglige ou l'on peut éliminer simplement les effets de la réfraction et de la courbe de la Terre, appartient à la Topographie

2° Le nivellement géodésique par lignes de visées inclinées à l'horizon.

3° Le nivellement immédiat par le baromètre dont la théorie appartient à l'hydrostatique. Nivellement géodésique. — Le problème à résoudre n'exigera que l'emploi des formules les plus simples de la trigonométrie rectiligne et ne présenterait aucune difficulté sans la présence de l'atmosphère, puisqu'à chaque station on a observé les distances zénithales des sommets voisins et que le calcul des triangles a donné la longueur des différents côtés géodésiques ; mais de ce que la densité des couches atmosphériques va en décroissant à mesure qu'on s'élève, il résulte qu'un rayon lumineux en passant d'une couche supérieure dans une couche inférieure s'infléchit par nuances insensibles et forme une courbe dont la concavité est tournée vers le Sol.

L'angle formé par la tangente au dernier élément de la courbe, et par la ligne droite qui unit les extrémités est ce qu'on appelle la réfraction géodésique ; et comme l'observateur, placé à l'une de ses extrémités, voit l'objet qui occupe l'autre extrémité suivant la direction du dernier élément, la distance zénithale qu'il mesure est trop faible de cette quantité.

Pour les distances considérées en Géodésie, l'inclinaison du rayon lumineux sur l'horizon étant toujours très faible, on peut admettre que la trajectoire est sensiblement un arc de cercle et que la réfraction est proportionnelle à l'angle compris entre les verticales de ses deux extrémités. (1)

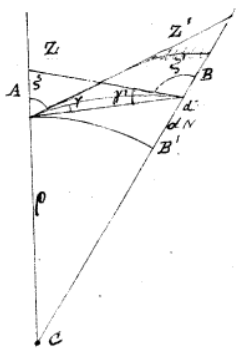
---

(1) On arrive à cette conclusion en faisant sur la constitution de l'atmosphère l'une des hypothèses indiquées au Chapitre IV de la seconde partie du cours (Réfraction astronomique.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si l'on désigne par $2n$ le nombre par lequel il faut multiplier l'angle compris entre les deux verticales extrêmes pour avoir la déviation totale du rayon lumineux, n sera ce qu'on appelle le coefficient de la réfraction.

Cas des observations combinées. — La formule du nivellement géodésique reste indépendante de la réfraction lorsque deux observateurs ont pu faire aux deux stations des mesures de distances zénithales réciproques et simultanées, ou du moins lorsque deux observations réciproques, faites par un même observateur, l'ont été dans des circonstances à peu près identiques.



Soient : A et B les deux stations,
C le centre de la sphère osculatrice au point A,
ρ la distance AC du point A au centre,
$dN = BB'$ la différence de niveau des points A et B,
z et z' les distances zénithales vraies,
ξ et ξ' les distances zénithales observées,
γ et γ' les angles de réfraction.

La trajectoire du rayon lumineux étant supposée se confondre avec son cercle osculateur $\gamma = \gamma'$.

Le triangle ACB donne la relation

$$\frac{\rho}{\rho + dN} = \frac{\sin z'}{\sin z},$$

$$\frac{dN}{2\rho + dN} = \frac{\sin z - \sin z'}{\sin z + \sin z'} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(z - z')}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(z + z')};$$

or $$z = \xi + \gamma \qquad \text{et} \qquad z' = \xi' + \gamma;$$

donc $$z - z' = \xi - \xi'.$$

D'ailleurs, en faisant la somme des angles du triangle ACB, on a

$$(180° - z) + (180° - z') + C = 180°;$$

ou bien $$z + z' = 180° + C,$$

et $$\frac{1}{2}(z + z') = 90° + \frac{C}{2}.$$

On a donc finalement

$$\frac{dN}{2\rho + dN} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\xi - \xi')}{-\operatorname{cotg} \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\xi' - \xi)}{\operatorname{cotg} \frac{C}{2}};$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où $$dN = \frac{2\rho\, tg\frac{1}{2}(\xi'-\xi)}{cotg\frac{C}{2} - tg\frac{1}{2}(\xi'-\zeta)}.$$

Multipliant haut et bas par $tg\frac{C}{2}$ et développant par la formule

$$tg\, x = x + \frac{x^3}{3}, \qquad dN = \frac{2\rho\, tg\frac{1}{2}(\xi'-\zeta)\, tg\frac{C}{2}}{1 - tg\frac{1}{2}(\xi'-\zeta)\, tg\frac{C}{2}}$$

il vient $$dN = \frac{2\rho\, tg\frac{1}{2}(\xi'-\xi)\left(\frac{C}{2} + \frac{C^3}{24}\right)}{1 - tg\frac{1}{2}(\xi'-\xi)\left(\frac{C}{2} + \frac{C^3}{24}\right)}$$

et en développant le dénominateur

$$dN = 2\rho\, tg\frac{1}{2}(\xi'-\xi)\left(\frac{C}{2} + \frac{C^3}{24}\right)\left\{1 + tg\frac{1}{2}(\xi'-\xi)\left(\frac{C}{2} + \frac{C^3}{24}\right)\right\}$$

Si l'on suppose d'abord le point A au niveau de la mer, le côté géodésique K que l'on connaît est égal à $C\rho$, et l'on a

$$dN = K\, tg\frac{1}{2}(\xi'-\xi)\left(1 + \frac{K^2}{12\rho^2}\right)\left\{1 + tg\frac{1}{2}(\xi'-\zeta)\left(\frac{K}{2\rho} + \frac{K^3}{24\rho^3}\right)\right\}$$

En posant $K\, tg\frac{1}{2}(\xi'-\zeta) = y$, cette expression se réduit à la suivante

$$dN = y + \frac{y^2}{2\rho} + \frac{K^2 y}{12\rho^2}$$

en négligeant les autres termes qui sont très faibles. Le dernier des précédents ne se calcule même que dans les pays de hautes montagnes.

Si au lieu d'être au niveau de la mer, le point A se trouvait à l'altitude h, on aurait pour l'arc AB', que nous désignerons par K',

$$K' = K\left(1 + \frac{h}{\rho}\right),$$

puisque K en réduit d'avance au niveau de la mer ; la formule deviendrait alors

$$dN = y + \frac{y^2}{2\rho} + \frac{hy}{\rho} \quad (1)$$

---

(1) ρ n'entrant que dans les termes correctifs, on peut prendre pour sa valeur celle du rayon de courbure moyen sans qu'il en résulte d'erreur appréciable, et l'on doit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Car d'une seule observation de distance zénithale. — Il faut chercher la valeur de ξ' en fonction de ξ et la substituer dans la formule. Le triangle ABC dans lequel

$$A = 180^\circ - (\xi + \gamma),$$

$$B = 180^\circ - (\xi' + \gamma),$$

donne la relation $$180^\circ = 180 - (\xi + \gamma) + 180^\circ - (\xi' + \gamma) + C$$

D'après ce qui a été dit plus haut,

$$\gamma = n\,C,$$

et on a

$$0 = C - (\xi + \xi') - 2n\,C + 180^\circ,$$

$$\xi' = 180^\circ - \xi + (1 - 2n)\,C,$$

$$\tfrac{1}{2}(\xi' - \xi) = 90^\circ - \xi + \frac{1-2n}{2}\,C,$$

$$\tfrac{1}{2}(\xi' - \xi) = 90^\circ - \xi + \frac{1-2n}{2}\,\frac{K}{\rho}$$

En égalant les tangentes des deux membres multipliées par K, on a

$$K \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\xi' - \xi) = K\,\frac{\operatorname{cotg}\xi + \operatorname{tg}\,\dfrac{1-2n}{2}\,\dfrac{K}{\rho}}{1 - \operatorname{cotg}\xi \operatorname{tg}\,\dfrac{1-2n}{2}\,\dfrac{K}{\rho}}$$

Puis en développant le dénominateur et substituant le petit arc $\dfrac{1-2n}{2}\,\dfrac{K}{\rho}$ à sa tangente, il vient

$$K \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\xi' - \xi) = K\left(\operatorname{cotg}\xi + \frac{1-2n}{2}\,\frac{K}{\rho}\right)\left(1 + \operatorname{cotg}\xi\,\frac{1-2n}{2}\,\frac{K}{\rho}\right)$$

Posons $y' = K \operatorname{cotg}\xi$,

on aura $$K \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\xi' - \xi) = \left(y' + \frac{1-2n}{2}\,\frac{K^2}{\rho}\right)\left(1 + y'\,\frac{1-2n}{2}\,\frac{1}{\rho}\right)$$

ou, en effectuant, et en négligeant le dernier terme,

$$K \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\xi' - \xi) = y = y' + \frac{1-2n}{2}\,\frac{K^2}{\rho} + \frac{1-2n}{2}\,\frac{y'^2}{\rho};$$

---

remarquer que dans les nivellements géodésiques comme dans ceux à petite portée on chemine toujours sur la surface de niveau, quelle que soit sa forme.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et par suite $$dN = y' + \frac{1-2n}{2}\frac{K^2}{\rho} + (1-n)\frac{y'^2}{\rho} + \frac{hy'}{\rho},$$

y' étant substitué à y dans le dernier terme.

Cette formule, dont on ne conserve ordinairement que les deux premiers termes, devient en posant $\frac{1-2n}{2} = S$, coefficient calculé d'avance

$$dN = K \operatorname{cotg} \xi + S K^2;$$

c'est sous cette forme qu'elle est employée en Géodésie pour le nivellement des points du 3e et même souvent du 2e ordre.

Il peut être nécessaire, dans certains cas exceptionnels, de calculer le 3e terme.

Détermination du coefficient de la réfraction. — La formule de différence de niveau, quand on ne tient compte que des deux premiers termes est

$$dN = K \operatorname{cotg} \xi + \frac{1+2n}{2}\frac{K^2}{\rho},$$

on en tirera, en supposant dN connu avec une grande exactitude par des observations réciproques et simultanées

$$n = 0{,}5 - \frac{dN - K \operatorname{cotg} \xi}{K^2}\rho.$$

D'après la première formule, il est évident que l'erreur à craindre dans le calcul de la différence de niveau, résultant de ce que le coefficient n n'est pas connu exactement croît proportionnellement au carré du côté géodésique qui unit les deux points considérés.

En partant de la relation

$$\xi' + \xi + 2nC = 180° + C,$$

on trouve encore $$(1-2n)C = \xi + \xi' - 180°;$$

d'où $$1 - 2n = \frac{\xi + \xi' - 180°}{K}\rho$$

on enfin $$n = 0{,}5 - \frac{\xi + \xi' - 180°}{K}\rho$$

Cette formule fait voir que n sera déterminé avec d'autant plus d'exactitude que le côté K sera plus grand.

Il existe sur la valeur du coefficient de la réfraction n une incertitude qui tient aux variations continuelles de l'atmosphère. Delambre le regardait comme égal à 0,08; la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

moyenne des observations faites pour la Carte de France a donné 0,065. En Russie, le Colonel Bœyer a trouvé, pour la valeur de ce nombre sur le bord de la mer, 0,0681, et dans l'intérieur des terres, 0,0620; enfin, d'après M. Struve, sa valeur est de 0,072 sur le sommet du Caucase et de 0,088 au pied de cette chaîne de montagnes.

Principaux résultats des nivellements géodésiques. — Dans les triangles primordiaux, on a calculé les différences de niveau des sommets au moyen de deux observations simultanées; dans les autres triangles, on s'en est contenté en général d'une seule observation.

On a dit déjà que le milieu de la journée devait être consacré aux observations des distances zénithales, parce que les erreurs dues à la réfraction sont alors moins sensibles que le matin et le soir.

Voici quelques résultats auxquels on est arrivé dans les grands nivellements géodésiques exécutés en France et à l'étranger.

Celui qu'on a conduit de Cancale à Paris, puis de Paris à Dunkerque, a donné une différence de 1m entre les niveaux de la mer aux deux points extrêmes; ce nivellement avait été fait sur une longueur de 550 Kilomètres. On a trouvé de même les différences suivantes entre des repères plus ou moins éloignés.

De Noirmoutier au Phare Planier, après un parcours de	950 Kilomètres	0m,55
" au Fort Socoa (près de St Jean-de-Luz)	1560 "	2,38
" sur le parallèle de Bourges	2500 "	2,79
De Cancale au Phare Planier	1100 "	0,75

Ce nombre font voir que le niveau moyen de la mer en partout sensiblement le même, et donnent en même temps une idée du degré de précision auquel on est arrivé dans les grands nivellements géodésiques.

La belle triangulation effectuée le long de la chaîne des Pyrénées par MM. Corabeuf et Peytier a donné une différence de 1m,67 seulement entre le niveau de l'Océan et celui de la Méditerranée, et cette faible différence se trouvant comprise dans les erreurs d'observation, on peut admettre que les deux mers ont le même niveau.

On a également constaté dans les nivellements faits en Allemagne qu'il n'y a pas de différence sensible entre le niveau de la mer du Nord et celui de la Baltique. Enfin, les Ingénieurs géographes ont trouvé que le golfe de Corinthe était de niveau avec le golfe d'Egine; et dans ces derniers temps on a reconnu qu'il en est de même pour la Mer Rouge et la Méditerranée, contrairement à ce qu'on croyait autrefois. Les observateurs Russes ont constaté de leur côté que la mer Baltique et la Mer Noire étaient au même niveau.

Les mers qui communiquent ont donc sensiblement le même niveau moyen; mais il n'en est pas de même des mers fermées; ainsi M. Struve a trouvé que le niveau de la mer Caspienne est élevé de 26m au dessus de la mer d'Azoff.

Niveau moyen de la mer. — Points de repère. — Des échelles de marée ont

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

permis de déterminer sur toute les côtes le niveau moyen de la mer. Ce niveau est indiqué en différents lieux par des repères fixes.

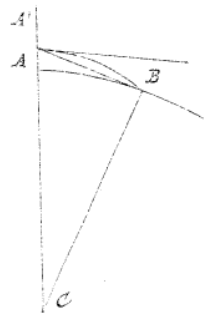
Lorsqu'on est parti de l'un de ces repères, et qu'en arrivant à un autre on trouve une différence entre les niveaux moyens, on admet que le niveau est rigoureusement le même, et que la différence que l'on trouve est uniquement due aux erreurs du nivellement, et l'on répartit cette différence sur les stations intermédiaires, soit d'après le calcul des probabilités, soit proportionnellement à la longueur des côtés qui les séparent.

Le niveau moyen de la mer est coté 0, les points situés au dessus de ce niveau ont des cotes positives. D'après les observations faites au marégraphe dans différents ports, on est porté à croire que le niveau moyen ne coïncide pas avec le niveau d'équilibre; ainsi, au Havre, ce dernier serait au-dessus du premier de $0^m,25$ et à Dieppe il serait au-dessous de $0^m,25$.

Des nivellements effectués avec le niveau à bulle d'air servent à rattacher les opérations géodésiques aux points de repère qui indiquent le niveau moyen de la mer. L'avantage de ce procédé consiste en ce qu'en stationnant au milieu de la distance qui sépare deux points dont on veut évaluer la différence de niveau, on élimine les corrections dues à la réfraction et à la courbure de la Terre. Lorsque le sommet géodésique dont on a à déterminer l'altitude est situé à une trop grande distance du repère, on divise cette distance en plusieurs parties, en marquant des repères intermédiaires de façon à n'avoir que des portées convenables pour la lecture des divisions des mires.

Détermination directe de l'altitude absolue d'un point. — Quand on est dans le voisinage de la mer, et qu'on ne cherche qu'une valeur approchée de l'altitude de la station, on peut la déterminer rapidement en mesurant la distance zénithale apparente de l'horizon.

Supposons donc cette distance ξ observée; il s'agit d'en déduire l'altitude $AA' = h$. Joignons le point A' au point B, où le rayon visuel rase l'horizon; dans le triangle $A'BC$ que l'on considère comme rectangle en B, on a



$$(\rho + h)\cos C = \rho$$

$$h = \frac{\rho(1-\cos C)}{\cos C} = \rho\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos C} = \rho\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}C\sin C}{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C\cos C} = \rho\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{tg}\,C;$$

on comme $\frac{1}{2}C$ est très petit, et qu'il est permis de prendre $\frac{1}{2}\tan C$ pour $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}C$, on a

$$h = \tfrac{1}{2}\rho\tan^2 C$$

Le même triangle $A'BC$ donne la relation

$$C + 90^\circ - \xi + n\,C,$$

d'où

$$C = \frac{\xi - 90^\circ}{1-n},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

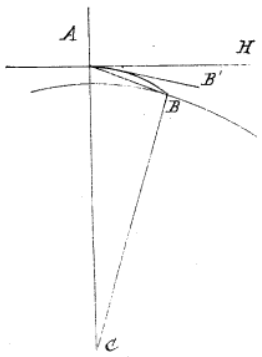
et par conséquent $h = \frac{1}{2}\rho \operatorname{tang}^2 \frac{\xi - 90^\circ}{1-n} = \frac{1}{2}\frac{\rho}{(1-n)^2}\operatorname{tang}^2(\xi - 90^\circ)$

$$= \frac{1}{2}\rho(1+2n)\operatorname{tg}^2(\xi - 90^\circ)$$

formule seulement approchée qui, même exacte, ne pourrait pas conduire à des résultats précis par suite des incertitudes que présente l'observation et de celles qui existent sur la valeur du coefficient de la réfraction.

Dépression de l'horizon. — Lorsqu'on observe la hauteur d'un astre du pont d'un navire, l'œil étant situé au-dessus de la surface de la mer, le rayon visuel dirigé vers la limite de l'horizon sensible est une ligne tangente à cette surface et par conséquent inclinée au dessous de l'horizon rationnel. C'est cette inclinaison que l'on nomme la dépression de l'horizon et dont il faut chercher la valeur pour en corriger les observations dont il s'agit.

La hauteur de l'œil au dessus du niveau de la mer AA' en comme; sans la présence de l'atmosphère, la dépression de l'horizon serait égale à $HAB = ACB = C$ que l'on trouverait par la relation



$$\rho = (\rho + h)\cos C = (\rho + h)\left(1 - \frac{C^2}{2}\right)$$

d'où l'on tire

$$1 - \frac{C^2}{2} = \frac{\rho}{\rho + h} = 1 - \frac{h}{\rho},$$

et par suite

$$C = \sqrt{\frac{2h}{\rho}}$$

Telle serait l'expression de la dépression vraie, pour obtenir la dépression apparente, il faut corriger ce résultat de l'effet de la réfraction ou de l'angle $BAB' = nC$; ainsi l'on aura

$$HAB \quad \text{ou} \quad D = C - nC = C(1-n)$$

et par conséquent

$$D = \frac{1-n}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2h}{\rho}} \quad (1)$$

Cette dépression, ou ce qui revient au même, la réfraction à la surface de la mer, est très variable; néanmoins les Marins se servent d'une Table dans laquelle on a supposé le coefficient de la réfraction

$$n = 0,08.$$

---

(1) On déduirait immédiatement de cette formule celle qui a été établie directement pour résoudre la question précédente. En effet si h en l'inconnue et que l'on ait observé

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chapitre VI.

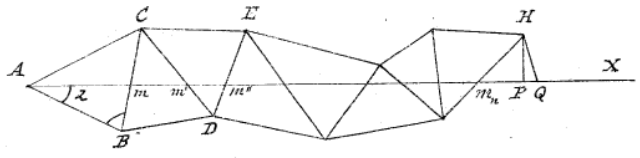
Figure et dimensions de la Terre. — Base du système métrique.

On a admis dans la leçon précédente que la forme du globe terrestre était sensiblement celle d'un ellipsoïde de révolution aplati vers les pôles, c'est-à-dire engendrée par une ellipse tournant autour de son petit axe. Cette hypothèse simplifie beaucoup l'étude de la figure de la Terre, car il suffit de mesurer la longueur et l'amplitude de deux arcs de méridien pour déterminer les deux paramètres de l'ellipse génératrice. D'ailleurs, comme elle s'éloigne peu de la réalité, il est facile de reconnaître les discordances qui peuvent exister entre la théorie et l'observation.

Mesure d'un arc de méridien.[1] On forme une chaîne de triangles dans la direction de ce méridien, et l'on calcule tous les triangles par la méthode de Legendre.

Soit $A\,B\,C\,D\,\ldots\ldots H$ cette chaîne. On observe les latitudes des deux points extrêmes A et H et l'azimut du côté AB sur l'horizon du point A; on peut alors calculer les segments Am, mm', $m'm''$, ... &ª de la méridienne.

Ces calculs se font également par la méthode de Legendre. Ainsi pour le segment Am, on connaît dans le triangle sphérique ABm le côté AB et les deux angles z et B, on calcule l'excès sphérique comme nous l'avons indiqué plus haut, et l'on en conclut l'angle sphérique AmB et les côtés Am et Bm. On calcule de même le triangle ACm, ce qui



---

d'une station terrestre la distance zénithale ξ de l'horizon de la mer, on a :

$$D = \xi - 90^\circ \qquad \text{et par conséquent} \qquad \xi = 90^\circ \frac{1-n}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2h}{\rho}},$$

d'où l'on tire

$$h = \tfrac{1}{2}\rho(\xi - 90^\circ)^2 \sin^2 1'' \frac{1}{(1-n)} = \tfrac{1}{2}\rho(1+2n)(\xi-90^\circ)^2\sin^2 1''$$

formule que l'on peut considérer comme identique avec celle de la page 263 à cause de la petitesse de l'angle

$$\xi - 90^\circ$$

(1). Si l'on connaissait avec exactitude l'amplitude d'un arc de 1° et $\frac{1}{2}$ au plus, on pourrait déterminer sa longueur en multipliant cette amplitude par le rayon de courbure moyen; seulement, il faudrait déjà connaître ce rayon de courbure avec beaucoup de précision.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

procure une double vérification ; on détermine ensuite $m m'$ dans le triangle $C m m'$ sur lequel on opère comme sur le triangle $A B m$, et, de proche en proche, on arrive jusqu'au point m_n où le dernier côté de la triangulation rencontre la méridienne.

Mais comme on ne connaît pas la latitude du point m_n, tandis que l'on a observé celle du point H, il faut calculer la partie $m_n Q$ de la méridienne comprise entre le point m_n et le parallèle du point H. Pour cela, du point H on abaissera un arc de grand cercle HP perpendiculaire au méridien, et le triangle $H m_n P$ donnera le segment $m_n P$. Quant au segment PQ, on l'obtiendra en cherchant la différence de latitude des deux points H et P.

Or, dans le triangle $H m_n P$ on connaît le côté $HP = K$ et l'azimut de ce côté sur l'horizon du point P, $HP m_n = 90°$, la formule de la latitude deviendra dans ce cas

$$PQ = -\frac{1}{2}\frac{K^2}{N}\operatorname{tg} l,$$

dans laquelle on prendra pour N une valeur approchée du rayon terrestre et pour l, la latitude du point H au lieu de celle du point P qui en diffère très peu. On procèderait au besoin par approximations successives.

On pourrait encore chercher la différence de longitude des points H et P et calculer ensuite PQ considéré comme la différence entre l'hypothénuse et l'un des côtés de l'angle droit par le premier terme du développement connu.

$$PQ = \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}(L - L')\sin 2l,$$

en considérant le triangle sphérique rectangle qui a pour sommets le pôle et les deux points H et P.

Legendre a donné une méthode au moyen de laquelle on détermine en même temps les distances des sommets de la triangulation à la méridienne et à la perpendiculaire. Cette méthode consiste à projeter les côtés du triangle sur le méridien par des arcs de grand cercle et à calculer le triangle sphérique rectangle qui résulte de cette construction.

Voici enfin un dernier moyen de calculer la longueur d'un arc de méridien entre les parallèles des deux points extrêmes d'une triangulation dès que l'on connaît seulement les valeurs approchées du demi grand axe et de l'excentricité de l'ellipse méridienne.

On calcule d'abord les positions géographiques de tous les points de la chaîne et les azimuts des côtés. La différence des latitudes de deux sommets consécutifs multipliée par la grande normale de l'un de ces sommets donne la longueur de l'arc de méridien compris entre les parallèles des deux points (on sait d'ailleurs que ces arcs ne diffèrent que très peu les uns des autres, soit qu'on les compte sur la sphère ou sur l'ellipsoïde). Le calcul se fera au moyen de la formule des latitudes dont le second membre multiplié par N donnera

$$S_m = -K\cos A - \frac{1}{2}\frac{K^2}{N}\sin^2 A \operatorname{tg} l + \frac{1}{6}\frac{K^3}{N^2}\sin^2 A \cos A (1 + 3\operatorname{tg}^2 l),$$

longueur exprimée en mètres de l'arc de méridien compris entre les parallèles des deux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

extrémité du côté géodésique K. On remarquera que le premier terme qui donne déjà une valeur très approchée de la longueur de l'arc, est indépendant de N, qui n'entre que dans les termes correctifs.

En faisant la somme des arcs compris entre les parallèles des extrémités des côtés successifs, on aura le développement de l'arc embrassé par la triangulation. D'ailleurs, comme on peut parvenir du premier sommet au dernier, en prenant des côtés différents, on aura des moyens faciles de vérification.

Cette méthode, employée par le Colonel Puissant pour vérifier les calculs de la méridienne de France et d'Espagne, lui a fait reconnaître une erreur de 69^T sur la longueur de l'arc compris entre Montjouy et Formentera.

Rectification d'un arc de parallèle. — La mesure d'un arc de parallèle peut également servir à étudier la forme de la Terre, ainsi que nous le verrons plus loin.

Voici comment on exécute cette opération :

Une chaîne de triangles ayant été établie dans la direction du parallèle, on commence, comme dans le cas précédent, par calculer les coordonnées géographiques de tous les sommets en se servant des valeurs approchées de a et de e^2. La formule des longitudes

$$L' - L = \frac{K \sin A}{N' \cos l'} - \frac{K^3 \sin A}{6 N'^3 \cos l'} + \frac{K^3 \sin^3 A}{6 N'^3 \cos^3 l'}$$

donne immédiatement l'amplitude d'un arc de parallèle compris entre les méridiens qui passent par les extrémités d'un côté de la triangulation et à une latitude l_n ; en effet, le rayon de ce parallèle est

$$r_n = N_n \cos l_n$$

et l'on a par conséquent, pour la longueur de l'arc,

$$S_p = \frac{N_n \cos l_n}{N' \cos l'} \left(K \sin A - \frac{K^3 \sin A}{6 N'^2} + \frac{K^3 \sin^3 A}{6 N'^3 \cos l'} \right)$$

On doit observer que A disparaît dans le quotient $\frac{N_n \cos l_n}{N' \cos l'}$ et que l'influence de e^2 en elle même très faible, en même temps que le premier terme du facteur entre parenthèses en indépendant de N', c'est-à-dire de a et de e^2.

En faisant le même calcul pour chaque côté K, la somme des résultats donne la longueur de l'arc dans l'étendue de la triangulation.

Si la différence des longitudes des points extrêmes était connue par des observations astronomiques, on calculerait la longueur de l'arc du parallèle à la latitude l_n en multipliant cette différence par le rayon de ce parallèle

$$r_n = N_n \cos l_n = \frac{a \cos l_n}{(1 - e^2 \sin^2 l_n)^{\frac{1}{2}}}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de sorte que si $L' - L$ désigne la différence de longueur exprimée en degrés, on aura pour la longueur de l'arc

$$S_p = \frac{\pi}{180} (L' - L) \frac{a \cos l_n}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}$$

relation d'après laquelle on peut calculer S_p si l'on suppose que a et e^2 soient connus, ou qui peut servir à déterminer ces quantités si S_p a été calculé par la méthode précédente, c'est-à-dire au moyen d'une triangulation.

Détermination des éléments du Sphéroïde terrestre. — a et b désignant le demi grand axe et le demi petit axe de l'ellipse méridienne, $\frac{a-b}{a} = \alpha$ est ce que nous avons appelé l'aplatissement. La notion de l'aplatissement est plus simple que celle du carré de l'excentricité e^2 qui entre dans les calculs; mais il est facile de voir qu'il existe entre ces deux quantités α et e^2 une relation qui permet de les substituer l'une à l'autre.

En effet, on a

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - (1-e^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e^2,$$

à très peu près. — On aurait exactement

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2.$$

Il s'agit de déterminer la longueur du rayon équatorial et l'aplatissement du Sphéroïde terrestre, ou les valeurs de a et de e^2.

Soit M la longueur d'un degré du méridien déduite de la mesure d'un arc; l la latitude moyenne, et ρ le rayon de courbure à cette latitude.

On aura

$$M = \frac{\pi}{180} \rho = \frac{\pi}{180} \frac{a(1-e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{180} a (1-e^2)\left(1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 l\right)$$

en négligeant les termes suivants qui sont assez faibles.

Si l'on pose

$$C = \frac{\pi}{180} a (1 - e^2),$$

il vient

$$M = C + \frac{3}{2} C e^2 \sin^2 l,$$

d'où l'on voit que de l'équateur au pôle les degrés croissent sensiblement comme les carrés des sinus des latitudes moyennes.

Pour un autre arc M' on aurait

$$M' = C + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 l,$$

et, en divisant M par M'

$$\frac{M}{M'} = \frac{1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 l}{1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 l'},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où l'on tirerait e^2, dont la valeur substituée dans l'une des expressions de M ou de M' déterminerait celle de a.

L'arc mesuré en France a donné

Pour la longueur du degré $M = 111131^m,2$ à la latitude moyenne de $45°\,4',48'',05$
Et celui du Pérou . . . . $M' = 110582,1$ . . . . . $1°\,31'\,0'',50$.

La valeur que l'on trouve pour a et pour e^2 en introduisant ces nombres dans les équations précédentes diffère très peu de celle que l'on obtient par la méthode précise que nous exposerons tout à l'heure.

Ellipsoïde osculateur. — Lorsqu'on connaît la longueur d'un arc d'un degré dans le sens du méridien et d'un autre dans le sens du parallèle en un point de la surface du globe terrestre, on peut également en déduire a et e^2, qui sont alors les éléments d'un ellipsoïde osculateur au point considéré. La comparaison de ces éléments avec ceux de l'ellipsoïde moyen dont la forme se rapproche le plus de celle du sphéroïde terrestre sert à accuser les irrégularités locales.

En désignant par M la longueur du degré du méridien, et par P celle du degré du parallèle, on aura les deux équations

$$M = \frac{\pi}{180}\,\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}},$$

et

$$P = \frac{\pi}{180}\,\frac{a\cos l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}};$$

d'où l'on tire d'abord la valeur de e^2 par approximations successives et ensuite celle de a.

Rectification d'un arc d'ellipse. — Au lieu d'égaler la longueur d'un arc de méridien au produit de l'amplitude de cet arc par le rayon de courbure moyen, il est plus exact de chercher l'expression de la longueur d'un arc d'ellipse méridienne en fonction de la latitude extrême.

Or, on a, en désignant par ds un élément de cet arc

$$ds = \rho\,dl = \frac{a(1-e^2)\,dl}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} = a(1-e^2)(1-e^2\sin^2 l)^{-\frac{3}{2}}\,dl;$$

et, en développant $\quad ds = a(1-e^2)\left(1+\tfrac{3}{2}e^2\sin^2 l + \frac{15}{8}e^4\sin^4 l + \ldots\right)dl;$

en substituant aux puissances des sinus de l les cosinus des multiples de cet angle, et en intégrant, on arrive à une expression de la forme

$$S = a(1-e^2)\left\{ml - \tfrac{1}{2}n\sin 2l + \tfrac{1}{4}p\sin 4l - \tfrac{1}{6}q\sin 6l \ldots\right\} + C$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans laquelle

$$m = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6,$$

$$n = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6,$$

$$p = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6,$$

$$q = \frac{35}{512}e^6 \text{ (1)}$$

Pour un arc compris entre les deux latitudes l et l' on aurait

$$S = a(1-e^2)\{m(l'-m) - \tfrac{1}{2}n(\sin 2l' - \sin^2 l) + \cdots\}$$

ou bien encore $S = a(1-e^2)\{m(l'-l) - n\sin(l'-l)\cos(l'-l) + \frac{p}{2}\sin^2(l'-l)\cos^2(l'+l) + \cdots \&^a\}$

En particulier, si la latitude moyenne en de 45°, on aura $l'+l = 90°$, et par conséquent

$$S_1 = a(1-e^2)\{m(l'-l) - \frac{p}{2}\sin 2(l'-l) + \cdots \&^a\}$$

Les valeurs de deux arcs S et S' mesurés à des latitudes très différentes substituées dans ces formules donneraient deux équations d'où l'on pourrait tirer a et e^2 ou α; mais on parviendra à un résultat plus exact en faisant servir les mesures d'arc effectuées dans des contrées dont les latitudes sont très différentes.

C'est ainsi que plusieurs savants allemands, Walbeck en 1819, Schmidt en 1829, et à deux reprises différentes, en 1837 et en 1841, Bessel ont appliqué la méthode des moindres carrés aux équations de condition que leur fournissait la combinaison des mesures d'arc parvenues à leur connaissance.

Le dernier calcul de Bessel, effectué en 1841, après la découverte de l'erreur sur la longueur de l'arc compris entre Montjouy et Formentera par M. Puissant, dans

---

(1) Il est facile de s'assurer que les puissances de e supérieures à la 6e sont négligeables; en effet, en prenant par exemple les valeurs approchées de a et de e^2 déduites des mesures d'arc faites au Pérou et en Laponie

$$a = 3271634^T \quad \text{et} \quad e^2 = 0,00643,$$

on en conclut $\quad a(1-e^2) = 3250239^T \quad \text{et} \quad e^6 = 0,0000003,$

d'où $\quad a(1-e^2)e^6 = 0^T,9$

et ce dernier nombre, déjà très petit, multiplié par e^3, donnerait une quantité tout à fait inappréciable dans les calculs dont il s'agit.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fondés sur 10 mesures d'arcs dont tous les éléments ont été soumis par Bessel lui-même à une révision critique.

Les résultats auxquels ce savant Astronome est arrivé sont les suivants:

Longueur du degré ou $\frac{1}{90}$ du quart du méridien = 57013^T,109 avec une erreur moyenne de $\pm$ 2^T, 8403, et $\alpha = \frac{1}{299,1528}$ avec une erreur moyenne de $\pm$ 4, 667 mitié au dénominateur, ou, ce qui est la même chose, α = 3272077^T,14 et e^2 = 0, 0 0667 44.

Une mesure exécutée depuis au Cap de Bonne Espérance, par M. Maclear, s'est trouvée d'accord avec ces résultats, qui ne doivent cependant pas être considérés comme définitifs, et que les mesures ultérieures qui pourront être entreprises dans les contrées où la civilisation pénètre, serviront sans doute à perfectionner. (1)

Evaluation du quart du méridien. Longueur du mètre. - Les valeurs de a et de e^2 étant connues, en faisant $L_1 = 0$ et $L = 90$ dans l'expression précédente, on aura pour la longueur du quart du méridien

$$Q = a(1-e^2)\frac{\pi}{2} m = a\frac{\pi}{2}(1-e^2)\left(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\cdots\right)$$

Les éléments qui ont servi à calculer la longueur du quart du méridien pour l'établissement du Système métrique ont été déduits, comme on sait, de deux mesures exécutées en France et au Pérou. Or, la valeur de l'aplatissement $\frac{1}{334}$ à laquelle était arrivée la Commission des poids et mesures est certainement trop faible, et l'on pourrait croire qu'il en est résulté une erreur assez considérable sur la détermination du mètre.

Il est donc utile de montrer que l'inexactitude de la valeur de l'aplatissement a peu d'influence dans le calcul de la longueur du quart du méridien, précisément parce que l'une des mesures se trouvant faite en France, correspondait à très peu près à la latitude moyenne de 45°.

En effet, si on prend le rapport de Q à la valeur trouvée plus haut pour l'arc S, dont la latitude moyenne est 45°, on aura

$$Q = \frac{\frac{\pi}{2} S}{l'-l-\frac{b}{2m}\sin^2(l'-l)+\&c.}$$

---

(1) Les Ephémérides de Berlin, pour 1852, contiennent un mémoire détaillé de M. Encke sur ce sujet.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

expression dans laquelle l'aplatissement, qui est déjà une quantité assez petite, n'entre qu'à la seconde puissance.

La longueur du quart du méridien, calculée par la Commission des Poids et Mesures, d'après cette formule est

$$Q = 5130740^{T},$$

et celle du mètre est par conséquent

$$\frac{Q}{10000000} = 0^{T},5130740 = 3^{T},11^{li},296.$$

D'après Bessel

$$Q = 5131180^{T} \text{ avec une incertitude de } \pm 256^{T}.$$

La correction très faible que ce résultat pourrait engager à faire subir à la longueur du mètre ne serait donc par définitive si l'on visait à une perfection absolue, et c'est une raison de plus pour ne pas l'altérer celle que la loi et l'usage ont consacrée en France et que plusieurs pays étrangers ont adoptée.

En partant des éléments trouvés par Bessel et calculant directement d'après les mesures géodésiques les latitudes et les longitudes des différents points des chaînes de triangles où l'on a fait des observations astronomiques, puis comparant entre eux les résultats du calcul et de l'observation, on peut constater les différences plus ou moins sensibles qui existent entre ces résultats. Les observations de latitudes étant les seules qui fussent susceptibles d'un haut degré de précision jusqu'à la découverte de la télégraphie électrique, on s'est borné à faire les comparaisons dont il s'agit pour les latitudes des stations intermédiaires des différents arcs de méridien qui avaient servi à la détermination des éléments de l'ellipsoïde moyen.

Bien que quelques unes des différences constatées ne puissent pas être attribuées uniquement aux erreurs d'observation, elles sont cependant assez faibles pour qu'il soit encore permis de considérer la figure de la Terre comme étant dans son ensemble réellement celle d'un ellipsoïde de révolution. (1)

Ces différences, ou comme on les appelle, les anomalies locales, ont été et paraissent en effet devoir être attribuées aux attractions soit des montagnes voisines, soit de masses intérieures de densité inégale et inégalement réparties autour du lieu de l'observation.

---

(1) On trouvera le tableau complet de ces différences dans le mémoire cité dans la note précédente.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

De vérifications analogues à celle que nous venons d'indiquer ont été tentées sur le parallèle moyen mesuré près du 45e degré de latitude et s'étendant depuis Bordeaux jusqu'à Fiume, on a été conduit aux mêmes conclusions (1); mais les observations directes de longitudes faites au moyen de signaux de feu n'avaient pas atteint le degré de précision que l'on pouvait obtenir aujourd'hui par les signaux électriques, et ce sorte d'opérations sont au nombre de celles que l'on doit désirer voir entreprendre de nouveau.

Ligne géodésique. — Quelle que soit la forme du sphéroïde terrestre, dès que cette forme s'écarte sensiblement de celle d'une sphère, la ligne de plus courte distance à la surface n'est plus un arc de grand cercle ni même une courbe plane. Cette ligne de plus courte distance a reçu le nom de ligne géodésique, c'est celle que l'on suit à la surface du globe lorsqu'on procède par alignements successifs, ou lorsqu'on prolonge une direction au moyen d'une chaîne de triangles. On démontre qu'un triangle de très petites dimensions formé à la surface d'un ellipsoïde de révolution par des lignes géodésiques jouit des propriétés établies par le théorème de Legendre pour les triangles sphériques; mais au lieu d'avoir recours à la trigonométrie sphéroïdique, il était plus simple et aussi exact de considérer, comme nous l'avons fait, des triangles appartenant à des sphères ayant pour rayons les grandes normales à l'ellipsoïde; et nous ne nous arrêterons pas plus longtemps sur les propriétés de la ligne géodésique.

---

(1) (Voyez Biot, Astronomie physique, t. 3, et la Mesure d'un arc du parallèle moyen entre le pôle et l'équateur par le Colonel Brousseaud.

Chapitre VII.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chapitre VII.

Canevas des cartes géographiques.

(Voy. les Planches 20, 21, 22 et 23 du Portefeuille.)

On donne le nom de canevas à des systèmes de méridiens et de parallèles tracés soit sur des globes, soit sur des cartes planes, au moyen desquels on peut rapporter facilement les différents points de la Terre dont on connaît les coordonnées géographiques, ou réciproquement assigner les coordonnées géographiques d'un lieu quelconque marqué sur le globe ou sur la carte.

Les dimensions nécessairement restreintes des globes ne permettent pas d'y représenter les détails topographiques, on y supplée par la construction des cartes planes, dont le canevas s'obtiennent pour la plupart au moyen de projections ou de développements. Les projections proprement dites sont ordinairement réservées pour les mappemondes, qui peuvent remplacer avantageusement les globes dans une foule de circonstances. Les développements sont surtout utiles pour les cartes particulières sur lesquelles on veut représenter seulement une petite portion de la surface terrestre. Enfin il y a encore d'autres modes de représentation ayant un objet spécial, comme les cartes marines. C'est à tort que l'on désigne ordinairement tous ces systèmes sous le nom de projections. La surface de la Terre n'étant pas développable, on ne pouvait pas dans les cartes planes, conserver à la fois la similitude des figures et les superficies; on est donc obligé de sacrifier l'une ou l'autre de ces propriétés, selon le but que l'on se propose. De là les différents systèmes de canevas.

Mappemondes. — On emploie pour les mappemondes deux systèmes de projections géométriques, la projection orthographique, qui n'est autre chose que la projection orthogonale ordinaire et la projection perspective.

Projection orthographique. — La projection orthographique ne peut s'appliquer en géographie que pour les contrées polaires, mais elle est nécessairement la seule que l'on puisse employer pour représenter l'hémisphère visible de la Lune et la apparence de planète.

Si la projection est faite sur un méridien, le méridien central se projettera suivant une droite, et les autres suivant des ellipses dont cette droite est le grand axe. Les parallèles seront représentés par des droites perpendiculaires au méridien central menées par les points ° divisions du méridien sur lequel on fait la projection. Pour obtenir les sommets des ellipses méridiennes on mènera par les mêmes points des parallèles au méridien central jusqu'à la rencontre de l'équateur.

Si la projection est faite sur l'équateur ou plutôt sur un plan quelconque

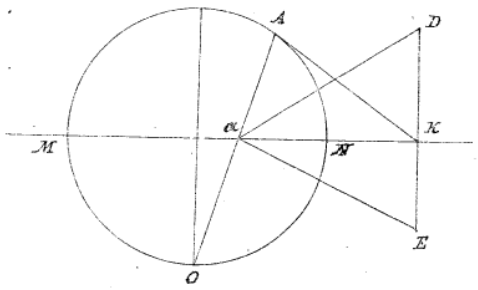
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

perpendiculaire à la ligne des pôles, les parallèles seront des cercles concentriques et les méridiens des rayons de ces cercles.

Projection perspective. — La projection perspective est variable d'après le point de vue et le tableau. On en a fait sur des plans tangents en supposant l'œil au centre de la Terre; la carte ne peut alors embrasser qu'une partie d'un hémisphère, et les bords sont fortement dilatés. On la fait de préférence sur un plan diamétral en plaçant le point de vue à l'extrémité du diamètre perpendiculaire; elle prend alors le nom de projection stéréographique.

Projection de Labire. — Labire avait imaginé de conserver le même tableau, mais de transporter le point de vue en dehors de la sphère à une distance égale au sinus de 45°; cette dernière projection conserve mieux les rapports des surfaces; mais elle est rarement employée à cause de la complication du tracé des méridiens et des parallèles.

Propriétés de la projection stéréographique. — Soit A un point de la sphère, menons par ce point et par l'œil un plan perpendiculaire à celui du tableau, et renfermant par conséquent le centre de la sphère et prenons le pour plan de la figure. Le plan tangent en A rencontre le tableau suivant une droite perpendiculaire au plan de la figure, et qui, si l'on rabat le tableau sur ce dernier plan autour de leur intersection commune, prend une position perpendiculaire à l'intersection et passant par le point K. Les tangentes à deux courbes passant par le point A rencontrent le tableau en deux points rabattus en D et en E et a étant la perspective de A, les perspectives des deux tangentes seront a D et a E; l'angle D a E en sera celui des deux courbes en perspective. Or le triangle A a K est isocèle, car l'angle A a pour mesure



$$\frac{1}{2} ANO = \frac{1}{2} (AN + 90°)$$

et l'expression de la mesure de A a K en la même; il résulte de là que le triangle ADE de l'espace est égal à aDE, et que les angles DAE et DaE sont égaux.

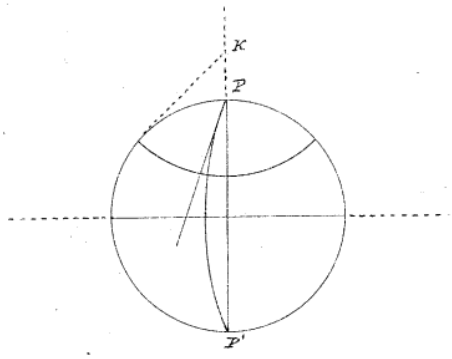
De cette propriété, il résulte qu'un cercle de la sphère a toujours pour perspective un autre cercle. En effet, le cône circonscrit à la sphère le long du premier cercle a toutes ses génératrices normales à ce cercle; par suite du théorème précédent, elles le sont aussi en perspective, et comme leurs perspectives sont des droites passant par un même point qui est la perspective du sommet du cône, celle du cercle ne peut être qu'un autre cercle ayant son centre en ce point.

On conclut de la première propriété que, sur de petites espaces, les figures

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

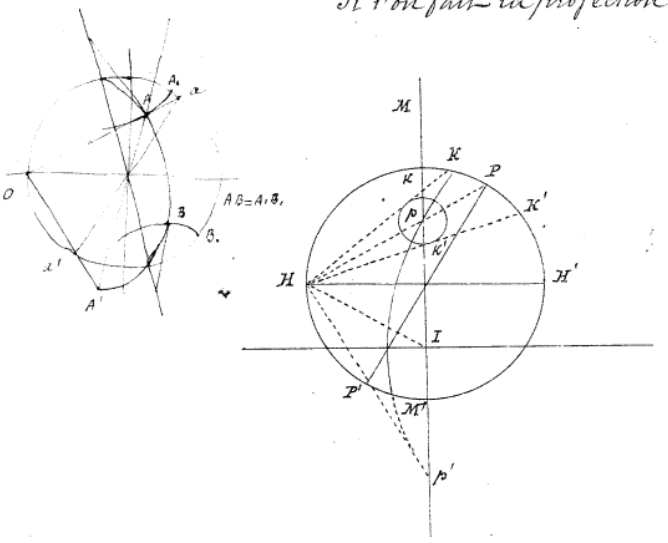
conservent à peu près leur forme dans la projection stéréographique ; mais le rapport des surfaces sont fortement altéré ; car au centre de la carte elles sont réduites au quart tandis que sur le bord elles restent à peu près ce qu'elles sont sur la sphère.

La seconde propriété rend le tracé du canevas extrêmement simple ; car les méridiens et les parallèles, qui sont des cercles sur la sphère, seront aussi représentés par des cercles sur la projection.



Si la projection se fait sur un méridien, on a immédiatement le méridien central et l'équateur, qui sont deux droites perpendiculaires. Pour tracer un méridien quelconque, on mène par le point P une droite faisant avec PP' un angle égal à celui du méridien proposé avec le méridien central ; elle doit être tangente au cercle cherché, qui a d'ailleurs son centre sur le prolongement de l'équateur ; on construira donc immédiatement ce cercle. Pour tracer un parallèle, on remarque qu'il doit être normal au cercle qui forme le contour extérieur de la carte ; il aura donc son centre sur la tangente menée à ce cercle par le point où doit aboutir le parallèle ; ce centre est en même temps sur le prolongement de PP' ; il sera donc en K.

Si l'on fait la projection sur l'horizon d'un lieu, ce lieu sera le centre de la carte, et son méridien sera le méridien central MM'. En rabattant ce méridien sur le plan de la figure, on amène les pôles en P et P' sur une droite qui fait avec MM' un angle égal à la latitude comme du lieu ; le point de vue se rabat en H et les perspectives des pôles sont les points p et p' qui le seront encore après qu'on aura relevé le plan du méridien. Une perpendiculaire élevée sur le milieu I de pp' (1) sera donc le lieu des centres des méridiens de la carte ; ces méridiens se construisent exactement comme dans le cas précédent. Pour avoir un parallèle, on prend de part et d'autre de P, sur le méridien rabattu, des arcs PK, PK' égaux à la colatitude de ce parallèle ; les points k et k', perspectives de K et K' appartiennent au parallèle cherché dont ils déterminent un diamètre, puisque le centre doit être sur la droite pp'.



Mappemonde globulaire des Anglais. — Les méridiens et les parallèles sont

---

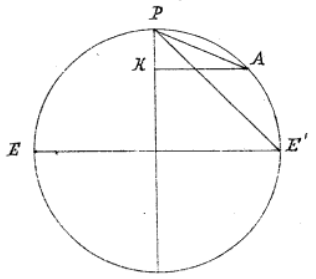
(1). On peut trouver le point I par lequel passe la ligne des centres des méridiens

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des arcs de cercle également espacés. Pour les tracer, on divise en parties égales deux diamètres rectangulaires dont l'un représente le méridien central et l'autre l'équateur; on divise de même les deux demi-circonférences du méridien sur lequel on exécute la projection, et on a alors trois points pour chaque arc de cercle.

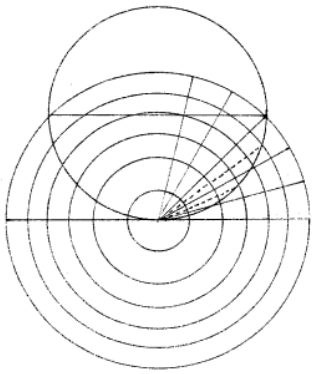
Ce système n'est pas, à proprement parler, une projection; on ne peut y faire aucune construction géométrique, ni y prendre de mesures exactes; mais pour une mappemonde sur laquelle on ne cherche qu'à donner une idée des formes et des dimensions relatives des continents, il a l'avantage de n'altérer beaucoup ni les unes ni les autres. La construction que l'on vient d'indiquer est d'ailleurs extrêmement simple.

Canevas de Lorgna. — Imaginé pour conserver les superficies, sa construction repose sur ce que la surface d'un hémisphère est égale à $2\pi r^2$, et par suite à l'aire du cercle dont le rayon est PE', et plus généralement sur ce que la surface de la calotte sphérique, qui a pour base le parallèle d'un point A est égale à celle du cercle dont le rayon est PA, car elle a pour expression



$$2\pi r.PK = \pi.\overline{PA}^2.$$

La surface de l'hémisphère étant partagée en demi fuseaux compris entre des grands cercles qui passent par l'axe, c'est-à-dire par le diamètre perpendiculaire au grand cercle qui partage la sphère. Si l'on divise la carte en un même nombre de secteurs circulaires, chacun d'eux sera équivalent à l'un des demi-fuseaux. On donne pour rayons aux parallèles les cordes des arcs correspondants, comme la figure le montre; les calottes sphériques sont ainsi conservées; et par suite aussi les intervalles entre les parallèles.



Ce système est très convenable pour les cartes polaires; les méridiens sont alors représentés par des rayons du cercle, et les parallèles par des cercles concentriques. Il n'y a pas pour ces régions de déformation sensible; car on voit que les méridiens restent perpendiculaires aux parallèles. A la vérité, les distances ne sont pas tout à fait égales aux distances rectilignes prises sur la carte; mais elle en diffèrent peu et s'en déduisent facilement.

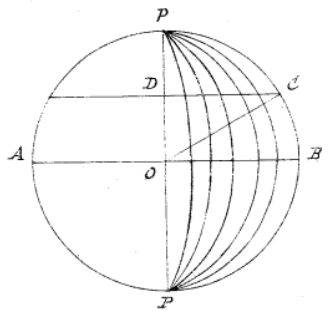
---

sans prolonger HP' jusqu'en p' en prouvant que HI est une perpendiculaire sur PP': ce qui est très facile.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Canevas homalographique[1] de M. Babinet. — M. Babinet a fait exécuter une mappemonde sur laquelle les surfaces sont conservées, sans que les angles soient trop altérés, du moins dans la partie moyenne de chaque hémisphère.

Les méridiens y sont représentés par des ellipses et les parallèles par des lignes droites perpendiculaires au méridien central dont la projection en elle-même une ligne droite. Le diamètre AB en divisé en parties égales; les espaces compris entre deux ellipses consécutives sont égaux entre eux, car les aires des ellipses sont proportionnelles à leurs petits axes; ils sont par suite égaux à la moitié du fuseau correspondant sur la sphère. Il suffit donc, pour atteindre le but proposé, d'espacer les parallèles de manière à conserver les surfaces dans les zônes.



Soient r le rayon de la carte, abstraction faite de la grandeur de l'échelle, l la latitude d'un parallèle quelconque, et x l'arc intercepté sur la carte entre ce parallèle et l'équateur. On aura

$$ODC = \frac{1}{2}\, OD \times DC = \frac{1}{2} r^2 \sin x \cos x,$$

$$COB = \frac{1}{2}\, r \,.\, BC = \frac{1}{2}\, r^2 x,$$

et par conséquent $\quad aire\ OBCD = \frac{1}{2} r^2 \sin x \cos x + \frac{1}{2} r^2 x.$

L'aire $OBCD$ doit être égale au quart de la zône interceptée sur la sphère entre l'équateur et le parallèle considéré, zone qui a pour expression

$$2\pi R \times R \sin l,$$

en désignant par R le rayon de la sphère. Or, la carte doit avoir une surface égale à celle d'un hémisphère, c'est-à-dire à $2\pi R^2$; il faut donc que

$$2\pi R^2 = \pi r^2,$$

et par suite, la zône a pour expression

$$\pi r^2 \sin l;$$

l'égalité entre les deux surfaces sera donc exprimée par la relation

$$\frac{1}{2} r^2 \sin x \cos x + \frac{1}{2} r^2 x = \frac{1}{4} \pi r^2 \sin l,$$

ou bien $\quad 2 \sin x \cos x + 2x = \pi \sin l,$

ou enfin $\quad \sin 2x + 2x = \pi \sin l,$

---

(1) De ομαλος, plat.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

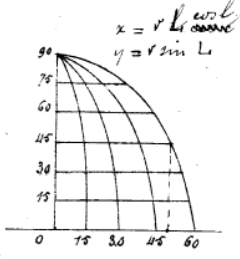
équation transcendante d'où l'on peut tirer par approximation les valeurs de x correspondantes à des valeurs déterminées de l.

Dans le voisinage des pôles les parallèles se rapprochent et coupent le contour de la carte sous des angles de plus en plus aigus; les figures éprouvent alors une déformation assez sensible. Il semblerait donc avantageux de joindre aux mappemondes exécutées dans ce système des cartes des contrées polaires dans le système de Lorgna; la propriété essentielle de la conservation des surfaces leur étant commune.

Cartes particulières. — Pour construire ces cartes, dans lesquelles on a besoin de conserver à la fois, autant que possible, les formes et les surfaces, on a d'abord imaginé de substituer à la sphère des surfaces coniques ou cylindriques que l'on pouvait développer sur un plan, et on a été conduit aux différents systèmes que nous allons faire connaître.

Développement conique. — Lorsqu'il s'agit de faire la carte d'un pays dont l'étendue ne comprend jamais un grand nombre de degrés en latitude, si l'on conçoit un cône à la sphère suivant le parallèle moyen, on pourra supposer que les deux surfaces du cône et de la sphère se confondent sensiblement entre les deux parallèles extrêmes, substituer la première à la seconde et la développer sur un plan; on formera ainsi un canevas de la carte sur lequel les méridiens seront représentés par des lignes droites et les parallèles par des cercles concentriques. Les méridiens et les parallèles se coupant à angles droits sur la carte comme sur la sphère, les angles sont sensiblement conservés; mais les surfaces sont rapidement altérées à mesure que l'on s'éloigne du parallèle moyen.

Carte de Flamsteed. — Dans ce système, on développe en ligne droite le méridien central. On porte sur ce méridien des longueurs égales aux arcs interceptés par les parallèles; par les points de division on mène des perpendiculaires qui représentent les parallèles sur lesquels on porte de même des longueurs égales aux arcs interceptés sur la sphère par les méridiens. Les courbes qui joignent les points de division correspondants représentent les méridiens sur la carte.



On remarquera que les surfaces sont conservées, mais que les angles des parallèles et des méridiens sont s'altèrent rapidement dans les parties de la carte qui s'éloignent du méridien central.

Le canevas de la nouvelle Carte de France est construit d'après un système qui est la combinaison des deux précédents.

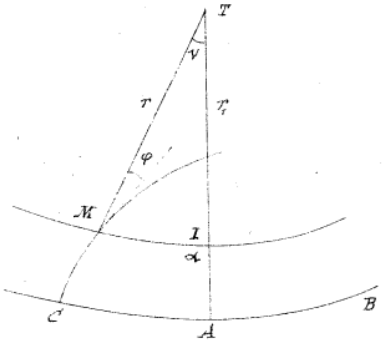
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Carte de France. — Le méridien central en une ligne droite sur laquelle on porte des longueurs égales aux arcs interceptés par les parallèles. Seulement ceux-ci, au lieu d'être tracés suivant des lignes droites, sont représentés par des arcs de cercles concentriques dont le centre est le sommet du cône circonscrit à la Terre, suivant un parallèle moyen entre les parallèles extrêmes qui comprennent la contrée dont on veut faire la carte. Le reste de la construction est analogue à celle de la carte de Flamstead : on porte sur les parallèles des longueurs égales aux arcs interceptés par les méridiens sur la sphère, et l'on obtient ainsi des points des méridiens sur la carte.

Ce tracé deviendrait identique avec celui de Flamstead pour une zône qui s'étendrait de part et d'autre de l'équateur.

Si l'on considère deux éléments compris entre deux méridiens et deux parallèles, l'un sur la sphère et l'autre sur la carte, d'après la construction qui vient d'être indiquée, ces éléments, que l'on peut assimiler chacun à un trapèze rectiligne, auraient évidemment même mesure ; par conséquent les surfaces sont rigoureusement conservées sur cette carte.

Voyons maintenant comment on pourra évaluer, en un point quelconque de la carte, l'altération produite sur les angles, pour cela, il suffira évidemment de chercher de combien les angles sous lesquels les méridiens coupent les parallèles diffèrent de 90°.



Cette différence φ est égale à l'angle de la tangente en M à la courbe qui représente le méridien avec le rayon vecteur $MT = r$ et l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle φ est en général

$$tg\ \varphi = \frac{r\,dv}{dr}$$

Or, si nous désignons par α la longueur de l'arc AI compris entre le parallèle moyen CAB et le parallèle MI du point M, et par a le rayon de la Terre supposée sphérique, $\frac{\alpha}{a}$ sera la différence des latitudes des deux parallèles. Si donc l_1 désigne la latitude du parallèle moyen, $l_1 + \frac{\alpha}{a}$ sera la latitude du point M ; mais on a d'une part

$$MI = rv \quad \text{et de l'autre} \quad MI = L\,a\cos\left(l_1 + \frac{\alpha}{a}\right)$$

L étant la longitude du point M ;

donc

$$rv = L\,a\cos\left(l_1 + \frac{\alpha}{a}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'ailleurs $$r = r_1 - \alpha = a \operatorname{cotg} l_1 - \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

En différentiant ces deux équations il vient :

$$r\,dv + v\,dr = -L \sin\left(l_1 + \frac{\alpha}{a}\right) d\alpha$$

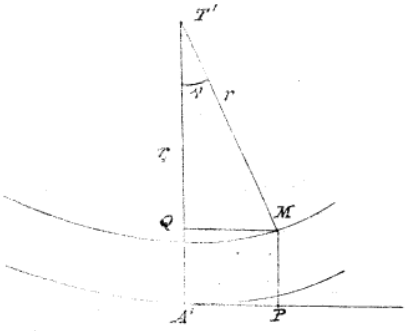
et $$dr = -d\alpha ;$$

d'où $$\frac{r\,dv}{dr} = -v + L \sin\left(l_1 + \frac{\alpha}{a}\right) ;$$

et en remplaçant v par sa valeur tirée des relations (1) et (2)

$$tg\,\varphi = L \sin\left(l_1 + \frac{\alpha}{a}\right) - \frac{L a \cos\left(l_1 + \frac{\alpha}{a}\right)}{a \operatorname{cotg} l_1 - \alpha},$$

expression qui converge vers zéro à mesure que α diminue et qui reste toujours très petite tant que L et α ne dépassent pas 7 à 8°, comme cela a lieu pour la Carte de France, aux extrémités de laquelle l'angle α n'atteint pas 18'. (1)



Au lieu de déterminer les intersections des méridiens et des parallèles par la construction directe, on les construit en réalité à l'aide de leurs coordonnées rapportées à deux axes rectangulaires. Ces axes sont le méridien central et la tangente au parallèle moyen, et l'on a

$$x = MQ = r \sin v,$$

$$y = MP = A'Q = r_1 - r \cos v,$$

$$y = a \operatorname{cotg} l_1 - r \cos v.$$

On peut tenir compte de l'aplatissement dans le calcul de r et de v qui entrent dans cette formule. Il faut pour cela multiplier l_1 par la grande normale

---

(1) Pour construire le canevas de la carte de France, on a pris pour méridien central celui de l'Observatoire de Paris, et pour parallèle moyen celui du 45e degré de latitude ; le point d'intersection de ce méridien et de ce parallèle étant assez éloigné du centre de la France, qui en est plus septentrional, les déformations aux extrémités N.E et N.O, qui sont les plus sensibles, auraient pu être diminuées de près de moitié si l'on avait pris le parallèle moyen à la latitude de 46° 30' environ.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et remplacer l'arc sphérique α par l'arc elliptique S ; on aura alors

$$r = N \operatorname{cotg} l_1 - S,$$

$$x = \frac{N \cos\left(l_1 + \frac{\alpha}{a}\right) L}{r}$$

On a réduit en Table les valeurs de x et de y.

Les axes rectangulaires de la Carte de France sont le méridien de l'Observatoire de Paris et une perpendiculaire menée par le 50^g grade (45e degré)

L'échelle adoptée pour cette carte est le 80 000e.

Pour la division de la Carte en feuilles, voyez la planche 20 du Portefeuille.

Carte de Cassini. — Les sommets de la triangulation que Cassini avait étendue sur toute la France, ont été rapportés sur la Carte au moyen de deux coordonnées désignées sous les noms de distance à la méridienne et distance à la perpendiculaire.

Les axes de ce système de coordonnées passent tous deux par l'Observatoire de Paris ; l'un d'eux est le méridien, l'autre le grand cercle qui lui est perpendiculaire. Ces deux grands cercles étant rectifiés sur la projection, un point quelconque se trouvait déterminé par ses distances rectilignes à ces deux axes.

Il est facile de reconnaître que sur la Sphère la distance à la méridienne est un arc de grand cercle perpendiculaire au méridien central et la distance à la perpendiculaire, l'arc intercepté sur le méridien central entre l'origine des coordonnées et le pied de cet arc de grand cercle ; tous les grands cercles qui projettent les différents points sur le méridien central vont donc passer par le pôle de ce méridien. De là une analogie entre ce système et celui de la carte marine dont nous allons nous occuper.

Le système de la Carte de Cassini produit sur les éléments éloignés des deux axes une altération un peu moindre que la projection de la nouvelle Carte de France, seulement les méridiens et les parallèles ne pourraient pas y être tracés d'une manière simple, et l'on n'y tiendrait pas facilement compte de l'aplatissement.

Cartes marines. — La manière la plus simple de diriger un navire d'un point à un autre est de le maintenir dans le même rumb de vent, c'est-à-dire de lui faire couper dans sa marche tous les méridiens sous le même angle. La ligne que décrit ainsi le navire se nomme loxodromie (chemin oblique).

L'objet des cartes marines est d'indiquer immédiatement cet angle au pilote.

A cet effet, l'équateur étant développé en ligne droite, on représente tous les méridiens par des perpendiculaires à cette ligne, et tous les cercles de latitude par d'autres droites parallèles à l'équateur, espacées entre elles d'après cette condition que les angles formés par deux éléments de courbe sur la Sphère soient conservés sur la carte.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

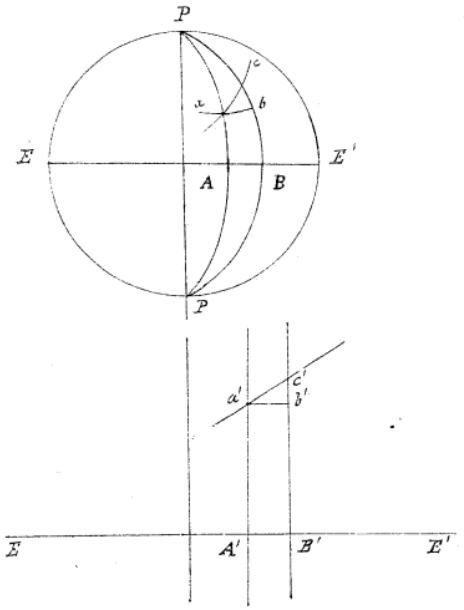
Il est clair que sur une carte ainsi construite, la ligne que doit suivre le navire à la surface du globe devient une droite ; il suffit donc de tracer cette droite entre le point de départ et le point d'arrivée et de lire, au moyen d'un rapporteur, l'angle qu'elle fait avec l'un quelconque des méridiens. C'est cet angle, corrigé de la déclinaison locale de l'aiguille aimantée que l'on transporte ensuite à la boussole en agissant sur le gouvernail.

Voyons comment on pourra calculer la distance d'un parallèle quelconque à l'équateur, en satisfaisant à la condition énoncée ci-dessus.

Soit ac un élément de courbe qui coupe les deux méridiens consécutifs PAP', PBP' ; menons la parallèle ab du point a ; pour que l'angle acb soit conservé sur la carte en $a'b'c'$, il faut que l'on ait

$$\frac{cb}{ab} = \frac{c'b'}{a'b'}$$

Or, on a : $$a'b' = A'B' = AB = \frac{ab}{\cos l},$$



l étant la latitude du parallèle ab ; l'égalité précédente revient donc à

$$cb = c'b' \cos l,$$

ou $$c'b' = \frac{dl}{\cos l},$$

cb étant en effet l'accroissement infiniment petit de la latitude l. En appelant h la longueur $A'a'$ sur la Carte marine, on devra donc avoir

$$h = \int_0^l \frac{dl}{\cos l} = \int_0^l \frac{dl}{2 \sin \frac{1}{2}(90° + l) \cos \frac{1}{2}(90° + l)}$$

$$h = \int_0^l \frac{\frac{1}{2} \frac{dl}{\cos^2 \frac{1}{2}(90° + l)}}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(90° + l)} = l \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90° + l)$$

$$h = \frac{1}{M} \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(90° + l)$$

et pour avoir h en minutes

$$h = \frac{1}{M \sin 1'} \log . \operatorname{tg} . \frac{1}{2}(90° + l)$$

On peut arriver facilement à une formule plus exacte en tenant compte

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

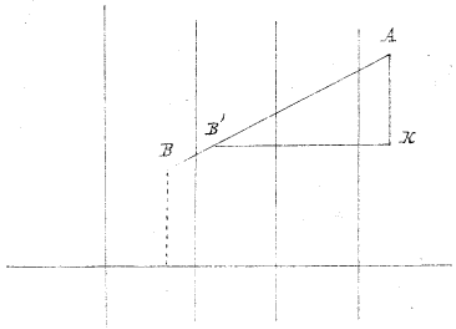
de l'aplatissement terrestre.

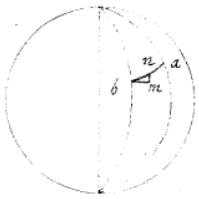
L'unité de mesure des cartes marines est la minute équatoriale dont la longueur est 1851m, 85.

Quant à l'échelle, on conçoit qu'elle varie en chaque point avec la latitude.(1) Les quatre côtés des cartes marines portent une graduation ; celles qui sont dans le sens des méridiens donnent des latitudes croissantes ; les deux autres représentent l'échelle des parties égales de l'équateur qui est la seule ligne développée en vraie grandeur.

Les cartes marines servent à résoudre plusieurs problèmes relatifs à la marche du navire. On a déjà vu qu'elles donnaient immédiatement les directions. Les distances se déterminent aussi facilement.

Considérons par exemple les deux points A et B de la carte et cherchons leur distance comptée sur l'arc de loxodromie qui les unit. Pour cela, traçons cet arc sur la sphère entre les deux points a et b qui correspondent aux points A et B de la carte, et divisons cet arc en un très grand nombre d'arcs égaux ; puis menons par les points de division des méridiens et des parallèles, nous formerons ainsi une série de petits triangles, tels que bmn qui sont égaux, puisque la ligne ab est également inclinée sur tous les méridiens. La somme de leurs côtés dirigés suivant les méridiens est égale à a b multiplié par le sinus de cette inclinaison constante ; elle est égale d'autre part à la différence des latitudes de a et de b multipliée par le rayon de la sphère. De là la solution suivante :





On prend sur l'échelle des parties égales une longueur correspondante à la différence des latitudes des deux points considérés, et on la porte sur le méridien du point A, en A K ; la longueur A B mesurée au moyen de l'échelle des parties égales donne la distance cherchée.

---

(1) Au lieu d'une échelle qui ne pourrait convenir à toute l'étendue de la carte, on indique, sur les cartes marines et sur les catalogues la valeur de la minute équatoriale, ou même celle du degré lorsque la carte est à petite échelle.

Pour les belles cartes du Pilote français, on a fait $m = 0^m, 0271$ ou $m = 0^m, 0103$, suivant qu'il s'agissait de représenter les abords d'un port, d'une rade, ou bien une plus grande étendue de côtes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Toutes les questions de pilotage se ramènent à celle-là. La Marine la simplifient encore le plus ordinairement en mesurant directement sur l'échelle des latitudes croissantes, ce qui suffit lorsque la distance à mesurer en assez petite.

La loxodromie diffère d'autant plus d'un arc de grand cercle qu'elle en plus éloignée de l'équateur. Il serait donc préférable, dans un grand nombre de cas, de diriger le navire sur le grand cercle qui passe par le point de départ et par le point d'arrivée.

La navigation sur le grand cercle en particulièrement avantageuse pour les navires à vapeur avec lesquels on a moins à se préoccuper de la direction des vents et des courants; elle en employée depuis quelques années dans toutes les traversées un peu considérables. On conçoit d'ailleurs que le procédé que l'on emploie alors pour diriger le navire revient naturellement à substituer à l'arc de grand cercle lui-même une série de petits arcs de loxodromie dont l'inclinaison varie successivement. La ligne de plus courte distance et la loxodromie sont les deux seules, qu'en vertu de leur définition, on puisse tracer matériellement sur le Sphéroïde. La première se trace par alignements successifs, et la seconde au moyen de la boussole.

Chapitre VIII.

Des observations astronomiques qui servent à déterminer les positions géographiques.

Les éléments que les observations astronomiques peuvent procurer aux Géographes et aux Marins sont: l'heure du lieu, sa latitude, sa longitude, et enfin l'azimuth d'une direction; ou, ce qui revient au même, la direction du méridien.

Les méthodes d'observation doivent être appropriées au but qu'on se propose, aux instruments que l'on peut employer, en un mot, aux circonstances dans lesquelles on se trouve placé. En Géodésie, on vise à la plus grande précision possible; dans les observations géographiques, cette recherche de précision exigerait trop de temps et serait le plus souvent inutile; enfin, à la mer, on se borne nécessairement à obtenir des résultats qui permettent d'éviter les accidents.

Détermination de l'heure. — Pour pouvoir se servir d'un chronomètre, il faut avant tout connaître sa marche diurne. Cette marche sera donnée soit par la comparaison avec celle des instruments déjà étudiés dans un observatoire, soit directement en notant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les heures de retour successifs d'une même étoile à la croisée des fils d'une lunette dirigée une première fois sur cette étoile à un instant quelconque et laissée dans la même direction pendant plusieurs jours.

Nous supposerons donc la marche du chronomètre comme, et par suite, les intervalles entre les instants des différentes observations que nous pourrons avoir à faire seront exactement déterminées, que le chronomètre soit réglé sur le temps moyen ou sur le temps sidéral.

Cela posé, voici les principales méthodes pour trouver l'heure:

Par des observations de passage au méridien — Nous avons vu dans la deuxième Partie du Cours comment on procédait à l'installation d'une lunette méridienne et comment on pouvait tenir compte par le calcul des défauts de rectification de ces instruments. La détermination directe de l'heure par l'observation de l'instant du passage d'un astre aux différents fils du réticule de la lunette méridienne n'a pas besoin d'autre explication.

Nous ferons simplement remarquer que les observations étant corrigées des erreurs instrumentales, si l'on observe le Soleil et que le chronomètre soit réglé sur le temps sidéral, on déterminera facilement son état, c'est-à-dire son retard ou son avance, puisqu'il devrait marquer l'ascension droite du Soleil à midi vrai, et s'il est réglé sur le temps moyen, on aura de même ce retard ou cette avance, puisque dans ce cas il devrait marquer le temps moyen à midi vrai.

Ces deux quantités se trouvent dans les éphémérides du Soleil, la dernière immédiatement, et la première par une faible correction entre le midi vrai et le midi moyen, pour lequel on donne l'ascension droite.

Si l'on a observé une étoile, la pendule sidérale devrait marquer l'ascension droite apparente de cette étoile, c'est-à-dire corrigée de la précession, de la nutation et de l'aberration. Cette ascension droite est donnée dans la Connaissance des Temps pour 115 étoiles choisies. Sa différence avec l'heure indiquée par le chronomètre à l'instant du passage en l'état cherché.

Si le chronomètre est réglé sur le temps moyen, on transformera ces indications en temps sidéral, comme il a été expliqué dans la Théorie du Soleil.

Les observateurs géodésiques sont souvent munis d'une lunette méridienne. D'ailleurs l'usage des instruments méridiens portatifs tend à se répandre. Les voyageurs, les Marins surtout, peuvent les installer aux relâches et faire ainsi en peu de temps de observations précieuses pour la Géographie et l'Hydrographie. Cette première méthode pour trouver l'heure devrait donc être rappelée ici.

Par l'observation de la hauteur d'un astre au dessus de l'horizon. — La latitude est supposée connue, au moins approximativement, et il en est en effet toujours ainsi dans la pratique. On se sert pour l'observation, d'un théodolite ou d'un sextant, et l'on peut opérer à terre ou en mer.

Si l'on observe une étoile, on la choisira parmi celles dont la position appa-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

-rentes sont données par la Connaissance des Temps. L'observation se fera près du premier vertical, et, autant que possible à une assez grande hauteur au dessus de l'horizon (Voyez la remarque suivante). Cette hauteur, ou son complément la distance zénithale apparente z', doit être corrigée de la réfraction θ et lorsqu'on opérera avec précision, il faut tenir compte, pour cette correction, des indications du thermomètre.

Soit donc $z = z' + \theta$ la distance zénithale vraie, en posant $2S = z + \lambda + \delta$, on calculera l'angle horaire H par la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} H = \sqrt{\frac{\sin (S-\lambda) \sin (S-\delta)}{\sin \lambda \sin \delta}}$$

et l'on déduira l'heure par la relation

$$H = R \pm \tfrac{1}{15} H,$$

R étant l'ascension droite apparente de l'étoile donnée par les Ephémérides.

Pour plus d'exactitude, on observe plusieurs hauteurs successives, et l'on note les heures de chaque observation; on regarde la moyenne des hauteurs comme correspondant à la moyenne des heures, ce que l'on peut admettre sans erreur lorsqu'on opère loin du méridien (1).

Lorsqu'on observe le Soleil, la distance zénithale z' doit être corrigée de la réfraction θ et de la parallaxe p que l'on trouve dans une Table de la Connaissance des Temps, pour la date de l'observation; de sorte que la distance zénithale vraie $z = z' + \theta - p$; comme on observe l'un des bords de l'astre, il faudrait en outre faire la correction du demi-diamètre apparent; mais on s'en dispense en faisant les observations par couples dans lesquelles on amène alternativement le bord supérieur et le bord inférieur du Soleil en contact avec le fil horizontal de la lunette.

Dans le cas du Soleil, indépendamment de la latitude du lieu, il faut encore connaître approximativement sa longitude pour pouvoir tenir compte de la variation de la déclinaison de l'astre, les Tables étant calculées pour le temps de Paris.

Remarque. Lorsqu'on détermine l'heure au moyen de l'observation de la hauteur du Soleil, on peut avoir à craindre trois causes d'erreurs correspondant aux trois éléments du calcul : l'erreur sur l'observation même de la hauteur; l'erreur de la latitude du lieu de l'observation, et enfin celle de la longitude. Cette dernière ne porte que sur la détermination de la déclinaison du Soleil, et est insensible parce qu'on connaît toujours la

---

(1) Cette supposition est suffisamment exacte pendant plusieurs minutes quand on observe près du premier vertical; mais quand l'azimut de l'astre s'écarte plus que de 45° à l'E ou à l'O, cet intervalle de temps doit être réduit à 2m au plus; on en conclut de là qu'il ne faut composer les séries d'observations que de deux hauteurs si l'azimut est de 45°, et de quatre hauteurs si l'azimut est compris entre 45° et 60°.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

longitude avec une approximation suffisante ; nous examinerons donc seulement l'influence de chacune des deux autres.

Soit dz l'erreur sur la distance zénithale et dH l'erreur correspondante sur l'angle horaire ; ces quantités étant très petites, nous les traiterons comme des différentielles. Or, en différentiant la formule

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos H,$$

par rapport à z et à H, on trouve

$$dH = \frac{\sin z}{\sin\lambda \sin\delta \sin H}\, dz = \frac{dz}{\sin A \sin\lambda};$$

d'où l'on voit que l'erreur sur l'angle horaire est toujours plus grande que l'erreur d'observation, et en second lieu, que cette erreur est minimum pour $A = 90°$.

On voit aussi par la première expression de dH que plus z est petit, c'est à-dire plus l'astre est élevé au dessus de l'horizon et plus l'erreur résultante est faible ; mais on ne peut avoir égard à cette circonstance qu'à terre, les observations faites en mer sur de grandes hauteurs étant difficiles, et par conséquent l'erreur dz augmentant lorsque $\sin z$ diminue.

Soit actuellement $d\lambda$ l'erreur sur la latitude, en différentiant cette fois la formule

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos H,$$

par rapport à λ et H, on trouve

$$dH = \frac{(\sin\delta \cos\lambda \cos H + \cos\delta \sin\lambda)\, d\lambda}{\sin\delta \sin\lambda \sin H} = \frac{\sin z \cos A}{\sin\lambda \sin z \sin A}\, d\lambda = \frac{\operatorname{cotg} A}{\sin\lambda}\, d\lambda,$$

formule qui montre que l'erreur sur l'angle horaire est d'autant plus faible que l'observation a été faite plus près du premier vertical, et même que lorsque l'observation est faite dans ce plan, elle devient tout à fait indépendante de la latitude. L'expression

$$dH = \left(\frac{\operatorname{cotg}\delta}{\sin H} - \frac{\operatorname{cotg}\lambda}{\operatorname{tg} H}\right) d\lambda$$

peut d'ailleurs servir à calculer la correction qu'il conviendrait de faire subir à H si l'on déterminait plus tard la latitude et par suite $d\lambda$.

En opérant avec un théodolite dans un lieu dont la latitude est bien connue, on obtient ainsi l'heure avec une très grande exactitude. Avec un simple sextant et un horizon artificiel, lorsque les circonstances dans lesquelles on observe sont convenables (la latitude étant toujours supposée connue), on peut obtenir l'heure à 1' près. En mer, dans les conditions les plus favorables, en égard à l'incertitude qui pèse toujours sur la véritable valeur de la dépression, on n'obtient l'heure qu'à moins de 2 ou 3' près.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Quels que soient les instruments que l'on emploie, les observations de distances zénithales peuvent être entachées d'erreurs constantes que l'on parvient à atténuer en observant à égale distance du zénith de part et d'autre du méridien. C'est la dernière méthode que nous avons à décrire.

Méthode des hauteurs correspondantes. — Supposons d'abord que l'instrument que l'on emploie soit un théodolite et que l'on observe une étoile à l'Est, on note l'heure du passage de l'étoile au fil horizontal de la lunette fixée au limbe vertical, en ayant soin de régler exactement le niveau.

Cette première observation doit se faire trois ou quatre heures avant le passage de l'étoile au méridien ; puis on attend trois ou quatre heures après, et tout en maintenant la lunette dans sa position sur le limbe vertical, on l'amène peu à peu dans la nouvelle direction par le mouvement azimutal, en surveillant attentivement le niveau, et on note l'heure du nouveau passage au fil horizontal. La moyenne des deux heures est évidemment l'heure que marquait le chronomètre au moment du passage de l'étoile au méridien. Connaissant l'ascension droite de l'étoile, on en conclut l'avance ou le retard du chronomètre.

En général, pour les observations destinées à la détermination de l'heure, il faut choisir des étoiles dont la déclinaison ne dépasse pas 30° ; au delà, le mouvement apparent des étoiles dans les lunettes devient trop lent, et l'on commet une erreur en estimant l'instant de leur passage aux fils.

Lorsqu'on emploie les observations du Soleil, comme sa déclinaison varie sensiblement dans l'intervalle de deux observations, il faut faire une correction désignée sous le nom d'équation des hauteurs correspondantes.

Soit H l'angle horaire du Soleil lors de l'observation du matin, ou plutôt l'angle de son cercle horaire avec le plan du méridien, l'angle horaire de cet astre lors de l'observation du soir sera

$$H + dH.$$

Si h et h' sont les heures des observations marquées par le chronomètre, et H l'heure cherchée que ce chronomètre a dû marquer à midi vrai, on aura

Le matin $\qquad H = h + \frac{1}{15} H,$

Et le soir $\qquad H = h' - \frac{1}{15}(H + dH)$

d'où

$$H = \frac{h + h'}{2} - \frac{1}{30} dH.$$

Il s'agit de calculer dH, et pour cela, il suffira de différentier l'équation

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos H,$$

par rapport à H et à δ.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On trouve ainsi

$$dH = \left(- \frac{\operatorname{cotg} \lambda}{\sin H} + \frac{\operatorname{cotg} \delta}{\operatorname{tg} H} \right) d\delta .$$

Comme il s'agit d'une correction toujours faible, on peut dans cette formule employer pour λ une valeur approchée en prenant pour H, $15 \frac{h'-h}{2}$, enfin le complément δ de la déclinaison du Soleil peut être pris pour midi dans la Table; le signe de la correction dH est le même que celui de la variation de la distance polaire de l'astre $d\delta$.

Cette méthode est très exacte; elle rend l'observateur indépendant de la lecture de la distance zénithale et de certaines erreurs constantes des instruments; mais elle a l'inconvénient de pouvoir manquer si le temps se couvre au moment du second passage.

On peut l'employer avec le sextant soit à terre soit à bord d'un navire; cependant en mer, on prend habituellement la hauteur du Soleil dont on se sert pour faire un calcul d'heure, la méthode précédente ne pouvant guère s'appliquer lorsqu'on est en mouvement, ou du moins exigeant des corrections plus ou moins longues. On n'est observe pas moins le Soleil matin et soir, toutes les fois que le temps le permet, afin de ne pas s'écarter de l'époque de midi, à laquelle on détermine la latitude.

Ajoutons que si à la latitude et à l'époque de l'année où l'on se trouve, le Soleil doit passer au méridien au dessous de 30° de hauteur, on est obligé de se servir d'observation d'étoile pour déterminer l'heure avec précision. Il est inutile de rappeler ici le moyen simple mais peu exact qui a été indiqué à l'occasion de la Théorie du Soleil pour trouver l'heure.

Détermination de la latitude. — La latitude, de même que l'heure, peut se déduire d'observations faites dans le méridien ou hors du méridien. Dans le premier cas, on peut trouver la latitude au moyen d'instruments divisés sans connaître l'heure, dans le second, il est nécessaire de noter l'heure marquée par un chronomètre dont la marche est connue, et souvent même on doit connaître l'heure du lieu avec exactitude. Les méthodes qui servent à trouver la latitude sont d'ailleurs très nombreuses; nous nous arrêterons aux plus remarquables et à celles qui sont le plus fréquemment employées.

Observations méridiennes. — L'une de méthodes les plus exactes pour trouver la latitude est celle qui consiste à saisir le passage supérieur et inférieur d'une étoile très voisine du pôle dans le méridien, en observant dans les deux cas le contact de l'étoile avec le fil horizontal d'une cercle mural ou d'un cercle méridien. Le résultat auquel on parvient en prenant la demi-somme des deux hauteurs corrigées de la réfraction est indépendante de la déclinaison de l'étoile, de l'aberration et de la nutation; et si l'étoile est très près du pôle, comme α ou β de la petite Ourse, tant que la latitude est supérieure à 20 ou 25°, l'erreur à craindre sur la réfraction est extrêmement faible.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Lorsqu'on a fait une seule observation de hauteur ou de distance zénithale dans le méridien, on a besoin de connaître la distance polaire δ de l'astre, et afin d'éviter les erreurs de réfraction, on a dû choisir cet astre parmi ceux qui passent dans le voisinage du zénith. On a alors pour calculer la latitude ou son complément la relation simple

$$\lambda = \delta \pm z .$$

suivant que l'astre est passé du côté nord ou du côté sud ; δ étant la distance polaire apparente (donnée par les éphémérides pour un certain nombre d'étoiles) et z la distance zénithale corrigée de la réfraction.

Afin d'éviter les erreurs constantes attribuées aux effets de la gravité, on fait les observations de part et d'autre du zénith sur des étoiles qui s'en approchent autant l'une de leur passage au méridien, de sorte que l'erreur de l'instrument doit être à peu près la même ainsi que la réfraction. La moyenne de deux résultats donne la latitude avec plus de précision.

On élimine encore les erreurs du genre de celles dont nous parlons en observant l'astre directement et par réflexion dans un bain de mercure.

En mer, l'observation de la hauteur du Soleil à son passage au méridien est celle dont on fait le plus fréquemment usage pour déterminer la latitude. Il suffit alors de connaître approximativement l'heure et la longitude pour trouver, au moyen de la Connaissance des Temps, la déclinaison du Soleil au moment de l'observation. La hauteur observée doit être d'ailleurs corrigée de la réfraction, de la dépression de l'horizon et du demi diamètre apparent.

Les marins emploient assez rarement les étoiles à cause de la difficulté d'observer l'horizon, et parce que l'instant du passage de l'étoile au méridien est plus difficile à saisir que celui du Soleil. Cependant, dans les mers polaires, où le Soleil s'élève trop peu au dessus de l'horizon et où les crépuscules laissent mieux distinguer l'horizon de la mer, on doit avoir recours aux étoiles.

Observations circumméridiennes. — Lorsqu'on emploie des instruments répétiteurs tels que le cercle de Borda, ou le théodolite, on peut observer non plus dans le plan du méridien, mais dans le voisinage de ce plan, en ayant soin de faire le même nombre d'observations de part et d'autre, la moyenne de ces observations, convenablement corrigée, conduit à un résultat plus exact. On doit connaître dans ce cas assez exactement l'état et la marche du chronomètre.

Soient $z, z', z'', \ldots$ n distances zénithales correspondant aux heures $h, h', h'' \ldots$ marquées par le chronomètre ; appelons $x, x', x'' \ldots$ la correction très faible qu'il faudra faire subir séparément à chacune des distances zénithales correspondantes pour avoir celle que l'on observerait dans le méridien

$$\frac{z - x + z' - x' + z'' - x'' + \ldots}{n}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sera la moyenne des observations réduites au méridien ; comme on lit déjà sur l'instrument

$$\frac{z + z' + z'' \ldots\ldots}{n}$$

il ne s'agit plus que de trouver une formule au moyen de laquelle on pourra calculer la correction correspondante à chaque distance zénithale en fonction des heures observées. Or, on a

$$\cos z = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos H = \cos(\delta-\lambda) - 2\sin\delta\sin\lambda\sin^2\tfrac{1}{2}H.$$

Désignons par ξ la distance zénithale de l'astre dans le méridien, on aura

$$\pm(\delta-\lambda) = \xi.$$

et par conséquent l'expression précédente pourra s'écrire

$$\cos z - \cos\xi = -2\sin\delta\sin\lambda\sin^2\tfrac{1}{2}H,$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}(z+\xi)\sin\tfrac{1}{2}(z-\xi) = -2\sin\delta\sin\lambda\sin^2\tfrac{1}{2}H;$$

d'où, en remarquant que z et ξ diffèrent peu l'un de l'autre et que $z - \xi = x$ est la correction cherchée, on aura

$$x = -\frac{2\sin\delta\sin\lambda\sin^2\frac{1}{2}H}{\sin z\sin 1''},$$

H étant égal à $15(h - R)$, expression dans laquelle R désigne l'ascension droite apparente de l'astre. Telle est la formule de la réduction au méridien, dans laquelle on peut prendre pour λ la valeur approchée $\delta - z_1$, en désignant par z_1 la distance zénithale correspondant au milieu de la série, c'est-à-dire celle qui diffère le moins de la distance zénithale méridienne et que deux lectures consécutives faites sur le limbe du cercle peuvent donner, ou plus simplement la moyenne finale $\frac{z + z' + z'' + \ldots}{n}$ lorsque les observations ne sont pas trop écartées du méridien, l'une et l'autre de ces quantités étant corrigées de la réfraction.

Pour plus d'exactitude, on pourrait procéder par approximations successives, mais cela est inutile en général.

Remarque. — Lorsqu'on fait usage de la méthode précédente pour déterminer la latitude, il faut éviter les angles horaires un peu grands, parce qu'alors la plus petite erreur sur le temps de l'observation aurait une influence très sensible sur la correction, et par conséquent sur la latitude. Si l'on admet que les observations doivent être rejetées lorsque la correction augmente d'une seconde de degré pour une demi-seconde de temps, il sera facile de calculer en temps la limite au delà de laquelle on doit observer les distances zénithales, soit avant, soit après le passage de l'astre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

au méridien.

Il suffit pour cela de différentier l'équation

$$\cos z = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos H$$

par rapport à z et à H ; ce qui donne

$$-\sin z\,dz = -\sin\delta\sin\lambda\sin H\,dH ;$$

d'où l'on tire $$dH = \frac{\sin z}{\sin\delta\sin\lambda}\,\frac{dz}{\sin H} = \frac{\pm\sin(\delta-\lambda)}{\sin\delta\sin\lambda}\,\frac{dz}{\sin H} ;$$

ou bien encore $$dH = \pm(\operatorname{cotg}\lambda - \operatorname{cotg}\delta)\frac{dz}{\sin H}.$$

Remplaçant $\sin H$ par $H\sin 1''$ et multipliant par 15 pour tout exprimer en angle, on aura

$$15\,dH \pm (\operatorname{cotg}\lambda - \operatorname{cotg}\delta)\,\frac{dz}{15\,H\sin 1''} ;$$

en conservant seulement le 1er terme et en faisant $dH = \frac{1}{2}{}^s$ et $dz = 1'$, on trouvera enfin

$$H = \pm\frac{1}{2.15.15\sin 1''}(\operatorname{cotg}\lambda - \operatorname{cotg}\delta)$$

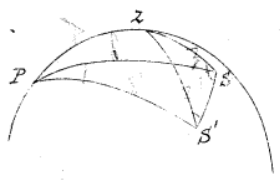
expression dont on a calculé une Table dans laquelle on entre avec la hauteur et la déclinaison de l'astre pour arguments. Cette Table, très utile à consulter, se trouve dans un Mémoire sur l'emploi des chronomètres, par M. Givry, Ingénieur Hydrographe de la Marine.

Observations extra méridiennes. — Les observations du Soleil à son passage au méridien pouvant manquer très souvent en mer, et la détermination de la latitude au moyen d'une seule observation de hauteur à un autre moment supposant l'heure très exactement comme, on a cherché à se procurer la latitude par les observations de deux hauteurs d'un même astre et de l'intervalle de temps écoulé entre ces deux observations ou par celles de hauteurs de deux astres différents, ce qui revient d'ailleurs au même. Cette question très simple en théorie, se complique beaucoup dans l'application, et a donné lieu à une multitude de solutions qu'il serait impossible d'exposer dans ce Cours ; nous nous bornerons à indiquer le principe général, en renvoyant, pour les développements aux Traités spéciaux de navigation. (1)

Supposons, par exemple, que l'on ait le Soleil en S et en S', et soient z et z'

(1) Analytiquement, il suffit encore de s'en référer à la formule fondamentale ; mais le principe que nous indiquons en est celui sur lequel sont fondées les solutions les plus simples.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



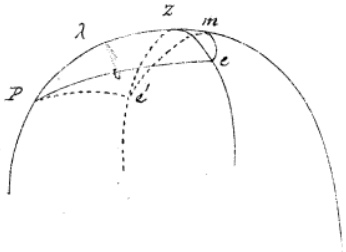
les distances zénithales corrigées, $z S$ et $z S'$; on a noté de plus l'intervalle de temps écoulé entre ces deux observations qui mesure très exactement l'angle $S P S'$, pourvu que l'on connaisse seulement la marche du chronomètre; les distances polaires $\delta = PS$ et $\delta' = PS'$ sont d'ailleurs connues aussi avec une exactitude suffisante, et par conséquent on pourra calculer dans le triangle PSS' le côté SS' et l'angle PSS'; SS' étant connu, ainsi que zS et zS', on calculera de même dans le triangle zSS' l'angle en S, et l'on aura l'angle PSz du triangle de même désignation par la différence des deux angles zSS' et PSS'; enfin dans le triangle PzS, où l'on connaît deux côtés et l'angle compris, on calculera le 3e côté ou la colatitude cherchée. Il est évident d'ailleurs que les mêmes observations permettent de conclure l'heure de l'une d'elles. Cette méthode ne doit être employée que dans les circonstances que nous avons indiquées; il est toujours préférable, quand on le peut, de déterminer séparément l'heure et la latitude par des observations spéciales.

Observations dans le premier vertical. — Cette méthode imaginée d'abord par Rœmer et reproduite par Bessel, qui en a fait connaître tous les avantages rend la détermination de la latitude indépendante de la réfraction et des erreurs de lecture et de division. Elle consiste à installer une lunette dans le premier vertical et à noter les heures h et h' marquées par un chronomètre dont la marche est connue, aux instants des passages d'une même étoile de l'Est à l'ouest.

Si cette étoile passe près du zénith, il est facile de voir en outre qu'une petite erreur sur l'observation de l'heure a peu d'influence sur la détermination de la latitude.

Dans le triangle Pze rectangle en z, on a

$$tg\,\delta \cos H = tg\,\lambda;$$



mais

$$H = 15\,\frac{h'-h}{2},$$

et δ est connu; on tirera donc de là λ, et si l'étoile passe près du zénith, δ différant peu de λ, on développera la différence $\lambda - \delta$ par la formule connue

$$\lambda - \delta = -\,tg^2\tfrac{1}{2} H \sin 2\delta + \tfrac{1}{2}\,tg^4\tfrac{1}{2} H \sin 4\delta + \ldots\ldots$$

et l'on voit que plus H sera petit, plus la valeur de λ s'obtiendra facilement et exactement.

On doit remarquer que la différence très petite $\delta - \lambda$ est obtenue par l'observation d'une quantité proportionnelle à l'arc $e m e'$, et par conséquent beaucoup plus grande qu'elle, à peu près dans la proportion d'un arc au sinus verse de la moitié de cet arc.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les observations dans le premier vertical sont généralement entachées d'erreurs du même genre que celles que nous avons énumérées à propos des observations faites à la lunette méridienne, mais on a des moyens analogues de les corriger; les instruments méridiens portatifs munis d'un cercle azimutal se prêtent très simplement à ce genre d'observations.

Cette méthode conduit à des résultats d'une grande précision, et peut, par conséquent, être employée avantageusement en Géodésie.

Observations azimutales. — Afin d'éviter les erreurs produites par la gravité dans les observations de distances zénithales, on a d'abord cherché, comme dans la méthode précédente, à supprimer tout à fait les cercles divisés, mais l'installation d'une lunette dans le premier vertical est une opération longue et délicate,

, et l'observation exige le plus souvent l'emploi d'un chronomètre; depuis, on a essayé de substituer simplement des cercles azimutaux aux cercles verticaux; et si, de cette manière, on n'est pas à l'abri des erreurs de lecture et de division, on peut du moins s'affranchir des erreurs de réfraction et des principales erreurs produites par la pesanteur. Voici le principe de cette nouvelle méthode.

Si l'on observe l'angle azimutal compris entre les deux digressions d'une étoile circompolaire, en désignant par $2A$ cet angle, par δ la distance polaire de l'étoile, et par λ la colatitude cherchée, on trouvera cette dernière quantité simplement par la relation

$$\sin \lambda = \frac{\sin \delta}{\sin A},$$

formule évidemment indépendante de l'heure et de la réfraction.

Enfin, au lieu d'attendre que l'étoile ait passé d'un côté à l'autre du méridien, ce qui est très long, et peut faire manquer l'observation. M. Babinet a proposé d'employer les azimuts de deux étoiles qui se trouveraient à très peu près en même temps à leurs digressions, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

En désignant alors par A et A' les deux azimuts, on pourra observer $A + A'$, mais on a, comme précédemment

$$\sin \delta = \sin \lambda \sin A, \qquad \sin \delta' = \sin \lambda \sin A';$$

et par suite

$$\frac{\sin A}{\sin A'} = \frac{\sin \delta}{\sin \delta'};$$

d'où

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - A') = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta - \delta')}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta + \delta')} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + A').$$

On tire de là $A - A'$, et par suite A, A', et enfin λ.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En général, la principale difficulté dans les observations qui ont pour but la détermination exacte de la latitude tient à ce que l'on parvient difficilement à rattacher les observations à la direction de la verticale ; de là les tentatives faites dans ces derniers temps pour observer au moyen d'une lunette dont l'axe optique serait dirigé très près du zénith ou du nadir, et dont l'inclinaison, par rapport à la verticale accusée par la réflexion du fil à la surface d'un liquide, pourrait être mesurée avec une extrême précision par des procédés micrométriques. Tel est le principe de la lunette zénithale et nadirale que l'on cherche à substituer aux secteurs zénithaux employés autrefois pour les observations délicates de latitudes.

Méthodes diverses. — Il existe encore bien d'autres méthodes pour trouver la latitude : les unes qui consistent à observer des circompolaires, et la polaire de préférence à sa digression, ou même en un point quelconque de son parallèle diurne et qui donnent des résultats exacts parce qu'il reste seulement à calculer des termes de réduction ; les autres, qui conduisent seulement à des valeurs approchées de la latitude, tels que l'observation de trois étoiles comme à la même hauteur, ou celle de quatre étoiles situées deux à deux dans le même vertical, &ª

Direction du méridien. — Observations d'azimuts. — Les observations astronomiques qui ont pour objet la recherche de la direction du méridien étant tout à fait analogues à celles qui servent à déterminer l'heure et la latitude, nous traiterons cette question avant de nous occuper du problème plus difficile des longitudes. Entre autres circonstances qui doivent guider dans le choix du procédé à suivre, on distinguera le cas où l'on connaît, à la fois, l'heure et la latitude du lieu de l'observation ; celui où l'on connaît seulement l'un de ces éléments ; et enfin celui où l'on ne connaît ni l'un ni l'autre.

1er Cas — Si l'on connaît à la fois l'heure et la latitude, on pourra, pour un instant quelconque, calculer l'azimut d'un astre dont l'ascension droite et la déclinaison se trouvent dans les Éphémérides, de sorte que si, à un instant noté exactement, on a observé l'astre au moyen d'un théodolite, par exemple, en mesurant ensuite la différence d'azimut de la direction qu'avait la lunette au moment de l'observation avec celle d'un signal terrestre quelconque, l'azimut de ce signal s'obtiendra lui-même par une addition ou une soustraction.

2e Cas. — Si l'on connaît seulement l'heure, on saura à quel instant marqué par le chronomètre la polaire ou une autre étoile voisine du pôle passe au méridien, et comme le mouvement de ces étoiles est très lent, on pourra saisir leur passage au méridien et fixer dans cette direction par exemple la lunette d'un instrument méridien que l'on peut installer ainsi assez exactement en peu de temps.

Si c'est la colatitude qui est connue, l'observation de la hauteur d'un astre dont la déclinaison est donnée dans les éphémérides permettra de calculer son azimut ;

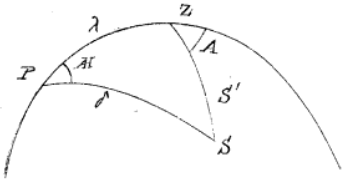
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'où l'on passera à celle d'un signal terrestre par la mesure de la différence d'azimut de l'astre et du signal. On pourrait faire une observation et un calcul analogues, l'heure étant connue et non la latitude.

3e Cas. — Enfin si l'on ne connaît ni l'heure ni la latitude et que l'on n'ait même pas de chronomètre à sa disposition, on cherchera la direction du méridien par la méthode de hauteurs correspondantes qui s'applique de la même manière que lorsqu'il s'agit de trouver l'heure, mais seulement avec un instrument muni d'un cercle azimutal.

Telle est la marche dans les différents cas. Voyons actuellement quels sont les principaux détails des observations.

Observation d'azimut par le Soleil. — Nous supposerons exactement connues la latitude et l'heure, c'est-à-dire la marche du chronomètre; d'où l'on conclura l'heure solaire vraie ou l'angle horaire du centre du Soleil.



Or, si nous considérons le triangle Z P S, δ, (1) λ et H seront connues, et l'on n'aura par les analogies de Néper.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A'+S) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}H\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta-\lambda)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\lambda)},$$

et

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A'-S) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}H\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\lambda)}{\sin\frac{1}{2}(\delta+\lambda)};$$

d'où l'on tirera $\tfrac{1}{2}(A'+S)$ et $(A'-S)$

dont la somme donnera l'angle A', supplément de l'azimut A, dans le cas représenté par la figure.

En prenant donc au moyen du théodolite, l'angle du Soleil au signal, à un instant quelconque, et calculant l'azimut du Soleil pour cet instant, l'azimut du Soleil s'obtiendrait, comme nous l'avons dit, par une addition ou une soustraction, suivant la position relative du Soleil et du signal par rapport au méridien; et l'on peut remarquer que, dans ce cas, il n'y a à faire de correction ni de la réfraction ni de la parallaxe.

Mais pour obtenir un résultat plus exact, on fait avec le théodolite une série de répétitions en notant à chaque fois le contact du bord du Soleil avec le fil vertical, ce contact étant obtenu alternativement pour le bord oriental et pour le bord occidental, de sorte que la moyenne d'un nombre pair d'observations donne l'angle du centre du Soleil avec le signal. On groupe les observations par quatre et l'on admet que, pendant le

---

(1) La longitude du lieu est également supposée connue, au moins approximativement, ce qui permet d'avoir δ pour l'instant de l'observation d'après les Éphémérides du Soleil.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

temps où elle doit être faite (de 6 à 8 minutes), les angles azimutaux varient proportionnellement aux temps. La comparaison des différents résultats fait juger du degré de confiance qu'ils peuvent inspirer, et l'on prend la moyenne de ceux qui s'accordent le mieux.

Pour que l'angle au signal ne varie pas trop rapidement pendant que l'on répète les observations, on a soin d'observer le Soleil à une faible distance au dessus de l'horizon, c'est-à-dire peu de temps après son lever ou peu avant son coucher.

En employant un grand nombre d'observations faites plusieurs jours de suite, on parvient à déterminer ainsi l'azimut d'un signal avec beaucoup d'exactitude.

Lorsqu'on employait le cercle répétiteur, qui donnait la distance angulaire de l'astre et du signal, au lieu de leur différence d'azimut, il fallait, ou bien qu'un second observateur prît en même temps les hauteurs successives du Soleil, ou bien calculer, au moyen des quantités connues, la distance zénithale vraie du Soleil z par la formule

$$\sin z = \frac{\sin H \sin \delta}{\sin A},$$

puis la distance zénithale apparente

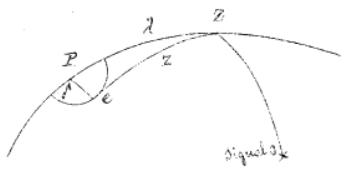
$$z' = z - \theta + p,$$

et enfin observer la distance zénithale du signal, pour faire la réduction à l'horizon de l'angle observé du Soleil au signal.

Par une étoile. — Au lieu du Soleil on peut prendre une étoile peu élevée au-dessus de l'horizon et opérer de la même manière; mais l'observation en est assez difficile à cause des vapeurs atmosphériques, et d'ailleurs il faut prendre les angles sur un réverbère.

Par la polaire à sa digression. — Voici un des moyens les plus exacts, et celui que l'on emploie le plus fréquemment en Géodésie pour observer l'azimut d'un signal, il suppose seulement la latitude connue avec une grande précision et l'heure approximativement.

La marche de l'étoile polaire étant très lente, il est facile de trouver l'époque où elle atteint sa plus grande élévation à l'Est et à l'Ouest; en effet, l'angle PZe est un maximum, et le triangle PZe est rectangle en e; on aura donc les relations



$$\text{tg } \delta = \text{tg } \lambda \cos H \quad \text{pour déterminer} \quad H$$

$$\cos \lambda = \cos \delta \cos z \quad \text{"} \quad z$$

$$\text{et} \quad \sin \delta = \sin A \sin \lambda \quad \text{"} \quad A$$

Connaissant H, on saura à quelle heure on doit observer, $z - \theta = z'$ sera la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

distance zénithale apparente ; enfin, on aura l'azimut A de l'étoile.

A l'époque de la digression, le changement de hauteur de l'astre est le plus rapide, mais la variation de l'azimut est nulle, et elle reste insensible pendant quelque temps ; on peut donc mesurer avec soin l'angle eZO compris entre le vertical de la polaire et celui de l'objet, et même de répéter cette observation un assez grand nombre de fois.

Nous avons supposé qu'on opérait avec le théodolite, de sorte que l'angle A ou son supplément étant calculé, on a immédiatement l'azimut du signal par une addition ou une soustraction.

Lorsqu'on emploie le cercle répétiteur, la distance zénithale Z' trouvée ci-dessus est nécessaire aussi que celle ZO de l'objet à réduire à l'horizon l'angle eO observé dans le plan des objets. (1)

Quant à l'heure calculée, elle ne sert qu'à connaître le moment convenable de l'observation, et il est évident qu'il n'est pas nécessaire d'avoir cette heure avec la dernière précision.

2° *La hauteur mesurée d'un astre.* — La latitude étant toujours supposée connue exactement et non l'heure, on obtient rapidement, et avec une exactitude suffisante dans un grand nombre de circonstances, la direction du méridien ou l'azimut d'une direction par l'observation de la hauteur d'un astre ; dans le triangle formé par le pôle, le zénith et l'astre, on connaît

$$\delta, \lambda \quad \text{et} \quad z = z' + \theta - p,$$

z' étant la distance zénithale apparente observée, θ la réfraction et p la parallaxe (on observe ordinairement le Soleil), l'azimut de l'astre se calculera par la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(S-z)\sin(S-\lambda)}{\sin z \sin \lambda}}$$

On ne doit pas craindre de se tromper sur la valeur de l'angle donnée par les lignes trigonométriques ; la plus simple réflexion fera toujours reconnaître si l'azimut observé est $< $ ou $> 90°$, si l'astre est à l'Ouest et s'il est $<$ ou $> 270°$ s'il est à l'Est : On sait par une remarque antérieure que l'astre doit être observé à une faible hauteur au dessus de l'horizon. L'instrument que l'on emploie doit être muni d'un limbe vertical et d'un limbe azimutal. Lorsqu'on observe le Soleil, les observations sont

---

(1) Indépendamment de l'inconvénient que présente l'emploi du cercle répétiteur d'exiger un calcul de réduction, il faut encore remarquer que pendant la durée des observations, on est sans cesse obligé de faire varier la position du limbe pour le maintenir dans le plan des deux objets dont l'un, l'astre, se déplace peu à peu. Sous tous les rapports, l'emploi du théodolite est donc préférable dans ce cas.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

groupées de quatre en quatre ; la première et la dernière sont des hauteurs de l'astre dans lesquelles le bord inférieur et le bord supérieur ont été amenés chacun en contact avec le fil horizontal de la lunette ; la 2e et la 3e sont des angles pris entre le signal et le Soleil, en amenant tantôt le bord oriental, tantôt le bord occidental en contact avec le fil horizontal.

Lorsqu'on n'emploie qu'une série, on fait, en dernier lieu, une troisième observation de hauteur et comme on a noté l'heure de chacune des observations, on en conclut, en admettant que les hauteurs croissent proportionnellement aux temps, la hauteur du Soleil aux instants qui correspondent aux mesures angulaires, prises entre le signal et l'astre. On conçoit sans peine ce qui reste à faire.

Ce moyen s'applique parfaitement à la détermination de la déclinaison de l'aiguille aimantée, à terre avec toute l'exactitude dont on a besoin pour les opérations topographiques, et en mer où l'on se contente même ordinairement d'observations moins précises qui consistent à diriger l'alidade fixée au côté de la boîte de compas de variation (1) sur le Soleil au moment de son lever ou de son coucher, l'azimut de l'astre ou de l'angle que son vertical fait alors avec le méridien désigné sous le nom d'amplitude ortive ou occase étant donné par des Tables pour chaque jour de l'année et pour les diverses latitudes.

Direction du méridien par la polaire. — Pour installer une lunette dans le plan du méridien lorsqu'on connaît l'heure à quelques secondes et même à une demi minute près, il n'y a rien à ajouter à ce qui a été dit précédemment. Nous avons également indiqué ailleurs (2e Partie, Chapitre III) comment on pourrait tracer une méridienne immédiatement par la polaire, et ce moyen est celui que l'on doit employer de préférence lorsqu'on en dispose d'instruments.

Direction du méridien par les hauteurs correspondantes du Soleil. — On peut enfin trouver la direction du méridien par la méthode des hauteurs correspondantes, soit au moyen du théodolite, soit par l'observation des ombres d'un style. Dans ce dernier cas, et toutes les fois que l'observation en est faite sur le Soleil, il y a lieu d'appliquer une correction qui est encore une équation des hauteurs correspondantes, et qui est due à la variation de la déclinaison du Soleil dans l'intervalle des observations.

On trouvera l'expression de cette correction en différentiant, par rapport à A et à δ, la formule

$$\cos\delta = \cos z \cos\lambda - \sin\lambda \sin z \cos A ;$$

on aura ainsi

$$dA = -\frac{\sin\delta\, d\delta}{\sin\lambda \sin z \sin A} = \frac{-d\delta}{\sin\lambda \sin H},$$

(1) C'est le nom que l'on donne à la boussole destinée à ces observations.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

A pouvant être pris égal à $15\left(\frac{h+h'}{2}\right)$, h et h' étant les heures des observations notées à une montre ordinaire.

dA est positif ou négatif, selon l'époque de l'année. La dernière méthode que nous venons d'indiquer sont rarement employées en Géodésie ; mais elle sont au contraire d'une fréquent usage en topographie, où l'on n'a pas besoin d'une extrême précision.

Problème des longitudes. — Ce problème consiste à déterminer d'abord l'heure du lieu où l'on se trouve par l'une des méthodes indiquées précédemment, et ensuite celle du lieu par lequel passe le premier méridien, dont la différence avec l'autre est précisément la mesure de la longitude en temps, quantité que l'on peut traduire en arc en la multipliant par 15.

L'intérêt qu'offre cette question en Géodésie, en Géographie et dans la navigation a fait imaginer un grand nombre de solutions dont nous nous bornerons à indiquer les principes, en renvoyant aux traités spéciaux pour le détail des opérations et des calculs.

Énumérons d'abord les différentes méthodes, en commençant par la plus simple à appliquer.

Transports de chronomètres — Observations des phénomènes célestes instantanés : comme les éclipses de Lune ou celles des Satellites de Jupiter — Mesure des distances de la Lune au Soleil et aux étoiles. — Éclipses de Soleil et occultations d'étoiles — Observations des passages de la Lune aux méridiens de deux Stations dont on cherche la différence de longitudes — Culminations de la Lune et d'une étoile voisine observées aux deux Stations — Signaux de feu et Signaux électro-magnétiques — Météores — Triangulation.

Transports de chronomètres — Ce moyen est celui que l'on emploie le plus fréquemment.

La perfection avec laquelle on est parvenu à construire les chronomètres permet de comparer immédiatement l'heure observée du lieu où l'on se trouve avec celle de l'observatoire où ont été réglés les chronomètres.

Toutefois, la régularité de la marche de ces instruments n'est pas assez certaine, après un temps plus ou moins considérable, pour qu'on puisse se dispenser de moyens de contrôle, et bien qu'il y ait plusieurs chronomètres à bord des bâtiments de l'État ou de tout bâtiment qui entreprend une longue navigation, on n'en fait pas moins aussi fréquemment que possible des vérifications soit aux relâches, soit même en mer par des observations astronomiques.

Les Gouvernements, et quelquefois des particuliers, ont fait faire de véritables expéditions chronométriques, dans le but de déterminer les différences de longitude de deux stations importantes, comme les Observatoires du 1er ordre. De semblables expéditions

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ont été faites d'Angleterre en Irlande, en France et en Belgique ; de Danemark en Russie, &c. Ainsi, en 1838, M. Dent, célèbre horloger anglais, a transporté 12 de ses chronomètres de l'Observatoire de Greenwich à celui de Paris, et par leur comparaison avec les horloges sidérales des deux observatoires, il en a conclu leur différence de longitude. Malgré le nombre et la qualité de ces instruments, le résultat auquel il est arrivé diffère notablement de celui que l'on a obtenu depuis par la télégraphie électrique et dont il sera question un peu plus loin.

Éclipses de Lune et des satellites de Jupiter. — Ces phénomènes étant instantanés et visibles à la fois de tout un hémisphère, seraient très précieux s'ils pouvaient être observés avec exactitude ; mais les premiers sont rares, et l'on sait que l'instant précis du commencement ou de la fin de l'éclipse est difficile à observer. Les seconds sont au contraire très fréquents et peuvent être utiles lorsqu'on observe à terre, bien qu'il subsiste toujours d'assez fortes incertitudes sur le résultat. Cependant lorsque plusieurs personnes exercées concourent à l'observation, la moyenne peut être assez exacte. Le calcul en est d'ailleurs on ne peut plus simple ; il suffit de prendre dans la Connaissance des Temps l'heure de l'éclipse, et comme on connaît déjà approximativement la longitude de la station, ou de tient-pris pour l'observation, et avec un chronomètre dont l'état est déterminé pour cette station, on note l'instant où l'on croit l'éclipse se produire. Une simple soustraction donne la différence des longitudes en temps, et en la multipliant par 15, on l'exprime en degrés. En comparant plus tard cette observation avec celle qui a pu être faite à la même date dans un observatoire, on rectifie l'erreur qui subsiste dans les tables. Ces observations sont à peu près impossibles en mer à cause du mouvement du navire qui ne permet pas d'employer des lunettes assez fortes.

Distances lunaires. — Depuis les perfectionnements apportés à la théorie de la Lune (c'est-à-dire depuis 70 ou 80 ans), la meilleure solution du problème des longitudes dans les voyages, et surtout en mer, est celle que l'on obtient par la méthode des distances lunaires. (1)

Cette méthode est fondée sur la rapidité avec laquelle la Lune se déplace dans le Ciel. On sait en effet que son mouvement par rapport au Soleil dans le sens opposé au mouvement diurne est de 12° environ par jour, ce qui fait 1° d'arc en 2h de temps.

Les distances de la Lune au Soleil ou à une étoile ayant été calculées à la-

---

(1) Cette méthode a été indiquée en première lieu par Morin, l'un des astronomes qui ont appliqué la lunette aux instruments divisés ; elle a été recommandée depuis par Euler et par Tobie Mayer, qui a contribué plus que personne à la rendre applicable en calculant les premières Tables un peu exactes de la Lune et en imaginant le cercle à réflexion perfectionné comme nous l'avons vu, par Borda, qui a en outre simplifié la solution trigonométrique du problème.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

- vance pour des heures rapprochées et relatives au lieu par lequel passe le premier méridien, l'observation de ces distances dans une station quelconque et pour une heure exactement déterminée fera connaître la différence des longitudes par une simple interpolation ; mais l'observation en question étant faite à la surface de la Terre, il faut auparavant la réduire au centre auquel se rapportent également les distances calculées et annoncées dans les éphémérides astronomiques.

Supposons d'abord que trois observations déterminent à la fois le premier, la distance des bords de la Lune et du Soleil, et les deux autres, chacun la hauteur apparente de l'un des astres. Ces observations devront être corrigées avant tout des demi-diamètres apparents.

Appelons D la distance apparente corrigée des deux demi-diamètres ;
H et H' les hauteurs apparentes ; on aura

$$\cos D = \sin H \sin H' + \cos H \cos H' \cos Z,$$

en désignant par Z l'angle dièdre des plans verticaux qui contiennent les deux astres.

Soient actuellement d, h et h' la distance et les hauteurs vraies

$$h = H - \theta + p, \qquad h' = H - \theta' + p'$$

et
$$\cos d = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos Z ;$$

mais d'après la première équation

$$\cos Z = \frac{\cos D - \sin H \sin H'}{\cos H \cos H'}$$

donc en définitive $\cos d = \sin h \sin h' + \frac{\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'} (\cos D - \sin H \sin H')$

on aura ainsi la distance vraie ; mais cette formule se prêtant difficilement au calcul par logarithmes, on a dû la transformer, et nous donnons en note la formule simplifiée à laquelle est arrivé Borda [1]. On trouvera dans les Traités de navigation d'autres formules

---

(1) Formule de Borda. — En partant de la relation

$$\cos Z = \frac{\cos D - \sin H \sin H}{\cos H \cos H'} = \frac{\cos d - \sin h \sin h'}{\cos h \cos h'},$$

dans laquelle on remplace $\sin H \sin H'$ et $\sin h \sin h'$ par les expressions équivalentes $\cos H \cos H' - \cos (H + H')$ et $\cos h \cos h' - \sin (h + h')$, on trouve

$$\frac{\cos D + \cos (H + H')}{\cos H \cos H'} = \frac{\cos d + \cos (h + h')}{\cos h \cos h'}$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et en particulier celle de Mendoza, qui exige l'emploi de tables spéciales. Le type du calcul des distances lunaires par la formule de Borda se trouve dans les Tables de Callet.

Les distances vraies de la Lune au Soleil, aux planètes et aux principales étoiles du zodiaque, telles que les verrait du centre de la Terre un observateur qui s'y trouverait transporté de Paris avec son méridien et son horizon sont données de 3 heures en 3 heures, temps moyen de Paris, dans la Connaissance des Temps. Aux environs de la nouvelle Lune on reste quelquefois jours sans pouvoir faire ces observations. (1)

---

en développant les numérateurs de deux manières différentes, il vient

$$\frac{\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'} \cos\tfrac{1}{2}(H+H+D) \cos\tfrac{1}{2}(H+H'-D) = -\sin^2\tfrac{1}{2} d + \cos^2\tfrac{1}{2}(h+h')$$

et en posant $D + H + H' = 2S$ et simplifiant

$$\sin^2\tfrac{1}{2} d = \cos^2\left(\frac{h+h'}{2}\right)\left(1 - \frac{\cos S \cos(S-D) \cos h \cos h'}{\cos^2 \frac{h+h'}{2} \cos H \cos H'}\right)$$

Enfin si l'on pose encore

$$\sin\varphi = \sin\frac{h+h'}{2}\left(\frac{\cos S \cos(S-D) \cos h \cos h'}{\cos H \cos H'}\right)^{\frac{1}{2}}$$

il viendra

$$\sin\tfrac{1}{2} d = \cos\frac{h+h'}{2} \cos\varphi$$

Cette formule a l'avantage de conserver la même forme dans tous les cas, que l'on emploie la distance de la Lune au Soleil ou aux étoiles (non exigée).

---

(1) Exemple. — La nouvelle Lune ayant eu lieu le 11 juin 1858, du 9 au 12 de ce mois, on n'a pas pu observer de distances lunaires.

Pour le 13 juin, on trouve dans la Connaissance des Temps, pour les distances de la Lune au Soleil.

Temps moyen de Paris.	Distances	1ères Différences
0^h	27° 4' 57"	
		1° 43' 23"
3^h	28 48 20	
		1 43 17
6^h	30 31 37	
		1 43 9
9^h	32 14 46	

Supposons qu'en un lieu de la Terre dont on veut connaître la longitude

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Au lieu de trois observateurs, un seul suffit à la rigueur pour déterminer une distance lunaire ; pour cela, il mesure d'abord la hauteur de l'astre, puis la distance apparente ; enfin, il mesure de nouveau la hauteur et il réduit par le calcul la hauteur à la même heure à laquelle il a mesuré la distance apparente.

Le calcul en d'autant plus exact que les astres sont moins rapprochés du méridien, parce que, dans un court espace de temps, les hauteurs varient alors proportionnellement aux temps.

Il y aurait certainement avantage à opérer de cette manière si l'on était placé dans des conditions convenables ; mais où on en est le plus souvent très gêné, plusieurs observateurs concourent à ces déterminations.

Occultations d'étoiles — Eclipses de Soleil. — Les occultations d'étoiles par la Lune sont des cas particuliers de distances lunaires qui donnent des résultats plus précis, particulièrement lorsqu'on peut réunir les observations de plusieurs personnes pour en prendre la moyenne. Nous n'entrerons dans aucun détail sur ce sujet non plus que sur le calcul des éclipses de Soleil, qui ne présentent d'ailleurs pas d'autre difficulté que leur longueur.

Observations des passages de la Lune aux méridiens de deux stations — Le principe de cette méthode est très simple ; on suppose que le même jour on ait observé la

---

comptée à partir du méridien de Paris, on ait trouvé, tout calcul fait, pour la distance de la Lune au Soleil, le 13 Juin 1858 :

à $8^h\ 33^m\ 17^s$ t. m . . . . . : $29°\ 13'\ 46''$

en retranchant de cette distance celle de . . . . . $28°\ 48'\ 20''$

que l'on devrait observer à 3 heures à Paris, on trouve . . . . . $25'\ 26''$

pour différence. Or, pour 3 heures, la différence était alors de $1°\ 43'\ 17''$ en ne considérant que les premières différences, on aura donc la proportion

$$1°\ 43'\ 17'' : 3^h :: 25'\ 26'' : x\ ;\ \text{d'où}\ x = \frac{4578}{6197} = 0^h\ 44^m\ 19^s,5$$

à ajouter à 3 heures ; ainsi l'heure de Paris était . . . . . $3^h\ 44^m\ 19^s,5$
mais celle du lieu était . . . . . $8^h\ 33^m\ 17^s$

la différence . . . . . $4^h\ 48^m\ 57^s,5$
en la longitude orientale de l'observation exprimée en temps ; en degrés, cette longitude serait de $72°\ 14'\ 22'',5$ E. En mer, les longitudes s'obtiennent par cette méthode, à 5 ou 6 milles ou à 2 heures marines près environ.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

passage de la Lune aux méridien de deux Station éloignée ; s'il s'agissait d'une étoile, les heures sidérales de passage seraient ou devraient être exactement les même ; mais dans l'intervalle de temps écoulé entre le passage de la Lune au méridien de la station orientale et son passage de la station occidentale, l'ascension droite de cet astre a varié d'une quantité qui est la différence entre les heures sidérales observée dans les deux Station, et qui permet de calculer, d'après le mouvement de la Lune, indiqué dans les Tables, la différence des longitudes. (1)

Comme on n'observe que le bord éclairé de la Lune, il y a à faire la correction du demi-diamètre.

Culmination de la Lune et d'une étoile voisine aux deux Stations. — Afin de s'affranchir des erreurs sur la détermination de l'heure et de celles qui proviendraient de ce que la lunette peut ne pas se trouver exactement dans le plan du méridien, on observe un peu avant et un peu après le passage de la Lune, les passages d'étoiles voisines dites de culmination lunaire, de telle sorte que les erreurs disparaissent dans les différences qui servent au calcul de la longitude d'une Station comptée à partir du méridien de l'autre.

Dans le cas où l'on ne trouverait pas d'observations faites le même jour dans les deux Stations, on pourrait même se servir d'observations dont les dates diffé-reraient de quelques jours ; enfin, on supplée à la rigueur au défaut d'observations faites dans une seconde Station en prenant dans les Éphémérides les différences des ascensions droites de la Lune et des étoiles observées (2) ; mais alors les erreurs des Tables de la Lune pèsent tout entières sur le résultat.

La méthode des culminations lunaires est la plus exacte de toutes celles que l'on peut employer pour déterminer les différences de longitude de deux lieux éloignés séparés par l'Océan ou par des obstacles infranchissables. Elle est applicable partout où l'on peut installer des instruments méridiens transportables ; et elle a déjà contribué au perfectionnement de la Géographie et de l'Hydrographie en permet-tant de fixer, avec beaucoup plus de précision qu'on ne l'avait fait jusque là, les positions de plusieurs lieux remarquables, particulièrement sur les côtes des

---

(1) On connaît toujours approximativement la différence des longitudes, et l'on n'a qu'à chercher la correction que l'on obtient par une simple proportion.

(2). Le Nautical Almanac contient les coordonnées d'un grand nombre d'étoiles de culmination lunaire ; d'un autre côté, à l'Observatoire de Greenwich, on a soin de ne laisser échapper aucune occasion d'observer la Lune et les étoiles voisines. Ces observations, publiées peu de temps après, peuvent être consultées par les Marins et les voyageurs à leur retour.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

continents où les marins qui entreprennent des expéditions lointaines viennent chercher des ports de relâche, et où ils peuvent procéder à la vérification de la marche de leurs chronomètres.

Signaux de feu. (1) — Nous ne les indiquons que pour mémoire, l'établissement des télégraphes électriques rendent désormais leur emploi inutile. La détermination des différences de longitude par ce moyen consistant à noter l'instant de l'apparition de la lumière produite par un feu de poudre à deux stations situées de part et d'autre, et où l'heure avait été déterminée auparavant avec soin.

La différence des heures notées dans les deux stations était précisément la différence de leurs longitudes. Une semblable observation ne pouvait pas dépasser une certaine limite de distance, lorsqu'il s'agissait de déterminer la différence de longitude de deux lieux éloignés, on était obligé de fractionner la distance et l'opération, et, par conséquent, de multiplier les observations et les instruments. De là plusieurs causes d'erreurs qui n'existent pas dans le procédé suivant :

Signaux électro-magnétiques — Ces signaux se transmettent avec une rapidité si grande qu'on peut les considérer comme instantanés entre deux stations même très éloignées. On élimine simplement les erreurs personnelles en faisant permuter les observateurs.

Plusieurs Observatoires ont été reliés astronomiquement par ce moyen. Pour ceux de Paris et de Greenwich, les opérations ont été faites en Mai et en Juin 1854, et l'on a trouvé que la différence de longitude de ces deux établissements était de $9^m 20^s 63$ par la moyenne de deux séries de plusieurs centaines de signaux. (2)

Perturbation subite de l'aiguille aimantée. — On a encore proposé de se servir des perturbations subites de l'aiguille aimantée qui se produisent simultanément dans tous les points du globe ; ce procédé suppose que l'on ait plusieurs séries d'observations assez rapprochées les unes des autres pour que l'on soit sûr de l'identité du phénomène dans les deux stations. Cette condition étant remplie, on obtiendrait certainement ainsi d'excellents résultats.

Etoiles filantes. — Ces phénomènes, dont l'origine est encore peu connue

---

(1) Ils ont été employés entre Paris et Greenwich, sur le parallèle de Strasbourg et sur le parallèle moyen.

(2). Voir pour le détail de ces opérations, une note de M. Le Verrier, insérée dans les Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences, année 1854. Les Observateurs étaient M. Faye, pour l'Observatoire de Paris et M. Dunkin pour celui de Greenwich.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sont presque instantanée, et par conséquent propre à la détermination de longitudes de deux lieux d'où on peut les observer à la fois. On a reconnu que les étoiles filantes étaient très nombreuses à certaines époques de l'année, par exemple vers le 10 Août et le 12 Novembre; et l'on a utilisé cette remarque pour répéter le même genre d'observation plusieurs fois pendant une même soirée, dans les deux stations.

Cette idée, due à Maskelyne (qui ignorait cependant la périodicité du phénomène), a été réalisée à peu près vers la même époque, en Irlande, en Allemagne et en Italie. Dans ce dernier pays, les nombres obtenus pour la différence de longitude de Rome et de Naples, par plusieurs observations, s'accordent jusque dans le dixième de seconde, et semblent indiquer que les erreurs qui se produisent dans les autres méthodes n'existent pas, ou sont moins à craindre avec celle-ci.

Triangulation. — Cette méthode purement géométrique, a été développée précédemment. Elle est spécialement consacrée à la construction des grandes cartes topographiques.

Fin.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires